Алгоритмы. Домашнее задание №9

Горбунов Егор Алексеевич

20 ноября 2015 г.

Задача №1 (Дейкстра и отрицательные веса)

Алгоритм работает следующим образом: изначально в очереди PQ стартовая вершина s. Достаём из PQ вершину v с минимальной текущей оценкой расстояния $d[v]$. Добавляем вершину v в множество S и релаксируем по всем рёбрам (v, u), инцидентным v. Если получилось уменьшить какое-то $d[u]$, то если $u \in PQ$, то делаем $PQ.decrKey(u)$, иначе $PQ.add(u)$. Причём если u принадлежало S, то удаляем его из S. Выполняем данную процедуру пока не очередь PQ не пуста.

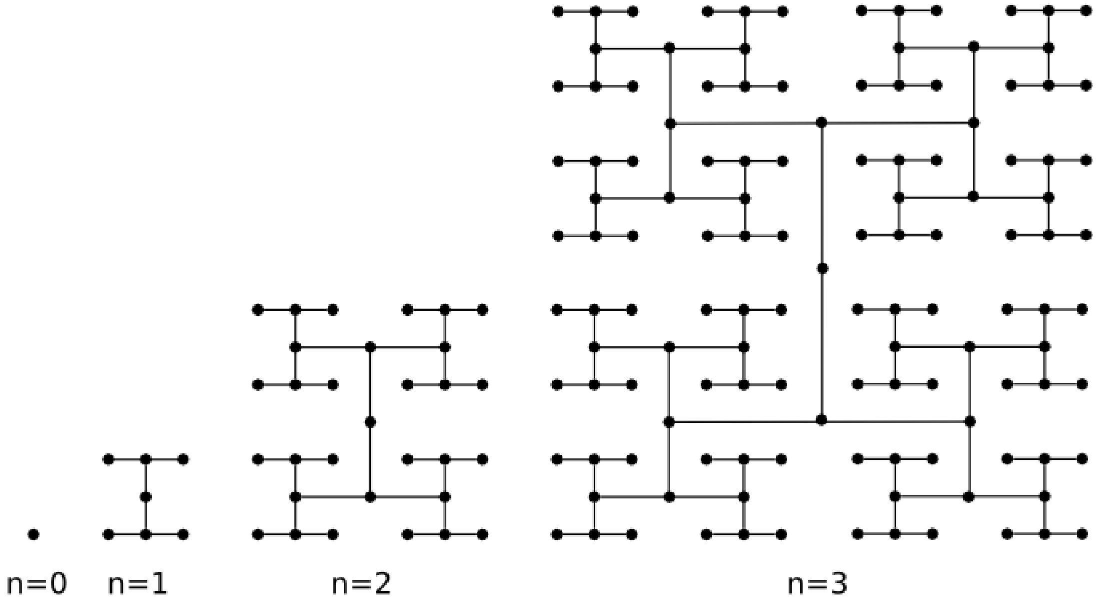
а) В силу того, что в графе нет отрицательных циклов от s до любой вершины существует кратчайший путь (пусть граф связен). Алгоритм завершает работу тогда, когда PQ пуста, а все вершины попали в множество S. Таким образом алгоритм завершается как только все вершины оказались в S. Т.к. кратчайший путь от s есть до любой вершины x и его вес конечен, конечно же, то уменьшать бесконечно $d[x]$ не выйдет и алгоритм рано или поздно закончит свою работу. И найдёт кратчайшие пути в силу того, что это модификация алгоритма Дейкстры :) ■

Задача №2 (Плохой лабиринт для BFS)

Очередь при обходе в ширину на итерации k содержит по крайней мере вершины на расстоянии k от начальной точки обхода. Попытаемся построить такой лабиринт $n \times n$, что число вершин на некотором расстоянии будет большим. На помощь призовём фрактал, изображённый на рис 1

Ясно, что из того, что изображено на рисунке лего получить лабиринт: можем ходить по чёрным линиям, а всё что белое – это стены. Посмотрим на число вершин, которые находятся на одинаковом расстоянии от центральной точки этого лабирин-

Рис. 1: К задаче 2



та. Пусть сторона лабиринта равна 1, тогда в очереди будет в один момент лишь 1 элемент. Пусть сторона лабиринта = 3 ($n = 1$ на рисунке). Теперь от центра равноудалены оконечности «буквы Н» — их 4 штуки. Аналогично для стороны лабиринта = 7, $4 * 4 = 16$ вершин попадёт в один момент в очередь обхода в ширину. Пусть есть лабиринт размера n, в котором задана такая фрактальная структура коридоров, причём размер очереди обхода в ширину достигает k (наибольшее число равноудалённых усиков букв Н :)), тогда можно построить лабиринт со стороной $2n + 1$ и получить в нём очередь, при обходе в ширину, размера $4k$! Таким образом увеличение лабиринта вдвое приводит к в 2 раза более быстрому росту размера очереди. Такой лабиринт нам и нужно было найти. ∎

Задача №3 (Система неравенст)

m неравенств, n переменных x_i, неравенства вида $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$. Найти решение за:

а) $\mathcal{O}(nm)$. Рассмотрим граф $G(V, E)$, $|V| = n + 1$. Вершина v_i соотв. x_i. И ещё есть вершина s. $\forall v_i : \ (s, v_i) \in E, w(s, v_i) = 0$, где $w(u, v)$ — вес ребра (u, v). $(v_j, v_i) \in E, w(v_j, v_i) = \delta_{ij}$, если в системе есть неравенство $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$. Запустим алгоритм Беллмана Форда, его результатом будет табличке $d[v_i]$ — кратчайшее расстояние от s до v_i. Заметим, что $d[v_i] \leq d[v_j] + \delta_{ij}$ (неравенство треугольника). А значит, что решение найдено: $x_i = d[v_i]$. Это всё верно, если алгоритм Беллмана-Форда не нашёл цикл отрицательного веса. Если же такой цикл найден: $v_1, v_2, \dots, v_1$ (нуо), то в неравенствах это запишется так: $x_2 - x_1 \leq \delta_{12}, \dots, x_1 - x_k \leq \delta_{1k}$. Просуммировав их у нас всё сократится слева и отрицательное число выйдет справа, т.е. получим неверное утверждение, что отр. число больше или равно 0, а значит система не имеет решений.

Алгоритм работает за $\mathcal{O}(nm)$

б) Если $\delta_{ij}\ geq 0$, решить за $o(nm)$. К тому же графу из п. а) применяем алгоритм Дейкстры: $\mathcal{O}(m \log n) = o(nm)$ ■

Задача №4 (Форд-Беллман с порядком на вершинах)

Обозначим множество рёбер из большей вершины в меньшую (причём упоряд. по возрастанию исходящей вершины) за D, а из меньшей в большую (упоряд. по убыванию исходящей вершины) за A.

Рассмотрим какой-то кратчайший путь p из v_1. В нём всяко не больше n вершин. Если все рёбра на этом пути принадлежат одному множеству: D или A, причём в правильно порядке обхода. То описанная в условии задачи процедура правильно прорелаксирует весь путь за 1-ую (проход по D) или 2-ую (проход по A) половину 1-го этапа. Пускай теперь на p происходит одна единственная смена направления, т.е. до какого-то момента индексы вершин на пути возрастают, а потом начинают убывать. В таком случае нам нужно выполнить один полный этап, чтобы верно прорелаксировать этот путь. Заметим так же, что первое ребро на пути всегда принадлежит множетству A. Легко видеть, что чем больше на пути смен направлений, т.е. мест v_i, v_j, v_k, где $i < j$, а $j > k$ или $i > j$, а $j < k$, тем больше нужно этапов для релаксации такого пути. Худший случай: $v_1, v_n, v_2, v_{n-2}, v_3, v_{n-3}, v_4, v_{n-4}, \dots, v_{\frac{n}{2}-1}, v_{\frac{n}{2}+1}$. Видим, что за каждый этап процедуры мы будем верно релаксировать 2 последовательных ребра этого пути: на первом этапе v_1, v_n, v_2, причём ребро v_1, v_n будет релаксировано за первую половину процедуры, а v_n, v_2 за вторую (проход по D). Таким образом видим, что в худшем случае нам нужно $\frac{n}{2}$ этапов. ■