Математическая логика. Домашнее задание №8

Горбунов Егор Алексеевич

25 апреля 2016 г.

Задание №1 Определите формулу $\varphi(x, y)$, задающую график функции pred, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\mathrm{pred}(0) = 0$$
$$\mathrm{pred}(S(x)) = x$$

Докажите, что $\forall x \exists! y(\varphi(x, y))$

Решение: Определим формулу:

$$\varphi(x, y) = (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = S(y))$$

Доказываем по индукции утверждение:

$$\forall x \exists! y((x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = S(y)))$$

База для $x = 0$ верна, т.к. у нас существует единственный $y = 0$ (по аксиоме $(i0)$). Пускай теперь верно, что существует единственный y, что $\varphi(n, y)$. Тогда (часть про $x = 0$ убрал сознательно):

$$\varphi(S(n), y) = (S(n) = S(y))$$

Но по аксиоме (iS) тогда получаем, что $y = n$ и этот y единтсвенный. Далее по аксиоме об индукции заканчиваем доказательство. ∎

Задание №2 Докажите, что аксиомы для сложения определяют его уникальным образом. То есть если мы добавим в сигнатуру новый функциональный символ $+'$ и новые аксиомы

$$\forall y\ 0 +' y = y \tag{$+'0$}$$
$$\forall x \forall y\ S(x) +' y = S(x +' y), \tag{$+'S$}$$

то в ней будет доказуема формула $\forall x \forall y\ (x + y = x +' y)$.

Решение: Будем доказывать по индукции следующим образом:

- **База:** если $x = 0$ и $y = 0$, то $x + y = 0 + 0 = 0$ по аксиоме $(+0)$, аналогично по $(+'0)$ получаем $x +' y = 0$, а значит, т.к. все стандартные натуральные числа различны имеем $(x + y = x+'$
- **Переход 1.** Покажем, что если утверждение верно для $x = n$ и $y = m$, то оно верно для $x = S(n)$ и $y = m$:

$$x + y = S(n) + m =^{(+S)}= S(n + m)$$
$$x +' y = S(n) +' m =^{(+'S)}= S(n +' m) =^{\text{предположение индукции}}= S(n + m)$$

  Видим, что $x + y = x +' y$ верно.

- **Переход 2.** Аналогично показывается, что $(n + m = n +' m)$ влечёт $(n + S(m) = n +' S(m))$ с использованием коммутативность, которую можно доказать.

Выше использовалась индукция, отличная от той, что используется в арифметике Пеано, но они эквивалентны. По сути мы провели индукцию по парам (x, y). Мы можем однозначно и взаимно сопоставить паре натуральных чисел (x, y) натуральное число (номер) так, что номер (n, m) меньше номера $(S(n), m)$ и $(n, S(m))$. Таким образом мы свели индукцию выше к индукции, которая используется в арифметике Пеано. ■

Задание №3 Добавим в сигнатуру функциональные символы exp и fac для функций возведения в степень и факториала соответственно. Напишите аксиомы для этих функциональных символов, определяющие их уникальным образом.

Решение: Возведение в степень:

$$\forall x\ x\ exp\ 0 = S(0) \tag{exp0}$$
$$\forall x \forall y\ x\ exp\ S(y) = x \cdot (x\ exp\ y), \tag{expS}$$

Факториал

$$fac\ 0 = S(0) \tag{fac0}$$
$$\forall x\ fac\ S(x) = S(x) \cdot (fac\ x), \tag{facS}$$

Задание №4 Докажите следующие свойства:

(a) $\forall x \forall y\ (x + y = 0 \to x = 0 \wedge y = 0)$.

(b) $\forall x \forall y\ (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$.

Решение:

(a) Нам просто нужно показать, что если при заданных x и y выводимо, что $x + y = 0$, то тогда $x = 0 \wedge y = 0$ тоже выводимо. Будем перебирать все пары x и y. Ясно, что при $x = 0$ и $y = 0$, $x + y = 0$

выводимо (через аксиомы сложения) и, как видим, $x = 0 \wedge y = 0$ тоже выводимо. Теперь, если $x = S(n)$, $y = m$, то $x + y = S(n) + m = S(n + m) \neq 0$, т. е. получили, что $x + y \neq 0$ и, т.к. $x = S(n) \neq 0$, то не верно, что $x = 0 \wedge y = 0$. Аналогично при $x = n, y = S(m)$...

(b) Тут нужно рассуждать, видимо, так же, только случай $x = S(n), y = m$ разбить на $x = S(n), y = 0$ и $x = S(x), y = S(m)$.

■

Задание №5 Докажите коммутативность сложения.

Решение: Покажем сначала, что $S(x) + y = x + S(y)$: (индукция по x внутри которой индукция по y)

(a) База: $S(0) + y = 0 + S(y)$, т.к. $S(0) + y =^{(+S)}= S(0 + y) =^{(+0)}= S(y)$ (это верно для любого y)

(b) Пусть верно для $S(n) + m = n + S(m)$, покажем, что $S(S(n)) + m = S(n) + S(m)$: (так последовательно для каждого m)

$$S(S(n) + m) =^{(+S)}= S(S(n + m))$$
$$S(n) + S(m) = S(n + S(m)) =^{\text{предположение}}= S(S(n) + m) = S(S(n + m))$$

Показали. Обозначим это утверждение (α)

Аналогичной индукцией покажем коммутативность:

(a) База: $0 + m = m + 0$. Базу тоже доказываем по индукции:

  (a) База: $0 + 0 = 0 + 0$ (это ясно по аксиомам)

  (b) Пусть верно для $0 + n = n + 0$, тогда:

$$0 + S(n) =^{(\alpha)} S(0) + n =^{(+S)} S(0 + n) =^{\text{предп.}}$$
$$= S(n + 0) = S(n) + 0$$

  Показали.

(b) Пускай верно для $n + m = m + n$. Покажем, что $n + S(m) = S(m) + n$ (т.е. $S(m) + n = n + S(m)$:

$$S(m) + n = S(m + n) =^{\text{предположение}}= S(n + m) =^{(+S)}= S(n) + m =^{(\alpha)}= n + S(m)$$

Доказали.

■