Алгоритмы. Домашнее задание №8

Горбунов Егор Алексеевич

13 ноября 2015 г.

Задача №1 (Кубик и клетчатое поле)

Клеточное поле $n \times m$, кубик находится в северо западном (левом верхнем) углу в точке с координатами $(1,1)$. Положение кубика задано парой чисел $(1,2)$, где 1 — это число, записанное на верхней грани, а 2 — на южной. На поле есть чёрные клетки — на них кубик не может находиться. Нужно за $O(n,m)$ опредлить, можно ли перекатить кубик в клетку (n,m) так, чтобы он сохранил ориентацию, т.е. его положение равнялось бы $(1,2)$.

Решение: Заметим во первых то, что для однозначного ориентирования кубика на доске достаточно пары (a,b), где a — число, записанное на верхней грани, а b — на южной грани. Т.е. по условию, если у кубика 1 на верхней грани, а 2 на южной, то 3 на восточной, но тогда, т.к. сумма цифр на противоположных гранях равна 7, все оставшиеся 3 грани однозначно восстанавливаются.

Построим следующий граф $G(V,E)$: $\forall v \in V \ : \ v = (x,y,a,b)$, где (x,y) — координаты клетки на поле, а a,b задают ориентацию кубика. Тогда $e = (v,u) \in E$, где $v = (x,y,a,b)$, а $u = (x',y',a',b')$, тогда и только тогда, когда кубик, ориентация которого задана (a,b) и стоящий в клетке (x,y) можно перекатить в клетку (x',y') так, что его ориентация станет (a',b'), причём (x',y') — сосед (x,y).

Очевидно, что в таком графе G у каждой вершины будет не более 4 инцидентных ей рёбер (рёбер может быть не ровно 4 т.к. некоторые клетки чёрные и в них нельзя перекатываться). Всего вершин в графе G: число позиций на доске поможить на число возможных ориентаций кубика, а это равно $6 \cdot 4nm = 24nm$. Таким образом в G $\mathcal{O}(nm)$ рёбер.

Мы решим задачу, если ответим на вопрос: есть ли путь в графе G из $(1,1,1,2)$ в

$(n, m, 1, 2)$. На этот вопрос можно ответить запустив BFS на графе G. В силу того, что в G $\mathcal{O}(nm)$ рёбер, алгоритм отработает за $\mathcal{O}(nm)$. ■

Задача №2 (Потоп)

Найти минимальное время, чтобы перебраться из клетки $(1, 1)$ в клетку (n, m) по клеткам, в каждой из которых каждую минуту прибывает вода. Переход из клетки в клетку занимает минуту. В каждой клетке указана её высота. **Решение:** видно, что если в момент времени t мы находимся в клетке (x, y), то из неё можно добраться в какую-то из соседних клеток (x', y'), если $h(x', y') > t+1$, где $h(x', y')$ — высота клетки (x', y'). Таким образом построим следующих граф $G(V, E)$, где каждая вершина описывает некоторую клетку в некоторый момент времени: $v = (x, y, t)$. Тогда ребро в этом графе между вершинами (x, y, t) и (x', y', t') будет существовать только тогда, когда (x', y') — сосед (x, y), $t < h(x, y)$, $t' = t+1 < h(x', y')$. Ясно, что в таком графе, если мы найдём путь между вершиной $(1, 1, 0)$ и вершиной (n, m, t) такой, что t — минимально. Т.е. нужно просто проверить достижимость из $(1, 1, 0)$ всех вершин (n, m, t), где $t \in [0, h(n, m))$ и ответом будет минимальное t, что (n, m, t) достижима из $(1, 1, 0)$. Это можно проделать при помощи BFS по графу G. В графе G nmh_{max} вершин и $\mathcal{O}(nmh_{max})$ рёбер (т.к. каждая вершина может быть соединена с не более чем 4 (4 соседних клетки) другими вершинами), так что алгоритм работает за $\mathcal{O}(nmh_{max})$. ■

Задача №3 (Ограф с платными рёбрами)

Дан орграф G. Есть K типов платных рёбер. Чтобы двигаться по платному ребру типа x нужно иметь пропуск этого типа. Пропуск можно носить лишь один. В каждой вершине пропуск любого типа можно купить за A и продать за B $(0 < B < A)$. Найти самый дешёвый способ дойти из s в t за $\mathcal{O}(K(V+E))$ **Решение:** Заметим, что нам интересно минимизировать число покупок/обменов пропуска. Если мы будем знать число обменов пропуска, то стоимость пути легко посчитаем в силу того, что любой обмен стоит $A - B$. Давайте купим в вершине s пропуск. А в вершине t его продадим. Это может быть лишней тратой денег (лишний обмен), если какая-то начальная часть пути идёт по бесплатным рёбрам, но мы можем это отследить при применении алгоритма и исправить итоговую стоимость. Окей.

Таким образом у нас есть какой-то пропуск и мы начинаем путь. Сделаем так, чтобы обмен пропуска представлял из себя проход по какому-нибудь ребру. Для начала расставим на всех рёбрах графа вес равный 0.Пусть $v \in V_G$ и в G входят и выходят рёбра типов $k_1, k_2, \ldots, k_i$ и ещё возможно бесплатные рёбра. Тогда превратим вершину v в полный граф на $i+1$ вершне и расставим веса на рёбрах этого полного подграфа так: 1 поставим там, где осуществляется переход между вершинами, соответствующими каким-то типам платных рёбер или из бесплатного в платное. А 0 поставим на рёбрах из вершины, соответствующей платному классу и ведущих в вершину, соотв. бесплатному классу. Так сделаем с каждой вершиной исходного графа. Таким образом мы получим граф G, в котором теперь не более $|V|(K+1)$ вершин и не более $|E|(K)$ рёбер (т.к. каждая вершина стала полным графом на $K+1$ вершине). Причём этот граф — это $0-1$ граф. А для него мы умеем BFS-ом искать кратчайший путь. Заметим, что этот путь как раз будет характеризовать путь с наименьшим числом обменов в исходном графе. Итого получили алогритм с асимптотикой: $\mathcal{O}\left(K(|V|+|E|)\right)$ ∎