Математическая логика. Домашнее задание №2

Горбунов Егор Алексеевич

9 марта 2016 г.

Задание №1 Докажите, что $\mathbb{N}$ и $\{0,1\}^*$ разрешимо равномощны, где второе множество – это множество последовательностей из 0 и 1.

Решение: Будем показывать по теореме Кантора-Берштейна:

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^* \qquad\qquad g : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \texttt{Integer.toBinaryString(n)} \quad g(bs) = 2^{length(bs)} \cdot 3^{\texttt{Integer.parseInt(bs, 2)}}$$

Тут подразумевается, что под `Inteter...` подставится результат выполнения соответствующих функций.

Ясно, что функции `fpi` и `gpi` (как в `cb.hs`) пишутся на хаскеле, первая будет возвращать `Nothing`, если строка содержит лидирующие нули (и длина более 1), а иначе будет интерпретировать строку как двочичную запись натурального числа; `gpi` же будет делить до упора на 2, чтобы получить длину, потом делить до упора на 3, чтобы получить число, которое будет переводить в двоичную систему счисления и добавлять нужное число нулей, в зависимости от длины (если на каком-то из шагов что-то не сходится, то `Nothing`).

А так же можно заметить, что:

$$\forall a \in \mathbb{N} : g(f(a)) > a$$

А значит `dfc = const False`. ■

Задание №2 Докажите, что $\{0,1\}^*$ и $\mathbb{N}_2$ разрешимо равномощны, где второе множество – это множество двоичных натуральных чисел, то есть последовательностей 0 и 1 без ведущих нулей (кроме случая, когда последовательность состоит из одной цифры).

Решение: Не вижу разницы с предыдущим заданием, так что: см. решение задания 1 (там просто не нужно будет делать лишних вызовав в духе «найти двоичное представление числа». ■

Задание №3 Докажите, что $\{0,1\}^*$ и множество корректных программ на каком-либо (любом) языке программирования разрешимо равномощны.

Решение: Обозначим множество корректных программ на `python` за $\mathbb{CP}$. Опять показываем по теореме Кантора-Берштейна вводя вложения туда и обратно.

$$f : \{0,1\}^* \to CP$$
$$f(bs) = \left.\begin{matrix}\texttt{print("Hello!")}\\ \texttt{print("Hello!")}\\ \dots \\ \texttt{print("Hello!")}\end{matrix}\right\} length(bs) + 1 \text{ раз}$$

$$g : CP \to \{0,1\}^*$$
$$g(s) = \texttt{unicode\_codes\_str(s)}$$

Тут `unicode_codes_str(s)` возвращает строку, в которой каждый символ исходной строки программы s был переведён в двухбайтовый код (т.е. строку из $\{0,1\}^{16}$).

Эти функции реализуются на хаскеле достаточно просто, достаточно знать коды символов, чтобы написать g. Функции `fpi` и `gpi` тоже реализуемы на хаскеле, а ещё видно, что для любой строки bs из $\{0,1\}^*$ в программе $f(bs)$ будет $15(length(bs) + 1)$ символов (не считая переводов строки), а значит в строке $g(f(bs))$ будет $16 \cdot 15 \cdot (length(bs) + 1)$ символов, что точно больше $length(bs)$, а значит `dfc = const False`. ∎

Задание №4 Определите множество простых чисел.

Решение: $Prime = \{p \in \mathbb{N} \mid (p \neq 1) \wedge (\forall n \in \{2, \dots, p-1\} : p \mod n \neq 0)\}$ ∎

Задание №5 Определите следующие функции над $\mathbb{Q}$ и докажите их корректность:

(a) Функция $neg : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, возвращающая обратное по сложению число.

(b) Функция $inv : \mathbb{Q}_{\neq 0} \to \mathbb{Q}_{\neq 0}$, возвращающая обратное по умножению число.

(c) Функция $plus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, возвращающая сумму двух чисел.

Решение:

(a) $neg([(x,y)]_\sim) = -(x/gcd(x,y))/(y/gcd(x,y))$

(b) $inv([(x,y)]_\sim) = (y/gcd(x,y))/(x/gcd(x,y))$

(c) $plus([(a_x, a_y)]_\sim, [(b_x, b_y)]_\sim) = \frac{(a_x b_y + b_x a_y)/gcd(a_x b_y + b_x a_y, b_x b_y)}{b_x b_y / gcd(a_x b_y + b_x a_y, b_x b_y)}$