

Домашнее задание №5-6

Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

30 марта 2016 г.

Задание №1 Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = B \cdot C$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально.

Решение: Пусть у нас есть какое-то разложение $A = B \cdot C$, что размер B равен $n \times k$, а размер C , соответственно $k \times m$. Известно тогда, что $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(B)$ и $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(C)$, но тогда имеем:

$$\text{rang}(A) \leq \text{rang}(B) \leq \min(n, k) \Rightarrow \text{rang}(A) \leq k$$

Таким образом, самым минимальным возможным k может быть $\text{rang}(A)$ — ранг исходной матрицы. Покажем, что этот минимально возможный k достигается.

Обозначим ранг матрицы A за r и выберем, соответственно, r линейно независимых столбцов матрицы A . Не умаляя общности считаем, что это первые r столбцов матрицы.

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \dots, \mathbf{a}_m]$$

Знаем, что любой столбец матрицы A выражается через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ линейной комбинацией, т.е:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 \cdot c_{1j} + \mathbf{a}_2 \cdot c_{2j} + \mathbf{a}_3 \cdot c_{3j} + \dots + \mathbf{a}_r \cdot c_{rj}$$

Или раскрывая:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{1j} + a_{12}c_{2j} + \dots + a_{1r}c_{rj} \\ a_{21}c_{1j} + a_{22}c_{2j} + \dots + a_{2r}c_{rj} \\ \vdots \\ a_{n1}c_{1j} + a_{n2}c_{2j} + \dots + a_{nr}c_{rj} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ясно теперь, что если взять:

$$B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r], \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

То получим искомое разложение. Находить коэффициенты c_{ij} можно, например, решая системы линейных уравнений 1 для каждого столбца известными методами. ■

Задание №2 Для заданного n и простого p найти число таких $k \in [0, n]$, что $\binom{n}{k} \bmod p = 0$. Можно считать, что все операции по модулю p происходят за $\mathcal{O}(1)$. Придумайте алгоритм, который работает за:

- (a) $\mathcal{O}(n)$
- (b) $\mathcal{O}(\text{poly}(\log n))$

Решение:

- (a) Запишем биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k}$$

Будем поддерживать степень, в которой p входит в числитель и знаменатель, последовательно перебирая все биномиальные коэффициенты:

$$\frac{n}{1}, \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

Если мы знаем степень, в которой p входит в числитель и знаменатель, то можем сказать, делится ли на p биномиальный коэффициент просто посмотрев на разность этих степеней. Т.е. вначале мы должны знать степень, в которой p входит в n для числителя и в 1 для знаменателя. И так далее. Пусть на i -ом шаге мы знаем степень d_i^1 , в которой p входит в числитель $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1)$ и в степень d_i^2 , в которой p входит в знаменатель $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i$. Тогда на следующем шаге они пересчитываются так: $d_{i+1}^1 = d_i^1 + \text{degree}_p(n-i)$, $d_{i+1}^2 = d_i^2 + \text{degree}_p(i+1)$, где $\text{degree}_p(x)$ — степень, в которой p входит в x (тут в дело вступает простота p). Чтобы суммарно это дело работало за $\mathcal{O}(n)$ нам нужно уметь быстро находить $\text{degree}_p(x)$ для $x \in [1, n]$. Как? Предподсчитаем его за $\mathcal{O}(n)$ так:

$$\begin{aligned} \text{degree}_p(p) &= 1 \\ \dots & \\ \text{degree}_p((p-1)p) &= 1 \\ \text{degree}_p(p^2 + p) &= 1 \\ \dots & \\ \text{degree}_p(p^2) &= 2 \\ \text{degree}_p(2p^2) &= 2 \\ \dots & \\ \text{degree}_p(p^3 + p^2) &= 2 \\ \dots \text{degree}_p(p^3) &= 3 \\ \dots & \end{aligned}$$

Такую процедуру точно можно за линию организовать, посчитав степени p , пока они меньше n и далее рекурсивно это дело строить... ■

Задание №3 На кольцевой стоят n светофоров и хитро перемигиваются. Свет на каждом светофоре зажигается в таком порядке: зеленый-желтый-красный, снова зеленый и так по кругу. Все светофоры пронумерованы от 1 до n . Если светофор по номеру i решит поменять свой цвет то следующие, k_i светофоров с шагом a_i тоже меняют свой цвет. Ниже приведен пример, когда переключается первый светофор: $k_1 = 6, a_1 = 2$.

По начальному состоянию светофоров определите, возможен ли зеленый коридор. Т.е. такая ситуация, когда все светофоры переключены на зеленый. Решить за $\mathcal{O}(n^3)$.

Решение: Делаем все операции по модулю 3 — число состояний светофора.

Начальное состояние светофоров $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in \{0, 1, 2\}^n$. Построим матрицу A на $\{0, 1\}$, что если $A_{ij} = 1$, то светофор j провоцирует смену цвета светофора i . Эту матрицу заполним так:

$$A_{ii} = 1, \quad \forall i$$

$$A_{k+a_i, i} = 1, \quad \forall i, \quad k \in \{1, 2, \dots, k_i\}$$

Пускай теперь у нас в векторе (c_1, c_2, \dots, c_n) записаны количества переключений i -го светофора, т.е. светофор i сам переключался c_i раз. Посмотрим на такое произведение (для примера взято $n = 3$):

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\ s_2 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 \\ s_3 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в i -ом элементе результирующего вектора записано состояние i -го светофора после того, как каждый светофор переключился своё число раз (заданное вектором c). Это действительно так, ибо каждое слагаемое $a_{ij}c_j$ равно c_j , если переключение j провоцирует переключение i , т.е. на каждое переключение j имеем переключение i и 0, если $a_{ij} = 0$, так же учитывается начальное состояние s_i .

Таким образом мы умеем находить конечное состояние светофоров, при помощи произведения матриц, по исходному состоянию и значениям k_i, a_i и числу самостоятельных переключений каждого светофора:

$$s + A \cdot c = x$$

Зелёный коридор — это когда $x = 0$. А значит, чтобы понять, возможен ли зелёный коридор, нужно проверить, имеет ли решения СЛАУ:

$$A \cdot c = -s$$

Это делается как раз за $\mathcal{O}(n^3)$. ■

Задание №4

Решение: 1) На Гаусса. Нужно записать в матрице какие горшки уже выбраны в каждом эксперименте и при новом эксперименте добавить столбец и пересчитать ранг... 2) Там что-то с графами и обходом в глубину...