Домашнее задание №5
Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

23 марта 2016 г.

Задание №1 Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = B \cdot C$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально.

Решение: Пусть у нас есть какое-то разложение $A = B \cdot C$, что размер B равен $n \times k$, а размер C, соответственно $k \times m$. Известно тогда, что $rang(A) \leqslant rang(B)$ и $rang(A) \leqslant rang(C)$, но тогда имеем:

$$rang(A) \leqslant rang(B) \leqslant \min(n, k) \Rightarrow rang(A) \leqslant k$$

Таким образом, вообще самым минимальным возможным k может быть $rang(A)$ — ранг исходной матрицы. Покажем, что этот минимально возможный k достигается.

Обозначим ранг матрицы A за r и выберем, соответственно, r линейно независимых стобцов матрицы A. Не умаляя общности считаем, что это первые r стобцов матрицы.

$$A = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}}, \boldsymbol{a_{r+2}}, ..., \boldsymbol{a_m}]$$

Знаем, что любой столбец матрицы A выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейной комбинацией, т.е:

$$\boldsymbol{a_j} = \boldsymbol{a_1} \cdot c_{1j} + \boldsymbol{a_2} \cdot c_{2j} + \boldsymbol{a_3} \cdot c_{3j} + \ldots + \boldsymbol{a_r} \cdot c_{rj}$$

Или раскрывая:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{1j} + a_{12}c_{2j} + \ldots a_{1r}c_{rj} \\ a_{21}c_{1j} + a_{22}c_{2j} + \ldots a_{2r}c_{rj} \\ \vdots \\ a_{n1}c_{1j} + a_{n2}c_{2j} + \ldots a_{nr}c_{rj} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Это очень похоже на процесс перемножения матриц! Ясно теперь, что если взять:

$$B = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_r}], \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

Находить коэффициенты c_{ij} можно, например, решая системы линейных уравнений 1 для каждого столбца известными методами. ■

Задание №2 Для заданного n и простого p найти число таких $k \in [0, n]$, что $\binom{n}{k} \mod p = 0$ Можно считать, что все операции по модулю p происходят за $\mathcal{O}(1)$. Придумайте алгоритм, который работает за:

(a) $\mathcal{O}(n)$

(b) $\mathcal{O}(poly(\log n))$

Решение:

(a) Запишем биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k}$$

Будем поддерживать степень, в которой входит p в числитель и знаменатель, последовательно перебирая все биномиальные коэффициенты:

$$\frac{n}{1}, \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

Если мы знаем степень, в которой p входит в числитель и знаменатель, то можем сказать, делится ли на p биномиальный коэффициент просто посмотрев на разность этих степеней. Т.е. вначале мы должны знать степень, в которой p входит в n для числителя и в 1 для знаменателя. И так далее. Пусть на i-ом шаге мы знаем степень d_i^1, в которой p входит в числитель $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1)$ и в степень d_i^2, в которой p входит в знаменатель $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i$. Тогда на следующем шаге они пересчитываются так: $d_{i+1}^1 = d_i^1 + degree_p(n-i)$, $d_{i+1}^2 = d_i^2 + degree_p(i+1)$, где $degree_p(x)$ — степень, в которой p входит в x (тут в дело вступает простота p). Чтобы суммарно это дело работало за $\mathcal{O}(n)$ нам нужно уметь быстро находить $degree_p(x)$ для $x \in [1, n]$. Как? Предподсчитаем его за $\mathcal{O}(n)$ так:

$$\begin{aligned}
degree_p(p) &= 1 \\
\ldots \\
degree_p((p-1)p) &= 1 \\
degree_p(p^2+p) &= 1 \\
\ldots \\
degree_p(p^2) &= 2 \\
degree_p(2p^2) &= 2 \\
\ldots \\
degree_p(p^3+p^2) &= 2 \\
\ldots degree_p(p^3) &= 3 \\
\ldots
\end{aligned}$$

Такую процедуру точно можно за линию организовать, посчитав степени p, пока они меньше n и далее рекурсивно это дело строить... ■