# Практика по алгоритмам

Александр Мишунин, Алексей Давыдов*

Осень, 2015

*Составители сборника не являются авторами самих задач. Авторы не указаны в учебных целях.

# 1 Практика 1. Ассимптотика

## 1.1 Практика

Все функции: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

- $f = O(g) \Leftrightarrow \exists_{N, C>0} \forall_{n \geq N} f(n) \leq C \cdot g(n)$
- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$
- $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \forall_{C>0} \exists_N \forall_{n \geq N} f(n) < C \cdot g(n)$
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$

1. (a) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$?
   (b) $\min(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$?
   (c) $f(n) = O(f(n)^2)$?
   (d) $f(n) = \Omega(f(n/2))$?
   (e) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = O(\log g(n))$?
   (f) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?
   (g) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = o(\log g(n))$?
   (h) $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$?
   (i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Omega(\log n)$?
   (j) $\sum_{k=0}^{\log n} \lceil n/2^k \rceil = O(n^2)$?
   (k) $\prod_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k) = \Theta(1)$?

2. Во всех пунктах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

   (a)

   - `for (a = 1; a < n; a++)`
   - `    for (b = 0; b < n; b += 1)`
   - `        ;`

   (b)

   - `for (a = 1; a < n; a++)`
   - `    for (b = 0; b < n; b += a)`
   - `        ;`

   (c) Найти такие $a$, $b$, $c$: $abc = n$, $a + b + c = \min$. Решение:

   - `for (a = 1; a <= n; ++a)`
   - `    for (b = 1; a * b <= n; ++b)`
   - `        c = N / a / b, ... ;`

   (d) Еще одно решение задачи (c):

   - `for (a = 1; a * a * a <= n; ++a)`
   - `    for (b = 1; b * b <= n; ++b)`
   - `        c = N / a / b, ... ;`

(e) И еще одно решение задачи (c):

- `for (a = 1; a * a * a <= n; ++a)`
- `    for (b = a; a * b * b <= n; ++b)`
- `        c = N / a / b, ... ;`

(f) Дополнительный вопрос: что делает этот код?

- `a = 1, b = n;`
- `while (a < b) {`
- `    while (x[a] < M && a <= b) a++;`
- `    while (x[b] > M && a <= b) b--;`
- `    if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);`
- `}`

(g) Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

- `while (a >= 2)`
- `    a = sqrt(a);`

(h) Решето Эратосфена (пользуемся, что: $p_n \approx n \ln n$)

- `for (p = 2; p < n; p++)`
- `    if (min_divisor[p] == 0) // is prime`
- `        for (x = p + p; x < n; x += p)`
- `            if (min_divisor[x] == 0)`
- `                min_divisor[x] = p;`

## 1.2 Домашнее задание

1. (a) Если в определении $O$ опустить условие про $N$ (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному?

   (b) Тот же вопрос про $o$.

2. Во всех пунктах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

   (a)

```
for (i = 0; i < n; i++)
    if (used[i] == 0)
        for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
            used[j] = 1;
```

   (b) Школьная арифметика (длины чисел до $n$, система счисления десятичная):

      i. Сложение в столбик,

      ii. Умножение в столбик,

      iii. Деление в столбик.

   (c)

```
int n = (int) s.length();
vector<int> pi (n);
for (int i=1; i<n; ++i) {
    int j = pi[i-1];
    while (j > 0 && s[i] != s[j])
        j = pi[j-1];
    if (s[i] == s[j]) ++j;
    pi[i] = j;
}
```

3. Заполнить табличку.

| $A$ | $B$ | $O$ | $o$ | $\Theta$ | $\omega$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lg^k n$ | $n^\epsilon$ | | | | | |
| $n^k$ | $c^n$ | | | | | |
| $\sqrt{n}$ | $n^{\sin n}$ | | | | | |
| $2^n$ | $2^{n/2}$ | | | | | |
| $n^{\lg m}$ | $m^{\lg n}$ | | | | | |
| $\lg(n!)$ | $\lg(n^n)$ | | | | | |

4. (*) Вот обычный (но медленный) алгоритм Евклида:

```
int gcd (int x, int y) {
    if (x < y)
        return gcd(x, y - x);
    if (x > y)
        return gcd(x - y, y);
    if (x == y)
        return (x + y) / 2;
}
```

   Расширим его так:

```
pair<int,int> gcd+ (int x, int y, int u, int v) {
    if (x < y)
        return gcd(x, y - x, u, u + v);
    if (x > y)
        return gcd(x - y, y, u + v, v);
    if (x == y)
        return pair<int,int> ((x + y) / 2, (u + v) / 2);
}
```

   Что за пара будет в ответе, при запуске gcd$+(x, y, x, y)$? (Ответ нужно обосновать)

5. (*) Порой нам нужно найти не только $d$ = НОД($x$,$y$), но и такую пару целых чисел $a$ и $b$, что $ax + by = d$. Придумайте, как изменить алгоритм Евклида, чтобы он находил такую пару.

6. Докажите, что следующий алгоритм находит gcd двух чисел:

```
int gcd(int x, int y) {
    if (x == y)
        return (x + y) / 2;
    if (x % 2 == 0 && y % 2 == 0)
        return 2 * gcd(x / 2, y / 2);
    if (x % 2 == 0 && y % 2 != 0)
        return gcd(x / 2, y);
    if (x % 2 != 0 && y % 2 == 0)
        return gcd(x, y / 2);
    if (x > y)
        return gcd (x - y, y);
    if (x < y)
        return gcd (x, y - x);
}
```

   Оцените его асимптотику.

## 2 Практика 2. Жадность. Линейные алгоритмы

1. Дана скобочная последовательность, составленная из скобок `'('`, `')'`, `'['`, `']'`, `'{'`, `'}'`. Последовательность называется корректной, если каждой открывающей скобке соответствует закрывающая скобка того же типа, и соблюдается вложенность. Примеры, `([{}])` и `()()` – корректные, а `[)` и `[(])` – нет.

   Предоставьте алгоритм, который проверяет корректность последовательности за линейное время.

2. Реализовать стек с операциями `PUSH`, `POP`, `MAX` при условии, что каждая операция работает за константное время.

3. Реализовать очередь с помощью двух стеков.

4. Реализовать очередь с операциями `PUSH`, `POP`, `MAX` при условии, что каждая операция работает за константное время.

5. Дано число, представленное $n$ цифрами в десятичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно $k$ цифр так, чтобы результат был максимальным. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

   **Внимание!** $k$ подается на вход и может быть порядка $n$. Решение за $\mathcal{O}(kn)$ приравнивается к квадратичному от $n$.

6. Преподаватели сделали $n$ заявок на занятие. Каждое занятие начинается в момент $b_i$ и кончается в момент $e_i$ (занимает интервал $[b_i, e_i)$). Два занятия в одной аудитории быть не могут. Распределите заявки по аудиториям так, чтобы общее число аудиторий было минимально. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

7. Придумайте алгоритм, который по заданному дереву $T$ на $n$ вершинах строит совершенное паросочетание, или говорит что такого нет. Время $\mathcal{O}(n)$.

## 2.1 Домашнее задание

1. (группа Давыдова) Дано число, представленное $n$ цифрами в десятичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно $k$ цифр так, чтобы результат был максимальным. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

   **Внимание!** $k$ подается на вход и может быть порядка $n$. Решение за $\mathcal{O}(kn)$ приравнивается к квадратичному от $n$.

2. Придумайте алгоритм, который по заданному дереву $T$ на $n$ вершинах строит совершенное паросочетание (такое подмножество ребер, что каждая вершина дерева инцидентна ровно одному из них), или говорит, что такого нет. Время $\mathcal{O}(n)$.

3. (группа Мишунина) Дан набор кубиков, на каждой грани каждого из них написано целое число. Петя и Вася играют в игру: каждый выбирает себе по кубику, затем каждый бросает свой кубик. Выигрывает тот, у кого выпало число больше (выпадение любой грани у кубика равновероятно). Петя выбирает кубик первым, и ему нужен алгоритм выбора лучшего кубика (лучший кубик — тот, у которого вероятность выиграть не меньше вероятности проиграть против любого другого кубика). Кубики заданы в виде массива шестерок чисел. Напишите псевдокод, возвращающий номер лучшего кубика (любого, если таких несколько) или $-1$, если такого кубика не существует (никто не обещает, что набор не пустой...).

4. (группа Давыдова) Дан массив целых чисел $a_i$. Придумайте структуру данных, которая бы умела отвечать на запросы вида: "По данным $l$ и $r$ вернуть $\sum_{i=l}^{r} a_i$." за $\mathcal{O}(1)$.

   Разрешается сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n)$. (Это означает, что нам дают массив, затем разрешают $\mathcal{O}(n)$ времени считать какую-нибудь вспомогательную информацию и только после этого начинают задавать вопросы).

5. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{N}$. Найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

6. Дана последовательность $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. Найти $l, r$ $(1 \le l \le r \le n)$ такие, что сумма $\sum_{i=l}^{r} a_i$ была бы максимальной. Задачу требуется решить за линейное от $n$ время.

# 3 Практика 3. Сортировки и поиск

## 3.1 Практика

1. Дана монотонная функция $[1 \dots n] \to \{0, 1\}$. Напишите псевдокод, находящий последний 0 и первую 1 за $\mathcal{O}(\log n)$ вызовов функции.
2. Сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы за $\mathcal{O}(\log n)$ отвечать на запрос "сколько раз число $x$ встречается на отрезке $[l..r]$"?
3. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков $n$. Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Любые два пирожка можно поменять местами. Память у робота маленькая, $\mathcal{O}(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.
4. Придумайте детерминированную структуру данных на основе бинарной кучи, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.
5. Модифицируйте операцию `SiftUp` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.
6. Даны два сортированных массива длины $n$. Без дополнительного предподсчета найти $k$-ю порядковую статистику в объединении массивов.
   (a) За $\mathcal{O}(\log^2 n)$.
   (b) За $\mathcal{O}(\log n)$.
7. Дана обычная бинарная куча (с минимумом в голове), за сколько можно узнать $k$-й минимум?
   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$
   (b) $\mathcal{O}(k^2)$
   (c) $\mathcal{O}(k \log k)$
8. Дан массив из $n$ чисел и $m$ чисел $p_1, p_2, \dots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого $i$ найти $p_i$-ую порядковую статистику.

## 3.2 Домашнее задание

1. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на $k$. Всего патронов $n$. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n+I)$, где $I$ — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.

2. Дан массив из $n$ чисел и $m$ чисел $p_1, p_2, \ldots p_m$, нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого $i$ найти $p_i$-ую порядковую статистику.

3. Даны два массива $a$ и $b$ одинаковой длины. Нужно найти такую перестановку $p$, что $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_i \to \max$.

4. Куча хранится в массиве длины $n$. Родитель $p$ хранит детей в ячейках $2 \cdot p+1$ и $2 \cdot p+2$. Алгоритм приступает к сортировке. Сортировка устроена следующим образом.

   - Поменять первый и последний элемент кучи местами.
   - Уменьшить размер кучи на единицу.
   - Запустить `SiftDown` на первом элементе.

   `SiftDown` меняет родителя с наибольшим ребенком (при условии, что ребенок больше родителя) и запускается рекурсивно. Требуется придумать алгоритм, который по $n$ выдвет перестановку чисел от 1 до $n$, которая является корректной кучей и приводит к максимальному количеству вызовов `SiftDown` при сортировке. Время работы — $\mathcal{O}(n \log n)$.

5. Найти количество AVL деревьев высоты $h$ из $n$ вершин по простому модулю $p$ за $\mathcal{O}(hn^{\log_2 3})$ (AVL дерево — корневое двоичное дерево, в котором у каждой вершины высоты двух дочерних поддеревьев отличаются не более, чем на 1).

# 4 Практика 4. Структуры данных

## 4.1 Домашнее задание

1. Назовем массив `A[1..n]` унимодальным, если он сначала возрастает, а потом убывает. Строго говоря, существует такое $m \in [1, n]$, что

   - `A[i]` $<$ `A[i + 1]` для $1 \leq i < m$;
   - `A[i]` $>$ `A[i + 1]` для $m \leq i < n$.

   Элемент с номером $m$ назовем *пиком.*

   (a) Постройте алгоритм для поиска пика за $\mathcal{O}(\log n)$.

   (b) Дан выпуклый многоугольник на плоскости из $n$ вершин. Вершины заданы в порядке обхода по часовой стрелке. Никакие три подряд идущие вершины не лежат на одной прямой. Требуется найти минимальный прямоугольник со сторонами, параллелльными осям координат, содержащий данный многоугольник (bounding box) за $\mathcal{O}(\log n)$.

   (c) Придумайте, как проверить, лежит ли точка в многоугольнике за $\mathcal{O}(\log n)$.

2. Рассмотрим структуру данных счетчик. Она поддерживает следующие операции:

   - Увеличение счетчика на 1.
   - Уменьшение счетчика на 1.
   - Сравнение счетчика с 0.

   Пусть счетчик реализован как одно число в двоичной системе счисления. Докажите, что амортизационное время работы всех операций $\mathcal{O}(1)$.

3. Рассмотрим бинарную скошенную систему исчисления. На каждой позиции в скошенной записи числа может стоять цифра 0, 1 или 2. Число $a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1$ в скошенной системе переводится в десятичную по формуле $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (2^i - 1)$.

   В скошенной системе счисления есть два ограничения: цифра 2 может встречаться в записи не более одного раза; все цифры следующих меньших разрядов равны нулю. Пример первых чисел: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 100, 101 ...

   (a) Докажите, что каждое неотрицательное целое число имеет ровно одну возможную запись в скошенной системе счисления.

   (b) Придумайте, как увеличить число в скошенной системе на единицу за $\mathcal{O}(1)$.

4. * Рассмотрим структуру данных “скошенный список”. Для того, чтобы получить скошенный список длины $n$, сперва запишем число $n$ в скошенной системе счисления. Далее для каждого $i$ смотрим в соответствующую позицию скошенной записи $n$ и, если соответствующее число не ноль, рисуем столько полных двоичных деревьев высоты $i$. Пример скошенных списков длины 1, 2, 3, 4, 5 - см. картинку.

Рис. 1: Лист [a] (число: 1)

$\boxed{\text{a}}$

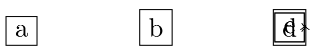
Рис. 2: Лист [a b] (число: 2)

$\boxed{\text{a}}$ $\boxed{\text{b}}$

Рис. 3: Лист [a b c] (число: 10)

Рис. 4: Лист [a b c d] (число: 11)


Рис. 5: Лист [a b c d e] (число: 12)




Придумайте, как реализовать следующие операции со списком длины $n$:

(a) Добавление элемента в начало списка за $\mathcal{O}(1)$.

(b) Доступ к $i$-му элементу за $\mathcal{O}(\log n)$.

(c) Возврат на произвольное предыдущее состояние за $\mathcal{O}(\log n)$.

(d) Получить список из $k$ последних элементов данного списка за $\mathcal{O}(\log n)$.

5. (группа Мишунина) Дано бинарное дерево: $Tree ::= Node(Tree, Tree)|Empty$ (эта запись означает, что дерево — это либо вершина с парой потомков-деревьев, либо особое значение $Empty$). Определим функцию $\mathbf{rank}(x)$ следующим образом:

   - $\mathbf{rank}(Empty) = 0$
   - $\mathbf{rank}(Node(left, right)) = min(\mathbf{rank}(left), \mathbf{rank}(right)) + 1$.

   Назовем бинарное дерево *скошенным влево (левацким)*, если для его вершин выполнено следующее свойство:
   $$\forall_{x=Node(left,right)} \mathbf{rank}(left) \geq \mathbf{rank}(right).$$

   *Скошенная влево (левацкая) куча* — это скошенное влево дерево, в вершинах которого хранятся данные, для которых выполнено свойство кучи.

   - Докажите, что для любого скошенного влево дерева $|T| \geq 2^{\mathbf{rank}(T)-1}$ ($|T|$ обозначает количество вершин в дереве $T$).
   - Придумайте, как слить две скошенные влево кучи $H_1$ и $H_2$ за время $\mathcal{O}(\log |H_1| + \log |H_2|)$.
   - Придумайте, как используя операцию слияния, построенную на предыдущем шаге, реализовать операции:
     - *Insert(x)* — добавление элемента $x$ в кучу,
     - *Pull()* — удаление минимального элемента из кучи.

6. Придумайте, как реализовать структуру данных, поддерживающую следующие операции:

   - Добавление символа в конец.
   - Откат назад на произвольный момент.
   - Получение $i$-го символа.

   Сложность каждой из операций не должна превышать $\mathcal{O}(\log n)$.

# 5 Практика 5. Демоническое программирование

## 5.1 Практика

1. Найти максимальную возрастающую подпоследовательность, за $\mathcal{O}(n \log n)$.

2. Даны две последовательности длины $n$. Придумайте, как найти наидлиннейшую общую подпоследовательность этих последовательностей.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2)$,

   (b) За $\mathcal{O}(n \log n)$, в случае, если в каждой из последовательностей все элементы различны.

3. Дан `DAG` с весами на ребрах, найдите в нем путь с самой большой суммой весов.

4. Найти максимальное по весу паросочетание за $\mathcal{O}(n)$ на

   (a) дереве,

   (b) цикле,

   (c) связном графе из $n$ вершин и $n$ ребер.

5. Дан выпуклый $n$-угольник. Каждая диагональ треугольника, соединяющая вершины $i$ и $j$ имеет вес $w_{ij}$. Вес триангуляциии многоугольника есть сумма весов диагоналей, которые в ней проведены. Найти триангуляцию с минимальным весом за $\mathcal{O}(n^3)$.

6. Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут $a_i$ и время $t_i$, через которое пират приплывет и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут $a$ и угловая скорость вращения $\omega$. Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $\mathcal{O}(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

7. Дан группоид с таблицей умножения. В группоиде $g$ элементов. Дано произведение $n$ элементов. Вам разрешается ставить скобки где угодно. Требуется определить, какие элементы группоида можно получить в результате перемножения. Решить за $\mathcal{O}(n^3 \cdot g^2)$.

8. Дана строка из латинских букв длины $n$, нужно ее за $\mathcal{O}(n^3)$ запаковать в максимально короткую, используя правило $n(S) = \underbrace{SS\ldots S}_{n}$.

   Например `NEERCYESYESYESNEERCYESYESYES` $\to$ `2(NEERC3(YES))`.

9. Дан массив длины $n$, который мы хотим получить. Числа в массиве от 1 до $C$. Получить его из массива $[0, 0, \ldots, 0]$ минимальным числом операций «покраска отрезка».

   (a) $\mathcal{O}(n^3 C)$

   (b) $\mathcal{O}(n^3)$

## 5.2 Домашнее задание

1. Найти максимальное по весу паросочетание за $\mathcal{O}(n)$ на
   (a) дереве,
   (b) цикле,
   (c) связном графе из $n$ вершин и $n$ ребер.
2. Найти максимальное по весу паросочетание на кактусе за $\mathcal{O}(n)$. Кактус — граф, в котором каждое ребро лежит не более чем на одном цикле.
3. Посчитайте, сколько существует перестановок из $n$ элементов таких, что ни один элемент не стоит на своем месте, за $\mathcal{O}(n^2)$ (Ответ нас интересует только по некоторому простому модулю, т. ч. арифметические операции работают $\mathcal{O}(1)$).
4. Дан набор нечестных монеток с вероятностью выпадения орла $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Требуется посчитать вероятность выпадения ровно $k$ орлов за $\mathcal{O}(n \cdot k)$. Обращение с числами считать выполнимыми за $\mathcal{O}(1)$.
5. Дан группоид с таблицей умножения. В группоиде $g$ элементов. Дано произведение $n$ элементов. Вам разрешается ставить скобки где угодно. Требуется определить, какие элементы группоида можно получить в результате перемножения. Решить за $\mathcal{O}(n^3 \cdot g^2)$.

# 6 Практика 6. Edit distance и друзья

## 6.1 Практика

1. Строка $s$ является палиндромом, если она читается одинаково как слева направо, так и справа налево.

   (a) Самая длинная подпоследовательность-палиндром за $\mathcal{O}(n^2)$.

   (b) Посчитать число подстрок-палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$.

   (c) Разбить строку на минимальное число палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$.

2. Шаблон для строки состоит из символов латинского алфавита, `?` и `*`. Мы говорим, что строка $s$ подходит под шаблон $p$, если существует каждый `?` в шаблоне можно заменить на букву, а `*` на возможно пустую строку из латинских букв так, что результат будет равен $s$. Для строки $s$ и шаблона $p$ определите, подходит ли строка под шаблон за $\mathcal{O}(|s| \cdot |p|)$. Подсчитайте количество способов, которыми строка подходит под шаблон.

3. Даны два шаблона $a$ и $b$, состоящие из символов латинского алфавита, `?` и `*`. Найдите слово минимальной длины (любое из таких), подходящее под оба шаблона. $\mathcal{O}(|a| \cdot |b|)$.

4. Дана строка $s$ из цифр 0 и 1. Строка свободна от $s$ если не содержит $s$ в качестве подстроки. Требуется найти число строк, свободных от $s$, длины $n$ из цифр 0 и 1. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтоу все стандартные арифметические операции выполняются за $\mathcal{O}(1)$. Время:

   (a) $\mathcal{O}(|s|^3 + |s| \cdot n)$

   (b) $\mathcal{O}(|s| \cdot n)$

5. Бинарный поиск взвешенный, если стоимость обращения к $i$-му элементу массива равна $c_i > 0$. Мы не знаем сам массив, не знаем $x$, который будем искать, знаем только массив стоимостей $c$. Нужно за $\mathcal{O}(n^3)$ найти стоимость поиска элемента в худшем случае. Внутри бинарного поиска не обязательно сравнивать с серединой, мы сами выбираем элемент, с которым сравнивать.

## 6.2 Домашнее задание

1. Дана строка $s$ из цифр 0 и 1. Строка свободна от $s$ если не содержит $s$ в качестве подстроки. Требуется найти число строк, свободных от $s$, длины $n$ из цифр 0 и 1. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтоу все стандартные арифметические операции выполняются за $\mathcal{O}(1)$. Время:
   (a) $\mathcal{O}(|s|^3 + |s| \cdot n)$
   (b) $\mathcal{O}(|s| \cdot n)$
2. Бинарный поиск взвешенный, если стоимость обращения к $i$-му элементу массива равна $c_i > 0$. Мы не знаем сам массив, не знаем $x$, который будем искать, знаем только массив стоимостей $c$. Нужно за $\mathcal{O}(n^3)$ найти стоимость поиска элемента в худшем случае. Внутри бинарного поиска не обязательно сравнивать с серединой, мы сами выбираем элемент, с которым сравнивать.
3. (группа Давыдова) Посчитать количество способов, которыми можно расставить на доске $n \times n$, так чтобы они не били друг друга:
   (a) Королей за $\mathcal{O}(n \cdot Fib(n)^2)$ (здесь $Fib(n)$ — $n$-ое число Фибоначчи),
   (b) Коней за $\mathcal{O}(n^2 8^n)$

   по модулю небольшого простого числа.
4. Задана строчка длины $n$, в которой разрешается удалить символ за цену $A$ и заменить символ на любой другой за цену $B$. Требуется сделать строчку палиндромом за минимальную суммарную стоимость операций. $\mathcal{O}(n^2)$.
5. (группа Мишунина) Дана строка из латинских букв длины $n$, нужно ее за $\mathcal{O}(n^3)$ запаковать в максимально короткую, используя правило $n(S) = \underbrace{SS \ldots S}_{n}$.

   Например `NEERCYESYESYESNEERCYESYESYES` $\rightarrow$ `2(NEERC3(YES))`.
6. (группа Давыдова) Строка $s$ является палиндромом, если она читается одинаково как слева направо, так и справа налево.
   (a) Самая длинная подпоследовательность-палиндром за $\mathcal{O}(n^2)$.
   (b) Посчитать число подстрок-палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$.
   (c) Разбить строку на минимальное число палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$.

# 7 Практика 7. DFS

## 7.1 Практика

1. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$. Проверить, является ли он двудольным. Время: $\mathcal{O}(V + E)$.

2. Циклы

   (a) Найти цикл в орграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.

   (b) Найти цикл в орграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$

   (c) Найти цикл в неорграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.

   (d) Найти цикл в неорграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$.

   (e) Найти в орграфе кратчайший цикл за $\mathcal{O}(VE)$.

   (f) Найти в неориентированом графе какой-нибудь цикл за $\mathcal{O}(V)$.

3. Дан неориентированный связный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется разбить множество его вершин на две доли так, чтобы у каждой вершины был сосед в другой доле. Время $\mathcal{O}(V + E)$.

4. Дано корневое дерево $T = \langle V, E \rangle$. Каждая вершина может иметь произвольное число детей. Придумайте структуру данных, которая позволяла бы отвечать на запросы вида: "Является ли вершина $u$ потомком вершины $v$?"за $\mathcal{O}(1)$. Разрешается сделать препроцессинг за линейное время.

5. Найти мосты и точки сочленения в графе. $\mathcal{O}(V + E)$.

6. Дан ацикличный орграф, найти в нем гамильтонов путь за $\mathcal{O}(V + E)$.

7. Дан ацикличный орграф, проверить единственность топсорта за $\mathcal{O}(V + E)$.

8. В стране $n$ аэропортов. Самолет может сделать перелет из аэропорта $i$ в аэропорт $j$, израсходовав $w_{ij} > 0$ горючего. При этом $w_{ij}$ может отличаться от $w_{ji}$, и $w_{ii} = 0$. Требуется найти минимальный размер бака, позволяющий добраться самолету из любого города в любой, возможно с дозаправками. Решить за $\mathcal{O}(n^2 \log W)$, где $W$ — максимум по всем $w_{ij}$, все $w_{ij}$ — целые.

## 7.2 Домашнее задание

1. Ориентировать граф так, чтобы он стал сильносвязным за $\mathcal{O}(V+E)$.

2. Корневое дерево $T$ на $V$ вершинах задается массивом из $V$ элементов. Все вершины пронумерованы. Для каждой вершины в массиве указан его родитель. Для корня $r$ значение в массиве равно -1. Требуется опредить как будет выглядеть новое представление дерева, если корень $r$ сменить на корень $q$. Разрешается использовать $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Менять массив можно. Время $\mathcal{O}(V)$.

3. (*) Для заданного ориентированного графа $G$ посчитать минимальное число ребер, которые нужно добавить в граф, чтобы он стал сильно связным. Время $\mathcal{O}(V^3)$.

4. Пусть дано дерево $T = \langle V, E \rangle$. Для каждого ребра вычислить, сколько путей проходит через него. Придумать алгоритм, который работает за линейное время.

5. (*) Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$. Выбрать на нем 2 различные вершины так, чтобы сумма расстояний до ближайшей из выбранных вершин была минимальна (т.е., если мы назовем выбранные вершины $a$ и $b$, то нужно минимизировать величину $\sum_{v \in V} \min(dist(v,a), dist(v,b))$). Балл за задачу здесь зависит от эффективности предложенного алгоритма.

## 7.3 Дополнительные задачи

Решать необязательно, однако можно получить за них дополнительные баллы.

1. Решите последнюю задачу ДЗ в случае, если вместо двух выбирается $1 \le k \le |V|$ вершин.