# Математическая логика. Домашнее задание №10

Горбунов Егор Алексеевич

4 мая 2016 г.

**Задание №1** Докажите, что $L_1^{lem}$ является консервативным расширением $L_0^{lem}$.

***Решение:*** У нас в обеих логических системах есть исключённое третье. Мы показывали, что исключённое третье эквивалентно закону двойного отрицанию:

$$\phi \lor \neg\phi \Leftrightarrow \neg\neg\phi \to \phi$$

Так же мы знаем, что в интуиционистской логике верно правило де Моргана:

$$\neg(\phi \land \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \lor \neg\psi)$$

Таким образом видим, что у нас при доказательстве появляется возможность использовать:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}$$

Теперь пусть есть формула из $L_0^{lem}$, которая доказуема в $L_1^{lem}$. Тогда, чтобы получить её доказательство в $L_0^{lem}$ нужно сделать замены:

- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \land E_1$ на $\dfrac{\Gamma \vdash \neg(\neg\phi \lor \neg\psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \psi} \land E_2$ на $\dfrac{\Gamma \vdash \neg(\neg\phi \lor \neg\psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

Правило введения $\land$ заменится на $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \neg(\neg\phi \lor \neg\psi)} \land I'$

Получится доказательство в $L_0^{lem}$

**Задание №2** Если в $PRCPA$ можно определять функции при помощи паттерн матчинга на нескольких аргументах сразу, то мы легко можем определить функции $min$ и $max$:

$$\begin{aligned}
&min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&min(0, y) = 0 \\
&min(S(x), 0) = 0 \\
&min(S(x), S(y)) = S(min(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&max(0, y) = y \\
&max(S(x), S(y)) = S(max(x, y))
\end{aligned}$$

(a) Определите их, используя только базовый вариант паттерн матчинга как в лекциях.

(b) Докажите, что $\forall x \forall y\ (min(x, y) \leq max(x, y))$, где $a \leq b$ означает $\exists c\ (a + c = b)$.

***Решение:***

(a) Определяем:

$$\begin{aligned}
&P : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&P(0) = 0 \\
&P(S(x)) = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&0 - y = 0 \\
&x - 0 = x \\
&x - S(y) = P(x - y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&sign : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&sign(0) = 0 \\
&sign(S(x)) = 1
\end{aligned}$$

$$min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$min(0, y) = 0$$
$$min(S(x), y) = min(x, y) + sign(y - x)$$

$$max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$max(0, y) = y$$
$$max(S(x), y) = max(x, y) + sign(S(x) - y)$$

(b) Индукция по $x$. При $x = 0$: $min(0, y) = 0$, $max(0, y) = y$, знаем, что $0 + y = y$, т.е. нашли такой $b$, что $0 + b = y$, а значит $0 \leq y$. Пускай теперь утверждение верно для $x, y$, покажем для $S(x), y$:

$$min(S(x), y) = min(x, y) + sign(y - x)$$
$$max(S(x), y) = max(x, y) + sign(S(x) - y) = min(x, y) + c + sign(S(x) - y)$$

Нужно показать, что $sign(y - x) \leq c + sign(S(x) - y)$. Легко видеть, что если $S(x) > y$, то $sign(S(x) - y) = 1$, а $sign(y - x) = 0$, т.е. если взять $c' = c + sign(S(x) - y)$, то $max(S(x), y) = min(S(x), y) + c'$.

Теперь если $S(x) \leq y$ ($x < y$), то:

$$min(S(x), y) = min(x, y) + sign(y - x) = x + 1$$
$$max(S(x), y) = max(x, y) + sign(S(x) - y) = y$$
$$max(S(x), y) = x + c \qquad \text{(по предположению)}$$

Таким образом $x + c = y$, но т.к. $x < y$, то $c > 0$, а значит $x + 1 \leq x + c$, т.е. $min(S(x), y) \leq max(S(x), y)$. ■

**Задание №3** Пусть в $PRCPA$ у нас есть функции $+$ и $+'$, определенные следующим образом:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$0 + y = y$$
$$S(x) + y = S(x + y)$$

$$+' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x +' 0 = x$$
$$x +' S(y) = S(x +' y)$$

Докажите, что $\forall x \forall y \ (x + y = x +' y)$

***Решение:*** Двойная индукция. Сначала по $x$, потом по $y$.

- Для $x = 0$.
  - Для $y = 0$. $0 + 0 = 0$, $0 +' 0 = 0$, т.е. $0 + 0 = 0 +' 0$
  - Пускай верно для $y$, тогда: $0 + S(y) = S(y)$, $0 +' S(y) = S(0 +' y) =^{\text{предположение}} S(0 + y) = S(y)$, т.е. $0 + S(y) = 0 +' S(y)$, показали.
- Пускай верно для $x$, тогда покажем для $S(x)$
  - $y = 0$. $S(x) + 0 = S(x + 0) = S(x)$, $S(x) +' 0 = S(x)$, т.е. $S(x) + 0 = S(x) +' 0$.
  - Пускай верно для $y$, покажем для $S(y)$:

$$S(x) + S(y) = S(x + S(y)) =^{\text{предположение для } x} S(x +' S(y)) = S(S(x +' y))$$
$$S(x) +' S(y) = S(S(x) +' y) =^{\text{предположение для } y} S(S(x) + y) = S(S(x + y))$$

Но по предположению $x + y = x +' y$, т.е. $S(x) + S(y) = S(x) +' S(y)$ ∎

**Задание №4** Докажите в $CPA$, что $\forall n\ (2^n \leq \mathrm{ack}\, n\, n)$, где $a \leq b$ означает $\exists c\ (a + c = b)$ и функции $2^{(-)}$ и $\mathrm{ack}$ определены следующим образом:

$$2^{(-)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$2^0 = S(0)$$
$$2^{S(n)} = 2 \cdot 2^n$$

$$\mathrm{ack} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathrm{ack}\, 0\, n = S(n)$$
$$\mathrm{ack}\, (S\, m)\, 0 = \mathrm{ack}\, m\, (S\, 0)$$
$$\mathrm{ack}\, (S\, m)\, (S\, n) = \mathrm{ack}\, m\, (\mathrm{ack}\, (S\, m)\, n)$$

***Решение:***