Математическая логика. Домашнее задание №5

Горбунов Егор Алексеевич

27 марта 2016 г.

Задание №1 Между правилами вывода логики и конструкциями в лямбда исчислении существует естественная биекция. Например, $\to I$ соответствует абстракции, а $\to E$ соответствует аппликации. Запишите эту биекцию для остальных правил и конструкций.

Решение:

1° $\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \varphi}\,,\ (x : \varphi) \in \Gamma \quad \approx \quad \dfrac{}{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi_i}\,(\text{var})$

2° $\dfrac{\Gamma \vdash b : \bot}{\Gamma \vdash absurd_\varphi\, b : \varphi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot E$

3° $\dfrac{\Gamma, x : \varphi \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.\, b : \varphi \to \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \to I$

4° $\dfrac{\Gamma \vdash f : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash a : \varphi}{\Gamma \vdash f\,a : \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \to E$

5° $\dfrac{\Gamma \vdash a : \varphi \qquad \Gamma \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash (a, b) : \varphi \times \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\,\wedge I$

6° $\dfrac{\Gamma \vdash p : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash fst\, p : \varphi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\,\wedge E_1$

7° $\dfrac{\Gamma \vdash p : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash snd\, t : \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,\wedge E_2$

8° $\dfrac{\Gamma \vdash a : \varphi}{\Gamma \vdash Left\, a : \varphi \sqcup \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,\vee I_1$

9° $\dfrac{\Gamma \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash Right\, b : \varphi \sqcup \psi} \quad \approx \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,\vee I_2$

10° $\dfrac{\Gamma \vdash e : \varphi \sqcup \psi \qquad \Gamma, x : \varphi \vdash a : \chi \qquad \Gamma, y : \psi \vdash b : \chi}{\Gamma \vdash \mathbf{case}\, e\, \mathbf{of}\, \{\, Left(x) \to a; Right(y) \to b \,\} : \chi} \approx \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\,\vee E$

Задание №2 Приведите для следующих теорем деревья вывода и термы, доказывающие их:

1° $P \to P$

2° $P \to (P \to Q) \to Q$

3° $P \wedge Q \to P \vee Q$

4° $(P \vee Q) \wedge R \to (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Решение:

1° $$\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,(\text{var})}{\vdash P \to P} \to I$$

Терм: $\lambda x.x,\ x : P$

2° $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P,(P \to Q) \vdash P \to Q}\,(\text{var}) \qquad \dfrac{}{P,(P \to Q) \vdash P}\,(\text{var})}{P,(P \to Q) \vdash Q} \to E}{P \vdash (P \to Q) \to Q} \to I}{\vdash P \to (P \to Q) \to Q} \to I$$

Терм:

$$\lambda x.\lambda f.f\ x,\ x : P, f : P \to Q$$

3° $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\,(\text{var})}{P \wedge Q \vdash P} \wedge E_1}{P \wedge Q \vdash P \vee Q} \vee I_2}{\vdash P \wedge Q \to P \vee Q} \to I$$

Терм:

$$\lambda p.Left(fst\ p),\ x : (P, Q)$$

4° $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (P \vee Q) \wedge R}\,(\text{var})}{\Gamma \vdash P \vee Q} \wedge E_1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}\,(\text{var}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash (P \vee Q) \wedge R}\,(\text{var})}{\Gamma, P \vdash R} \wedge E_2}{\Gamma, P \vdash P \wedge R} \wedge I}{\Gamma, P \vdash (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)} \vee I_1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vdash Q}\,(\text{var}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vdash (P \vee Q) \wedge R}\,(\text{var})}{\Gamma, Q \vdash R} \wedge E_2}{\Gamma, Q \vdash Q \wedge R} \wedge I}{\Gamma, Q \vdash (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)} \vee I_2}{(P \vee Q) \wedge R \vdash (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)} \vee E}{(P \vee Q) \wedge R \to (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)} \to I$$

Терм:

$$\lambda t.\mathbf{case}\ fst\ t\ \mathbf{of}\{Left(p) \to Left\ (p, snd\ t); Right(q) \to Right\ (q,\ snd\ t)\}$$

Где $t : (P \vee Q) \wedge R,\ p : P,\ q : Q.$

■

Задание №3 Приведите для следующих теорем доказывающие их термы:

1° $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \to (P \vee Q) \wedge R$

2° $(P \vee Q) \vee R \to P \vee (Q \vee R)$

3° $((((P \to Q) \to P) \to P) \to Q) \to Q$

Решение:

1° $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \to (P \vee Q) \wedge R$

$$\begin{aligned}\lambda e.\textbf{case}\ e\ \textbf{of}\ \{&Left(p) \to (Left\ (fst\ p), snd\ p);\\ &Right(q) \to (Right\ (fst\ p), snd\ q)\}\end{aligned}$$

2° $(P \vee Q) \vee R \to P \vee (Q \vee R)$

$$\begin{aligned}\lambda e.\textbf{case}\ e\ \textbf{of}\ \{&Left(s) \to \textbf{case}\ s\ \textbf{of}\ \{\\ &\qquad Left(p) \to Left\ p;\\ &\qquad Right(q) \to Right\ (Left\ q)\};\\ &Right(r) \to Right\ (Right\ r)\}\end{aligned}$$

3° $((((P \to Q) \to P) \to P) \to Q) \to Q$

$$\lambda f.f\ (\lambda g.g\ (\lambda h.f\ (\lambda z.h)))$$

Типы получаются такие:

$$\begin{aligned}&f : ((((P \to Q) \to P) \to P) \to Q)\\ &g : (P \to Q) \to P\\ &h : P\\ &z : (P \to Q) \to P\end{aligned}$$

■

Задание №4 Добавим в нашей логике новую связку $\leftrightarrow$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\top \leftrightarrow \top = \top$$

$$\top \leftrightarrow \bot = \bot$$

$$\bot \leftrightarrow \top = \bot$$

$$\bot \leftrightarrow \bot = \top$$

1° Опишите правила введения и элиминации для этой связки. Они не должны использовать никакие другие связки.

2° Опишите аналогичные конструкции и правила типизации для них в лямбда исчислении.

3° Приведите терм, доказывающий формулу $(P \vee Q \to R) \leftrightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$.

Решение:

1° Введение:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma, \psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

Иллиминация:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \leftrightarrow E_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \leftrightarrow E_2$$

2° Кажется, что лямбда-аналогом может служить пара лямбда-абстракций. Введению соответствует правило типизации:

$$\frac{\Gamma, a : \varphi \vdash b : \psi \qquad \Gamma, c : \psi \vdash d : \varphi}{\Gamma \vdash (\lambda a.b, \lambda c.d) : \varphi \to \psi \times \psi \to \varphi}$$

Иллиминациям соответствуют правила типизации:

$$\frac{\Gamma \vdash p : \varphi \to \psi \times \psi \to \varphi \qquad \Gamma \vdash a : \varphi}{\Gamma \vdash (fst\ p)\ a : \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \varphi \to \psi \times \psi \to \varphi \qquad \Gamma \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash (snd\ p)\ b : \varphi}$$

3° Терм, доказывающий $(P \lor Q \to R) \leftrightarrow (P \to R) \land (Q \to R)$:

$$(\\
\lambda f.(\lambda p.f\ (Left\ p), \lambda q.f\ (Right\ q))\\
,\\
\lambda p.\lambda e.\mathbf{case}\ e\ \mathbf{of}\{Left(x) \to (fst\ p)\ x, Right(y) \to (snd\ p)\ y\}\\
)$$