Математическая логика. Домашнее задание №6

Горбунов Егор Алексеевич

4 апреля 2016 г.

Задание №1 Закончите доказательство того, что интерпретация логики с $\wedge$ и $\vee$ в дистрибутивных решетках корректна. То есть нужно доказать, что если $\gamma \le \varphi \vee \psi$, $\gamma \wedge \varphi \le \chi$ и $\gamma \wedge \psi \le \chi$, то $\gamma \le \chi$.

Решение: Свойство дистрибутивности решётки:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Т.к. верно, что $\gamma \le \varphi \vee \psi$, то $\gamma = \gamma \wedge (\varphi \vee \psi)$, далее по свойству дистрибутивности $\gamma = (\gamma \wedge \varphi) \vee (\gamma \wedge \psi)$. По определению инфимума:

$$\begin{matrix} \gamma \wedge \varphi \le \chi \\ \gamma \wedge \psi \le \chi \end{matrix} \implies (\gamma \wedge \varphi) \vee (\gamma \wedge \psi) \le \chi$$

Но то, что слева от стрелочки, верно по условию, а тогда $\gamma \le \chi$. $\blacksquare$

Задание №2 Докажите, что в любой решетке для любых элементов x, φ и ψ следующие утверждения эквивалентны:

(a) Для любого γ если $\gamma \le x$, то $\gamma \wedge \varphi \le \psi$.

(b) Для любого γ если $\gamma \le x$ и $\gamma \le \varphi$, то $\gamma \le \psi$.

(c) $x \wedge \varphi \le \psi$.

Решение:

(a) $\Rightarrow$ (b) Имеем $\gamma \le x$ и $\gamma \le \varphi$, тогда по (a) верно, что $\gamma \wedge \varphi \le \psi$, но $\gamma \le \varphi \Leftrightarrow \gamma = \gamma \wedge \phi \le \psi$, откуда $\gamma \le \psi$ $\blacksquare$

(b) $\Rightarrow$ (c) Рассмотрим $\gamma = x \wedge \varphi$, тогда, т.к. (b) верно, то сразу из того, что $x \wedge \varphi \le x$ и $x \wedge \varphi \le \varphi$ (по свойству инфимума) имеем $x \wedge \varphi \le \psi$ $\blacksquare$

(c) $\Rightarrow$ (a) Имеем $\gamma \le x$ и $x \wedge \varphi \le \psi$. Заметим, что:

$$\begin{aligned} \gamma \le x \Rightarrow \gamma = \gamma \wedge x \Rightarrow \gamma \wedge \varphi &= (\gamma \wedge \varphi) \wedge x \\ &\Rightarrow (\gamma \wedge \varphi) = (\gamma \wedge \varphi) \wedge \varphi = (\gamma \wedge \varphi) \wedge (x \wedge \varphi) \\ &\Rightarrow \gamma \wedge \varphi \le x \wedge \varphi \end{aligned}$$

Но т.к. по условию $x \wedge \varphi \le \psi$, то $\gamma \wedge \varphi \le \psi$ $\blacksquare$

Задание №3 Пусть φ, ψ, x и x' - элементы решетки. Допустим в ней верны следующие свойства:

(a) Для любого γ

$$\gamma \le x \Leftrightarrow \gamma \wedge \varphi \le \psi$$

(b) Для любого γ

$$\gamma \le x' \Leftrightarrow \gamma \wedge \varphi \le \psi$$

Докажите, что тогда $x = x'$.

Решение: Рассмотрим $\gamma = x$, т.к. верно, что $x \le x$, то по (a) имеем $x \wedge \varphi \le \psi$, но тогда по стрелке в обратную сторону в (b) имеем $x \le x'$. Теперь аналогичным образом рассматриваем $\gamma = x'$, и пользуясь сначала пунктом (b) вправо, а потом пунктом (a) влево получаем, что $x' \le x$. В силу антисимметричности $\le$ получаем: $x = x'$. ■

Задание №4 Покажите, что в любой алгебре Гейтинга M верны следующие свойства:

(a) В M существует наибольший элемент, то есть элемент $\top$, удовлетворяющий условию, что $x \le \top$ для любого x.

(b) Для любых $\varphi, \psi \in M$ верно $\varphi \le \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) = \top$

Решение:

(a) В M существует минимальный элемент $\bot$. Тогда введём $\top = \bot \to \bot$. Такой элемент существует по определению алгебры Гейтинга. Рассмотрим тогда любой $x \in M$. Очевидно, что $\gamma \wedge \bot = \bot$, т.к. $\bot$ — минимальный. Т.е. $x \wedge \bot \le \bot$, а значит в силу определения алгебры Гейтинга:

$$x \wedge \bot \le \bot \Rightarrow x \le (\bot \to \bot) = x \le \top$$

В силу того, что x — любое, то $\top$ — максимальный элемент. ■

(b) Пускай $\varphi \le \psi$, тогда из определения максимального элемента получаем $\top \wedge \varphi = \varphi \le \psi$, откуда $\top \wedge \varphi \le \psi$. Тогда по определению алгебры Гейтинга, т.к. существует элемент $\varphi \to \psi$

$$\top \le \varphi \to \psi \Rightarrow \varphi \to \psi = \top$$

Теперь в обратную сторону: $\varphi \to \psi = \top \Rightarrow \varphi \to \psi \ge \top$, ну а тогда по свойству для стрелки (вправо) получаем, что $\varphi \to \psi = \top \Rightarrow \varphi \le \psi$. ■

Задание №5 Докажите, что любая алгебра Гейтинга дистрибутивна.

Решение:

- Покажем, что $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \le x \wedge (y \vee z)$. По свойствам супремума:

$$\begin{matrix} y \vee z \ge y \\ y \vee z \ge z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \wedge (y \vee z) \ge x \wedge y \\ x \wedge (y \vee z) \ge x \wedge z \end{matrix} \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Окей, показали.

- Покажем теперь обратное. Нужно туда-обратно применять свойство для импликации:

$$
\begin{array}{ll}
x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) & \\
\Updownarrow & \text{(свойство импликации влево)} \\
y \vee z \leq x \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z) & \\
\Updownarrow & \text{(свойство супремума)} \\
\begin{cases} y \leq x \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ z \leq x \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases} & \\
\Updownarrow & \text{(свойство импликации вправо)} \\
\begin{cases} x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases} & \text{(а это верно по свойству супремума)}
\end{array}
$$

■