

Теория графов

Д. В. Карпов

Оглавление

1	Введение	9
1.1	Вершины и рёбра	9
1.2	Подграфы	10
1.3	Удаление и стягивание рёбер	11
1.4	Подразбиение графа	12
1.5	Пути, циклы и маршруты	12
1.5.1	Длины циклов и минимальная степень	14
1.6	Связные графы. Деревья	15
1.7	Двудольные графы	16
1.8	Связность	17
1.8.1	Части разбиения	18
1.8.2	Точки сочленения и блоки в связном графе	19
1.8.3	Рёберные разделяющие множества и мосты	20
1.9	Эйлеров путь и цикл	21
1.10	Ориентированные графы	22
1.11	Гиперграф	23
2	Паросочетания	25
2.1	Чередующиеся и дополняющие пути	25
2.2	Паросочетания в двудольном графе	26
2.3	Соотношения между α , β , α' и β'	29
2.4	Паросочетания с предпочтениями	30
2.5	Паросочетания в произвольном графе	31
2.5.1	Теорема Татта о совершенном паросочетании	31
2.5.2	Совершенное паросочетание в регулярном графе	33
2.5.3	Факторы регулярного графа	36
2.5.4	Дефицит графа. Формула Бержа	38
2.5.5	Фактор-критические графы	39
2.5.6	Структурная теорема Галлаи-Эдмондса	40
2.5.7	Барьеры	44

2.5.8	Критерии существования совершенного паросочетания	48
2.6	Факторы	50
2.6.1	Факторы и паросочетания	50
2.6.2	Нормальные множества	52
2.6.3	f -дефицит. Теорема Татта о факторе	55
2.6.4	Еще раз про факторы регулярного графа	61
2.6.5	Жесткость и k -факторы	65
2.7	Графы с единственным паросочетанием	70
3	Пути и циклы	73
3.1	Гамильтонов путь и цикл	73
3.1.1	Классический критерий Дирака	73
3.1.2	Замыкание. Метод Хватала	74
3.1.3	Связность и гамильтоновы циклы	75
3.1.4	Гамильтоновы последовательности	77
3.1.5	Гамильтонов цикл в степени графа	80
3.2	Панциклические графы	89
3.3	Окружение графа	91
3.4	Циклы четной длины	94
3.5	Обхват	98
4	Раскраски	101
4.1	Хроматическое число	101
4.2	Теорема Брукса	102
4.2.1	Теорема Брукса и связность	105
4.3	Гипотеза Хайоша	108
4.3.1	Критические графы	108
4.3.2	Гипотеза Хайоша, случай $k = 4$	111
4.4	Конструируемые графы	113
4.5	Обхват и хроматическое число	114
4.6	Совершенные графы	117
4.7	Раскраски рёбер	123
4.7.1	Оптимальные раскраски	124
4.7.2	Теорема Визинга	126
4.7.3	Покрывающие раскраски рёбер	128
4.7.4	Теорема о чередующемся цикле	132
4.8	Списочные раскраски	135
4.9	Раскраски гиперграфов	136
4.9.1	Аналог теоремы Брукса	136
4.9.2	Правильные раскраски гиперграфов в два цвета	142

5	Связность	151
5.1	Теорема Менгера	151
5.2	Разделяющие множества в k -связном графе	155
5.2.1	Части разбиения, граница и внутренность	155
5.2.2	Зависимые и независимые разделяющие множества	159
5.3	Удаление вершины с сохранением k -связности	162
5.4	Удаление ребер с сохранением k -связности	165
5.5	Взаимное расположение разделяющих множеств	167
5.5.1	Точки сочленения и блоки в связном графе	168
5.5.2	Дерево разбиения	168
5.5.3	Дерево разбиения двусвязного графа	171
5.5.4	Применение дерева разбиения двусвязного графа	176
5.5.5	Теорема о разбиении	187
5.5.6	Компоненты зависимости	191
5.5.7	Ромашки	198
5.6	Стягивание рёбер в k -связном графе	207
5.6.1	Двусвязные и трёхсвязные графы	207
5.6.2	Минимальные по стягиванию 4-связные графы	209
5.6.3	Трёхсвязные графы: происхождение от колеса	218
6	Планарные графы	223
6.1	Формула Эйлера	224
6.2	Теорема Куратовского	225
6.2.1	Части разбиения и планарность	230
6.3	Двойственный граф	231
6.4	Вокруг 4СС	233
6.5	Списочные раскраски планарных графов	243
6.6	Пути и циклы в планарном графе	256
6.6.1	Негамильтоновы планарные графы	256
6.6.2	Теорема Томассена о пути в планарном графе	257
6.6.3	Теорема Татта о цикле в планарном графе	270
6.7	Почти планарные графы	273
7	Циклическое пространство графа	281
7.1	Связь циклов и разрезов	282
7.2	Циклическое пространство трёхсвязного графа	284
7.3	Циклическое пространство планарного графа	287
8	Ориентированные графы	291
8.1	Сильная связность	291
8.1.1	Компоненты сильной связности	291

8.1.2	Минимальные сильно связные графы	292
8.2	Сильная k -связность	293
8.3	Турниры	296
8.3.1	Циклы в сильно связных турнирах	299
8.3.2	Гамильтоновы пути в турнирном графе	300
8.4	Независимые множества вершин в оргграфе	308
8.4.1	Теорема Хватала-Ловаса	308
8.4.2	Покрытие вершин путями	309
8.5	Ориентации графа и его раскраски	311
8.5.1	Теорема Роя-Галлаи	312
8.5.2	Ядро оргграфа и списочные раскраски рёбер	312
8.6	Оргграфы исходящей степени не менее 2	314
8.7	Циклический базис оргграфа	319
8.8	Четные оргграфы	321
8.8.1	Ориентированный циклический базис и четные циклы	324
8.8.2	Редукция	325
8.8.3	Основная теорема	327
8.8.4	Условия существования слабого двойного треуголь- ника	333
8.8.5	Критерии четности оргграфа	348
8.8.6	Снова о раскрасках гиперграфа в два цвета	350
9	Сети и потоки	351
9.1	Теорема Форда-Фалкерсона	351
9.2	Целочисленные сети	353
9.3	Рёберная теорема Менгера	354
9.4	Максимальный поток в произвольной сети	356
10	Теория Рамсея	359
10.1	Числа Рамсея	359
10.1.1	Существование. Оценки сверху	359
10.1.2	Экстремальные примеры и оценки снизу	361
10.1.3	Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов	363
10.2	Числа Рамсея больших размерностей	364
10.3	Числа Рамсея для произвольных графов	365
10.4	Индукцированная теорема Рамсея	367
10.4.1	Случай двудольного графа	367
10.4.2	Случай произвольного графа	369

11 Экстремальные графы	373
11.1 Наследственное свойство	373
11.2 Задача о запрещенном подграфе	374
11.2.1 Теорема Турана	374
11.2.2 Графы без полного двудольного подграфа	376
11.2.3 Корни из единицы в F_q и графы без $K_{2,n+1}$	381
12 Остовные деревья	385
12.1 Количество остовных деревьев	385
12.2 Количество висячих вершин	387
12.2.1 Теорема о промежуточных значениях	387
12.2.2 Минимальная степень и количество висячих вершин	388
12.2.3 Остовные деревья в графах с вершинами степеней 1	
и 2	392
12.2.4 Экстремальные примеры	397
12.3 Непересекающиеся остовные деревья	397
13 Графы и многочлены	401
13.1 Хроматический многочлен	401
13.1.1 Корни хроматического многочлена	402
13.2 Многочлен Татта	405
13.2.1 Многочлен Татта и ранговый многочлен	406
13.2.2 Значения многочлена Татта	408
13.2.3 Универсальное свойство многочлена Татта	409
13.2.4 Многочлен Татта и хроматический многочлен	410
13.2.5 Многочлен Татта двойственного графа	412
13.3 Дискриминант графа	413
13.3.1 Дискриминант плоской триангуляции	415

Глава 1

Введение

Предисловие

Первые страницы, содержащие основные обозначения и самые простые факты из теории графов — далеко не самая интересная часть книги. Ни для автора, ни для продвинутого читателя, который вполне может эту часть прочитать по диагонали. В основном мы придерживаемся стандартных обозначений.

Отметим наиболее нестандартное обозначение в этой книге: для целых чисел $k \leq n$ через $[k..n]$ мы обозначаем множество всех целых чисел, не меньших k и не больших n .

1.1 Вершины и рёбра

Пусть G — граф. Что это такое в нашем понимании? Все как обычно, *граф* $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — *множество вершин* графа G , а $E(G)$ — *множество ребер* графа G . Если не упоминается обратное, граф считается неориентированным, тогда каждое его ребро — это неупорядоченная пара вершин. Про концы ребра $e = xy$ — вершины x и y — мы будем говорить, что они *соединены ребром e* . Соединённые ребром вершины мы будем называть *смежными*, также мы будем называть и рёбра, имеющие общий конец. Если вершина x — конец ребра e , то мы будем говорить, что x и e *инцидентны*. Количество вершин графа G мы будем обозначать через $v(G)$, а количество ребер — через $e(G)$.

Рёбра e и e' называются *кратными*, если у них совпадают оба конца. Ребро e называется *петлёй*, если начало и конец e совпадают. Как правило, мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер. В случаях, когда кратные рёбра или петли допускаются, об этом будет

сказано.

Определение 1.1. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $N_G(v)$ мы будем обозначать *окрестность* вершины v — множество всех вершин графа G , смежных с v . Для любого множества вершин $U \subset V(G)$ через $N_G(U)$ мы будем обозначать множество всех вершин графа G , смежных хотя бы с одной вершиной множества U .

Через K_n мы будем обозначать *полный* граф на n вершинах — граф, у которого любые две различные вершины соединены одним ребром. Через \overline{G} мы будем обозначать *дополнение* графа G , то есть, граф на вершинах из $V(G)$, ребра которого дополняют $E(G)$ до множества ребер полного графа. Граф \overline{K}_n мы будем называть *пустым*.

Отметим, что пустой граф — это не пустое множество, а граф без рёбер. Более того, граф в нашем понимании — это не просто множество вершин и рёбер, а еще и отношения смежности и инцидентности.

Определение 1.2. 1) Для вершины $x \in V(G)$ через $d_G(x)$ обозначим *степень* вершины x в графе G , то есть, количество рёбер графа G , инцидентных x .

2) Минимальную степень вершины графа G обозначим через $\delta(G)$.

3) Максимальную степень вершины графа G обозначим через $\Delta(G)$.

Лемма 1.1. 1) *Сумма степеней всех вершин графа G равна $2e(G)$.*

2) *Количество вершин нечетной степени в любом графе чётно.*

Первое утверждение очевидно следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого.

Определение 1.3. Граф G называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы. Если все эти степени равны k , мы также будем называть G регулярным графом степени k .

1.2 Подграфы

Граф H является *подграфом* графа G , если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Особо выделим два важных класса подграфов — *остовные* и *индуцированные*.

Подграф H графа G — *остовный*, если $V(H) = V(G)$.

Пусть $U \subset V(G)$. Через $G(U)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве вершин U . Эта запись означает, что $V(G(U)) = U$, а $E(G(U))$ состоит из всех рёбер множества $E(G)$, оба конца которых лежат в U .

Пусть $F \subset E(G)$. Через $G(F)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве рёбер F . Это значит, что $E(G(F)) = F$, а $V(G(F))$ состоит из всех вершин множества $V(G)$, инцидентных хотя бы одному ребру из F . Кроме того, мы будем использовать обозначение $G[F]$ для графа $(V(G), F)$.

1.3 Удаление и стягивание рёбер

Определение 1.4. 1) Для любого ребра $e \in E(G)$ обозначим через $G - e$ граф, полученный из G в результате удаления ребра e (то есть, $G - e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$).

2) Пусть e — ребро, соединяющее пару вершин из $V(G)$, не обязательно входящее в $E(G)$. Через $G + e$ мы будем обозначать граф, полученный из G в результате добавления ребра e (если $e \notin E(G)$, то $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$, а если $e \in E(G)$, то $G + e = G$).

3) Для любого множества ребер $F \subset E(G)$ обозначим через $G - F$ граф, полученный из G в результате удаления ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$).

4) Для любой вершины $v \in V(G)$ обозначим через $G - v$ граф, полученный из G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер. Для любого множества вершин $U \subset V(G)$ обозначим через $G - U$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества U и всех инцидентных им ребер.

Определим гораздо более сложно описываемую операцию — *стягивание* ребра. В большинстве глав мы имеем дело с графами без петель и кратных рёбер и эту операцию удобно определить следующим образом.

Определение 1.5. Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра $e = xy$. Это означает, что граф $G \cdot e$ получается из графа $G - x - y$ добавлением новой вершины w , которая будет смежна в графе $G \cdot e$ со всеми вершинами графа G , смежными в G хотя бы с одной из вершин x и y .

Для вершин этих графов мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

Таким образом, при описанной операции концы x и y ребра e стягиваются в новую вершину w . При определенном таким образом стягивании ребра не возникают ни петли, ни кратные рёбра. Для тех случаев, когда они нам понадобятся (в главах 12–13), мы дадим более сложное определение стягивания ребра (название операции мы не будем менять, но изменим обозначение).

Определение 1.6. Пусть G — граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра, а $e \in E(G)$ — ребро с концами x и y , причем не петля. Определим граф $G * e$ следующим образом. Положим $V(G * e) = (V(G) \setminus \{x, y\}) \cup \{w\}$. Пусть отображение стягивания $\varphi : V(G) \rightarrow V(G * e)$ таково, что $\varphi(x) = \varphi(y) = w$ и $\varphi(z) = z$ для остальных вершин z .

Для любого ребра $f = ab \in E(G - e)$ пусть $\varphi(f)$ — ребро графа $G * e$ с концами $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, а других рёбер в определяемом графе нет.

Будем говорить, что граф $G * e$ получен из G в результате *стягивания* ребра e .

Замечание 1.1. Отображение $\varphi : E(G - e) \rightarrow E(G * e)$, определенное выше — биекция. Далее мы будем отождествлять соответствующие друг другу при этой биекции рёбра, и работать с множеством рёбер $E(G * e)$, как с $E(G - e)$.

1.4 Подразбиение графа

Определение 1.7. 1) Граф H' называется *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

2) Вершины графа H' , являющиеся вершинами графа H (то есть, не являющиеся внутренними вершинами добавленных путей), называются *главными*.

3) Через $G \supset H$ будем обозначать, что граф G содержит в качестве подграфа подразбиение графа H .

Подразбиение графа — один из важных объектов для работы с планарными графами, который появляется в знаменитой теореме Куратовского (6.2). Однако, это понятие появится и в других главах. Отметим, что во многих работах о планарных графах подразбиение называют гомотопическим образом графа.

1.5 Пути, циклы и маршруты

Определение 1.8. 1) Последовательность вершин $a_1 a_2 \dots a_n$ графа G , в которой $a_i a_{i+1} \in E(G)$ для всех $i \in [1..n - 1]$ называется *маршрутом*.

2) Мы будем говорить, что этот маршрут *проходит* по рёбрам $a_1 a_2, \dots, a_{n-1} a_n$ и по вершинам a_1, a_2, \dots, a_n .

3) Маршрут называется *замкнутым*, если $a_1 = a_n$.

Отметим, что вершины маршрута *не обязательно различны*. Более того, рёбра, по которым проходит маршрут, *не обязательно различны*.

Определение 1.9. 1) *Путь* — это маршрут $a_1a_2 \dots a_n$, не проходящий ни по какому ребру дважды.

2) Кроме того, мы будем говорить, что путь — это подграф P графа G , в котором $V(P) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $E(P) = \{a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n\}$.

3) Вершины a_1 и a_n называются *концами* пути.

4) Путь называется *простым*, если все вершины a_1, \dots, a_n — различны.

5) *Длина* пути — это количество его рёбер.

Определение 1.10. *Расстоянием* между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего пути между ними. Обозначение: $\text{dist}_G(x, y)$

Итак, путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем нисколько не мешает изложению материала. Мы будем часто применять термин *ху-путь* для подчеркивания того, что концы этого пути — это вершины x и y .

Определение 1.11. 1) *Цикл* — это путь, начало которого совпадает с концом.

2) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф P графа G , в котором $V(P) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $E(P) = \{a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n, a_na_1\}$.

3) Цикл называется *простым*, если все вершины a_1, \dots, a_n — различны.

4) *Длина* цикла — это количество его рёбер.

Как и в ситуации с путём, цикл — это одновременно последовательность вершин и подграф. Для цикла нет смысла выделять одну из вершин, и называть ее началом и концом цикла. Более того, мы будем считать, что цикл не изменяется при циклической перестановке его вершин.

Лемма 1.2. 1) *Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z' , что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$.*

2) *Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.*

Доказательство. 1) Рассмотрим любую вершину a нашего цикла и пойдем от нее до тех пор, пока не окажемся в вершине, в которой уже были.

Это, очевидно, произойдет (мы должны вернуться в a). Пусть первая повторившаяся вершина — это b . Тогда в вершине b мы закончим, получив простой цикл, вершины и ребра которого входят в исходный цикл.

2) Предположим, что наш цикл — не простой и начнем, как в предыдущем пункте: найдем первую повторившуюся вершину b . Тогда можно изменить порядок обхода нашего большого цикла Z в вершине b и разомкнуть его на два цикла: простой цикл Z' , описанный в пункте 1 и цикл Z_1 из оставшихся рёбер цикла Z . Эти циклы имеют общую вершину v и $e(Z) = e(Z_1) + e(Z')$, а значит, либо $e(Z')$ нечетно (тогда цикл Z' — искомым), либо $e(Z_1)$ нечетно, тогда продолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом Z_1 . \square

1.5.1 Длины циклов и минимальная степень

Лемма 1.3. Если $\delta(G) \geq 2$, то в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$ и простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

Доказательство. Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 a_2 \dots a_n$ в нашем графе G . Из его последней вершины a_n выходит хотя бы $\delta(G) - 1$ ребер в вершины, отличные от a_{n-1} . Так как путь P нельзя продлить, вершина a_n смежна только с вершинами пути P . Пусть a_m — вершина наименьшего номера, смежная с a_n . Тогда в множестве $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежат не менее $\delta(G)$ концов выходящих из a_n ребер, следовательно, в этом множестве хотя бы $\delta(G) \geq 2$ вершин. Значит, в цикле $a_m \dots a_{n-1} a_n$ не менее $\delta(G) + 1$ вершин. Теперь наличие пути длины хотя бы $\delta(G)$ очевидно. \square

Лемма 1.4. Пусть $t \in \mathbb{N}$. Для любого графа G с $e(G) \geq t \cdot v(G)$ существует подграф G' с $\delta(G') \geq t + 1$.

Доказательство. Предположим, что $\delta(G) < t + 1$. Тогда в графе есть вершина v_1 степени не более t . Пусть $G_1 = G - v_1$, тогда

$$v(G_1) = v(G) - 1, \quad e(G_1) = e(G) - d_G(v_1) \geq t \cdot (v(G)) - 1 = t \cdot v(G_1).$$

Аналогично, на i шаге мы будем удалять из графа G_i очередную вершину степени не более t и получать такой подграф G_{i+1} , что

$$v(G_{i+1}) = v(G_i) - 1 \quad \text{и} \quad e(G_{i+1}) \geq t \cdot v(G_{i+1}).$$

Поскольку такое неравенство на количество рёбер очевидно не выполняется для графа на одной вершине, то процесс удаления вершин окончится и на некотором шаге мы получим такой граф G_k , что $\delta(G_k) \geq t + 1$. \square

Непосредственно из этих двух лемм выводится следующее утверждение.

Следствие 1.1. Пусть $t \in \mathbb{N}$. Если $e(G) \geq t \cdot v(G)$, то в графе G есть простой путь длины хотя бы $t+1$ и простой цикл длины хотя бы $t+2$.

1.6 Связные графы. Деревья

Определение 1.12. 1) Вершины a и b графа G называются *связанными*, если в графе существует путь между ними.

2) Граф называется *связным*, если любые две его вершины связаны.

3) Очевидно, связанность вершин — отношение эквивалентности, и все вершины графа по этому отношению разбиваются на классы эквивалентности — множества попарно связанных вершин. Эти классы эквивалентности мы будем называть *компонентами связности* графа G .

4) Через $c(G)$ обозначим количество компонент связности графа G

Понятно, что у связного графа ровно одна компонента связности — множество всех его вершин. Часто под компонентами связности графа G подразумевают максимальные связные подграфы этого графа, то есть, индуцированные подграфы на компонентах связности в смысле нашего определения.

Определение 1.13. 1) *Дерево* — это связный граф без циклов.

2) *Лес* — это граф без циклов.

3) Вершина x графа G , имеющая степень 1, называется *висячей вершиной* или *листом*.

Разумеется, индуцированный подграф на каждой компоненте связности леса — это дерево. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.

Лемма 1.5. 1) В дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро.

2) У любого связного графа существует *остовное дерево* (то есть, *остовный подграф, являющийся деревом*).

Доказательство. 1) Докажем утверждение индукцией по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна. Рассмотрим дерево T с $n \geq 2$ вершинами. По лемме 1.3 в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа T на $n \geq 2$ вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева T есть висячая вершина a . Понятно, что граф $T - a$ также связан и не

имеет циклов, то есть, это дерево на $n - 1$ вершинах. По индукционному предположению мы имеем $e(T - a) = n - 2$, откуда очевидно следует, что $e(T) = n - 1$.

2) Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным. Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. Понятно, что рано или поздно это произойдет, так как с каждым шагом уменьшается количество рёбер, а оно изначально конечно. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа. \square

Следствие 1.2. 1) У дерева с более чем одной вершиной есть не менее двух висячих вершин.

2) У любого связного графа на n вершинах не менее, чем $n - 1$ ребро.

Доказательство. 1) Если в дереве T не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем $2v(T) - 1$. Однако, она же по пункту 1 леммы 1.5 равна $2e(G) = 2v(G) - 2$, противоречие.

2) Утверждение очевидно. \square

Лемма 1.6. Граф G является деревом тогда только тогда, когда для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

Доказательство. \Leftarrow Предположим, что в графе G существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф очевидно связан. Если в графе есть цикл, то легко получить противоречие: между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит, G — дерево.

\Rightarrow Пусть G — дерево, тогда понятно, что между любыми двумя его вершинами есть путь. Пусть существует два разных простых ab -пути P_1 и P_2 . Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине s и их первые рёбра не совпадают. Пойдем по этим путям до их первого пересечения в вершине d (Понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых sd -пути без общих внутренних вершин, которые, очевидно, образуют цикл. Противоречие. \square

1.7 Двудольные графы

Определение 1.14. 1) Раскраской вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \rightarrow [1..k]$. Раскраска ρ называется правильной,

если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v .

2) Граф называется *двудольным*, если его вершины можно правильно покрасить в два цвета.

О правильных раскрасках вершин мы подробнее поговорим в соответствующей главе, сейчас же наш предмет изучения — двудольный граф. Часто бывает удобно, говоря о двудольном графе, разбивать его вершины на две *доли* — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двучетной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф G представим в виде $(V_1(G), V_2(G), E(G))$, где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

Ниже мы сформулируем и докажем критерий двудольности графа.

Лемма 1.7. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

Доказательство. \Rightarrow . Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.

\Leftarrow . Можно считать, что наш граф G связан, иначе рассмотрим вопрос отдельно для каждой компоненты связности. Выделим в связанном графе G остовное дерево T . Легко понять, что вершины дерева T можно правильным образом покрасить в два цвета: выделим любую вершину a и покрасим в цвет 1 вершины на нечетном расстоянии от a , а в цвет 2 — саму a и вершины на четном расстоянии от a .

Докажем, что получилась правильная раскраска графа G . Пусть это не так, и нашли две смежные вершины x и y одного цвета. Рассмотрим простые пути P_x и P_y от a до x и y соответственно. В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число. Отрезав от P_x и P_y их общее начало (если такое есть) мы получим xy -путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy , при добавлении этого ребра образуется нечетный цикл. Противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов обязательно является двудольным.

□

1.8 Связность

Приступим к самому неэлементарному разделу введения. Подробнее о связности мы поговорим в соответствующей главе. Сейчас же мы лишь дадим определения и расскажем о блоках и точках сочленения.

Определение 1.15. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

2) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности графа $G - R$.

Здесь и далее мы будем для $x \in V(G)$ отождествлять обозначения x и $\{x\}$. Соответственно, предыдущее определение переносится и на вершины графа G (как одновершинные множества).

Определение 1.16. 1) *Вершинная связность* $\kappa(G)$ — это минимальное количество вершин в разделяющем множестве $R \subset V(G)$ графа G .

2) Будем говорить, что граф G является *k -связным*, если $\kappa(G) \geq k+1$ и $\kappa(G) \geq k$ (то есть, минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин).

Определение 1.17. 1) *Рёберная связность* $\lambda(G)$ — это минимальное количество рёбер в разделяющем множестве $R \subset E(G)$ графа G .

2) Будем говорить, что граф G является *рёберно k -связным*, если $\lambda(G) \geq k$ (то есть, минимальное рёберное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k рёбер).

1.8.1 Части разбиения

Определение 1.18. Пусть S — разделяющее множество графа G . Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью S -разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить множеством S , но любая другая вершина графа G отделена от A множеством S .

Множество всех частей разбиения графа G разделяющим множеством S мы будем обозначать через $\text{Part}(S)$.

Нетрудно понять, что часть $A \in \text{Part}(S)$ есть объединение компоненты связности графа $G - S$ и самого множества S . Мы вводим это понятие потому, что с ним удобно работать. В главе **Связность** мы обобщим это понятие и определим части разбиения графа набором разделяющих множеств. Здесь мы приводим определение части разбиения потому, что это понятие понадобится нам раньше, чем в главе связность.

Замечание 1.2. 1) Пусть H_1, \dots, H_m — компоненты связности графа $G - S$. Тогда $\text{Part}(S) = \{H_1 \cup S, \dots, H_m \cup S\}$.

2) Пусть S — минимальное по включению разделяющее множество (то есть, любое его подмножество не разделяет граф). Тогда для любой

компоненты связности H_i и любой вершины $x \in S$ существует вершина $y \in H_i$, смежная с x . Доказательство этого утверждения несложно и содержится в главе **Связность**.

3) Пусть S — минимальное по включению разделяющее множество, $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$. Тогда из первых двух утверждений следует, что граф $G(F_i)$ связан для каждого $i \in [1..m]$.

1.8.2 Точки сочленения и блоки в связном графе

В этом разделе пусть G — связный граф.

Определение 1.19. Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

Блоком называется любой максимальный по включению двусвязный подграф графа G .

Замечание 1.3. Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждая его вершина смежна хотя бы с одной другой вершиной. Следовательно, любой блок графа G содержит хотя бы две вершины.

Лемма 1.8. Пусть a, b — точки сочленения графа G , причем $U \in \text{Part}(\{a\})$ — часть, содержащая b . Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Вершина b — точка сочленения графа $G(U)$.
- 2) Любая точка сочленения графа $G(U)$ является точкой сочленения графа G .

Доказательство. 1) Из определения ясно, что $U' = U \setminus \{b\}$ — компонента связности графа $G - a$. Следовательно, граф $G - U'$ связан и не содержит вершину b , поэтому множество $V(G) \setminus U$ содержится в одной компоненте связности W графа $G - b$. Рассмотрим отличную от W компоненту связности W' графа $G - b$. Понятно, что $W' \subset U$ и $a \notin W'$, поэтому W' — одна из компонент связности графа $G(U) - b$, которую b отделяет в этом графе от вершины a . Следовательно, b — точка сочленения графа $G(U)$.

2) Наоборот, рассмотрим точку сочленения b' графа $G(U)$. Очевидно, $b' \neq a$. Вершина b' разбивает множество $G(U)$ на несколько компонент связности, из которых ровно одна содержит вершину a . Пусть W — одна из компонент связности графа $G(U) - b'$, не содержащих a . Так как вершины из $U \setminus \{a\}$ не смежны с вершинами из $V(G) \setminus U$, то b' отделяет W от a и в графе G , то есть, является точкой сочленения графа G . \square

Построим двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого будут соответствовать всем точкам сочленения a_1, \dots, a_n графа G , а другой

— всем его блокам B_1, \dots, B_n (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in B_j$. Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения*.

Теорема 1.1. *Дерево блоков и точек сочленения — это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам.*

Доказательство. Связность $B(G)$ очевидно следует из связности графа G . Пусть a — точка сочленения, а блоки B_1 и B_2 связаны в графе $B(G)$ — a . Тогда очевидно, что a не разделяет множество вершин $V(B_1) \cup V(B_2)$. Таким образом, если висячая вершина графа $B(G)$ — a соответствует точке сочленения, эта точка сочленения не разделяет никакие две вершины графа G . Следовательно, все висячие вершины графа $B(G)$ соответствуют блокам графа G .

Предположим, в $B(G)$ есть простой цикл, тогда по доказанному выше все входящие в его блоки (а таких блоков хотя бы два!) вершины невозможно разделить ни одной из точек сочленения, то есть, все они должны входить в один блок, а не в несколько. Таким образом, $B(G)$ — дерево. \square

Определение 1.20. Назовем блок B *крайним*, если он соответствует висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.

Замечание 1.4. 1) Нетрудно понять, что блок графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит ровно одну точку сочленения.

2) Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждый его крайний блок содержит вершину, не являющуюся точкой сочленения.

3) Если у связного графа G есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока. В этом случае крайние блоки содержат ровно по одной точке сочленения.

1.8.3 Рёберные разделяющие множества и мосты

В этом разделе пусть G — связный граф.

Определение 1.21. Ребро $e \in V(G)$ называется *мостом*, если граф $G - e$ несвязен.

Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл. Если $e = xy$ — мост связного графа G , то нетрудно понять, что в графе $G - e$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и

$U_y \ni y$. Более того, если $F \subset E(G)$ — минимальное по включению разделяющее множество, то $G - F$ состоит ровно из двух компонент связности, причем концы каждого ребра множества F принадлежат разным компонентам.

1.9 Эйлеров путь и цикл

В этом разделе в рассматриваемых графах возможны кратные рёбра.

Определение 1.22. *Эйлеров путь* в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 1.2. *Пусть G — связный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Эйлеров цикл в графе G существует тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.*
- 2) *Эйлеров путь в графе G существует тогда и только тогда, когда в графе G не более двух вершин нечетной степени.*

Доказательство. 1) \Rightarrow Каждый раз, проходя через вершину v , эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому $d_G(v)$ четна.

\Leftarrow Пусть степени всех вершин четны. Докажем утверждение индукцией по количеству вершин и ребер в графе. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно. Степень вершины a после выхода из нее стала нечетной, за каждый проход пути через какую-либо вершину ее степень уменьшается на 2, четность степени при этом не изменяется. Таким образом, наш путь окончится именно в начальной вершине a , тем самым получится цикл Z .

Пусть V_1, \dots, V_k — компоненты связности графа $G - Z$. Степени всех вершин графа $G - Z$ четны, поэтому в каждом графе $G(V_i)$ есть эйлеров цикл Z_i . Поскольку исходный граф связан, то для каждого $i \in [1..k]$ существует вершина $u_i \in V_i$, лежащая на цикле Z . Тогда по вершине u_i несложно состыковать циклы Z и Z_i в один. Прделаав такую операцию последовательно для циклов Z_1, \dots, Z_k , мы получим эйлеров цикл в графе G .

2) \Rightarrow Пусть эйлеров путь имеет концы a и b . Каждый раз, проходя через вершину v , эйлеров путь проходит по двум ребрам, поэтому в случае $a = b$ степени всех вершин четны, а при $a \neq b$ в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b .

\Leftarrow Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть эйлеров цикл, который является и эйлеровым путем. Пусть в графе G ровно две вершины нечетной степени a и b . Добавим в граф ребро ab (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф G' , в котором все вершины имеют четную степень и по пункту 1 есть эйлеров цикл C . Удалим из цикла C добавленное ребро ab и получим эйлеров путь с концами a и b . \square

1.10 Ориентированные графы

Основным отличием *ориентированного графа* или просто *орграфа* от обычного графа является то, что каждое ребро орграфа имеет направление. Мы будем называть рёбра ориентированного графа *стрелками*, а множество всех рёбер ориентированного графа G стрелок мы будем обозначать через $A(G)$. Через $E(G)$ мы будем обозначать множество ребер орграфа G без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром). Пути и циклы в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу.

Для любой вершины v орграфа G мы через $N_G^+(v)$ обозначим множество вершин орграфа G , в которые выходят стрелки из v , а через $N_G^-(v)$ обозначим множество вершин орграфа G , из которых выходят стрелки в v . Тогда $N_G(v) = N_G^+(v) \cup N_G^-(v)$.

Для вершины $x \in V(D)$ через $d_D^+(x)$ мы будем обозначать *исходящую степень* вершины v , то есть, количество стрелок орграфа D , выходящих из вершины x . Через $d_D^-(x)$ мы будем обозначать *входящую степень* вершины v — количество стрелок орграфа D , входящих в вершину x . Через $\delta^+(D)$ и $\delta^-(D)$ мы будем обозначать минимальную исходящую и входящую степени вершин орграфа D , соответственно.

Определение 1.23. 1) Для неориентированного графа H его *ориентацией* является любой граф \overline{H} с $V(\overline{H}) = V(H)$, стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из $E(H)$. Таким образом, у графа H есть $2^{e(H)}$ ориентаций.

2) Для ориентированного графа D мы определим неориентированный граф \underline{D} с множеством вершин $V(D)$ и множеством рёбер $E(D)$

Удаление вершин и стрелок из орграфа мы будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа. Аналогично определим и стягивание стрелки. В этом определении подразумевается, что в орграфе нет *кратных стрелок* — двух стрелок с совпадающими началами и концами — а также петель.

Определение 1.24. Для стрелки $e \in A(D)$ через $D \cdot e$ мы обозначим орграф, полученный в результате *стягивания* стрелки $e = xy$. Это означает, что граф $D \cdot e$ получается из орграфа $D - x - y$ добавлением новой вершины w , из которой в орграфе $D \cdot e$ будут выходить стрелки в вершины множества $N_D^+(x) \cup N_D^+(y)$ и в которую в орграфе $D \cdot e$ будут входить стрелки из вершин множества $N_D^-(x) \cup N_D^-(y)$.

Для вершин этих графов мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

Под маршрутами, путями и циклами в орграфе будут подразумеваться *ориентированные* пути, циклы и маршруты, то есть, в соответствующих определениях каждая стрелка записывается в соответствие с ее ориентацией.

1.11 Гиперграф

Для *гиперграфа* \mathcal{H} мы будем применять для него такие же обозначения, как и для графа: множества *вершин* и *гиперребер* будем обозначать через $V(\mathcal{H})$ и $E(\mathcal{H})$ соответственно. Количество вершин и гиперребер мы будем обозначать через $v(\mathcal{H})$ и $e(\mathcal{H})$ соответственно. Главное отличие гиперграфа от обычного графа в том, что *гиперребро* — это произвольное подмножество $V(\mathcal{H})$, состоящее хотя бы из двух вершин. Поэтому удобно оперировать с гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Для вершины $v \in V(\mathcal{H})$ пусть $d_{\mathcal{H}}(v)$ — ее степень в гиперграфе \mathcal{H} , то есть, количество содержащих v гиперребер. Через $\Delta(\mathcal{H})$ и $\delta(\mathcal{H})$ обозначим *максимальную* и *минимальную* степени вершины гиперграфа \mathcal{H} , соответственно.

Для множества вершин $X \subset V(\mathcal{H})$ определим гиперграф $\mathcal{H} - X$ следующим образом: $V(\mathcal{H} - X) = V(\mathcal{H}) \setminus X$, а

$$E(\mathcal{H} - X) = \{R \setminus X\}_{R \in E(\mathcal{H})}.$$

Определение 1.25. 1) Будем называть последовательность *различных* вершин $a_1 a_2 \dots a_k$ *путём*, если существуют гиперребра e_1, e_2, \dots, e_{k-1} такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$.

2) Если, кроме того, существует гиперребро $e_k \ni a_k, a_1$, то мы назовем последовательность *различных* вершин $a_1 a_2 \dots a_k$ *циклом*.

Определение 1.26. Гиперграф \mathcal{H} называется *связным*, если любые две его вершины соединены путём.

Глава 2

Паросочетания

Начнём с определений.

Определение 2.1. 1) Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G .

2) Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G .

3) Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ *покрывает* ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e . Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v .

4) Паросочетание M графа G называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

5) Множество вершин $W \subset V(G)$ называется *доминирующим*, если оно покрывает все рёбра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном доминирующем множестве графа G .

6) Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *покрытием*, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном покрытии графа G .

В этой главе мы выясним много интересных фактов о введённых понятиях и их взаимоотношениях.

2.1 Чередующиеся и дополняющие пути

Определение 2.2. Пусть M — паросочетание в графе G . Назовём путь M -*чередующимся*, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не вхо-

дящие в M . Назовём M -чередующийся путь M -дополняющим, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M .

Отметим, что в любой M -дополняющем пути нечётное число рёбер и чётное число вершин.

Теорема 2.1. (С. Berge, 1957.) *Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда нет M -дополняющих путей.*

Доказательство. \Rightarrow . Пусть в графе G существует M -дополняющий путь $S = a_1a_2 \dots a_{2k}$. Тогда заменим входящие в M рёбра $a_2a_3, \dots, a_{2k-2}a_{2k-1}$ на не входящие в M рёбра $a_1a_2, a_3a_4, \dots, a_{2k-1}a_{2k}$, и тем самым получим большее паросочетание. Следовательно, M — не максимально.

\Leftarrow . Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M' , $|M'| > |M|$. Пусть N — множество рёбер, входящих ровно в одно из паросочетаний M и M' , $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in H$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов. Очевидно, в каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M' чередуются, а рёбер из M' в $E(H)$ больше, следовательно, для одной из компонент связности U графа H граф $G(U)$ — путь нечётной длины, в котором больше рёбер из M' . Легко понять, что $G(U)$ — это M -дополняющий путь. \square

2.2 Паросочетания в двудольном графе

Пусть $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$ — двудольный граф с долями $V_1(G)$ и $V_2(G)$.

Теорема 2.2. (Р. Hall, 1935.) *В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли $V_1(G)$ тогда и только тогда, когда для любого множества $U \subset V_1(G)$ выполняется $|U| \leq |N_G(U)|$.*

Замечание 2.1. Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть *условием Холла* для доли V_1 .

Доказательство. \Rightarrow . Очевидно.

\Leftarrow . Индукция по количеству вершин в графе. База для $|V_1(G)| = 1$ очевидна. Предположим, что для меньшего, чем G , графа утверждение уже доказано. Разберём два случая.

1. Пусть существует такое множество $A \subsetneq V_1(G)$, что $|A| = |N_G(A)|$.

Введём обозначения $B = N_G(A)$, $A' = V_1(G) \setminus A$, $B' = V_2(G) \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$. Очевидно, для графа G_1 выполняется условие и по индукционному предположению в графе G_1 существует паросочетание, покрывающее A .

Предположим, что условие не выполняется для графа G_2 , то есть, существует множество вершин $U \subset A'$, для которого $|N_{G_2}(U)| < |U|$. Но тогда

$$|N_G(U \cup A)| = |N_{G_2}(U)| + |N_G(A)| < |U| + |A| = |U \cup A|,$$

противоречие. Значит, в графе G_2 существует паросочетание, покрывающее все вершины из A' . Вместе эти два паросочетания дают искомое паросочетание в графе G .

2. Для любого множества $A \subsetneq V_1(G)$ выполняется $|N_G(A)| > |A|$.

Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1(G)$ и смежную с ней вершину $b \in V_2(G)$. Пусть $G' = G - a - b$. Для любого множества $A \subset V(G) \setminus \{a\}$ выполняется

$$|A| \leq |N_G(A)| - 1 \leq |N_G(A) \setminus \{b\}| = |N_{G'}(A)|,$$

поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V_1(G) \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание. \square

Следствие 2.1. 1) В регулярном двудольном графе существует совершенно паросочетание.

2) Регулярный двудольный граф степени k есть объединение k своих совершенных паросочетаний.

Доказательство. 1) Пусть степени всех вершин регулярного графа равны k . Проверим условие Холла. Пусть $A \subset V_1(G)$, тогда из вершин A выходит $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $N_G(A)$, а в каждую вершину $b \in N_G(A)$ входит не более, чем k рёбер из вершин множества A . Следовательно, $|N_G(A)| \geq |A|$ и по теореме 2.2 в графе G существует паросочетание M , покрывающее $V_1(G)$. Однако, в регулярном графе $|V_1(G)| = |V_2(G)|$ и следовательно, паросочетание M покрывает все вершины из $V_2(G)$.

2) Очевидно, $G - M$ — регулярный двудольный граф степени $k - 1$. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний. \square

Задача 2.1. В одной далекой стране каждый юноша хочет жениться на k знакомых ему девушках. Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого набора юношей M количество девушек, знакомых хотя бы одному юноше из M , не меньше $k \cdot |M|$.

Теорема 2.3. (D.König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.

Доказательство. Пусть M — максимальное паросочетание в графе G , U_1 — множество всех непокрытых этим паросочетанием вершин из $V_1(G)$, U_2 — множество непокрытых M вершин из $V_2(G)$. Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины $V_1(G)$ на два множества: Y_1 — те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M -чередующимся путям, а Z_1 — вершины, до которых дойти таким образом нельзя. Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины $V_2(G)$ на два множества: Y_2 — те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M -чередующимся путям, а Z_2 — вершины, до которых дойти таким образом нельзя.

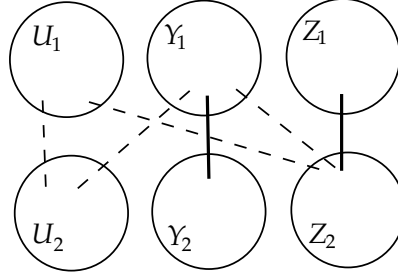


Рис. 2.1: Структура графа G .

Далее мы выясним, как должны проходить рёбра паросочетания M и остальные рёбра графа G между определенными выше множествами вершин. На рисунке 2.1 сплошными линиями показаны рёбра паросочетания M , пунктирными линиями — невозможные рёбра. Далее мы объясним, почему граф устроен именно так.

Любой M -чередующийся путь приходит в вершины множества Y_1 по ребрам из M , поэтому предыдущая вершина перед Y_1 на таком пути должна лежать в Y_2 . Рёбра паросочетания M не могут соединять Y_2 с Z_1 (иначе был бы M -чередующийся путь от U_1 до Z_1). Следовательно, паросочетание M соединяет друг с другом вершины множеств Y_1 и Y_2 а также множеств Z_1 и Z_2 , откуда следует $|Z_1| = |Z_2|$ и $|Y_1| = |Y_2|$.

Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ — доминирующее множество. Рёбра не из M не могут соединять вершины из $U_1 \cup Y_1$ с вершинами из Z_2 (иначе был бы M -чередующийся путь от U_1 до Z_2). Остаётся заметить, что не существует рёбер из U_2 до $U_1 \cup Y_1$. Если бы такое ребро существовало, то существовал бы M -дополняющий путь, что по теореме 2.1 для максимального паросочетания M невозможно.

Заметим, что $|M| = |B|$. Так как в любом доминирующем множестве не меньше вершин, чем в любом паросочетании, отсюда следует, что $\alpha'(G) = \beta(G)$. \square

Теоремы Холла и Кёнига выводятся друг из друга и могут быть доказаны одним и тем же методом. Мы специально привели разные доказательства, чтобы оставить простор для работы читателю.

Задача 2.2. а) Выведите теорему Холла (2.2) из теоремы Кёнига (2.3).

б) Выведите теорему Кёнига из теоремы Холла.

в) Докажите теорему Холла, увеличивая максимальное паросочетание с помощью метода чередующихся путей.

2.3 Соотношения между α , β , α' и β'

Начнём с очевидного.

Замечание 2.2. Очевидно, $U \subset V(G)$ — независимое множество тогда и только тогда, когда $V(G) \setminus U$ — доминирующее множество. Поэтому $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.

Следующий результат выглядит очень похожим по формулировке, но является гораздо более содержательным.

Теорема 2.4. (Т. Gallai, 1959). Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

Доказательство. \leq . Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$. Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество из $|U|$ рёбер F , покрывающее U . Тогда $M \cup F$ — покрытие, следовательно,

$$\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G), \quad \text{откуда} \quad \alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G).$$

\geq . Пусть L — минимальное рёберное покрытие ($|L| = \beta'(G)$), а $H = G[L]$. Тогда $v(H) = v(G)$. Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте из k компонент связности графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H . Очевидно, $\alpha'(G) \geq |N| = k$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - k = v(G) - k$, откуда следует $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$. \square

Следствие 2.2. Пусть G — двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Доказательство. По теореме 2.3 для двудольного графа выполняется соотношение $\alpha'(G) = \beta(G)$. По замечанию 2.2 и теореме 2.4 мы имеем

$$\alpha(G) + \beta(G) = v(G) = \alpha'(G) + \beta'(G),$$

откуда немедленно следует доказываемое утверждение. \square

2.4 Паросочетания с предпочтениями

Иногда вершинам не всё равно, с какими вершинами “вступать в паросочетание”. Предположим, что каждая вершина имеет список предпочтений, то есть, упорядочивает инцидентные ей рёбра. Наша задача построить такое паросочетание M (не обязательно максимальное), что в нём не будет ребра $e = ab$, которое обе вершины a и b хотели бы поменять на свободные рёбра. Дадим строгие определения.

Определение 2.3. 1) Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано линейное отношение (нестрогого) порядка \leq_v на множестве всех инцидентных v рёбер из $E(G)$. Тогда $\leq = \{\leq_v\}_{v \in V(G)}$ — *множество предпочтений*.

Для двух инцидентных вершине v рёбер e, f мы будем использовать запись $e <_v f$ для записи строгого неравенства, если такое имеет место.

2) Паросочетание M называется *стабильным* для множества предпочтений \leq , если для любого ребра $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец v и $f \leq_v e$.

Следующую теорему иногда называют “Stable marriage theorem”.

Теорема 2.5. (D. Gale, L. Shapley, 1962.) Пусть G — двудольный граф. Тогда для любого множества предпочтений \leq в графе G существует стабильное паросочетание.

Доказательство. Будем считать вершины одной доли мужчинами, а вершины другой доли — женщинами, а наше паросочетание будет состоять из семейных пар.

Изначально наше паросочетание будет пустым, оно будет изменяться пошагово. Опишем шаг алгоритма изменения паросочетания. Сначала действуют мужчины: каждый *неженатый* (то есть, не покрытый паросочетанием) мужчина выбирает женщину, которая ему больше всех нравится (то есть, наивысшую в своем предпочтении) из тех, которым он еще не делал предложения (если такая есть), после чего делает ей предложение. Затем действуют женщины: каждая из них рассматривает всех мужчин, кто сделал ей предложение и нравится ей строго больше,

чем ее муж (если он есть). Если это множество непусто, она выбирает из них того, кто нравится ей больше всего (если таких несколько, то любого из них) и выходит за него замуж (вместо ее прежнего мужа, если он был).

Конечность алгоритма очевидна: никакой мужчина не делает предложение одной женщине дважды. Пусть в результате получилось паросочетание M . Докажем, что M стабильно. Рассмотрим ребро $uw \in E(G) \setminus M$ (u — мужчина). Если u делал предложение w , но ему отказали, то w нашла мужа u' , который ей нравится не меньше, чем u (то есть, существует ребро $u'w \in M$, для которого $uw \leq_w u'w$). Если же u не делал предложения w , то в процессе алгоритма нашел жену w' , которая нравится ему не меньше, чем w (то есть, существует ребро $uw' \in M$, для которого $uw \leq_u uw'$). Таким образом, построенное паросочетание стабильно. \square

2.5 Паросочетания в произвольном графе

Мы докажем необходимое и достаточное условие наличия в графе совершенного паросочетания. Этот результат принадлежит Татту (1947 г). Мы приведём теорему с более поздним доказательством Ловаса (1973 г).

2.5.1 Теорема Татта о совершенном паросочетании

Определение 2.4. Для произвольного графа G через $o(G)$ обозначим количество нечётных компонент связности графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема 2.6. (W. T. Tutte, 1947.) В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leq |S|$.

Доказательство. \Rightarrow . Необходимость условия почти очевидна. Пусть $S \subset V(G)$, а M — совершенное паросочетание. Тогда одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G - S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром паросочетания M , откуда следует требуемое неравенство.

\Leftarrow . Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания. Тогда, в частности, $o(G) \leq |\emptyset| = 0$, то есть, $v(G)$ чётно.

Пусть G^* — максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания. Для любого $S \subset V(G)$

очевидно, выполняется неравенство $o(G^* - S) \leq o(G - S) \leq |S|$. Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$. Очевидно, G^* — не полный граф, поэтому $U \neq V(G)$.

Лемма 2.1. *Граф $G^* - U$ — объединение нескольких несвязанных друг с другом полных графов.*

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$. Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.

Ввиду максимальной графа G^* существует совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$ и совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$. Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$. Пусть $H = (V(G), M_1 \cup M_2)$. Очевидно, граф H — несвязное объединение чётных циклов, в каждом из которых чередуются рёбра паросочетаний M_1 и M_2 . На вершинах любой компоненты связности графа H существует совершенное паросочетание с рёбрами из M_1 и совершенное паросочетание с рёбрами из M_2 . Рассмотрим два случая.

1. *Пары вершин x, z и y, w лежат в разных компонентах связности W_1 и W_2 графа H соответственно.*

Тогда на вершинах множества W_1 мы выберем рёбра паросочетания M_2 , на вершинах множества W_2 мы выберем рёбра паросочетания M_1 , а в остальных компонентах связности графа H — любого из этих паросочетаний. В итоге получится совершенное паросочетание графа G^* , противоречие.

2. *Все четыре вершины x, z, y, w лежат в одной компоненте связности W графа H .*

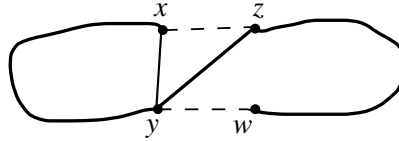


Рис. 2.2: Компонента, содержащая x, y, z и w .

Пусть $C = H(W)$. В силу симметричности x и z можно считать, что вершины расположены в чётном цикле C в порядке $ywzx$ (см. рисунок 2.2). Тогда существует путь $P = x..yz..w$, состоящий из двух дуг цикла C и ребра xz . Этот путь проходит все вершины цикла C и только их, причем содержит только рёбра графа G^* . Следовательно, существует полное паросочетание $M_W \subset E(G^*)$ на вершинах компоненты связности W .

В остальных компонентах связности графа H выберем рёбра любого из паросочетаний M_1 и M_2 , в итоге получится совершенное паросочетание графа G^* , противоречие. \square

Вернёмся к доказательству теоремы Татта. Итак, граф $G^* - U$ есть объединение нескольких несвязанных полных графов. В силу условия, среди них не более чем $|U|$ нечётных компонент. В каждой чётной компоненте связности графа $G^* - U$ мы построим полное паросочетание, в каждой нечётной компоненте — паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной, а оставшуюся вершину соединим с вершиной из U (при этом мы используем различные вершины множества U : их хватит ввиду $o(G^* - U) \leq |U|$). Наконец, мы разобьём на пары оставшиеся непокрытыми вершины множества U : это можно сделать, так как каждая из этих вершин смежна в графе G^* со всеми остальными. Таким образом, мы получили совершенное паросочетание в графе G^* , противоречие. \square

Теорема Татта играет очень важную роль в теории паросочетаний. Условие на количество нечётных компонент $o(G - S) \leq |S|$ называют *условием Татта*. Теперь для доказательства существования в графе совершенного паросочетания достаточно проверить условие Татта для всех множеств $S \subset V(G)$.

Пусть $S \subset V(G)$ таково, что $o(G - S) > |S|$. Такое множество мы будем называть *множеством Татта* графа G . По теореме Татта, если в графе G нет совершенного паросочетания, то в нём есть хотя бы одно множество Татта. Далее мы покажем, как применяется теорема Татта.

2.5.2 Совершенное паросочетание в регулярном графе

Теорема о совершенном паросочетании в кубическом графе (то есть, в графе, все степени вершин которого имеют степень 3) впервые была доказана Петерсеном в 1891 году. Доказательство было весьма непростым, но имея столь серьёзное средство, как теорема Татта, мы докажем даже более сильное утверждение намного проще.

Лемма 2.2. Пусть G — регулярный граф степени k , $U \subset V(G)$, $|U|$ нечётно, m — число рёбер, соединяющих вершины множества U с вершинами из $V(G) - U$. Тогда $m \equiv k \pmod{2}$.

Доказательство. Очевидно,

$$m = \left(\sum_{v \in U} d_G(v) \right) - 2e(G(U)) = k|U| - 2e(G(U)) \equiv k \pmod{2}.$$

□

Теорема 2.7. (J. Petersen, 1891.) Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе G есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Проверим условие Татта. Пусть $S \subset V(G)$, U_1, \dots, U_n — все нечётные компоненты связности графа $G - S$, m_i — количество рёбер из U_i в S . По лемме 2.2 все числа m_1, \dots, m_n нечётны. Так как не более чем два ребра графа G — мосты, то не более, чем два числа из m_1, \dots, m_n равны 1, а все остальные — не менее, чем 3.

Предположим, что совершенного паросочетания в графе G нет, тогда по теореме 2.6 можно выбрать множество Татта $S \subset V(G)$ (напомним, что $o(G - S) > |S|$). Так как количество вершин кубического графа G чётно, мы имеем $S \neq \emptyset$ и $o(G - S) \equiv |S| \pmod{2}$, следовательно, $n = o(G - S) \geq |S| + 2$. Тогда

$$\sum_{v \in S} d_G(v) \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq 3n - 4 \geq 3(|S| + 2) - 4 = 3|S| + 2 > 3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v),$$

что, очевидно, невозможно. □

Результат Петерсена в некотором смысле наилучший возможный: легко придумать связный кубический граф с тремя мостами, у которого нет совершенного паросочетания (см. рисунок 2.3).

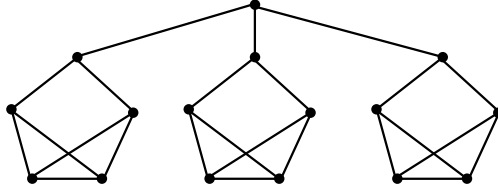


Рис. 2.3: Кубический граф без совершенного паросочетания.

Теорема 2.8. (J. Plesnik, 1972.) Пусть G — регулярный граф степени k с чётным числом вершин, причём $\lambda(G) \geq k - 1$, а граф G' получен из G удалением не более, чем $k - 1$ рёбер. Тогда в графе G' есть совершенное паросочетание.

Доказательство. Пусть множество $F \subset E(G)$ таково, что $G' = G - F$. Тогда $|F| \leq k - 1$.

Предположим, что условие Татта не выполняется и рассмотрим множество Татта $S \subset V(G')$ (возможно, $S = \emptyset$). Так как $o(G' - S) + |S| \equiv v(G) \equiv 0 \pmod{2}$, то из $o(G' - S) > |S|$ следует $o(G' - S) \geq |S| + 2$.

Пусть U_1, \dots, U_n — нечётные, а U_{n+1}, \dots, U_t — чётные компоненты связности графа $G' - S$. Для каждого $i \in [1..t]$ пусть α_i — количество рёбер из $E(G')$, соединяющих U_i с S , β_i — количество рёбер из F , соединяющих U_i с S , γ_i — количество рёбер из F , соединяющих U_i с остальными компонентами связности графа $G' - S$ и $m_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$. Тогда m_i — это количество рёбер графа G , соединяющих U_i с $V(G) \setminus U_i$. По лемме 2.2 для нечётных компонент связности (то есть, $i \in [1..n]$) мы имеем $m_i \equiv k \pmod{2}$, кроме того, $m_i \geq \lambda(G) \geq k - 1$, следовательно, $m_i \geq k$. Отсюда получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i \geq kn. \quad (2.1)$$

Отметим два очевидных факта:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \alpha_i + \sum_{i=1}^t \beta_i &\leq k \cdot |S|, \\ 2 \sum_{i=1}^t \beta_i + \sum_{i=1}^t \gamma_i &\leq 2|F| \leq 2k - 2, \end{aligned}$$

сложив которые, мы получим

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i + 3 \sum_{i=1}^t \beta_i + \sum_{i=1}^t \gamma_i \leq k(|S| + 2) - 2. \quad (2.2)$$

Из неравенств (2.1) и (2.2) получаем $kn \leq k(|S| + 2) - 2$ и, следовательно, $o(G' - S) = n < |S| + 2$, что противоречит доказанному выше. Таким образом, условие Татта выполняется и по теореме 2.6 в графе G' существует совершенное паросочетание. \square

Следствие 2.3. Пусть G — регулярный граф степени k с чётным числом вершин, причём $\lambda(G) \geq k - 1$. Тогда для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G , содержащее e .

Доказательство. Пусть $e = ab$, а e_1, \dots, e_{k-1} — остальные рёбра, инцидентные вершине a , пусть $G' = G - \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. По теореме 2.8, в графе G' есть совершенное паросочетание M . Очевидно, $M \ni e$. \square

2.5.3 Факторы регулярного графа

Определение 2.5. k -фактором графа G называется его остовный регулярный подграф степени k .

Совершенное паросочетание — это 1-фактор. Следующая теорема, очень похожая по формулировке, говорит о наличии 2-фактора.

Теорема 2.9. (J. Petersen, 1891.) *У регулярного графа чётной степени есть 2-фактор.*

Доказательство. Пусть G — регулярный граф степени $2k$. По теореме 1.2 в графе G есть эйлеров цикл C , обходящий в некотором порядке все рёбра. Зафиксируем направление обхода цикла C и ориентируем таким образом все рёбра графа G . Таким образом, получилась ориентация графа, в которой в каждую вершину входит k рёбер и из каждой вершины выходит k рёбер.

Мы построим граф G^* следующим образом. Разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2 . Для каждого ребра $xy \in E(G)$, если это ребро ориентировано от x к y , то проведём в графе G^* ребро x_1y_2 . Таким образом, $e(G^*) = e(G)$.

Несложно понять, что граф G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями $V_1 = \{v_1\}_{v \in V(G)}$ и $V_2 = \{v_2\}_{v \in V(G)}$. По следствию 2.1 в графе G есть совершенное паросочетание M^* . Проведём соответствующие рёбрам из M^* рёбра в графе G . Нетрудно понять, что получится 2-фактор M . \square

Следствие 2.4. 1) *Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов (то есть, остовных подграфов степени 2).*

2) *Для любого $r \leq k$ регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$ -фактор.*

Все остальные утверждения вида “у регулярного графа степени k есть фактор степени r ” без дополнительных условий на граф, увы, неверны.

Задача 2.3. Пусть $r < k$ — натуральные числа, хотя бы одно из них нечётно. Докажите, что существует регулярный граф степени k , не имеющий r -фактора (то есть, регулярного подграфа степени r).

Для доказательства существования факторов помогает условие о рёберной связности.

Следствие 2.5. *Пусть G — регулярный граф степени $2k + 1$, причём $\lambda(G) \geq 2k$, а $r \leq 2k + 1$. Тогда у графа G существует r -фактор.*

Доказательство. По теореме 2.8 в графе G есть совершенное паросочетание M . Граф $G' = G - M$ — регулярный граф степени $2k$, а значит, имеет регулярные факторы всех четных степеней $2t \leq 2k$. Следовательно, граф G' имеет регулярные факторы всех возможных нечетных степеней. Их дополнения до графа G будут его факторами всех возможных четных степеней. \square

Утверждение следствия 2.5 можно доказать при более слабых условиях на граф. Однако, доказательство использует более сложную технику — теорию факторов. Это и другие утверждения о факторах регулярных графов можно найти в разделе 2.6.4.

Мы приведем несложную теорему о существовании “почти регулярного фактора”.

Теорема 2.10. (С. Томассен, 1981.) Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны k или $k+1$, а $r < k$. Тогда существует остовный подграф H графа G , степени всех вершин которого равны либо r , либо $r+1$.

Доказательство. Спуск по r . База для $r = k$ очевидна, в этом случае подойдет $H = G$.

Переход $r \rightarrow r-1$. Пусть граф G имеет остовный подграф F , степени вершин которого равны r или $r+1$. Начиная с графа F , пока это возможно, будем производить следующую операцию: удалять ребро, соединяющее две вершины степени $r+1$. В результате получится подграф F' графа F , степени вершин которого равны r или $r+1$, в котором никакие две вершины степени $r+1$ не смежны.

Пусть V_{r+1} — множество всех вершин степени $r+1$ в графе F' . Можно считать, что $V_{r+1} \neq \emptyset$, иначе граф F' нам подходит. Пусть $V_r = V(G) \setminus V_{r+1}$. Пусть B — двудольный граф с долями V_{r+1} и V_r , ребра которого — это все ребра графа F' , соединяющие вершины V_{r+1} с V_r . По построению графа F' , для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r+1$, а для каждой вершины $y \in V_r$ мы имеем $d_B(y) \leq r$. Поэтому для доли V_{r+1} выполнено (и даже перевыполнено!) условие Холла: $|N_B(A)| > |A|$ для любого $A \subset V_{r+1}$. Тогда по теореме Холла (2.2) в графе B существует паросочетание M , покрывающее все вершины из V_{r+1} . Очевидно, граф $H = F' - M$ нам подходит. \square

Частным случаем этой теоремы является теорема Татта о почти регулярном факторе (следствие 2.6), впервые доказанная Таттом в 1978 году. Доказательство Татта использовало разработанную им теорию факторов, о которой мы расскажем дальше. Таким образом, Томассен нашел элементарное доказательство теоремы Татта.

Следствие 2.6. (W. T. Tutte, 1978.) Пусть G — регулярный граф степени k , $r < k$. Тогда существует остовный подграф H графа G , степени всех вершин которого равны либо r , либо $r + 1$.

2.5.4 Дефицит графа. Формула Бержа

А что делать в случае, когда в графе нет совершенного паросочетания?

Определение 2.6. Дефицитом графа G мы будем называть величину $\text{def}(G) = v(G) - 2\alpha'(G)$.

Замечание 2.3. 1) Дефицит графа G — это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G .

2) Очевидно, $\text{def}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G есть совершенное паросочетание.

3) Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления размера максимального паросочетания в графе:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \text{def}(G)}{2}. \quad (2.3)$$

Утверждение, которое мы докажем в следующей теореме, называется *формулой Бержа*.

Теорема 2.11. (C. Berge, 1958.) Для любого графа G выполняется равенство

$$\text{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} o(G - S) - |S|.$$

Доказательство. \geq . Пусть M — максимальное паросочетание графа G , $S \subset V(G)$, $n = o(G - S)$, а U_1, \dots, U_n — все нечётные компоненты связности графа $G - S$. Тогда в каждой нечётной компоненте связности U_i существует хотя бы одна вершина u_i , которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$. Следовательно, не менее, чем $n - |S|$ из вершин u_1, \dots, u_n не покрыты паросочетанием M , откуда следует неравенство $\text{def}(G) \geq o(G - S) - |S|$.

\leq . Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} o(G - S) - |S|.$$

Если $k = 0$, по теореме 2.6 в графе G есть совершенное паросочетание и $\text{def}(G) = 0$, этот случай тривиален. Пусть $k > 0$, W — множество из k новых вершин ($W \cap V(G) = \emptyset$), а граф H получен присоединением к G вершин множества W , причём каждая из вершин множества W будет смежна со всеми остальными вершинами графа H .

Покажем, что для графа H выполняется условие Татта. Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod{2}$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ чётно. Таким образом, достаточно проверить условие для непустых множеств $T \subset V(H)$. Если $T \not\supset W$, то граф $H - T$ связан и $o(H - T) \leq 1 \leq |T|$. Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то $o(H - T) = o(G - S) \leq k + |S| = |T|$. В обоих случаях условие Татта выполняется и по теореме 2.6 в графе H есть совершенное паросочетание N . Очевидно, тогда в графе G существует такое паросочетание M , что $|M| \geq |N| - k$, следовательно,

$$\alpha'(G) \geq |M| \geq \frac{v(G) + k}{2} - k = \frac{v(G) - k}{2},$$

откуда немедленно следует доказываемое неравенство. \square

2.5.5 Фактор-критические графы

Определение 2.7. 1) Граф G называется *фактор-критическим*, если для любой вершины $u \in V(G)$ у графа $G - u$ есть совершенное паросочетание.

2) Паросочетание M в графе G называется *почти совершенным*, если M покрывает все вершины графа G , кроме одной.

Замечание 2.4. 1) Очевидно, фактор-критический граф не имеет совершенного паросочетания, количество вершин фактор-критического графа нечётно.

2) Ввиду формулы (2.3) понятно, что если граф G — фактор-критический, то $\text{def}(G) = 1$.

3) Граф G является фактор-критическим тогда и только тогда, когда для любой его вершины $u \in V(G)$ существует почти совершенное паросочетание M_u , не покрывающее u .

Легко видеть, что для фактор-критического графа G и любой вершины $u \in V(G)$ выполняется равенство $\alpha'(G - u) = \alpha'(G)$. Гораздо интереснее, что это условие заставляет граф быть фактор-критическим. Это доказывается в следующей теореме, которую часто называют *леммой Галлаи*.

Теорема 2.12. (Т. Gallai, 1963.) Пусть связный граф G таков, что для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется равенство $\alpha'(G - u) = \alpha'(G)$. Тогда G — фактор-критический граф.

Доказательство. Рассмотрим множество Татта S , для которого $o(G - S) - |S| = \text{def}(G) = k$ (такое существует по теореме 2.11) и предположим, что $S \neq \emptyset$. Пусть $v \in S$, $G' = G - v$. Положим $S' = S \setminus \{v\}$.

Очевидно, $G' - S' = G - S$, откуда следует, что

$$\text{def}(G - v) = \text{def}(G') \geq o(G' - S') - |S'| = (o(G - S) - |S|) + 1 = \text{def}(G) + 1.$$

Тогда ввиду формулы (2.3) получается $\alpha'(G) \geq \alpha'(G - v) + 1$, что невозможно по условию. Следовательно, $S = \emptyset$ и, так как граф G связан, мы имеем $\text{def}(G) = o(G) \leq 1$. Однако, из условия теоремы очевидно, что у графа G нет совершенного паросочетания, следовательно, $\text{def}(G) = 1$ и граф G является фактор-критическим. \square

Из доказательства теоремы 2.12 мы извлечём следствие.

Следствие 2.7. Пусть G — фактор-критический граф. Тогда \emptyset — единственное множество Татта графа G .

Доказательство. Для любой вершины u фактор-критического графа G выполняется равенство $\alpha'(G - u) = \alpha'(G)$. Поэтому можно применить рассуждения из доказательства теоремы 2.12 и получить, что максимум $o(G - S) - |S|$ достигается только при $S = \emptyset$, причём этот максимум равен 1. Поскольку $o(G - S) - |S| \geq 1$ для любого множества Татта S , то непустых множеств Татта у фактор-критического графа нет. \square

2.5.6 Структурная теорема Галлаи-Эдмондса

В этом разделе мы докажем теорему о структуре максимального паросочетания в графе.

Для графа G введём следующие обозначения. Пусть $D(G)$ — множество из всех вершин $u \in V(G)$, для каждой из которых существует максимальное паросочетание M_u графа G , не покрывающее u . Пусть $A(G)$ — множество всех вершин графа G , не входящих в $D(G)$, но смежных хотя бы с одной вершиной из $D(G)$, а $C(G) = V(G) \setminus (A(G) \cup D(G))$. Следующее утверждение носит название *Stability lemma*.

Лемма 2.3. Пусть $a \in A(G)$. Тогда $D(G - a) = D(G)$, $A(G - a) = A(G) \setminus \{a\}$, $C(G - a) = C(G)$, $\alpha'(G - a) = \alpha'(G) - 1$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $D(G - a) = D(G)$.

\supset . Пусть $u \in D(G)$. Тогда существует максимальное паросочетание M_u графа G , не покрывающее u . Поскольку любое максимальное паросочетание графа G покрывает a , то $\alpha'(G - a) = \alpha'(G) - 1$ и более того, если $ax \in M_u$, то $M_u \setminus \{ax\}$ — максимальное паросочетание графа $G - a$, не покрывающее u . Таким образом, $D(G - a) \supset D(G)$.

С. Предположим, что существует максимальное паросочетание M' графа $G - a$, не покрывающее вершину $v \notin D(G)$. Пусть $w \in D(G)$ — смежная с $a \in A(G)$ вершина, а M_w — максимальное паросочетание графа G , не покрывающее w . Так как $v \notin D(G)$, максимальное паросочетание M_w покрывает вершину v .

Рассмотрим граф $H = G(M_w \cup M')$ — очевидно, он является объединением нескольких путей и чётных циклов. Пусть U — компонента связности графа H , содержащая v . Так как $d_H(v) = 1$, то $P = H(U)$ — путь с началом в вершине v . В пути P чередуются рёбра из M_w и M' , причём начинается путь ребром из M_w . Так как $d_H(a) = 1$, то вершина a либо не принадлежит пути P , либо является её концом (в этом случае последнее ребро пути принадлежит паросочетанию M_w). Рассмотрим несколько случаев.

а. Путь P кончается ребром из M' (см. рисунок 2.4а).

Рассмотрим паросочетание $M_v = M_w \triangle E(P)$ (симметрическая разность M_w и $E(P)$, то есть, рёбра, входящие ровно в одно из двух множеств). Очевидно, M_v — максимальное паросочетание графа G , не покрывающее v , поэтому $v \in D(G)$, противоречие.

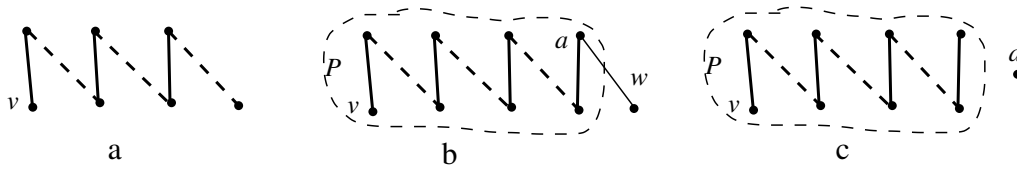


Рис. 2.4: Путь P .

б. Путь P кончается ребром из M_w , вершина a — конец пути P (см. рисунок 2.4б).

Рассмотрим паросочетание $M_v^* = (M_w \triangle E(P)) \cup \{aw\}$. Тогда M_v^* — максимальное паросочетание графа G , не покрывающее v , поэтому $v \in D(G)$, противоречие.

в. Путь P кончается ребром из M_w , $a \notin V(P)$ (см. рисунок 2.4с).

Рассмотрим паросочетание $M'' = M' \triangle E(P)$. Тогда $|M''| = |M'| + 1$, причём $M'' \subset E(G - a)$. Противоречие с максимальностью паросочетания M' .

Таким образом, наше предположение невозможно и $D(G - a) \subset D(G)$. \square

Задача 2.4. а) Пусть $a \in C(G)$. Докажите, что $D(G - a) \supset D(G)$, $A(G - a) \supset A(G)$, $C(G - a) \subset C(G)$, $\alpha'(G - a) = \alpha'(G) - 1$.

б) Пусть $a \in D(G)$. Докажите, что $D(G-a) \subset D(G) \setminus \{a\}$, $A(G-a) \subset A(G) \setminus \{a\}$, $C(G-a) \supset C(G)$, $\alpha'(G-a) = \alpha'(G)$.

Теорема 2.13. (Т. Gallai, 1964; J. Edmonds, 1965.) Пусть G — граф, U_1, \dots, U_n — компоненты связности графа $G(D(G))$, $D_i = G(U_i)$, $C = G(C(G))$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Граф C имеет совершенное паросочетание.
- 2) Графы D_1, \dots, D_n — фактор-критические.
- 3) Любое максимальное паросочетание M графа G состоит из совершенного паросочетания графа C , почти совершенных паросочетаний графов D_1, \dots, D_n и покрывает все вершины множества $A(G)$ рёбрами с концами в различных компонентах связности U_1, \dots, U_n .
- 4) $\text{def}(G) = n - |A(G)|$, $\alpha'(G) = \frac{v(G) + |A(G)| - n}{2}$.

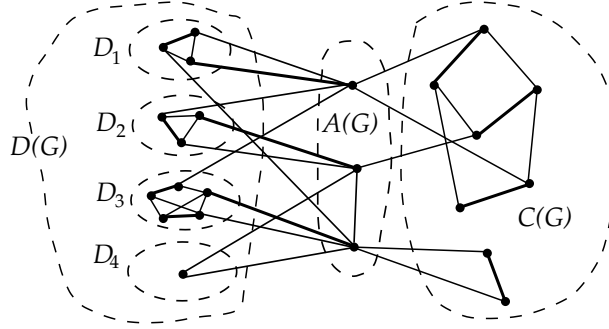


Рис. 2.5: Разбиение графа на множества $A(G)$, $D(G)$ и $C(G)$.

На рисунке 2.5 изображены множества $A(G)$, $D(G)$ и $C(G)$, а также максимальное паросочетание в графе G , которое выделено более толстыми ребрами.

Доказательство. 1) Последовательно удаляя вершины множества $A = A(G)$, по лемме 2.3 мы получим

$$D(G-A) = D(G), \quad A(G-A) = \emptyset, \quad C(G-A) = C(G),$$

$$\alpha'(G-A) = \alpha'(G) - |A|. \quad (2.4)$$

Это означает, что не существует рёбер, соединяющих вершины из $C(G-A)$ и $D(G-A)$. Каждое максимальное паросочетание M' графа $G-A$ покрывает все вершины множества $C(G)$, поэтому M' содержит совершенное паросочетание графа C . Тем самым, мы доказали пункт 1.

2) Из формулы (2.4) следует, что U_1, \dots, U_n — компоненты связности графа $G-A$. Для любой вершины $u \in U_i$ существует максимальное

паросочетание M_u графа $G - A$, не содержащее u . Так как U_i — компонента связности графа $G - A$, паросочетание M_u содержит максимальное паросочетание графа D_i (разумеется, не покрывающее вершину u). Следовательно, $\alpha'(D_i) = \alpha'(D_i - u)$ и по теореме 2.12 мы получаем, что граф D_i — фактор-критический.

3) Пусть M — максимальное паросочетание графа G , а M' получено из M удалением всех рёбер, инцидентных вершинам множества A . Тогда $|M'| \geq |M| - |A|$ и по формуле (2.4) понятно, что M' — максимальное паросочетание графа $G - A$. Более того, из $\alpha'(G - A) = \alpha'(G) - |A|$ следует $|M'| = |M| - |A|$, а значит, все вершины множества A покрыты в M различными рёбрами. Так как M' — максимальное паросочетание графа $G - A$, то по пунктам 1 и 2 очевидно, что M' содержит совершенное паросочетание графа C и почти совершенные паросочетания фактор-критических графов D_1, \dots, D_n . Значит, рёбра паросочетания M соединяют вершины A с непокрытыми M' вершинами различных компонент связности из U_1, \dots, U_n .

4) Из пункта 3 сразу же следуют оба равенства пункта 4. \square

Определение 2.8. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф. Мы будем говорить, что доля V_i (где $i \in \{1, 2\}$) *имеет запас*, если для любого множества вершин $A \subset V_i$ выполняется $|N_G(A)| > |A|$.

Замечание 2.5. Если доля V_1 имеет запас, то для графа G и этой доли “перевыполняется” условие Холла. Более того, для любой вершины $u \in V_2$ для графа $G - u$ и его доли V_1 выполняется условие Холла: для любого множества вершин $A \subset V_1$, очевидно, выполняется $|N_{G-u}(A)| \geq |A|$.

Следствие 2.8. Пусть G — граф, U_1, \dots, U_n — компоненты связности графа $G(D(G))$, $D_c(G) = \{U_1, \dots, U_n\}$. Пусть D_G — двудольный граф с долями $A(G)$ и $D_c(G)$, причем $a \in A$ и $U_i \in D_c(G)$ смежны тогда и только тогда, когда в графе G вершина a смежна хотя бы с одной вершиной компоненты из U_i . Тогда доля $A(G)$ имеет запас в графе D_G .

Доказательство. Нам нужно доказать, что в графе $D_G - U_i$ выполняется условие Холла для доли $A(G)$, для чего по теореме 2.2 достаточно показать, что в этом графе есть паросочетание, покрывающее долю $A(G)$.

Пусть $u \in U_i$, а M — максимальное паросочетание графа G , не покрывающее u . По теореме 2.13 паросочетание M должно покрывать все вершины множества $A(G)$ рёбрами с концами в различных компонентах связности U_1, \dots, U_n и одновременно содержать почти совершенное паросочетание графа $D_i = G(U_i)$, следовательно, все вершины из $U_i \setminus \{u\}$

разбиты на пары соединённых рёбрами из M . Таким образом, M не содержит рёбер, соединяющих $A(G)$ и U_i , следовательно, в графе $D_G - U_i$ есть максимальное паросочетание, покрывающее $A(G)$. \square

Следствие 2.9. Пусть $e \in E(G)$.

- 1) Если ребро e инцидентно вершине из $D(G)$, то существует максимальное паросочетание графа G , содержащее e .
- 2) Если ребро e соединяет две вершины из $A(G)$ или вершину из $A(G)$ с вершиной из $C(G)$, то не существует максимального паросочетания графа G , содержащего e .

Доказательство. 1) Пусть $u \in D(G)$, $e = uv$. Рассмотрим максимальное паросочетание M_u графа G , не покрывающее u . Из максимальной M_u следует, что оно покрывает вершину v , пусть $vw \in M_u$. Тогда $(M_u \setminus \{vw\}) \cup \{uv\}$ — максимальное паросочетание, содержащее ребро e .

- 2) Непосредственное следствие пункта 3 теоремы 2.13. \square

В заключение мы разберём несколько важных случаев, в которых разбиение Галлаи-Эдмондса тривиально.

1. Граф G имеет совершенное паросочетание.

В этом случае $D(G) = A(G) = \emptyset$, $C(G) = V(G)$.

2. Граф G — фактор-критический.

В этом случае $D(G) = V(G)$, $A(G) = C(G) = \emptyset$.

3. Двудольный граф $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$, в котором доля $V_1(G)$ имеет запас.

Тогда по теореме 2.2 для любой вершины $b \in V_2(G)$ в графе $G - b$ существует паросочетание M_b , покрывающее всю долю $V_1(G)$. Так как граф G двудольный, M — максимальное паросочетание графа G . Следовательно, в этом случае $D(G) = V_2(G)$, $A(G) = V_1(G)$, $C(G) = \emptyset$.

2.5.7 Барьеры

Определение 2.9. Множество $S \subset V(G)$, для которого $o(G - S) - |S| = \text{def}(G)$ называется *барьером*.

Замечание 2.6. 1) Барьер графа G — это такое множество вершин S , на котором достигается максимум в формуле Бержа (теорема 2.11).

- 2) Из пункта 4 теоремы 2.13 следует, что $A(G)$ — барьер графа G .

Однако, $A(G)$ — не единственный барьер. Более того, $A(G)$ в общем случае не является ни максимальным, ни минимальным по включению барьером. К тому же, ни пересечение, ни объединение двух барьеров не обязано быть барьером.

Задача 2.5. Докажите, что пересечение двух максимальных по включению барьеров графа G является барьером.

Определение 2.10. Для любого множества $X \subset V(G)$ пусть $O(X)$ — объединение всех нечетных компонент связности графа $G - X$.

Лемма 2.4. 1) Пусть $x \in A(G) \cup C(G)$, $G' = G - x$, B' — барьер графа G' . Тогда $B = B' \cup \{x\}$ — барьер графа G . В частности, x содержится хотя бы в одном барьере графа G .

2) Пусть B — барьер графа G . Тогда $B \cap D(G) = \emptyset$ и $O(B) \supset D(G)$.

3) Пусть B — барьер графа G , $x \in B$. Тогда $B' = B \setminus \{x\}$ — барьер графа $G' = G - x$.

Доказательство. 1) Так как любое максимальное паросочетание графа G покрывает x , мы имеем $\alpha'(G') = \alpha'(G) - 1$ и, следовательно, $\text{def}(G') = \text{def}(G) + 1$. Поэтому,

$$o(G - B) = o(G' - B') = |B'| + \text{def}(G') = |B'| + \text{def}(G) + 1 = |B| + \text{def}(G),$$

следовательно, B — барьер графа G . Так как $A(G')$ — барьер графа G' , то $A(G') \cup \{x\}$ — барьер графа G .

2) Пусть M — максимальное паросочетание графа G . Очевидно, M должно оставить непокрытой хотя бы по одной вершине в $o(B) - |B| = \text{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$. Поскольку M оставляет непокрытыми ровно $\text{def}(G)$ вершин, то M не покрывает ровно по одной вершине в $\text{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$ и покрывает все остальные вершины графа. В частности, M покрывает B , откуда следует, что $B \cap D(G) = \emptyset$.

Пусть $u \in D(G)$. Теперь можно рассмотреть компоненту связности U графа $G - B$, содержащую вершину u и максимальное паросочетание M_u графа G , не покрывающее u . Так как M_u не покрывает вершину компоненты связности U , из сказанного выше следует, что U — нечётная компонента. Следовательно, $D(G) \subset O(B)$.

3) Из пункта 2 следует, что $x \in A(G) \cup C(G)$, поэтому $\alpha'(G') = \alpha'(G) - 1$ и $\text{def}(G') = \text{def}(G) + 1$. Тогда

$$o(G' - B') = o(G - B) = |B| + \text{def}(G) = |B'| + \text{def}(G) + 1 = |B'| + \text{def}(G'),$$

следовательно, B' — барьер графа G' . \square

Замечание 2.7. 1) Таким образом, любая вершина множества $A(G) \cup C(G)$ входит хотя бы в один барьер, а вершины множества $D(G)$ в барьеры не входят.

2) Пусть B — барьер графа G , а M — максимальное паросочетание. Из доказательства пункта 2 леммы 2.4 следует, что M оставляет непокрытыми ровно по одной вершине в $\text{def}(G)$ нечётных компонентах связности графа $G - B$ и покрывает все остальные вершины графа. Вершины барьера B покрыты ребрами M , соединяющими их с вершинами различных нечётных компонент связности графа $G - B$.

3) Отметим, что по пункту 2 теоремы 2.13 мы имеем $O(A(G)) = D(G)$, то есть, для всех барьеров B графа G имеет место $O(B) \supset O(A(G))$. В этом смысле барьер $A(G)$ является минимальным.

4) Если $C(G) = \emptyset$, то любой барьер является подмножеством $A(G)$. В этом случае $A(G)$ — единственный максимальный по включению барьер графа G .

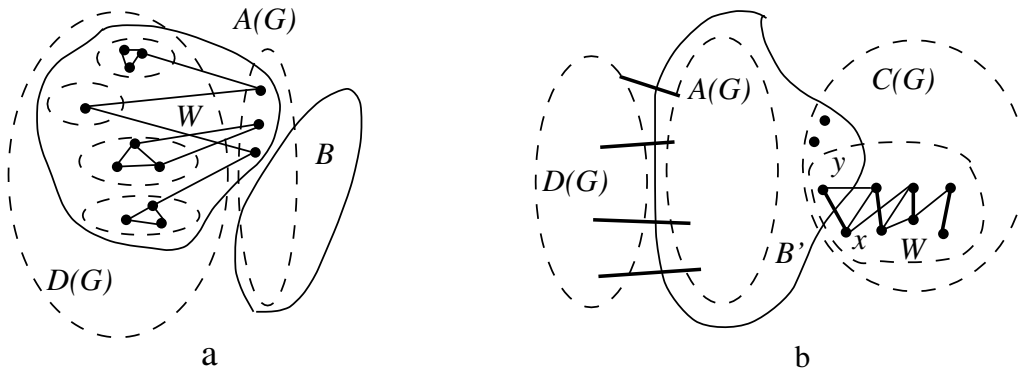
Теорема 2.14. *Пересечение всех максимальных по включению барьеров графа G есть $A(G)$.*

Доказательство. \supset . Пусть B — максимальный барьер, $|A(G) \setminus B| = k > 0$. Мы докажем, что $B' = B \cup A(G)$ — барьер и тем самым получим противоречие. B' получается из барьера B добавлением k вершин, поэтому достаточно доказать, что $o(G - B') \geq o(G - B) + k$: тогда $o(G - B') - |B'| \geq \text{def}(G)$, то есть, B' — барьер.

Пусть W — компонента связности графа $G - B$, содержащая $t > 0$ вершин из $A(G)$ (см. рисунок 2.6а). Как мы знаем из леммы 2.4, $B' \cap D(G) = \emptyset$, поэтому W содержит все компоненты связности графа $G(D(G))$, соединённые рёбрами с $W \cap A(G)$. По теореме 2.13 все эти компоненты связности — нечётные, а по следствию 2.8 их хотя бы $t + 1$. Таким образом, при добавлении t вершин из $W \cap A(G)$ в барьер может исчезнуть одна нечётная компонента связности (если $|W|$ нечётно), а появляется хотя бы $t + 1$ нечётная компонента связности. Просуммировав прибавления по всем компонентам связности графа $G - B$, содержащим вершины из $A(G)$, мы получим, что $o(G - B') \geq o(G - B) + k$, что и требовалось доказать.

\subset . Предположим противное, пусть существует вершина $x \notin A(G)$, принадлежащая всем максимальным барьерам. По лемме 2.4 тогда $x \in C(G)$. Рассмотрим максимальное паросочетание M графа G , пусть $xy \in M$. Докажем, что $B = A(G) \cup \{y\}$ — барьер графа G . Так как $|B| = |A(G)| + 1$, для этого достаточно доказать, что $o(B) \geq o(A(G)) + 1$.

По теореме 2.13 мы имеем $y \in C(G)$. Пусть W — компонента связности графа $G(C(G))$, содержащая x и y (см. рисунок 2.6а). По теореме 2.13 вершины W разбиваются на пары соединённых рёбрами из M , поэтому $|W|$ чётно. Теперь легко видеть, что $W' = W \setminus \{y\}$ — нечётная компонен-

Рис. 2.6: Максимальные барьеры и $A(G)$.

та связности графа $G - B$, которой, очевидно, нет в $G - A(G)$. Значит, B — барьер графа G .

Пусть B' — максимальный барьер графа G , содержащий B . По пункту 2 замечания 2.7 в максимальном паросочетании M графа G все вершины барьера B' должны быть соединены рёбрами с вершинами различных нечётных компонент связности графа $G - B'$, следовательно, $x \notin B'$. Полученное противоречие показывает, что пересечение всех максимальных барьеров графа G может содержать только вершины из $A(G)$. \square

В заключении раздела мы рассмотрим минимальные по включению барьеры графа G .

Определение 2.11. Назовём *лапой* индуцированный подграф графа G , изоморфный двудольному графу $K_{1,3}$. Вершину степени 3 в этом подграфе назовём *центром лапы*.

Лемма 2.5. Пусть B — минимальный по включению барьер графа G . Тогда каждая вершина B — центр лапы графа G .

Доказательство. Пусть $x \in B$ — не центр лапы, $B' = B \setminus \{x\}$. Тогда вершина x смежна не более, чем с двумя компонентами связности графа $G - B$. В графе $G - B'$ все компоненты связности, смежные с x объединяются в одну, содержащую также вершину x . Легко видеть, что тогда $o(G - B') \geq o(G - B) - 1$. Это означает, что B' — барьер графа G , противоречие с минимальностью барьера B . \square

Следствие 2.10. (D. P. Sumner, 1974; M. Las Vergnas, 1975.) Пусть G — связный граф, не содержащий лапы, $v(G)$ чётно. Тогда G имеет совершенное паросочетание.

Доказательство. Пусть B — минимальный по включению барьер графа G . Тогда по лемме 2.5 мы имеем $B = \emptyset$. Однако, G — связный граф с чётным числом вершин, поэтому $o(G - \emptyset) = 0$, следовательно, $\text{def}(G) = 0$ и граф G имеет совершенное паросочетание. \square

2.5.8 Критерии существования совершенного паросочетания

В этом разделе мы докажем несколько критериев существования совершенного паросочетания в графе. Начнем с нескольких новых понятий.

Определение 2.12. *Бинд* графа G — это

$$\text{bind}(G) = \min_{S \subseteq V(G), S \neq \emptyset, N_G(S) \neq V(G)} \frac{|N_G(S)|}{|S|}.$$

Эту характеристику графа впервые рассмотрел Андерсон в 1973 году. Он доказал, что граф с четным числом вершин и биндом не менее $\frac{4}{3}$ обязательно имеет совершенное паросочетание. Мы представим чуть более сильную теорему.

Теорема 2.15. (D. R. Woodall, 1973.) *Пусть G — такой граф с четным числом вершин, что*

$$N_G(S) \geq \min\{|V(G)|, \frac{4}{3}|S| - \frac{2}{3}\}$$

для любого $S \subseteq V(G)$. Тогда граф G имеет совершенное паросочетание.

Доказательство. Предположим, что граф G не имеет совершенного паросочетания. Тогда по теореме 2.6 он имеет множество Татта S , для которого $o(G - S) > |S|$. Пусть $|S| = k$. Как уже отмечалось, из четности $v(G)$ тогда следует, что $o(G - S) \geq k + 2$.

Пусть m — количество одновершинных компонент связности графа $G - S$. Рассмотрим два случая.

1. $m > 0$.

Пусть M — объединение всех одновершинных компонент связности графа $G - S$. В нашем случае $N_G(V(G) \setminus S) \subset V(G) \setminus M$, поэтому

$$v(G) - m \geq |N_G(V(G) \setminus S)| \geq \frac{4(v(G) - k) - 2}{3},$$

что можно переписать в виде

$$v(G) \leq 4k - 3m + 2. \quad (2.5)$$

С другой стороны, $o(G - S) \geq k + 2$ и в $k + 2 - m$ нечетных компонентах графа $G - S$ хотя бы по три вершины. Поэтому

$$v(G) \geq k + m + 3(k + 2 - m) = 4k - 2m + 6,$$

что противоречит неравенству (2.5).

2. $m = 0$.

Тогда все нечетные компоненты связности графа $G - S$ содержат хотя бы по три вершины. Пусть X — объединение $k + 1$ нечетной компоненты связности графа $G - S$. Тогда

$$|X| \geq 3k + 3. \quad (2.6)$$

Множество X не содержит хотя бы одну из нечетных компонент $G - S$ и не смежно с ней, следовательно, $N_G(X) \neq V(G)$ и поэтому

$$|N_G(X)| \geq \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3}.$$

С другой стороны, $N_G(X) \subset X \cup S$, поэтому $|N_G(X)| \leq |X| + k$. Следовательно,

$$|X| + k \geq \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3},$$

откуда $|X| \leq 3k + 2$, противоречие с неравенством (2.6). \square

Определение 2.13. Если граф G отличен от полного, то *жесткость* графа G — это

$$t(G) = \min_{S \subseteq V(G), c(G-S) \neq 1} \frac{|S|}{|c(G-S)|}.$$

Будем говорить, что неполный граф G является t -жестким, если $t(G) \geq t$.

Лемма 2.6. Пусть G — неполный граф с $t(G) > 0$. Тогда G связан.

Доказательство. Предположим противное. Так как $c(G - \emptyset) \geq 2$, то должно выполняться $0 = |\emptyset| \geq t(G)c(G - \emptyset) > 0$, что, очевидно, не так. \square

Задача 2.6. Докажите, что для неполного графа G выполняется неравенство $\text{bind}(G) \leq t(G) + 1$.

Понятие жесткости напрямую связано с паросочетаниями. Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы Татта о совершенном паросочетании (2.8).

Теорема 2.16. Пусть G — неполный граф с чётным числом вершин и $t(G) \geq 1$. Тогда G имеет совершенное паросочетание.

Доказательство. Проверим условие Татта для множества $S \subset V(G)$. Пусть $S = \emptyset$. Тогда из $t(G) \geq 1$ следует связность графа G , а из чётности числа вершин — условие Татта.

Пусть $S \neq \emptyset$. Тогда $o(G-S) \leq c(G-S) \leq \min\{1, |S|\}$, и по теореме 2.8 граф G имеет совершенное паросочетание. \square

Условие $t(G) \geq k$ для графа с чётным числом вершин даёт существование k -фактора. Это гораздо более сложное утверждение будет доказано в разделе 2.6.5 с помощью теоремы Татта о факторе.

2.6 Факторы

Понятие f -фактора обобщает введенное в определении 2.5 понятие k -фактора.

Определение 2.14. Пусть $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$. Подграф H графа G называется f -фактором, если $d_H(v) = f(v)$ для любой вершины $v \in V(G)$.

2.6.1 Факторы и паросочетания

Мы будем считать, что граф G — без изолированных вершин (то есть, $\delta(G) \geq 1$). Кратные рёбра и петли в графе допускаются. Первой нашей задачей будет свести вопрос о наличии f -фактора в графе G к хорошо изученному выше вопросу о существовании паросочетания в графе, который мы специально построим. С помощью нескольких определений мы продelaем путь, похожий на определение дефицита графа. Однако, это будет технически сложнее.

Для любых двух множеств $X, Y \subset V(G)$ мы обозначим через $e_G(X, Y)$ количество рёбер графа G между этими множествами (то есть, количество таких рёбер $e \in E(G)$, что $e = xy$, $x \in X$, $y \in Y$).

Определение 2.15. 1) Пусть $D, S \subset V(G)$ — фиксированные непересекающиеся множества, а U — компонента связности графа $G - D - S$. Назовём компоненту U $(f; D, S)$ -нечётной, если величина

$$r_{f;D,S}(U) = e_G(U, S) + \sum_{x \in U} f(x)$$

нечётна и $(f; D, S)$ -чётной в противном случае.

2) Обозначим через $o(f; D, S)$ количество (f, D, S) -нечётных компонент.

Очевидным необходимым условием для существования f -фактора является условие $f(v) \leq d_G(v)$ для всех вершин $v \in V(G)$. При описании следующей конструкции будем считать, что оно выполняется.

Определение 2.16. Пусть $s(v) = d_G(v) - f(v)$ — избыточная степень вершины $v \in V(G)$.

По графу G и функции f мы построим вспомогательный граф G_f . Для каждой вершины $x \in V(G)$ мы построим множества вершин $D(x)$ и $S(x)$ так, что все эти $2v(G)$ множеств попарно не пересекаются, $|D(x)| = d_G(x)$ и $|S(x)| = s(x)$. Пусть

$$V_D = \cup_{x \in V(G)} D(x), \quad V_S = \cup_{x \in V(G)} S(x).$$

Очевидно, существует биекция из $D(x)$ в множество концов рёбер, инцидентных x (каждой инцидентной вершине x петле при этом соответствуют две вершины $x_{e,1}$ и $x_{e,2}$ из $D(x)$!). Таким образом, каждому ребру $e \in E(G)$ соответствуют ровно две вершины из V_D , которые мы соединим ребром $\varphi(e)$. Пусть $E_1 = \{\varphi(e) : e \in E(G)\}$. Отметим, что рёбра из E_1 не имеют общих концов, а $\varphi : E(G) \rightarrow E_1$ — биекция.

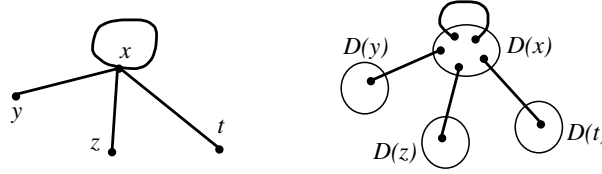


Рис. 2.7: Окрестность вершины x в графе G и соответствующие рёбра множества E_1 в G_f .

Для каждой вершины $x \in V(G)$ пусть $B(x)$ — полный двудольный граф с долями $D(x)$ и $S(x)$. Пусть

$$E_2 = \bigcup_{x \in V(G)} E(B(x)).$$

Определим граф G_f , положив $V(G_f) = V_D \cup V_S$, $E(G_f) = E_1 \cup E_2$. Отметим, что вершины множества $S(v)$ смежны в графе G_f только с вершинами множества $D(v)$.

Лемма 2.7. Граф G имеет f -фактор тогда и только тогда, когда граф G_f имеет совершенное паросочетание (то есть, 1-фактор).

Доказательство. \Rightarrow . Пусть G имеет f -фактор H с множеством рёбер $F = E(H)$. Тогда $\varphi(F)$ — паросочетание в графе G_f , покрывающее ровно $f(v) = |D(v)| - |S(v)|$ вершин из $D(v)$ и не покрывающее вершин множества $S(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$. Можно легко дополнить $\varphi(F)$ рёбрами, соединяющими вершины множества $S(v)$ с непокрытыми вершинами из $D(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, в результате получится совершенное паросочетание графа G_f .

\Leftarrow . Пусть G_f имеет совершенное паросочетание F^* . Тогда F^* для каждой вершины $v \in V(G)$ покрывает ровно $s(v)$ вершин множества $D(v)$ рёбрами двудольного графа $B(v)$, следовательно, ровно $f(v) = |D(v)| - |S(v)|$ вершин из $D(v)$ покрыты в F^* рёбрами из E_1 . Поэтому $\varphi^{-1}(F^* \cap E_1)$ — множество рёбер графа G , индуцирующих f -фактор этого графа. \square

2.6.2 Нормальные множества

Продолжим описывать конструкции, необходимые для формулировки и доказательства основного результата этого раздела — теоремы Татта о f -факторе.

Определение 2.17. 1) Назовём множество $W \subset V(G_f)$ *нормальным*, если для каждой вершины $x \in V(G)$ выполняется одно из трёх условий:

- 1° $W \supset D(x)$, $W \cap S(x) = \emptyset$ (причем $S(x) \neq \emptyset$!);
- 2° $W \cap D(x) = \emptyset$, $W \supset S(x)$;
- 3° $W \cap D(x) = \emptyset$, $W \cap S(x) = \emptyset$.

2) Для нормального множества W пусть

$$D_W = \{x \in V(G) : D(x) \subset W\}, \quad S_W = \{x \in V(G) : S(x) \subset W\}.$$

Замечание 2.8. 1) Пусть W — нормальное множество. Тогда

$$|W| = \sum_{x \in D_W} d_G(x) + \sum_{x \in S_W} s(x) = \sum_{x \in D_W} d_G(x) + \sum_{x \in S_W} (d_G(x) - f(x)). \quad (2.7)$$

2) В случае, когда $S(x) = \emptyset$, по определению $D(x) \cap W = \emptyset$. В этом случае $x \notin D_W \cup S_W$. Отметим, что $D(x) \neq \emptyset$ ввиду $\delta(G) \geq 1$.

3) Таким образом, при $x \in D_W \cup S_W$ двудольный граф $B(x)$ связан.

Лемма 2.8. Пусть $W \subset V(G_f)$ — нормальное множество. Тогда

$$o(G_f - W) - |W| = o(f; D_W, S_W) - \sum_{x \in D_W} f(x) + \sum_{x \in S_W} (f(x) - d_{G-D_W}(x)).$$

Доказательство. Пусть U — компонента связности графа $G_f - W$, $H = G_f(U)$. Рассмотрим четыре случая.

1. U состоит из одной вершины множества V_D .

Пусть $U = \{u\}$, $e \in E(G)$, $\varphi(e) = uv$, $u \in D(x)$, $v \in D(y)$ (где вершины $x, y \in V(G)$ возможно, совпадают). Тогда $N_{G_f}(u) = S(x) \cup \{v\} \subset W$, следовательно, $x \neq y$, $x \in S_W$, $y \in D_W$ и $xy \in E(G)$ (см. рисунок 2.8). Наоборот, если $e = xy \in E(G)$, $x \in S_W$, $y \in D_W$, то принадлежащий $D(x)$ конец ребра $\varphi(e) = uv$ — компонента связности графа $G_f - W$. Таким образом, количество таких одновершинных компонент связности графа $G - W$ равно

$$e_G(D_W, S_W) = \sum_{x \in S_W} (d_G(x) - d_{G-D_W}(x)). \quad (2.8)$$

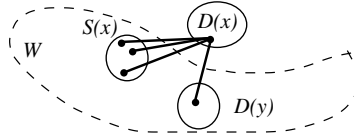


Рис. 2.8: Одиночная компонента связности $G_f - W$ — вершина из V_D .

2. U состоит из одной вершины множества V_S .

Пусть $v \in S(x)$, $x \in V(G)$. Тогда понятно, что $x \in D_W$. Наоборот, если $x \in D_W$, то каждая вершина из $S(x)$ образует компоненту связности графа $G_f - W$. Таким образом, количество таких одновершинных компонент связности графа $G - W$ равно

$$\sum_{x \in D_W} s(x) = \sum_{x \in D_W} (d_G(x) - f(x)). \quad (2.9)$$

3. $E(H) \neq \emptyset$, $E(H) \subset E_1$.

Так как E_1 состоит из независимых рёбер, в этом случае $|U| = 2$.

4. $E(H) \cap E_2 \neq \emptyset$.

Назовём такую компоненту связности U *большой*. Предположим, что H содержит ребро двудольного графа $B(x)$ для некоторой вершины $x \in V(G)$. Тогда $D(x) \not\subset W$, $S(x) \not\subset W$, следовательно, $D(x) \cup S(x) \subset U$. Пусть $M = \{x \in V(G) : D(x) \cup S(x) \subset U\}$. Тогда компонента связности $U \supset U_M = \cup_{x \in M} D(x) \cup S(x)$.

Пусть $u \in U \setminus U_M$. Тогда $uv \in E_1 \cap E(H)$ для некоторой вершины $v \in U_M$, следовательно, $uv = \varphi(e)$, где $e = xy \in E(G)$, $u \in D(x)$, $v \in D(y)$. Поскольку $u \notin W$, то $x \notin D_W$. Так как $u \notin U_M$, то вершина u не соединена

рёбрами из E_2 с вершинами из U , следовательно, $S(x) \subset W$, то есть, $x \in S_W$. Наоборот, если $x \in S_W$, $y \in M$, $e = xy \in E(G)$, то $\varphi(e)$ — ребро графа H , а его конец из $D(x)$ лежит в U .

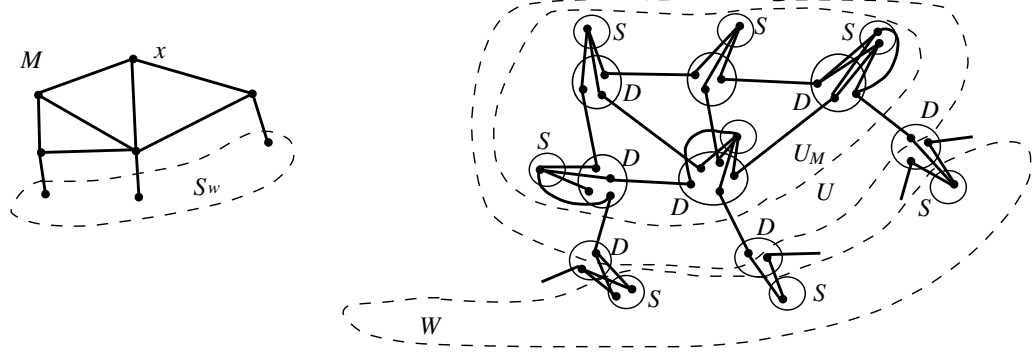


Рис. 2.9: Компонента связности M графа $G - D_W - S_W$ и соответствующая ей большая компонента связности U графа $G_f - W$.

Таким образом, компонента U состоит из вершин множества U_M и концов всех рёбер $uv \in E_1$, где $u \in D(x)$, $v \in D(y)$, $x \in S_W$, $y \in M$. Рёбра множества E_1 , соединяющие вершины из U_M с остальными вершинами графа $G_f - W$, как мы доказали выше, выходят только к вершинам множества S_W . Поэтому граф $G_f(U_M)$ должен быть связным, а M — компонента связности графа $G - D_W - S_W$. Наоборот, понятно, что каждой компоненте связности графа $G - D_W - S_W$ соответствует большая компонента связности графа $G_f - W$.

Отметим, что

$$|U| = \sum_{x \in M} (d_G(x) + s(x)) + e_G(M, S_W) \equiv \sum_{x \in M} f(x) + e_G(M, S_W) \pmod{2},$$

следовательно, число вершин в U нечётно, если M является (f, D_W, S_W) -нечётной и чётно в противном случае. Таким образом, количество нечётных больших компонент связности графа $G_f - W$ есть $o(f, D_W, S_W)$.

Теперь ввиду доказанного выше (формулы (2.8) и (2.9), пункт 4) получаем, что

$$o(G_f - W) = o(f, D_W, S_W) + \sum_{x \in S_W} (d_G(x) - d_{G-D_W}(x)) + \sum_{x \in D_W} (d_G(x) - f(x)).$$

Вычитая равенство (2.7) из полученного равенства, получаем утверждение леммы. \square

2.6.3 f -дефицит. Теорема Татта о факторе

Введём обозначение

$$\text{def}(f; D, S) = o(f; D, S) - \sum_{x \in D} f(x) + \sum_{x \in S} (f(x) - d_{G-D}(x)).$$

Определение 2.18. Назовём f -дефицитом графа G величину $\text{def}(G; f)$, равную максимуму $\text{def}(f; D, S)$ по всем парам непересекающихся множеств $D, S \subset V(G)$.

Замечание 2.9. Отметим, что f -дефицит неотрицателен:

$$\text{def}(G; f) \geq \text{def}(f; \emptyset, \emptyset) = o(f; \emptyset, \emptyset) \geq 0.$$

Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие существования f -фактора в терминах f -дефицита. Интересно сравнить это утверждение с аналогами для паросочетаний (теоремы 2.6 и 2.11).

Теорема 2.17. (W. T. Tutte, 1952.) *Граф G имеет f -фактор тогда и только тогда, когда $\text{def}(G; f) = 0$, то есть $\text{def}(f; D, S) \leq 0$, или*

$$o(f; D, S) + \sum_{x \in S} (f(x) - d_{G-D}(x)) \leq \sum_{x \in D} f(x) \quad (2.10)$$

для любой пары непересекающихся множеств $S, D \subset V(G)$.

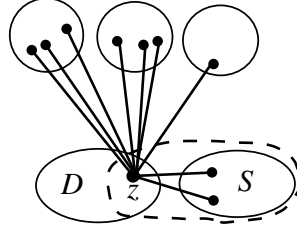
Доказательство. Мы будем подразумевать, что $f(x) \leq d_G(x)$ для любой вершины $x \in V(G)$ и $\sum_{x \in V(G)} f(x)$ чётно. Оба утверждения очевидно следуют из существования f -фактора. Выведем их из неравенства (2.10) и тем самым убедимся, что наше предположение корректно.

Подставив $D = S = \emptyset$, получим, что $o(f; \emptyset, \emptyset) \leq 0$, а следовательно, $\sum_{x \in U} f(x)$ чётно для каждой компоненты связности U графа G . Таким образом, $\sum_{x \in V(G)} f(x)$ чётно. Подставим $D = \emptyset$, $S = \{x\}$ в неравенство (2.10). Мы получим $o(f; \emptyset, \{x\}) + (f(x) - d_G(x)) \leq 0$, откуда очевидно следует, что $f(x) \leq d_G(x)$.

Мы воспользуемся конструкцией графа G_f и доказанными ранее леммами, чтобы вывести теорему 2.17 из теоремы Татта о совершенном паросочетании 2.6.

\Rightarrow . Предположим противное, пусть неравенство (2.10) не выполняется и выберем опровергающую его пару (D, S) так, чтобы $|D|$ было минимальным.

Предположим, что $f(z) = d_G(z)$ для вершины $z \in D$. Пусть $D_z = D \setminus \{z\}$, $S_z = S \cup \{z\}$. Докажем, что тогда неравенство (2.10) не выполняется для пары (D_z, S_z) .

Рис. 2.10: Пары множеств (D, S) и (D_z, S_z) .

Для этого достаточно доказать, что при перемещении вершины z из D в S левая часть уменьшится не более, чем правая. Отметим, что граф $G - D - S$ и его компоненты связности при таком изменении D и S не изменятся. Рассмотрим величину $\Delta = o(f; D_z, S_z) - o(f; D, S)$. Изменяют свою четность те и только те компоненты связности графа $G - D - S$, которые соединены с z нечётным числом рёбер (см. рисунок 2.10). Их количество, очевидно, не превосходит $e(V(G - D - S), z)$, поэтому $\Delta \geq -e(V(G - D - S), z)$.

Отметим, что

$$\Delta' = \sum_{y \in S} (-d_{G-D_z}(y) + d_{G-D}(y)) = -e(z, S).$$

Итак, левая часть неравенства (2.10) изменится на

$$\Delta + \Delta' + f(z) - d_{G-D_z}(z) \geq -e(V(G - D - S), z) - e(z, S) \geq -d_G(z)$$

(поскольку $f(z) = d_G(z) \geq d_{G-D_z}(z)$), а правая часть неравенства (2.10) изменится ровно на $-d_G(z)$.

Таким образом, неравенство (2.10) не выполнено для пары (D_z, S_z) , противоречие с минимальностью $|D|$. Значит, $s(x) = d_G(x) - f(x) > 0$ и, следовательно, двудольный граф $B(x)$ связан для любой вершины $x \in D$. Определим множество W , как

$$W = \bigcup_{x \in D} D(x) \cup \bigcup_{y \in S} S(y).$$

Ввиду доказанного выше очевидно, что W нормально, $D_W = D$ и $S_W = S$. Теперь из леммы 2.8 следует $o(G_f - W) > |W|$ и по теореме Татта 2.6 совершенное паросочетание в графе G_f отсутствует. Следовательно, по лемме 2.7 в графе G нет f -фактора, противоречие с предположением.

\Leftarrow . Предположим противное, пусть G не имеет f -фактора, тогда по лемме 2.7 граф G_f не имеет совершенного паросочетания. По теореме 2.6

это означает, что существует множество $W \subset V(G_f)$, для которого не выполняется условие Татта (то есть, $o(G_f - W) > |W|$). Пусть W — минимальное множество, не удовлетворяющее условию Татта. Мы докажем, что оно нормально.

Легко видеть, что числа $o(G_f - W)$ и $|W|$ — одинаковой четности, так как

$$v(G_f) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x) + \sum_{x \in V(G)} (d_G(x) - f(x))$$

чётно. Следовательно, $o(G_f - W) \geq |W| + 2$. Пусть $W' \subsetneq W$. В силу минимальности W , тогда

$$o(G_f - W') \leq |W'| \leq |W| - 1 \leq o(G_f - W) - 3. \quad (2.11)$$

Предположим, что множество W не является нормальным. Разберём несколько случаев.

1. Пусть $W \cap D(x) \neq \emptyset$ для некоторой вершины $x \in V(G)$ и выполняется хотя бы одно из двух условий:

- $W \not\supset D(x)$;
- $S(x) = \emptyset$.

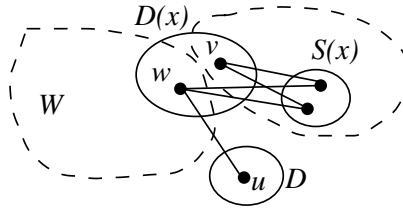


Рис. 2.11: Теорема Татта о факторе: случай 1.

Пусть $w \in D(x) \cap W$, $wu \in E_1$. Положим $W' = W \setminus \{w\}$. В графе $G_f - W'$ вершина w смежна с вершинами из $S(x) \setminus W$ (если это множество непусто) и с вершиной u (при условии, что $u \notin W$). Если $S(x) \setminus W \neq \emptyset$, то имеет место случай $W \not\supset D(x)$. Значит, существует вершина $v \in D(x) \setminus W$, и все вершины из $S(x) \setminus W$ смежны с v , а следовательно, лежат в одной компоненте связности графа $G - W$ (см. рисунок 2.11). Таким образом, в любом из случаев вершина w смежна не более, чем с двумя компонентами связности графа $G - W$. Эти компоненты склеятся в одну, содержащую к тому же w , остальные компоненты связности в $G_f - W'$ такие же, как и в $G_f - W$, поэтому $o(G_f - W') \geq o(G_f - W) - 2$, что противоречит неравенству (2.11).

Таким образом, теперь для любой вершины $x \in V(G)$ либо $W \supset D(x)$ и $S(x) \neq \emptyset$, либо $W \cap D(x) = \emptyset$.

2. Пусть $W \cap S(x) \neq \emptyset$ для некоторой вершины $x \in V(G)$.

Пусть $w \in S(x) \cap W$. Положим $W' = W \setminus \{w\}$. Вершина w смежна в графе G_f только с вершинами из $D(x)$. Если $W \supset D(x)$ (см. рисунок 2.12а), то $\{w\}$ — компонента связности графа $G_f - W'$, остальные компоненты связности в графах $G_f - W$ и $G_f - W'$ совпадают, следовательно, $o(G_f - W') = o(G_f - W) + 1$, противоречие с неравенством (2.11).

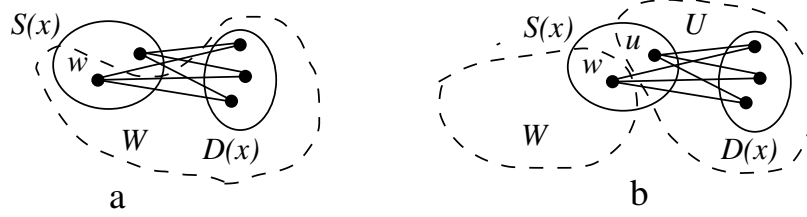


Рис. 2.12: Теорема Татта о факторе: случай 2.

Следовательно, учитывая доказанное выше имеем $W \cap D(x) = \emptyset$. Пусть $W \not\supset S(x)$. Тогда существует вершина $u \in S(x) \setminus W$, пусть U — компонента связности графа $G_f - W$, содержащая u . Тогда $U \supset D(x)$ (см. рисунок 2.12b). Вершина w смежна в $G_f - W'$ только с вершинами компоненты связности U , поэтому $o(G_f - W') \geq o(G_f - W) - 1$, очередное противоречие с неравенством (2.11).

Таким образом, при $W \cap S(x) \neq \emptyset$ остаётся единственный возможный случай: $W \cap D(x) = \emptyset$ и $W \supset S(x)$, следовательно, множество W — нормальное.

Теперь мы можем применить лемму 2.8 и получить

$$\text{def}(G; f) \geq \text{def}(f; D_W, S_W) = o(G_f - W) - |W| > 0.$$

Следовательно, неравенство (2.10) для пары множеств (D_W, S_W) не выполняется. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Пусть $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$. Определим функцию f' , положив $f'(x) = d_G(x) - f(x)$ для любой вершины $x \in V(G)$. Понятно, что G имеет f -фактор тогда и только тогда, когда G имеет f' -фактор. Таким образом, должна быть связь между f -дефицитом и f' -дефицитом графа G .

Лемма 2.9. (W. T. Tutte, 1974.) Для любой пары непересекающихся множеств $D, S \subset V(G)$ выполняются следующие свойства.

1) Компонента связности U графа $G - D - S$ является $(f; D, S)$ -нечетной тогда и только тогда, когда она является $(f'; S, D)$ -нечетной. Следовательно, $o(f; D, S) = o(f'; S, D)$.

2) $\text{def}(f; D, S) = \text{def}(f'; S, D)$.

Доказательство. 1) По определению 2.15, компонента U является $(f; D, S)$ -нечетной тогда и только тогда, когда $r_{f;D,S}(U)$ нечетно и компонента U является $(f'; S, D)$ -нечетной тогда и только тогда, когда $r_{f';S,D}(U)$ нечетно. Сложим эти два выражения, учитывая, что $f(x) + f'(x) = d_G(x)$:

$$r_{f;D,S}(U) + r_{f';S,D}(U) = e_G(U, D \cup S) + \sum_{x \in U} d_G(x) = 2e_G(U, D \cup S) + 2e(G(U)).$$

Таким образом, компонента является $(f; D, S)$ -нечетной тогда и только тогда, когда она является $(f'; S, D)$ -нечетной, то есть, $o(f; D, S) = o(f'; S, D)$.

2) Разберёмся со второй частью суммы в определении f -дефицита:

$$\begin{aligned} \text{def}(f; D, S) - o(f; D, S) &= - \sum_{x \in D} f(x) + \sum_{x \in S} (f(x) - d_{G-D}(x)) = \\ &= \sum_{x \in D} f'(x) + \sum_{x \in S} f(x) - \sum_{x \in D} d_G(x) - \sum_{x \in S} d_G(x) + e(D, S) = \\ &= - \sum_{x \in S} f'(x) + \sum_{x \in D} (f'(x) - d_{G-S}(x)) = \text{def}(f'; S, D) - o(f'; S, D), \end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что $\text{def}(f; D, S) = \text{def}(f'; S, D)$. \square

Теперь условие из теоремы Татта о факторе можно эквивалентно переформулировать следующим образом. Условие (2.12) получается из (2.10) эквивалентными преобразованиями и переобозначениями.

Следствие 2.11. *Граф G имеет f -фактор тогда и только тогда, когда*

$$o(f; D, S) + e_G(D, S) \leq \sum_{x \in D} f(x) + \sum_{x \in S} f'(x) \quad (2.12)$$

Однако, применять критерий существования f -фактора прямо в виде, сформулированном в теореме 2.17 неудобно. Мы предпримем исследование о том, когда же вершина входит в пару множеств (D, S) с максимальным f -дефицитом.

Определение 2.19. Пусть $x \in D$. Обозначим через $o(f; D, S, x)$ количество $(f; D, S)$ -нечётных компонент связности графа $G - D - S$, смежных с x . Пусть $\nu(f; D, S, x)$ равно единице, если $o(f; D, S, x) + e(x, S) + f(x)$ нечётно и нулю, если это число чётно.

Теорема 2.18. (W. T. Tutte, 1978.) Пусть (D, S) — пара непересекающихся подмножеств $V(G)$ с максимальным $\text{def}(f; D, S)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Для любой вершины $x \in D$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq o(f; D, S, x) - \nu(f; D, S, x) + e(x, S).$$

В случае равенства $\text{def}(f; D, S) = \text{def}(f; D \setminus \{x\}, S)$.

2) Для любой вершины $x \in S$ выполняется неравенство

$$f'(x) \leq o(f'; S, D, x) - \nu(f'; S, D, x) + e(x, D).$$

В случае равенства $\text{def}(f'; S, D) = \text{def}(f'; S \setminus \{x\}, D)$.

3) Для любой вершины $x \in V(G) - D - S$ выполняются неравенства

$$f(x) \geq o(f; D \cup \{x\}, S, x) - \nu(f; D \cup \{x\}, S, x) + e(x, S),$$

$$f'(x) \geq o(f'; S \cup \{x\}, D, x) - \nu(f'; S \cup \{x\}, D, x) + e(x, D).$$

Доказательство. 1) Пусть $D_x = D \setminus \{x\}$, $q = o(f; D, S, x)$. В графе $G - D_x - S$ вместо всех компонент связности графа $G - D - S$, смежных с x , есть компонента связности U , полученная объединением всех этих компонент и вершины x (см. рисунок 2.13). Остальные компоненты связности в графах $G - D_x - S$ и $G - D - S$ — одни и те же. Отметим, что,

$$e(U, S) + \sum_{y \in U} f(y) \equiv o(f; D, S, x) + e(x, S) + f(x) \equiv \nu(f; D, S, x) \pmod{2}.$$

Таким образом, функция $\nu(f; D, S, x)$ показывает, является ли нечетной новая компонента связности U графа $G - D_x - S$. Поэтому

$$\begin{aligned} o(f; D, S) - o(f; D_x, S) &= o(f; D, S, x) - \nu(f; D, S, x) \quad \text{и} \\ 0 \leq \text{def}(f; D, S) - \text{def}(f; D_x, S) &= \\ &= o(f; D, S, x) - \nu(f; D, S, x) + e(x, S) - f(x), \end{aligned}$$

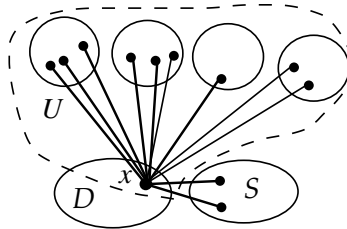


Рис. 2.13: Компоненты связности графа $G - D - S$, смежные с $x \in D$.

откуда немедленно следует утверждение пункта 1.

Доказательство пункта 2 следует из пункта 1 и леммы 2.9. Неравенства пункта 3 аналогичны неравенствам пунктов 1 и 2. \square

Замечание 2.10. По определению $\nu(f; D, S, x)$, величина

$$f(x) - o(f; D, S, x) + \nu(f; D, S, x) - e(x, S)$$

всегда четна. Поэтому в случае строгого неравенства в любом из пунктов теоремы 2.18 разность левой и правой части по модулю не менее 2.

Следствие 2.12. *Существует пара непересекающихся множеств (D, S) с максимальным $\text{def}(f; D, S)$, для которой $f(x) > 1$ для всех вершин $x \in S$.*

Доказательство. Выберем среди всех пар с максимальным f -дефицитом такую пару (D, S) , что $|S|$ минимально. Предположим, что существует вершина $x \in S$, для которой $f(x) \leq 1$. Из минимальности множества S следует $\text{def}(f'; S, D) > \text{def}(f'; S \setminus \{x\}, D)$. Теперь применим пункт 2 теоремы 2.18 и учтём замечание 2.10:

$$d_G(x) - 1 \leq f'(x) \leq o(f'; S, D, x) - \nu(f'; S, D, x) + e(x, D) - 2 \leq d_G(x) - 2,$$

противоречие. Следовательно, пара множеств (D, S) — искомая. \square

2.6.4 Еще раз про факторы регулярного графа

В этом разделе мы дополним известный нам из раздела 2.5.3 список результатов о регулярных факторах регулярных графов.

Определение 2.20. Назовем граф G реберно k -нечетно связным, если для любого множества $F \subset E(G)$, состоящего менее чем из k рёбер, все компоненты связности графа $G - F$ имеют четное число вершин.

Замечание 2.11. 1) Очевидно, у k -нечетно связного графа четное число вершин.

2) Разумеется, реберно k -связный граф с четным числом вершин является и реберно k -нечетно связным.

Итак, вернемся к вопросу о том, когда у регулярного графа степени k есть r -фактор. Остаются неразобранными случаи, когда хотя бы одно из чисел r и k нечетно. В этих случаях имеет смысл рассматривать только регулярные графы с четным количеством вершин.

Теорема 2.19. (B. Bollobás, A. Saito, N. C. Wormald, 1985.) Пусть G — реберно n -нечетно связный регулярный граф степени k . Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Пусть k нечетно, а $n' = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ — наименьшее нечетное число, которое не менее n . Тогда G имеет r -факторы для четных $r \leq \frac{n'-1}{n'} \cdot k$ и для нечетных $r \geq \frac{1}{n'} \cdot k$.

2) Пусть k четно. Тогда G имеет r -факторы для всех таких нечетных r , что $\frac{1}{n} \cdot k \leq r \leq \frac{n-1}{n} \cdot k$.

Замечание 2.12. В 1961 году Т. Gallai доказал почти что эту теорему, с единственным отличием — в пункте 1 фигурировало n вместо n' .

Задача 2.7. Пусть n , k и r не удовлетворяют условию теоремы 2.19. Докажите, что существует реберно n -связный k -регулярный граф G , не имеющий r -фактора.

Доказательство теоремы 2.19. 1) Достаточно доказать утверждение только для четных r . Действительно, дополнение графа G до r -фактора с четным r — это $(k-r)$ -фактор, а $k-r$ — нечетно. При этом, если $r \leq \frac{n'-1}{n'} \cdot k$, то $k-r \geq \frac{1}{n'} \cdot k$.

Итак, пусть r четно, $r \leq \frac{n'-1}{n'} \cdot k$. Положим $f(x) = k-r$ для каждой вершины $x \in V(G)$. Тогда $f'(x) = d_G(x) - f(x) = r$. Мы хотим доказать, что граф G имеет f -фактор. Пусть $D, S \subset V(G)$ — произвольные непересекающиеся подмножества. По следствию 2.11 нам достаточно доказать, что выполняется неравенство 2.12. Перепишем его, используя явный вид функций f и f' :

$$o(f; D, S) + e_G(D, S) \leq (k-r)|D| + r|S|. \quad (2.13)$$

Пусть U_1, \dots, U_p — все $(f; D, S)$ -нечетные (а значит, по лемме 2.9, все $(f'; S, D)$ -нечетные) компоненты связности графа $G - D - S$. Пусть d_i и s_i — количества рёбер из компоненты U_i в D и S соответственно. Компонента U_i является $(f'; S, D)$ -нечетной тогда и только тогда, когда нечетно

$$r_{f'; S, D}(U_i) = d_i + \sum_{x \in U_i} f'(x) = d_i + r|U_i| \equiv d_i \pmod{2}.$$

Таким образом, все числа d_1, \dots, d_p — нечетны, а следовательно, каждое из них не менее 1. Пусть компоненты U_1, \dots, U_q (где $q \leq p$) несмежны с S , а компоненты U_{q+1}, \dots, U_p смежны с S , то есть, $s_1 = \dots = s_q = 0$, а s_{q+1}, \dots, s_p не менее 1.

Тогда U_1, \dots, U_q — компоненты связности графа $G - D$. Пусть $1 \leq i \leq q$. Так как степени вершин графа G нечетны, числа $|U_i|$ и d_i имеют

одинаковую четность. Следовательно, U_i — нечетная компонента, а значит, по условию имеем $d_i \geq n$. Учитывая четность, получаем $d_i \geq n'$ (см. рисунок 2.14).

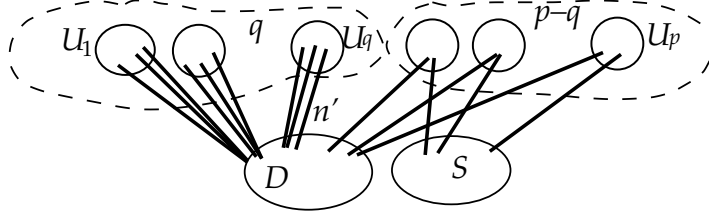


Рис. 2.14: Компоненты связности графа $G - D - S$.

Посчитаем ребра, выходящие из множества D в $V(G) \setminus (D \cup S)$:

$$k|D| - e_G(D, S) \geq \sum_{i=1}^q d_i + \sum_{j=q+1}^p d_j \geq n'q + (p - q) = (n' - 1)q + p. \quad (2.14)$$

Посчитаем ребра, выходящие из множества S в $V(G) \setminus (D \cup S)$:

$$k|S| - e_G(D, S) \geq \sum_{j=q+1}^p s_j \geq p - q. \quad (2.15)$$

Умножим неравенство 2.14 на $(k - r)$, а неравенство 2.15 на r и сложим:

$$\begin{aligned} k \cdot ((k - r)|D| + r|S| - e_G(D, S)) &= \\ (k - r) \cdot (k|D| - e_G(D, S)) + r \cdot (k|S| - e_G(D, S)) &\geq \\ (k - r)((n' - 1)q + p) + r(p - q) &\geq kp + (k(n' - 1) - rn') \cdot q \geq \\ kp &= k \cdot o(f; D, S), \end{aligned}$$

так как $p = o(f; D, S)$. Таким образом, мы доказали неравенство 2.13 и утверждение 1 теоремы 2.19.

2) Утверждение для четного r доказано в следствии 2.4. Пусть r нечетно, $\frac{1}{n} \cdot k \leq r \leq \frac{n-1}{n} \cdot k$. Тогда $k - r$ также нечетно. Положим $f(x) = k - r$ для каждой вершины $x \in V(G)$. Тогда $f'(x) = d_G(x) - f(x) = r$. Мы хотим доказать, что граф G имеет f -фактор. Пусть $D, S \subset V(G)$ — произвольные непересекающиеся подмножества. По следствию 2.11 нам достаточно доказать, что выполняется неравенство 2.13.

Пусть U_1, \dots, U_p — все $(f; D, S)$ -нечетные (а значит, по лемме 2.9, все $(f'; S, D)$ -нечетные) компоненты связности графа $G - D - S$. Пусть d_i и s_i — количества рёбер из компоненты U_i в D и S соответственно.

Компонента U_i является $(f; D, S)$ -нечетной тогда и только тогда, когда нечетно

$$r_{f;D,S}(U_i) = s_i + \sum_{x \in U_i} f(x) = d_i + (k-r)|U_i| \equiv d_i + |U_i| \pmod{2}.$$

Аналогично, $r_{f;D,S}(U_i) = r_{f';S,D}(U_i) \equiv s_i + |U_i| \pmod{2}$. Таким образом, если $|U_i|$ четно, то оба числа s_i и d_i нечетны, а значит, не менее 1.

Пусть компоненты U_1, \dots, U_q (где $q \leq p$) несмежны с S , компоненты U_{q+1}, \dots, U_{q+t} несмежны с D , а остальные компоненты U_{q+t+1}, \dots, U_p смежны и с S , и с D .

Из сказанного выше понятно, что все компоненты $U_1, \dots, U_q, U_{q+1}, \dots, U_{q+t}$ — нечетны, поэтому все числа $d_1, \dots, d_q, s_{q+1}, \dots, s_{q+t}$ — не менее, чем n (см. рисунок 2.15).

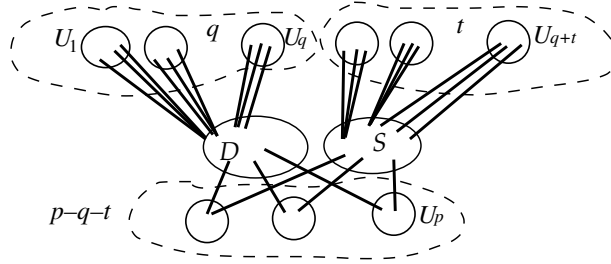


Рис. 2.15: Компоненты связности графа $G - D - S$.

Посчитаем ребра, выходящие из множества D в $V(G) \setminus (D \cup S)$:

$$k|D| - e_G(D, S) \geq \sum_{i=1}^p d_i \geq nq + p - t - q = p + (n-1)q - t. \quad (2.16)$$

Посчитаем ребра, выходящие из множества S в $V(G) \setminus (D \cup S)$:

$$k|S| - e_G(D, S) \geq \sum_{j=1}^p s_j \geq nt + p - q - t = p + (n-1)t - q. \quad (2.17)$$

Умножим неравенство 2.16 на $(k-r)$, а неравенство 2.17 на r и сложим:

$$\begin{aligned} k \cdot ((k-r)|D| + r|S| - e_G(D, S)) &= \\ (k-r) \cdot (k|D| - e_G(D, S)) + r \cdot (k|S| - e_G(D, S)) &\geq \\ (k-r)(p + (n-1)q - t) + r(p + (n-1)t - q) &\geq \\ kp + (k(n-1) - rn) \cdot q + (rn - k) \cdot t &\geq \\ kp = k \cdot o(f; D, S). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали неравенство 2.13 и утверждение 2 теоремы 2.19. \square

Следствие 2.13. (F. Vöbler, 1938.) Пусть G — n -нечетно-связный регулярный граф нечетной степени k , причем n четно. Тогда G имеет n -фактор и $k - n$ -фактор.

2.6.5 Жесткость и k -факторы

Сначала выясним очевидные свойства k -жесткого графа.

Лемма 2.10. Пусть k — натуральное число, а G — неполный k -жесткий граф. Тогда $v(G) \geq 2k + 2$ и $\delta(G(S)) \geq 2k$.

Доказательство. Предположим, что $v(G) \leq 2k + 1$. Так как граф неполный, то в нем есть две несмежные вершины a и b . Пусть $X = V(G) \setminus \{a, b\}$. Тогда $G - X$ имеет две компоненты связности, следовательно,

$$2k - 1 \geq |X| \geq c(G - X) \cdot t(G) \geq 2k,$$

противоречие. Далее мы будем считать, что $v(G) \geq 2k + 2$.

Предположим, что существует вершина $x \in V(G)$ степени $d_G(x) \leq 2k - 1$. Тогда из $v(G) \geq 2k + 1$ следует, что $c(G - N_G(x)) \geq 2$, а значит,

$$2k - 1 \geq |N_G(x)| \geq c(G - N_G(x)) \cdot t(G) \geq 2k,$$

противоречие. □

Основной целью этого раздела будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.20. (H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis, A. Saito, 1985.) Пусть G — неполный граф с $v(G) \geq k + 1$, причем $kv(G)$ четно и $t(G) \geq k$. Тогда G имеет k -фактор.

Доказательство. Пока это возможно, будем добавлять в граф G рёбра так, чтобы не появился k -фактор. От этой процедуры, очевидно, не уменьшается $t(G)$. Так как $kv(G)$ четно, у полного графа на $v(G)$ вершинах есть k -фактор. Поэтому можно считать, что граф G — неполный и не имеет k -фактора, но при добавлении любого ребра k -фактор появляется.

Положим $f(x) = k$ для любой вершины $x \in V(G)$. Будем считать, что $k \geq 2$, иначе воспользуемся теоремой 2.16. Для доказательства теоремы мы проверим, что для любой пары непересекающихся множеств $D, S \subset V(G)$ выполняется условие теоремы Татта о факторе $\text{def}(f; D, S) \leq 0$, или эквивалентное ему неравенство (2.10), которое мы перепишем, учитывая явный вид функции f :

$$o(f; D, S) + k|S| \leq k|D| + \sum_{x \in S} d_{G-D}(x). \quad (2.18)$$

Предположим, что это условие выполнено не всегда и выберем из всех пар (D, S) с наибольшим f -дефицитом пару с минимальным S . Понятно, что $\text{def}(f; D, S) > 0$

Сразу же отметим невозможность случая $D = S = \emptyset$. В этом случае G — единственная компонента связности графа $G - \emptyset$, которая является четной, так как $r(f; \emptyset, \emptyset) = kv(G)$.

Лемма 2.11. Пусть $S \neq \emptyset$. Тогда $\Delta(G(S)) \leq k - 2$.

Доказательство. Пусть $x \in S$. По выбору множества S мы имеем $\text{def}(f; D, S \setminus \{x\}) \leq 0$. Тогда из пункта 2 теоремы 2.18 следует, что

$$d_G(x) - k = f'(x) < o(f'; S, D, x) + e_G(x, D) - \nu(f'; S, D, x).$$

По замечанию 2.10 левая часть меньше правой хотя бы на 2, что можно переписать в виде

$$d_G(x) - o(f'; S, D, x) - e_G(x, D) \leq k - 2 - \nu(f'; S, D, x). \quad (2.19)$$

Отметим, что $o(f'; S, D, x) \leq e(x, V(G - D - S))$, а $\nu(f'; S, D, x) \geq 0$, следовательно

$$d_{G(S)}(x) = e_G(x, S) \leq d_G(x) - o(f'; S, D, x) - e_G(x, D) \leq k - 2,$$

что и требовалось доказать. \square

Вернемся к доказательству теоремы 2.20. Пусть $U = V(G - D - S)$, а U_1, \dots, U_p — все компоненты связности графа $G - D - S$.

Отметим, что отсутствие k -фактора эквивалентно невыполнению условия (2.18). Предположим, что вершина $a \in S$ несмежна хотя бы с одной вершиной $b \in V(G)$. Тогда в графе $G + ab$ левая и правая часть (2.18) такие же, как в G , значит, и этот граф не имеет k -фактора, что противоречит выбору G . Таким образом, каждая вершина множества D смежна со всеми остальными вершинами графа G .

Предположим, что в графе G несмежны какие-то две вершины $x, y \in U_i$. Тогда в графе $G + xy$ левая и правая часть (2.18) такие же, как в G , значит, и этот граф не имеет k -фактора, что противоречит выбору G . Таким образом, каждая компонента связности U_i — клика в графе G .

Пусть S_1 — максимальное независимое множество вершин в графе $H = G(S)$, а $H_1 = G(S) - S_1$. Для $i \geq 1$ пусть S_{i+1} — максимальное независимое множество вершин в графе $H_i = G(S)$, а $H_{i+1} = H_i - S_{i+1}$. Из $\Delta(H) \leq k - 2$ следует, что $S = \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i$. Пусть $V_i = V(H_i)$. Изучим свойства множеств S_1, \dots, S_{k-1} .

Лемма 2.12. *Можно выбрать множество S_1 так, чтобы*

$$k|S_1| \leq |D| + |V_1| + e_G(U, S_1) - p. \quad (2.20)$$

Доказательство. Пусть W_1 — множество всех вершин из U , смежных с S_1 . Предположим, что U_1, \dots, U_q — все компоненты связности графа $G - D - S$, смежные с S_1 . Если в компоненте связности U_i существует вершина, смежная ровно с одной вершиной из S_1 , то выберем одну из таких вершин и обозначим через w_i . Пусть W_2 — множество из всех вершин w_i , а $W_3 = W_1 \setminus W_2$. Пусть $|W_2| = t$. Понятно, что $t \leq q$.

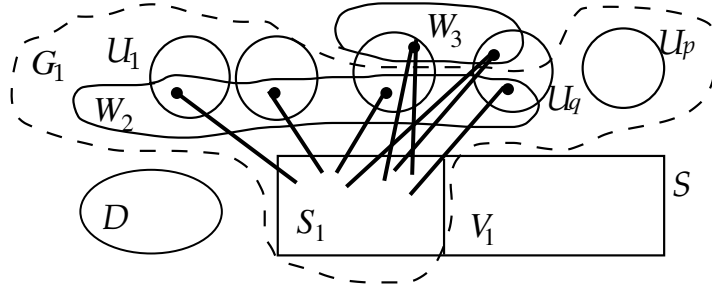


Рис. 2.16: Множества W_2 , W_3 и граф G_1 .

Каждая из компонент связности U_1, \dots, U_q , не содержащая вершину из W_2 , содержит только вершины, инцидентные хотя бы двум рёбрам из $E_G(U, S) = E_G(W_1, S)$, поэтому в множестве W_1 не менее $q - t$ таких вершин. Следовательно,

$$|W_1| \leq e_G(W_1, S_1) - (q - t),$$

а значит,

$$|W_3| \leq e_G(W_1, S_1) - q = e_G(U, S_1) - q. \quad (2.21)$$

Пусть $G_1 = G - (D \cup V_1 \cup W_3)$. Отметим, что $S_1 \subset V(G_1)$ — независимое множество, и его вершины в графе G_1 смежны только с вершинами из независимого множества W_2 , причем каждая вершина из W_2 смежна только с одной вершиной из S_1 . Поэтому вершины из S_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_1 . Компоненты связности U_{q+1}, \dots, U_p графа $G - D - S$, вершины которых не смежны с S_1 , являются компонентами связности графа G_1 . Поэтому

$$c(G_1) \geq |S_1| + p - q. \quad (2.22)$$

Рассмотрим два случая.

1. $c(G_1) \geq 2$.

Тогда из $t(G) \geq k$, неравенств (2.21) и (2.22) делаем вывод

$$\begin{aligned} |D| + |V_1| + e_G(U, S_1) - q &\geq |(D \cup V_1 \cup W_3)| \geq k \cdot c(G_1) \geq \\ &k(|S_1| + p - q) \geq k|S_1| + p - q, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует утверждение леммы.

2. $c(G_1) = 1$.

В силу (2.22) мы имеем $|S_1| = 0$ или $|S_1| = 1$. Рассмотрим два случая.

2.1. $|S_1| = 0$.

Тогда $S = S_1 = \emptyset$, следовательно, $|V_1| = e_G(U, S_1) = 0$. Следовательно, как сказано выше, тогда $D \neq \emptyset$. В этом случае утверждение леммы эквивалентно неравенству $|D| \leq p$. Если $p = c(G - D) > 1$, то мы имеем $p \geq k|D| > |D|$. Если же $p = 1$, то утверждение очевидно, так как $|D| \geq 1$.

2.2. $|S_1| = 1$.

Пусть $S_1 = \{s_1\}$. По построению, все вершины множества D смежны с s_1 . Если $p = 1$, то по лемме 2.10

$$k|S_1| = k < d_G(s_1) - p \leq |D| + |V_1| + e_G(U, s_1) - p,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $p \geq 2$. Тогда из $t(G) \geq k$ следует, что

$$|D| + |S| = |D \cup S| \geq k \cdot c(G - D - S) = kp \geq 2k.$$

Тогда

$$|D| + |V_1| = |D| + |V_1| + |S_1| - 1 = |D| + |S| - 1 \geq 2k - 1 > k = k|S_1|,$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 2.13. Пусть $M_r = \cup_{j=1}^r S_j$. Тогда для $i \in [2..k - 1]$ выполнено неравенство

$$k|S_i| \leq |D| + |V_i| + e_G(U, S_i) + e_G(M_{i-1}, S_i). \quad (2.23)$$

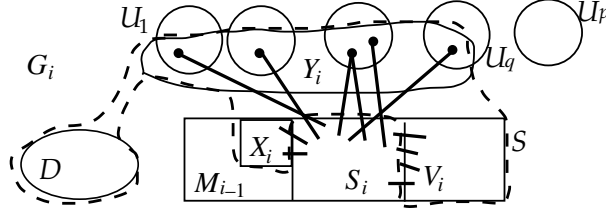
Доказательство. Если $S_i = \emptyset$, то, очевидно, утверждение выполнено. Пусть $S_i \neq \emptyset$. Положим

$$X_i = N_G(S_i) \cap M_{i-1}, \quad Y_i = N_G(S_i) \cap U, \quad G_i = G - N_G(S_i)$$

(см. рисунок 2.17). Понятно, что $N_G(S_i) = D \cup X_i \cup Y_i \cup V_i$ (напомним, что вершины множества D смежны со всеми вершинами из S по построению). Отметим очевидные неравенства $|X_i| \leq e_G(M_{i-1}, S_i)$ и $|Y_i| \leq e_G(U, S_i)$. Тогда

$$|N_G(S_i)| \leq |D| + |V_i| + e_G(M_{i-1}, S_i) + e_G(U, S_i). \quad (2.24)$$

Вершины множества S_i — изолированные в G_i , следовательно, $c(G_i) \geq |S_i|$. Рассмотрим два случая.

Рис. 2.17: Множества S_i , V_i , X_i , Y_i и граф G_i .

1. $c(G_i) \geq 2$.

Тогда из $t(G) \geq k$ и неравенства (2.24) следует, что

$$|D| + |V_i| + e_G(M_{i-1}, S_i) + e_G(U, S_i) \geq |N_G(S_i)| \geq k \cdot c(G_i) \geq k|S_i|.$$

2. $c(G_i) = 1$.

В этом случае $|S_i| = 1$ и, кроме того, $V(G) = S_i \cup N_G(S_i)$. Тогда из $v(G) \geq k + 1$ следует, что $|N_G(S_i)| \geq k$. Теперь из неравенства (2.24) следует, что

$$|D| + |V_i| + e_G(M_{i-1}, S_i) + e_G(U, S_i) \geq |N_G(S_i)| \geq k = k|S_i|.$$

□

Закончим доказательство теоремы. Положим $M_0 = \emptyset$. Заметим, что $e_G(S_i, V_i) \geq |V_i|$, так как S_i — максимальное независимое множество вершин в графе H_i , а $V_i = V(H_i) \setminus S_i$. Кроме того, $V(G) \setminus D = U \cup M_{i-1} \cup S_i \cup V_i$. Так как никакие две вершины множества S_i не смежны, мы имеем

$$\begin{aligned} e_G(S_i, V(G) \setminus D) &= e_G(S_i, M_{i-1}) + e_G(S_i, U) + e_G(S_i, V_i) \geq \\ &e_G(S_i, M_{i-1}) + e_G(S_i, U) + |V_i|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Воспользуемся леммами 2.12 и 2.13: сложим неравенство (2.20) и неравенства (2.23) для $i \in [2, \dots, k-1]$, после чего перенесем p в левую часть.

Получим

$$\begin{aligned}
k|S| + o(f; D, S) &\leq \sum_{i=1}^{k-1} k|S_i| + p \leq \\
(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} |V_i| + \sum_{i=1}^{k-1} e_G(U, S_i) + \sum_{i=2}^{k-1} e_G(M_{i-1}, S_i) = \\
(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} \left(e_G(S_i, U) + e_G(S_i, M_{i-1}) + |V_i| \right) &\leq \\
(k-1)|D| + \sum_{i=1}^{k-1} e_G(S_i, V(G) \setminus D) &\leq k|D| + \sum_{x \in S} d_{G-D}(x).
\end{aligned}$$

Тем самым неравенство (2.18) для множеств D и S выполнено, противоречие. Теорема доказана. \square

2.7 Графы с единственным паросочетанием

В этом разделе мы рассмотрим гораздо более простой по формулировке вопрос. Что можно сказать о графе, имеющем ровно одно совершенное паросочетание?

Теорема 2.21. (А. Kotzig, 1959.) Пусть G — связный граф (возможно, с кратными рёбрами, но без петель), имеющий единственное совершенное паросочетание. Тогда граф G имеет мост, входящий в это паросочетание.

Доказательство. 1. Предположим, что это утверждение неверно и выберем граф-контрпример G с наименьшим количеством вершин. Пусть M — единственное совершенное паросочетание графа G , а $N = E(G) \setminus M$.

Понятно, что граф G связан. Докажем, что *существует такое множество $F \subset N$ из одного или двух рёбер, что граф $G - F$ имеет ровно две компоненты связности.*

Если граф G имеет мост f , то $f \in N$ и $F = \{f\}$ нам подойдет. Пусть граф G не имеет мостов. Тогда $\delta(G) \geq 2$. Очевидно, наш граф G не является четным циклом, поэтому имеет хотя бы одну вершину степени более 2. Следовательно, $|N| > |M|$.

Для любого ребра $f \in N$ граф $G - f$ также имеет единственное паросочетание, причем это паросочетание M . Следовательно, $G - f$ имеет мост $e \in M$. Так как $|N| > |M|$, существуют ребра $f_1, f_2 \in N$ и $e \in M$,

что ребро e является мостом и в $G - f_1$, и в $G - f_2$. Таким образом, $\{f_1, e\}$ и $\{f_2, e\}$ — разделяющие множества в G .

В графе $G - e$ оба ребра f_1 и f_2 — мосты, каждый из них делит граф на две компоненты связности. Следовательно, граф $G - \{e, f_1, f_2\}$ имеет три компоненты связности. Теперь понятно, что граф $G - \{f_1, f_2\}$ несвязен, но становится связным при добавлении ребра f_1 , а следовательно, имеет ровно две компоненты связности. Таким образом, $F = \{f_1, f_2\}$ нам подходит.

2. Пусть $F = \{f_1, f_2\}$ (при $|F| = 1$ мы полагаем $f_1 = f_2$), $f_1 = a_1a_2$, $f_2 = b_1b_2$. Не умаляя общности можно считать, что $U_1 \ni a_1, b_1$ и $U_2 \ni a_2, b_2$ — компоненты связности графа $G - F$.

Определим граф G_1 . В случае, когда $a_1 = b_1$ положим $G_1 = G(U_1)$, а при $a_1 \neq b_1$ пусть G_1 получен из $G(U_1)$ добавлением нового ребра f'_1 с концами a_1 и b_1 (даже если ребро с такими концами в $G(U_1)$ есть). Аналогично определим G_2 .

Рассмотрим граф G_1 — он меньше G и имеет паросочетание, являющееся частью M . Следовательно, либо граф G_1 имеет мост $e_1 \in M$, либо он имеет другое совершенное паросочетание M_1 . Рассмотрим случай, когда есть мост. В графе G ребро e_1 не является мостом, следовательно, e_1 входит в простой цикл Z , проходящий хотя бы по одному из рёбер множества F . Но такой цикл обязан проходить и по a_1 , и по b_1 , причем эти вершины должны быть различны, более того, вершины a_1 и b_1 делят Z на две дуги: одна лежит в U_1 и содержит e_1 , а другая проходит по U_2 (см. рисунок 2.18). Заменяв вторую дугу на ребро f'_1 , мы получим простой цикл в G_1 , содержащий ребро e_1 , противоречие.

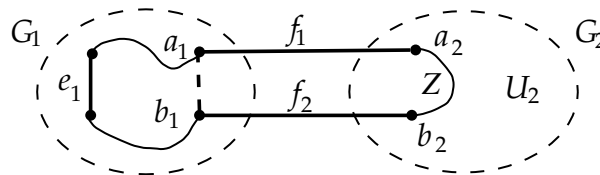
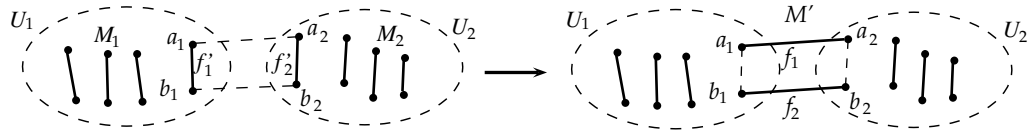


Рис. 2.18: Мост e_1 .

Таким образом, граф G_1 имеет паросочетание M_1 , отличное от части M . Аналогично, граф G_2 имеет паросочетание M_2 , отличное от части M .

3. Пусть $M_1 \not\ni f'_1$. Тогда мы построим второе совершенное паросочетание в графе G таким образом: в U_1 возьмём ребра из M_1 , а в U_2 возьмём ребра исходного паросочетания M . Аналогично рассматривается случай, когда $M_2 \not\ni f'_2$.

Рис. 2.19: Паросочетания M_1 , M_2 и M' .

Остается случай $M_1 \ni f'_1$, $M_2 \ni f'_2$. В этом случае мы построим второе совершенное паросочетание в графе G таким образом (см. рисунок 2.19):

$$M' = (M_1 \setminus \{f'_1\}) \cup (M_2 \setminus \{f'_2\}) \cup \{f_1, f_2\}.$$

В любом из случаев получаем противоречие с выбором графа G . \square

Глава 3

Пути и циклы

3.1 Гамильтонов путь и цикл

Определение 3.1. *Гамильтонов путь* в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов цикл в графе G — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

3.1.1 Классический критерий Дирака

Лемма 3.1. Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь в графе G , причём $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$. Тогда в графе есть цикл длины n .

Доказательство. Если вершины a_1 и a_n смежны, то из $n > 2$ следует, что в графе есть цикл длины n . Пусть эти две вершины несмежны. Понятно, что

$$N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}.$$

Пусть вершина a_n смежна с a_k , а вершина a_1 смежна с a_{k+1} . Тогда в графе есть цикл из n вершин: $a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}$ (см. рисунок 3.1), что и требовалось доказать.

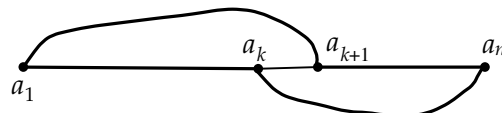


Рис. 3.1: Построение цикла.

Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}\}$, тогда либо в графе есть цикл длины n , либо $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_\ell+1} \notin N_G(a_1)$, следовательно, $d_G(a_1) \leq n - 1 - d_G(a_n)$. Полученное неравенство противоречит условию леммы. \square

Теорема 3.1. (O. Ore.)

1) Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1$, то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

Доказательство. 1) Случай, когда в графе G ровно две вершины, очевиден. Пусть $v(G) > 2$. Заметим, что граф G обязательно связан. (Пусть a и b — две несмежные вершины графа, тогда $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G) - 1$, откуда следует, что $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \emptyset$, то есть, вершины a и b связаны.)

Пусть $n < v(G)$ — количество вершин в наибольшем простом пути графа G . Поскольку граф G связан и $v(G) > 2$, то $n \geq 3$. По лемме 3.1 в графе G есть цикл Z из n вершин. Так как граф связан, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла, но тогда очевидно существует и путь длины $n + 1$, что противоречит предположению. Таким образом, в графе есть гамильтонов путь.

2) Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1. Пусть это путь $a_1 \dots a_{v(G)}$. Если вершины a_1 и $a_{v(G)}$ смежны, то очевидно есть и гамильтонов цикл, а если эти вершины несмежны, то $d_G(a_1) + d_G(a_{v(G)}) \geq v(G)$ и гамильтонов цикл есть по лемме 3.1. \square

А теперь приведем прямое следствие теоремы Оре.

Следствие 3.1. (G. A. Dirac, 1952.) 1) Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

3.1.2 Замыкание. Метод Хватала

Лемма 3.2. Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$. Тогда граф G — гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G + ab$ — гамильтонов.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать обратное следствие. Итак, пусть граф $G + ab$ — гамильтонов. Если гамильтонов цикл в графе $G + ab$ не проходит по ребру ab , то этот цикл есть и в графе G . Пусть гамильтонов цикл в графе $G + ab$ проходит по ребру ab , тогда в графе G есть гамильтонов путь с концами a и b . Значит, по лемме 3.1 в графе G существует гамильтонов цикл. \square

Рассмотрим произвольный граф G . Если существуют две несмежные вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, то добавим в граф ребро ab . Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем *замыканием* графа G и обозначим через $C(G)$.

Лемма 3.3. *Замыкание графа G определено однозначно, то есть, не зависит от порядка добавления рёбер.*

Доказательство. Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы G_1 и G_2 . Рассмотрим первый момент в двух процессах добавления рёбер, когда мы добавили разные рёбра. Перед этим моментом графы были одинаковы — пусть это был граф G_0 . Пусть в процессе получения графа G_1 мы добавили ребро a_1b_1 , а в процессе получения графа G_2 мы добавили ребро a_2b_2 . Тогда

$$a_1b_1, a_2b_2 \notin E(G_0), \quad d_{G_0}(a_1) + d_{G_0}(b_1) \geq v(G), \quad d_{G_0}(a_2) + d_{G_0}(b_2) \geq v(G).$$

Следовательно, оба ребра a_1b_1 и a_2b_2 будут добавлены в каждом из двух процессов построения замыкания. Тогда ничто не мешает добавить оба ребра одновременно в каждом из двух процессов и перейти к рассмотрению следующего различия в них. В итоге мы получим, что в обоих процессах построения замыкания добавлены одни и те же рёбра. \square

Непосредственно из леммы 3.2 следует достаточно интересный результат:

Следствие 3.2. (V. Chvatal, 1974.) *Граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.*

Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.

3.1.3 Связность и гамильтоновы циклы

Напомним, что через $c(H)$ мы обозначаем количество компонент связности графа H .

Лемма 3.4. *Пусть граф G гамильтонов. Тогда для любого множества $S \subset V(G)$ выполняется неравенство $c(G - S) \leq |S|$.*

Доказательство. Пусть $c(G - S) = c$, U_1, \dots, U_c — компоненты связности графа $G - S$, а Z — гамильтонов цикл графа G . Начнём обходить

цикл Z , начиная с вершины множества S . Пусть s_i — вершина, предшествующая первому входу цикла Z в компоненту связности U_i . Понятно, что $s_i \in S$ и все вершины s_1, \dots, s_c различны, откуда немедленно следует требуемое неравенство. \square

Любопытно внешнее сходство с условием Татта о совершенном паросочетании (см. главу **Паросочетания**, теорема 2.6): наличие совершенного паросочетания в графе G эквивалентно условию о том, что количество нечётных компонент связности графа $G - S$ не превосходит $|S|$ для любого множества $S \subset V(G)$. Однако, аналогичного критерия существования гамильтонова цикла нет.

Следующая теорема даёт критерий гамильтоновости графа на языке его вершинной связности. Подробнее о связности написано в соответствующей главе, пока же нам потребуются только определения, которые содержатся во введении.

Теорема 3.2. Пусть $v(G) \geq 3$ и $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Тогда в графе G существует гамильтонов цикл.

Доказательство. Очевидно, в графе G есть циклы, так как в противном случае $\kappa(G) = 1$ и $\alpha(G) \geq 2$, что невозможно. Пусть $\kappa(G) = k$. Выберем цикл максимальной длины C в графе G , пусть $C = v_1 v_2 \dots v_n$ (нумерация вершин — циклическая).

Предположим, что цикл C не гамильтонов и рассмотрим компоненту связности W графа $G - V(C)$. Тогда $N_G(W) \subset V(C)$. Предположим, что $v_i, v_{i+1} \in N_G(W)$, пусть $w, w' \in W$, $v_i w, v_{i+1} w' \in E(G)$ (возможно, вершины w и w' совпадают), а P — ww' -путь по вершинам компоненты связности W . Тогда цикл C можно удлинить, заменив ребро $v_i v_{i+1}$ на ребро $v_i w$, путь P и ребро $w' v_{i+1}$ (см. рисунок 3.2а). Противоречие с максимальной длиной цикла C .

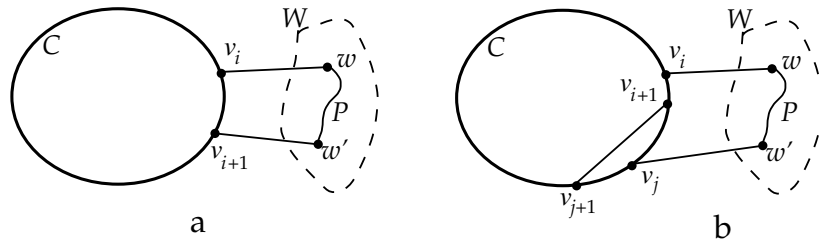


Рис. 3.2: Цикл C и компонента W .

Пусть $M = \{v_{i+1} : v_i \in N_G(W)\}$. Как показано выше, $M \cap N_G(W) = \emptyset$. В частности это означает, что $N_G(W)$ отделяет непустое множество M от W , следовательно, $|M| = |N_G(W)| \geq k$.

Предположим, что вершины $v_{i+1}, v_{j+1} \in M$ смежны. Пусть $w, w' \in W$, $v_i w, v_j w' \in E(G)$ (возможно, вершины w и w' совпадают), а P — ww' -путь по вершинам компоненты связности W . Рассмотрим цикл Z , проходящий сначала участок $v_{j+1}v_{j+2} \dots v_i$ цикла C , затем ребро $v_i w$, путь P и ребро $w' v_j$, потом участок $v_j v_{j-1} \dots v_{i+1}$ цикла C и, наконец, ребро $v_{i+1} v_{j+1}$ (см. рисунок 3.2b). Очевидно, $|Z| > |C|$, что противоречит максимальности цикла C .

Из доказанного следует, что множество $M \cup \{w\}$ — независимое, но в нём $|M| + 1 > k$ вершин, что противоречит условию $\alpha(G) \leq k$. Таким образом, цикл C — гамильтонов. \square

Задача 3.1. Напомним, что через $\kappa(G)$ обозначается вершинная связность графа.

- а) Докажите, что в графе G существует цикл длины хотя бы $\kappa(G)$.
- б) Докажите, что в графе G существует цикл длины хотя бы $2\kappa(G)$, если, конечно, $2\kappa(G) \leq v(G)$.

3.1.4 Гамильтоновы последовательности

Определение 3.2. 1) Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ — две упорядоченные последовательности. Будем говорить, что последовательность $\{a_i\}_{i \in [1..n]}$ *мажорирует* последовательность $\{b_i\}_{i \in [1..n]}$, если $a_i \geq b_i$ для всех $i \in [1..n]$.

2) Пусть G — граф на n вершинах. *Степенной последовательностью* графа G назовём упорядоченную последовательность степеней его вершин $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

3) Будем говорить, что граф G *мажорирует* граф H , если степенная последовательность графа G мажорирует степенную последовательность графа H .

4) Последовательность $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ называется *гамильтоновой*, если $a_n \leq n-1$ и любой граф на n вершинах, степенная последовательность которого мажорирует a_1, \dots, a_n , имеет гамильтонов цикл.

Теорема 3.3. (V. Chvatal, 1972.) Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n-1$, $n \geq 3$. Следующие два утверждения равносильны.

- 1° Последовательность a_1, \dots, a_n гамильтонова.
- 2° Для каждого $h < \frac{n}{2}$ из $a_h \leq h$ следует $a_{n-h} \geq n-h$.

Доказательство. $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Предположим, что наша последовательность негамильтонова и рассмотрим негамильтонов граф G на n вершинах с максимальным числом рёбер, степенная последовательность

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

которого мажорирует a_1, \dots, a_n . В силу леммы 3.2 понятно, что граф G совпадает со своим замыканием, то есть, сумма степеней любых двух несмежных вершин графа G менее n .

Понятно, что граф G — не полный. Рассмотрим две несмежные вершины $x, y \in V(G)$ с наибольшим $d_G(x) + d_G(y)$. Будем считать, что $d_G(x) \leq d_G(y)$. Как уже отмечалось, $d_G(x) + d_G(y) < n$, поэтому $d_G(x) = h < \frac{n}{2}$, $d_G(y) \leq n - 1 - h$.

Пусть W_x — множество всех вершин графа G , отличных от x и не смежных с x , а W_y — множество всех вершин графа G , отличных от y и не смежных с y . Понятно, что

$$|W_x| = n - 1 - d_G(x) = n - 1 - h, \quad |W_y| = n - 1 - d_G(y) \geq d_G(x) = h.$$

По выбору вершин x и y степени всех вершин множества W_y (а их хотя бы h) не превосходят $d_G(x) = h$, поэтому $a_h \leq d_h \leq h$. Степени всех $n - h$ вершин множества $W_x \cup \{x\}$ не превосходят $d_G(y) \leq n - 1 - h$, поэтому $a_{n-h} \leq d_{n-h} \leq n - h - 1$. Противоречие с условием 2° показывает, что на самом деле последовательность a_1, \dots, a_n гамильтонова.

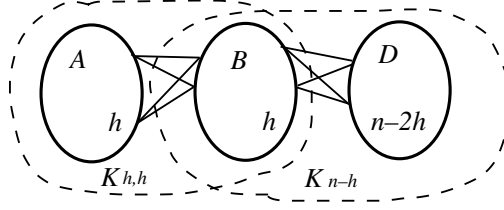


Рис. 3.3: Граф $G_{n,h}$.

1° \Rightarrow 2°. Пусть $h < \frac{n}{2}$, $d_h \leq h$ и $d_{n-h} \leq n - h - 1$. Построим негамильтонов граф $G_{n,h}$, степеньная последовательность которого мажорирует a_1, \dots, a_n . Пусть $A = \{v_1, \dots, v_h\}$, $B = \{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$, $D = \{v_{h+1}, \dots, v_{n-h}\}$. Наш граф является объединением полного двудольного графа $K_{h,h}$ с долями A и B и полного графа K_{n-h} на вершинах множества $B \cup D$ (см. рисунок 3.3). Таким образом,

$$d_{G_{n,h}}(v_1) = \dots = d_{G_{n,h}}(v_h) = h, \quad d_{G_{n,h}}(v_{h+1}) = \dots = d_{G_{n,h}}(v_{n-h}) = n - h - 1,$$

$$d_{G_{n,h}}(v_{n-h+1}) = \dots = d_{G_{n,h}}(v_n) = n - 1.$$

Легко видеть, что степеньная последовательность графа $G_{n,h}$ мажорирует a_1, \dots, a_n . Отметим, что $c(G_{n,h} - B) = h + 1$ (эти компоненты — множество D и h попарно несмежных вершин множества A). Таким образом, $c(G_{n,h} - B) > h = |B|$ и по лемме 3.4 граф $G_{n,h}$ не является гамильтоновым. \square

Следствие 3.3. *Любой негамильтонов граф G на n вершинах мажорируется графом $G_{n,h}$ для некоторого $h < \frac{n}{2}$.*

Доказательство. Пусть G имеет степенную последовательность d_1, \dots, d_n . По теореме 3.3, существует такое $h < \frac{n}{2}$, что $d_h \leq h$ и $d_{n-h} < n - h$. Тогда легко видеть, что граф G мажорируется графом $G_{n,h}$. \square

Применим разработанную технику для гамильтоновых путей.

Теорема 3.4. *Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n - 1$, $n \geq 3$. Следующие два утверждения равносильны.*

1° *Любой граф G , степенная последовательность которого мажорирует a_1, \dots, a_n , имеет гамильтонов путь.*

2° *Для каждого $h \leq \frac{n}{2}$ из $a_h \leq h - 1$ следует $a_{n+1-h} \geq n - h$.*

Доказательство. Для любого графа G обозначим через G^* граф, полученный из G добавлением новой вершины w , смежной со всеми вершинами из $V(G)$. Нетрудно понять, что граф G имеет гамильтонов путь тогда и только тогда, когда G^* имеет гамильтонов цикл.

Пусть степенная последовательность графа G на n вершинах — это $d_1 \leq \dots \leq d_n$, тогда степенная последовательность графа G^* — это $d_1 + 1 \leq \dots \leq d_n + 1 \leq n$. Очевидно, последовательность d_1, \dots, d_n мажорирует a_1, \dots, a_n тогда и только тогда, когда $d_1 + 1, \dots, d_n + 1, n$ мажорирует $a_1 + 1, \dots, a_n + 1, n$.

Отметим, что последовательность a_1, \dots, a_n удовлетворяет условию 2° нашей теоремы тогда и только тогда, когда последовательность $a_1 + 1, \dots, a_n + 1, n$ удовлетворяет условию 2° теоремы 3.3.

2° \Rightarrow 1°. Пусть степенная последовательность графа G мажорирует a_1, \dots, a_n . Тогда степенная последовательность графа G^* мажорирует $a_1 + 1, \dots, a_n + 1, n$ и по теореме 3.3 граф G^* — гамильтонов, а значит, в графе G есть гамильтонов путь.

1° \Rightarrow 2°. Предположим противное: пусть существует такое $h \leq \frac{n}{2}$, что $a_h \leq h - 1$ и $a_{n+1-h} \leq n - h - 1$. Тогда $a_h + 1 \leq h$ и $a_{n+1-h} \leq n - h$, а значит, степенная последовательность негамильтонова графа $G_{n+1,h}$ мажорирует $a_1 + 1, \dots, a_n + 1, n$. Отметим, что в графе $G_{n+1,h}$ есть вершина w степени n , пусть $H_{n,h} = G_{n+1,h} - w$. Тогда $H_{n,h}^* = G_{n+1,h}$, а значит, граф $H_{n,h}$ не имеет гамильтонова пути и его степенная последовательность мажорирует a_1, \dots, a_n . Противоречие. \square

3.1.5 Гамильтонов цикл в степени графа

Определение 3.3. Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $\text{dist}_G(x, y) \leq d$.

Сначала мы докажем совсем несложный факт о наличии гамильтонова цикла в кубе любого связного графа на не менее, чем трех вершинах. Потом мы докажем гораздо более сложную теорему: для любого двусвязного графа G в графе G^2 есть гамильтонов цикл.

Гамильтонов цикл в кубе графа

Теорема 3.5. (G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.) Для любого связного графа G с $v(G) \geq 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e .

Доказательство. Разумеется, достаточно доказать теорему для случая, когда G — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро e). Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. База для дерева на трех или четырех вершинах очевидна.

Предположим, что для всех деревьев, имеющих меньше вершин, чем G (и хотя бы три вершины), теорема уже доказана. Пусть $e = uv$, тогда в графе $G - uv$ две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$ и $G_v = G(V)$. Не умаляя общности можно считать, что в компоненте связности U хотя бы три вершины. По индукционному предположению построим гамильтонов цикл в графе G_u^3 , содержащий инцидентное u ребро $ux \in E(G)$.

Если в компоненте связности V хотя бы три вершины, то аналогично мы построим гамильтонов цикл в графе G_v^3 , содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G)$. Соединим эти два цикла в один, заменив рёбра ux и vy на uv и xu , как изображено на рисунке 3.4a (отметим, что $\text{dist}_G(x, y) = 3$).

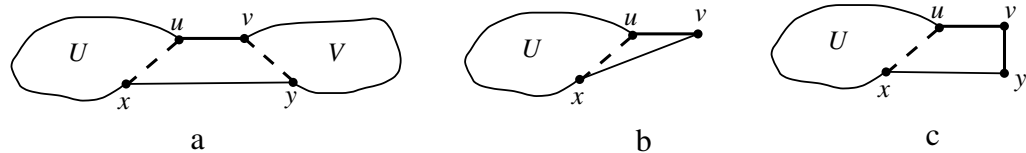


Рис. 3.4: Гамильтонов цикл в кубе графа

Остаются очевидные случаи, когда $|V| < 3$. При $V = \{v\}$ мы заменим в гамильтоновом цикле графа G_u^3 ребро ux на uv и vx (см. рисунок 3.4b).

При $V = \{v, y\}$, очевидно, $vy \in E(G)$ и мы заменим в гамильтоновом цикле графа G_u^3 ребро ux на uv , vy и yx (см. рисунок 3.4с). \square

Гамильтонов цикл в квадрате графа

Мы докажем, что для любого двусвязного графа G в графе G^2 есть гамильтонов цикл. Начнём доказательство с двух несложных лемм.

Определение 3.4. 1) Для любого пути P с концами x, y мы введём обозначение $\text{Int}(P) = V(P) \setminus \{x, y\}$.

2) *Дуга* простого цикла C — это любой простой путь, являющийся подграфом C .

Лемма 3.5. Пусть G — двусвязный граф, $x \in V(G)$. Тогда в графе G существует вершина $y \neq x$ и цикл C , для которого $x, y \in V(C)$ и $N_G(y) \subset V(C)$.

Доказательство. Если граф G гамильтонов, лемма очевидна. Пусть в G нет гамильтонова цикла. Из двусвязности следует, что в графе G есть цикл, проходящий через x . Выберем такой цикл Z , что одна из компонент связности U графа $G - Z$ — наименьшая для всех проходящих по x циклов. Очевидно, $N_G(U) \subset V(Z)$, из двусвязности графа G следует, что $|N_G(U)| \geq 2$. Тогда выберем $u_1, u_2 \in N_G(U)$ так, что для одной из дуг L цикла Z с концами u_1 и u_2 выполняются условия $x \notin \text{Int}(L)$ и $N_G(U) \cap \text{Int}(L) = \emptyset$ (см. рисунок 3.5).

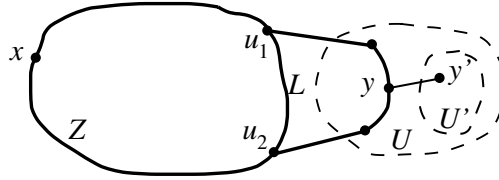


Рис. 3.5: Цикл Z и компонента U .

Заменим дугу L на $u_1 u_2$ -путь, проходящий по U . Мы получили цикл Z' , проходящий по x и вершине $y \in U$. Если $N_G(y) \not\subset V(Z')$, то существует вершина $y' \in N_G(y) \setminus V(Z')$. Рассмотрим компоненту связности $U' \ni y'$ графа $G - Z'$. Так как вершины из $\text{Int}(L)$ не смежны с вершинами из U , то $U' \subsetneq U$ и, следовательно, $|U'| < |U|$, что противоречит выбору цикла Z и компоненты связности U . \square

Лемма 3.6. Пусть H — однородный граф степени 3 с гамильтоновым циклом C (в графе допускаются кратные рёбра). Пусть $e \in E(C)$ и $f \in$

$E(H) \setminus E(C)$ — рёбра с общим концом v . Тогда существует замкнутый маршрут Z , удовлетворяющий следующим условиям.

1° Z проходит по каждому ребру из $E(H) \setminus E(C)$ и по ребру e ровно один раз, а по остальным рёбрам цикла C — один или два раза. Рёбра цикла C , по которым маршрут Z проходит два раза, не имеют общих концов.

2° Z проходит последовательно рёбра e и f .

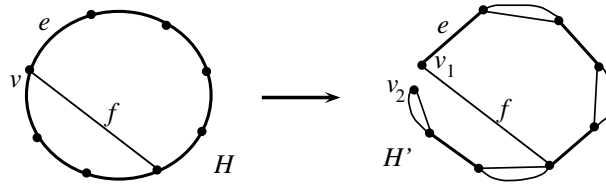


Рис. 3.6: Графы H и H' .

Доказательство. Очевидно, $v(G)$ чётно и поэтому цикл C чётен. Покрасим в цвета 1 и 2 ребра цикла C через одно. Пусть ребро e имеет цвет 1, тогда удвоим все рёбра цвета 2 (для каждого из них добавим кратное ребро). В полученном графе H' (см. рисунок 3.6) степени всех вершин равны 4. Наконец, разобьём вершину v на вершину v_1 , инцидентную рёбрам e и f и вершину v_2 , инцидентную остальным двум рёбрам вершины v . Граф H' , очевидно, связан, степени всех его вершин чётны и потому в H' существует Эйлеров цикл Z , который и является искомым замкнутым маршрутом в графе H . \square

Теорема 3.6. (Н. Fleischner, 1974.) Для любого двусвязного графа G в графе G^2 есть гамильтонов цикл.

Доказательство. Мы будем доказывать индукцией по количеству вершин более сильное утверждение.

Для любого двусвязного графа G и любой вершины $a \in V(G)$ в графе G^2 есть гамильтонов цикл, в котором оба инцидентных вершине a ребра принадлежат $E(G)$.

База для графа из трёх вершин очевидна. Пусть $v(G) \geq 4$ и для всех меньших графов утверждение доказано. Зафиксируем вершину $a \in V(G)$. По лемме 3.5 существует отличная от a вершина $b \in V(G)$ и цикл C , для которого $a, b \in V(C)$ и $N_G(b) \subset V(C)$. Если C — гамильтонов цикл, то утверждение доказано. Итак, мы далее рассматриваем случай, когда цикл C не гамильтонов.

1. Построение множества \mathcal{P} .

Рассмотрим компоненту связности U графа $G - C$. Если $U = \{u\}$, то пусть $\mathcal{P}(U) = \{u\}$. Пусть $|U| \geq 2$. Построим вспомогательный граф G_U , стянув все вершины из $V(G) \setminus U$ в одну вершину a^* .

Пусть x — точка сочленения графа G_U . Понятно, что $x \neq a^*$. Пусть Y — компонента связности графа $G_U - x$, не содержащая a^* . Тогда ни одна из вершин Y , очевидно, не смежна с циклом C в графе G , а следовательно, граф $G - x$ несвязен, что невозможно. Таким образом, граф G_U двусвязен.

Мы будем рассматривать рёбра графа G_U , как подмножество $E(G)$ (каждое ребро $e' \in E(G_U)$ отождествим с одним из рёбер $e \in E(G)$, переходящих в e' при стягивании вершин).

По индукционному предположению, в графе G_U^2 есть гамильтонов цикл C_U , в котором оба инцидентных a^* ребра принадлежат $E(G_U)$. Отметим, что в графе G_U^2 могут быть рёбра, не входящие в $E(G^2)$: это рёбра, соединяющие пары вершин, смежных в графе G_U с вершиной a^* . Обозначим множество таких рёбер через E^* . Удалим из цикла C_U вершину a^* и все рёбра из E^* , в результате чего цикл распадётся на несколько путей (см. рисунок 3.7а). Пусть $\mathcal{P}(U)$ — множество этих путей (возможно, среди них есть пути из одной вершины). Отметим, что пути из $\mathcal{P}(U)$ покрывают все вершины компоненты связности U , для каждого пути $P \in \mathcal{P}(U)$ оба его конца смежны с a^* , а $E(P) \subset E(G^2)$.

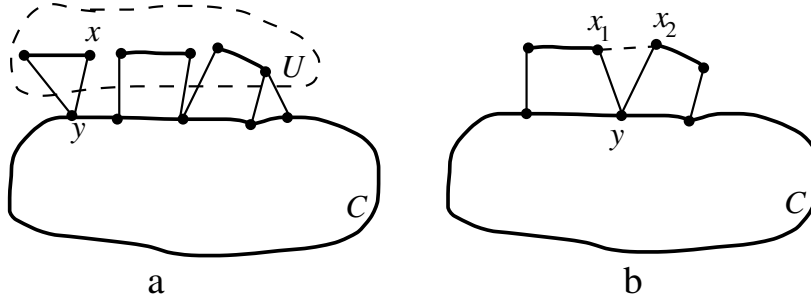


Рис. 3.7: Пути множества \mathcal{P} .

Построим множество путей $\mathcal{P}(U)$ для всех компонент связности графа $G - C$, пусть \mathcal{P} — объединение всех этих множеств путей. Отметим, что \mathcal{P} — множество попарно непересекающихся путей в графе G^2 , удовлетворяющее следующим свойствам.

(P1) $V(G) \setminus V(C) = \cup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$.

(P2) Пусть x — конец пути $P \in \mathcal{P}$. Тогда существует вершина $y \in V(C)$, смежная с x .

Докажем свойство (P2). Пусть $P \in \mathcal{P}(U)$. По построению, вершина x смежна в графе G_U с вершиной a^* . Это означает существование ребра

$xy \in E(G)$, где $y \notin U$. Так как U — компонента связности графа $G - C$, мы имеем $y \in V(C)$.

Вершину y мы назовём *основанием* пути P в вершине x . Возможно, такая вершина y не единственна, для определённости в каждом случае мы выберем в качестве основания ровно одну вершину. Если путь $P \in \mathcal{P}$ имеет более одной вершины, то у него есть по основанию в каждом конце, однако, эти основания могут совпадать. Пусть \mathcal{P}_1 — множество всех путей из \mathcal{P} с одним основанием, а \mathcal{P}_2 — множество всех путей из \mathcal{P} с двумя основаниями.

Подправим множество \mathcal{P} так, чтобы кроме $(P1)$ и $(P2)$ выполнялось еще одно условие.

(P3) Никакая вершина цикла C не является основанием двух путей из \mathcal{P} .

Пусть это условие не выполняется и вершина $y \in V(C)$ является общим основанием пути P_1 в вершине x_1 и пути P_2 в вершине x_2 . Тогда $x_1x_2 \in E(G^2)$ и мы можем соединить пути P_1 и P_2 в один путь (см. рисунок 3.7b). Будем выполнять такие операции до тех пор, пока не выполнится условие $(P3)$.

Далее мы не будем менять пути из \mathcal{P} . Более того, каждый из этих путей будет дугой гамильтонова цикла графа G^2 , который мы построим.

2. Включение в цикл путей из \mathcal{P}_2 .

Пусть $G_1 = G - \cup_{P \in \mathcal{P}_1} V(P)$. Мы хотим построить из цикла C гамильтонов цикл Z графа G_1^2 . В случае $\mathcal{P}_2 = \emptyset$, очевидно, подойдёт $Z = C$. Далее будем считать, что $|\mathcal{P}_2| = p \neq 0$.

Введём циклическую нумерацию вершин цикла $C = v_1v_2 \dots v_k$. Для каждой дуги $Q = v_i v_{i+1} \dots v_j$ нашего цикла назовём v_i её *левым концом* и обозначим через $\ell(Q)$, а v_j — *правым концом* и обозначим через $r(Q)$.

Пусть W — множество всех оснований всех путей из \mathcal{P}_2 . В силу $(P3)$ мы имеем $|W| = 2|\mathcal{P}_2| = 2p$. Отметим на цикле C все вершины множества W , они разбивают C на $2p$ дуг (не содержащих внутри вершин из W). Пусть \mathcal{W} — множество всех этих дуг. Очевидно, ровно одна дуга $I \in \mathcal{W}$ такова, что $a \in \text{Int}(I)$ или $a = r(I)$. Пусть $w = r(I)$, а $P \in \mathcal{P}_2$ — единственный путь с основанием w (см. рисунок 3.8a). Для каждой дуги $Q \in \mathcal{W}$ обозначим через Q^ℓ и Q^r соседние слева и справа соответственно дуги. Таким образом, $\ell(Q) = r(Q^\ell)$ и $r(Q) = \ell(Q^r)$.

Построим вспомогательный кубический граф H на вершинах множества W , соединив ребром вершины $x, y \in W$ тогда и только тогда, когда x и y — основания одного пути из \mathcal{P}_2 или x и y — концы дуги из \mathcal{W} . Будем обозначать рёбра графа H так же, как соответствующие им пути и дуги. Получился кубический граф. Применим лемму 3.6 к графу H , рёбрам I

и P (имеющим общую вершину w). В результате получится замкнутый маршрут Z' , удовлетворяющий условиям 1° и 2° леммы 3.6.

В качестве первого приближения мы построим замкнутый маршрут Z в графе G_1 , проходя в порядке Z' пути и дуги, соответствующие рёбрам Z' . В силу леммы 3.6, любая дуга $Q \in \mathcal{W}$ принадлежит одному из трёх типов.

Тип 1. Z проходит Q один раз.

Тип 2. Z проходит Q два раза: от одного конца к другому, разворачивается и сразу же идёт в обратном направлении. Конец дуги Q , в котором происходит разворот, назовём *мёртвым*.

Тип 3. Z проходит Q два раза, но не подряд.

Дуга I , очевидно, принадлежит типу 1, а соседняя справа дуга I^r — типу 2. По лемме 3.6, одна из двух соседних дуг всегда принадлежит типу 1. Мы изменим маршрут Z на дугах типов 2 и 3 так, чтобы получился гамильтонов цикл в графе G_1 . Будем рассматривать дуги типов 2 и 3 в порядке их обхода маршрутом Z' .

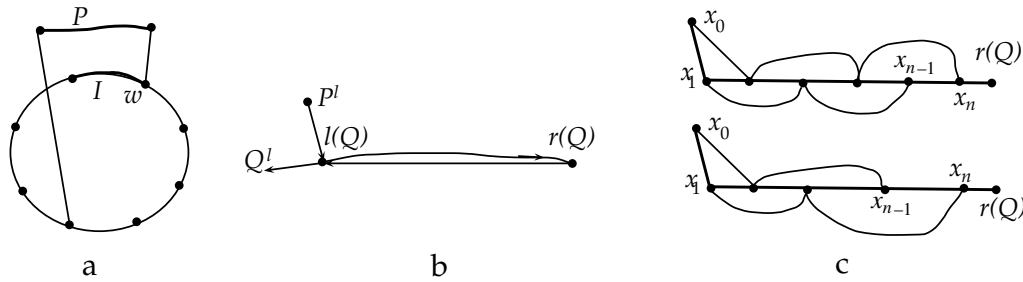


Рис. 3.8: Построение цикла Z : дуга типа 2.

2.1. Дуга Q принадлежит типу 2.

Не умаляя общности предположим, что $r(Q)$ — мёртвый конец дуги Q . Пусть $x_1 = \ell(Q)$, далее занумеруем вершины дуги Q по порядку до x_n — вершины, предшествующей мёртвому правому концу $r(Q)$ (возможно, $n = 1$). Через x_0 обозначим конец пути $P^\ell \in \mathcal{P}_2$, чьим основанием является $x_1 = \ell(Q)$. Тогда маршрут Z проходит от x_0 к x_1 , далее до x_n , затем в $r(Q)$, где разворачивается и идёт обратно в x_1 , затем на соседнюю слева с Q дугу Q^ℓ , которая принадлежит типу 1 (мысленно введём на Z именно такое направление, см. рисунок 3.8b).

Мы изменим маршрут на участке $x_0x_1 \dots x_nr(Q)$. Наш маршрут не будет проходить ребро $x_nr(Q)$ (ведь вершину $r(Q)$ он проходит ещё раз!). Включим в маршрут ребро $x_{n-1}x_n$. В зависимости от чётности n , от одной из вершин x_n и x_{n-1} можно добраться до x_1 , а от другой — до x_0 ,

проходя по рёбрам вида $x_k x_{k-2}$, такие рёбра входят в G_1^2 (на рисунке 3.8с изображены оба случая — четного и нечетного n). В результате мы построили новый участок маршрута, который идёт от x_0 до x_1 , проходя все вершины x_0, x_1, \dots, x_n ровно по одному разу. В остальном маршрут Z не изменится: до вершины x_0 он пойдёт по пути P^ℓ , а после x_1 — по дуге Q^ℓ (которую проходил один раз).

Последовательно выполним такие операции для всех дуг типа 2. Отметим, что маршрут Z не изменится на всех дугах типа 1 и типа 3, а также на всех путях из \mathcal{P}_2 .

2.2. Дуга Q принадлежит типу 3.

Пронумеруем вершины дуги Q : $x_1 = \ell(Q), x_2, \dots, x_n = r(Q)$. В рассматриваемом случае $n \geq 2$. Пусть $P^\ell, P^r \in \mathcal{P}_2$ — пути, основаниями которых являются $x_1 = \ell(Q)$ и $x_n = r(Q)$ соответственно (см. рисунок 3.9а). Через x_0 мы обозначим либо конец пути из P^ℓ , чьим основанием является x_1 , либо лежащую на дуге Q^ℓ соседнюю слева с x_1 вершину цикла C . Мы выберем один из этих двух вариантов позже. Через x_{n+1} обозначим конец пути P^r , чьим основанием является x_n .

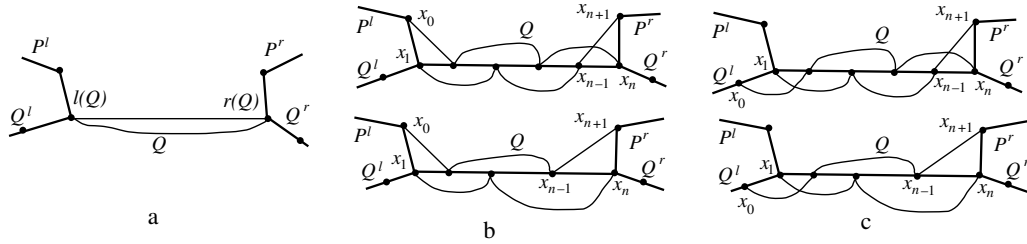


Рис. 3.9: Построение цикла Z : дуга типа 3.

Теперь подумаем, каким образом маршрут Z дважды проходит дугу Q . Так как соседние с Q дуги Q^ℓ и Q^r , а также пути P^ℓ и P^r маршрут Z проходит по одному разу, в нем либо должны быть участки $Q^\ell Q Q^r$ и $P^\ell Q Q^r$, либо должны быть участки $Q^\ell Q P^r$ и $P^\ell Q P^r$ (направление прохода этих участков нас не интересует). В любом из вариантов ясно, какие концы должна соединять пара путей, которые мы строим.

В любом случае, мы соединим x_n с вершиной дуги Q^r , соседней с $x_n = r(Q)$ в цикле C . Мы соединим пару вершин x_0, x_1 с x_n, x_{n+1} двумя непересекающимися путями в G_1^2 , проходящими все вершины x_2, \dots, x_{n-1} ровно по одному разу. Это сделать несложно: мы проведём рёбра $x_{i-1} x_{i+1} \in G_1^2$ для всех $i \in [1..n]$. Какие концы в итоге соединятся, зависит от четности n .

Выберем x_0 из двух предложенных вариантов так, чтобы путь P^r был соединён в перестроенном маршруте Z именно с тем из Q^ℓ и P^ℓ , с

кем нужно. Все четыре варианта соединения концов показаны: на рисунке 3.9b — варианты, в которых мы выбираем в качестве x_0 конец пути P^ℓ , а на рисунке 3.9c — варианты, в которых мы выбираем в качестве x_0 соседнюю слева с x_1 вершину цикла C . Таким образом, при любой четности ℓ мы можем провести в G^2 как два непересекающихся пути $Q^\ell Q Q^r$ и $P^\ell Q P^r$, так и два непересекающихся пути $Q^\ell Q P^r$ и $P^\ell Q P^r$. В результате получится новый замкнутый маршрут Z , который за два раза пройдёт все вершины дуги Q по одному разу.

Последовательно выполним такие операции для всех дуг типа 3. В результате маршрут Z станет гамильтоновым циклом графа G_1^2 . Отметим, что маршрут Z не изменится на всех путях из \mathcal{P}_2 . На любой дуге J типа 1 цикл Z по-прежнему проходит все рёбра, кроме, возможно, самого правого ребра. Самое правое ребро дуги J цикл Z может не проходить только в том случае, когда соседняя справа дуга J^r принадлежит типу 3. Поскольку I^r принадлежит типу 2, то цикл Z проходит все рёбра дуги I .

В случае $a \in \text{Int}(I)$ оба выходящих из a ребра цикла Z — это рёбра цикла C , которые принадлежат $E(G)$. Если же $a = r(I) = w$, то w — мёртвый конец дуги I^r типа 2, поэтому цикл Z содержит два инцидентных вершине $a = w$ ребра графа G : ребро дуги I и ребро, соединяющее $a = w$ с концом пути P .

3. Включение в цикл путей из \mathcal{P}_1 .

Итак, мы имеем гамильтонов цикл Z в графе G_1^2 , в котором оба инцидентных a ребра принадлежат графу G . Остаётся включить в него пути с одним основанием. Пусть U — множество всех контактов путей из \mathcal{P}_1 . Тогда в силу (P3) мы имеем $|U| = |\mathcal{P}_1|$, все вершины из U — внутренние вершины дуг из \mathcal{W} .

3.1. Соответствие $u \rightarrow e(u)$.

Мы поставим в соответствие каждой вершине $u \in U$ ребро $e(u)$ цикла Z так, чтобы соответствие было однозначным и выполнялось одно из двух условий.

(E1) Ребро $e(u) \in E(C)$ инцидентно u . При $u \neq a$, ребро $e(u)$ не инцидентно a .

(E2) Ребро $e(u)$ соединяет две соседние с u вершины цикла C .

Для простоты мы определим $e(u)$ на $V(C) \setminus W \supset U$. Построим соответствие отдельно на внутренности каждой дуги $Q \in \mathcal{W}$.

3.1.1. Q — дуга типа 3.

Тогда для каждой вершины $u \in \text{Int}(Q)$ цикл Z по построению содержит ребро, соединяющее две соседние с u вершины цикла C . Именно это ребро и назовём $e(u)$. Очевидно, в этом случае выполняется условие (E2).

3.1.2. Q — дуга типа 2.

Пусть u' — соседняя с мёртвым концом вершина дуги Q . Тогда для каждой отличной от u' вершины $u \in \text{Int}(Q)$, в цикле Z по построению есть ребро, соединяющее две соседние с u вершины цикла C . Именно это ребро и назовём $e(u)$. Очевидно, в этом случае выполняется условие (E2).

Рассмотрим вершину u' . Если $u' \in U$, то $u' \in \text{Int}(Q)$. Тогда цикл Z по построению содержит ребро дуги Q , соединяющее u' с соседней вершиной x дуги Q , причём x — не мёртвый конец Q , то есть, $x \neq a$. Тем самым, выполняется условие (E1).

3.1.3. Q — дуга типа 1.

Вспомним, что единственная дуга, левым концом которой может быть a — это I^r и она принадлежит типу 2. Поэтому $a \neq \ell(Q)$. Рассмотрим два случая.

3.1.3.1. $a \notin \text{Int}(Q)$.

Тогда цикл Z проходит все рёбра дуги Q , кроме, возможно, самого правого ребра. Мы каждой вершине $u \in \text{Int}(Q)$ поставим в соответствие ребро $e(u)$, соединяющее u с соседом слева. Очевидно, выполняется условие (E1).

3.1.3.2. $a \in \text{Int}(Q)$.

Сюда же отнесём случай, когда $\mathcal{P}_2 = \emptyset$. В этом случае мы вспомним про вершину $b \in V(C)$, у которой $N_G(b) \subset V(C)$. Понятно, что $b \notin U$. Мы будем рассматривать цикл C , как дугу Q , обоими концами которой является b (а все остальные вершины — внутренние). Поскольку $a \neq b$, то a принадлежит внутренности этой дуги.

Пронумеруем вершины дуги слева направо: $x_1 = \ell(Q), \dots, x_m = a, \dots, x_n = r(Q)$. Отметим, что $m > 1$. Для всех $i \in [m..n-1]$ мы положим $e(x_i) = x_i x_{i+1}$, а для всех $i \in [2..m-1]$ мы положим $e(x_i) = x_i x_{i-1}$. В таком случае вершина a инцидентна только ребру $e(x_m) = e(a)$ и выполняется условие (E1).

Инъективность отображения $u \rightarrow e(u)$ достаточно проверить при $|U| \geq 2$. По построению, если для двух вершин $u, u' \in U$ отображение e удовлетворяет условию (E1), то $e(u) \neq e(u')$.

Пусть $e(u)$ удовлетворяет условию (E2). Это означает, что u принадлежит внутренности дуги типа 2 или 3, поэтому, $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$. Опять вспомним про вершину b . Поскольку $N_G(b) \subset V(C)$, то $b \notin W \cup U$, поэтому

$$v(C) \geq 1 + |U| + |W| = 1 + |\mathcal{P}_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 5.$$

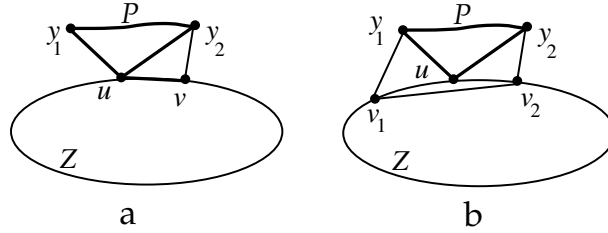
Тогда ребро $e(u)$ не может удовлетворять условию (E1) или (E2) для отличной от u вершины $u' \in V(C)$ (в этих случаях длина цикла C не превосходила бы 4). Таким образом, отображение $u \rightarrow e(u)$ инъективно.

3.2. Перестройка цикла.

По очереди мы рассмотрим все вершины $u \in U$ и для каждой из них изменим цикл Z , включив в него путь из $P = y_1 \dots y_m \in \mathcal{P}_1$ с основанием u . Разберём два случая: ребро $e(u)$ удовлетворяет условию (E1) или (E2).

3.2.1. Ребро $e(u)$ удовлетворяет условию (E1).

Пусть $e(u) = uv$, v — соседняя с u вершина цикла C . Тогда в графе G^2 есть ребро y_mv (так как $y_m, v \in N_G(u)$). Заменяем в цикле Z ребро uv на путь $uy_1 \dots y_mv$, вставив в цикл Z путь P (см. рисунок 3.10а). Отметим, что если a инцидентно uv , то $a = u$ и после замены выходящие из $a = u$ ребра цикла Z принадлежат графу G .

Рис. 3.10: Построение цикла Z : путь из \mathcal{P}_1 .**3.2.2. Ребро $e(u)$ удовлетворяет условию (E2).**

Пусть $e(u) = v_1v_2$, где $v_1, v_2 \in N_G(u)$ — соседние с u вершины цикла C . Тогда в графе G^2 есть ребра v_1y_1 и y_mv_2 (так как $y_1, y_m \in N_G(u)$). Заменяем в цикле Z ребро v_1v_2 на путь $v_1y_1 \dots y_mv_2$, вставив в цикл Z путь P . В этом случае a не может быть инцидентно v_1v_2 .

В результате мы получили гамильтонов цикл Z в графе G^2 , в котором оба инцидентных вершине a ребра принадлежат графу G . \square

3.2 Панциклические графы

Определение 3.5. Граф называется *панциклическим*, если в нем есть циклы всех длин — от треугольника до гамильтонова цикла.

Теорема 3.7. (J. A. Bondy, 1971) Пусть G — гамильтонов граф, $v(G) = n$, $e(G) \geq \frac{n^2}{4}$. Тогда либо G — панциклический, либо $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. В частности, при $e(G) > \frac{n^2}{4}$ граф G — панциклический.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по n . База для $n \leq 4$ очевидна. Рассмотрим несколько случаев.

1. В графе G есть цикл Z длины $n - 1$.

Пусть a — единственная не входящая в Z вершина.

1а. $d_G(a) \leq \frac{n-1}{2}$.

Граф $G' = G - a$ — гамильтонов,

$$e(G') = e(G) - d_G(a) \geq \frac{n^2}{4} - \frac{n-1}{2} = \frac{n^2 - 2n + 2}{4} > \frac{(n-1)^2}{4},$$

следовательно, по индукционному предположению в графе G есть циклы всех длин от 3 до $n - 1$.

1б. $d_G(a) > \frac{n-1}{2}$.

Пусть $Z = b_1 b_2 \dots b_{n-1}$. Тогда для любого $r \in [1..n-4]$ существует пара вершин b_i, b_{i+r} , смежных с a . Легко видеть, что $b_i b_{i+1} \dots b_{i+r} a$ — цикл длины $r + 2$, то есть в графе G есть циклы всех длин от 3 до $n - 2$.

2. В графе G нет цикла длины $n - 1$.

Пусть $x_1 x_2 \dots x_n$ — гамильтонов цикл в G . Рассмотрим пару соседних вершин x_k, x_{k+1} . Если $x_k x_i, x_{k+1} x_{i+2} \in E(G)$ для некоторого i , то в графе существует цикл длины $n - 1$:

$$x_{k+1} x_{k+2} \dots x_i x_k x_{k-1} \dots x_{i+2}$$

(см. рисунок 3.11а, этот цикл проходит по всем вершинам, кроме x_{i+1}), что противоречит предположению. Значит, из рёбер $x_k x_i, x_{k+1} x_{i+2}$ в графе G есть не более, чем одно. Отсюда следует, что $d_G(x_k) + d_G(x_{k+1}) \leq n$ и $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$.

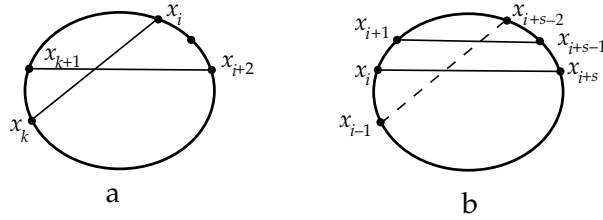


Рис. 3.11: Цикл Z и его хорды.

Тогда по условию $e(G) = \frac{n^2}{4}$, следовательно, $d_G(x_k) + d_G(x_{k+1}) = n$ для любого $k \in [1..n]$ и $n \geq 2$. Но тогда для любого $k \in [1..n]$, $i \in [1..n]$ из пары рёбер $x_k x_i, x_{k+1} x_{i+2}$ в графе G есть ровно одно.

Если граф двудолен, то в нем не более $\frac{n^2}{4}$ рёбер и максимум достигается только для $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, следовательно, граф G и есть $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Предположим, что граф G недвудолен. Тогда можно выбрать минимальное четное s , для которого существует такое $i \in [1..n]$, что в графе G

есть ребро $x_i x_{i+s}$. Легко понять, что $s \geq 4$, так как при $s = 2$ в графе очевидно есть цикл длины $n - 1$. Тогда $x_{i-1} x_{i+s-2} \notin E(G)$, следовательно, $x_{i+1} x_{i+s-1} \in E(G)$, что противоречит выбору s (см. рисунок 3.11b). Таким образом, предположение неверно и единственным непанциклическим графом с $e(G) = \frac{n^2}{4}$ является $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. \square

3.3 Окружение графа

Определение 3.6. Окружение графа — это длина его наибольшего простого цикла, которую мы будем обозначать через $c(G)$.

Следующая теорема дополнит многочисленные результаты о гамильтоновых циклах.

Теорема 3.8. (N. Linial, 1975). Пусть G — двусвязный граф, а

$$m = \min_{xy \notin E(G)} d_G(x) + d_G(y).$$

Тогда $c(G) \geq \min(m, v(G))$.

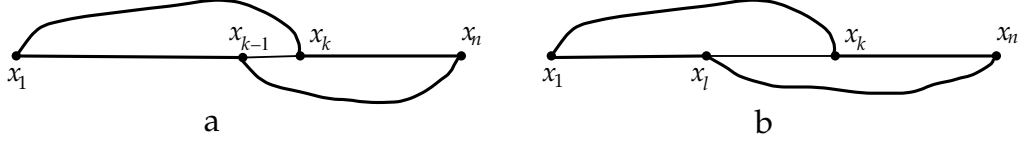
Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $m \leq v(G)$ и в этом случае доказать существование в графе G простого цикла длины не менее m . Пусть существует граф G , для которого это утверждение не выполняется, а $P = x_1 \dots x_n$ — наибольший путь в этом графе.

Предположим, что в графе G есть цикл Z длины не менее n . Если $n = v(G)$, то утверждение теоремы для графа G выполняется. Значит, $n < v(G)$. Ввиду связности графа G существует вершина $x \in V(G) \setminus V(Z)$, смежная с Z . Тогда вершина x и вершины цикла z образуют путь из $n+1$ вершины, что противоречит максимальной длине пути P .

Очевидно, $N_G(x_1) \subset V(P)$ и $N_G(x_n) \subset V(P)$, иначе путь P можно было бы легко удлинить. Отметим, что $d_G(x_1) + d_G(x_n) \geq m$. Напомним часть доказательства леммы 3.1. Если $x_1 x_k, x_{k-1} x_n \in E(G)$, то существует цикл из n вершин: $x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_n x_{n-1} \dots x_k$ (см. рисунок 3.12a). Противоречие показывает нам, что из $x_1 x_k \in E(G)$ следует, что $x_{k-1} x_n \notin E(G)$. В частности, отсюда следует, что $m < n$. Разберём несколько случаев, в каждом случае мы будем считать, что не выполнено условие ни одного из предыдущих.

1. Пусть $x_1 x_k, x_\ell x_n \in E(G)$, где $0 < k - \ell \leq n - m + 1$.

Тогда рассмотрим цикл $Z = x_1 x_2 \dots x_\ell x_n x_{n-1} \dots x_k$ (см. рисунок 3.12b). Этот цикл проходит все вершины пути P , кроме $x_{\ell+1}, \dots, x_{k-1}$, то есть, $v(Z) = n - (k - \ell) + 1 \geq m$, а мы ищем как раз такой цикл.

Рис. 3.12: Максимальный путь P и циклы.

2. Пусть существуют рёбра $x_1x_k, x_\ell x_n \in E(G)$, где $k > \ell$.

Будем считать, что разность $k - \ell$ минимально возможная. Поскольку не выполнено условие пункта 1, то $k - \ell \geq n - m + 2$. Мы знаем, что $N_G(x_1) \subset V(P - x_1)$. Пусть $d_G(x_1) = s$ и эта вершина смежна с x_{i_1}, \dots, x_{i_s} (среди них, конечно же, есть x_2 и x_k). Тогда, как доказано выше, x_n несмежна с $x_{i_1-1}, \dots, x_{i_s-1}$. Кроме того, ввиду минимальности $k - \ell$ вершина x_n несмежна с $x_{\ell+1}, \dots, x_{k-1}$ (из которых ранее учтена только x_{k-1}). Так как $N_G(x_n) \subset V(P - x_n)$,

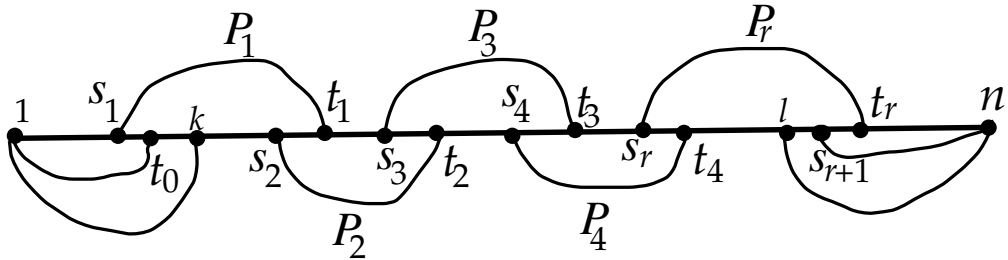
$$d_G(x_n) \leq n - 1 - d_G(x_1) - (k - \ell - 2) \leq n - 1 - d_G(x_1) - (n - m) = m - 1 - d_G(x_1),$$

откуда $d_G(x_1) + d_G(x_n) \leq m - 1$, что для несмежных вершин x_1 и x_n невозможно.

3. Пусть k — наибольший номер вершины пути P , смежной с x_1 , а ℓ — наименьший номер вершины пути P , смежной с x_n .

Тогда $k < \ell$. Так как граф G двусвязен, существует путь из $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ до $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$, не проходящий через x_k , а значит и $x_{s_1}x_{t_1}$ -путь P_1 , внутренние вершины которого не принадлежат P и $s_1 < k < t_1$. Мы выберем путь P_1 так, чтобы t_1 было максимально возможным.

Если $t_1 > \ell$, то закончим построение, иначе продолжим его. Аналогично, из двусвязности графа G следует существование $x_{s_2}x_{t_2}$ -пути P_2 , внутренние вершины которого не принадлежат P и $s_2 < t_1 < t_2$. Мы выберем путь P_2 так, чтобы t_2 было максимально возможным.

Рис. 3.13: Пути P_1, P_2, \dots, P_r

Далее, если $t_2 \leq \ell$, то продолжим построение и выберем $x_{s_3}x_{t_3}$ -путь P_3 , внутренние вершины которого не принадлежат P , $s_3 < t_2 < t_3$ и t_3 — максимально возможное. И так далее, пока не получим $t_r > \ell$. Пути P_1, P_2, \dots, P_r изображены на рисунке 3.13 (вдоль пути P проставлены только номера вершин).

Остался последний шаг в построении нашей конструкции. Пусть t_0 — наименьший такой номер вершины, что $t_0 > s_1$ и $x_1x_{t_0} \in E(G)$. Пусть s_{r+1} — наибольший такой номер вершины, что $s_{r+1} < t_r$ и $x_nx_{s_{r+1}} \in E(G)$. Поскольку $x_1x_k, x_nx_\ell \in E(G)$, $k > s_1$ и $\ell < t_r$, то такие t_0 и s_{r+1} существуют.

Докажем важное свойство: $s_{i+2} \geq t_i$ для всех $i \in [0..r-1]$.

Пусть $i \in [1..r-2]$. Тогда $t_{i+2} > t_{i+1}$. Так как при построении пути P_{i+1} мы не могли выбрать путь до $x_{t_{i+2}}$, то должно быть $s_{i+2} \geq t_i$.

Теперь рассмотрим $i = 0$. Очевидно, $t_2 > t_1$, поэтому $s_2 \geq k \geq t_0$ (иначе мы бы выбрали путь P_2 вместо P_1). Случай $i = r-1$ очевиден: по построению, $t_{r-1} \leq \ell$, а $s_{r+1} \geq \ell$.

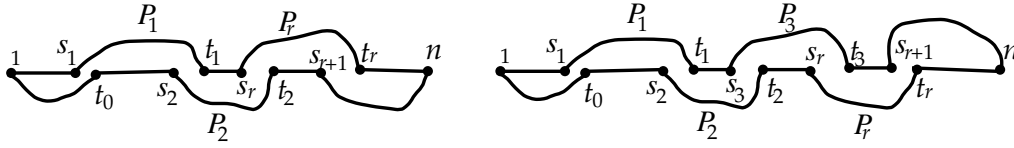


Рис. 3.14: Цикл C .

Теперь построим на основе путей P, P_1, \dots, P_r цикл C , как на рисунке 3.14 (слева изображен случай нечетного r , а справа — случай четного r). Из доказанного выше утверждения $s_{i+2} \geq t_i$ следует, что ни по одной из вершин цикл не пройдет дважды, то есть, построение корректно.

Цикл C проходит все вершины пути P , кроме внутренних вершин s_it_{i-1} -участков этого пути (для $i \in [1..r+1]$). Отметим, что из выбора t_0 следует, что все вершины из $N_G(x_1)$ содержатся в цикле C , а из выбора s_{r+1} следует, что все вершины из $N_G(x_n)$ содержатся в цикле C . Кроме этого, C содержит еще хотя бы две вершины: это x_1 и x_n . В рассматриваемом случае $|N_G(x_1) \cap N_G(x_n)| \leq 1$, поэтому

$$v(C) \geq d_G(x_1) + d_G(x_n) + 2 - 1 \geq m + 1.$$

Таким образом, цикл C подходит в качестве искомого.

Все случаи разобраны, теорема доказана. \square

3.4 Циклы четной длины

В этом разделе мы покажем, что для наличия в графе циклов заданной четной длины достаточно сравнительно небольшого количества ребер. Начнем с несложных лемм.

Лемма 3.7. *Для любого графа G существует двудольный подграф G' с $e(G') \geq \frac{e(G)}{2}$.*

Доказательство. Разобьем все вершины графа на два множества A и B так, чтобы количество рёбер внутри множеств было наименьшим. Обозначим через $d_A(x)$ и $d_B(x)$ количество рёбер, выходящих из x к вершинам множеств A и B соответственно. Тогда для каждой вершины $a \in A$ выполняется неравенство $d_A(a) \leq d_B(a)$, иначе перекинув вершину a в множество B мы уменьшим количество ребер внутри множеств, что противоречит выбору разбиения. Аналогично для каждой вершины $b \in B$ выполняется неравенство $d_B(b) \leq d_A(b)$. Сложив такие неравенства для всех вершин мы получим, что количество рёбер внутри множеств не превосходит количество рёбер между множествами. Теперь удалив все внутренние рёбра, получим искомый двудольный подграф G' . \square

Определение 3.7. Раскраска вершин называется t -периодической, если концы любого простого пути длины t покрашены в один цвет.

Лемма 3.8. *Пусть раскраска ρ вершин графа H такова, что для любой вершины $a \in V(H)$ все вершины из $N_G(a)$ покрашены в один и тот же цвет. Тогда в раскраске ρ используется не более, чем два цвета.*

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T графа H , подвесим его за произвольную вершину a . Эта вершина будет иметь уровень 0, остальные вершины мы распределим по уровням (номер уровня будет равен длине пути из a). Пусть вершина a имеет цвет i , уровень 1 — это вершины из $N_H(a)$ и по пункту 1 они все имеют одинаковый цвет — пусть это цвет j (возможно, $i = j$).

Докажем, что все вершины четных уровней имеют цвет i , а все вершины нечетных уровней имеют цвет j . Рассмотрим очередной уровень с номером не менее 2 и его вершину x . Пусть y — предок x , а z — предок y . Тогда $x, z \in N_H(y)$, следовательно $\rho(x) = \rho(y)$. Таким образом, вершины рассматриваемого уровня покрашены так же, как и вершины уровня с номером на 2 меньше.

Таким образом, все вершины дерева T (то есть, графа H) покрашены не более чем в два цвета. \square

Следствие 3.4. Пусть раскраска ρ вершин связного графа G является 2-периодической. Тогда ρ красит вершины не более, чем в два цвета.

Доказательство. Очевидно, для любой вершины $v \in V(G)$ все вершины из $N_G(v)$ покрашены в один цвет в силу 2-периодичности раскраски. Тогда по лемме 3.8 ρ красит вершины не более, чем в два цвета. \square

Лемма 3.9. Пусть $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$, для связного графа G выполняется неравенство $e(G) \geq t \cdot v(G)$, а раскраска вершин ρ является t -периодической. Тогда ρ красит вершины не более, чем в два цвета.

Доказательство. (Идея доказательства принадлежит М. Л. Матдинову.) 1. По лемме 1.4 существует подграф G' графа G , в котором $\delta(G') \geq t + 1$. Докажем, что все вершины графа G' покрашены в два цвета. Рассмотрим вершину $v \in V(G')$ и докажем, что любые две вершины из $N_{G'}(v)$ покрашены в один и тот же цвет.

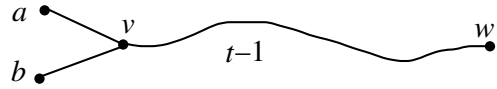


Рис. 3.15: Пути длины t .

Пусть $a, b \in N_{G'}(v)$. Построим путь длины $t - 1$ с началом v , не проходящий через a и b . Выйдем из вершины v и, пока это возможно, будем из конца пути идти в отличную от a и b вершину, в которой ещё не были. Пусть мы находимся в вершине w и не можем пойти дальше. Так как $d_{G'}(w) \geq t + 1$, то пройдено не менее $t + 1 - 2$ отличных от w вершин и мы имеем простой путь длины хотя бы $t - 1$. Пусть w' — вершина на этом пути на расстоянии ровно $t - 1$ от v . Тогда $\rho(a) = \rho(w') = \rho(b)$ в силу периодичности раскраски. В силу произвольности выбора a и b мы имеем, что все вершины из $N_{G'}(v)$ одноцветны.

По лемме 3.8, все вершины графа G' покрашены не более, чем в два цвета.

2. Пусть $w \in V(G) \setminus V(G')$. Рассмотрим простой путь P от w до вершин из $V(G')$, пусть его конец — это вершина $a \in V(G')$. Как мы уже обсуждали, существует простой путь длины не менее $t - 1$ с началом в a и проходящий только по вершинам из $V(G')$, следовательно, не пересекающийся с P . Тогда путь P можно дополнить до пути, длина которого кратна t , с началом в w и концом в $V(G')$. Следовательно, вершина w также покрашена в один из двух цветов i и j . \square

Теорема 3.9. (J. A. Bondy, M. Simonivits, 1974) Пусть G — связный граф, $n = v(G)$, $k \in \mathbb{N}$, $e(G) > 18k \cdot n^{1+\frac{1}{k}}$. Тогда для любого натурального ℓ , удовлетворяющего условию $k \leq \ell \leq kn^{\frac{1}{k}}$, в графе G есть цикл длины 2ℓ .

Доказательство. 1. Зафиксируем ℓ и докажем существование цикла длины 2ℓ . По лемме 3.7 существует двудольный подграф G^* графа G с $e(G^*) \geq 9kn^{1+\frac{1}{k}} = \delta n$. По лемме 1.4 существует такой подграф G' графа G^* , что $\delta(G') \geq \delta$. Далее мы будем работать только с двудольным графом G' .

Проверим, что

$$\delta = 9kn^{\frac{1}{k}} \geq 9\ell, \quad \delta \geq \frac{9}{2}\ell n^{1/\ell} \quad (3.1)$$

для любого ℓ из указанного промежутка значений.

Первое неравенство очевидно, проверим второе. Рассмотрим функцию $f(x) = x \cdot n^{\frac{1}{x}}$. Продифференцировав ее, мы получим на положительной полуоси единственную точку минимума $x_0 = \ln n$. Следовательно, достаточно проверить второе неравенство (3.1) в крайних точках $\ell = k$ и $\ell = k \cdot n^{\frac{1}{k}}$. В первом случае получается очевидное неравенство, а во втором случае мы получаем

$$2 \cdot kn^{\frac{1}{k}} \geq kn^{\frac{1}{k}} \cdot n^{\frac{1}{kn^{1/k}}}.$$

Тогда нам достаточно доказать, что

$$g(n) = n^{\frac{1}{kn^{1/k}}} < 2.$$

Это можно понять, продифференцировав $g(n)$ по n и подставив единственную точку максимума $n_0 = e^k$: максимальное значение окажется равным $e^{1/e} < 2$. Таким образом, неравенство доказано.

2. Пусть граф G' не содержит цикла длины 2ℓ . Зафиксируем вершину $s \in V(G')$ и разобьем граф на уровни $V_0 = \{s\}, V_1, V_2, \dots$, где уровень V_i состоит из вершин, находящихся на расстоянии i от вершины s . Построим остовное дерево T графа G' , проведя от каждой вершины, кроме s , ровно одно ребро к смежной с ней вершине предыдущего уровня. Нашей ближайшей целью будет доказательство неравенства

$$\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|} \geq \frac{2\delta}{9\ell} \quad \text{для } i < \ell. \quad (3.2)$$

3. Рассмотрим граф $G'(V_i \cup V_{i+1})$ и его произвольную компоненту связности H . Докажем неравенство $e(H) \leq 2\ell \cdot v(H)$. Если мы это сделаем, то, очевидно, будет выполняться и неравенство

$$e(G'(V_i \cup V_{i+1})) \leq 2\ell \cdot v(G'(V_i \cup V_{i+1})). \quad (3.3)$$

Пусть $W_1 = V(H) \cap V_i$, $W_2 = V(H) \cap V_{i+1}$. Тогда граф H , очевидно, двудолен с долями W_1 и W_2 , так как в двудольном графе G' не могут быть смежными вершины, находящиеся на одинаковом расстоянии от s . Тогда $|W_1|, |W_2| \geq 2$, иначе граф H является деревом и доказываемое неравенство очевидно.

Пусть a — вершина наибольшего уровня, от которой в дереве T можно дойти до всех вершин из W_1 (такая вершина, очевидно, существует, так как, например, от s можно дойти по дереву T до всех вершин из W_1). Пусть $a \in V_h$. Зафиксируем вершину $b \in V_{h+1}$, по которой в T проходит хотя бы один путь от a до W_1 . Отметим, что не все пути от a до W_1 проходят по вершине b (иначе мы выбрали бы b вместо a).

Построим раскраску ρ вершин графа G . Пусть $\rho(x) = 0$ для вершины $x \in W_2$, $\rho(x) = 1$, если $x \in W_1$ и существует монотонный ax -путь в T , проходящий по b и, наконец, $\rho(x) = 2$, если $x \in W_1$, но такого пути не существует. Из сказанного выше понятно, что все три цвета в раскраске присутствуют.

Пусть $t = 2(\ell - i + h)$. Из $i < \ell$ следует $t \geq 2$. Докажем, что раскраска ρ является t -периодической. Так как t чётно, а граф H двудолен, любой путь длины t с началом цвета 0 (то есть, из множества W_2) имеет конец из W_2 , то есть, цвета 0.

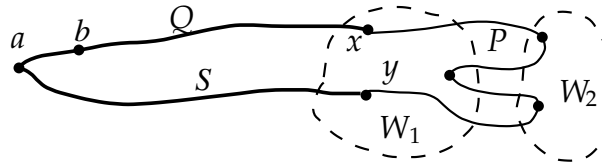


Рис. 3.16: Построение цикла длины 2ℓ .

Пусть $x, y \in W_1$, $\rho(x) = 1$, $\rho(y) = 2$ и существует xy -путь P длины t в графе H . Рассмотрим ax -путь Q в дереве T , проходящий по b и ay -путь S в дереве T (см. рисунок 3.16). Тогда S не проходит по b , а значит, пути Q и S не пересекаются (так как T — дерево). Оба пути Q и S , очевидно, не пересекаются с P . Таким образом, пути P , Q и S вместе образуют цикл длины

$$2(i - h) + t = 2(i - h) + 2(\ell - i + h) = 2\ell.$$

Противоречие с предположением об отсутствии таких циклов.

Таким образом, остается случай, когда раскраска ρ является t -периодической. При $t = 2$ по следствию 3.4 в раскраске не могут использоваться три цвета, противоречие. При $t > 2$, так как в раскраске используются три цвета, по лемме 3.9 мы имеем $e(H) \leq 2\ell v(H)$, а следовательно, и неравенство (3.3).

4. Теперь по индукции докажем неравенство (3.2). База для $i = 1$ очевидна, так как $|V_0| = 1$, $|V_1| = d_{G'}(c) \geq \delta > \frac{2\delta}{9\ell}$. Пусть m_j — это количество рёбер графа G' между V_j и V_{j+1} . Понятно, что из V_i рёбра графа G' могут выходить только в V_{i-1} (их m_{i-1}) и в V_{i+1} (их m_i). Тогда

$$\delta|V_i| \leq m_{i-1} + m_i \leq 2\ell(|V_{i-1}| + 2|V_i| + |V_{i+1}|) < 2\ell|V_i|(2 + \frac{9\ell}{2\delta}) + 2\ell|V_{i+1}|$$

(последнее неравенство следует из индукционного предположения $\frac{|V_{i-1}|}{|V_i|} \leq \frac{9\ell}{2\delta}$). Отсюда получаем

$$\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|} > \frac{1}{2\ell}(\delta - 4\ell - \frac{9\ell^2}{\delta}) > \frac{1}{2\ell}(\delta - 5\ell) > \frac{2\delta}{9\ell} \geq n^{1/\ell}.$$

(Все переходы в цепочке неравенств следуют из (3.1): второе и третье неравенство следуют из $\delta \geq 9\ell$, а последнее — из $\delta \geq \frac{9}{2}\ell n^{1/\ell}$.)

Следовательно,

$$|V_\ell| > (n^{1/\ell})^\ell \cdot |V_0| = n,$$

что очевидно невозможно. Полученное противоречие показывает, что цикл длины 2ℓ в нашем графе есть. \square

3.5 Обхват

Определение 3.8. *Обхват* графа G (обозначение $g(G)$) — это длина наименьшего цикла в графе G .

Интуитивно ясно, что обхват графа никак не связан с его минимальной степенью, что должны существовать графы сколь угодно большого обхвата со сколь угодно большой минимальной степенью. Однако, не так просто придумать явную серию примеров (отметим, что явные конструкции существуют). Мы приведем изящное неконструктивное доказательство Татта существования регулярного графа фиксированной степени с фиксированным обхватом.

Теорема 3.10. (W. T. Tutte.) Пусть $k, g, n \in \mathbb{N}$, причём $k, g \geq 3$, $n > \frac{k(k-1)^{g-1}-2}{k-2}$ и kn чётно. Тогда существует регулярный граф G степени k с $g(G) = g$ и $v(G) = n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}(n, g, k)$ — семейство всех графов на n вершинах с обхватом g и максимальной степенью вершин не более k . При $n > g$ очевидно, что $\mathcal{G}(n, g, k) \neq \emptyset$: например, нам подойдёт граф, состоящий из цикла на g вершинах и нескольких изолированных вершин. Пусть $v_{<k}(G)$ — количество вершин степени менее k в графе G , а $\text{dist}_{<k}(G)$ — максимальное из расстояний между парами вершин степени менее k в графе G (при $v_{<k}(G) < 2$ положим $\text{dist}_{<k}(G) = 0$). Мы выберем в $\mathcal{G}(n, g, k)$ граф следующим образом: сначала выберем все графы с максимальным количеством рёбер, затем из них выберем графы с максимальным $v_{<k}$ и, наконец, из оставшихся выберем граф G с максимальным $\text{dist}_{<k}(G)$.

Докажем, что G — регулярный граф степени k . Предположим, что это не так и рассмотрим пару его максимально удалённых вершин степени менее k : пусть это x и y (если вершина степени менее k в графе G единственна, то $x = y$). Если $\text{dist}_G(x, y) \geq g - 1$, то соединим их и получим граф $G' \in \mathcal{G}(n, g, k)$ с $e(G') > e(G)$ — противоречие с выбором G . Следовательно, $\text{dist}_G(x, y) \leq g - 2$.

Так как $d_G(x), d_G(y) \leq k - 1$, а степени остальных вершин графа не более k , то на расстоянии не более $g - 1$ от y находится не более, чем $\frac{(k-1)^{g-1}-1}{k-2}$ вершин, а на расстоянии не более $g - 2$ от x находится не более, чем $\frac{(k-1)^{g-1}-1}{k-2}$ вершин. Тогда по условию теоремы существует такая вершина z , что $\text{dist}(x, z) \geq g - 1$ и $\text{dist}(y, z) \geq g$. Из доказанного выше понятно, что $d_G(z) = k \geq 3$, следовательно, существует ребро $zu \in E(G)$, через которое проходят не все простые циклы длины g графа G , тогда $g(G - zu) = g(G) = g$.

Пусть $G' = G - zu + zx$. Из

$$\text{dist}_G(y, u) \geq \text{dist}_G(y, z) - 1 \geq g - 1 > \text{dist}_G(x, y) = \text{dist}_{<k}(G) \quad (3.4)$$

следует, что $d_G(u) = k$. Легко видеть, что $g(G') = g$, $e(G') = e(G)$,

$$d_{G'}(x) = d_G(x) + 1, \quad d_{G'}(u) = d_G(u) - 1 = k - 1, \quad (3.5)$$

степени остальных вершин в графах G и G' совпадают. Таким образом, $G' \in \mathcal{G}(n, g, k)$. Из (3.5) следует, что $v_{<k}(G') \geq v_{<k}(G)$. Тогда ввиду выбора графа G должно быть $v_{<k}(G') = v_{<k}(G)$, что возможно лишь при $d_{G'}(x) = k$ и $d_G(x) = k - 1$. Так как $kn \geq 2$, вершина x не может быть единственной вершиной степени менее k в графе G , следовательно, $x \neq y$.

Докажем, что $\text{dist}_{G'}(y, u) > \text{dist}_G(y, x)$. Действительно, пусть yu -путь P реализует расстояние между y и u в G' . Если P проходит только по ребрам G , то учитывая неравенство (3.4) получаем

$$\text{dist}_{G'}(y, u) = \text{dist}_G(y, u) \geq g - 1 > \text{dist}_G(y, x).$$

Значит, P проходит по ребру zx . Следовательно, P содержит путь по рёбрам графа G от y до одной из вершин x или z и ребро zx . Тогда

$$\text{dist}_{G'}(y, u) \geq \min(\text{dist}_G(y, x) + 1, \text{dist}_G(y, z) + 1) > \text{dist}_G(y, x),$$

так как $\text{dist}_G(y, z) \geq g > \text{dist}_G(y, x)$. Таким образом,

$$\text{dist}_{<k}(G') \geq \text{dist}_{G'}(y, u) > \text{dist}_G(y, x) = \text{dist}_{<k}(G).$$

Полученное противоречие с выбором графа G показывает, что G — k -регулярный граф. \square

Глава 4

Раскраски

4.1 Хроматическое число

Определение 4.1. 1) Раскраской вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \rightarrow [1..k]$. Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v .

2) Через $\chi(G)$ обозначим *хроматическое число* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

Лемма 4.1. Пусть граф G таков, что для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leq k - 1$. Тогда $\chi(G) \leq k$.

Доказательство. По индукции докажем, что вершины любого подграфа H графа G можно правильным образом покрасить в k цветов. База для подграфа из одной вершины очевидна.

Рассмотрим подграф H , пусть $v \in V(H)$ — вершина наименьшей степени. По индукционному предположению мы можем покрасить правильным образом в k цветов вершины графа $H - v$, остаётся лишь заметить, что $d_H(v) = \delta(H) \leq k - 1$, поэтому вершину v можно докрасить, не нарушая правильности раскраски. \square

Лемма 4.2. Для любого графа G выполняется неравенство

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G).$$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из соображения о том, что все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно не смежны, то есть, образуют независимое множество. \square

4.2 Теорема Брукса

Лемма 4.3. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leq d$, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d . Тогда $\chi(G) \leq d$.

Доказательство. Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна. Тогда будем считать, что утверждение очевидно для любого связного графа с меньшим, чем $v(G)$, количеством вершин.

Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d . Рассмотрим граф $G - u$. Пусть V_1, \dots, V_k — компоненты связности графа $G - u$, $G_i = G[V_i]$. В каждом из множеств V_1, \dots, V_k ввиду связности графа G обязательно есть вершина, смежная с u . Следовательно, в каждом из связных графов G_1, \dots, G_k есть вершина степени менее d , при этом $\Delta(G_i) \leq d$. Следовательно, по индукционному предположению $\chi(G_i) \leq d$, то есть, существует правильная раскраска вершин графа $G - u$ в d цветов. Так $d_G(u) < d$, мы можем докрасить в один из цветов вершину u , не нарушая правильности раскраски графа. \square

Теперь мы сформулируем и докажем теорему Брукса.

Теорема 4.1. (R. L. Brooks, 1941) Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от K_{d+1} , $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.

Замечание 4.1. При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Мы приведем два разных доказательства теоремы Брукса.

Доказательство теоремы Брукса методом чередующихся цепей.

Ввиду леммы 4.3 остается доказать теорему Брукса в случае, когда все вершины имеют степень d . Выберем вершину $a \in V(G)$ и рассмотрим правильную раскраску ρ графа $G - a$ (такая раскраска существует по лемме 4.3). Интересен лишь случай, когда d вершин окрестности $N_G(a)$ раскрашены по одной в цвета $1, 2, \dots, d$: иначе найдется цвет, в который можно покрасить вершину a . Пусть $N_G(a) = \{a_1, \dots, a_d\}$, причем $\rho(a_i) = i$.

1. Построение чередующейся цепи.

Пусть $i, j \in [1..d]$, $i \neq j$. Положим $b_0 = a$. Мы покажем, что либо существует правильная раскраска вершин графа G в d цветов, либо существует чередующая ij -цепь b_1, \dots, b_{2k} , в которой соседние вершины смежны,

$b_1 = a_i, b_{2k} = a_j$, все вершины различны и удовлетворяют следующим условиям.

(c1). $\rho(b_1) = \dots = \rho(b_{2k-1}) = i, \quad \rho(b_2) = \dots = \rho(b_{2k}) = j$.

(c2). Для любого $t \in [1..2k-1]$ вершины множества $N_G(b_t) \setminus \{b_{t-1}, b_{t+1}\}$ покрашены во все отличные от i и j цвета, по одной вершине каждого цвета. (Мы считаем $b_{2k+1} = b_0$.)

Рассмотрим вершину $b_1 = a_i$ и попробуем перекрасить ее в отличный от i цвет. Если это удастся сделать, не нарушая правильности раскраски, то мы сможем покрасить a в цвет i и получить правильную раскраску вершин графа G . Пусть перекрасить b_1 нельзя, тогда среди цветов $d - 1$ вершин множества $N_G(b_1) \setminus \{b_0\}$ по одному представлены все отличные от i цвета. Очевидно, для вершины b_1 выполнены условия (c1) и (c2).

1a. Пусть уже построен участок цепи $b_1, \dots, b_{2\ell-1}$ (где $\ell \geq 2$) с соблюдением всех условий, построим вершину $b_{2\ell}$.

Рассмотрим множество вершин $M_{2\ell-1} = N_G(b_{2\ell-1}) \setminus \{b_{2\ell-2}\}$. Так как $b_{2\ell-1} \neq b_1 = a_i$, а в $N_G(a)$ есть единственная вершина цвета i — это a_i — то вершины a и $b_{2\ell-1}$ несмежны. Таким образом, каждая из вершин множества $M_{2\ell-1}$ имеет цвет в раскраске ρ . Если в этом множестве отсутствует какой-то цвет $s \neq i = \rho(b_{2\ell-1})$, то рассмотрим следующую раскраску ρ' .

1° $\rho'(b_0) = \dots = \rho'(b_{2\ell-2}) = i, \rho'(b_1) = \dots = \rho'(b_{2\ell-3}) = j, \rho'(b_{2\ell-1}) = s$.

2° $\rho'(v) = \rho(v)$ при $v \in V(G) \setminus \{b_0, b_1, \dots, b_{2\ell-1}\}$.

Несложно убедиться, что ρ' — правильная раскраска вершин графа G . Для этого достаточно проверить, что перекрашенные вершины $b_0 = a$, $b_1 = a_i, b_2, \dots, b_{2\ell-1}$ не совпадают по цвету со своими соседями, что очевидно следует из свойства (c2) и свойств окрестности вершины $b_0 = a$.

Таким образом, предположение неверно и в множестве $M_{2\ell-1}$ есть все цвета, кроме $i = \rho(b_{2\ell-1})$. Так как $|M_{2\ell-1}| = n - 1$, то в каждый из этих цветов покрашена ровно одна вершина. Выберем в качестве $b_{2\ell}$ вершину множества $M_{2\ell-1}$, имеющую цвет j . Отметим, что вершины множества

$$N_G(b_{2\ell-1}) \setminus \{b_{2\ell-2}, b_{2\ell}\} = M_{2\ell-1} \setminus \{b_{2\ell}\},$$

как мы показали, покрашены во все отличные от i и j цвета, по одной вершине каждого цвета. Таким образом, условие (c2) выполнено для участка цепи $b_1, \dots, b_{2\ell}$.

1b. Пусть уже построен участок цепи $b_1, \dots, b_{2\ell}$ с соблюдением всех условий, причем $b_{2\ell} \neq a_j$. Тогда мы аналогично построим вершину $b_{2\ell+1}$.

Отметим, что из условия (c2) для построенного участка цепи следует, что все построенные вершины цепи различны. Следовательно, процесс построения должен закончиться, то есть, в некоторый момент мы получим $b_{2k} = a_j$.

2. Свойства чередующихся цепей.

2а. *ji -цепь есть ij -цепь, выстроенная в обратном порядке.*

В самом деле, пусть $b_1 = a_i, \dots, b_{2k} = a_j$ — чередующаяся ij -цепь. Тогда ji -цепь начинается из вершины $a_j = b_{2k}$ и в силу условий (с1) и (с2) будет проходить в обратном порядке ij -цепь.

2б. *ij -цепь и jk -цепь не имеют общих вершин, кроме a_j .*

Пусть $b \neq a_j$ — общая вершина этих двух цепей. Тогда $\rho(b) = j$, вершина b не является концом ни одной из цепей и в $N_G(b)$ есть по две вершины цветов i и k . Это противоречит свойству (с2).

3. Перекрашивание вершин.

Итак, для любых $i, j \in [1..d]$ вершины a_i и a_j соединены чередующейся ij -цепью. В принципе, такая цепь может не иметь внутренних вершин, если a_i и a_j смежны. Однако, так как G — не полный граф на $d + 1$ вершине, в $N_G(a)$ есть две несмежные вершины, пусть это a_1 и a_2 . Тогда 12-цепь $b_1 = a_1, b_2, \dots, b_{2k-1}, b_{2k} = a_2$ нетривиальна, то есть, $b_2 \neq a_2$.

Для “исправления” раскраски ρ нам хватит трёх цветов. Рассмотрим 23-цепь $c_1 = a_2, \dots, c_{2\ell} = a_3$. Построим новую раскраску ρ' из ρ перекрашиванием 23-цепи, то есть, изменением цветов вершин этой цепи: 2 на 3 и наоборот. Из свойства (с2) следует, что полученная раскраска ρ' будет правильной раскраской вершин графа $G - a$. Отметим, что в новой раскраске $\rho'(a_2) = 3$ и $\rho'(a_3) = 2$.

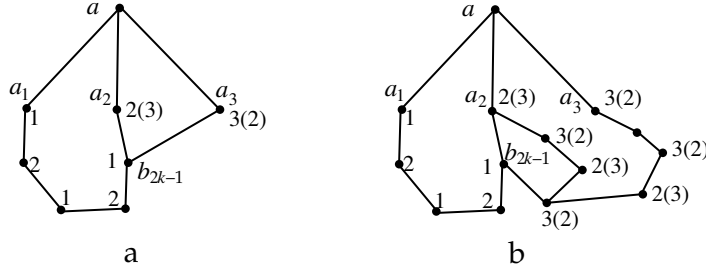


Рис. 4.1: Перекрашивание чередующейся цепи.

В раскраске ρ' также должна существовать чередующаяся 12-цепь. Начнем ее строить от вершины $b_1 = a_1$. По свойству цепей, ни одна из внутренних вершин 12-цепи, построенной для раскраски ρ , не входит в 23-цепь для раскраски ρ , следовательно, все эти вершины не перекрашены, то есть и в раскраске ρ' начало 12-цепи также будет $b_1 = a_1, b_2, \dots, b_{2k-1}$ (см. рисунок 4.1а). В множестве $M_{2k-1} = N_G(b_{2k-1}) \setminus \{b_{2k-2}\}$ в раскраске ρ единственной вершиной цвета 2 была $b_{2k} = a_2$, но в новой раскраске ρ' эта вершина перекрашена в цвет 3. Значит, одна из вершин множе-

ства M_{2k-1} должна была изменить цвет 3 на цвет 2, то есть, эта вершина входила в перекрашенную 23-цепь. Рассмотрим два случая.

3a. $a_3 \in M_{2k-1}$.

Тогда чередующиеся 31 и 21-цепи раскраски ρ имели общую внутреннюю вершину b_{2k-1} (см. рисунок 4.1a, в нашем случае это единственная вершина цвета 1 в раскраске ρ как в $N_G(a_2)$, так и в $N_G(a_3)$). Получается противоречие со свойствами чередующихся цепей.

3b. Внутренняя вершина перекрашенной 23-цепи $c_{2t} \in M_{2k-1}$. Тогда заметим, что 32-цепь в раскраске ρ' — это 23-цепь в раскраске ρ , так как все ее вершины просто перекрасились (цвет 2 на 3 и наоборот). Тогда c_{2t} является общей внутренней вершиной 32 и 12-цепей в раскраске ρ' (см. рисунок 4.1b), что также невозможно.

Таким образом, в раскраске ρ' не существует чередующейся 12-цепи. Как показано выше, это означает возможность исправить раскраску и дополнить ее до правильной раскраски вершин графа G .

□

Задача 4.1. Степени всех вершин графа G равны d и $\chi(G) = d$. Докажите, что существует правильная раскраска вершин графа G в d цветов, в которой соседи фиксированной вершины $a \in V(G)$ покрашены хотя бы в $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ различных цветов.

4.2.1 Теорема Брукса и связность

Мы приведем еще одно доказательство теоремы Брукса, идеи которого восходят к работам Дирака, опубликованным в 1950-е годы.

Доказательство теоремы Брукса с помощью связности. Мы рассмотрим три случая:

- в графе G есть точка сочленения;
- в графе G нет точки сочленения, но есть двухвершинное разделяющее множество;
- граф G — вершинно трехсвязный.

1. В графе G есть точка сочленения $a \in V(G)$.

Пусть $\text{Part}(a) = \{F_1, \dots, F_m\}$, $G_i = G(F_i)$. По пункту 3 замечания 1.2, графы G_1, \dots, G_m — связные. Так как a смежна хотя бы с одной вершиной в каждой компоненте связности, то $d_{G_i}(a) < d$. Следовательно, по лемме 4.3, для каждого графа G_i существует правильная раскраска ρ_i его вершин в d цветов. Так как цвета в этих раскрасках нумеруются независимо, можно считать $\rho_i(a) = 1$ для каждого $i \in [1..m]$. Теперь мы можем склеить эти раскраски по точке сочленения a и получить правильную

раскраску графа G : пусть $\rho(v) = \rho_i(v)$ при $v \in F_i$. Так как разные части $\text{Part}(a)$ пересекаются только по вершине a , на которой раскраски согласованы, то получится корректно определенная правильная раскраска ρ вершин графа G .

2. В графе G нет точек сочленения, но есть двухвершинное разделяющее множество S .

Пусть $S = \{a, b\}$, $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$, $G_i = G(F_i)$. Тогда множество S — минимальное по включению разделяющее множество и по замечанию 1.2 мы получаем, что графы G_1, \dots, G_m — связны и

$$d_{G_i}(a) \leq d - m + 1 < d, \quad d_{G_i}(b) \leq d - m + 1 < d. \quad (4.1)$$

Рассмотрим два случая.

2а. Вершины a и b смежны.

В этом случае действуем аналогично случаю 1. Точно так же, для каждого $i \in [1..m]$ существует правильная раскраска ρ_i вершин графа G_i в d цветов. Так как a и b смежны, $\rho_i(a) \neq \rho_i(b)$. Поскольку цвета в этих раскрасках нумеруются независимо, можно считать, что $\rho_i(a) = 1$ и $\rho_i(b) = 2$ для каждого $i \in [1..m]$. Аналогично пункту 1 склеим эти раскраски (согласованные по общим вершинам a и b наших графов) и получим правильную раскраску ρ вершин графа G .

2б. Вершины a и b несмежны.

Для каждого i построим граф $G'_i = G_i + ab$ (добавим к графу G_i отсутствующее в нем ребро ab , см. рисунок 4.2б).

Пусть у каждого из графов G'_i существует правильная раскраска ρ_i вершин графа G'_i в d цветов. Тогда $\rho_i(a) \neq \rho_i(b)$, в этом случае будем действовать, как в случае 2а.

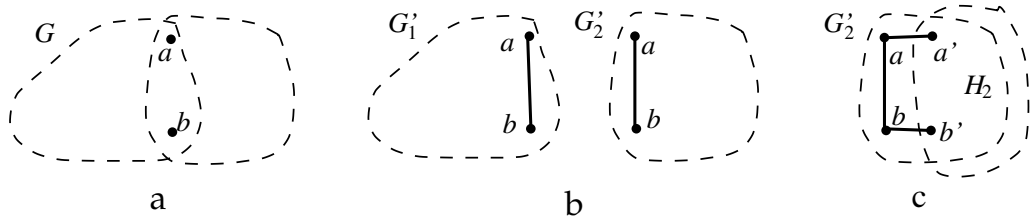


Рис. 4.2: Случай несмежных a и b .

Пусть у графа G'_1 нет правильной раскраски вершин в d цветов. Тогда по лемме 4.3 все вершины этого графа имеют степень d . В частности, это означает

$$d = d_{G'_1}(a) = d_{G'_1}(b) = d_{G_1}(a) + 1 = d_{G_1}(b) + 1,$$

откуда в силу неравенства (4.1) мы имеем $m = 2$. Более того,

$$d - 1 = d_{G_1}(a) = d_G(a) - d_{G_2}(a), \quad d - 1 = d_{G_1}(b) = d_G(b) - d_{G_2}(b),$$

откуда следует $d_{G_2}(a) = d_{G_2}(b) = 1$. Пусть $H_2 = F_2 \setminus \{a, b\}$ — компонента связности графа $G - S$. Как мы только что доказали, существует единственная вершина $a' \in H_2$, смежная с a в графе G и единственная вершина $b' \in H_2$, смежная с b в графе G (см. рисунок 4.2с). Граф $G(H_2)$ связан, причем $d_{G_2}(a') < d$ и по лемме 4.3 существует правильная раскраска ρ_2 вершин этого графа в d цветов.

Вспомним, что $d_{G_1}(a) < d$ и по лемме 4.3 существует правильная раскраска ρ_1 вершин графа G_1 в d цветов. Однако, у графа G'_1 нет правильной раскраски вершин в d цветов, в частности, правильная раскраска ρ_1 графа G_1 не является таковой для $G'_1 = G_1 + ab$. Тогда $\rho_1(a) = \rho_1(b)$. Зафиксируем цвета раскраски ρ_2 вершин множества H_2 и перенумеруем цвета для ρ_1 так, чтобы цвет $\rho_1(a) = \rho_1(b)$ был отличен и от $\rho_2(a')$, и от $\rho_2(b')$ — это всегда можно сделать, так как цветов хотя бы три. Теперь раскраски согласованы и, склеив раскраски ρ_1 и ρ_2 , мы получим правильную раскраску графа G .

3. Граф G — вершинно трехсвязный.

Опять же, в силу леммы 4.3 нас интересует только случай, когда все вершины графа G имеют степень d . Тогда граф G не является полным. В графе G , как и во всяком неполном связном графе, существуют вершины u, v, w такие, что w смежна с u и v , а u и v несмежны. Рассмотрим связный граф $G' = G - \{u, v\}$ и остовное дерево T этого графа, сделаем его корнем w и распределим вершины T по уровням (номером уровня будет расстояние до корня w).

Положим $\rho(u) = \rho(v) = 1$ и будем красить остальные вершины графа G (они же вершины дерева T) в порядке убывания номеров их уровней, начиная с висячих вершин. Пусть $x \neq w$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы не красили вершин меньших уровней. Следовательно, предок вершины x (в дереве T) пока что не покрашен. Тогда покрашено не более, чем $d - 1$ соседей вершины x и мы можем выбрать цвет $\rho(x)$ отличным от всех уже покрашенных соседей вершины x .

В итоге все отличные от корня w вершины мы покрасим. Рассмотрим w — все ее соседи уже покрашены, но $\rho(u) = \rho(v)$, следовательно, существует цвет, в который не покрашен ни один из соседей вершины w . Именно в этот цвет мы покрасим вершину w , в итоге получится правильная раскраска вершин графа G в d цветов. \square

4.3 Гипотеза Хайоша

Определение 4.2. Пусть H — произвольный граф. Назовем граф H' *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой нескольких ребер на простые непересекающиеся друг с другом пути (т. е. подразбиением этих ребер).

Гипотеза 4.1. (G. Hajós, 1961) Если $\chi(G) = k$, то граф G содержит подразбиение полного графа K_k в качестве подграфа.

Разумеется, эта гипотеза в общем случае не доказана. В случаях $k = 1, 2, 3$ гипотеза тривиальна. В случае $k = 5$ из гипотезы Хайоша следует знаменитая гипотеза (или теорема — как кому больше нравится!) четырех красок, которую мы подробно рассмотрим в главе Планарные графы. В случае $k = 4$ утверждение гипотезы доказал G. Dirac, доказательство будет приведено в этом разделе.

4.3.1 Критические графы

Определение 4.3. Назовем граф G *k -критическим*, если $\chi(G) = k$, но $\chi(H) < k$ для любого собственного подграфа H графа G .

Ввел понятие критического графа и исследовал его свойства G. Dirac в 1950-х годах. В результатах этого раздела немало общего с идеями доказательства теоремы Брукса, основанного на связности. Начнем с исследования простейших свойств k -критических графов.

Лемма 4.4. Пусть G — k -критический граф, $S \subset V(G)$ — разделяющее множество, $|S| < k$. Тогда граф $G(S)$ — не полный.

Доказательство. Предположим противное, пусть граф $G(S)$ — полный. Пусть $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$, $G_i = G(F_i)$. Так как G_i — собственный подграф графа G , то $\chi(G_i) \leq k-1$. Пусть ρ_i — правильная раскраска вершин графа G_i в $k-1$ цвет. Пусть $S = \{a_1, \dots, a_m\}$. Так как вершины множества S попарно смежны в G_i , то все цвета $\rho_i(a_1), \rho_i(a_2), \dots, \rho_i(a_m)$ — различны. Поскольку мы можем нумеровать цвета в раскрасках графов G_1, \dots, G_m независимо, это можно сделать так, чтобы $\rho_i(a_1) = 1, \dots, \rho_i(a_m) = m$ для всех $i \in [1..m]$.

Теперь наши раскраски согласованы на множестве S — пересечении множеств вершин любых двух из наших графов G_1, \dots, G_m — и мы можем положить $\rho(v) = \rho_i(v)$ при $v \in F_i$. Получится корректно определенная правильная раскраска ρ вершин графа G в $k-1$ цвет, что противоречит условию леммы. Следовательно, граф $G(S)$ — не полный. \square

Лемма 4.5. (G. A. Dirac, 1953.) Пусть G — k -критический граф. Пусть $S = \{a, b\}$ — разделяющее множество графа G ,

$$\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}, \quad G_i = G(F_i).$$

Тогда $m = 2$, вершины a и b несмежны и части $\text{Part}(S)$ можно занумеровать так, что графы $G_1 + ab$ и $(G_2 + ab) \cdot ab$ — k -критические.

Доказательство. 1. Пусть $H_i = F_i \setminus \{a, b\}$ — компонента связности графа $G - S$, тогда $M_i = V(G) \setminus H_i$ — объединение вершин всех частей $\text{Part}(H)$, кроме F_i . Пусть $G'_i = G(M_i)$.

Так как G — k -критический граф, то его собственный подграф G'_i имеет правильную раскраску в $k - 1$ цвет. Пусть ρ'_i — такая раскраска. Назовем раскраску ρ'_i раскраской типа 1, если $\rho'_i(a) = \rho'_i(b)$ и раскраской типа 2, если $\rho'_i(a) \neq \rho'_i(b)$.

Пусть для некоторых различных i, j существуют правильные раскраски одного типа ρ'_i графа G'_i и ρ'_j графа G'_j . Рассмотрим случай, когда это раскраски типа 1. Можно пронумеровать цвета таким образом, чтобы $\rho'_i(a) = \rho'_i(b) = \rho'_j(a) = \rho'_j(b) = 1$. Теперь рассмотрим раскраску ρ вершин графа G :

$$\rho(v) = \rho'_i(v) \text{ при } v \in M_i, \quad \rho(v) = \rho'_j(v) \text{ при } v \in F_i.$$

Отметим, что $M_i \cap F_i = S$, $M_i \cup F_i = V(G)$, $F_i \subset M_j$. Поэтому определение раскраски ρ корректно: ρ'_j определена на F_i , раскраски ρ'_i и ρ'_j согласованы на $\{a, b\} = M_i \cap F_i$. Из правильности раскрасок ρ'_i и ρ'_j и отсутствия ребер между разными компонентами связности графа $G - S$ следует, что ρ — правильная раскраска вершин графа G в $k - 1$ цвет, которой не существует по условию леммы. В случае, если раскраски ρ'_i и ρ'_j имеют тип 2, рассуждение аналогично.

Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим правильные раскраски ρ'_i графов G'_i при $i \in [1..3]$. Пусть ρ'_1 имеет тип 1. Тогда ρ'_2 не может иметь тип 1, следовательно, раскраска ρ'_2 имеет тип 2. Тогда раскраска ρ'_3 не может иметь ни один из типов, следовательно, $m = 2$.

2. Итак, количество частей разбиения $m = 2$. Тогда $G_1 = G'_2$ и $G_2 = G'_1$, по доказанному выше, у графов G_1 и G_2 не может быть правильных раскрасок одного и того же типа. Это означает, что вершины a и b несмежны. Не умаляя общности можно положить, что все правильные раскраски графа G_1 имеют тип 1, а все правильные раскраски графа G_2 имеют тип 2.

2а. Докажем, что граф $G_1^* = G_1 + ab$ — k -критический. Во-первых, $G_1^* - a$ — собственный подграф G , следовательно, $\chi(G_1^* - a) \leq k - 1$,

откуда следует, что $\chi(G_1^*) \leq k$. Если бы $\chi(G_1^*) \leq k - 1$, то существовала бы правильная раскраска ρ_1 вершин графа G_1^* в $k - 1$ цвет, которая была бы правильной раскраской вершин графа G_1 типа 2, а таких раскрасок не существует. Полученное противоречие показывает, что $\chi(G_1^*) = k$.

Рассмотрим произвольный подграф H графа G_1^* , пусть $W = V(H)$. Предположим, что $\chi(H) = k$. Тогда H не может быть подграфом G , следовательно, $W \ni a, b$, граф H содержит ребро ab . Построим новый граф H' на множестве вершин $W \cup F_2$: рёбрами H' будут все ребра графа G на множестве F_2 и все ребра графа H , кроме ребра ab . Отметим, что G_2 — подграф H' , а H' — собственный подграф G . Следовательно, существует правильная раскраска ρ вершин графа H' в $k - 1$ цвет. Поскольку G_2 — подграф H , то ρ индуцирует правильную раскраску вершин G_2 в $k - 1$ цвет, следовательно, эта раскраска имеет тип 2, то есть, $\rho(a) \neq \rho(b)$. Тогда ρ индуцирует правильную раскраску вершин графа $H = H'(W) + ab$. Следовательно, $\chi(H) = k - 1$. Таким образом, мы доказали, что $G_1 + ab$ — k -критический граф.

2б. Докажем, что граф $G_2^* = (G_2 + ab) \cdot ab$ — k -критический. Пусть w — вершина, полученная из a и b при стягивании ребра ab . Тогда $G_2^* - w$ — собственный подграф G , следовательно, $\chi(G_2^* - w) \leq k - 1$, откуда следует $\chi(G_2^*) \leq k$. Предположим, что $\chi(G_2^*) \leq k - 1$. Тогда существует правильная раскраска ρ_2 вершин графа G_2^* в $k - 1$ цвет. Рассмотрим следующую раскраску ρ'_2 вершин графа G_2 :

$$\rho'_2(a) = \rho'_2(b) = \rho_2(w) \quad \text{и} \quad \rho'_2(v) = \rho_2(v) \quad \text{при} \quad v \in H_2.$$

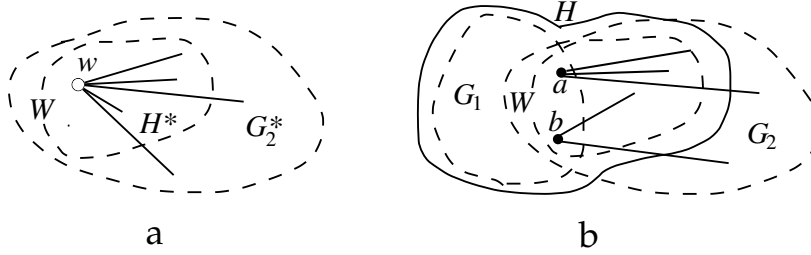
Легко понять, что ρ'_2 — правильная раскраска вершин G_2 , причем имеющая тип 1, а таких раскрасок не существует. Полученное противоречие показывает, что $\chi(G_2^*) = k$.

Рассмотрим произвольный подграф H^* графа G_2^* , пусть $W = V(H^*)$. Предположим, что $\chi(H^*) = k$. Тогда H^* не может быть подграфом G , следовательно, $W \ni w$ (см. рисунок 4.3а). Определим инъективную функцию

$$\varphi : E(G_2^*) \rightarrow E(G)$$

следующим образом: для $e = xy \in E(G_2^*)$ положим $\varphi(e) = e$, если x и y отличны от w . При $x = w$ понятно, что $y \in V(G)$ и хотя бы одно из рёбер ay, by есть в $E(G)$. Тогда положим $\varphi(e) = ay$, если $ay \in E(G)$ и $\varphi(e) = by$ в противном случае.

Построим подграф H графа G на множестве вершин $(W \setminus \{w\}) \cup F_1$: рёбрами H будут все ребра графа G на множестве F_1 и рёбра из $\varphi(E(H^*))$ (см. рисунок 4.3б). В случае $W \neq V(G_2^*)$ мы имеем $V(H) \neq V(G)$. Если

Рис. 4.3: Графы H^* и H .

же $W = V(G_2^*)$, то $E(H) \subsetneq E(G_2^*)$. В этом случае рассмотрим ребро $e \in E(H) \setminus E(G_2^*)$, понятно, что $\varphi(e) \notin E(H)$.

Таким образом, в любом из случаев G_1 — подграф H , а H — собственный подграф G .

Следовательно, существует правильная раскраска ρ вершин графа H в $k-1$ цвет. Поскольку G_1 — подграф H , то ρ индуцирует правильную раскраску вершин G_1 в $k-1$ цвет, следовательно, эта раскраска имеет тип 1, то есть, $\rho(a) = \rho(b)$. Пусть $W^* = (W \setminus \{w\}) \cup \{a, b\}$, рассмотрим граф $H^* = H'(W^*)$. Раскраска ρ индуцирует правильную раскраску вершин графа H^* в $k-1$ цвет, причем $\rho(a) = \rho(b)$. Таким образом, существует правильная раскраска в $k-1$ цвет вершин графа $H = H^* \cdot ab$. Следовательно, $\chi(H) = k-1$. Таким образом, мы доказали, что $(G_2 + ab) \cdot ab$ — k -критический граф. \square

4.3.2 Гипотеза Хайоша, случай $k = 4$

Теорема 4.2. (G. A. Dirac, 1953) Если $\chi(G) = 4$, то граф G содержит в качестве подграфа подразбиение K_4 .

Доказательство. Достаточно доказать теорему для 4-критических графов. Рассмотрим именно такой граф G . Доказательство будет индукцией по количеству вершин в графе.

1. G — трёхсвязный граф.

Этот случай будет базой индукции. Из трёхсвязности графа следует $\delta(G) \geq 3$. По лемме 1.3 в графе G существует простой цикл $Z = a_1 a_2 \dots a_n$, $n \geq 4$. Так как граф $G - \{a_1, a_3\}$ связан, существует простой путь P , соединяющий a_2 и одну из вершин множества $\{a_4, \dots, a_n\}$, не проходящий через другие вершины цикла. Пусть концы этого пути a_2 и a_m . Эти две вершины — несоседние в цикле и делят его на две непустые дуги $B = \{a_3, \dots, a_{m-1}\}$ и $B' = \{a_{m+1}, \dots, a_1\}$. Так как граф $G - \{a_2, a_m\}$ связан, существует простой путь Q , соединяющий множества вершин B и

B' , не проходящий через другие вершины a_2 и a_m . Тогда для некоторых вершин $a_x \in B$, $a_y \in B'$ существует простой $a_x a_y$ -путь, не проходящий через другие вершины цикла. Рассмотрим два случая.

1а. Пути P и Q не имеют общих вершин.

В этом случае рассмотрим подграф H графа G — объединение цикла Z и путей P и Q . Этот граф является подразбиением K_4 , так как каждые две из четырех вершин a_2, a_x, a_m, a_y соединены в H путем, причем никакие два из этих путей не имеют общих внутренних вершин (четыре пути — это дуги цикла, еще два пути — P и Q , см. рисунок 4.4а).

1б. Пути P и Q имеют хотя бы одну общую внутреннюю вершину.

Пусть u — первая точка пересечения с P на пути Q (от вершины a_2). Тогда рассмотрим подграф H , равный объединению дуги $a_2 \dots a_x \dots a_m$ цикла Z , пути P и участка $a_x \dots u$ пути Q . Подграф H является подразбиением K_4 : каждые две из четырех вершин a_2, a_x, a_m, u соединены в этом графе путём, причем никакие два из этих путей не имеют общих внутренних вершин (наши пути — это участки пути P от a_x и a_y до u , участок пути Q от a_2 до u и три дуги цикла между a_2, a_x и a_y , см. рисунок 4.4б).

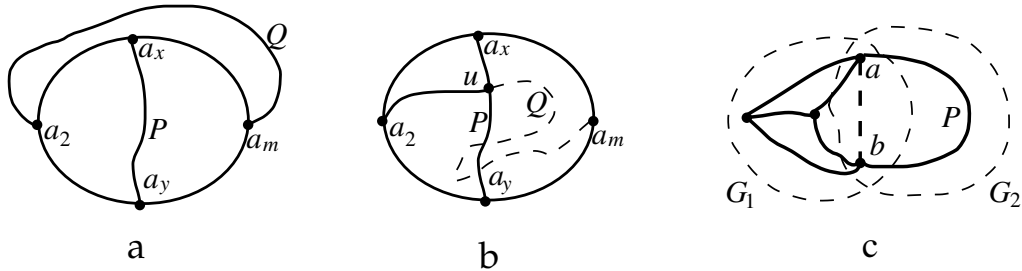


Рис. 4.4: Графы H^* и H .

2. Граф G не является трёхсвязным.

Пусть S — минимальное разделяющее множество графа G , тогда $|S| \leq 2$. В силу леммы 4.4 мы имеем $S = \{a, b\}$, причем вершины a и b несмежны. По лемме 4.5 тогда $\text{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$, $G_i = G(F_i)$, причем части можно занумеровать так, что $G_1 + ab$ — 4-критический граф.

Рассмотрим граф $G_1^* = G_1 + ab$. По индукционному предположению, в графе G_1^* есть подграф H , являющийся подразбиением K_4 . Пусть H — не подграф G , тогда H содержит ребро ab . По замечанию 1.2 граф G_2 связан, следовательно, существует ab -путь P , проходящий по вершинам множества F_2 . Внутренние вершины пути P не входят в $V(H)$, тогда граф $H' = H - ab + P$ (мы заменили в графе H ребро ab на путь P , добавив

его вершины и ребра, см. рисунок 4.4с) тоже является подразбиением K_4 . Остается лишь заметить, что H' — подграф G . \square

4.4 Конструируемые графы

Определение 4.4. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Мы определим класс \mathcal{C}_k k -конструируемых графов (k -constructible graphs) рекурсивно.

1° $K_k \in \mathcal{C}_k$.

2° Если $G \in \mathcal{C}_k$, $x, y \in V(G)$, $xy \notin E(G)$, то $(G + xy) \cdot xy \in \mathcal{C}_k$.

3° Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_k$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$, $xy_1 \in E(G_1)$, $xy_2 \in E(G_2)$.

Тогда

$$(G_1 - xy_1) \cup (G_2 - xy_2) + y_1y_2 \in \mathcal{C}_k$$

(то есть, объединение всех вершин и рёбер графов $(G_1 - xy_1)$ и $(G_2 - xy_2)$, к которому добавлено ребро y_1y_2).

Этот класс интересен не сам по себе, а в связи со следующим результатом.

Теорема 4.3. (G. Hajós, 1961.) Пусть G — граф, $k \in \mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1) $\chi(G) \geq k$.

2) Граф G содержит k -конструируемый подграф.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. Достаточно доказать, что $\chi(H) \geq k$ для $H \in \mathcal{C}_k$. Докажем это индукцией по построению H . База для $H = K_k$ очевидна, в индукционном переходе разберём два случая.

1. $H = (H' + xy) \cdot xy$, $H' \in \mathcal{C}_k$.

По индукционному предположению, $\chi(H') \geq k$. Предположим, что существует правильная раскраска ρ вершин графа H в $k - 1$ цвет, пусть w — вершина, в которую перешли x и y при стягивании ребра. Тогда построим раскраску ρ' вершин H' в $k - 1$ цвет: $\rho'(x) = \rho'(y) = \rho(w)$ и $\rho'(v) = \rho(v)$ для $v \in V(H') \setminus \{x, y\}$. Очевидно, раскраска ρ' в $k - 1$ цвет — правильная, противоречие с $\chi(H') \geq k$. Значит, $\chi(H) \geq k$.

2. $H_1, H_2 \in \mathcal{C}_k$, $V(H_1) \cap V(H_2) = \{x\}$, $xy_1 \in E(H_1)$, $xy_2 \in E(H_2)$, $H = (H_1 - xy_1) \cup (H_2 - xy_2) + y_1y_2$.

По индукционному предположению, $\chi(H_1) \geq k$ и $\chi(H_2) \geq k$. Предположим, что существует правильная раскраска ρ вершин графа H в $k - 1$ цвет. Поскольку $y_1y_2 \in E(H)$, то $\rho(y_1) \neq \rho(y_2)$. Тогда цвета обеих вершин y_1 и y_2 не могут совпасть с цветом x и мы можем не умаляя общности

предположить, что $\rho(y_1) \neq \rho(x)$. Тогда ρ индуцирует правильную раскраску вершин графа H_1 в $k-1$ цвет, противоречие с $\chi(H') \geq k$. Значит, $\chi(H) \geq k$.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть $\chi(G) \geq k$, но G не содержит подграфа из \mathcal{C}_k . Тогда, очевидно, $k \geq 3$. Можно считать, что G — граф с максимальным количеством рёбер среди графов на $v(G)$ вершинах с $\chi(G) \geq k$, не содержащих k -конструируемого подграфа. Тогда G не содержит подграфа K_k и, следовательно, не может быть полным k -дольным графом. Следовательно, существуют такие вершины $x, y_1, y_2 \in V(G)$, что $y_1 y_2 \in E(G)$, но $x y_1, x y_2 \notin E(G)$. Из максимальной G , в графе $G + x y_1$ есть подграф $H_1 \in \mathcal{C}_k$, а в графе $G + x y_2$ есть подграф $H_2 \in \mathcal{C}_k$.

Поскольку G не имеет подграфа из \mathcal{C}_k , то $x y_1 \in E(H_1)$ и $x y_2 \in E(H_2)$. Пусть $U = (V(H_1) \cup V(H_2))$. Очевидно, $x \in U$. К сожалению, U может содержать и другие вершины. Определим изоморфный H_2 граф H'_2 так: $v \in U \setminus \{x\}$ графа H_2 соответствует при изоморфизме вершина v' . Если $v \notin U$, или $v = x$, то $v' = v$. Если же $v \in U \setminus \{x\}$, то $v' \notin V(G)$ — новая вершина, все новые вершины различны.

Очевидно, граф $H' = H_1 \cup H'_2 - x y_1 - x y'_2 + y_1 y'_2 \in \mathcal{C}_k$. Рассмотрим пару соответствующих друг другу вершин $v \in U \setminus \{x\}$ и v' . Очевидно, $vv' \notin E(H')$ и тогда граф $(H' + vv') \cdot vv' \in \mathcal{C}_k$. Прделав аналогичную операцию с каждой парой таких вершин, мы получим граф $H \in \mathcal{C}_k$, который, очевидно, является подграфом графа G . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

4.5 Обхват и хроматическое число

Определение 4.5. *Кликовое число* графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей клике (то есть, полном подграфе) этого графа.

Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Самый простой и естественный способ построить граф с большим хроматическим числом — поместить в граф клику большого размера. Однако, совершенно не обязательно граф с большим хроматическим числом должен обладать большой кликой. Сначала мы приведём серию примеров графов без треугольников произвольного хроматического числа. Из многочисленных примеров мы приведём конструкцию Mycielski. Потом с помощью подсчёта мы докажем теорему Эрдеша о существовании графа сколь угодно большого обхвата и при этом сколь угодно большого хроматического числа.

Теорема 4.4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G удовлетворяющий условиям $\chi(G) = k$, $g(G) \geq 4$.

Доказательство. (J. Mycielski, 1955.) Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2 . Стартуя от графа $G_2 = K_2$, мы построим серию примеров графов G_3, G_4, \dots без треугольников с $\chi(G_k) = k$.

Пусть построен граф G_k , причём $V(G_k) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Этот граф будет частью графа G_{k+1} , в котором будут добавлены вершины v_1, \dots, v_n, w . Рёбра между новыми вершинами проведём так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $N_{G_k}(u_i)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами v_1, \dots, v_n и только с ними (см. рисунок 4.5). Понятно, что треугольников в графе G_{k+1} нет.

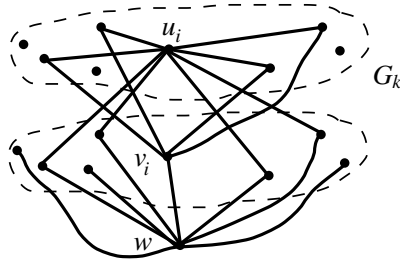


Рис. 4.5: Граф G_{k+1} .

Заметим, что $\chi(G_{k+1}) \leq k+1$: если ρ — правильная раскраска вершин G_k в k цветов, то можно продолжить её на G_{k+1} , положив $\rho(v_i) = \rho(u_i)$, $\rho(w) = k+1$, используя только один дополнительный цвет.

Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \leq k$ и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов. Не умаляя общности, предположим, что $\rho(w) = k$. Мы построим новую правильную раскраску ρ' вершин графа G_k в $k-1$ цвет и тем самым придём к противоречию. Для каждой вершины u_i мы положим $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \neq k$ и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$. Так как вершины v_1, \dots, v_n смежны с вершиной w цвета k , то их цвета отличны от k , следовательно, $\rho' : V(G_k) \rightarrow [1..k-1]$.

Докажем правильность раскраски ρ' . Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны. Тогда хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i , тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$. Так как мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ , среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$. По построению, из $u_j \in N_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in N_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод $\rho'(u_i) = \rho(v_i) \neq \rho(u_j) = \rho'(u_j)$, противоречие с предположением. Таким образом, ρ' — правильная раскраска, что невозможно по индукционному предположению. Это означает, что $\chi(G_{k+1}) = k+1$. \square

Теорему Эрдеша мы докажем с помощью подсчёта, поскольку это проще, чем все известные на настоящий момент конструкции графов со сколь угодно большим обхватом и одновременно сколь угодно большим хроматическим числом. Традиционно приводят вероятностное доказательство этой теоремы, мы же просто оценим все нужные величины.

Теорема 4.5. (P. Erdős, 1959). Пусть $k, g \in \mathbb{N}$, $k, g \geq 3$. Тогда существует граф G с $g(G) \geq g$ и $\chi(G) \geq k$.

Доказательство. Пусть $n \geq (2\delta)^g$. Мы рассмотрим множество \mathcal{G} всех графов G на множестве вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ с $e(G) = \delta n$. Мы не будем “экономить”: параметр δ позже будет выбран настолько большим, чтобы все оценки проходили без лишних трудностей.

1. Сначала мы оценим среднее количество A “коротких циклов” (длины не более $g-1$) в графах из \mathcal{G} . Пусть $m = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

На вершинах множества V существует $C_n^\ell \cdot \frac{(\ell-1)!}{2} < \frac{n^\ell}{2\ell}$ циклов фиксированной длины ℓ . Данный цикл длины ℓ есть в $C_{m-\ell}^{\delta n - \ell}$ графах множества \mathcal{G} . Оценим сверху среднее количество циклов длины не более $g-1$ в графах множества \mathcal{G} :

$$A < \left(\sum_{\ell=3}^{g-1} \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot C_{m-\ell}^{\delta n - \ell} \right) \cdot (C_m^{\delta n})^{-1}.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} B_\ell &= \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{C_{m-\ell}^{\delta n - \ell}}{C_m^{\delta n}} = \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{(m-\ell)!(\delta n)!}{(m)!(\delta n - \ell)!} = \\ &= \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{\delta n}{m} \cdot \frac{\delta n - 1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{\delta n - \ell + 1}{m - \ell + 1} < \frac{1}{2\ell} \left(\frac{\delta n^2}{m} \right)^\ell, \end{aligned}$$

так как при $0 < i < n$ выполняется неравенство $\frac{\delta n}{m} > \frac{\delta n - i}{m - i}$ (вспомним, что $m = \frac{n \cdot (n-1)}{2} > \delta n$). В силу $\ell < g$ мы имеем $n-1 \geq (2\delta)^g - 1 > 2^\ell - 1$. Продолжим оценку:

$$\begin{aligned} B_\ell &< \frac{1}{2\ell} \left(\frac{\delta n^2}{m} \right)^\ell = \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^\ell < \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell} \cdot \left(1 + \frac{2^\ell - 1}{n-1} \right) < \\ &< \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell} \cdot 2 = \frac{(2\delta)^\ell}{\ell} \leq \frac{(2\delta)^\ell}{3}. \end{aligned}$$

Теперь вернемся к оценке сверху среднего количества циклов длины не более $g - 1$ в графах семейства \mathcal{G} :

$$A = \sum_{\ell=3}^{g-1} B_{\ell} < \frac{1}{3} \sum_{\ell=3}^{g-1} (2\delta)^{\ell} < \frac{1}{3 \cdot (2\delta - 1)} (2\delta)^g < \frac{n}{6\delta - 3}. \quad (4.2)$$

2. Теперь оценим долю q графов, содержащих “большое” независимое множество (размера $\frac{n}{c}$), среди графов из \mathcal{G} , где c — достаточно большое число. Для удобства будем считать, что $\frac{n}{c} = p \in \mathbb{N}$. Количество способов выбрать независимое множество размера p равно $C_n^p < 2^n$. Пусть $t = C_p^2$, тогда в каждом графе, содержащем большое независимое множество t пар вершин этого множества не могут быть соединены рёбрами. Следовательно,

$$q \leq C_n^p \cdot \frac{C_{m-t}^{\delta n}}{C_m^{\delta n}} < 2^n \cdot \prod_{i=0}^{\delta n-1} \frac{m-t-i}{m-i} < 2^n \cdot \left(\frac{m-t}{m} \right)^{\delta n} = 2^n \cdot \left(1 - \frac{t}{m} \right)^{\delta n}. \quad (4.3)$$

Отметим, что $\frac{t}{m} = \frac{\frac{n^2}{c^2} - \frac{n}{c}}{n^2 - n} > \frac{1}{2c^2}$. Подставив это неравенство в (4.3) мы получим

$$q < \left(2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2c^2} \right)^{\delta} \right)^n < \frac{1}{2}$$

для любого $c > 0$ при достаточно больших n и δ .

3. Перейдём непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим достаточно большие c , δ и n . В силу неравенства (4.2), среднее количество коротких циклов в графе из \mathcal{G} меньше $\frac{n}{6}$. Следовательно, менее чем в половине графов из \mathcal{G} количество коротких циклов превосходит $\frac{n}{3}$. Также менее чем в половине графов из \mathcal{G} есть большое независимое множество. Следовательно, существует граф $G \in \mathcal{G}$ с $\alpha(G) < \frac{n}{c}$ и количеством коротких циклов не более $\frac{n}{3}$. Удалив из каждого короткого цикла по вершине, мы получим граф G' с $g(G') \geq g$, $v(G') \geq \frac{2n}{3}$ и $\alpha(G') < \frac{n}{c}$. По лемме 4.2 мы имеем

$$\chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} > \frac{2c}{3} > k$$

при достаточно большом c . □

4.6 Совершенные графы

Как видно из предыдущего раздела, большое хроматическое число в графе может получаться несмотря на отсутствие больших клик. Однако,

важное место в теории графов занимают графы, для которых хроматическое и кликовое число равны.

Определение 4.6. Граф G называется *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа H выполняется условие $\chi(H) = \omega(H)$.

Простейшим примером совершенных графов (не считая, разумеется, полных графов) являются двудольные графы. Отметим, что любой индуцированный подграф совершенного графа также совершенен.

Задача 4.2. Докажите, не используя последующих теорем, что если G — двудольный, то \overline{G} — совершенный граф.

В 1963 году Берж (С. Berge) высказал две гипотезы о том, как устроены совершенные графы.

Слабая гипотеза Бержа. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф \overline{G} совершенен.

Сильная гипотеза Бержа. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда ни G , ни \overline{G} не содержат нечётного цикла длины более 3 в качестве индуцированного подграфа.

Первая гипотеза была доказана в 1972 г., это сделал Л. Ловас. Доказательство с использованием линейной алгебры, которое мы приведём ниже, значительно проще первоначального доказательства. Вторая гипотеза была доказана только в 2002 году, доказательство весьма сложное и техническое, поэтому мы вместо этого фундаментального результата приведём несколько более слабую теорему Галлаи.

Теорема 4.6. (L. Lovász, 1972.) Граф G совершенен тогда и только тогда, когда для любого его индуцированного подграфа G' выполняется

$$\omega(G')\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')\omega(G') \geq v(G'). \quad (4.4)$$

Следствие 4.1. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф \overline{G} совершенен.

Доказательство. (G. Gasparian, 1996.) Следствие очевидно, так как теорема 4.6 даёт критерий совершенности графа, одинаковый для графа и его дополнения. Приступим к доказательству теоремы.

\Rightarrow . Если граф совершенен, то для любого его индуцированного подграфа G' в силу его совершенности и леммы 4.2 мы имеем $\omega(G') = \chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')}$, откуда умножением на $\alpha(G')$ получаем то, что нужно.

\Leftarrow . Докажем обратную импликацию индукцией по $v(G)$. База $v(G) = 1$ очевидна, сосредоточимся на переходе. Итак, рассмотрим наш граф G ,

удовлетворяющий условию (4.4). По индукционному предположению, для любой вершины $u \in V(G)$ граф $G - u$ совершенен. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, $\omega = \omega(G)$. Тогда для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется условие

$$\chi(G - u) = \omega(G - u) \leq \omega. \quad (4.5)$$

Предположим, что граф G не совершенен, то есть, $\chi(G) > \omega(G)$. Пусть $A_0 = \{u_0, \dots, u_{\alpha-1}\}$ — независимое множество в графе G . Ввиду условия (4.5) существует правильная раскраска вершин $G - u_i$ в ω цветов, тогда $V(G - u_i)$ можно разбить на ω независимых множеств: $A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}$. Итого мы имеем $\alpha\omega + 1$ независимых множеств $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$.

Пусть $i \in [0.. \alpha\omega]$. Если $\chi(G - A_i) \leq \omega - 1$, то из независимости множества A_i мы получаем $\chi(G) \leq \chi(G - A_i) + 1 \leq \omega$, что противоречит предположению. Тогда $\omega(G - A_i) = \chi(G - A_i) \geq \omega$, следовательно, существует клика размера ω в графе $G - A_i$, обозначим множество ее вершин через C_i . Таким образом, у нас есть клики $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$. Докажем вспомогательный факт.

Пусть C — множество вершин клики размера ω в графе G . Тогда C пересекает все множества $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$, кроме одного.

Доказательство. Рассмотрим разбиение вершин графа G на $\omega + 1$ независимых множеств $\{\{u_i\}, A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}\}$. Так как C может пересекать независимое множество лишь по одной вершине, C пересекает все эти множества, кроме одного. Значит, C либо пересекает все множества $A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}$, либо все эти множества, кроме одного и при этом $C \ni u_i$. Поскольку $|C \cap A_0| \leq 1$, то C содержит не более, чем одну из вершин $u_0, \dots, u_{\alpha-1}$. Тогда либо $|C \cap A_0| = 1$ и C пересекает все множества $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$, кроме одного, либо $C \cap A_0 = \emptyset$ и C пересекает все множества $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$. \square

Пусть M — матрица размера $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ в графе G , где её элемент $m_{i,j} = |A_i \cap C_j|$. Понятно, что $m_{i,j} \in \{0, 1\}$, по построению $m_{i,i} = 0$. Тогда по доказанному выше $m_{i,j} = 1$ при $i \neq j$. Таким образом, матрица M имеет нули на главной диагонали и единицы на всех остальных позициях.

Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Рассмотрим матрицу A размера $(\alpha\omega + 1) \times n$, в которой $a_{ij} = 1$ при $A_i \ni v_j$ и $a_{ij} = 0$ при $A_i \not\ni v_j$. Рассмотрим матрицу B размера $n \times (\alpha\omega + 1)$, в которой $b_{j\ell} = 1$ при $v_j \in C_\ell$ и $b_{j\ell} = 0$ при $v_j \notin C_\ell$. Легко видеть, что $A \cdot B = M$. Матрица M , очевидно, невырождена, следовательно, её ранг $\text{rk}(M) = \alpha\omega + 1$. Поэтому

$\text{rk}(A) \geq \alpha\omega + 1$. В частности, это означает, что $v(G) = n \geq \alpha\omega + 1$, что противоречит неравенству (4.4), а значит, и условию теоремы. \square

Определение 4.7. Пусть C — простой цикл длины более 3 в графе G . Будем говорить, что цикл C *триангулируем*, если в графе G есть $v(C) - 3$ диагонали этого цикла, разбивающие его на треугольники.

В 1958 году было доказано (А. Hajnal, J. Surányi), что граф, каждый цикл которого триангулируем (или, что равносильно, каждый цикл длины больше 3 в котором имеет хотя бы одну диагональ) является совершенным. Такие графы называются *chordal graphs*. Избыточность этого условия очевидна: совершенности графа ничем не мешают нетриангулируемые чётные циклы. В 1962 году Галлаи доказал, что граф, в котором каждый нечётный цикл триангулируем, совершенен. Эта теорема является еще одним шагом в направлении сильной гипотезы Бержа, тогда еще не доказанной. Мы приведём теорему с доказательством по мотивам более поздней работы J. Surányi.

Теорема 4.7. (Т. Gallai, 1962.) Если каждый нечётный цикл в графе G триангулируем, то $\chi(\overline{G}) = \alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Следствие 4.2. Если каждый нечётный цикл в графе G триангулируем, то графы G и \overline{G} совершенны.

Доказательство. Следствие 4.2 очевидно выводится из теорем 4.6 и 4.7. Сосредоточимся на доказательстве теоремы 4.7, которую мы сформулировали в таком виде, чтобы её удобнее было доказывать по индукции. База для графов без циклов очевидна, приступим к индукционному переходу.

Итак, пусть для меньшего чем G графа утверждение теоремы доказано, а для G — неверно. Тогда $\chi(\overline{G}) > \alpha(G) = q$. Рассмотрим множество $A = \{a_1, \dots, a_q\}$ из q независимых вершин графа G . Нашей целью будет построить в графе G большее независимое множество и прийти к противоречию с $\alpha(G) = q$.

Пусть $b_0 \notin A$, тогда в графе $G - b_0$ любой нечётный цикл триангулируем, множество A — клика в $\overline{G} - b_0$ и по индукционному предположению оказывается, что $\chi(\overline{G} - b_0) = q$. Тогда множество \mathcal{P}_0 разбиений вершин графа $G - b_0$ на q клик непусто. Для каждого разбиения $R = (R_1, \dots, R_q) \in \mathcal{P}_0$ ровно по одной вершине независимого множества A лежит в каждой из клик разбиения R , поэтому мы будем нумеровать клики разбиения R так, чтобы $a_i \in R_i$. Для любого разбиения $R \in \mathcal{P}_0$ мы будем считать $R_0 = \{b_0\}$.

Ранги. Построение.

Мы будем постепенно сужать круг рассматриваемых разбиений из \mathcal{P}_0 и присваивать ранги индексам из $[1..q]$. Множество индексов ранга k мы будем обозначать через I_k . Пусть $J_k = [1..q] \setminus \cup_{i=1}^k I_k$. Такой же ранг, как индексам, мы будем присваивать соответствующим вершинам множества A и содержащим их кликам рассматриваемых разбиений из \mathcal{P}_0 .

Изначально положим $I_0 = \{0\}$. Пусть построены ранги I_1, I_2, \dots, I_k , множества разбиений $\mathcal{P}_k \subset \dots \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$ так, что для любых $\ell \in [1..k]$ и $i \in I_\ell$ выполняются следующие условия.

(R1) У индекса i существует единственный предок $p(i) \in I_{\ell-1}$.

(R2) Существует такая вершина $b_i \in V(G)$, что $b_i \in R_i$ для любого разбиения $R \in \mathcal{P}_\ell$.

(R3) $a_i b_{p(i)} \in E(G)$, $b_i b_{p(i)} \notin E(G)$.

(R4) Пусть $j \in J_\ell$, $R \in \mathcal{P}_\ell$. Тогда вершина b_i не смежна хотя бы с одной вершиной из R_j .

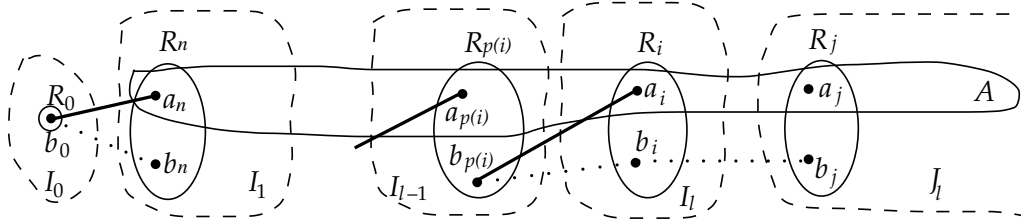


Рис. 4.6: Построение рангов.

По очереди рассмотрим все индексы из I_k и для каждого $i \in I_k$ поместим в I_{k+1} все такие индексы j , что a_j смежна с b_i (в этом случае положим $i = p(j)$).

Зафиксируем произвольное разбиение $P \in \mathcal{P}_k$, для которого минимальна $\sum_{j \in I_{k+1}} |P_j|$ (пусть эта сумма равна s_{k+1}). Для каждого $j \in I_{k+1}$ в клике P_j отметим такую вершину b_j , что $b_{p(j)} b_j \notin E(G)$. (При $k > 1$ такая вершина существует в силу (R3). Если $k = 1$ и такой вершины нет, то вершину b_0 можно добавить в клику P_j , тем самым получив правильную раскраску вершин графа \bar{G} в q цветов, которой по предположению не существует.)

Пусть \mathcal{P}_{k+1} — множество из всех разбиений $R \in \mathcal{P}_k$, в которых $\sum_{i \in I_{k+1}} |R_j| = s_{k+1}$ и $b_i \in R_i$ для любого индекса $i \in I_{k+1}$. (Такие разбиения существуют: например, P .)

Пусть $i \in I_{k+1}$. Так как $\mathcal{P}_{k+1} \subset \mathcal{P}_k$, по построению, для индекса i выполняются условия (R1) — (R3). Остаётся проверить (R4). Предположим, что $j \in J_{k+1}$, $R \in \mathcal{P}_{k+1}$ и вершина b_i смежна со всеми вершинами

клики R_j . Тогда перекинем вершину b_i в R_j и получим новое разбиение $R' \in \mathcal{P}_k$, в котором $\sum_{j \in I_{k+1}} |R'_j| = s_{k+1} - 1$, что невозможно.

Множество B' .

Процесс построения закончится ввиду конечности графа. Пусть построены ранги I_1, \dots, I_k , пусть

$$I = \bigcup_{i=1}^k I_k, \quad B' = \{b_i : i \in I\}, \quad A' = \{a_i : i \in I\}.$$

Докажем два утверждения.

- 1) Если $a_j \in A \setminus A'$, $b_i \in B'$, то $b_i a_j \notin E(G)$.
- 2) Множество вершин B' независимо в графе G .

Доказательство. 1) Если $b_i a_j \in E(G)$, можно продолжить процесс построения, определив ранг индекса j .

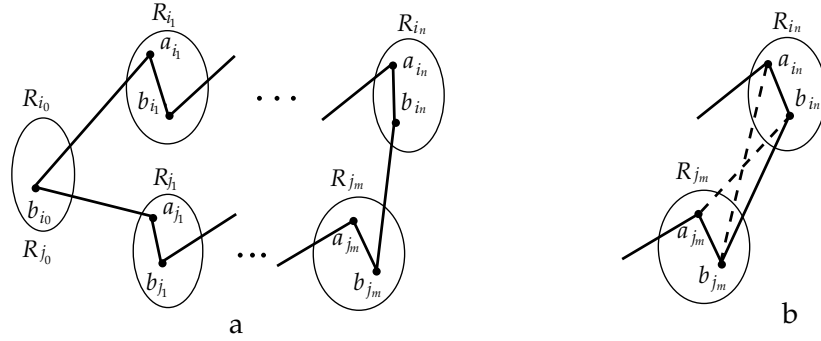


Рис. 4.7: Цикл Z и его короткие диагонали.

2) Если $i, j \in I$ и $i = p(j)$, то будем называть j *потомком* i . Пусть $x, y \in I$, вершины b_x и b_y смежны. По построению рангов, существует такой индекс $i_0 = j_0 \in I$, что в последовательностях индексов $i_0, \dots, i_n = x$, $j_0, \dots, j_m = y$ каждый следующий индекс является потомком предыдущего и все эти индексы различны. Отметим, что для любого $i \in I$ и $R \in \mathcal{P}_k$ мы имеем $a_i, b_i \in R_i$, следовательно, $a_i b_i \in E(G)$. Тогда в графе G существует нечётный простой цикл

$$Z = b_{i_0} a_{i_1} b_{i_1} \dots a_{i_n} b_{i_n} b_{j_n} a_{j_m} \dots b_{j_1} a_{j_1}$$

(см. рисунок 4.7а). По свойству (R4) понятно, что ни один из индексов x и y не может быть предком другого, поэтому $v(Z) > 3$. Цикл Z по условию теоремы триангулируем, рассмотрим его произвольную триангуляцию. В ней, как известно, есть хотя бы две “короткие” диагонали,

соединяющие вершины через одну. Однако, $b_i b_{p(i)} \notin E(G)$ по условию (R3), поэтому единственными кандидатами в короткие диагонали являются $a_{i_n} b_{j_m}$ и $a_{i_m} b_{j_n}$. Их две, но они “пересекаются” (см. рисунок 4.7b) и не могут принадлежать одной триангуляции. Значит, триангуляция цикла невозможна — противоречие, доказывающее независимость B' . \square

Остаётся заметить, что множество $(A \setminus A') \cup B'$ независимо ввиду утверждений 1 и 2 и состоит из $q + 1$ вершины. Противоречие с $\alpha(G) = q$ завершает доказательство теоремы. \square

4.7 Раскраски рёбер

Определение 4.8. Раскраской рёбер графа G в k цветов называется функция $\rho : E(G) \rightarrow [1..k]$. Отметим, что любая раскраска ρ рёбер графа G в k цветов есть разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств E_1, \dots, E_k , где ρ принимает значение i на рёбрах множества E_i .

Графы, рассматриваемые в этом разделе могут иметь кратные рёбра, но не имеют петель. В отличие от раскрасок вершин, при рассмотрении раскрасок рёбер кратные рёбра играют существенную роль.

Определение 4.9. 1) Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(e) \neq \rho(e')$ для любой пары смежных (то есть, имеющих общий конец) рёбер u и v .

Через $\chi'(G)$ обозначим *реберное хроматическое число* — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

2) Назовем раскраску ρ рёбер графа G *покрывающей*, если рёбра каждого цвета образуют покрытие (то есть, покрывают все вершины).

Через $\kappa'(G)$ обозначим наибольшее натуральное число, для которого существует покрывающая раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Замечание 4.2. 1) В дальнейшем мы покажем, что понятия правильной и покрывающей раскраски в некотором смысле двойственны друг другу. Картина двойственности начнет вырисовываться уже после следующих определений.

2) В англоязычной литературе число $\chi'(G)$ называется *chromatic index*, а число $\kappa'(G)$ называется *cover index*.

4.7.1 Оптимальные раскраски

Определение 4.10. Пусть ρ — раскраска рёбер графа G в k цветов.

1) Пусть $v \in V(G)$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v , если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Будем говорить, что цвет i представлен t раз в вершине v , если существует t инцидентных v рёбер цвета i . Обозначим через $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v .

2) Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ *оптимальной*, если для любой другой раскраски ρ' рёбер графа G в k цветов $\rho(G) \geq \rho'(G)$.

Замечание 4.3. 1) Правильная раскраска рёбер графа G может быть также определена как раскраска, в которой для каждой вершины все представленные в ней цвета различны. Покрывающая раскраска рёбер графа G может быть также определена как раскраска, в которой в каждой вершине представлены все цвета.

2) Пусть ρ — правильная раскраска рёбер графа G . Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ мы имеем $\rho(v) = d_G(v) \geq \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ' . Таким образом, правильная раскраска рёбер всегда является оптимальной.

3) Если ρ — покрывающая раскраска в k цветов, то для каждой вершины $v \in V(G)$ мы имеем $\rho(v) = k$. Легко понять, что покрывающая раскраска является оптимальной раскраской в k цветов.

Лемма 4.6. Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска рёбер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.

Доказательство. Если в графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим её со всеми вершинами нечетной степени графа G . Получится граф \tilde{G} , степени всех вершин которого четны. Если все степени вершин графа G четны, положим $\tilde{G} = G$.

В графе \tilde{G} есть Эйлеров цикл. Будем красить ребра графа, чередуясь, в цвета 1 и 2 по ходу эйлерова цикла. Пусть мы начали с вершины a . Тогда в каждой вершине x графа \tilde{G} , кроме, может быть, вершины a , будут представлены оба цвета. Более того, если $d_{\tilde{G}}(x) = 2k$, то мы прошли k раз по эйлерову циклу через x , следовательно, мы покрасили по k инцидентных x рёбер в цвета 1 и 2. Отличие для начальной вершины a состоит в том, что при $d_{\tilde{G}}(a) = 2m$ мы проходим через a только $m - 1$ раз, следовательно, у вершины a можно гарантировать только по $m - 1$ рёбер каждого из цветов.

Пусть $v \in V(G)$. По построению графа \tilde{G} ,

$$d_G(v) = d_{\tilde{G}}(v) \text{ при } d_G(v) \geq 2, \quad d_G(v) = d_{\tilde{G}}(v) - 1 \text{ при } d_G(v) \leq 1.$$

Поэтому при $v \neq a$ и $d_G(v) \geq 2$ в нашей раскраске существует два разноцветных ребра, инцидентных a . Для начальной вершины a мы можем гарантировать это лишь в случае $d_G(a) \geq 3$.

Если в графе G есть вершины нечетной степени, то мы начнем покраску рёбер с добавленной вершины (положим $a = w$), тогда получится искомая раскраска ребер графа G . Если в графе G все вершины имеют четную степень, но есть вершина степени хотя бы 4, то мы выберем в качестве a именно такую вершину и опять же получим искомую раскраску ребер графа G . Остается случай, когда все вершины связного графа G имеют степень 2, то есть G — простой цикл. Тогда это цикл четной длины, для которого нужная нам раскраска, очевидно, существует. \square

Замечание 4.4. Отметим, что в лемме 4.6 допускается наличие в графе кратных рёбер. Также оно ничем не мешает в следующей лемме и двух теоремах о реберных раскрасках двудольных графов.

Лемма 4.7. Пусть ρ — оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Пусть вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j . Пусть $H = G(E_i \cup E_j)$, W — компонента связности графа H , содержащая вершину w . Тогда $H(W)$ — простой цикл нечетной длины.

Доказательство. Предположим, что $H(W)$ не является простым циклом нечетной длины. Построим новую раскраску ρ' , отличающуюся от ρ лишь раскраской рёбер из $H(W)$: мы раскрасим их в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H(W)}(x) \geq 2$ были представлены оба цвета i и j (это возможно по лемме 4.6). Тогда $\rho'(w) = \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x , очевидно, $\rho'(x) \geq \rho(x)$. Таким образом, $\rho'(G) > \rho(G)$, противоречие с оптимальностью ρ . \square

Теорема 4.8. (D. König, 1916.) Если граф G — двудольный, то $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальную раскраску ρ в $\Delta(G)$ цветов. Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v . Так как $d_G(v) \leq \Delta(G)$, то существует цвет j , не представленный в вершине v . Тогда по лемме 4.7 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — правильная. \square

Задача 4.3. Выведите теоремы 4.8 из теоремы Холла (2.2).

Интересно, что точно так же доказывается двойственная теорема.

Теорема 4.9. (R. P. Gupta, 1966.) Если граф G — двудольный, то $\kappa'(G) = \delta(G)$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальную раскраску ρ в $\delta(G)$ цветов. Предположим, что раскраска ρ не является покрывающей. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i не представлен в вершине v . Так как $d_G(v) \geq \delta(G)$, то существует цвет j , представленный в вершине v не менее, чем дважды. Тогда по лемме 4.7 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — покрывающая. \square

4.7.2 Теорема Визинга

Определение 4.11. Через $\mu(G)$ обозначим максимальную кратность ребра графа G , то есть, максимум количества рёбер с концами x, y в графе G по всем парам $x, y \in V(G)$.

Мы докажем теорему Визинга для графов, в которых допускаются кратные ребра. Мы приведем доказательство по мотивам доказательства J.-C. Fournier (1973 г).

Теорема 4.10. (В. Г. Визинг, 1964.) Пусть G — граф без петель. Тогда $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

Доказательство. Пусть $\mu(G) = \mu$. Рассмотрим оптимальную раскраску ρ в $\Delta(G) + \mu$ цветов. Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина u и цвет i_1 , который дважды представлен в вершине u . Так как $d_G(u) < \Delta(G) + \mu$, то существует цвет j , не представленный в вершине u .

Пусть $e_1 \in E(G)$ — ребро цвета $\rho(e_1) = i_1$ с концами u и v_1 . Так как $d_G(v_1) < \Delta(G) + \mu$, существует цвет i_2 , не представленный в v_1 . Если i_2 не представлен в u , то, перекрасив ребро uv_1 в цвет i_2 , мы увеличим $\rho(G)$. Следовательно, цвет i_2 представлен в u , пусть e_2 — ребро с концами u и v_2 цвета $\rho(e_2) = i_2$.

1. Шаг процесса построения.

Пусть различные цвета i_1, \dots, i_ℓ и рёбра $e_1, \dots, e_\ell \in E(G)$ таковы, что $\rho(e_t) = i_t$ при $t \in [1.. \ell]$, а концы ребра e_t — это u и v_t . Пусть при $t < \ell$ цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t . Мы будем говорить, что цвет i_{t+1} выбран для вершины v_t . Вершины v_1, \dots, v_ℓ не обязательно различны.

Рассмотрим вершину $v = v_\ell$. Пусть в наборе v_1, \dots, v_ℓ вершина v встречается m раз. Понятно, что $m \leq \mu$. Тогда на предыдущих шагах мы рассматривали вершину v и выбирали цвет, не представленный в этой вершине $m - 1$ раз. Поскольку $d_G(v_\ell) + m - 1 < \Delta(G) + \mu$, то существует цвет $i_{\ell+1}$, не представленный в вершине v_ℓ и не выбранный для нее на предыдущих шагах. Мы выберем именно этот цвет.

Определим раскраску ρ_ℓ :

$$\rho_\ell(e_s) = i_{s+1}, \text{ при } s \in [1..l], \quad \rho_\ell(e) = \rho(e) \text{ на остальных рёбрах } e.$$

Докажем, что $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$, то есть, ρ_ℓ — оптимальная раскраска ребер в $\Delta(G) + \mu$ цветов. Для вершины $x \notin \{u, v_1, \dots, v_\ell\}$ цвета инцидентных x рёбер не менялись, поэтому $\rho_\ell(x) = \rho(x)$.

Рассмотрим вершину w , которая входит в набор v_1, \dots, v_ℓ ровно n раз. Пусть $w = v_{s_1} = \dots = v_{s_n}$. По построению, все выбранные для вершины v цвета $i_{s_1+1}, \dots, i_{s_n+1}$ различны, не представлены в вершине w в раскраске ρ и представлены в раскраске ρ_ℓ . Цвета i_{s_1}, \dots, i_{s_n} представлены в вершине w в раскраске ρ и, возможно, не представлены в раскраске ρ_ℓ . Все отличные от e_{s_1}, \dots, e_{s_n} рёбра, инцидентные w , не изменили свой цвет, и потому остальные цвета одинаково представлены в вершине w в раскрасках ρ и ρ_ℓ . Поэтому $\rho_\ell(v_t) \geq \rho(v_t)$.

Рассмотрим вершину u . В результате перекрашивания инцидентных u рёбер e_1, \dots, e_ℓ из их цветов исчез i_1 и появился $i_{\ell+1}$. Однако, цвет i_1 был представлен в вершине u в раскраске ρ хотя бы дважды, поэтому он представлен и в раскраске ρ_ℓ . Таким образом, $\rho_\ell(u) \geq \rho(u)$ и $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$, то есть, раскраска ρ_ℓ оптимальна.

Более того, из оптимальности ρ следует, что $\rho_\ell(G) = \rho(G)$, следовательно, $\rho_\ell(u) = \rho(u)$. Это означает, что цвет $i_{\ell+1}$ представлен в вершине u в раскраске ρ . Пусть $e_{\ell+1}$ — ребро с концами u и $v_{\ell+1}$ цвета $\rho(e_{\ell+1}) = i_{\ell+1}$.

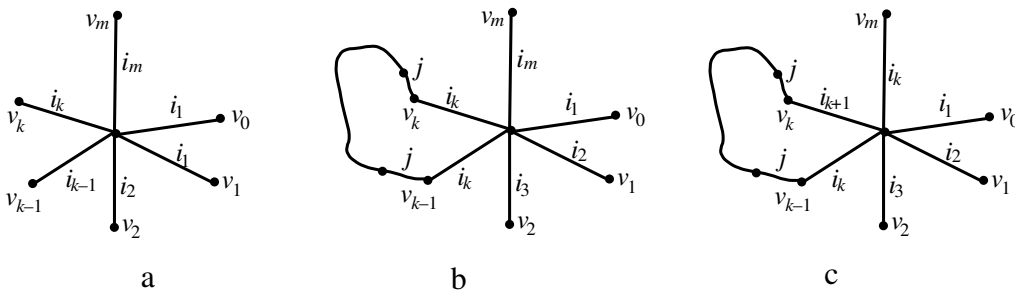


Рис. 4.8: Раскраски ρ , ρ_{k-1} и ρ_m .

2. Перекрашивание.

Поскольку у вершины u конечное число соседей, на некотором шаге построения мы впервые получим $i_{m+1} = i_k$. По построению отсюда следует, что v_m не совпадает с v_{k-1} (иначе мы выбрали бы цвета i_{m+1} и i_k разными). Так как в вершинах v_{k-1} и v_m в раскраске ρ не представлен цвет i_k , а в v_k — представлен, все три вершины v_{k-1} , v_k и v_m различны.

Рассмотрим оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (мы положим $\rho_0 = \rho$). В обеих раскрасках в вершине u хотя бы дважды представлен цвет i_k :

$$\rho_{k-1}(e_{k-1}) = \rho_{k-1}(e_k) = i_k, \quad \rho_m(e_{k-1}) = \rho_m(e_m) = i_k.$$

Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1} , а E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m , $H = G(E_{i_k} \cup E_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$. На рисунке 4.8 изображены цвета рёбер, соединяющих u с v_1, \dots, v_m в раскрасках ρ (рисунок 4.8a), ρ_{k-1} (рисунок 4.8b) и ρ_m (рисунок 4.8c). Применим лемму 4.7: из оптимальности наших раскрасок следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.

Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро e_k цвета $\rho_{k-1}(e_k) = i_k$ и ребро цвета j . Для всех рёбер e цикла H , кроме e_k , мы имеем $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$. При этом, очевидно, v_k и u лежат в одной компоненте связности графа H' , которая должна быть простым нечётным циклом. Противоречие.

Полученное противоречие показывает, что ρ — искомая правильная раскраска рёбер графа G в $\Delta(G) + \mu$ цветов. \square

Замечание 4.5. 1) Для графов без кратных рёбер мы имеем $\mu(G) = 1$, а следовательно, оценку $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

2) Очевидно, оценка из теоремы 4.10 точна. Действительно, если G — “треугольник”, в котором каждое ребро имеет кратность μ , то $\Delta(G) = 2\mu$, а $\mu(G) = \mu$. Нетрудно понять, что все 3μ рёбер графа G должны быть разного цвета, а следовательно, $\chi'(G) = 3\mu = \Delta(G) + \mu(G)$.

4.7.3 Покрывающие раскраски рёбер

Теоремы 4.8 и 4.9 показывают связь между правильными и покрывающими раскрасками: для двудольного графа G имеют место равенства $\chi'(G) = \Delta(G)$ и $\kappa'(G) = \delta(G)$. При этом, в графах допускается наличие кратных рёбер.

Перейдём к графам без условия двудольности. По теореме Визинга, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$. При этом, не всегда существует правильная раскраска рёбер графа G в меньшее число цветов. В 1974 году R. P. Gupta

доказал, что $\kappa'(G) \leq \delta(G) - \mu(G)$. Мы докажем эту оценку и покажем ее точность.

Теорема 4.11. (R. P. Gupta, 1974.) Пусть $\mu(G) \leq \delta(G)$. Тогда $\kappa'(G) \leq \delta(G) - \mu(G)$.

Доказательство. Пусть $d = \delta(G)$, $\mu = \mu(G)$. Мы считаем, что $d > \mu$, иначе утверждение теоремы очевидно.

1. Перестройка графа.

Мы построим граф G' , удовлетворяющий следующим условиям.

1° Для любой вершины $x \in V(G)$ существует конечное множество вершин $V_x \subset V(G')$. Для различных $x, y \in V(G)$ выполняется условие $V_x \cap V_y = \emptyset$.

2° Существует биекция $\varphi : E(G) \rightarrow E(G')$ такая, что если $\varphi(e) = e'$ и ребро $e \in E(G)$ имеет концы x и y , то ребро $e' \in E(G')$ имеет концы $x' \in V_x$ и $y' \in V_y$.

3° $\Delta(G') = \delta(G) = d$, $\mu(G') \leq \mu(G) = \mu$.

4° Для любой вершины $x \in V(G)$ существует вершина $x' \in V_x$ такая, что $d_{G'}(x') = d$.

Грубо говоря, мы должны расщепить каждую вершину $x \in V(G)$ на несколько вершин, составляющих V_x . Последовательно сделаем этот процесс со всеми вершинами графа G . Рассмотрим очередную вершину x . Пусть $q = \lceil \frac{d_G(x)}{d} \rceil$. Тогда мы расщепим вершину x на q вершин x_1, \dots, x_q , произвольным образом распределив между ними инцидентные вершине x рёбра так, чтобы из вершин x_1, \dots, x_{q-1} выходило ровно по d рёбер.

В результате получится новый граф G' с множеством вершин $V(G') = \bigcup_{x \in V(G)} V_x$, причем построенное одновременно с графом G' соответствие рёбер графов G и G' и будет биекцией φ (каждому ребру $xy \in E(G)$ в результате построения поставлено в соответствие ровно одно ребро $x'y' \in E(G')$, причем $x' \in V_x, y' \in V_y$). По построению, граф G' удовлетворяет условиям 1° — 4°.

2. Покраска графа G' .

По теореме 4.10 существует правильная раскраска ρ графа G' в $d + \mu$ цвет. Назовем вершину $x \in V(G')$ *большой*, если $d_{G'}(x) = d$. Каждой большой вершине инцидентны d рёбер разных цветов, следовательно, в вершине x представлены d цветов. Мы попытаемся перекрасить ребра в цвета $1, \dots, d - \mu$ (назовем их *маленькими*) так, что в каждой вершине графа G' будут представлены все цвета.

Обозначим через H граф на вершинах $V(G')$ с рёбрами цветов $d - \mu + 1, \dots, d + \mu$ в раскраске ρ (назовем эти цвета *большими*, их количество равно 2μ). Поставим в соответствие каждой большой вершине x множество

$M(x)$, которая содержит те из цветов $1, \dots, d - \mu$, которые не представлены в x .

Докажем, что для любой большой вершины $x \in V(G')$.

$$|M(x)| \leq \left\lceil \frac{d_H(x)}{2} \right\rceil.$$

Пусть $|M(x)| = m$. Так как вершина x — большая, $d_{G'}(x) = d$ и из правильности раскраски ρ следует, что в вершине x представлены d цветов и не представлены какие-то μ цветов, причем среди них есть m маленьких цветов и $\mu - m$ больших. Следовательно, в вершине x представлены $2\mu - (\mu - m) = \mu + m$ больших цветов, то есть, $d_H(x) = \mu + m \geq 2m$, откуда следует доказываемое утверждение.

Мы построим новую раскраску ρ' рёбер графа G' в $d - \mu$ цвет, в которой в каждой большой вершине будут представлены все цвета. Для начала положим $\rho'(e) = \rho(e)$, при $\rho(e) \leq d - \mu$ (то есть, $e \notin E(H)$). Рёбра больших цветов в раскраске ρ (то есть, рёбра из $E(H)$) будут перекрашены.

Лемма 4.8. *Пусть в графе H ровно $2k$ вершин нечетной степени. Тогда нетрудно понять, что $E(H)$ представляется как объединение попарно непересекающихся множеств рёбер k путей и, возможно, нескольких циклов. (Путь (цикл) может проходить несколько раз по одной вершине и иметь кратные рёбра.)*

Доказательство. Предположим, что в графе есть вершина нечетной степени a . Тогда выйдем из a и будем идти в новую вершину до тех пор, пока это возможно сделать, не проходя по ребру дважды. Проходя по ребру будем его вычеркивать. Тогда понятно, что выход из вершины a уменьшил ее степень на 1, а каждый проход через вершину уменьшает ее степень на 2, то есть, не меняет четность. Таким образом, наш путь P будет закончен в вершине b нечетной степени, причем $b \neq a$. Удалим из графа ребра пути P , в результате степени вершин a и b станут четными.

Проделав такую операцию k раз мы получим граф, в котором нет вершин нечетной степени, а значит, в каждой компоненте связности есть Эйлеров цикл. Добавим эти Эйлеровы циклы и получим искомое представление $E(H)$ в виде объединения непересекающихся множеств рёбер k путей и, возможно, нескольких циклов. \square

Вернемся к перекраске рёбер графа H в маленькие цвета. Пусть $E(H) = \cup_{i=1}^t E(H_i)$ — представление из леммы 4.8, каждый граф H_i —

это путь или цикл. Ориентируем транзитивно каждый путь и цикл. Получится ориентация \overline{H} графа H . По построению, для каждой вершины $x \in V(H)$ ее исходящая степень

$$d_G^-(x) \geq \left\lceil \frac{d_G(x)}{2} \right\rceil \geq |M(x)|.$$

Поэтому для каждой большой вершины x каждому исходящему из x ребру e орграфа \overline{H} можно поставить в соответствие один из цветов $\rho'(e)$ множества $M(x)$ так, чтобы каждый цвет из $M(x)$ соответствовал какому-то ребру, исходящему из x . Отметим, что каждому ребру соответствует не более одного цвета, поэтому раскраска ρ' на перекрашенных рёбрах определена корректно. В результате в раскраске ρ в вершине x представлены все цвета из $M(x)$ и все маленькие цвета, которые были представлены в ρ , а значит, вообще все маленькие цвета.

Для завершения доказательства остается перекрасить все неперекрашенные ребра графа H в маленькие цвета произвольно.

3. Покраска графа G .

Покрасим рёбра графа G так же, как соответствующие им рёбра графа G' : положим $\rho^*(xy) = \rho'(\varphi(xy))$ для каждого ребра $xy \in E(G)$. Рассмотрим произвольную вершину $x \in V(G)$. По условию 4° существует большая вершина $x' \in V_x$. Так как в раскраске ρ' в вершине x' представлены все $d - \mu$ цветов, в вершине x также представлены все $d - \mu$ цветов. \square

Покажем, что оценка $\delta(G) - \mu(G)$ из теоремы 4.11 точна. Пусть $\mu = \mu(G)$. Рассмотрим граф G на $2\mu + 1$ вершине, в котором каждые две вершины соединены μ кратными рёбрами. Тогда

$$e(G) = \mu^2(2\mu + 1), \quad \delta(G) = 2\mu^2, \quad \mu(G) = \mu.$$

Предположим, что существует раскраска ребер графа G в $k = \delta(G) - \mu(G) + 1 = 2\mu^2 - \mu(G) + 1$ цветов. Тогда существует цвет, количество рёбер которого не более, чем

$$\frac{e(G)}{k} = \frac{2\mu^3 + \mu^2}{2\mu^2 - \mu(G) + 1} < \mu + 1.$$

Следовательно, количество рёбер этого цвета не более чем μ , но в таком случае он не может быть представлен во всех $2\mu + 1$ вершинах. Противоречие показывает, что раскраска нашего графа G , в которой в каждой вершине представлены все цвета, должна содержать не более $\delta(G) - \mu(G)$ цветов, что подтверждает точность оценки из теоремы 4.11.

Задача 4.4. Докажите, что для однородного графа G степени r имеет место неравенство $\chi'(G) + \kappa'(G) \geq 2r$.

4.7.4 Теорема о чередующемся цикле

Эта весьма интересная и достаточно сильная теорема Йео о правильно раскрашенном цикле имеет неожиданное применение — из нее очевидно следует теорема Котцига о графе с единственным паросочетанием 2.21.

Теорема 4.12. (А. Йео, 1997.) *Рёбра графа G (кратные рёбра допускаются, петли — нет) раскрашены таким образом, что нет правильно раскрашенных циклов (то есть, в любом цикле есть два последовательных одноцветных ребра). Тогда существует такая вершина $a \in V(G)$, что для каждой компоненты связности U графа $G - a$ все рёбра из a к U одноцветны.*

Доказательство. Можно считать, что в графе нет кратных рёбер, так как любые два кратных ребра должны быть покрашены в один и тот же цвет. Правильно раскрашенный простой путь или цикл мы будем для простоты называть *чередующимся*. Пути в графе мы считаем направленными от начала к концу. Если P — простой путь, а $x, y \in V(P)$, то мы будем обозначать через $P[x, y]$ участок P от x до y (в указанном направлении).

Цвет ребра e мы будем обозначать через $c(e)$. Пусть $c_{start}(P)$ и $c_{end}(P)$ — цвета первого и последнего рёбер пути P , соответственно. Для двух различных вершин x, y определим множества цветов

$$\begin{aligned} C_{start}(x, y) &= \{c_{start}(P) : P \text{ — чередующийся } xy\text{-путь}\}; \\ C_{end}(x, y) &= \{c_{end}(P) : P \text{ — чередующийся } xy\text{-путь}\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выберем произвольную вершину $p_1 \in V(G)$. Положим

$$S = \{p_1\} \cup \{x \in V(G) : |C_{end}(a_1, x)| = 1\}.$$

Пусть $P = p_1 \dots p_n$ — самый длинный чередующийся путь с началом p_1 , кончающийся в вершине множества S . Для цвета i определим

$$T_i = \{t \in V(G - p_n) : i \in C_{start}(p_n, t)\}.$$

Наконец, пусть $C^* = C$ в случае $S = \{p_1\}$. При $|S| > 1$, очевидно, $v(P) > 1$. Тогда положим $c_{end}(P) = 1$ и $C^* = C \setminus \{1\}$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся три вспомогательных утверждения.

Лемма 4.9. *Для любого цвета $i \in C^*$ множество T_i не содержит ни одной вершины пути P .*

Доказательство. Случай $|S| = 1$ тривиален. Пусть $|S| > 1$, тогда $p_n \neq p_1$. Предположим противное, пусть $p_k \in T_i$. Тогда существует чередующийся $p_n p_k$ -путь R с $c_{start}(R) = i \neq c_{end}(P)$. Рассмотрим два случая.

1. $c_{end}(R) \neq c(p_k p_{k+1})$.

Тогда $P[p_k p_n]$ и R образуют чередующийся цикл (см. рисунок 4.9a), противоречие.

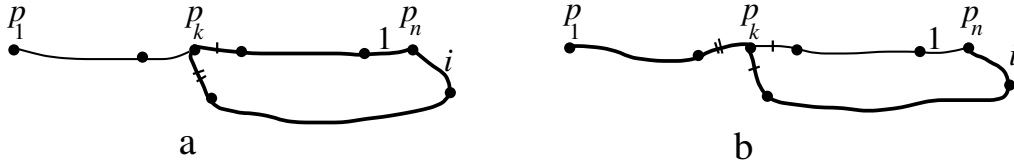


Рис. 4.9: Общая вершина T_i и пути P .

2. $c_{end}(R) = c(p_k p_{k+1})$.

В этом случае из $c(p_{k-1} k) = c(p_k p_{k+1})$ следует, что $c_{end}(R) \neq c(p_{k-1} k)$. Тогда $P' = P[p_1 p_k] R[p_k p_n]$ — это чередующийся $p_1 p_n$ -путь с $c_{end}(P') \neq c_{end}(P)$ (см. рисунок 4.9b). Противоречие с $|C_{end}(p_1, p_n)| = 1$. \square

Лемма 4.10. Пусть $i \in C^*$, $x \in T_i$, $y \notin T_i$, $xy \in E(G)$, $c(xy) = j$. Тогда $y = p_n$ и $j = i$.

Доказательство. 1. Докажем, что если не выполняется утверждение леммы, то существует такой чередующийся $p_n x$ -путь R , что $c_{start}(R) = i$ и $c_{end}(R) \neq j$.

По определению T_i , существует чередующийся $p_n x$ -путь Q с $c_{start}(Q) = i$. Если $c_{end}(Q) \neq j$, этот путь нам подходит. Значит, $c_{end}(Q) = j$ (см. рисунок 4.10a). По лемме 4.9 путь Q не имеет общих вершин с P , кроме p_n . Значит, PQ — это чередующийся $p_1 x$ -путь, который, очевидно, длиннее P . По выбору пути P это означает, что $|C_{end}(p_1, x)| \geq 2$, то есть, существует другой чередующийся $p_1 x$ -путь L с $c_{end}(L) \neq j$.

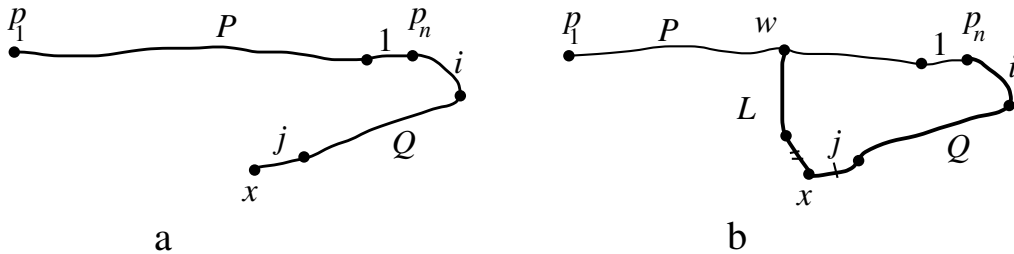


Рис. 4.10: Пути P , Q и L .

Выберем вершину $w \in V(PQ) \cap V(L)$ так, чтобы внутренние вершины пути $L[w, x]$ не лежали в $V(PQ)$. Разберем два случая.

а. $w \in V(P) \setminus \{p_n\}$ (см. рисунок 4.10b).

В этом случае $QL[x, w]$ — это чередующийся $p_n w$ -путь с $c_{start}(QL[x, w]) = i$, откуда следует $w \in T_i$ — противоречие с леммой 4.9.

б. $w \in V(Q)$ (см. рисунок 4.11a).

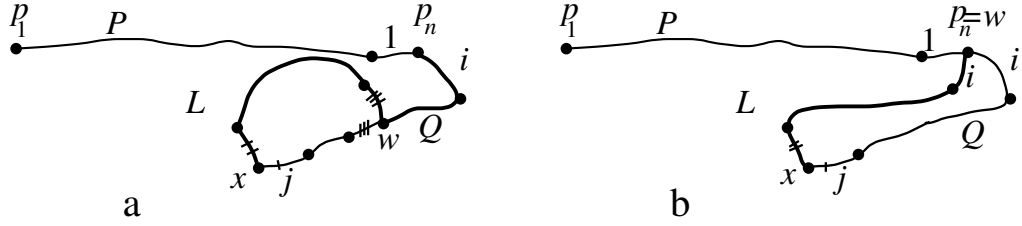


Рис. 4.11: Пути P , Q и L .

Тогда $c_{start}(Q[w, x]) = c_{start}(L[w, x])$, иначе эти два пути образуют чередующийся цикл. Но тогда вспомним, что $c_{end}(Q[p_n, w]) \neq c_{start}(Q[w, x]) = c_{start}(L[w, x])$, поэтому $R = Q[p_n, w]L[w, x]$ — это чередующийся $p_n x$ -путь. Если $w \neq p_n$, то R и Q имеют общее первое ребро, поэтому $c_{start}(R) = i$ (см. рисунок 4.11a). Если $w = p_n$, то из доказанного выше следует, что $c_{start}(L[w, x]) = c_{start}(Q) = i$ (см. рисунок 4.11b). В любом случае путь R нам подходит.

2. Рассмотрим чередующийся $p_n x$ -путь R из пункта 1. Если $y \neq p_n$, то по лемме 4.9 $R' = Ry$ — это чередующийся $p_n y$ -путь с $c_{start}(R') = i$, то есть, $y \in T_i$, что противоречит условию.

Значит, $y = p_n$. Если при этом $i \neq j$, то R' — это чередующийся цикл, которых по условию нет. \square

Закончим доказательство теоремы 4.12. Докажем, что нам подойдет $a = p_n$. Предположим противное, пусть $U \ni x, y$ — компонента связности графа $G - p_n$ и $c(p_n x) \neq c(p_n y)$. Не умаляя общности можно считать, что $i = c(p_n x) \in C^*$.

Пусть $y \in T_i$. Тогда, так как $p_n \notin T_i$, по лемме 4.10 мы имеем $c(p_n y) = i = c(p_n x)$, противоречие. Следовательно, $y \notin T_i$. Разумеется, $x \in T_i$. Пусть $x = x_1 x_2 \dots x_m = y$ — это $x y$ -путь в $G(U)$ (он может быть не чередующимся). Тогда найдется такой индекс k , что $x_k \in T_i$ и $x_{k+1} \notin T_i$. Но в этом случае по лемме 4.10 должно быть $x_{k+1} = p_n$, что не так. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

В качестве очевидного следствия выведем теорему Котцига (2.21).

Следствие 4.3. Пусть G — связный граф (возможно, с кратными рёбрами, но без петель), имеющий единственное совершенное паросочетание M . Тогда граф G имеет мост, входящий в это паросочетание.

Доказательство. Покрасим рёбра паросочетания M в цвет 1, а остальные рёбра — в цвет 2 и применим теорему 4.12. Пусть a — вершина, от которой все рёбра к каждой компоненте связности графа $G - a$ одноцветны. Эта вершина покрыта ровно одним ребром паросочетания M , а значит, существует компонента связности U графа $G - a$, в которую от a ведут рёбра цвета 1. Но такое ребро ровно одно, следовательно, это как раз искомый мост. \square

4.8 Списочные раскраски

Списочные раскраски (list colorings) появились относительно недавно. Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие список $L(v)$ из k цветов, после чего рассматривается правильная раскраска вершин с дополнительным ограничением: каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$. Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G обозначается через $\text{ch}(G)$ (и носит название *choice number*). Очевидно, $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$. Нетрудно придумать пример графов, для которых $\text{ch}(G) > \chi(G)$. Аналогичным образом можно определить списочные раскраски рёбер, мы сделаем это в следующей главе.

Даже с помощью вероятностных методов для списочных раскрасок произвольных графов почти ничего не доказано. Однако, для класса *планарных графов* Томассен получил сильные и красивые результаты о списочных раскрасках. Подробнее об этом написано в главе **Планарные графы**.

Аналогично списочным раскраскам вершин мы определим *списочные раскраски рёбер*. Каждому ребру графа $e \in E(G)$ ставится в соответствие список $L(e)$ из k цветов, после чего рассматривается правильная раскраска рёбер, в которой каждое ребро e должно быть покрашено в цвет из списка $L(e)$. Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска рёбер графа G обозначается через $\text{ch}'(G)$ (и носит название *choice number*). Очевидно, $\text{ch}'(G) \geq \chi'(G)$.

В отличие от ситуации со списочными раскрасками вершин графов, для которых, напомним, возможен случай $\text{ch}(G) > \chi(G)$, аналогичных примеров для рёберных раскрасок неизвестно. Более того, выдвинута гипотеза (*List Color Conjecture*) о том, что $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ для любого

графа G . В 1995 году Гэльвин (F. Galvin) доказал эту гипотезу для двудольных графов. Доказательство использует понятие ориентированного графа и будет приведено в соответствующей главе в разделе 8.5.

4.9 Раскраски гиперграфов

Существуют разные определения правильной раскраски вершин гиперграфа \mathcal{H} . Например, можно потребовать, чтобы все вершины каждого гиперребра были разноцветными. Однако, мы остановимся на следующем варианте, который был предложен в свое время П. Эрдешем.

Определение 4.12. Раскраска вершин гиперграфа \mathcal{H} называется *правильной*, если в любом гиперребре есть хотя бы две вершины разных цветов.

4.9.1 Аналог теоремы Брукса

Теорема 4.13. (Н. В. Гравин, Д. В. Карпов, 2011.) Пусть \mathcal{H} — гиперграф, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем r вершин, с $\Delta(\mathcal{H}) = \Delta$ и $k = \lceil \frac{2\Delta}{r} \rceil$.

- 1) Тогда вершины \mathcal{H} можно правильно раскрасить в $k + 1$ цвет.
- 2) Пусть $r \geq 3$ и $k \geq 3$. Тогда вершины \mathcal{H} можно правильно раскрасить в k цветов.

Замечание 4.6. 1) В случае обычного графа $r = 2$ и $k = \Delta$, а значит, в этом случае количество цветов в правильной раскраске из пункта 2 теоремы было бы именно таким, как в теореме Брукса.

2) Как и в случае классической теоремы Брукса, случай раскраски в два цвета имеет существенные отличия от случая, когда количество цветов $k \geq 3$. Раскраски гиперграфов в два цвета будут изучены в следующем разделе.

Перед доказательством теоремы мы введем несколько необходимых понятий и изучим их свойства.

Определение 4.13. Назовем *образом* гиперграфа \mathcal{H} любой граф G (возможно, с кратными рёбрами), для которого $V(G) = V(\mathcal{H})$ и существует такая биекция $\varphi : E(G) \rightarrow E(\mathcal{H})$, что $e \subset \varphi(e)$ для любого ребра $e \in E(G)$. Назовём φ *биекцией образа* G .

Замечание 4.7. Кратные рёбра графа-образа G , соответствующие различным гиперрёбрам гиперграфа \mathcal{H} , мы считаем различными.

Понятно, что вопрос о правильной раскраске вершин гиперграфа \mathcal{H} — это вопрос о правильной раскраске вершин любого его образа. В этом разделе мы объясним, как найти у гиперграфа \mathcal{H} удобный для покраски образ.

Как и в классических теоремах о раскрасках вершин, нам поможет чередующаяся цепь. Следующее определение покажет, что мы имеем ввиду под этим понятием для гиперграфа.

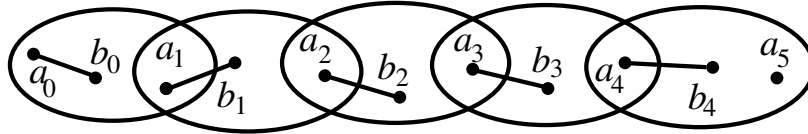


Рис. 4.12: Чередующаяся цепь длины 5 с началом a_0 и концом a_5 .

Определение 4.14. Пусть $r \geq 3$, G — образ гиперграфа \mathcal{H} . Рассмотрим последовательность вершин $a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_n$ гиперграфа \mathcal{H} , удовлетворяющую следующим условиям.

- (1) Вершины a_i, b_i, a_{i+1} различны, существует гиперребро $e_i \in E(\mathcal{H})$, для которого $a_i, b_i, a_{i+1} \in e_i$.
- (2) Все гиперрёбра e_0, \dots, e_{n-1} различны, $a_0 b_0, \dots, a_{n-1} b_{n-1} \in E(G)$, причём $\varphi(a_i b_i) = e_i$.

Тогда $a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_n$ — *чередующаяся цепь* от a_0 до a_n . Число n назовём *длиной* этой чередующейся цепи. Будем говорить, что эта чередующаяся цепь *проходит* по вершинам a_0, b_0, \dots, a_n и по рёбрам $a_0 b_0, \dots, a_{n-1} b_{n-1}$.

Вершину a_0 назовём *началом* этой цепи, а вершину a_n — *концом*.

Пусть $X, Y \subset V(G)$, причём $a_0 \in X$ и $a_n \in Y$. Тогда будем говорить, что $a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_n$ — *чередующаяся цепь* от X до Y .

Замечание 4.8. 1) Мы допускаем в определении чередующейся цепи случай $n = 0$. Таким образом, вершина a_0 является чередующейся цепью от a_0 до a_0 длины 0.

2) Так как φ — биекция, все рёбра $a_0 b_0, \dots, a_{n-1} b_{n-1}$ из определения чередующейся цепи — различные. Напомним, что кратные рёбра графа G , соответствующие разным гиперрёбрам, мы считаем различными.

3) Вершины в определении чередующейся цепи не обязательно различны. Возможно, по некоторым вершинам чередующаяся цепь проходит более одного раза.

Лемма 4.11. Пусть \mathcal{H} — гиперграф, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем r вершин, с $\Delta(\mathcal{H}) = \Delta$ и $k = \lceil \frac{2\Delta}{r} \rceil$. Тогда существует образ G гиперграфа \mathcal{H} с $\Delta(G) \leq k$.

Доказательство. Рассмотрим тривиальный случай $r = 2$. В этом случае для любого образа G гиперграфа \mathcal{H} очевидно, что $\Delta(G) \leq \Delta = k$. Везде далее $r \geq 3$.

Для графа G обозначим через $V_{k+1}(G)$ множество всех вершин графа G , имеющих степень не менее $k+1$, а через $s_{k+1}(G)$ — сумму степеней вершин из $V_{k+1}(G)$ в графе G .

Предположим, что утверждение леммы неверно. В таком случае для любого образа G мы имеем $V_{k+1}(G) \neq \emptyset$ и $s_{k+1}(G) > 0$. Выберем образ G с наименьшим $s_{k+1}(G)$. Обозначим через φ биекцию образа G , пусть $S = V_{k+1}(G)$.

Пусть U — множество, состоящее из всех вершин графа G , являющихся концами чередующихся цепей с началом в вершинах S , а $F = G(U)$. Понятно, что $S \subset U$. Докажем ряд свойств U .

1. Для любого ребра $e \in E(F)$ гиперребро $\varphi(e) \subset U$.

Предположим, что это не так, пусть $e = uw \in E(F)$ и гиперребро $\varphi(e)$ содержит вершину $v \notin U$ (см. рисунок 4.13а). Мы построим чередующуюся цепь от S до v и тем самым получим $v \in U$, что противоречит предположению.

Рассмотрим кратчайшую чередующуюся цепь $P = a_0 b_0 \dots a_n$ от S до $\{u, w\}$. Не умаляя общности можно предположить, что $a_n = u$. Тогда $a_i \notin \{u, w\}$ при $0 \leq i < n$, поэтому цепь P не проходит по ребру $e = uw$. Добавим к цепи P вершины w, v и получим чередующуюся цепь от $a_0 \in S$ до v .

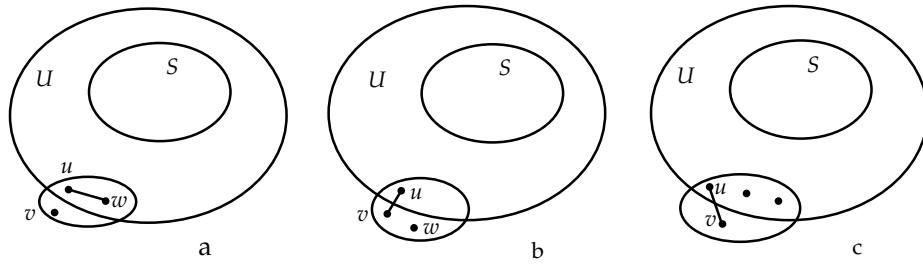


Рис. 4.13: Гиперрёбра, пересекающие U

2. Если вершина $u \in U$ смежна в графе G с вершиной $v \notin U$, то все отличные от v вершины гиперребра $\varphi(uv)$ лежат в U .

Предположим, что это не так и $u \in U$, $v \notin U$, $uv \in E(G)$. Пусть $e = \varphi(uv)$ — гиперребро \mathcal{H} . Предположим, что в e есть вершина $w \notin U$ (см. рисунок 4.13b).

Как и в предыдущем пункте, построим кратчайшую чередующуюся цепь P от S до u (в случае $u \in S$ эта цепь состоит из единственной вершины). Пусть цепь P проходит по ребру uv . Так как мы выбрали кратчайшую цепь до u , то в этом случае для некоторого $i < n$ мы имеем $v = a_i$, $u = b_i$. Но тогда $v \in U$, противоречие.

Таким образом, цепь P не проходит по ребру uv . Дополнив цепь P вершинами v и w , мы получим $w \in U$, что противоречит предположению. Значит, v — единственная вершина гиперребра e , не входящая в U (см. рисунок 4.13c).

3. Для любой вершины $u \in U$ выполняется $d_G(u) \geq k$.

Пусть $u \in U$ и $d_G(u) \leq k - 1$. Понятно, что $u \notin S$. Рассмотрим чередующуюся цепь $P = a_0b_0 \dots a_n$ от S до $u = a_n$. Построим новый граф G' : возьмём граф G и для каждого $i \in [0, n - 1]$ заменим в гиперребре $e_i \supset \{a_i, b_i, a_{i+1}\}$ ребро a_ib_i на ребро b_ia_{i+1} . Нетрудно понять, что полученный граф G' — также образ гиперграфа \mathcal{H} .

Так как $d_{G'}(u) = d_G(u) + 1 \leq k$, вершина $u \notin V_{k+1}(G')$. Степени остальных вершин в графе G' не более, чем в G , а значит, $V_{k+1}(G') \subseteq S = V_{k+1}(G)$. Остаётся лишь отметить, что $a_0 \in S$ и $d_G(a_0) > d_{G'}(a_0)$, следовательно, $s_{k+1}(G') < s_{k+1}(G)$. Противоречие с минимальностью $s_{k+1}(G)$ завершает доказательство утверждения.

4. Оценим сумму степеней вершин из U в гиперграфе \mathcal{H} .

Пусть u_1, \dots, u_ℓ — все вершины множества U , имеющие в индуцированном подграфе $F = G(U)$ степень менее k . Положим

$$t_i = d_G(u_i) - d_F(u_i), \quad t = \sum_{i=1}^{\ell} t_i.$$

Из пункта 3 следует, что степени всех вершин множества U в графе G хотя бы k . Так как $S \subset U$, в множестве U есть вершины, имеющие в графе G степень более k . Следовательно,

$$e(F) = \frac{1}{2} \sum_{u \in U} d_F(u) > \frac{k|U| - t}{2}.$$

Теперь оценим $m = \sum_{u \in U} d_{\mathcal{H}}(u)$. По пункту 1, все гиперрёбра гиперграфа \mathcal{H} , соответствующие при отображении φ рёбрам графа F , содержатся в множестве U и вносят в m вклад не менее, чем

$$r \cdot e(F) > r \cdot \frac{k|U| - t}{2} \geq \Delta|U| - \frac{rt}{2}.$$

Каждое из t рёбер графа G , выходящих из U в $V(\mathcal{H}) \setminus U$, по пункту 2 входит в гиперребро гиперграфа \mathcal{H} , у которого только одна вершина лежит вне U , а следовательно, остальные вершины (их не менее $r - 1$) лежат в U . Все эти t гиперрёбер, очевидно, различны. Таким образом,

$$m > \Delta|U| - \frac{rt}{2} + (r - 1)t > \Delta|U|.$$

Следовательно, найдется вершина $u \in U$ степени $d_{\mathcal{H}}(u) > \Delta$, что противоречит условию леммы.

Полученное противоречие показывает, что существует образ G гиперграфа \mathcal{H} с $\Delta(G) \leq k$. \square

Доказательство теоремы 4.13. 1) По лемме 4.11, существует образ G гиперграфа \mathcal{H} с $\Delta(G) \leq k = \lceil \frac{2\Delta}{r} \rceil$. Очевидно, существует правильная раскраска вершин графа G в $k + 1$ цвет.

Докажем, что эта раскраска будет правильной раскраской вершин гиперграфа \mathcal{H} . Пусть φ — биекция образа G . Для каждого гиперребра $e \in E(\mathcal{H})$ мы имеем $\varphi^{-1}(e) \subset e$, а вершины ребра $\varphi^{-1}(e) \in E(G)$ покрашены в разные цвета.

2) Нам нужно доказать существование образа гиперграфа \mathcal{H} , имеющего правильную раскраску в k цветов при $k \geq 3$ и $r \geq 3$. Для начала рассмотрим образ G гиперграфа \mathcal{H} с $\Delta(G) \leq k$ и его биекцию образа φ .

Вспомним классическую теорему Брукса 4.1: *если $\Delta(G) \leq k$, ни одна из компонент связности графа G не является кликой на $k + 1$ вершине и $k \geq 3$, то вершины графа G красятся правильным образом в k цветов.*

Пусть компоненты-клики на $k + 1$ вершине в графе G есть и это C_1, \dots, C_q (в дальнейшем для краткости именно эти компоненты мы будем называть просто *кликами*). Возможно, есть и другие компоненты связности, обозначим индуцированные на них подграфы графа G через D_{q+1}, \dots, D_p . Нам нужно немного подправить граф-образ G так, чтобы получился раскрашиваемый в k цветов граф. Мы сделаем это очень просто.

Изменение образа.

В каждой клике C_i рассмотрим любое ребро $u_i w_i$. Понятно, что существует отличная от u_i и w_i вершина $v_i \in e_i = \varphi(u_i w_i)$. Построим новый образ G' гиперграфа \mathcal{H} , одновременно заменив каждое из рёбер $u_i w_i$ на $u_i v_i$. Назовём только что проведённые рёбра $u_1 v_1, \dots, u_q v_q$ *новыми рёбрами*.

Далее мы докажем, что вершины G' можно правильно раскрасить в k цветов.

Построим вспомогательный оргграф F , вершинами которого будут компоненты связности графа G , а из каждой компоненты-клики C_i ведёт ориентированное ребро (*стрелка*) в компоненту, содержащую вершину v_i . Если v_i — вершина клики C_i , то стрелка окажется петлёй. Фактически, мы ориентировали новые рёбра и стянули каждую компоненту связности графа G в вершину.

Наш алгоритм покраски вершин в k цветов будет выполняться по следующему плану:

- если существует клика, в которую в графе F не входит ни одной стрелки, то выполним шаг 1, после чего вернемся к началу алгоритма;
- если в каждую клику в графе F входит хотя бы одна стрелка, то выполним шаг 2, после чего алгоритм завершит работу.

1. *Существует клика C_i , в которую не входит ни одной стрелки.* Тогда $d_{G'}(w_i) = k - 1$. Произвольно пронумеруем вершины C_i , начиная с w_i и заканчивая вершиной u_i , смежной в G' с вершиной какой-то другой компоненты связности графа G . Предположим, что мы покрасили вершины остальных компонент правильным образом в k цветов. Тогда мы можем легко докрасить вершины C_i в порядке, обратном их нумерации: на каждом шаге очередная рассматриваемая вершина будет смежна менее, чем с k уже покрашенными.

Значит, мы можем удалить из графа G' вершины компоненты C_i и перейти к вопросу о покраске остальных компонент связности. Соответственно преобразуем и граф F , удалив из него вершину C_i и выходящую из нее стрелку.

2. *В каждую компоненту-клику входит хотя бы одна стрелка.* Так как из каждой такой компоненты выходит ровно по одной стрелке, то и входит в каждую клику также ровно по одной стрелке. Таким образом, все компоненты-клики разбиваются в графе F на ориентированные циклы, вершины которых не связаны друг с другом в графе G' . Мы будем красить эти циклы независимо друг от друга. Остальные компоненты связности графа G (не клики из $k + 1$ вершин) являются компонентами связности и в графе G' , и их вершины по теореме Брукса можно правильным образом покрасить в k цветов.

Итак, пусть клики C_1, \dots, C_ℓ образуют в F ориентированный цикл. Обозначим через G^* индуцированный подграф графа G' на множестве вершин всех этих клик. Остается доказать, что вершины графа G^* можно правильным образом покрасить в k цветов. При $\Delta(G^*) \leq k$ это следует из теоремы Брукса, так как граф G^* связан и не является кликой на $k + 1$ вершине. Предположим, что $\Delta(G^*) > k$ и рассмотрим два случая.

2.1. $\ell = 1$, то есть, цикл является петлёй и $v_1 \in V(C_1)$.

Тогда G^* — это клика на $k+1$ вершине с удалённым ребром u_1w_1 и ребром u_1v_1 кратности два. Мы легко можем покрасить вершины C_1 правильным образом в k цветов, покрасив в цвет 1 вершины u_1 и w_1 , а остальные вершины клики — по одной в оставшиеся цвета.

2.2. $\ell \geq 2$.

Пусть в графе G^* есть вершина x степени более k и лежит она в клике C_i . Тогда понятно, что x смежна с вершиной клики C_{i-1} и $x \neq w_i$. Более того, в этом случае $d_{G^*}(w_i) = k - 1$. Так как $|C_i| = k + 1 \geq 4$, существует отличная от x, w_i, u_i вершина $z_i \in C_i$. Последовательно удалим из графа G^* вершины w_i и z_i . Степень каждой вершины на момент удаления менее k , а значит, их можно будет докрасить в обратном порядке после покраски всех остальных вершин. В полученном графе $G^* - w_i - z_i$ все вершины из C_i имеют степень не более k .

Выполним такие операции со всеми компонентами-кликами, имеющими в графе G^* вершину степени более k . В результате получим связный граф H^* с максимальной степенью не более k .

Докажем, что граф H^ отличен от клики на $k + 1$ вершине.*

По построению ясно, что все новые рёбра между компонентами C_1, \dots, C_n вошли в граф H^* (мы не удаляли из графа G^* их концы). Рассмотрим компоненту C_2 и два инцидентных её вершинам новых ребра u_1v_1 и u_2v_2 . Понятно, что граф $H^* - u_1v_1 - u_2v_2$ несвязен (вершины из C_2 отделены в нём от остальных). Таким образом, граф H^* теряет связность при удалении двух рёбер, а следовательно, не является кликой на $k + 1 \geq 4$ вершинах.

Теперь понятно, что вершины графа H^* по теореме Брукса можно покрасить правильным образом в k цветов, после чего мы докрасим с соблюдением правильности все удалённые из G^* вершины.

Таким образом, вершины графа G' можно правильным образом покрасить в k цветов, и эта раскраска, как уже указывалось выше, будет правильной раскраской вершин гиперграфа \mathcal{H} . \square

4.9.2 Правильные раскраски гиперграфов в два цвета

Определение 4.15. Гиперграф \mathcal{H} называется *двудольным*, если существует правильная раскраска его вершин в два цвета (то есть такая раскраска в два цвета, в которой в каждом гиперребре есть вершины обоих цветов).

Лемма 4.12. Пусть \mathcal{H} — недвудольный гиперграф, а $X \subsetneq V(\mathcal{H})$ — множество, пересекающее все его гиперребра. Тогда существует такое гиперребро $e \in E(\mathcal{H})$, что $e \subset X$.

Доказательство. Если это не так, то покрасим вершины множества X в цвет 1, а вершины из $V(\mathcal{H}) \setminus X$ — в цвет 2 и получим правильную раскраску вершин гиперграфа \mathcal{H} . \square

В основном в этом разделе мы будем изучать *минимальные недвудольные гиперграфы* — такие, у которых любой собственный подгиперграф является двудольным.

Определение 4.16. Пусть \mathcal{H} — гиперграф, а $U \subsetneq V(\mathcal{H})$. Обозначим через \mathcal{H}_U гиперграф на множестве вершин U , гиперребра которого — это все непустые множества вида $e \cap U$, где $e \in E(\mathcal{H})$ (возможно, некоторые из них состоят из одной вершины).

Замечание 4.9. Мы считаем, что гиперграф, имеющий одновершинные ребра, не является двудольным.

Лемма 4.13. Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф, а $U \subsetneq V(\mathcal{H})$ — непустое подмножество. Тогда гиперграф \mathcal{H}_U недвудолен.

Доказательство. Предположим противное, пусть гиперграф \mathcal{H}_U двудолен, а U_1 и U_2 — множества вершин цветов 1 и 2 в его правильной раскраске. Заметим, что гиперграф $\mathcal{H} - W$ двудолен. Пусть W_1 и W_2 — множества вершин цветов 1 и 2 в правильной раскраске этого гиперграфа. Покрасим вершины всего гиперграфа \mathcal{H} : множества $U_1 \cup W_1$ и $U_2 \cup W_2$ — в цвета 1 и 2 соответственно. Рассмотрим любое гиперребро $e \in E(\mathcal{H})$. Если $e \subset V(\mathcal{H}) \setminus U$, то оно имеет две разноцветные вершины (так как пересекает и W_1 , и W_2 .) Если же $e \cap U \neq \emptyset$, то гиперребро e имеет по вершине из U_1 и U_2 . Таким образом, мы получили правильную раскраску \mathcal{H} в два цвета. Полученное противоречие показывает, что граф \mathcal{H}_U недвудолен. \square

Лемма 4.14. Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф, а функция $f : V(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, для любого гиперребра $e \in E(\mathcal{H})$ выполняется $\sum_{x \in e} f(x) = 0$. Тогда $f(x) = 0$ для всех $x \in V(\mathcal{H})$.

Доказательство. Пусть $U = \{x \in V(\mathcal{H}) : f(x) \neq 0\}$ непусто. Покрасим в цвет 1 вершины U , на которых значение f положительно, а в цвет 2 — на которых значение f отрицательно. Пусть гиперребро $e \in E(\mathcal{H})$ пересекает U . Поскольку сумма значений f на вершинах любого гиперребра равна 0, то в $e \cap U$ есть вершины обоих цветов. Следовательно, граф \mathcal{H}_U двудолен, противоречие с леммой 4.13. \square

Теорема 4.14. (P. D. Seymour, 1974.) Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф, а $U \subset V(\mathcal{H})$. Тогда U пересекает не менее, чем $|U|$ гиперребер из $E(\mathcal{H})$. Равенство возможно лишь при $U = \emptyset$ или $U = V(\mathcal{H})$.

Доказательство. Случай $U = \emptyset$ очевиден.

1. Пусть $U = V(\mathcal{H})$. Предположим, что утверждение неверно. Тогда $e(\mathcal{H}) < v(\mathcal{H})$. Поставим в соответствие каждой вершине из $V(\mathcal{H})$ по вещественной переменной, а для каждого гиперребра из $E(\mathcal{H})$ напомним уравнение: приравняем нулю сумму переменных, соответствующих его вершинам. Мы получили однородную систему линейных уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных. Как известно, она имеет решение, в котором не все переменные равны нулю. Таким образом, существует функция, запрещенная леммой 4.14.

2. Пусть U — собственное подмножество $V(\mathcal{H})$. Предположим, что U пересекает не более $|U|$ гиперребер. Рассмотрим два случая.

2.1. Любое гиперребро из $E(\mathcal{H})$ содержится в U или $V(\mathcal{H}) \setminus U$.

В этом случае $E(\mathcal{H})$ есть дизъюнктивное объединение множеств гиперребер двух двудольных гиперграфов $\mathcal{H}(U)$ (пусть X_1 и X_2 — множества его вершин цветов 1 и 2) и $\mathcal{H}(V(\mathcal{H}) \setminus U)$ (пусть Y_1 и Y_2 — множества его вершин цветов 1 и 2). Покрасим $X_1 \cup Y_1$ в цвет 1, а $X_2 \cup Y_2$ — в цвет 2 и получим правильную раскраску вершин \mathcal{H} в два цвета, противоречие.

2.2. Существует гиперребро $e \in E(\mathcal{H})$, пересекающее U , но не содержащееся в U .

Пусть F — множество отличных от e гиперребер, пересекающих U . Тогда $|F| < |U|$ и аналогично доказанному выше мы можем построить такую функцию $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, что $\sum_{x \in f \cap U} g(x) = 0$ для любого гиперребра $f \in F$ и не все значения f — нули. Положим $g(y) = 0$ для всех $y \in V(\mathcal{H}) \setminus U$. Тогда $\sum_{x \in f} g(x) = 0$ выполнено для всех $f \in E(\mathcal{H})$, $f \neq e$. Из леммы 4.14 понятно, что такая сумма для гиперребра e не равна 0. Не умаляя общности будем считать, что $\sum_{x \in e} g(x) > 0$. Пусть

$$W = \{x \in V(\mathcal{H}) : g(x) > 0\}, \quad Y = \{x \in V(\mathcal{H}) : g(x) = 0\}.$$

Тогда $Y \neq V(\mathcal{H})$, следовательно, гиперграф $\mathcal{H}(Y)$ двудолен, пусть Y_1 и Y_2 — множества его вершин цветов 1 и 2 соответственно в правильной раскраске. Тогда множество вершин $W \cup Y_1$ пересекает все гиперребра из $E(\mathcal{H})$: для гиперребер, содержащихся в Y , это очевидно, а остальные должны содержать вершину, в которой функция g положительна.

Тогда по лемме 4.12 существует гиперребро $f \in E(\mathcal{H})$, содержащееся в $W \cup Y_1$. Однако, по построению $f \not\subset Y_1$, следовательно, f пересекает W ,

откуда следует, что $\sum_{x \in f} g(x) > 0$. Таким образом, $f = e$, откуда можно сделать вывод $e \subset W \cup Y_1$. Аналогично можно доказать, что $e \subset W \cup Y_2$. Таким образом, $e \subset W \subset U$, противоречие с выбором e . \square

Отметим прямое следствие теоремы 4.14.

Следствие 4.4. Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф. Тогда $e(\mathcal{H}) \geq v(\mathcal{H})$.

Следующий критерий раскрашиваемости вершин гиперграфа в два цвета допускает короткое прямое доказательство, которое мы оставим любознательному читателю в качестве задачи.

Следствие 4.5. Пусть \mathcal{H} — такой гиперграф, что любое множество $U \subset V(\mathcal{H})$ содержит менее $|U|$ гиперрёбер из $E(\mathcal{H})$. Тогда \mathcal{H} — двудольный.

Доказательство. Пусть \mathcal{H} — недвудольный. Тогда он содержит минимальный недвудольный подграф \mathcal{G} . Но из условия следует, что $e(\mathcal{G}) < v(\mathcal{G})$, противоречие со следствием 4.4.

Нетрудно понять, что таковым будет один из индуцированных подграфов $\mathcal{H}(U)$. Но в нем менее $|U|$ рёбер, что противоречит теореме 4.14. \square

Вернемся к изучению минимальных недвудольных гиперграфов. Следующая наша цель — описать все минимальные недвудольные гиперграфы, содержащие столько же гиперрёбер, сколько вершин.

Лемма 4.15. 1) Пусть \mathcal{H} — гиперграф с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$, причем любое множество $U \subset V(\mathcal{H})$ пересекает не менее $|U|$ гиперрёбер \mathcal{H} . Тогда существует такая биекция $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$, что $x \in \varphi(x)$ для любой вершины x .

2) Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. Тогда существует такая биекция $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$, что $x \in \varphi(x)$ для любой вершины x .

Доказательство. 1) Построим двудольный граф, вершины одной доли которого соответствуют $V(\mathcal{H})$, а вершины другой доли — $E(\mathcal{H})$, причем $x \in V(\mathcal{H})$ и $e \in E(\mathcal{H})$ смежны тогда и только тогда, когда $x \in e$. Из условия и теоремы Холла (теорема 2.2) следует, что в этом графе существует совершенное паросочетание M . Для каждой вершины $x \in V(\mathcal{H})$ пусть $\varphi(x)$ — гиперребро, соединенное в M с x . Тогда $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$ — искомая биекция.

2) Прямое следствие теоремы 4.14 и пункта 1. \square

Лемма 4.16. Пусть гиперграф \mathcal{H} недвудолен, $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$ и любое непустое множество $U \subsetneq V(\mathcal{H})$ пересекает более $|U|$ гиперрёбер \mathcal{H} . Тогда \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф.

Доказательство. Гиперграф \mathcal{H} имеет минимальный недвудольный подгиперграф \mathcal{G} . По следствию 4.4 мы имеем $e(\mathcal{G}) \geq v(\mathcal{G})$. Тогда множество $V(\mathcal{H}) \setminus V(\mathcal{G})$ пересекает не более, чем

$$e(\mathcal{H}) - e(\mathcal{G}) \leq v(\mathcal{H}) - v(\mathcal{G}) = |V(\mathcal{H}) \setminus V(\mathcal{G})|$$

рёбер, откуда в силу условия леммы и $V(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ следует, что $V(\mathcal{H}) = V(\mathcal{G})$. Теперь из $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$ и следствия 4.4 понятно, что $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. Тем самым мы завершили доказательство леммы. \square

Определение 4.17. Цикл C в гиперграфе \mathcal{H} — это последовательность различных вершин $x_1 \dots x_k$, где для каждого $i \in [1..k]$ существует такое $e_i \in E(\mathcal{H})$, что $e_i \ni x_i, x_{i+1}$ и все эти гиперрёбра различны. (Мы считаем, что $x_{k+1} = x_1$.) При этом, $V(C) = \{x_1, \dots, x_k\}$ и $E(C) = \{e_1, \dots, e_k\}$

Лемма 4.17. (P. D. Seymour, 1974.) Гиперграф \mathcal{H} с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$ является минимальным недвудольным тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения.

1° Любое множество $U \subsetneq V(\mathcal{H})$ пересекает более $|U|$ гиперрёбер \mathcal{H} .

2° Если C — четный цикл в \mathcal{H} , то не существует такой биекции $\varphi : V(\mathcal{H}) \setminus V(C) \rightarrow E(\mathcal{H}) \setminus E(C)$, что $\varphi(x) \ni x$ для всех $x \in V(\mathcal{H}) \setminus V(C)$.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф. Тогда условие 1° следует из теоремы 4.14. Проверим условие 2°. Предположим, что оно не выполняется и такой четный цикл C и биекция φ существуют. Пусть $C = x_1 x_2 \dots x_{2k}$, причем $x_i, x_{i+1} \in e_i \in E(\mathcal{H})$. Определим функцию φ на $V(C)$ следующим образом: $\varphi(x_i) = e_i$. Теперь φ — биекция между $V(\mathcal{H})$ и $E(\mathcal{H})$.

Для каждого $U \subset V(\mathcal{H})$ обозначим через $\mathcal{H}^\varphi(U)$ подгиперграф на вершинах множества U с множеством гиперрёбер

$$E(\mathcal{H}^\varphi(U)) = \{U \cap \varphi(x) : x \in U\}.$$

Очевидно, гиперграф $\mathcal{H}^\varphi(V(C))$ двудолен (вершины цикла C с нечетными номерами красим в первый цвет, а с четными — во второй). А $\mathcal{H}^\varphi(V(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$, этот граф недвудолен. Выберем максимальное множество $Y \subset V(\mathcal{H})$ такое, что граф $\mathcal{H}^\varphi(Y)$ двудолен. Пусть Y_1 и Y_2 — множества вершин цветов 1 и 2 соответственно в правильной раскраске вершин этого графа.

Понятно, что $\emptyset \neq Y \subsetneq V(\mathcal{H})$. По теореме 4.14 множество Y пересекает хотя бы $|Y| + 1$ гиперребро из $E(\mathcal{H})$. Поэтому существует вершина $x \in V(\mathcal{H}) \setminus Y$, для которой $Y \cap \varphi(x) \ni y$. Будем считать, что $y \in Y_1$. Но тогда покрасим x в цвет 2 и получим правильную раскраску вершин графа $\mathcal{H}^\varphi(Y \cup \{x\})$, что противоречит выбору множества Y . Таким образом, условие 2° должно выполняться.

\Leftarrow . Пусть \mathcal{H} — гиперграф, удовлетворяющий условиям 1° и 2° . Предположим, что \mathcal{H} двудолен. По пункту 1 леммы 4.15 существует такая биекция $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$, что $x \in \varphi(x)$ для любой вершины x .

Пусть $x_1 \in V(\mathcal{H})$ — произвольная вершина. Далее, для каждой вершины x_i выберем следующую вершину $x_{i+1} \in \varphi(x_i)$ так, чтобы цвета вершин x_i и x_{i+1} различались. Из конечности гиперграфа следует, что вершины в этой последовательности в некоторый момент повторяются, пусть $x_{m+1} = x_k$. Тогда получится цикл $C = x_k \dots x_m$ (так как $x_i, x_{i+1} \in \varphi(x_i)$.) Из чередования цветов понятно, что этот цикл четен. Тогда сужение φ на $V(\mathcal{H}) \setminus V(C)$ дает биекцию, запрещенную условием 2° , противоречие.

Значит, гиперграф \mathcal{H} недвудолен. Тогда по лемме 4.16 этот гиперграф — минимальный недвудольный. Тем самым мы завершили доказательство леммы. \square

Определение 4.18. Пусть D — орграф. Для каждой вершины $x \in V(D)$ пусть $e_x = \{x\} \cup \{y \in V(D) : xy \in A(D)\}$. Определим гиперграф \mathcal{G}_D : пусть $V(\mathcal{G}_D) = V(D)$ и $E(\mathcal{G}_D) = \{e_x : x \in V(D)\}$.

Теорема 4.15. (P. D. Seymour, 1974.) Минимальные недвудольные гиперграфы, имеющие поровну вершин и гиперрёбра — это гиперграфы вида \mathcal{G}_D , где D — сильно связный орграф без четных циклов, и только они.

Доказательство. 1. Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. По лемме 4.15 существует такая биекция $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$, что $x \in \varphi(x)$ для любой вершины x . Построим гиперграф D на множестве вершин $V(\mathcal{H})$ с $A(D) = \{xy : y \in \varphi(x)\}$. Тогда нетрудно понять, что $e_x = \{x\} \cup \varphi(x)$ и $\mathcal{H} = \mathcal{G}_D$. Из леммы 4.17 следует, что орграф D не имеет четных циклов (иначе \mathcal{H} не удовлетворяет условию 2° этой леммы).

Остается показать, что D сильно связан. Предположим противное, тогда существует разбиение $V(D) = V(\mathcal{H})$ на два таких непустых множества W и U , что нет стрелок из U в W . Следовательно, для любой вершины $x \in U$ мы имеем $\varphi(x) \cap W = \emptyset$. Следовательно, подмножество $W \subsetneq V(\mathcal{H})$ может пересекать только гиперрёбра $\varphi(y)$ для $y \in W$, а их не более $|W|$. Противоречие с теоремой 4.14.

2. Пусть D — сильно связный орграф без четных циклов. Рассмотрим граф \mathcal{G}_D . Если для некоторых двух вершин $x, y \in D$ мы имеем $e_x = e_y$, то $xy, yx \in A(D)$, а эти два ребра образуют четный цикл, которых нет в D , противоречие. Следовательно, $e(\mathcal{G}_D) = v(\mathcal{G}_D)$.

Предположим, что граф \mathcal{G}_D двудолен. Пусть $x_1 \in V(D)$ — произвольная вершина. Построим последовательность вершин: для каждой вершины x_i выберем следующую вершину $x_{i+1} \in e_{x_i}$ так, чтобы цвета вершин x_i и x_{i+1} различались. Из конечности гиперграфа следует, что вершины в этой последовательности в некоторый момент повторяются, пусть $x_{m+1} = x_k$. Тогда получится цикл $C = x_k \dots x_m$ в орграфе D (так как $x_i x_{i+1} \in A(D)$.) Из чередования цветов понятно, что этот цикл четен, противоречие.

Пусть $U \subsetneq V(D)$ пересекает не более $|U|$ гиперребер \mathcal{G}_D — тогда это гиперребра e_x для $x \in U$. Следовательно, для любого $x \in V(D) \setminus U$ мы имеем $e_x \cap U = \emptyset$, то есть, нет рёбер орграфа D из $V(D) \setminus U$ в U , что противоречит сильной связности орграфа D . Следовательно, U пересекает более $|U|$ гиперребер \mathcal{G}_D и по лемме 4.16 граф \mathcal{G}_D — минимальный недвудольный. \square

Из первой части доказательства теоремы 4.15 непосредственно следует интересный факт.

Следствие 4.6. Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф, а $\varphi : V(\mathcal{H}) \rightarrow E(\mathcal{H})$ — такая биекция, что $x \in \varphi(x)$ для любой вершины x . Построим орграф D на вершинах $V(\mathcal{H})$ с $A(D) = \{xy : y \in \varphi(x)\}$. Тогда D — сильно связный гиперграф без четных циклов.

Определение 4.19. Пусть \mathcal{H} — гиперграф. Определим двойственный гиперграф \mathcal{H}^* : пусть $V(\mathcal{H}^*) = E(\mathcal{H})$, а

$$E(\mathcal{H}^*) = \{\{e \in E(\mathcal{H}) : e \ni x\} : x \in V(\mathcal{H})\}.$$

Вершины двойственного гиперграфа \mathcal{H}^* соответствуют рёбрам гиперграфа \mathcal{H} , а рёбра — вершинам. В любом случае $v(\mathcal{H}^*) = e(\mathcal{H})$.

Замечание 4.10. Если в гиперграфе \mathcal{H} нет двух вершин, входящих в одинаковый набор гиперрёбер, то выполняются следующие утверждения.

1) $e(\mathcal{H}^*) = v(\mathcal{H})$ и $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$. Далее мы в таком случае будем отождествлять каждое ребро \mathcal{H}^* с соответствующей вершиной гиперграфа \mathcal{H} .

2) Пусть $C = x_1 \dots x_k$ — цикл в гиперграфе \mathcal{H} , $E(C) = \{e_1, \dots, e_k\}$ ($x_i, x_{i+1} \in e_i$). Тогда $C^* = e_1 \dots e_k$ — цикл в гиперграфе \mathcal{H}^* , причём $V(C^*) = E(C)$ и $E(C^*) = \{x_1, \dots, x_k\} = V(C)$. Верно и обратное утверждение. Эти циклы мы будем называть *двойственными* друг другу.

Теорема 4.16. (P. D. Seymour, 1974.) Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. Тогда \mathcal{H}^* — минимальный недвудольный гиперграф.

Доказательство. Пусть $x, y \in V(\mathcal{H})$. Тогда существует гиперребро, содержащее ровно одну из этих вершин, иначе гиперграф $\mathcal{H}_{\{x,y\}}$ двудольен, что противоречит лемме 4.13. Значит, по замечанию 4.10 мы имеем $v(\mathcal{H}^*) = e(\mathcal{H}^*)$. Проверим выполнение условий 1° и 2° из леммы 4.17 для \mathcal{H}^* .

Начнем с условия 1°. Пусть $F \subsetneq V(\mathcal{H}^*) = E(\mathcal{H})$, а $U \subset V(\mathcal{H})$ — объединение этих гиперрёбер. Тогда U — это как раз множество гиперрёбер из $E(\mathcal{H}^*)$, содержащих вершины множества $F \subset E(\mathcal{H}^*)$. Значит, нам нужно доказать, что $|U| \geq |F|$. Заметим, что $E(\mathcal{H}) \setminus F$ содержит все рёбра, пересекающие $V(\mathcal{H}) \setminus U$, а значит, по теореме 4.14 мы имеем $e(\mathcal{H}) - |F| \geq v(\mathcal{H}) - |U|$, что равносильно $|U| \geq |F|$.

Перейдём к условию 2°. Как следует из замечания 4.10, циклы графов G и G^* двойственны друг другу. Рассмотрим пару двойственных циклов C и C^* . Пусть C^* четен и существует описанная в условии 2° биекция, которую можно представить как $\psi : E(\mathcal{H}) \setminus E(C) \rightarrow V(\mathcal{H}) \setminus V(C)$, удовлетворяющая условию $e \ni \psi(e)$ для любого $e \in E(\mathcal{H}) \setminus E(C)$. Тогда четный цикл C в \mathcal{H} вместе с биекцией ψ^{-1} противоречат условию 2° для гиперграфа \mathcal{H} и, тем самым, лемме 4.17. Значит, условие 2° выполняется и для графа \mathcal{H}^* .

Теперь из леммы 4.17 следует, что \mathcal{H}^* — минимальный недвусвязный граф. \square

Напоследок отметим еще одно интересное свойство минимальных недвудольных гиперграфов.

Теорема 4.17. (P. D. Seymour, 1974.) Пусть \mathcal{H} — минимальный недвудольный гиперграф, $e \in E(\mathcal{H})$, $x \in V(\mathcal{H})$, причем $x \in e$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Существует такое гиперребро $f \in E(\mathcal{H})$, что $e \cap f = \{x\}$.
- 2) Пусть $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. Тогда существует такая вершина $y \in A$, что нет отличного от e гиперребра из $E(\mathcal{H})$, содержащего x и y .

Доказательство. 1) Гиперграф $\mathcal{H} - e$ двудольен, пусть V_1 и V_2 — вершины цветов 1 и 2 соответственно в его правильной раскраске. Гиперребро e в этой раскраске должно быть одноцветно, пусть все его вершины имеют цвет 1 (то есть, $V_2 \cap e = \emptyset$). Тогда $V_2 \cup \{x\}$ пересекает все гиперрёбра из $E(\mathcal{H})$. Значит, по лемме 4.12 множество $V_2 \cup \{x\}$ содержит некоторое гиперребро $f \in E(\mathcal{H})$. Тогда $e \cap f = \{x\}$.

2) По теореме 4.16, гиперграф \mathcal{H}^* также является минимальным недвудольным. Применим пункт 1 к его вершине e и ребру x и получим доказываемое утверждение. \square

Продолжение темы о минимальных недвудольных гиперграфах можно найти в разделе 8.8.6.

Глава 5

СВЯЗНОСТЬ

Добавим подробностей в определение, данное во введении.

Определение 5.1. 1) Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y . Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ *связностью* вершин x и y .

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y . Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

Замечание 5.1. 1) Во всем разделе мы будем для $x \in V(G)$ отождествлять обозначения x и $\{x\}$. Соответственно, все данные для множеств определения переносятся и на вершины графа G (как одновершинные множества).

2) Нетрудно понять, что вершинная связность удовлетворяет соотношению $\kappa(G) = \min_{x, y \in V(G)} \kappa_G(x, y)$.

5.1 Теорема Менгера

Это, безусловно, самое знаменитое утверждение о связности графов. Мы докажем теорему Менгера и некоторые родственные ей факты.

Определение 5.2. Пусть $X, Y \subset V(G)$. Назовем XY -*путем* любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y , внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y .

Отметим, что если $u \in X \cap Y$, то мы считаем вершину u XY -путем.

Теорема 5.1. (F. Göring, 2000.) Пусть $X, Y \subset V(G)$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$ и любое множество $R \subset V(G)$, отделяющее X от Y , содержит хотя бы k вершин. Тогда существуют k непересекающихся XY -путей.

Доказательство. Индукция по количеству вершин в графе. Доказывая утверждение для графа G и пары множеств X, Y мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов. Рассмотрим два случая.

1. Существует множество R из k вершин, разделяющее X и Y . Тогда $X \setminus R \neq \emptyset$ и $Y \setminus R \neq \emptyset$. Отметим, что никакой XR -путь не содержит вершины из $Y \setminus R$ (иначе существовал бы XY -путь, не содержащий ни одной вершины множества R , см. рисунок 5.1a). Следовательно, любое множество S , отделяющее X от R в графе $G_x = G - (Y \setminus R)$, отделяет X от R и в графе G . Но тогда S отделяет X от Y в графе G , следовательно, $|S| \geq k$.

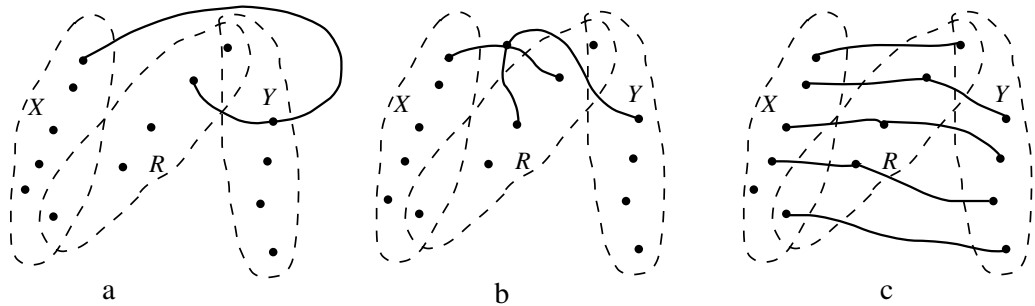


Рис. 5.1: XR , RY и XY -пути.

Таким образом, по индукционному предположению, существует k непересекающихся XR -путей в графе G_y , а следовательно, и в графе G . Аналогично, существует k непересекающихся RY -путей в графе G . Отметим, что никакой XR -путь не пересекает никакой RY -путь (иначе существовал бы XY -путь, не содержащий ни одной вершины множества R , см. рисунок 5.1b). Так как $|R| = k$, то мы можем состыковать XR -пути и RY -пути по вершинам множества R , получив k непересекающихся XY -путей (см. рисунок 5.1c).

2. Нет множества из k вершин, разделяющего X и Y . Случай, когда в графе G нет рёбер, очевиден. Пусть $E(G) \neq \emptyset$. Тогда удалим из графа произвольное ребро xy . Если условие теоремы выполняется в меньшем графе $G - xy$, то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для графа $G - xy$, а следовательно, и для графа G .

Остается рассмотреть случай, когда существует множество $T \subset V(G)$, $|T| \leq k - 1$, разделяющее X и Y в графе $G - xy$. Пусть $X' = X \setminus T$, $Y' = Y \setminus T$, эти множества, очевидно, непусты. Как мы знаем, $T^* = T \cup \{xy\}$ разделяет X и Y в графе G , а $T_x = T \cup \{x\}$ — не разделяет (так как $|T_x| \leq k$). Отсюда следует, что одно из множеств X' и Y' лежит в T_x .

Тогда не умаляя общности можно считать, что $X' = \{x\}$. Аналогично, $Y' = \{y\}$.

Таким образом, $T \supset X \setminus \{x\}$ и $T \supset Y \setminus \{y\}$. Учитывая $|T| \leq k - 1$, $|X| \geq k$ и $|Y| \geq k$, мы получаем

$$X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T \quad \text{и} \quad |T| = k - 1.$$

В этом случае легко увидеть искомые пути — это ребро xy и $k-1$ вершина из $T = X \cap Y$. \square

Следствие 5.1. (К. Menger, 1927.) 1) Пусть вершины $x, y \in V(G)$ несмежны, $\kappa_G(x, y) \geq k$. Тогда существует k путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.

2) Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. Тогда существует k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y .

Доказательство. 1) Так как x и y несмежны, из $\kappa_G(x, y) \geq k$ следует, что $|N_G(x)| \geq k$, $|N_G(y)| \geq k$ и любой простой xy -путь идёт из x в $x_1 \in N_G(x)$, далее в $y_1 \in N_G(y)$ и затем в y (возможно, вершины x_1 и y_1 совпадают). Тогда любое множество вершин R , отделяющее $N_G(x)$ от $N_G(y)$, отделяет вершину x от вершины y . Следовательно, $|R| \geq k$. Тогда по теореме 5.1 существует k непересекающихся $N_G(x)N_G(y)$ -путей. Теперь легко найти и k непересекающихся по внутренним вершинам xy -путей.

2) Очевидно, $|N_G(x)| \geq k$. Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R , отделяющее $N_G(x)$ от Y , отделяет вершину x от множества Y . Следовательно, $|R| \geq k$. Так как и $|Y| \geq k$, по теореме 5.1 существует k непересекающихся $N_G(x)Y$ -путей в графе G , а следовательно, и k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y . \square

Теорема 5.2. (Н. Whitney, 1932) Пусть G — k -связный граф, $x, y \in V(G)$. Тогда существует k различных путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство. Индукция по k , база для $k = 1$ очевидна. Докажем утверждения для k -связного графа, считая, что оно доказано для графов меньшей связности.

Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из следствия 5.1. Пусть вершины x и y смежны. Если $\kappa(G - xy) \geq k - 1$, то все в порядке — по индукционному предположению существует $k - 1$ непересекающихся по внутренним вершинам xy -путей в графе $G - xy$, а еще один путь — это ребро xy .

Пусть в $G - xy$ существует разделяющее множество T , $|T| \leq k - 2$. Так как T не является разделяющим множеством в G , легко понять, что в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$. Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G , что невозможно (так как $|T_x| \leq k - 1$). Тогда $U_x = \{x\}$. Аналогично, $U_y = \{y\}$. Таким образом, в графе G не более k вершин: это вершины множества T , x и y . Противоречие с определением k -связного графа. \square

Удивительно, но аналогичное утверждение о рёберной связности, которое носит название “рёберная теорема Менгера”, было доказано лишь в 1956 году как следствие теоремы Форда-Фалкерсона. Мы повторим этот путь и докажем рёберную теорему Менгера в главе **Сети и потоки**.

Теорема 5.3. (G. A. Dirac.) Пусть $k \geq 2$. В k -связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по k . База для $k = 2$ — это тривиальное следствие теоремы Уитни (5.2).

Пусть $k > 2$. Рассмотрим k -связный граф G и его вершины v_1, \dots, v_{k-1}, v_k . Так как G является $(k - 1)$ -связным графом, по индукционному предположению существует простой цикл Z , содержащий вершины v_1, \dots, v_{k-1} . По пункту 2 следствия 5.1 существует $s = \min(v(Z), k)$ путей от v_k до цикла Z . Рассмотрим два случая.

1. $v(Z) < k$.

Тогда $V(Z) = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ и существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин цикла Z . В этом случае легко вставить v_k в цикл Z между его соседними вершинами и получить искомый цикл.

2. $v(Z) \geq k$.

Тогда существует k непересекающихся путей от v_k до цикла Z . Пусть $x_1, \dots, x_k \in V(Z)$ — концы этих путей в порядке их следования по циклу (нумерация — циклическая по модулю k). Они делят цикл на k дуг и внутренность одной из этих дуг (пусть это дуга L с концами x_i и x_{i+1}) не содержит ни одной из вершин v_1, \dots, v_{k-1} . Тогда заменим дугу L на путь от x_i до V_k и путь от v_k до x_{i+1} , в результате получится искомый цикл. \square

5.2 Разделяющие множества в k -связном графе

В этом разделе граф G всегда будет k -связным, мы не будем об этом дополнительно упоминать в определениях и формулировках результатов.

5.2.1 Части разбиения, граница и внутренность

Мы обобщим на набор из нескольких разделяющих множеств понятие части разбиения, определенное во введении.

Определение 5.3. Пусть \mathfrak{S} — набор из нескольких разделяющих множеств графа G (которые могут содержать как вершины, так и ребра графа G).

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью \mathfrak{S} -разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из \mathfrak{S} , но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора \mathfrak{S} .

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств \mathfrak{S} мы будем обозначать через $\text{Part}(\mathfrak{S})$. В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора \mathfrak{S} . Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\text{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из \mathfrak{S} мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\text{Bound}(A)$.

Замечание 5.2. Отметим, что внутренняя вершина части $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ может быть концом ребра, входящего в множество $S \in \mathfrak{S}$.

Теорема 5.4. Пусть \mathfrak{S} — набор разделяющих множеств в графе G , $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, а граф G' получен из G удалением всех входящих в множества набора \mathfrak{S} рёбер. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Вершина $x \in \text{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$ в графе G' .

2) Если $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$ в графе G' .

Доказательство. 1) Пусть вершина $x \in \text{Int}(A)$ смежна с вершиной $y \in V(G) \setminus A$. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее y от $\text{Int}(A)$. Тогда $x, y \notin S$, причем вершины x и y смежны. Следовательно, $xy \in S$.

Таким образом, любое ребро, соединяющее $\text{Int}(A)$ с $V(G) \setminus A$, принадлежит одному из множеств набора \mathfrak{S} , откуда немедленно следует доказываемое утверждение.

2) Утверждение пункта 2 непосредственно следует из пункта 1. \square

Следствие 5.2. Пусть \mathfrak{S} — набор разделяющих множеств в графе G , содержащих только вершины, $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, $\text{Int}(A) \neq \emptyset$. Тогда $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$ в графе G .

Разделяющее множество $S \subset V(G)$ в k -связном графе G должно содержать не менее, чем k вершин. Мы обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество всех k -вершинных разделяющих множеств графа G и будем изучать свойства множеств из $\mathfrak{R}_k(G)$.

Замечание 5.3. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(S)$. Тогда $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, а индуцированный подграф $G(\text{Int}(A))$ связан.

Однако, если $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, то возможно, что $\text{Int}(B) = \emptyset$. Кроме того, при $\text{Int}(B) \neq \emptyset$ индуцированный подграф $G(\text{Int}(B))$ не обязательно связан.

Одно и то же множество вершин A может быть частью разбиения графа G различными наборами k -вершинных разделяющих множеств. Мы покажем, что границу и внутренность части A можно определить независимо от набора множеств. Тем самым, понятие *части разбиения* приобретет самостоятельный смысл.

Лемма 5.1. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(S)$, $x \in S$. Тогда существует вершина $y \in \text{Int}(A)$, смежная с x .

Доказательство. Предположим противное, пусть x не смежна ни с одной из вершин множества $\text{Int}(A)$. Тогда множество $S' = S \setminus \{x\}$ отделяет непустое множество вершин $\text{Int}(A)$ от непустого множества вершин $V(G) \setminus A$ (последнее непусто, так как является объединением всех отличных от $\text{Int}(A)$ компонент связности графа $G - S$). Таким образом, граф $G - S'$ несвязен, и при этом $|S'| = k - 1$, что противоречит k -связности графа G . \square

Теорема 5.5. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\text{Bound}(A)$ есть множество всех вершин части A , смежных хотя бы с одной вершиной из $V(G) \setminus A$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Bound}(A)$. Существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $x \in S$. Множество вершин S не разделяет A , следовательно, A может пересекать внутренность не более, чем одной части $\text{Part}(S)$.

Тогда существует такая часть $B \in \text{Part}(S)$, что $\text{Int}(B) \cap A = \emptyset$. По лемме 5.1 существует вершина $y \in \text{Int}(B)$, смежная с x .

По следствию 5.2 ни одна из вершин множества $\text{Int}(A)$ не может быть смежна с вершиной из $V(G) \setminus A$. \square

Задача 5.1. В n -связном графе G выбраны множества вершин $S_1, S_2, S_3 \in \mathfrak{R}_n(G)$. Известно, что $|\text{Part}(S_1)| = |\text{Part}(S_2)| = |\text{Part}(S_3)| = 2$. Докажите, что в $\text{Part}(\{S_1, S_2, S_3\})$ не более 6 частей с непустой внутренностью.

Определение 5.4. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, а H — компонента связности графа $G - S$. Мы будем называть H *фрагментом*. Множество S будем называть *границей* фрагмента H и обозначать через $\text{Bound}(H)$.

Итак, пусть H_1, \dots, H_m — все компоненты связности графа $G - S$. Нетрудно понять, что тогда

$$\text{Part}(S) = \{H_1 \cup S, \dots, H_m \cup S\}, \quad \text{Int}(H_i \cup S) = H_i, \quad \text{Bound}(H_i \cup S) = S.$$

Таким образом, фрагменты — это внутренности частей разбиения графа G одним k -вершинным разделяющим множеством.

Покажем, что понятия фрагмента и его границы имеют самостоятельный смысл.

Лемма 5.2. Пусть H — фрагмент в k -связном графе G . Тогда $\text{Bound}(H) = N_G(H)$.

Доказательство. Пусть $\text{Bound}(H) = S$. Тогда $H = \text{Int}(A)$ для некоторой части $A \in \text{Part}(S)$. По лемме 5.1, каждая вершина множества S смежна хотя бы с одной вершиной из H , то есть, $S \subset N_G(H)$. Так как $S = \text{Bound}(A)$ отделяет $H = \text{Int}(A)$ от $V(G \setminus A)$, мы очевидно имеем, что $S = N_G(A)$. \square

Следующая лемма покажет, что $\text{Part}(\mathfrak{S})$ — действительно разбиение графа на части.

Лемма 5.3. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$, а $A, B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ — две различные части с непустым пересечением. Тогда существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $A \cap B \subset S$.

Доказательство. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее A от B . Легко понять, что $A \cap B \subset S$. \square

Теорема 5.6. Пусть наборы $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}(G)$ попарно не пересекаются, $\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{S}_i$. Рассмотрим все множества вершин вида

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad (5.1)$$

где $A_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$. Выполняются следующие утверждения.

- 1) Любая часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ представляется в виде (5.1).
- 2) Из всех множеств вершин графа G , представимых в виде (5.1), частями $\text{Part}(\mathfrak{S})$ являются те и только те, которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.
- 3) Если множество вершин A представимо в виде (5.1) и $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$, то A является подмножеством одного из множеств набора \mathfrak{S} .

Доказательство. 1) Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ни одно из множеств набора \mathfrak{S}_i не разделяет A , следовательно, существует часть $A_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$, содержащая A . Пусть $A' = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Включение $A \subset A'$ очевидно.

Понятно, что никакое множество набора \mathfrak{S} не разделяет A' , следовательно, существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, что $A' \subset B$. Таким образом, $A \subset A' \subset B$, откуда следует, что $A = A' = B$.

2) Пусть множество $A \subset V(G)$, представимое в виде (5.1) — максимальное по включению среди множеств такого вида. Тогда A невозможно разделить никаким множеством из набора \mathfrak{S} . Если $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$, то существует часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, $B \supsetneq A$ и из пункта 1 следует противоречие с максимальнойностью A .

Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим представление A в виде (5.1) и предположим, что A — не максимальное по включению среди множеств такого вида. Пусть $A \subset B$, и для B существует представление вида (5.1). Тогда B невозможно разделить никаким множеством из набора \mathfrak{S} , следовательно, A не является частью $\text{Part}(\mathfrak{S})$.

3) Пусть $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ (где $A_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$), причем $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \supsetneq A$. Рассмотрим представление $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$, где $B_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$. Так как $B \neq A$, то $A_j \neq B_j$ для какого-то j . Следовательно, $A \subset A_j \cap B_j$, а такое пересечение по лемме 5.3 обязательно является подмножеством одного из множеств набора \mathfrak{S}_j . \square

Лемма 5.4. Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$ не пересекаются, а часть $A \in P(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора \mathfrak{T} ее не разделяет. Тогда $A \in P(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.

Доказательство. Ни одно из множеств набора $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$ не разделяет A , поэтому существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$, что $A \subset B$. Кроме того, очевидно существует содержащая B часть $A' \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Таким образом, $A \subset B \subset A'$, откуда очевидно следует, что $A = B = A'$. \square

5.2.2 Зависимые и независимые разделяющие множества

Определение 5.5. Назовем множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S . В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geq 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k -связных графов при $k \geq 2$.

Лемма 5.5. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ и часть $A \in \text{Part}(S)$ таковы, что $T \cap \text{Int}(A) = \emptyset$. Тогда T не разделяет часть A и, следовательно, T не разделяет множество S .

Доказательство. Как мы уже отмечали, граф $G(\text{Int}(A))$ связан. Любая вершина $x \in S \setminus T$ смежна хотя бы с одной из вершин множества $\text{Int}(A)$ по лемме 5.1. Следовательно, граф $G(\text{Int}(A) \cup (S \setminus T))$ связан, откуда очевидно следует, что T не разделяет A и T не разделяет S . \square

Лемма 5.6. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что множество S не разделяет множество T . Тогда множество T не разделяет множество S (то есть, эти множества независимы).

Доказательство. Так как множество S не разделяет T , множество T может пересекать внутренность не более, чем одной из частей $\text{Part}(S)$. Тогда существует такая часть $A \in \text{Part}(S)$, что $\text{Int}(A) \cap T = \emptyset$. По лемме 5.5, множество T не разделяет S . \square

Итак, мы установили, что возможен один из двух случаев: либо множества S и T разделяют друг друга (тогда они зависимы), либо множества S и T не разделяют друг друга (тогда они независимы).

Лемма 5.7. 1) Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что T не пересекается со внутренней частью некоторой части $A \in \text{Part}(S)$. Тогда S и T независимы, причем T не разделяет часть A .

2) Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а часть $A \in \text{Part}(S)$ содержит T . Тогда в $\text{Part}(T)$ есть часть, содержащая все отличные от A части из $\text{Part}(S)$, а все остальные части $\text{Part}(T)$ являются подмножествами A .

Доказательство. 1) Так как индуцированный подграф графа G на множестве вершин $\text{Int}(A)$ связан, каждая вершина множества $S = \text{Bound}(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A)$ и $T \cap \text{Int}(A) = \emptyset$, то все вершины из $A \setminus T$ лежат в одной компоненте связности графа $G - T$, то есть T не разделяет A и, следовательно, не разделяет S . Это означает, что множества S и T независимы.

2) По пункту 1 множество S не разделяет никакой отличной от A части из $\text{Part}(T)$. Поскольку $T \setminus S \neq \emptyset$, все эти части содержатся в одной части из $\text{Part}(S)$. \square

Следствие 5.3. Пусть H — фрагмент графа G , $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, $T \cap H \neq \emptyset$, причем множество T независимо с границей фрагмента H . Тогда существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T .

Доказательство. Пусть $S = \text{Bound}(H)$, а часть $A \in \text{Part}(S)$ такова, что $H = \text{Int}(A)$. Из независимости S и T следует, что $T \subset A$. По части 2 леммы 5.7 существует часть $B \in \text{Part}(T)$, лежащая в A . Из теоремы 5.5 понятно, что $\text{Int}(B) = B \setminus T \subsetneq \text{Int}(A)$. \square

Изучим, как разбивает граф пара зависимых разделяющих множеств.

Лемма 5.8. Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы, $\text{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\text{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. $P = T \cap S$, $T_i = T \cap \text{Int}(A_i)$, $S_j = S \cap \text{Int}(B_j)$, $G_{i,j} = A_i \cap B_j$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Все множества T_1, \dots, T_m ; S_1, \dots, S_n непусты.
- 2) $\text{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in [1..m], j \in [1..n]}$, причем $\text{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$.

Доказательство. 1) В силу леммы 5.5 и зависимости множеств S и T , $T_i = T \cap \text{Int}(A_i) \neq \emptyset$ и $S_j = S \cap \text{Int}(B_j) \neq \emptyset$.

2) В силу теоремы 5.6, части $\text{Part}(\{S, T\})$ — это максимальные по включению среди множеств вида $G_{i,j}$, то есть, все такие множества: из пункта 1 следует, что $G_{\alpha,\beta} \not\subset G_{\gamma,\delta}$ при $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$. Утверждение $\text{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$ очевидно. \square

В следующей лемме мы используем обозначения из леммы 5.8.

Лемма 5.9. Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если $|\text{Bound}(G_{i,j})| \geq k$ и $|\text{Bound}(G_{x,y})| \geq k$, то

$$\begin{aligned} |\text{Bound}(G_{i,j})| &= |\text{Bound}(G_{x,y})| = k, & |\text{Part}(S)| &= |\text{Part}(T)| = 2, \\ |T_i| &= |S_y|, & |T_x| &= |S_j| \end{aligned}.$$

2) Если в $\text{Part}(\{S, T\})$ нет малых частей, то в границе каждой части $\text{Part}(\{S, T\})$ ровно k вершин,

$$|\text{Part}(S)| = |\text{Part}(T)| = 2 \quad \text{и} \quad |T_1| = |T_2| = |S_1| = |S_2|.$$

Доказательство. 1) Заметим, что

$$\begin{aligned} 2k &\leq |\text{Bound}(G_{i,j})| + |\text{Bound}(G_{x,y})| = \\ &2|P| + |T_i| + |T_x| + |S_j| + |S_y| \leq |S| + |T| = 2k. \end{aligned}$$

Значит, оба неравенства обращаются в равенства, откуда следует, что $T = T_i \cup T_x \cup P$, $S = S_j \cup S_y \cup P$ (а по лемме 5.8 это означает, что $|\text{Part}(S)| = |\text{Part}(T)| = 2$, см. рисунок 5.2a) и $|\text{Bound}(G_{i,j})| = |\text{Bound}(G_{x,y})| = k$. Из

$$|T_i| + |S_j| + |P| = |\text{Bound}(G_{i,j})| = k = |T| = |T_i| + |T_x| + |P|$$

следует, что $|S_j| = |T_x|$. Аналогично доказывается, что $|S_y| = |T_i|$.

2) Достаточно применить пункт 1 сначала к паре частей $G_{1,1}$ и $G_{2,2}$, а затем к паре частей $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$. \square

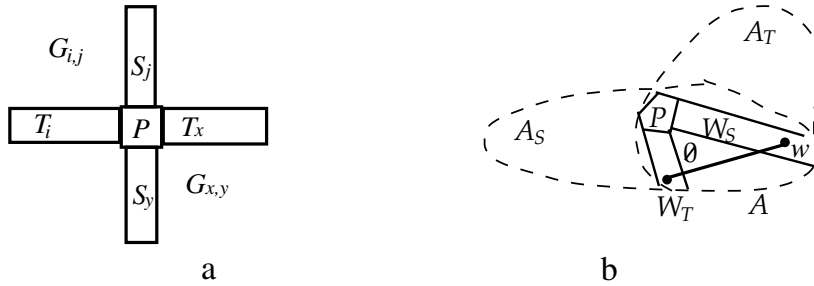


Рис. 5.2: Разбиение графа двумя зависимыми множествами.

Лемма 5.10. Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы, а часть $A \in \text{Part}(\{S, T\})$ пуста. Тогда существуют смежные вершины $w \in A \setminus T$ и $w' \in A \setminus S$, причем никакая отличная от A часть $\text{Part}(\{S, T\})$ не содержит $\{w, w'\}$.

Доказательство. По лемме 5.8 существует представление $A = A_S \cap A_T$, где $A_S \in \text{Part}(S)$ и $A_T \in \text{Part}(T)$, а $\text{Bound}(A) = P \cup W_S \cup W_T$, где

$$P = S \cap T, \quad W_S = S \cap \text{Int}(A_T) \subset S \setminus T \quad \text{и} \quad W_T = T \cap \text{Int}(A_S) \subset T \setminus S,$$

причем $W_S \neq \emptyset$ и $W_T \neq \emptyset$ (см. рисунок 5.2b).

Рассмотрим вершину $w \in W_S \subset S \setminus T$. Эта вершина должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A_S)$. Но W_S отделено множеством T от всех вершин из $\text{Int}(A_S)$, кроме вершин множества W_T . Таким образом, существует вершина $w' \in W_T$, смежная с w .

По лемме 5.8 существует только одна часть, содержащая одновременно вершину из W_S и вершину из W_T — это часть A . \square

5.3 Удаление вершины с сохранением k -связности

Очевидно, в любом связном графе H существует такая вершина v , что граф $H - v$ связан: достаточно в качестве v взять любую висячую вершину любого остовного дерева графа H . Для k -связного графа всё значительно сложнее: существуют k -связные графы, из которых невозможно удалить вершину с сохранением k -связности. Такие графы называются *критическими k -связными* графами. Простейшим примером критического двусвязного графа является простой цикл. Мы определим *нерасщепимые k -связные* графы и покажем, что из любого такого графа можно удалить вершину с сохранением k -связности.

Определение 5.6. Будем называть k -связный граф G *нерасщепимым*, если не существует множества $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ и фрагмента H таких, что $H \subset S$.

Сначала покажем, что нерасщепимые графы существуют.

Лемма 5.11. Пусть $\delta(G) \geq \frac{3k-1}{2}$. Тогда G — нерасщепимый.

Доказательство. Предположим противное, пусть у графа G существует фрагмент, лежащий в множестве из $\mathfrak{R}_k(G)$. Рассмотрим среди всех таких фрагментов минимальный фрагмент H . Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что $H \subset T$ и $S = \text{Bound}(H)$. Рассмотрим вершину $x \in H$. Она может быть смежна только с вершинами из $A = H \cup S$. Так как $d_G(x) \geq \frac{3k-1}{2}$ и $|S| = k$, мы имеем $|H| \geq \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{k+1}{2}$. Рассмотрим два случая.

1. Множества S и T независимы.

Тогда по следствию 5.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$, что противоречит минимальности H .

2. Множества S и T зависимы.

Пусть $\text{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\text{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. Будем считать $H = \text{Int}(A_1)$ и использовать обозначения из леммы 5.8. Тогда $T_1 =$

$\text{Int}(A_1)$, следовательно, $|T_1| \geq \frac{k+1}{2}$. Значит, для любого $i \in [2..m]$ мы имеем $|T_i| \leq \frac{k-1}{2}$. Не умаляя общности можно положить $|S_1| \geq |S_2|$, тогда $|S_2| \leq \frac{k}{2}$. Отметим, что

$$|T_1| + |S_1| + |P| + |T_i| + |S_2| + |P| \leq |T| + |S| = 2k,$$

следовательно, $|T_i| + |S_2| + |P| < k$.

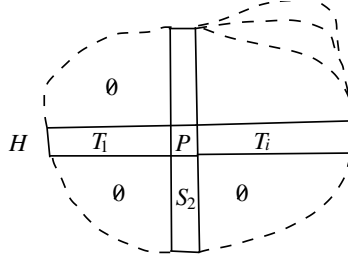


Рис. 5.3: Фрагменты H и H' .

Рассмотрим часть $G_{i,2} = A_i \cap B_2$. Предположим, что $\text{Int}(G_{i,2}) \neq \emptyset$, тогда по теореме 5.5 состоящее менее чем из k вершин множество $\text{Bound}(G_{i,2}) = T_i \cup S_2 \cup P$ отделяет от остальных вершин графа непустое множество $\text{Int}(G_{i,2})$, что противоречит k -связности графа G . Следовательно, $\text{Int}(G_{i,2}) = \emptyset$ для всех $i \in [2..m]$. Так как $A_1 \subset T$ а $G_{1,2} = A_1 \cap B_2$, то $\text{Int}(G_{1,2}) = \emptyset$. Поскольку $B_2 = \cup_{i \in [1..m]} G_{i,2}$, то $\text{Int}(B_2) = S_2 \subset S$. Таким образом, мы нашли фрагмент $H' = \text{Int}(B_2)$, лежащий в множестве $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, причем $|H'| \leq \frac{k}{2}$. Выше доказано, что при $\delta(G) \geq \frac{3k-1}{2}$ такое невозможно. \square

Условие нерасщепимости существенно упорядочивает структуру взаимного расположения k -вершинных разделяющих множеств в k -связном графе. В следующей лемме мы воспользуемся обозначениями из леммы 5.8.

Лемма 5.12. Пусть G — нерасщепимый k -связный граф, а множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Тогда каждое из них делит граф на две части, причем можно их занумеровать так, что $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\text{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$ и $|\text{Bound}(G_{1,2})| = |\text{Bound}(G_{2,1})| = k$.

Замечание 5.4. Отметим, что при такой нумерации $|T_1| = |S_1|$ и $|T_2| = |S_2|$.

Доказательство. Пусть $\text{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\text{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. Изобразим разбиение графа множествами S и T в виде таблицы $m \times n$,

где клетка с координатами (i, j) соответствует части $G_{i,j} = A_i \cap B_j$: мы запишем в этой клетке количество вершин в $\text{Int}(G_{i,j})$.

Предположим, что есть столбец (не умаляя общности, первый), в котором записаны только нули. Тогда

$$\text{Int}(A_1) = \bigcup_{j \in [1..n]} G_{1,j} \setminus S \subset T,$$

что противоречит нерасщепимости графа.

Таким образом, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один не ноль. Отсюда нетрудно сделать вывод, что существуют пары индексов (α, β) и (γ, δ) такие, что $\alpha \neq \gamma, \beta \neq \delta, \text{Int}(G_{\alpha,\beta}) \neq \emptyset$ и $\text{Int}(G_{\gamma,\delta}) \neq \emptyset$. Тогда $|\text{Bound}(G_{\alpha,\beta})| \geq k$ и $|\text{Bound}(G_{\gamma,\delta})| \geq k$. Теперь доказываемое утверждение следует из пункта 1 леммы 5.9, нужно лишь положить $\alpha = \delta = 1$ и $\beta = \gamma = 2$. \square

Теорема 5.7. Пусть G — нерасщепимый k -связный граф, H — минимальный по включению фрагмент графа G . Тогда для любой вершины $x \in H$ граф $G - x$ является k -связным.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$ такое, что $T \cap H \neq \emptyset$. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ и $A_1 \in \text{Part}(S)$ таковы, что $H = \text{Int}(A_1)$. Если S и T независимы, то по следствию 5.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$, что противоречит минимальности H . Таким образом, S и T зависимы. Тогда по лемме 5.12 можно считать, что

$$\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \text{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

$$|\text{Bound}(G_{1,2})| = |\text{Bound}(G_{2,1})| = k.$$

Если $\text{Int}(G_{1,2}) \neq \emptyset$, то, так как $|\text{Bound}(G_{1,2})| = k$, $\text{Int}(G_{1,2}) \subsetneq H$ — фрагмент, что противоречит минимальности H . Следовательно, $\text{Int}(G_{1,2}) = \emptyset$, откуда из нерасщепимости графа немедленно следует $\text{Int}(G_{1,1}) \neq \emptyset$ и $\text{Int}(G_{2,2}) \neq \emptyset$, а значит, в границах этих частей хотя бы по k вершин. По лемме 5.9 мы получаем, что $|\text{Bound}(G_{1,1})| = |\text{Bound}(G_{2,2})| = k$, следовательно, $\text{Int}(G_{1,1})$ — фрагмент, причем $\text{Int}(G_{1,1}) \subsetneq H$, что противоречит минимальности H . \square

Непосредственно из леммы 5.11 и теоремы 5.7 можно вывести следствие.

Следствие 5.4. Пусть G — k -связный граф, $\delta(G) \geq \frac{3k-1}{2}$. Тогда существует такая вершина $x \in V(G)$, что граф $G - x$ является k -связным.

5.4 Удаление ребер с сохранением k -связности

Определение 5.7. Назовем ребро $e \in E(G)$ *критическим*, если граф $G - e$ не является k -связным.

Назовем k -связный граф *минимальным*, если все его ребра — критические.

В любом связном графе H , отличном от дерева существует такое ребро e , что граф $H - e$ связан — достаточно в качестве e взять любое ребро, входящее в цикл. Таким образом, минимальные 1-связные графы — это деревья. Как это ни удивительно, ситуация с минимальными k -связными графами во многом похожая. Исследовал минимальные k -связные графы немецкий математик В. Мадер, которому и принадлежат результаты этого раздела.

Далее мы будем рассматривать k -связный граф G и его критические ребра. Ребро ab графа G является критическим тогда и только тогда, когда в графе $G - ab$ существует $(k-1)$ -вершинное разделяющее множество, то есть, существует разделяющее множество T_{ab} в графе G , содержащее ребро ab и $k-1$ вершину. Отметим, что $\text{Part}(T_{ab})$ состоит из двух частей: $V_a \ni a$ и $V_b \ni b$. Обозначим через $\mathfrak{T}_k(G)$ набор из всех разделяющих множеств графа G , содержащих по одному критическому ребру и по $k-1$ вершине.

Лемма 5.13. (W. Mader.) Пусть $a \in V(G)$, $d_G(a) > k$, ребра $ab, ac \in E(G)$ — критические, множества $T, S \in \mathfrak{T}_k(G)$ таковы, что $ab \in T$, $ac \in S$. Пусть $\text{Part}(T) = \{H_a, \bar{H}_a\}$, $\text{Part}(S) = \{F_a, \bar{F}_a\}$, где $a \in H_a$, $a \in F_a$. Тогда $|H_a| > |\bar{F}_a|$.

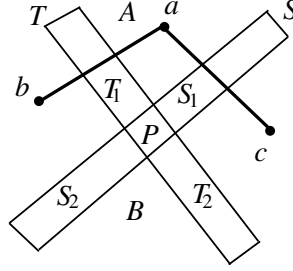
Доказательство. Пусть $A = H_a \cap F_a$, $B = \bar{H}_a \cap \bar{F}_a$. Будем рассматривать A и B как части $\text{Part}\{S, T\}$ и соответственно определим у них *границу* (множество вершин части, входящих в S или T) и *внутренность*. Пусть

$$P = S \cap T, T_1 = T \cap \text{Int}(F_a), T_2 = T \cap \text{Int}(\bar{F}_a), S_1 = S \cap \text{Int}(H_a), S_2 = S \cap \text{Int}(\bar{H}_a).$$

Определенные выше множества изображены на рисунке 5.4. Отметим, что некоторые из этих множеств могут быть пустыми.

Отметим, что $\text{Bound}(A) = T_1 \cup S_1 \cup P$, $\text{Bound}(B) = T_2 \cup S_2 \cup P$, откуда следует $|\text{Bound}(A)| + |\text{Bound}(B)| = 2k - 2$. Поскольку

$$H_a \setminus (H_a \cap \bar{F}_a) = T_1 \cup \text{Int}(A), \quad \bar{F}_a \setminus (H_a \cap \bar{F}_a) = S_2 \cup \text{Int}(B),$$

Рис. 5.4: Множества S , T и части разбиения.

то достаточно доказать, что $|\text{Int}(A)| > |\text{Int}(B)|$ и $|T_1| \geq |S_2|$.

Так как a не принадлежит множествам S и T , то $\text{Int}(A) \ni a$. Рассмотрим два случая.

1. $\text{Int}(A) = \{a\}$.

Только два ребра выходят из вершины a вне части A — это ребра $ab \in T$ и $ac \in S$. Остальные инцидентные a ребра могут выходить лишь в часть A и из $\text{Int}(A) = \{a\}$ легко сделать вывод $|\text{Bound}(A)| \geq d_G(a) - 2 \geq k - 1$. Следовательно, $|\text{Bound}(B)| = 2k - 2 - |\text{Bound}(A)| \leq k - 1$. Таким образом,

$$|T_1| + |P| + |T_2| = |T| = k - 1 \geq |\text{Bound}(B)| = |S_2| + |P| + |T_2|,$$

откуда $|T_1| \geq |S_2|$.

Смежные вершины a и c , очевидно, не могут быть разделены множеством $T \not\ni ac$, поэтому $c \in H_a$. Аналогично, $b \in F_a$. Тогда $a, b, c \notin B$. Следовательно, ни одна из вершин $\text{Int}(B)$ не смежна с вершинами не из B . Если $\text{Int}(B) \neq \emptyset$, то $(k - 1)$ -вершинное множество $\text{Bound}(B)$ отделяет $\text{Int}(B)$ от $V(G) \setminus B$, что противоречит k -связности графа G . Следовательно, $\text{Int}(B) = \emptyset$ и $|\text{Int}(B)| < |\text{Int}(A)|$, нужное нам неравенство доказано.

2. $\text{Int}(A) \neq \{a\}$, следовательно, $\text{Int}(A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Очевидно, $b, c \notin A$. Значит, никакая вершина множества $\text{Int}(A) \setminus \{a\}$ не смежна с вершинами не из A , то есть, множество вершин $\text{Bound}(A) \cup \{a\}$ отделяет непустое множество $\text{Int}(A) \setminus \{a\}$ от $V(G) \setminus A$. Из k -связности графа G можно сделать вывод $|\text{Bound}(A)| \geq k - 1$, откуда аналогично рассуждениям пункта 1 получаем $|\text{Bound}(B)| \leq k - 1$, $\text{Int}(B) = \emptyset$ и $|B| < |A|$. \square

Теорема 5.8. (W. Mader.) Пусть G — минимальный k -связный граф, W — множество всех его вершин степени более k . Тогда $G(W)$ — лес.

Доказательство. Предположим противное, пусть $a_1 a_2 \dots a_n$ — простой цикл в $G(W)$. Из минимальности графа G следует, что ребро $a_{i-1} a_i$ —

критическое, следовательно, существует разделяющее множество $S_i \ni a_{i-1}a_i$. Обозначим через H_i часть $\text{Part}(S_i)$, содержащую a_i . Тогда по лемме 5.13 мы имеем

$$|H_1| > |H_2| > \dots > |H_n| > |H_1|,$$

что очевидно невозможно. \square

Теорема 5.9. (W. Mader.) Пусть G — минимальный k -связный граф. Тогда в графе G не менее, чем $\frac{(k-1) \cdot v(G) + 2}{2k-1}$ вершин степени k .

Доказательство. Пусть W — множество всех вершин степени более k в графе G , $U = V(G) \setminus W$. Пусть $w = |W|$. Из каждой вершины множества W выходит не менее, чем $k + 1$ ребро, сумма степеней вершин графа $G(W)$ не более $2w - 2$ (так как это лес), следовательно, не менее

$$(k + 1)w - 2w + 2 = (k - 1)w + 2$$

ребер выходит из W в U . Так как в каждую из $v(G) - w$ вершин множества U входит не более k ребер, мы получаем неравенство $(k - 1)w + 2 \leq k(v(G) - w)$, откуда немедленно следует утверждение теоремы. \square

Замечание 5.5. Мадер доказал и более сильное утверждение: в минимальном k -связном графе G не менее, чем $\frac{(k-1) \cdot v(G) + 2k}{2k-1}$ вершин степени k . Эта оценка для любого k — точная.

5.5 Взаимное расположение разделяющих множеств

Главный вопрос этого раздела — а как же расположены относительно друг друга k -вершинные разделяющие множества в k -связном графе? Как они разбивают на части граф и друг друга? Начнем с классического и почти очевидного случая точек сочленения в связном графе (то есть, $k = 1$).

Затем мы перейдем к произвольному k и расскажем о *дереве разбиения* k -связного графа набором из попарно независимых k -разделяющих множеств. С помощью этой конструкции мы полностью изучим взаимное расположение двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе, а также части, на которые они разбивают граф.

В конце раздела мы докажем ряд весьма нетривиальных фактов для случая произвольного k .

5.5.1 Точки сочленения и блоки в связном графе

Итак, вернемся к простым вещам. В этом разделе пусть G — связный граф, вспомним о его блоках и точках сочленения, определенных во введении.

Применив к связному графу G тяжелую артиллерию из уже доказанных фактов, можно рассмотреть набор $\mathfrak{R}_1(G)$ из всех точек сочленения графа G . Сильно упрощает ситуацию тот факт, что любые две точки сочленения независимы (поскольку разбить точку сочленения на две части невозможно).

Рассмотрим следующий процесс. Выберем точку сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(G)$ и “разрежем” его по точке a , то есть, строго говоря, если $\text{Part}(a) = \{B_1, \dots, B_k\}$, мы перейдем к рассмотрению связных графов $G(B_1), \dots, G(B_k)$. Возьмем один из графов и выберем в нем точку сочленения, после чего перейдем к рассмотрению новых частей, и так далее, пока все полученные графы не окажутся двусвязными.

По лемме 1.8, мы вне зависимости от порядка действий проведем разрезы по всем точкам сочленения графа G и только по ним. В результате мы получим множества вершин всех блоков графа G . Это нетрудно доказать: получатся множества вершин графа G , индуцированные подграфы на которых двусвязны. Пусть B — одна из полученных в итоге частей, тогда любая вершина $s \notin B$ была “отрезана” от B на некотором шаге, следовательно, отделяется от B какой-то из точек сочленения. Значит, $G(B)$ — максимальный по включению двусвязный подграф графа G , то есть, блок.

Однако, даже при $k = 2$ построить аналогичную конструкцию методом последовательных разрезов двусвязного графа по двухвершинным разделяющим множествам не получается, потому что более чем одновершинные разделяющие множества графа могут быть зависимы, то есть, могут разбивать друг друга на части.

Воспользовавшись нашей системой обозначений, можно сказать, что множества вершин блоков графа G — это части $\text{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$. Такой подход гораздо лучше обобщается на графы большей связности и их минимальные разделяющие множества.

5.5.2 Дерево разбиения

Определение 5.8. Пусть G — k -связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора \mathfrak{S} попарно независимы.

1) Построим *дерево разбиения* $T(G, \mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G, \mathfrak{S})$ — это множества из \mathfrak{S} , а вершины другой доли —

части $\text{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G, \mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G . Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда $S \subset A$.

2) Построим граф $G^\mathfrak{S}$ на множестве вершин $V(G)$ следующим образом: возьмем граф G и соединим рёбрами все пары вершин, входящих хотя бы в одно из множеств набора \mathfrak{S} .

Построение $T(G, \mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства.

Теорема 5.10. Пусть G — k -связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $T(G, \mathfrak{S})$ — это дерево.
- 2) Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ выполняется $d_{T(G, \mathfrak{S})}(S) = |\text{Part}(S)|$. Более того, для каждой части $A \in \text{Part}(S)$ существует единственная часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, такая что $B \subset A$ и B смежна с S в $T(G, \mathfrak{S})$. Все висячие вершины дерева $T(G, \mathfrak{S})$ соответствуют частям $\text{Part}(\mathfrak{S})$.
- 3) Множество S разделяет в графе G части $B, B' \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда S разделяет B и B' в $T(G, \mathfrak{S})$.

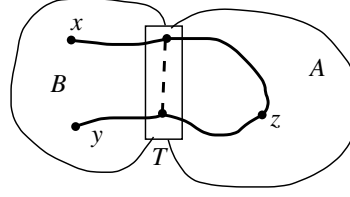
Перед доказательством теоремы отметим несколько свойств графа $G^\mathfrak{S}$.

Лемма 5.14. Пусть G — k -связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G^\mathfrak{S})$. Более того, $\text{Part}(G; \mathfrak{S}) = \text{Part}(G^\mathfrak{S}; \mathfrak{S})$.
- 2) Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, $B \in \text{Part}(G; \mathfrak{T})$, а $R \in \mathfrak{R}(G^\mathfrak{S}(B))$. Тогда $R \in \mathfrak{R}(G)$. В частности, граф $G^\mathfrak{S}(B)$ является k -связным.

Доказательство. 1) Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$. Так как множества набора \mathfrak{S} попарно независимы, никакое ребро из $E(G^\mathfrak{S}) \setminus E(G)$ не может соединять внутренние вершины двух разных частей $\text{Part}(G; S)$. Таким образом, вершины разделены одним из множеств набора \mathfrak{S} в графе G тогда и только тогда, когда они разделены этим множеством в $G^\mathfrak{S}$, откуда очевидно следуют утверждения пункта 1.

2) Пусть $x, y \in B$, а множество R не отделяет x от y в графе G , а следовательно, и в $G^\mathfrak{S}$. Рассмотрим кратчайший xy -путь P в графе $G^\mathfrak{S} - R$. Предположим, что он содержит вершину $z \notin B$ (см. рисунок 5.5). Тогда существует множество $T \in \mathfrak{T}$, отделяющее z от B . При движении от z в обе стороны по пути P мы попадем в вершины множества T , которые в $G^\mathfrak{S}$ смежны. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий z , на ребро между двумя вершинами

Рис. 5.5: Построение пути в графе $G^S(B)$.

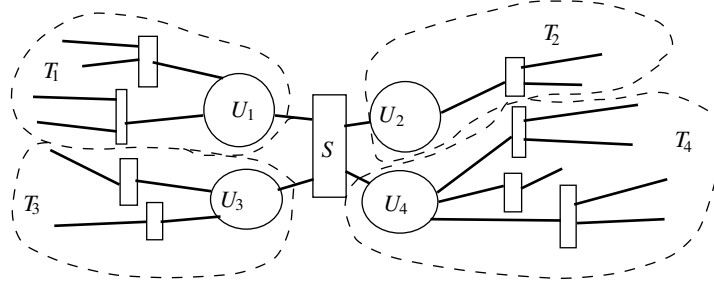
множества T . Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B$, а значит, P — путь в $G^S(B) - R$.

В завершении доказательства остается отметить, что $\mathfrak{R}_{k-1}(G) = \emptyset$ (граф G — k -связный), а значит и $\mathfrak{R}_{k-1}(G^S(B)) = \emptyset$, то есть, граф $G^S(B)$ также является k -связным. \square

Доказательство теоремы 5.10. Будем доказывать все утверждения теоремы индукцией по количеству множеств в наборе \mathfrak{S} , причем не фиксируя k -связный граф G . База для пустого набора очевидна.

Докажем *индукционный переход*. Рассмотрим граф $G' = G^S$. Из леммы 5.10 следует, что разбиения графов G и G' набором \mathfrak{S} одинаковы, будем обозначать это разбиение через $\text{Part}(\mathfrak{S})$. Более того, тогда $T(G, \mathfrak{S}) = T(G', \mathfrak{S})$. Поэтому достаточно доказать утверждения теоремы для графа G' .

Пусть $S \in \mathfrak{S}$, $\text{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_n\}$, $G_i = G'(A_i)$. Как мы знаем, все эти графы k -связны. Пусть набор \mathfrak{S}_i состоит из всех множеств набора \mathfrak{S} , лежащих в A_i и отличных от S . Тогда каждое множество из $\mathfrak{S} \setminus S$ лежит ровно в одном из наборов $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$.

Рис. 5.6: Дерево $T(G, \mathfrak{S})$.

Пусть $U_i \in \text{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая S . По лемме 5.14 для любой части $U \in \text{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ граф $G'(U)$ является k -связным, а значит, его не разделяет ни одно из множеств набора \mathfrak{S} , не лежащих в

U . Множество S лежит в части U_i , но также не разделяет ее, так как $U_i \subset A_i \in \text{Part}(G; S)$. Это означает, что $\text{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i) \subset \text{Part}(G'; \mathfrak{S})$, причем именно часть U_i содержит S . Следовательно,

$$\text{Part}(G'; \mathfrak{S}) = \bigcup_{i=1}^n \text{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i),$$

причем объединение — дизъюнктное, а части $\text{Part}(\mathfrak{S})$, содержащие множество S — это U_1, \dots, U_n . Таким образом, утверждение 2 теоремы доказано для множества S , для остальных множеств из \mathfrak{S} доказательство аналогично.

Каждая часть $\text{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$, кроме U_i , смежна в $T_i = T(G_i, \mathfrak{S}_i)$ с теми же вершинами, что в $T(G, \mathfrak{S})$. Для части U_i в $T(G, \mathfrak{S})$ добавляется ребро к множеству S . Поэтому $T(G, \mathfrak{S}) - S$ распадается ровно на n связанных подграфов: это графы T_i (где $i \in \{1, \dots, n\}$) (см. рисунок 5.6). По индукционному предположению, все эти графы — деревья, а значит, выполнены утверждения пунктов 1 и 3 теоремы. \square

Как мы видим, свойства дерева разбиения аналогичны хорошо известным нам свойствам классического дерева блоков и точек сочленения.

5.5.3 Дерево разбиения двусвязного графа

Далее граф G будет двусвязным. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$.

Определение 5.9. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{D}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G .

В 1966 году Татт описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе именно с помощью дерева, которое он назвал $T(G)$. Это дерево — почти что дерево разбиения двусвязного графа одиночными разделяющими множествами (только эти множества и само дерево были определены в книге Татта более сложным образом). Мы построим похожее дерево с позиции разработанной выше техники.

Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 5.10. 1) *Дерево разбиения* $\text{BT}(G)$ двусвязного графа G — это дерево $T(G, \mathfrak{D}(G))$.

2) Будем использовать обозначение $\text{Part}(G)$ вместо $\text{Part}(\mathfrak{D}(G))$ и называть части этого разбиения просто *частями графа G* . Часть $A \in \text{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\text{BT}(G)$.

Замечание 5.6. 1) Из теоремы 5.10 следует, что $\text{BT}(G)$ — дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\text{BT}(G)$.

2) Если $A \in \text{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\text{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G .

Лемма 5.15. Пусть S — одиночное множество двусвязного графа G , а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Если одиночное множество S имеет степень $d_{\text{BT}(G)}(S) = d$, то $d_G(x) \geq d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.

2) $d_G(x) \geq 3$.

Доказательство. 1) По теореме 5.10 мы имеем $|\text{Part}(S)| = d_{\text{BT}(G)}(S) = d$, а во внутренности каждой из d частей $\text{Part}(S)$ есть вершина, смежная с x (иначе граф не двусвязен). Поэтому $d_G(x) \geq d$, а в случае равенства все смежные с x вершины лежат во внутренностях частей $\text{Part}(S)$.

2) Пусть $d_G(x) = 2$. По пункту 1 тогда $|\text{Part}(S)| = 2$, и вершины множества S несмежны. Значит, $N_G(x) \in \mathfrak{R}_2(G)$ — множество, зависимое с S , противоречие. \square

Теперь наша задача — понять смысл частей графа G .

Определение 5.11. Для двусвязного графа G обозначим через G' граф $G^{\mathfrak{D}(G)}$ (то есть граф, полученный из G добавлением всех ребер вида ab , где $\{a, b\} \in \mathfrak{D}(G)$).

Опишем важное свойство частей графа и одиночных множеств, аналогичное свойству блоков и точек сочленения (см. лемму 1.8). Это свойство позволит нам “разрезать” двусвязный граф по одиночному множеству.

Лемма 5.16. Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.

1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ разделяет вершины $a, b \in V(G)$ в графе G тогда и только тогда, когда S разделяет их в G' . В частности, $\mathfrak{R}_2(G) = \mathfrak{R}_2(G')$.

2) Пусть $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неединичное множество, причем $S \subset A \in \text{Part}(G)$. Тогда $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем это множество — неединичное и в $G'(A)$.

Доказательство. 1) При построении G' мы соединяем дополнительными рёбрами только пары вершин, составляющих одиночное множество, а такие вершины не разделены ни одним из множеств набора $\mathfrak{R}_2(G)$. Отсюда легко следуют доказываемые утверждения.

2) Пусть $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$ — зависимое с S множество. По пункту 1, мы имеем $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G')$, причем эти множества зависимы и в графе G' . Так как граф $G'(A)$ двусвязен, нельзя разделить две вершины множества $S \subset A$ в графе G' , удалив менее двух вершин из части A . Следовательно, $S' \subset A$. Тогда S и S' разделяют друг друга и в графе $G'(A)$. Следовательно, $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем эти множества зависимы. \square

Следующая лемма характеризует неодионые множества. Похожую характеристику использовал в своей книге Татт.

Лемма 5.17. Пусть $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неодионое множество. Тогда $|\text{Part}(S)| = 2$, для каждой части $A \in \text{Part}(S)$ граф $G(A)$ недовсвязен и имеет точку сочленения, отделяющую a от b .

Доказательство. Так как S — неодионое, существует зависимое с ним множество $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S' , как мы знаем, разделяет S . Значит, не существует ab -пути по вершинам A в графе G , который не пересекается с S' . Однако, если S' не пересекает $\text{Int}(A)$, то такой путь, очевидно, существует. Противоречие.

Таким образом, S' пересекает внутренность каждой части $\text{Part}(S)$, откуда следует, что частей ровно две. Более того, если $x = S' \cap \text{Int}(A)$, то x отделяет друг от друга вершины a и b в $G(A)$. \square

Теорема 5.11. Пусть G — двсвязный граф без одионых множеств. Тогда либо G трёхсвязен, либо G — это простой цикл.

Замечание 5.7. Напомним, что по нашему определению трёхсвязный граф должен содержать хотя бы 4 вершины. В частности, треугольник не является трёхсвязным графом и две альтернативы из теоремы 5.11 — взаимно исключающие.

Доказательство теоремы 5.11. Предположим, что наш граф G не трёхсвязен. Для каждого множества $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ и части $A \in \text{Part}(S)$ мы докажем, что $G(A)$ — это простой ab -путь.

Доказательство будет индукцией по $|A|$, база для случая, когда часть A имеет ровно одну внутреннюю вершину, очевидна. Докажем переход. Пусть мы хотим доказать утверждение для части $A \in \text{Part}(S)$, а для меньших частей утверждение уже доказано. Пусть $H = G(A)$. Так как S

— неединичное, по лемме 5.17 граф H имеет точку сочленения x , отделяющую a от b . Пусть U_a и U_b — компоненты связности графа $H - x$, содержащие a и b соответственно (см. рисунок 5.7а). Из двусвязности графа G следует, что других компонент связности в графе $H - x$ нет (такая компонента выделилась бы и в $G - x$).

Пусть $U'_a = U_a \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Тогда $R_a = \{a, x\}$ отделяет U'_a от остальных вершин в графе G . Следовательно, по индукционному предположению, граф $G(U'_a \cup R_a) = G(U_a \cup \{x\})$ — простой ax -путь. Если $U_a = \{a\}$, то $N_H(a) = \{x\}$ и $G(U_a \cup \{x\})$ — также простой ax -путь. Аналогично, $G(U_b \cup \{x\})$ — простой bx -путь. Следовательно, граф $G(A)$ — это простой ab -путь (см. рисунок 5.7б).

По лемме 5.17 мы знаем, что $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$. Как мы доказали, оба графа $G(A_1)$ и $G(A_2)$ — простые пути между вершинами множества S , откуда очевидно следует, что G — простой цикл. \square

Следствие 5.5. Для каждой части $A \in \text{Part}(G)$ граф $G'(A)$ либо трёхсвязен, либо является циклом.

Доказательство. По лемме 5.14 мы знаем, что граф $G'(A)$ двусвязен. Предположим, $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. По лемме 5.14 мы имеем $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S не может быть одиночным в G , так как разделяет часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S}(G))$. По лемме 5.16 тогда S — неединичное разделяющее множество в $G'(A)$. Следовательно, в $G'(A)$ нет одиночных множеств, а значит, по теореме 5.11 этот граф либо трёхсвязен, либо является циклом. \square

Определение 5.12. Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A .

Таким образом, мы знаем, что каждая часть двусвязного графа G — цикл или блок.

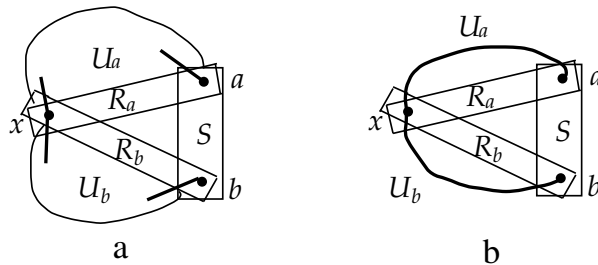


Рис. 5.7: Двусвязный граф без одиночных множеств.

Следствие 5.6. Если часть $A \in \text{Part}(G)$ — цикл, то все вершины из $\text{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G .

Доказательство. Если $x \in \text{Int}(A)$, то рёбра графа G выходят из x только к вершинам части A , а таких рёбер, очевидно, ровно два. \square

Изучим, как расположены неединичные разделяющие множества графа G .

Лемма 5.18. 1) Пусть $A \in \text{Part}(G)$ — цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неединичное разделяющее множество графа G .

2) Любое неединичное множество $R \in \mathfrak{R}_2(G)$ лежит в части $A \in \text{Part}(G)$, являющейся циклом длины хотя бы 4 и содержит две несоседние вершины этого цикла.

Доказательство. 1) Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, причем вершины указаны в циклическом порядке, $R = \{a_1, a_m\}$, где $2 < m < k$. Тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$ и делит граф $G'(A)$ ровно на две части: $U_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $U_2 = \{a_m, a_{m+1}, \dots, a_1\}$. По лемме 5.14 мы имеем $R \in \mathfrak{R}_2(G)$. Очевидно, $R \notin \mathfrak{D}(G)$.

2) Множество R независимо со всеми одиночными множествами графа G , а потому лежит в одной из частей $A \in \text{Part}(G)$. По лемме 5.16 тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. Из нашей классификации (следствие 5.5) ясно, что тогда A — цикл длины хотя бы 4. Теперь понятно, что R состоит из двух несоседних вершин этого цикла. \square

Следующая лемма покажет нам еще одно полезное свойство частей двусвязного графа. Нам понадобится понятие подразбиения графа, определенное во введении (определение 1.7.)

Лемма 5.19. Пусть G — двусвязный граф, $A \in \text{Part}(G)$. Тогда $G \supset G'(A)$.

Доказательство. Пусть $ab \in E(G'(A)) \setminus E(G)$. Тогда $a, b \in A$ и $\{a, b\} \in \mathfrak{D}(G)$. Пусть $U_{a,b} \in \text{Part}(\{a, b\})$ — часть, не содержащая A . Тогда существует ab -путь $S_{a,b}$ по вершинам части $U_{a,b}$ в графе G . Заменяем ребро ab на путь $S_{a,b}$.

В результате нескольких таких замен мы получим подграф H графа G . Пусть ab и xy — два разных замененных ребра (возможно, они имеют общий конец). Тогда части $U_{a,b}$ и $U_{x,y}$ разделены частью A в $\text{BT}(G)$, поэтому не имеют общей внутренней вершины. Следовательно, никакие два добавленных пути не имеют общей внутренней вершины, а значит, граф H является подразбиением $G'(A)$. \square

На этом закончим изучение собственно дерева разбиения двусвязного графа и перейдём к его применению.

5.5.4 Применение дерева разбиения двусвязного графа

В этом разделе мы применим дерево разбиения двусвязного графа для описания ряда его свойств. Начнем с теорем об оценках хроматического числа графа G через хроматические числа его частей.

Части разбиения и хроматическое число

Понятно, что хроматическое число связного графа равно максимуму хроматических чисел его классических двусвязных блоков. В этом разделе мы докажем верхние оценки на хроматическое число двусвязного графа через хроматические числа его подграфов, индуцированных на частях разбиения. Эти оценки с помощью структуры дерева разбиения получаются очень просто.

Теорема 5.12. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1)

$$\chi(G) \leq \chi(G') = \max_{A \in \text{Part}(G)} \chi(G'(A)).$$

2)

$$\chi(G) \leq \max_{A \in \text{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1. \quad (5.2)$$

3)

$$\chi(G) \leq \max \left(3, \max_{A - \text{блок } G} \chi(G(A)) + 1 \right).$$

Доказательство. Разобьем дерево $\text{BT}(G)$ на уровни, пусть уровень 0 состоит из любой части $B \in \text{Part}(G)$, в каждый следующий уровень $\ell + 1$ войдут вершины, не вошедшие в уровни $0, \dots, \ell$ и смежные хотя бы с одной вершиной уровня ℓ . По построению дерева $\text{BT}(G)$ понятно, что четные уровни состоят из частей разбиения, а нечетные — из одиночных множеств. Мы будем красить вершины частей графа G в порядке, заданном разбиением на уровни.

1) Достаточно построить правильную раскраску графа G' в

$$k = \max_{A \in \text{Part}(G)} \chi(G'(A))$$

цветов. Граф $G'(B)$ мы, очевидно, можем покрасить в k цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \text{Part}(G)$ уровня 2ℓ , тогда она смежна в $\text{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества S , причем в разные цвета, так как они смежны в G' . Понятно, что существует правильная раскраска графа $G'(A)$ в k цветов. Поскольку вершины множества S в этой раскраске разноцветны, можно считать, что их цвета именно такие, как в раскраске вершин частей предыдущих уровней.

2) Достаточно построить правильную раскраску графа G в

$$m + 1 = \max_{A \in \text{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1$$

цветов. Граф $G(B)$ мы можем покрасить даже в m цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \text{Part}(G)$ уровня 2ℓ , тогда она смежна в $\text{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{a, b\}$. Пусть вершины a и b покрашены в цвета i и j , возможно, совпадающие.

Если $i = j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов, не используя цвет i , а потом перекрасим вершины a и b в цвет i . Если $i \neq j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов так, чтобы a была покрашена в цвет i , не используя при этом цвет j , а потом перекрасим вершину b в цвет j . В любом случае понятно, что получится правильная раскраска вершин части A , согласованная с раскраской вершин частей предыдущих уровней.

3) Единственное отличие от пункта 2 состоит в том, что если рассматриваемая часть A — цикл, у которого как-то покрашены две вершины, то остальные несложно докрасить, не нарушая правильность раскраски и используя при этом три цвета. \square

Замечание 5.8. В доказательстве утверждения 2 теоремы 5.12 мы можем произвольно выбрать часть B , с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительный цвет. Поэтому при вычислении максимума в формуле (5.2) можно не прибавлять 1 к хроматическому числу графа $G(A)$ для одной из частей $A \in \text{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

Аналогично, в утверждении 3 можно не прибавлять 1 к хроматическому числу одного из блоков.

Следствие 5.7. Если все части двусвязного графа G — циклы, то $\chi(G) \leq 3$.

Перейдем к оценкам на списочное хроматическое число двусвязного графа.

Теорема 5.13. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1)

$$\text{ch}(G) \leq \max_{A \in \text{Part}(G)} \text{ch}(G(A)) + 2.$$

2)

$$\text{ch}(G) \leq \max \left(3, \max_{A - \text{блок } G} \text{ch}(G(A)) + 2 \right).$$

Доказательство. 1) Аналогично теореме 5.12 мы разобьем вершины дерева разбиения на уровни, начиная с части B и будем красить части по уровням. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \text{Part}(G)$ уровня 2ℓ , тогда она смежна в $\text{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{x, y\}$.

В списке каждой вершины графа $G(A)$ хотя бы $\text{ch}(G(A)) + 2$ цвета. Удалим из списков цвета вершин x и y , оставшихся цветов хватит для правильной раскраски оставшихся вершин части A .

2) Отличие от пункта 1 состоит в раскраске частей-циклов. Пусть A — цикл. Тогда ранее покрашено две вершины части A . Теперь покрасим остальные вершины: это возможно, так как в момент покраски очередной вершины покрашено не более двух ее соседей, а в списке есть три цвета. \square

Замечание 5.9. В доказательстве теоремы 5.13 мы можем произвольно выбрать часть B , с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительные два цвета. Поэтому при вычислении максимума можно не прибавлять 2 к $\text{ch}(G(A))$ для одной из частей $A \in \text{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

Критические двусвязные графы

Дерево $\text{BT}(G)$ помогает понять, как устроены критические двусвязные графы.

Теорема 5.14. 1) *Двусвязный граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его части-блоки и части-треугольники пусты (то есть, имеют пустую внутренность).*

2) *Пусть $A \in \text{Part}(S)$ — крайняя часть критического двусвязного графа G , смежная в $\text{BT}(G)$ с одиночным множеством S . Тогда A —*

цикл с хотя бы 4 вершинами, и все вершины A , кроме двух вершин множества S , имеют в графе G степень 2.

3) Критический двусвязный граф имеет хотя бы четыре вершины степени 2.

Доказательство. 1) Из леммы 5.18 очевидно, что вершины, не входящие в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$ (то есть вершины, удаление которых не нарушает двусвязность графа G) — это как раз внутренние вершины блоков и треугольников графа G .

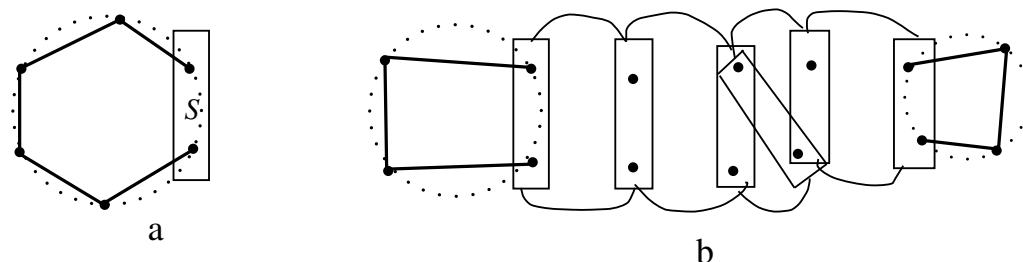


Рис. 5.8: Критические двусвязные графы.

2) Пусть A — крайняя часть графа G . По пункту 1, тогда A — цикл длины хотя бы 4, а S состоит из двух соседних вершин этого цикла. Остальные (хотя бы две) вершины A — внутренние и по следствию 5.6 имеют степень 2 в графе G (см. рисунок 5.8а).

3) Если граф G имеет хотя бы одно одиночное множество, то у графа G не менее двух крайних частей, утверждение очевидно следует из пункта 2. Пусть одиночных множеств у графа G нет. Критический двусвязный граф, очевидно, не является трёхсвязным и содержит хотя бы 4 вершины. Значит, по теореме 5.11 граф G — цикл длины не менее 4, в этом случае утверждение очевидно. \square

Более того, теперь понятно, как устроены критические двусвязные графы, у которых ровно 4 вершины степени 2. Во-первых, это цикл из четырех вершин. Теперь рассмотрим такой граф G не менее чем с пятью вершинами. Тогда дерево $\text{BT}(G)$ должно иметь ровно две висячие вершины, то есть, все некрайние блоки и все одиночные множества имеют степень два в $\text{BT}(G)$. Значит, каждое одиночное множество делит граф ровно на две части (для неодиночных множеств это всегда так).

Рассмотрим некрайнюю часть $A \in \text{Part}(G)$. Так как $d_{\text{BT}(G)}(A) = 2$, граница A состоит ровно из двух одиночных множеств, то есть, имеет 3 или 4 вершины. Докажем, что $\text{Int}(A) = \emptyset$. Если A — блок или треугольник, то это доказано в теореме 5.14. Если A — цикл длины хотя бы 4, то

его внутренняя вершина имеет степень 2 в графе G , как уже доказывалось выше, то есть, количество вершин степени два увеличивается.

Таким образом, некрайняя часть $\text{Part}(G)$ может быть треугольником, четырёхугольником или блоком из четырёх вершин, причем ее вершины покрываются двумя одиночными множествами, смежными с этой частью в дереве $\text{BT}(G)$. Пример критического двусвязного графа G с 4 вершинами степени 2 приведен на рисунке 5.86.

Минимальные двусвязные графы

Перейдем к изучению структуры минимальных двусвязных графов — то есть таких, которые теряют двусвязность при удалении любого ребра.

Теорема 5.15. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) *Если $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;*
- (2) *Для любого блока A графа G граф $G(A)$ пуст (то есть, не имеет ни одного ребра).*

Доказательство. \Rightarrow . Пусть G — минимальный двусвязный граф. Предположим, что $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, $ab \in E(G)$. Пусть $\text{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_n\}$. Так как G двусвязен, обе вершины a и b смежны с $\text{Int}(A_j)$. Граф $G(\text{Int}(A_j))$ связан, поэтому существует ab -путь, внутренние вершины которого лежат в $\text{Int}(A_j)$ и их множество непусто. Таким образом, в графе $G - ab$ существует $n \geq 2$ непересекающихся по внутренним вершинам ab -путей, откуда следует двусвязность графа $G - ab$. Противоречие с минимальностью G показывает, что условие (1) выполнено.

Пусть A — блок графа G ; $x, y \in A$, $xy \in E(G)$. Граф $G'(A)$ трёхсвязен, следовательно, по теореме Менгера существует три xy -пути в графе G' , не имеющие общих внутренних вершин. По лемме 5.19 граф G содержит подразбиение $G'(A)$, поэтому также содержит три xy -пути без общих внутренних вершин. Следовательно, граф $G - xy$ содержит два таких пути, а значит, он двусвязен. Противоречие с минимальностью G . Таким образом, условие (2) выполнено.

\Leftarrow . Пусть G — не минимальный граф, а ребро $xy \in E(G)$ таково, что граф $G - xy$ двусвязен. Понятно, что существует такая часть $A \in \text{Part}(G)$, что $x, y \in A$. Из условия (2) следует, что A — цикл. Пусть $z \in A \setminus \{x, y\}$. Тогда множество $T = \{z, xy\}$ делит цикл $G'(A)$ на две компоненты связности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Докажем, что x и y не связаны в $G' - T$. Предположим противное и рассмотрим кратчайший xy -путь P в $G' - T$. Понятно, что $V(P)$ содержит вершину $b \notin A$. Рассмотрим одиночное множество S , отделяющее

b от A . Так как $x, y \in A$, при движении от b по пути P в обе стороны мы попадем в две разные вершины множества S . Эти вершины смежны в G' , заменим участок пути P , содержащий b на ребро e между двумя вершинами множества S и получим более короткий xy -путь P' в графе G' . Так как $V(P') \subset V(P)$ и ребро $e \notin T$ (из условия (1) следует, что $\{x, y\} \notin \mathfrak{R}_2(G)$, поэтому $e \neq xy$), путь P' соединяет x с y и в графе $G' - T$, противоречие с выбором пути P .

Следовательно, граф $G - T$ несвязен, а значит, граф $G - xy$ недвусвязен. Полученное противоречие показывает, что граф G минимален. \square

Далее отметим несколько свойств минимальных двусвязных графов.

Определение 5.13. Для двусвязного графа G обозначим следующие множества вершин графа G :

- через $V_2(G)$ — множество всех вершин степени 2;
- через $V'_2(G)$ — множество всех вершин степени 2, входящих в крайние части графа G ;
- через $V_3(G)$ — множество всех вершин степени более 2.

Лемма 5.20. Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если A — блок графа G , то $\text{Int}(A) = \emptyset$.
- 2) Пусть A — крайняя часть графа G , смежная в $\text{BT}(G)$ с одиночным множеством S . Тогда A — цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S , имеют степень 2.
- 3) Множество $V_3(G)$ состоит из всех вершин, входящих в одиночные множества графа G . Множество $V_2(G)$ состоит из всех внутренних вершин частей графа G .
- 4) Если S — одиночное множество графа G , то $d_{\text{BT}(G)}(S) \geq 3$.

Доказательство. 1) Пусть $x \in \text{Int}(A)$, рассмотрим ребро $xy \in E(G)$. Понятно, что $y \in A$, таким образом, граф $G(A)$ имеет ребро, что противоречит теореме 5.15.

2) Так как A — крайняя часть, то $\text{Int}(A) \neq \emptyset$. Значит, A — цикл и утверждение очевидно из следствия 5.6.

3) Прямое следствие леммы 5.15 и пункта 1.

4) Пусть это не так и $S = \{y, y'\}$ смежно в $\text{BT}(G)$ с двумя частями A_1 и A_2 .

Если A_i — блок, то y не смежна ни с одной вершиной A_i , как показано в пункте 1. Если A_i — цикл, то вершина y может быть смежна только с двумя соседними вершинами этого цикла, но одна из соседних с y вершин — это y' , которая по теореме 5.15 несмежна с y . Таким образом, $d_G(y) \leq 2$, противоречие с леммой 5.15. \square

В 1968 году М. Пламмер доказал, что граф $G - V_2(G)$ — это объединение нескольких деревьев. С помощью дерева разбиения двусвязного графа мы докажем более сильное утверждение для двусвязного графа.

Теорема 5.16. Пусть G — минимальный двусвязный граф, $H = G - V_2'(G)$, а A_1, \dots, A_k — все некрайние части $\text{Part}(G)$. Положим $s(A_i) = |A_i|$, если A_i — блок и $s(A_i) = d_{\text{BT}(G)}(A_i)$, если A_i — цикл.

Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Граф H — лес с

$$c(H) = \left(\sum_{i=1}^k s(A_i) \right) - 2k + 2. \quad (5.3)$$

2) Для любого одиночного множества S две его вершины принадлежат разным компонентам связности H .

3) Если все некрайние части графа G — четырёхугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в $\text{BT}(G)$, то H — объединение двух изоморфных деревьев F_1 и F_2 . Более того, существует такой изоморфизм деревьев F_1 и F_2 , что каждое одиночное множество графа G состоит из вершин деревьев F_1 и F_2 , соответствующих друг другу при этом изоморфизме.

Доказательство. Пронумеруем все вершины дерева $T = \text{BT}(G)$ (как соответствующие частям, так и соответствующие одиночным множествам) таким образом: a_1, \dots, a_m , чтобы для всех ℓ граф $T(\{a_1, \dots, a_\ell\})$ был деревом, а a_ℓ — его висячей вершиной. Не умаляя общности будем считать, что некрайние части $\text{Part}(G)$ в нумерации A_1, \dots, A_k идут в том же порядке, как в нумерации всех вершин дерева T . Пусть $W_\ell = \cup_{i=1}^\ell A_i$, $H_\ell = H(W_\ell)$. Тогда понятно, что $W_k = V(H)$ и, следовательно, $H_k = H$.

Индукцией по ℓ мы докажем, что H_ℓ — лес из

$$c_\ell = \left(\sum_{i=1}^k s(A_i) \right) - 2\ell + 2$$

деревьев, а также выполнены утверждения 2 и 3 для частей A_1, \dots, A_ℓ и одиночных множеств, содержащихся в W_ℓ .

База $\ell = 1$. Если A_1 — блок, то граф $G(A_1)$ по теореме 5.15 не имеет рёбер, а значит, есть лес из $s(A_1) = |A_1|$ одновёршинных деревьев.

Пусть часть A_1 — цикл. Тогда $G'(A_1)$ — это цикл, причем две вершины любого одиночного множества, лежащего в A_1 — соседние в этом цикле и по теореме 5.15 они несмежны в G . Поэтому $H_1 = H(A_1)$ — лес из $s(A_1) =$

$d_{\text{BT}(G)}(A_1)$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества принадлежат разным деревьям.

Если часть A_1 — четырёхугольник без внутренних вершин и имеет степень 2 в $\text{BT}(G)$, то граф H_1 — это два ребра без общих концов. Таким образом, все доказываемые утверждения для графа H_1 выполнены.

Переход $\ell \rightarrow \ell + 1$.

Мы так пронумеровали некрайние части, что $A_{\ell+1}$ является висячей вершиной в некотором поддереве T' дерева разбиения $\text{BT}(G)$, причем $V(T')$ содержит все части A_1, \dots, A_ℓ . Тогда $A_{\ell+1}$ смежна в T' ровно с одной вершиной, и эта вершина соответствует одиночному множеству — назовем его S . По теореме 5.10 множество S отделяет $A_{\ell+1}$ от A_1, \dots, A_ℓ .

Таким образом, ровно две вершины части $A_{\ell+1}$ входят в $W_\ell = V(H_\ell)$ — это две вершины множества S и они принадлежат разным компонентам связности H_ℓ в силу утверждения 2. Разберем два случая.

а. Часть $A_{\ell+1}$ — блок.

Все вершины блока $A_{\ell+1}$ в графе $H_{\ell+1}$ попарно несмежны. В $V(H_{\ell+1})$ добавятся $s(A_{\ell+1}) - 2 = |A_{\ell+1}| - 2$ вершины части $A_{\ell+1}$, не входящие в S , каждая из них представляет собой новую одновершинную компоненту связности. Отсюда немедленно следуют все доказываемые утверждения (то есть, утверждения 1 и 2 для графа $H_{\ell+1}$, частей $A_1, \dots, A_\ell, A_{\ell+1}$ и входящих в них одиночных множеств).

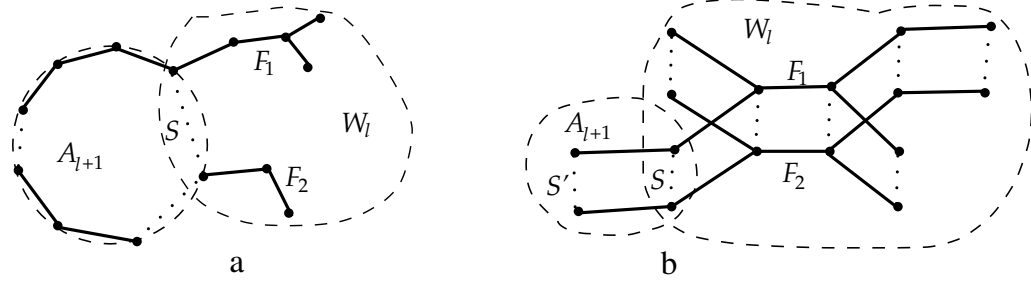
б. Часть $A_{\ell+1}$ — цикл.

Граф H_ℓ — лес. Пусть U_1 и U_2 — компоненты связности H_ℓ , которые содержат вершины множества S (по утверждению 2 они различны). Остальные компоненты связности H_ℓ будут компонентами связности $H_{\ell+1}$. Пусть $F_i = H_\ell(U_i)$.

Как показано выше, $H(A_{\ell+1})$ — объединение $s(A_{\ell+1})$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества (в том числе, вершины S) принадлежат разным деревьям (см. рисунок 5.9а). Значит, вершины деревьев F_1 и F_2 попадают в разные компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Остальные $s(A_{\ell+1}) - 2$ компоненты связности графа $H(A_{\ell+1})$ — это компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Отсюда следуют утверждения 1 и 2 для графа $H_{\ell+1}$, частей $A_1, \dots, A_\ell, A_{\ell+1}$ и входящих в них одиночных множеств.

Остается доказать утверждение 3. Итак, пусть все некрайние части, включая $A_{\ell+1}$ — четырехугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в $\text{BT}(G)$. Тогда по индукционному предположению H_ℓ — объединение двух изоморфных деревьев F_1 и F_2 .

В границу части $A_{\ell+1}$ входят ровно два одиночных множества, пусть это S (определенное выше) и S' . В графе $H_{\ell+1}$ добавились две новые

Рис. 5.9: Шаг с частью A_{l+1} .

вершины (это вершины множества S'), причем понятно, что одна из вершин множества S' соединена с F_1 , а другая — с F_2 (см. рисунок 5.9б), откуда очевидно следует доказываемое утверждение об изоморфизме деревьев. \square

Определение 5.14. Для любой вершины $x \in V(G)$ назовем ее *уменьшенной степенью* величину $d'_G(x) = d_G(x) - 2$.

Очевидно, уменьшенная степень любой вершины из $V_3(G)$ не менее 1.

Лемма 5.21. Пусть G — минимальный двусвязный граф, s — сумма уменьшенных степеней вершин из $V_3(G)$, t — количество крайних частей графа G , а c — количество компонент связности графа H . Тогда $2t = s + 2c$.

Доказательство. Посмотрим на рёбра, соединяющие вершины из $V_3(G)$ с внутренними вершинами крайних частей графа G . Пусть их количество равно q . Для каждой крайней части A ее внутренность $\text{Int}(A)$ смежна ровно с двумя вершинами из $V_3(G)$ — это вершины из $\text{Bound}(A)$. Поэтому $q = 2t$.

Поскольку H — объединение c деревьев, то $e(H) = v(H) - c$. Очевидно, $V_3(G) \subseteq V(H)$. Множество $W = V(H) \setminus V_3(G)$ состоит из вершин множества $V_2(G)$, входящих в некрайние части — то есть, из внутренних вершин некрайних частей. Поэтому каждая вершина множества W имеет степень 2 в графе H , а значит,

$$\sum_{x \in V_3(G)} d_H(x) = 2(v_3(G) - c).$$

Теперь посчитаем q с другой стороны:

$$q = \sum_{x \in V_3(G)} (d_G(x) - d_H(x)) = \sum_{x \in V_3(G)} d_G(x) - 2v_3(G) + 2c = s + 2c.$$

□

Для минимального двусвязного графа G определим

$$f(G) = 3v_2(G) - (v(G) + 4) = 2v_2(G) - v_3(G) - 4.$$

Теперь докажем частный случай теоремы Мадера, обсуждавшейся в разделе 5.4. Впервые этот результат был получен независимо в 1968 году в работах Дирака и Пламмера (точнее, он является следствием полученных там результатов).

Следствие 5.8. Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда $v_2(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$.

Доказательство. Утверждение эквивалентно тому, что $f(G) \geq 0$. Так как уменьшенная степень каждой вершины из $V_3(G)$ не менее 1, мы имеем $v_3(G) \leq s$. Так как каждая крайняя часть графа G содержит хотя бы одну вершину из $V_2(G)$, мы имеем $v_2(G) \geq t$. Поэтому из леммы 5.21 следует, что

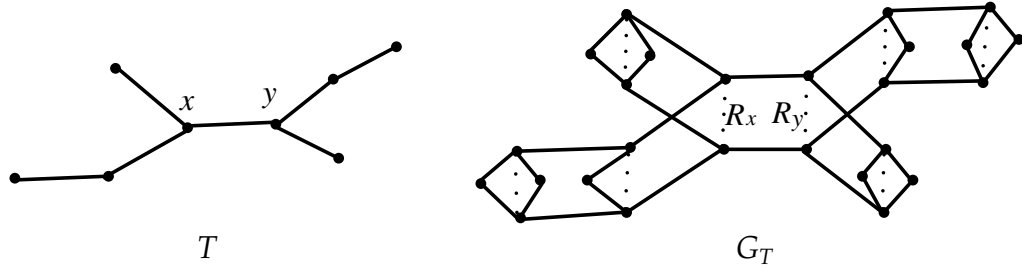
$$f(G) = 2(v_2(G) - t) + 2(c - 2) + (s - v_3(G)) \geq 0. \quad (5.4)$$

□

Изучим структуру минимальных двусвязных графов, содержащих минимальное возможное число вершин степени 2 — то есть, таких минимальных двусвязных графов G , что $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ (или, что то же самое, $f(G) = 0$). Очевидно, это возможно только при $v(G)$, дающем остаток 2 от деления на 3. Обозначим множество всех таких графов с $3k + 2$ вершинами через $\mathcal{GM}(3k + 2)$.

Определение 5.15. Пусть T — дерево, $\Delta(T) \leq 3$. Построим двусвязный граф G_T следующим образом. Рассмотрим две копии T_1 и T_2 дерева T с непересекающимися наборами вершин и изоморфизмы деревьев $\varphi_i : V(T) \rightarrow V(T_i)$. Пусть каждой вершине $x \in V(T)$ соответствует двухвершинное разделяющее множество $R_x = \{x_1, x_2\}$ графа G_T , где $x_i = \varphi_i(x) \in V(T_i)$. Для каждой вершины $x \in V(T)$ степени $d_T(x) = 3 - k$ добавим k вершин степени 2, смежных с x_1 и x_2 (то есть, с вершинами R_x).

Пример дерева T и соответствующего ему графа G_T изображен на рисунке 5.10.

Рис. 5.10: Дерево T и минимальный двусвязный граф G_T .

Замечание 5.10. Пусть $v(T) = k$.

1) В графе G_T все вершины двух копий дерева T имеют степень 3, а остальные вершины — степень 2. Таким образом, нетрудно понять, что $v(G_T) = 3k + 2$ и $v_2(T) = k + 2$.

2) Граф G_T двусвязен.

3) Из пунктов 1 и 2 следует, что $G_T \in \mathcal{GM}(3k + 2)$.

4) Если в дереве $\text{BT}(G_T)$ удалить все висячие вершины (соответствующие крайним частям-треугольникам) и стянуть по ребру, инцидентному каждой вершине степени 2, соответствующей некрайней части-четырёхугольнику, то получится дерево T .

Теорема 5.17. Пусть $k \geq 1$. Тогда $\mathcal{GM}(3k + 2)$ состоит из графов вида G_T , где T — дерево с $v(T) = k$ и $\Delta(T) = 3$.

Доказательство. Применим обозначения из леммы 5.21 и теоремы 5.16. Из формулы (5.4) следует, что

$$v_2(G) = t, \quad c = 2, \quad s = v_3(G).$$

Условие $v_2(G) = t$ означает, что некрайние части не содержат вершин степени 2 (и, следовательно, имеют пустую внутренность), а каждая крайняя часть содержит ровно одну вершину степени 2 (то есть, является треугольником).

По формуле 5.3, условие $c = 2$ означает, что $s(A) = 2$ для любой некрайней части $A \in \text{Part}(G)$. Это означает, что A — не блок (иначе $s(A) = |A| \geq 4$). Таким образом, часть A — цикл и имеет степень $d_{\text{BT}(G)}(A) = 2$.

Условие $s = v_3(G)$ означает, что все вершины из $V_3(G)$ имеют степень 3. Если какое-то множество имеет степень 4 в $\text{BT}(G)$, то по лемме 5.15 его вершины имеют степень хотя бы 4. Значит, все одиночные множества имеют степень 3 в графе $\text{BT}(G)$.

Предположим, что какие-то два одиночных множества S и S' графа G пересекаются по вершине v . Мы знаем, что $|\text{Part}(S)| = d_{\text{BT}(G)}(S) \geq 3$ (по теореме 5.10 и лемме 5.20). Пусть $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2, A\}$, причем $S' \subset A$. Аналогично можно считать, что $\text{Part}(S') = \{A'_1, A'_2, A'\}$, причем $S \subset A'$. Тогда внутренности $\text{Int}(A_1)$, $\text{Int}(A_2)$, $\text{Int}(A'_1)$, $\text{Int}(A'_2)$ попарно не пересекаются. Так как $v \in S$, то v смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A_1)$ и с хотя бы одной вершиной из $\text{Int}(A_2)$. Так как $v \in S'$, то v смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A'_1)$ и с хотя бы одной вершиной из $\text{Int}(A'_2)$. Таким образом, $d_G(v) \geq 4$, противоречие.

Таким образом, никакие два одиночных множества графа G не пересекаются. Вместе со сказанным выше это означает, что все некрайние части графа G — четырёхугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в $\text{BT}(G)$. Значит, по теореме 5.16 граф H — объединение двух изоморфных деревьев (пусть одно из них T). Понятно, что $\Delta(T)$ не превосходит степени одиночных множеств графа G в $\text{BT}(G)$, то есть, 3. Поскольку все крайние части графа G — треугольники, а степень каждой вершины из $V_3(G)$ в графе G равна 3, то из определения графа G_T следует, что $G = G_T$. Из замечания 5.10 теперь понятно, что $v(T) = k$. \square

Замечание 5.11. Для любого $n \geq 5$ определим $\mathcal{GM}(n)$ как множество всех минимальных двусвязных графов на n вершинах, имеющих минимально возможное количество вершин степени 2 — то есть, $\lceil \frac{n+4}{3} \rceil$. Используя дерево разбиения можно описать все такие графы с помощью графов вида G_T .

5.5.5 Теорема о разбиении

Рассмотрим конечное множество вершин V . Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько классов (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина w разделяет вершины v_1 и v_2 , если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w .

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V . Построим *гиперграф разбиения* $\text{Struct}(V)$ на вершинах множества V , гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение имеет эта конструкция к теории связности. Пусть F — связный граф, а $\mathfrak{R}(F)$ — множество всех его точек сочленения. Для такой вершины a классы разбиения $\mathfrak{R}(F)_a$ будут состоять из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$.

Именно классическая структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам результат теоремы 5.18.

Определение 5.16. Пусть H — гиперграф.

1) Будем называть последовательность различных вершин $a_1 a_2 \dots a_k$ *циклом*, если существуют гиперребра e_1, e_2, \dots, e_k такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$. (Мы считаем, что $a_{k+1} = a_1$.)

2) Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если он связан (то есть между любыми двумя вершинами есть путь), ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом графе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

Назовем вершину v гипердерева H *крайней*, если граф $H - v$ связан.

3) По гиперграфу H построим двудольный граф $T(H)$, вершины одной доли которого — вершины H , а вершины другой доли — гиперребра H . Гиперребро R соединим со всеми вершинами, которые оно содержит

Крайняя вершина гипердерева — это аналог висячей вершины обыкновенного дерева.

Лемма 5.22. Если H — гипердерево, то $T(H)$ — дерево.

Доказательство. Связность $T(H)$ очевидна. Пусть в $T(H)$ есть простой цикл $a_1 R_1 \dots a_n R_n$ (где a_1, \dots, a_n — вершины, а R_1, \dots, R_n — гиперребра.) Пусть

$$R'_k = R_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} R_i \cup \{a_1, \dots, a_n\} \right).$$

Выпишем вершины в таком порядке: сначала вершины из R'_1 , затем a_1 , затем все вершины из R'_2 , затем a_2, \dots , затем все вершины из R'_n и, наконец, a_n . Мы получили цикл в гипердереве H , содержащий все вершины гиперребер R_1, \dots, R_n , а значит, существует гиперребро R , содержащее все вершины этого цикла. Но тогда $R \supsetneq R_1$, что невозможно. \square

Теорема 5.18. Пусть для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c , то b не разделяет a и c . Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Граф $\text{Struct}(V)$ является гипердеревом.
- 2) Пусть для некоторой вершины $a \in V$ граф $\text{Str}(V) - a$ распадается на компоненты связности W_1, \dots, W_ℓ . Тогда $V_a = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.
- 3) Пусть $a \in V$, а W — компонента связности графа $\text{Str}(V)$. Тогда существует единственное гиперребро $\text{Str}(V)$, содержащее a и вершины из W . Это гиперребро не содержит вершин других компонент связности $\text{Str}(V) - a$.
- 4) Никакие два гиперребра $\text{Struct}(V)$ не имеют двух общих вершин.

Замечание 5.12. 1) Здесь и далее под компонентой связности гиперграфа мы подразумеваем максимальное по включению множество его попарно связанных вершин.

2) Подробнее объясним, что такое $K(V) - a$. Вершина a удаляется из множества вершин и из всех гиперребер, в которых оно есть. При этом гиперребро, содержащее две вершины, одна из которых — a , перестает существовать.

Доказательство. 1) **а.** Докажем индукцией по количеству вершин, что существуют такие вершины $a, b \in V$, для которых $|V_a| = |V_b| = 1$. База для множества, состоящего не более, чем из трех вершин, очевидна.

Докажем индукционный переход. Рассмотрим произвольную вершину $c \in V$, пусть $V' = V \setminus \{c\}$. По индукционному предположению, существуют такие две вершины $a, b \in V'$, что $|V'_a| = |V'_b| = 1$. Тогда $|V_a| > 1$ в том и только том случае, когда разбиение V_a состоит из двух классов V' и $\{c\}$.

Пусть $|V_a| > 1$. Из сказанного выше следует, что в этом случае b не может разделять a и c , следовательно, $|V_b| = 1$. Для любой вершины $x \in V' \setminus \{a\}$, так как вершина a разделяет c и x , то c не разделяет a и x . Таким образом, $|V_c| = 1$.

б. Докажем индукцией по количеству вершин в множестве V связность графа $\text{Struct}(V)$. База для множества, состоящего не более, чем из трех вершин, очевидна. Рассмотрим вершины $a, b \in V$ такие, что $|V_a| = |V_b| = 1$. Пусть $V' = V \setminus \{a\}$. По индукционному предположению, граф $\text{Struct}(V')$ связан. Так как $|V_a| = 1$, то все вершины множества V' связаны и в графе $\text{Struct}(V)$. По аналогичным причинам, вершины множества $V \setminus \{b\}$ связаны в $\text{Struct}(V)$, что означает связность графа $\text{Struct}(V)$.

с. Пусть $a_1 a_2 \dots a_k$ — путь в гиперграфе $\text{Struct}(V)$, а вершина b не лежит на нем. Тогда b не разделяет пары вершин a_1 и a_2, \dots, a_{k-1} и a_k . Следовательно, b не разделяет a_1 и a_k .

Из этого факта очевидно следует, что любые две вершины, входящие в какой-либо цикл графа $\text{Struct}(V)$ невозможно разделить никакой отличной от них вершиной. Следовательно, все вершины цикла принадлежат одному гиперребру. Таким образом, граф $\text{Struct}(V)$ является гипердеревом.

2) Рассмотрим множество W_i . Из доказанного выше следует, что a не разделяет никакие две вершины из W_i , следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе разбиения V_a .

Рассмотрим две разные компоненты W_i и W_j и выберем в них смежные с a вершины w_i и w_j соответственно (см. рисунок 5.11а). Никакая

отличная от w_i, w_j, a вершина не может разделить пары смежных вершин w_i и a , а также w_j и a . Следовательно, разделить вершины w_i и w_j может только a . Поскольку w_i и w_j не принадлежат одному гиперребру, то a их разделяет, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе V_a , а все вершины из W_j — в другом.

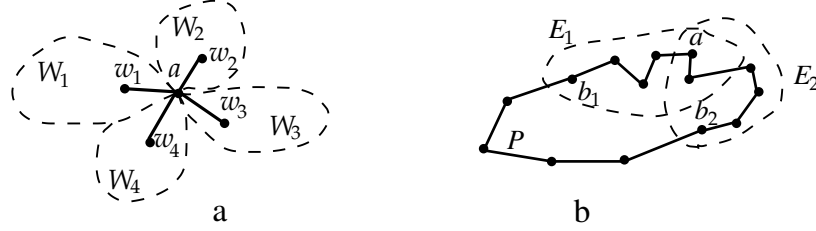


Рис. 5.11: Компоненты связности $\text{Struct}(V) - a$.

3) Так как $\text{Struct}(V)$ — связный гиперграф, то существует его гиперребро, состоящее из a и нескольких вершин из W . Это гиперребро не может содержать вершины, отличные от a и входящих в W (иначе W не была бы компонентой связности гиперграфа $\text{Struct}(V) - a$).

Пусть существует два таких гиперребра, E_1 и E_2 . По построению $\text{Struct}(V)$ понятно, что ни одно из них не является подмножеством другого, то есть, множества $E_1 \setminus E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ непусты. Так как индуцированный подграф гиперграфа $\text{Struct}(V)$ на W связан, существует путь P от $b_1 \in E_1 \setminus E_2$ до $b_2 \in E_2 \setminus E_1$, внутренние вершины которого лежат в W , но не лежат в $E_1 \triangle E_2$ (отметим, что внутренние вершины пути P могут лежать в $E_1 \cap E_2$).

Пусть простой путь Q_1 начинается в a , проходит все вершины из $E_1 \setminus E_2$ и заканчивается в b_1 , а простой путь Q_2 начинается в b_2 и проходит все вершины из $E_2 \setminus E_1$. Рассмотрим простой цикл Z , полученный последовательным прохождением путей Q_1, P, Q_2 , затем всех вершин из $E_1 \cap E_2$, не вошедших в путь P и, наконец, возвращающийся в a (см. рисунок 5.11b). Этот цикл содержит все вершины различных гиперребер E_1 и E_2 , но его вершины должны образовывать подмножество некоторого гиперребра E . Тогда $E_1 \subsetneq E$, противоречие с построением $\text{Struct}(V)$.

4) Предположим противное, пусть оба гиперребра E_1 и E_2 содержат $\{a, b\}$. Тогда оба этих гиперребра содержат a и вершины одной компоненты связности гиперграфа $\text{Struct}(V) - a$ (той, что содержит b), а это противоречит пункту 3. \square

Замечание 5.13. 1) Из теоремы 5.18 следует, что множество $W = \{a \in V : |V_a| = 1\}$ — это множество всех крайних вершин гипердерева $K(V)$, причем если $|V| \geq 2$, то и $|W| \geq 2$.

2) Из пунктов 2 и 3 теоремы 5.18 следует, что степень $d_{\text{Struct}(V)}(w)$ равняется количеству классов $|V_w|$. Таким образом, крайняя вершина входит ровно в одно гиперребро гипердерева $\text{Struct}(V)$.

5.5.6 Компоненты зависимости

В этом разделе G — k -связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 5.17. 1) *Граф зависимости* $\text{Dep}(\mathfrak{S})$ набора \mathfrak{S} — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

2) Будем называть *компонентой зависимости* набора \mathfrak{S} любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $\text{Dep}(\mathfrak{S})$.

Мы изучим взаимное расположение компонент зависимости набора \mathfrak{S} с помощью доказанной ранее **теоремы о разбиении**.

Перед основными теоремами раздела нам необходимо доказать несколько лемм.

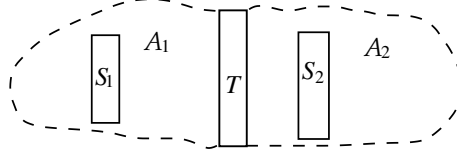
Определение 5.18. Назовем наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если они не пересекаются и любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы.

Понятно, что любые две компоненты зависимости набора \mathfrak{S} независимы.

Лемма 5.23. Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а граф зависимости $\text{Dep}(\mathfrak{S})$ связен. Тогда все множества набора \mathfrak{S} лежат в одной части $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, а никакая другая часть из $\text{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит ни одного множества набора \mathfrak{S} .

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $T \in \mathfrak{T}$. Так как T и любое множество $S \in \mathfrak{S}$ независимы, то каждое такое S целиком содержится в некоторой части из $\text{Part}(T)$. Пусть множества $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ лежат в разных частях $A_1, A_2 \in \text{Part}(T)$, соответственно (см. рисунок 5.12). Тогда $S_2 \cap \text{Int}(A_1) = \emptyset$, следовательно, по лемме 5.7 множество S_2 не разделяет часть A_1 , а значит и множество S_1 . Таким образом, множества S_1 и S_2 независимы.

Отсюда в силу связности графа зависимости $\text{Dep}(\mathfrak{S})$ следует, что все множества набора \mathfrak{S} содержатся в одной части из $\text{Part}(T)$. Так как это утверждение верно для любого множества $T \in \mathfrak{T}$, то существует часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, содержащая все множества набора \mathfrak{S} .

Рис. 5.12: Множества S_1 и S_2 из разных частей $\text{Part}(T)$.

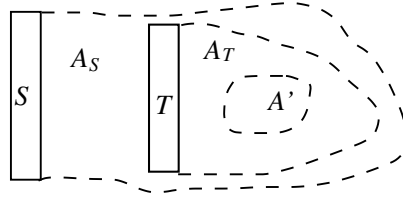
Предположим, что отличная от A часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, содержит множество $S \in \mathfrak{S}$. Тогда $S \subset A \cap B$, но пересечение $A \cap B$ является подмножеством одного из множеств набора \mathfrak{T} , что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Лемма 5.24. Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ независимы. Пусть часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора \mathfrak{S} , а часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ содержит все множества набора \mathfrak{T} . Тогда B содержит объединение всех отличных от A частей из $\text{Part}(\mathfrak{T})$.

Доказательство. Рассмотрим отличную от A часть $A' \in \text{Part}(\mathfrak{T})$. Если часть A' пуста, то она состоит из вершин множеств набора \mathfrak{T} и, следовательно, содержится в B . Далее будем рассматривать случай, когда часть A' непуста. По теореме 5.6 существует представление

$$A' = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} A_T, \quad \text{где } A_T \in \text{Part}(T).$$

Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$: оно отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A' , следовательно, $S \cap \text{Int}(A_T) = \emptyset$. По лемме 5.7 тогда существует такая часть $A_S \in \text{Part}(S)$, что $A_S \supset A_T \supset A'$ (см. рисунок 5.13). Множество вершин $M = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S$ содержит A . Так как M невозможно разделить никаким множеством набора \mathfrak{S} , то существует часть $B' \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, содержащая M , и, следовательно, содержащая A' .

Рис. 5.13: Части A' , A_T и A_S .

Предположим, что $B' \neq B$. Граница части $A' \in \text{Part}(\mathfrak{T})$ состоит из вершин множеств набора \mathfrak{T} и, следовательно, содержится в B . Таким

образом, из $B' \neq B$ следует

$$\text{Bound}(A') \subset B \cap B' \subset S \in \mathfrak{S},$$

откуда в силу непустоты части A' имеем $\text{Bound}(A') = S$. Однако, по условию $S \subset A$, следовательно,

$$S \subset A \cap A' \subset T \in \mathfrak{T},$$

откуда $S \in \mathfrak{T}$, что невозможно. Следовательно, сделанное выше предположение невозможно и $A' \subset B$. \square

До конца этого раздела мы будем считать, что $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ — все компоненты зависимости набора \mathfrak{S} . Множество всех компонент зависимости обозначим через $\text{Comp}(\mathfrak{S})$.

Определение 5.19. Будем говорить, что часть $\text{Part}(\mathfrak{S}_i)$ содержит компоненту зависимости \mathfrak{S}_j , если она содержит все входящие в \mathfrak{S}_j множества. Такая часть существует и единственна по лемме 5.23, обозначим ее через $A_{i \supset j}$.

Переформулируем утверждение леммы 5.24 на языке компонент зависимости.

Следствие 5.9. Часть $A_{i \supset j}$ содержит объединение всех частей $\text{Part}(\mathfrak{S}_j)$, кроме $A_{j \supset i}$.

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение $\text{Class}_{\mathfrak{T}}(\text{Comp}(\mathfrak{S}))$ остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\text{Part}(\mathfrak{T})$.

В следующей теореме мы описали структуру взаимного расположения компонент зависимости с помощью гипердерева.

Определение 5.20. Гиперграф описанного выше разбиения $\text{Struct}(\text{Comp}(\mathfrak{S}))$ мы будем называть *гиперграфом компонент зависимости* набора \mathfrak{S} и для простоты обозначать через $\text{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 5.19. 1) Гиперграф компонент зависимости $\text{Struct}(\mathfrak{S})$ является гипердеревом.

2) Пусть $\mathfrak{T} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$, а $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ — компоненты связности гиперграфа $\text{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Тогда компоненты зависимости из множества \mathcal{C}_i содержатся в одной части $B_i \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, причем $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.

3) Пусть $\mathfrak{T} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$, а часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$ содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа $\text{Struct}(\mathfrak{S})$, вершинами которого являются \mathfrak{T} и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части A .

Доказательство. 1) и 2) Проверим выполнение условия из теоремы 5.18 для описанного выше разбиения множества $\text{Comp}(\mathfrak{S})$. Пусть компонента зависимости \mathfrak{S}_i разделяет \mathfrak{S}_j и \mathfrak{S}_ℓ , то есть, части $A_{i \supset j}$ и $A_{i \supset \ell}$ различны. Тогда по следствию 5.9 мы имеем $A_{j \supset i} \supset A_{i \supset \ell}$, то есть, \mathfrak{S}_j не разделяет \mathfrak{S}_i и \mathfrak{S}_ℓ . Теперь утверждения 1 и 2 настоящей теоремы следуют из теоремы 5.18.

3) Как показано выше, для каждой компоненты из $\text{Comp}(\mathfrak{S})$ либо все ее множества содержатся в A , либо ни одно из них не лежит в A . Из условия следует, что множество $\mathcal{C}_A \subset \text{Comp}(\mathfrak{S})$ компонент зависимости, все множества которых содержатся в A , непусто. Из пунктов 1 и 2 следует, что компоненты зависимости из \mathcal{C}_A образуют компоненту связности гиперграфа $\text{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Теперь пункт 3 настоящей теоремы следует из пункта 3 теоремы 5.18. \square

Далее мы опишем части $P(\mathfrak{S})$ с помощью гиперребер гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Следствие 5.10. Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, граф зависимости $\text{Dep}(\mathfrak{T})$ связан, множество $T \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus \mathfrak{T}$ является границей части $B \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, а все множества набора \mathfrak{T} лежат в части $F \in \text{Part}(T)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Часть B представляет собой объединение всех частей из $\text{Part}(T)$.
- 2) Никакая отличная от B часть из $\text{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит множество T .

Доказательство. 1) Очевидно, наборы \mathfrak{T} и $\{T\}$ независимы. По лемме 5.24 часть B содержит объединение всех отличных от F частей из $\text{Part}(T)$. Учитывая, что любая часть из $\text{Part}(\mathfrak{T})$ с границей T есть объединение нескольких частей из $\text{Part}(T)$, мы получаем утверждение следствия.

2) По лемме 5.23 никакая отличная от B часть из $\text{Part}(\mathfrak{T})$ не может содержать множество T , а все множества набора \mathfrak{T} лежат в одной части $F \in \text{Part}(T)$. \square

Лемма 5.25. Пусть графы зависимости непересекающихся наборов $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{R}_k(G)$ связны, а множество $R \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ таково, что все вершины множеств из \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 содержатся в одной части $F \in \text{Part}(R)$ и существует часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{T}_1) \cap \text{Part}(\mathfrak{T}_2)$ с границей R . Тогда наборы $\mathfrak{T}_1 \in \mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2 \in \mathfrak{T}_2$ не являются независимыми.

Доказательство. Предположим противное, пусть наборы \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 независимы. По следствию 5.10 часть A является объединением всех отличных от F частей из $\text{Part}(R)$. По лемме 5.23 все множества набора \mathfrak{T}_1

лежат в одной части $B \in \text{Part}(\mathfrak{T}_2)$. Поскольку множество $R \subset \bigcup_{T \in \mathfrak{T}_1} T$ также лежит в B , то по пункту 2 следствия 5.10 имеем $A = B$. Однако, все множества набора \mathfrak{T}_1 лежат в F , причем $F \cap A = R$. Следовательно, все эти множества совпадают с R , что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Лемма 5.26. Пусть $R = \{\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n\}$ — гиперребро $\text{Struct}(\mathfrak{S})$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $A_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая множества всех остальных компонент зависимости из R . Тогда для множества вершин

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

выполняется одно из двух утверждений.

1° Множество A является частью $\text{Part}(\mathfrak{S})$, содержит хотя бы k вершин, причем $\text{Bound}(A) = \bigcup_{i=1}^n \text{Bound}(A_i)$.

2° $n = 2$, $\text{Bound}(A_1) = \text{Bound}(A_2) = A \in \mathfrak{S}$, причем одна из компонент зависимости \mathfrak{S}_1 или \mathfrak{S}_2 — это $\{A\}$.

Доказательство. Рассмотрим любую компоненту зависимости \mathfrak{S}_ℓ , не входящую в R (если такая существует). Рассмотрим все пути в $\text{Struct}(\mathfrak{S})$ от \mathfrak{S}_ℓ до гиперребра R , внутренние вершины которых не входят в R и отметим множество всех их концов в гиперребре R . Пусть мы отметили хотя бы две вершины (то есть, компоненты зависимости) из R . Тогда в $\text{Struct}(V)$ существует цикл Z , содержащий две отмеченные вершины и хотя бы одну вершину не из R (см. рисунок 5.14а), а следовательно, существует и гиперребро E , содержащее все вершины Z . Это гиперребро не совпадает с R и $|E \cap R| \geq 2$, что противоречит пункту 4 теоремы 5.18.

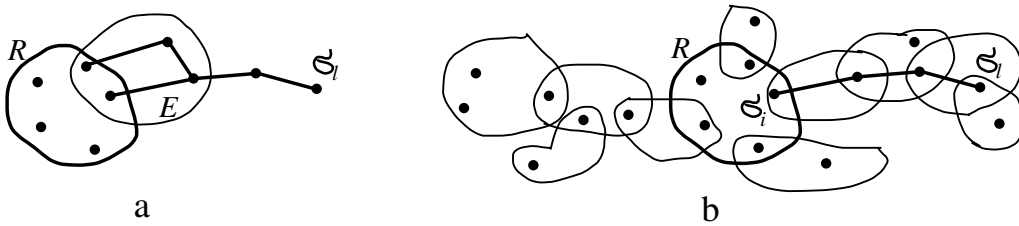


Рис. 5.14: Гипердерево $\text{Struct}(\mathfrak{S})$ и его гиперребро R .

Значит, каждый путь в $\text{Struct}(\mathfrak{S})$ от \mathfrak{S}_ℓ до гиперребра R , внутренние вершины которого не входят в R , имеет концом одну и ту же компоненту зависимости — пусть это \mathfrak{S}_i (где $1 \leq i \leq n$). Это означает, что \mathfrak{S}_i отделяет \mathfrak{S}_ℓ от компонент зависимости, входящих в R и отличных от \mathfrak{S}_i (см. рисунок 5.14b). Тогда по утверждению 2 теоремы 5.19 мы имеем

$A_{i \supset \ell} \neq A_i$. Таким образом, ни одно из множеств набора \mathfrak{S}_ℓ не может содержаться в A_i , а стало быть, и в A .

По следствию 5.9 из $A_{i \supset \ell} \neq A_i$ следует, что $A_{\ell \supset i} \supset A_i \supset A$. Следовательно, множества компонент зависимости, не принадлежащих гиперребру R , не разделяют A . Тогда по теореме 5.6 либо $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, либо A — подмножество одного из множеств набора \mathfrak{S} . Поскольку для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i \supset \bigcup_{j=1}^n \text{Bound}(A_j), \quad \text{то} \quad A \supset \bigcup_{j=1}^n \text{Bound}(A_j),$$

откуда $|A| \geq k$ (для любого j часть A_j непуста, следовательно, $|\text{Bound}(A_j)| \geq k$).

Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим вершину $x \in \text{Bound}(A)$. По теореме 5.4 существует вершина $y \notin A$, смежная с x . Не умаляя общности предположим, что $y \notin A_i$. Тогда по теореме 5.4 мы имеем $x \in \text{Bound}(A_i)$. Каждая вершина из $\bigcup_{i=1}^n \text{Bound}(A_i)$ принадлежит части A и какому-то из множеств набора \mathfrak{S} , поэтому $\text{Bound}(A) = \bigcup_{i=1}^n \text{Bound}(A_i)$.

Пусть $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда из сказанного выше следует, что

$$\text{Bound}(A_1) = \text{Bound}(A_2) \cdots = \text{Bound}(A_n) = A \in \mathfrak{S}.$$

Из доказанного выше следует, что содержащееся в A множество из \mathfrak{S} должно принадлежать одной из компонент зависимости гиперребра R . Тогда не умаляя общности можно считать, что $A \in \mathfrak{S}_1$.

Так как $A = \text{Bound}(A_1)$ — граница части $\text{Part}(\mathfrak{S}_1)$, то A и любое множество набора \mathfrak{S}_1 — независимы, откуда следует, что $\mathfrak{S}_1 = \{A\}$. Предположим, что $n \geq 3$. По следствию 5.10 множество B , равное объединению всех отличных от A_1 частей из $\text{Part}(A)$, принадлежит $\text{Part}(\mathfrak{S}_2) \cap \text{Part}(\mathfrak{S}_3)$. Тогда по лемме 5.25 граф зависимости $\text{Dep}(\mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3)$ связан, что невозможно. \square

Определение 5.21. Определенную в лемме 5.26 часть A мы назовем *частью, соответствующей гиперребру R* (даже в случае, когда $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$).

Теорема 5.20. Пусть G — k -связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Пусть $\mathfrak{S}' \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$ и часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$ таковы, что A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Тогда $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Пусть $H \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда либо часть H соответствует некоторому гиперребру R гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$, либо существует такая компонента зависимости $\mathfrak{S}' \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$, что $H \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$.

Доказательство. 1) Так как часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$, то по лемме 5.24 ни одно из этих множеств не разделяет A . Тогда по следствию 5.4 мы имеем $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Докажем утверждение индукцией по количеству компонент зависимости в наборе. База для случая, когда компонента зависимости одна, очевидна. Докажем переход. Пусть $\mathfrak{T} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$ — компонента зависимости, соответствующая крайней вершине гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$; эта компонента зависимости не разделяет никакие две другие и по теореме 5.18 принадлежит ровно одному гиперребру R гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$.

Утверждение пункта 2 для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ уже доказано. Пусть часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора \mathfrak{T}' , а часть $B' \in \text{Part}(\mathfrak{T}')$ содержит все множества набора \mathfrak{T} . По теореме 5.6 для любой части $H \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ существует представление $H = H_1 \cap H_2$, где $H_1 \in \text{Part}(\mathfrak{T})$ и $H_2 \in \text{Part}(\mathfrak{T}')$.

Если $H_1 = B$ и $H_2 = B'$, то A — часть, соответствующая гиперребру R . По лемме 5.24 часть B содержит объединение всех отличных от B' частей из $\text{Part}(\mathfrak{T}')$, а часть B' содержит объединение всех отличных от B частей из $\text{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда по следствию 5.4 остальные части из $\text{Part}(\mathfrak{S})$ — это либо части из $\text{Part}(\mathfrak{T})$, либо части из $\text{Part}(\mathfrak{T}')$, откуда очевидно следует доказываемое утверждение. \square

Следствие 5.11. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $\mathfrak{T} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$, $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда либо $\{\text{Bound}(A)\} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$, либо существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, что $\text{Bound}(B) \supset \text{Bound}(A)$.

Доказательство. Если часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$, то по части 3 теоремы 5.20 мы имеем $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$.

Пусть часть A содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда по теореме 5.19 существует такое гиперребро гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$, что одной из его вершин является \mathfrak{T} , а все остальные вершины этого гиперребра — компоненты зависимости, содержащиеся в A . Тогда по пункту 1 теоремы 5.20 либо существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, что $\text{Bound}(B) \supset \text{Bound}(A)$, либо $\{\text{Bound}(A)\} \in \text{Comp}(\mathfrak{S})$. \square

Определение 5.22. Назовем компоненту зависимости набора \mathfrak{S} *крайней*, если она соответствует висячей вершине гипердерева $\text{Struct}(\mathfrak{S})$.

Замечание 5.14. 1) У любого набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ с несвязным графом зависимости — хотя бы две крайних компоненты зависимости.

2) Из теоремы 5.19 следует, что компонента зависимости \mathfrak{S}' набора \mathfrak{S} не разделяет никакие две компоненты зависимости этого набора тогда и только тогда, когда она является крайней.

5.5.7 Ромашки

Перейдем к определению *ромашки* — важнейшего в нашей работе понятия. Не удивляйтесь, сначала определяемый объект может показаться вам несколько странным и может возникнуть вопрос: а зачем изучать этот частный случай. Дальше мы постараемся показать значение ромашек. С их помощью мы опишем структуру взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств в трехсвязном графе. Перейдем к определению. Напомним, что мы имеем дело с k -связным графом G , где $k \geq 2$.

Пусть $m \geq 4$, а попарно не пересекающиеся множества $P, Q_1, \dots, Q_m \subset V(G)$ таковы, что

$$0 \leq |P| < k, \quad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}$$

для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$, в котором множества Q_1, \dots, Q_m считаются циклически упорядоченными. Мы будем считать, что циклическая перестановка множеств Q_1, \dots, Q_m не меняет набора F . Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ — набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j .

Определение 5.23. Пусть существует такой набор $\mathfrak{S} \subset (\mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}_k(G))$, что

$$\text{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}, \quad \text{причем} \quad \text{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}.$$

Тогда назовем набор F *ромашкой*, множество P — *центром*, а множества Q_1, \dots, Q_m — *лепестками* этой ромашки. Если никакие два лепестка ромашки F не пересекаются, то назовем эту ромашку *правильной*. Будем говорить, что набор \mathfrak{S} *порождает* ромашку F .

Одну и ту же ромашку могут порождать различные наборы разделяющих множеств. Ниже мы докажем, что если наборы \mathfrak{S} и \mathfrak{T} порождают ромашку F , то $\text{Part}(\mathfrak{S}) = \text{Part}(\mathfrak{T})$. Мы будем называть это разбиение *разбиением графа G ромашкой F* и обозначать через $\text{Part}(F)$.

Также будет доказано, что если F — ромашка, то $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$. При $k \leq 3$ имеет место совпадение $\text{Part}(\mathfrak{R}(F)) = \text{Part}(F)$, что не всегда верно при $k \geq 4$.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Расположим лепестки Q_1, Q_2, \dots, Q_m по окружности соответственно их циклическому порядку и поместим в центр окружности центр

ромашки P . Между лепестками Q_i и Q_{i+1} мы поместим часть $G_{i,i+1}$. На рисунке изображено разбиение графа ромашкой с восемью лепестками. Введем обозначение $G_{i,j} = \bigcup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). В теореме 5.21 мы докажем, что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$ то есть, разбивает граф именно так, как соответствующая этому множеству ломаная разбивает круг.

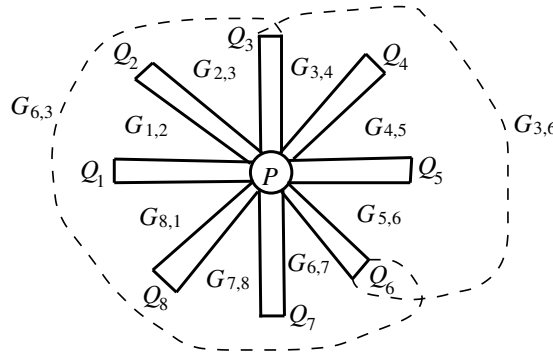


Рис. 5.15: Разбиение графа ромашкой с восемью лепестками.

Посмотрим, какими могут быть ромашки при малых k . Нетрудно понять, что у любой ромашки в двусвязном графе центр пуст, а каждый лепесток является одиночной вершиной. Таким образом, ромашка представляет из себя “цикл”, хорды которого соответствуют разделяющим множествам. Именно такая конструкция стала одной из главных, с помощью которых В. Т. Татт в 1966 году описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. Далее мы приведем достаточно простое и наглядное описание структуры двусвязного графа с помощью ромашек.

Нетрудно понять, что у любой ромашки в трехсвязном графе и центр, и лепестки являются одиночными вершинами, такая ромашка напоминает “колесо”.

При больших k ромашки устроены значительно сложнее: и лепестки, и центр могут состоять из нескольких вершин. Уже при $k = 4$ возможны два разных типа ромашек: во-первых, центр может содержать две вершины, а лепестки по одной вершине. Во-вторых, центр ромашки может быть пустым, а лепестки могут содержать по две вершины.

Докажем ряд свойств ромашек при всех k .

Лемма 5.27. *Граф зависимости любого набора k -разделяющих множеств, порождающего ромашку, связан.*

Доказательство. Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ и набор \mathfrak{S} порождает ромашку F . Тогда $\text{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$, $\text{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Предположим, что граф $\text{Der}(\mathfrak{S})$ несвязен и рассмотрим любую компоненту зависимости \mathfrak{S}' набора \mathfrak{S} . Рассмотрим множество $Q_{i,j} \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Так как $Q_{i,j}$ и любое множество набора \mathfrak{S}' независимы, то существует часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая $Q_{i,j}$.

Понятно, что A есть объединение нескольких частей из $\text{Part}(F)$. Предположим, что одна из частей $G_{s-1,s}$ и $G_{s,s+1}$ лежит в A , а другая — нет. Так как множества набора \mathfrak{S}' не разделяют ни $G_{s-1,s}$, ни $G_{s,s+1}$, одно из этих множеств обязательно должно содержать лепесток $Q_s = G_{s-1,s} \cap G_{s,s+1}$, а следовательно, $Q_s \subset \text{Bound}(A)$. Назовем такой лепесток Q_s *граничным*. Понятно, что $\text{Bound}(A)$ есть объединение центра и нескольких (хотя бы двух) граничных лепестков.

Предположим, что граничных лепестков всего два, и они соседние. Тогда, так как часть A содержит два несоседних лепестка Q_i и Q_j , мы имеем $A = Q_{x+1,x}$ для некоторого $x \in [1..m]$. Но, так как $A \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$, ее внутренность не пересекается с множествами набора \mathfrak{S}' , а значит, все эти множества лежат в $Q_{x,x+1}$, что, очевидно, невозможно. Противоречие.

Значит, $\text{Bound}(A)$ содержит какие-то два несоседних лепестка Q_x и Q_y . По следствию 5.11 тогда существует такая часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, что $\text{Bound}(B) \supset \text{Bound}(A) \supset Q_x \cup Q_y$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Теорема 5.21. Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ — ромашка. Тогда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.

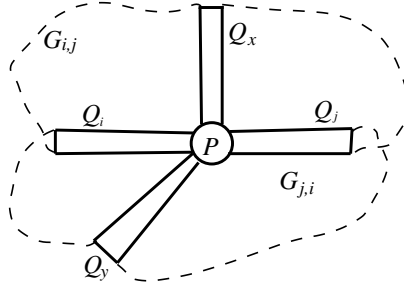
Доказательство. Пусть набор \mathfrak{S} порождает ромашку F , тогда

$$\text{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}, \quad \text{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}.$$

Пусть $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$. Тогда множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей $G_{x,x+1}$. Следовательно, оно не разделяет ни $G_{i,j}$, ни $G_{j,i}$. Отсюда следует, что $\text{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Назовем множество лепестков M ромашки F *хорошим*, если для любых двух различных лепестков $Q_i, Q_j \in M$ множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Для любого такого поднабора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, что граф $\text{Der}(\mathfrak{T})$ связан, мы докажем индукцией по $|\mathfrak{T}|$, что множество всех лепестков, входящих в множества из \mathfrak{T} , хорошее (обозначим это множество лепестков через $L(\mathfrak{T})$).

База для поднабора из одного множества уже проверена, докажем переход. В наборе $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, содержащем более одного множества, есть такое множество T , что для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \setminus \{T\}$ граф $\text{Der}(\mathfrak{T}')$ связан. По

Рис. 5.16: Множество $Q_{i,j}$.

индукционному предположению, множество лепестков $L(\mathfrak{T}')$ — хорошее. Пусть $T = Q_{i,j}$, тогда достаточно проверить, что для любого лепестка $Q_x \in L(\mathfrak{T}')$ множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,x}$ от $G_{x,i}$. Можно считать, что $Q_x \subset G_{i,j}$, $x \notin \{i, j\}$ (см. рисунок 5.16). Как доказано выше, множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Так как граф $\text{Der}(\mathfrak{T})$ связан, то существует такое множество $R \in \mathfrak{T}'$, что R и $Q_{i,j}$ зависимы; следовательно, $R \cap \text{Int}(G_{j,i}) \neq \emptyset$. Это означает, что $R \cap \text{Int}(G_{j,i}) = Q_y$, где $Q_y \in L(\mathfrak{T}')$ и $y \notin \{i, j\}$. По индукционному предположению, множество $Q_{x,y}$ отделяет $G_{x,y}$ от $G_{y,x}$. Таким образом, множества $Q_{i,j}$ и $Q_{x,y}$ зависимы и по лемме 5.8 множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,j} \cap G_{x,y} = G_{i,x}$ от остальных вершин графа (то есть, от $G_{x,i}$).

Так как по лемме 5.27 граф $\text{Der}(\mathfrak{S})$ связан, то теорема доказана. \square

Следствие 5.12. Для ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.

1) Расположим индексы $1, 2, \dots, m$ по окружности соответственно их циклическому порядку и поставим в соответствие множеству $Q_{i,j}$ хорду этой окружности, соединяющую i и j . Тогда множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми k -разделяющими множествами в том и только том случае, когда соответствующие им хорды окружности пересекаются во внутренней точке.

2) Если множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми разделяющими множествами, то $Q_{x,y}$ отделяет друг от друга лепестки Q_z и Q_t .

Доказательство этих утверждений непосредственно следует из теоремы 5.21.

Следствие 5.13. Для ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.

1) Пусть $j \notin \{i, i+1, i+2\}$. Тогда $G_{i,j} \in \text{Part}(Q_{i,j})$.

2) Пусть хотя бы одна из частей $G_{i,i+1}$ или $G_{i+1,i+2}$ непуста. Тогда $G_{i,i+2} \in \text{Part}(Q_{i,i+2})$.

Доказательство. 1) В рассматриваемом случае $\text{Int}(G_{i,j-1})$ содержит Q_{i+1} и, следовательно, непусто. По теореме 5.21 множество $G_{i,j-1}$ является объединением частей $A_1, \dots, A_\ell \in \text{Part}(Q_{i,j-1})$ (возможно, $\ell = 1$), причем легко видеть, что все эти части непусты, а их внутренности не пересекаются с $Q_{i,j}$. Тогда $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей A_1, \dots, A_ℓ , а следовательно, и их объединение $G_{i,j-1}$. Аналогично, $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i+1,j}$. Теперь понятно, что $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i,j} = G_{i,j-1} \cup G_{i+1,j}$ (см. рисунок 5.17). Так как $Q_{i,j}$ по теореме 5.21 отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, то $G_{i,j} \in \text{Part}(Q_{i,j})$.

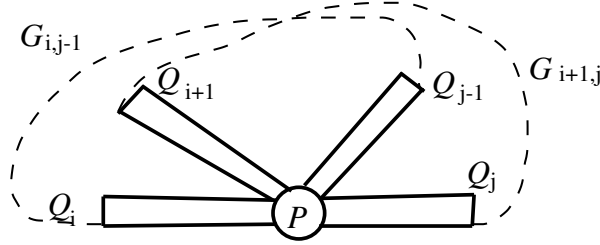


Рис. 5.17: Часть $G_{i,j}$.

2) Множество $Q_{i,i+2}$ не пересекает внутренность ни одной из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$. Следовательно, если какая-то из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ непуста, то $Q_{i,i+2}$ не разбивает эту часть. Отсюда очевидно следует утверждение пункта 2. \square

Пусть индексы i и j таковы, что $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$. Из утверждения 1 следствия 5.13 понятно, что тогда $\text{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Пусть $k \leq 3$. Как мы уже отмечали, в этом случае лепестки любой ромашки k -связного графа — одновершинные множества. Тогда из следствия 5.13 для любых двух несоседних в циклическом порядке индексов i, j получается, что $\text{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Теорема 5.22. Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ порождают ромашки F_S и F_T , соответственно, с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков. Тогда $\text{Part}(\mathfrak{S}) = \text{Part}(\mathfrak{T})$ и $F_S = F_T$ (то есть, циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).

Доказательство. Пусть $F_S = (P; Q_1, \dots, Q_m)$, тогда

$$\text{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}, \quad \text{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}.$$

Так как наборы лепестков ромашек F_S и F_T совпадают, то граница любой части из $\text{Part}(\mathfrak{T})$ есть множество вида $Q_{x,y}$. Предположим, что одна из частей $\text{Part}(F_T)$ имеет границу $Q_{i,j}$, где индексы i и j — несоседние в циклическом порядке ромашки F_S лепестки.

Рассмотрим две группы лепестков: лежащие в $G_{i,j}$ и лежащие в $G_{j,i}$ (лепестки Q_i и Q_j лежат в обеих группах). Множество $Q_{i,j}$ и любое множество набора $T \in \mathfrak{T}$ независимы, а значит, T по следствию 5.12 содержит либо два лепестка из первой группы (тогда назовем его множеством первого типа), либо два лепестка из второй группы (тогда назовем его множеством второго типа). Так как обе группы содержат отличные от Q_i и Q_j лепестки, то в наборе \mathfrak{T} есть и множества первого типа, и множества второго типа. Но по следствию 5.12 множества разных типов независимы, следовательно, граф $\text{Der}(\mathfrak{T})$ несвязен, противоречие с леммой 5.27.

Таким образом, циклический порядок в ромашках F_S и F_T совпадает. Отсюда по теореме 5.21 имеем $\text{Part}(\mathfrak{S}) = \text{Part}(\mathfrak{T})$, то есть, $F_S = F_T$. \square

Из теоремы 5.22 в частности, следует, что все наборы, порождающие ромашку F , разбивают граф одинаково. Этот факт показывает корректность определения разбиения графа ромашкой F .

Теорема 5.23. *Для любого набора k -разделяющих множеств \mathfrak{S} в k -связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

- 1° *Каждая часть из $\text{Part}(\mathfrak{S})$ содержит по крайней мере k вершин.*
- 2° *Каждая компонента зависимости набора \mathfrak{S} , состоящая более чем из одного множества, порождает ромашку.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из утверждения 2 по теореме 5.20. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим такой набор \mathfrak{S} , что в $\text{Part}(\mathfrak{S})$ нет малых частей, и его компоненту зависимости \mathfrak{S}' , состоящую более чем из одного множества. По теореме 5.20 в $\text{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Докажем, что если $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$, $|\mathfrak{T}| \geq 2$ и граф $\text{Der}(\mathfrak{T})$ связан, то набор \mathfrak{T} порождает правильную ромашку.

1. Проверим базу для набора, состоящего из двух зависимых множеств S и T .

Предположим, что часть $A \in \text{Part}(\{S, T\})$ — малая. Тогда по лемме 5.10 существуют смежные вершины $w \in A \setminus S$ и $w' \in A \setminus T$ и эта пара вершин принадлежит ровно одной части $\text{Part}(\{S, T\})$ — части A . Так как w и w' смежны, существует часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая w и w' . По теореме 5.6 существует такая часть $A' \in \text{Part}(\mathfrak{T})$, что $w, w' \in B \subset A'$. Так как часть A содержит w и w' , то $A' = A$. Тогда $|B| < k$, но в $\text{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Полученное противоречие показывает, что в $\text{Part}(\{S, T\})$

нет малых частей. Теперь из пункта 2 леммы 5.9 следует, что S и T образуют ромашку с четырьмя лепестками и центром $S \cap T$.

2. Докажем индукционный переход.

Пусть набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$ порождает ромашку $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$. Пусть $S \in \mathfrak{S}' \setminus \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \cup \{S\}$ таковы, что граф $\text{Dep}(\mathfrak{T}')$ связен. Докажем, что набор \mathfrak{T}' также порождает ромашку. Введем обозначения

$$p = |S \cap P|, \quad a_{i,i+1} = |S \cap \text{Int}(G_{i,i+1})|, \quad b_i = |S \cap Q_i|.$$

Тогда

$$\sum_{x=1}^m b_i + \sum_{x=1}^m a_{i,i+1} + p = k. \quad (5.5)$$

2.1. Докажем, что множество S не может разделять пустую часть $G_{i,i+1} \in \text{Part}(F)$.

Предположим противное. Так как $|G_{i,i+1}| = k$, то S разделяет эту часть на несколько малых частей из $\text{Part}(\mathfrak{T}')$. По теореме 5.21 мы знаем, что множества $Q_{i,i+2}, Q_{i-1,i+1} \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы и $G_{i,i+1}$ является объединением нескольких (возможно, одной) частей $\text{Part}(\{Q_{i,i+2}, Q_{i-1,i+1}\})$. Все эти части имеют пустую внутренность, поэтому по лемме 5.10 существуют смежные вершины $u \in Q_i, v \in Q_{i+1}$ (см. рисунок 5.18а).

Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v . По теореме 5.6 существует такая часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{T}')$, что $u, v \in B \subset A$. По теореме 5.6, часть A должна содержаться в какой-то части $\text{Part}(\mathfrak{T})$. Так как часть A содержит u и v , то можно сделать вывод $A \subset G_{i,i+1}$, следовательно, $|A| < k$. Тогда и $|B| < k$, но в $\text{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Полученное противоречие показывает, что S не может разделять ни одну из пустых частей из $\text{Part}(F)$.

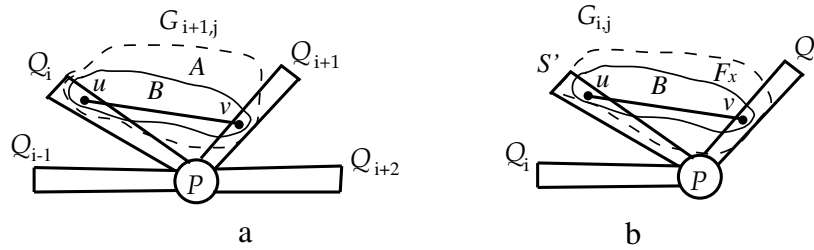


Рис. 5.18: Разбиение частей $\text{Part}(\mathfrak{T})$ множеством S .

2.2. Пусть множества S и $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы.

Не умаляя общности будем считать, что

$$|S \cap \text{Int}(G_{i,j})| \leq |S \cap \text{Int}(G_{j,i})|. \quad (5.6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} Q_{i,j} \cap S &= P', \quad Q_{i,j} \cap \text{Int}(H_x) = T_x, \quad \text{Int}(G_{i,j}) \cap S = S', \\ F_x &= G_{i,j} \cap H_x, \quad R_x = T_x \cup P' \cup S'. \end{aligned}$$

Пусть для некоторого x мы имеем $|R_x| < k$. Поскольку $G_{i,j}$ есть объединение нескольких частей из $\text{Part}(Q_{i,j})$, то F_x в силу леммы 5.8 является объединением нескольких частей из $\text{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, причем объединение границ этих частей — это R_x . Следовательно, все эти части пусты и $F_x = R_x$. Выберем две смежные вершины $u \in S'$ и $v \in T_x$ (см. рисунок 5.18b). Такие две вершины по лемме 5.10 есть в любой из пустых частей $\text{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, составляющих в объединении F_x . Пусть эта часть — F' . Тогда по лемме 5.10 мы знаем, что F' — единственная часть $\text{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, содержащая обе вершины u и v .

Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \text{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v . Поскольку каждое из множеств $F_1, \dots, F_\ell, G_{j,i}$ является объединением частей $\text{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, ровно одно из них содержит $\{u, v\}$: это F_x . Кроме того, все перечисленные множества являются объединениями частей $\text{Part}(\mathfrak{T})$, следовательно, по теореме 5.6 хотя бы одно из них должно содержать $B \supset \{u, v\}$. Это означает, что $B \subset F_x$, а значит, $|B| \leq |F_x| < k$, что невозможно.

Следовательно, для всех x мы имеем $|R_x| \geq k$. Тогда

$$2k \leq |R_1| + |R_2| = (2|S'| + |P'|) + (|T_1| + |T_2| + |P'|) \leq k + k \quad (5.7)$$

(последнее неравенство следует из (5.6). В обоих неравенствах в (5.7) должно достигаться равенство, что возможно лишь в случае, когда $\text{Part}(S) = \{H_1, H_2\}$ и

$$|Q_{i,j} \cap \text{Int}(H_1)| = |Q_{i,j} \cap \text{Int}(H_2)|, \quad |S \cap \text{Int}(G_{i,j})| = |S \cap \text{Int}(G_{j,i})|. \quad (5.8)$$

2.3. Предположим, что множество S не пересекает внутренность ни одной из частей из $\text{Part}(F)$. Учитывая пункт 2.1, получаем, что в этом случае S не разделяет ни одну из частей $\text{Part}(F)$. Такое множество может быть разделяющим только в случае, когда оно является объединением двух лепестков и центра ромашки F . В этом случае понятно, что набор \mathfrak{T}' также порождает ромашку F .

Теперь не умаляя общности можно предположить, что $a_{i,i+1} \neq 0$. В силу зависимости S и $Q_{i,i+1}$ имеет место один из двух случаев.

1° Существует такое $j \neq i$, что $a_{j,j+1} > 0$.

2° Для всех $x \neq i$ мы имеем $a_{x,x+1} = 0$, и существует такое $t \notin \{i-1, i, i+1\}$, что $b_t \neq 0$.

2.3.1. Рассмотрим случай 1°. Из (5.8) имеем

$$2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p = k = 2a_{j,j+1} + b_j + b_{j+1} + p.$$

Учитывая (5.5), получаем, что $a_{x,x+1} = 0$ при $x \notin \{i, j\}$ и $b_x = 0$ при $x \notin \{i, i+1, j, j+1\}$. Более того, если $b_i \neq 0$ или $b_{j+1} \neq 0$, то $i = j+1$, а если $b_j \neq 0$ или $b_{i+1} \neq 0$, то $j = i+1$. Так как в ромашке хотя бы четыре лепестка, то не умаляя общности мы можем считать, что $i \neq j+1$ и $b_i = b_{j+1} = 0$.

Тогда нетрудно понять, что S не разбивает часть $G_{j+1,i} \supset Q_i \cup (P \setminus S)$ (см. рисунок 5.19а). Очевидно, множества S и $Q_{i,j}$ зависимы и по (5.8) множество S должно делить $Q_{i,j}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет $Q_i \cup (P \setminus S)$, получаем, что $S \supset P$, $b_j = 0$ и S не разбивает лепесток Q_j . Аналогично, $b_{i+1} = 0$.

Таким образом, множество S не пересекает лепестков ромашки F и является объединением центра P и двух равных лепестков $Q'_i = S \cap \text{Int}(G_{i,i+1})$ и $Q'_j = S \cap \text{Int}(G_{j,j+1})$. Множество S не разбивает отличных от $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ частей из $\text{Part}(F)$, делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $Q_i \cup Q'_i \cup P$ и $Q_{i+1} \cup Q'_i \cup P$, а часть $G_{j,j+1}$ — на две части с границами $Q_j \cup Q'_j \cup P$ и $Q_{j+1} \cup Q'_j \cup P$. Следовательно, набор \mathfrak{T}' порождает ромашку F' , полученную из F добавлением лепестка Q'_i между Q_i и Q_{i+1} и лепестка Q'_j между Q_j и Q_{j+1} .

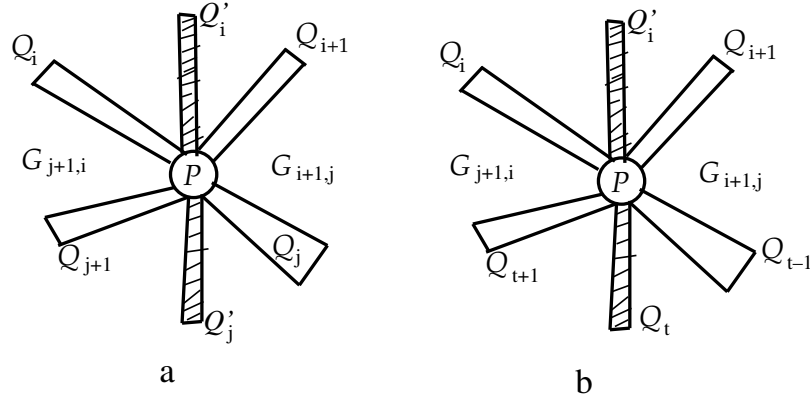


Рис. 5.19: Разбиение множества S на лепестки.

2.3.2. Рассмотрим случай 2°. Из (5.8) имеем

$$2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p = k = 2b_t + b_{t-1} + b_{t+1} + p.$$

Понятно, что $a_{x,x+1} = 0$ при $x \neq i$. Учитывая (5.5), получаем, что $b_x = 0$ при $x \notin \{i, i+1, t-1, t, t+1\}$. Более того, если $b_i \neq 0$ или $b_{t+1} \neq 0$, то

$i = t + 1$, а если $b_t \neq 0$ или $b_{i+1} \neq 0$, то $t = i + 1$. Так как в ромашке хотя бы четыре лепестка, то не умаляя общности мы можем считать, что $i \neq t + 1$ и $b_i = b_{t+1} = 0$.

Тогда нетрудно понять, что S не разбивает часть $G_{t+1,i} \supset Q_i \cup (P \setminus S)$ (см. рисунок 5.19b). Очевидно, множества S и $Q_{i,t-1}$ зависимы и по (5.8) множество S должно делить $Q_{i,j}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет $Q_i \cup (P \setminus S)$, получаем, что $S \supset P$, $b_{t-1} = 0$ и S не разбивает лепесток Q_{t-1} . Аналогично, $b_{i+1} = 0$.

Таким образом, множество S и является объединением центра P , лепестка Q_t и имеющего такой же размер нового лепестка $Q'_i = S \cap \text{Int}(G_{i,i+1})$. Множество S не пересекает других лепестков ромашки F , не разбивает отличных от $G_{i,i+1}$ частей из $\text{Part}(F)$, делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $Q_i \cup Q'_i \cup P$ и $Q_{i+1} \cup Q'_i \cup P$. Следовательно, набор \mathfrak{T}' порождает ромашку F' , полученную из F добавлением лепестка Q'_i между Q_i и Q_{i+1} . \square

5.6 Стыгивание рёбер в k -связном графе

Определение 5.24. Назовём k -связный граф G *минимальным по стягиванию*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G \cdot e$ не является k -связным.

Не секрет, что в любом связном графе можно стянуть любое ребро без потери связности. При $k \in \{2, 3\}$ мы докажем, что единственным минимальным по стягиванию k -связным графом является K_{k+1} . Отметим, что в любом k -связном графе по определению хотя бы $k + 1$ вершина, так что K_{k+1} во всех смыслах является минимальным k -связным графом.

При $k \geq 4$ существуют различные минимальные по стягиванию k -связные графы и чем больше k , тем сложнее их структура и тем меньше про них известно. В случае $k = 4$ мы опишем структуру минимальных по стягиванию k -связных графов.

5.6.1 Двусвязные и трёхсвязные графы

Теорема 5.24. Пусть G — двусвязный граф, отличный от K_3 . Тогда существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ двусвязен.

Доказательство. Предположим, что это неверно. Так как $v(G) \geq 4$, тогда для любого ребра $ab \in E(G)$ множество $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$. Рассмотрим минимальный фрагмент H , отделяемый множеством такого вида,

пусть $ab \in E(G)$, $A \in \text{Part}(\{a, b\})$, $H = \text{Int}(A)$. По лемме 5.1, существует вершина $c \in H$, смежная с a . Тогда $\{a, c\} \in \mathfrak{R}_2(G)$.

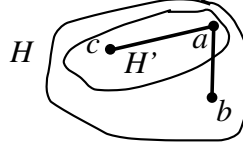


Рис. 5.20: Фрагменты H и H' .

Очевидно, множества $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ независимы. Из $c \in H = \text{Int}(A)$ по следствию 5.3 следует, что существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей $\{a, c\}$ — противоречие с минимальностью H . \square

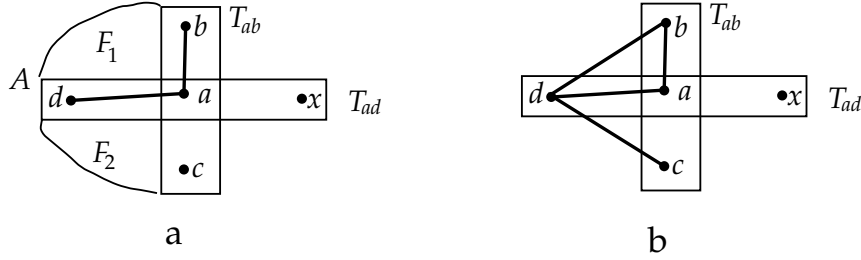
Лемма 5.28. Пусть G — k -связный граф, $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(S)$, $T \supset \text{Int}(A)$. Тогда множества S и T зависимы.

Доказательство. Пусть S и T независимы, тогда $T \subset A$. Пусть $A' \in \text{Part}(S)$, $A' \neq A$. Тогда $T \cap \text{Int}(A') = \emptyset$ и из леммы 5.5 следует, что T не разделяет $A' \supset (S \setminus T)$. Тогда, поскольку $S \setminus T \neq \emptyset$, то T не разделяет $V(G) \setminus T \subset V(G) \setminus \text{Int}(A)$, то есть, T не является разделяющим множеством. Противоречие. \square

Теорема 5.25. Пусть G — трёхсвязный граф, отличный от K_4 . Тогда существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ трёхсвязен.

Доказательство. Предположим, что это неверно. Так как $v(G) \geq 5$, тогда для любого ребра $ab \in E(G)$ существует множество $T_{a,b} \in \mathfrak{R}_3(G)$, $T_{ab} \ni a, b$. Рассмотрим минимальный фрагмент H в графе G , отделяемый множеством, содержащим две вершины одного ребра. Пусть $ab \in E(G)$, $T_{ab} = \{a, b, c\}$, $A \in \text{Part}(T_{ab})$ и $H = \text{Int}(A)$. По лемме 5.1, существует вершина $d \in H$, смежная с a . Рассмотрим множество $T_{ad} = \{a, d, x\} \in \mathfrak{R}_3(G)$.

Если T_{ab} и T_{ad} независимы, то по следствию 5.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T_{ad} — противоречие с минимальностью H . Значит, эти два множества зависимы, то есть, разбивают друг друга. Поскольку $T_{ab} \setminus \{a\}$ состоит только из двух вершин, то $T_{ab} \cap T_{ad} = \{a\}$ и T_{ad} отделяет b от c . Так как каждая часть $\text{Part}(T_{ad})$ по лемме 5.8 должна содержать хотя бы одну вершину из $T_{ab} \setminus T_{ad}$, то $|\text{Part}(T_{ad})| = 2$. Пусть $\text{Part}(T_{ad}) = \{B_1, B_2\}$. Тогда по лемме 5.8 часть A распадается в $\text{Part}(\{T_{ab}, T_{ad}\})$ на две части $F_1 = A \cap B_1$ и $F_2 = A \cap B_2$ (см. рисунок 5.21a) с границами $S_1 = \{a, d, b\}$ и $S_2 = \{a, d, c\}$. (Можно считать, что $S_i = \text{Bound}(F_i)$.)

Рис. 5.21: Множества T_{ab} и T_{ad} .

Предположим, что $\text{Int}(F_1) \neq \emptyset$. Тогда существует непустой фрагмент $H_1 \subset \text{Int}(F_1) \subsetneq H$ с границей S_1 , противоречие с минимальностью H . Таким образом, $\text{Int}(F_1) = \emptyset$ и, аналогично, $\text{Int}(F_2) = \emptyset$, а значит, $\text{Int}(A) = \{d\}$. Следовательно, $N_G(d) \subset T_{ab}$ и $d_G(d) \leq 3$. Так как в трёхсвязном графе нет вершин степени менее 3, вершина d смежна с тремя вершинами a, b и c (см. рисунок 5.21b).

Рассмотрим разделяющее множество $T_{cd} \supset \{d\} = \text{Int}(A)$. Отметим, что T_{cd} не разделяет $T_{ab} = \{a, b, c\}$, так как вершины a и b смежны. Следовательно, T_{cd} и T_{ab} независимы, но это невозможно по лемме 5.28. Противоречие показывает, что трёхсвязный граф на более чем 4 вершинах не может быть минимальным по стягиванию. \square

5.6.2 Минимальные по стягиванию 4-связные графы

Структура минимальных по стягиванию 4-связных графов много сложнее, но есть возможность её изучить и описать, чем мы и займёмся в этом разделе. Сначала мы докажем, что любой такой граф является 4-регулярным и любое его ребро входит в треугольник, потом дадим более подробное описание класса минимальных по стягиванию 4-связных графов.

В следующих леммах и теореме речь пойдёт о минимальных по стягиванию 4-связных графах. В таком графе G с $v(G) > 5$ для каждого ребра $ab \in E(G)$ существует множество $T_{ab} \in \mathfrak{R}_4(G)$, $a, b \in T_{ab}$. Мы будем использовать это обозначение в доказательствах.

Лемма 5.29. Пусть G — минимальный по стягиванию 4-связный граф, множество $S \in \mathfrak{R}_4(G)$ содержит a и смежную с ней вершину, H — фрагмент с границей S . Тогда a входит в треугольник axx' , где $x \in H$, $d_G(x) = 4$.

Доказательство. Для графа на 5 вершинах утверждение леммы очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть минимальный по стягиванию

4-связный граф G с $v(G) > 5$. Будем доказывать утверждение индукцией по $|H|$. Базу составит очевидный случай $H = \{y\}$. В этом случае $d_G(y) = 4$, причём y смежна только с вершинами множества S . Тогда нам подойдут $x = y$ и x' — смежная с a вершина множества S .

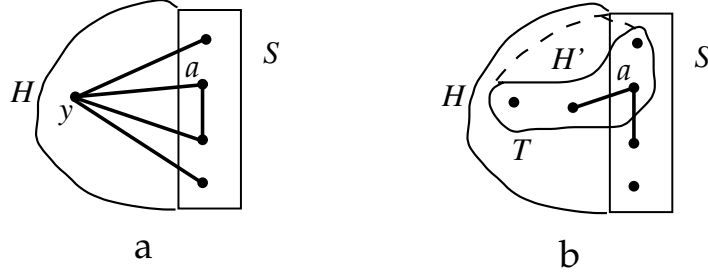


Рис. 5.22: Множество S и фрагмент H .

Пусть $|H| \geq 2$, а для меньших фрагментов утверждение леммы уже доказано. Пусть $A, A' \in \text{Part}(S)$, $\text{Int}(A) = H$. Рассмотрим два случая.

1. Существует такое независимое с S множество $T \in \mathfrak{R}_4(G)$, что $T \cap H \neq \emptyset$ и T содержит a и смежную с ней вершину.

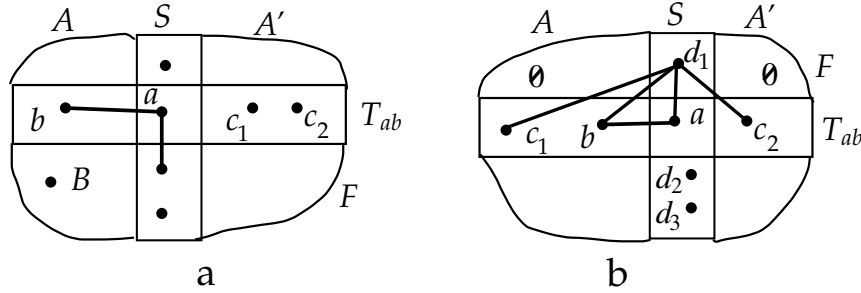
Очевидно, $T \subset A$. Тогда по следствию 5.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T . По индукционному предположению, существует искомый треугольник с $x \in H' \subset H$.

2. Любое такое множество $T \in \mathfrak{R}_4(G)$, что $T \cap H \neq \emptyset$ и T содержит a и смежную с ней вершину, зависимо с S .

По лемме 5.1, существует вершина $b \in H$, смежная с a . Рассмотрим множество T_{ab} . В нашем случае T_{ab} и S зависимы. Пусть $T_{ab} = \{a, b, c_1, c_2\}$. Так как T_{ab} пересекает внутренности всех частей $\text{Part}(S)$, можно считать, что $c_2 \in \text{Int}(A')$. Рассмотрим два случая.

2.1. $c_1 \notin \text{Int}(A)$.

В этом случае $T_{ab} \cap \text{Int}(A) = \{b\}$. Так как $|\text{Int}(A)| = |H| \geq 2$, существует такая часть $B \in \text{Part}(\{S, T_{ab}\})$, что $B \subset A$, $\text{Int}(B) \neq \emptyset$. Тогда $|\text{Bound}(B)| \geq 4$. Пусть $B = A \cap F$, где $F \in \text{Part}(T_{a,b})$ (см. рисунок 5.23а). Отметим, что $\text{Bound}(B)$ по лемме 5.8 состоит из вершины b и вершин множества S , лежащих в F , которых не более трёх (ведь S пересекает внутренность отличной от F части $\text{Part}(T_{ab})$). Всё сказанное выше означает, что $|\text{Bound}(B)| = 4$. Таким образом, $a, b \in \text{Bound}(B)$, $\text{Bound}(B) \in \mathfrak{R}_4(G)$, множества $\text{Bound}(B)$ и S независимы — этот случай мы разобрали выше.

Рис. 5.23: Множества S и T_{ab} .**2.2.** $c_1 \in \text{Int}(A)$.

В этом случае $T_{ab} \setminus A = \{c_2\}$. Так как T_{ab} должно пересекать внутренность всех частей $\text{Part}(S)$, то их только две: A и A' .

Пусть $S = \{a, d_1, d_2, d_3\}$. Одна из вершин d_1, d_2, d_3 смежна с a , но мы не будем это использовать и делать между ними различия. В нашем случае $S \cap T_{ab} = \{a\}$ и множество T_{ab} разделяет $S \setminus T_{ab} = \{d_1, d_2, d_3\}$. Следовательно, существует часть $F \in \text{Part}(T_{ab})$, для которой $|F \cap \{d_1, d_2, d_3\}| = 1$. Не умаляя общности положим $F \cap \{d_1, d_2, d_3\} = \{d_1\}$, тогда $B = A \cap F \in \text{Part}(\{S, T_{ab}\})$, причём $\text{Bound}(B) = \{a, b, c_1, d_1\}$ (см. рисунок 5.23b).

Предположим, что $\text{Int}(B) \neq \emptyset$. Тогда $a, b \in \text{Bound}(B)$, $\text{Bound}(B) \in \mathfrak{R}_4(G)$, множества $\text{Bound}(B)$ и S независимы — этот случай рассмотрен выше. Следовательно, $\text{Int}(B) = \emptyset$. Пусть $B' = F \cap A'$, тогда $\text{Bound}(B') = \{a, c_2, d_1\}$, откуда очевидно, что $\text{Int}(B') = \emptyset$. Следовательно $\text{Int}(F) = S \cap \text{Int}(F) = \{d_1\}$. Тогда $d_G(d_1) = 4$, $N_G(d_1) = T_{ab} = \{a, b, c_1, c_2\}$.

Проанализируем результаты разобранных случаев и заметим, что на настоящий момент мы доказали следующее утверждение.

Пусть множество $S \in \mathfrak{R}_4(G)$ содержит a и смежную с ней вершину, H — фрагмент с границей S . Тогда a входит в треугольник azz' , где одна из вершин z и z' лежит в H .

Действительно, это утверждение есть ослабленное утверждение леммы. В случаях 1 и 2.1 мы осуществили спуск к меньшим фрагментам. Осуществляя этот спуск, мы рано или поздно придем к очевидному случаю фрагмента из одной вершины или к случаю 2.2. В рассматриваемом случае 2.2 доказали существование треугольника abd_1 .

Применим доказанное утверждение к множеству S , вершине d_1 и фрагменту $\text{Int}(A')$. Так как в $\text{Int}(A')$ лежит ровно одна вершина из $N_G(d_1) = \{a, b, c_1, c_2\}$ — вершина c_2 — и она не может быть смежна с $b, c_1 \notin A'$, то получаем, что вершины a и c_2 смежны (см. рисунок 5.24a).

Теперь рассмотрим множество $T_{d_1 c_1}$. По лемме 5.28, множество $T_{d_1 c_1}$

должно быть зависимо с $T_{ab} = \text{Bound}(F)$ (так как $T_{d_1c_1} \supset \text{Int}(F) = \{d_1\}$). Следовательно, $T_{d_1c_1}$ разделяет $T_{ab} \setminus T_{d_1c_1} \subset \{a, b, c_2\}$. Поскольку вершина a смежна и с b , и с c_2 , то это означает $a \in T_{d_1c_1}$. Тогда множество $T_{d_1c_1}$ зависимо с S (иначе в очередной раз вспомним про разобранный случай 1). Таким образом, $T_{d_1c_1} = \{d_1, c_1, a, z\}$, где $z \in \text{Int}(A')$.

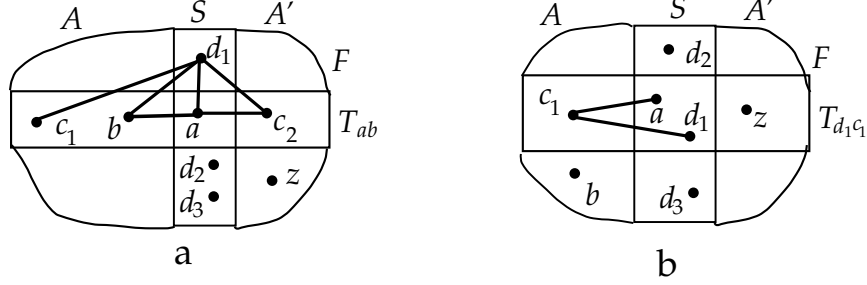


Рис. 5.24: Множества S , T_{ab} и $T_{d_1c_1}$.

Множество $T_{d_1c_1}$ должно разделять $S \setminus T_{d_1c_1} = \{d_2, d_3\}$, поэтому $|\text{Part}(T_{d_1c_1})| = 2$ и $T_{d_1c_1}$ делит A на две части с границами $\{c_1, a, d_1, d_2\}$ и $\{c_1, a, d_1, d_3\}$ (см. рисунок 5.24b). Одна из этих частей содержит b и потому непуста, а её граница содержит a и смежную с ней вершину d_1 , лежит в A и независима с S . Это опять разобранный выше случай 1.

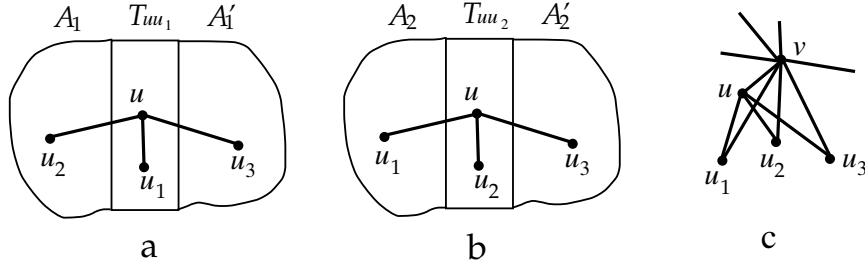
Все случаи разобраны, лемма доказана. \square

Лемма 5.30. (N. Martinov, 1990.) Минимальный по стягиванию 4-связный граф является 4-регулярным.

Доказательство. Для графа на 5 вершинах утверждение леммы очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть минимальный по стягиванию 4-связный граф G с $v(G) > 5$. Пусть $v \in V(G)$ и $d_G(v) > 4$. По лемме 5.29 существует вершина $u \in N_G(v)$, $d_G(u) = 4$ и вершина $u_1 \in N_G(u)$, $d_G(u_1) = 4$. Рассмотрим множество T_{uu_1} , пусть $A_1, A'_1 \in \text{Part}(T_{uu_1})$. По лемме 5.29 существуют вершины $u_2, u_3 \in N_G(u)$, $u_2 \in \text{Int}(A_1)$, $u_3 \in \text{Int}(A'_1)$, $d_G(u_2) = d_G(u_3) = 4$ (см. рисунок 5.25a). Отметим, что вершины u_2 и u_3 несмежны. Таким образом, $N_G(u) = \{v, u_1, u_2, u_3\}$.

Рассмотрим множество T_{uu_2} , пусть $A_2, A'_2 \in \text{Part}(T_{uu_2})$. По лемме 5.29 существуют вершины степени 4 из $N_G(u)$, одна из которых лежит в $\text{Int}(A_2)$, а другая — в $\text{Int}(A'_2)$. Это могут быть только вершины u_1 и u_3 , потому что они несмежны (см. рисунок 5.25b). Аналогично, u_1 и u_2 несмежны.

Теперь заметим, что по лемме 5.29 каждая из вершин u_1 , u_2 и u_3 должна входить в треугольник вместе с вершиной u . Следовательно, все

Рис. 5.25: Окрестность вершины v .

эти три вершины смежны с v . Таким образом, любая вершина $u \in N_G(v)$ степени 4 имеет трёх попарно несмежных соседей степени 4, лежащих в $N_G(v)$ (см. рисунок 5.25с).

Пусть K — компонента связности графа $G(N_G(v)) - v$, содержащая u . По доказанному утверждению все вершины из K имеют степень 4 в графе G и смежны только с v и другими вершинами из K . Вершина v не может быть точкой сочленения в графе G , поэтому $V(G) = K \cup \{v\}$.

Тогда вершина v входит в любое множество из $\mathfrak{R}_4(G)$. Следовательно, граф $G - v$ является минимальным по стягиванию трёхсвязным графом, то есть по теореме 5.25 это K_4 . Но тогда G — 4-регулярный граф на 5 вершинах. \square

Теорема 5.26. (N. Martinov, 1990.) Для 4-связного графа G следующие два утверждения равносильны.

1° Граф G — минимальный по стягиванию.

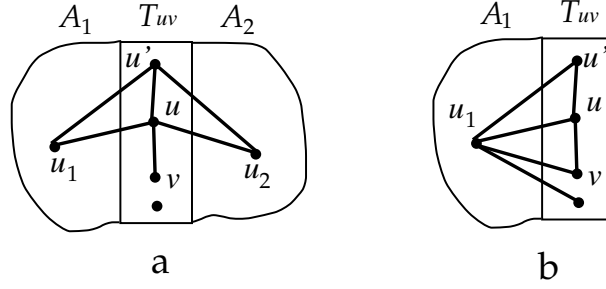
2° Степень каждой вершины графа G равна 4, каждое ребро входит в треугольник.

Доказательство. $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Если ребро ab входит в треугольник abc , то в графе $G \cdot ab$ окрестность вершины c будет трёхвершинным множеством, поэтому граф $G \cdot ab$ не 4-связен.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. По лемме 5.30, граф G является 4-регулярным. Найдём треугольник с ребром $uv \in E(G)$. Рассмотрим разделяющее множество T_{uv} , пусть $A_1, A_2 \in \text{Part}(T_{uv})$. По лемме 5.29, существуют треугольники $uu_1u'_1$ и $uu_2u'_2$, где $u_1 \in \text{Int}(A_1)$, $u_2 \in \text{Int}(A_2)$.

Если хотя бы одна из вершин u'_1, u'_2 — это v , то мы нашли искомым треугольник. Если же $u'_1 \neq v$ и $u'_2 \neq v$, то из $d_G(u) = 4$ следует, что $u'_1 = u'_2 \in T_{uv}$. Обозначим эту вершину через u' (см. рисунок 5.26а).

Так как $d_G(u') = 4$, и $u \in N_G(u') \cap T_{uv}$, то одно из множеств $\text{Int}(A_1)$ и $\text{Int}(A_2)$ содержит единственную вершину из $N_G(u')$. Не умаляя общности предположим, что это $\text{Int}(A_1)$. Тогда u_1 — единственная вершина из

Рис. 5.26: Множество T_{uv} .

$\text{Int}(A_1)$, смежная с u и единственная вершина из $\text{Int}(A_1)$, смежная с u' . Если $\text{Int}(A_1) \neq \{u_1\}$, то трёхэлементное множество $(T_{uv} \setminus \{u, u'\}) \cup \{u_1\}$ отделяет $\text{Int}(A_1) \setminus \{u_1\}$ от остальных вершин графа, что в четырёхсвязном графе невозможно. Следовательно, $\text{Int}(A_1) = \{u_1\}$, тогда $N_G(u_1) = T_{uv}$ (см. рисунок 5.26b) и, в частности, в графе G есть треугольник uvu_1 . \square

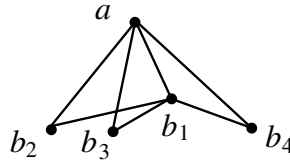
Из теоремы 5.26 легко вывести следующий факт.

Следствие 5.14. В минимальном по стягиванию 4-связном графе G все вершины имеют степень 4, а окрестность каждой вершины разбивается на две пары смежных вершин.

Доказательство. Предположим, что для вершины a это не так. Пусть

$$N_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \quad A = \{a\} \cup N_G(a).$$

По теореме 5.26, ребро ab_1 входит в треугольник, не умаляя общности положим, что это треугольник ab_1b_2 . Тогда $b_1b_2 \in E(G)$, следовательно, $b_3b_4 \notin E(G)$. Ребро ab_3 также входит в треугольник и это должен быть треугольник ab_3b_1 или ab_3b_2 . Из двух аналогичных вариантов рассмотрим первый. Таким образом, $b_1b_3 \in E(G)$, следовательно, $b_2b_4 \notin E(G)$. Значит, ребро ab_4 входит в треугольник ab_1b_4 , то есть, $b_1b_4 \in E(G)$ (см. рисунок 5.27).

Рис. 5.27: Окрестность вершины a .

Но тогда $V(G) = A$, так как иначе трёхвершинное множество $\{b_2, b_3, b_4\}$ отделяет $\{a, b_1\}$ от $V(G) \setminus A$, что в 4-связном графе невозможно. Следовательно, G — полный граф на 5 вершинах, для которого доказываемое утверждение выполняется. \square

Следующая теорема даст детальную характеристику минимальных по стягиванию 4-связных графов. Напомним, что для произвольного графа G через G^2 обозначается граф на множестве вершин $V(G)$, в котором соединены рёбрами те и только те пары вершин, что находятся на расстоянии не более 2 в графе G .

Определение 5.25. Назовём граф G k -циклически-связным, если никакое множество рёбер $F \subset E(G)$, $|F| \leq k-1$, не разделяет $E(G-F)$ (то есть, все рёбра графа $G-F$ соединяют вершины одной компоненты связности, а остальные компоненты связности этого графа — изолированные вершины).

Определение 5.26. Для любого графа G определим рёберный граф G_E . Множество его вершин — это множество рёбер графа G (то есть, $V(G_E) = E(G)$), а две вершины $e, f \in V(G_E)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра графа G смежны, то есть, имеют общий конец.

Теорема 5.27. (N. Martinov.) *Множество всех минимальных по стягиванию 4-связных графов состоит из графов следующих двух видов.*

1° C_n^2 при $n \geq 5$.

2° Рёберные графы H_E для 4-циклически связных кубических (то есть, 3-регулярных) графов H .

Доказательство. Легко видеть, что любой граф из этих двух серий является однородным графом степени 4. То, что граф C_n^2 является 4-связным, можно проверить непосредственно. Понятно, что из 4-циклической связности графа H следует 4-связности графа H_E . Нетрудно убедиться, что каждое ребро любого графа указанных двух серий входит в треугольник, поэтому по теореме 5.27 все они являются минимальными по стягиванию 4-связными графами.

Рассмотрим минимальный по стягиванию 4-связный граф G . Как мы знаем, для любой вершины $v \in V(G)$ её окрестность разбивается на две пары смежных вершин. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любой вершины $v \in V(G)$ подграф $G(N_G(v))$ представляет из себя два несмежных ребра, то есть, каждое ребро графа G входит ровно в один треугольник.

Докажем, что тогда $G = H_E$ для некоторого кубического графа H . Пусть вершины H соответствуют треугольникам графа G , а две вершины $a, b \in V(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие треугольники имеют общую вершину. Очевидно, получится простой кубический граф H . Легко видеть, что $H_E = G$. Из 4-связности G следует 4-циклическая связность графа H .

2. Пусть для некоторой вершины $v \in V(G)$ подграф $G(N_G(v))$ содержит хотя бы 3 ребра.

Учитывая следствие 5.14 сделаем вывод, что тогда $G(N_G(v))$ содержит простой путь из трёх ребер, а все вершины из $N_G(v) \cup \{v\}$ можно занумеровать a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 так, что $a_i a_{i+1}, a_i a_{i+2} \in E(G)$. (Естественно, все индексы должны лежать в $[1..5]$.) В этой нумерации $v = a_3$, см. рисунок 5.28а.

Предположим, что для некоторого $k \geq 5$ в графе есть различные вершины a_1, \dots, a_k с аналогичным свойством: $a_i a_{i+1}, a_i a_{i+2} \in E(G)$. (Все индексы должны лежать в $[1..k]$.) Пусть $H = G(\{a_1, \dots, a_k\})$. Тогда $d_H(a_i) = 4$ при $i \in [3..k-2]$, $d_H(a_2) = d_H(a_{k-1}) = 3$ и $d_H(a_1) = d_H(a_k) = 2$. Посмотрим, с чем может быть смежна вершина a_{k-1} . В результате мы либо убедимся, что наш граф является квадратом цикла, либо продлим цепочку на новую вершину a_{k+1} , смежную с a_{k-1} и a_k , после чего будем рассматривать соседей вершины a_k .

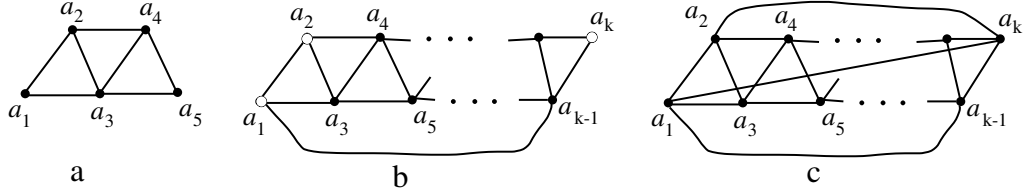


Рис. 5.28: Граф G .

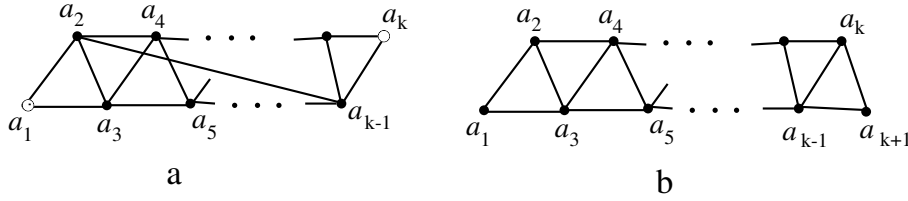
2.1. $a_{k-1}a_1 \in E(G)$.

Тогда $H' = H + a_1 a_{k-1}$ — подграф графа G , в котором лишь три вершины имеют степень менее 4 — это a_1, a_2 и a_k (см. рисунок 5.28b). Следовательно, $V(G) = V(H)$, иначе трёхвершинное множество $\{a_1, a_2, a_k\}$ отделяет $\{a_3, a_4, \dots, a_{k-1}\}$ от $V(G) \setminus V(H)$, что невозможно в четырёхсвязном графе.

Тогда остаётся единственный способ сделать граф H' 4-регулярным графом G : нужно добавить рёбра $a_1 a_k$ и $a_2 a_k$, в результате получится, что $G = C_k^2$ (граф G — это квадрат цикла $a_1 a_2 \dots a_k$, см. рисунок 5.28c).

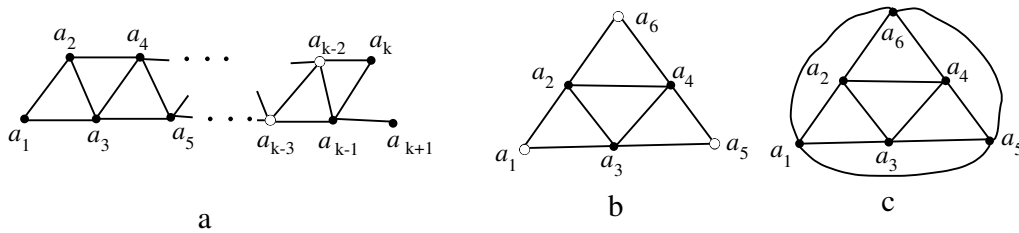
2.2. $a_{k-1}a_2 \in E(G)$.

Тогда $H' = H + a_{k-1}a_2$ — подграф графа G , в котором степени вершин a_2, a_3, \dots, a_{k-1} равны 4, а степени вершин a_1 и a_k равны 2. Следовательно, $V(G) \setminus V(H') \neq \emptyset$. В этом случае двухвершинное множество $\{a_1, a_k\}$ отделяет $\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}\}$ от $V(G) \setminus V(H')$ (см. рисунок 5.29а), что невозможно в четырёхсвязном графе.

Рис. 5.29: Граф G .**2.3.** a_{k-1} смежна с вершиной $a_{k+1} \notin V(H)$.

Ребро $a_{k-1}a_{k+1}$ должно входить в треугольник. Если это треугольник $a_{k-1}a_ka_{k+1}$, то мы “продлили” нашу цепочку на одну вершину (см. рисунок 5.29б).

Предположим, что треугольник — другой. Этот треугольник может быть либо $a_{k-1}a_{k+1}a_{k-2}$, либо $a_{k-1}a_{k+1}a_{k-3}$ (третья вершина треугольника должна быть смежна с a_{k-1} , см. рисунок 5.30а). Значит, $d_H(a_{k-2}) < 4$ или $d_H(a_{k-3}) < 4$, что возможно только при $k-2 \leq 2$ или $k-3 \leq 2$. Первое противоречит $k \geq 5$, а второй случай возможен при $k = 5$. Таким образом, единственный оставшийся вариант — это $k = 5$ и треугольник $a_2a_4a_6$.

Рис. 5.30: Граф G .

В этом случае рассмотрим граф H' , полученный из H добавлением вершины a_6 и рёбер a_2a_6, a_4a_6 . Мы имеем

$$d_{H'}(a_2) = d_{H'}(a_3) = d_{H'}(a_4) = 4, \quad d_{H'}(a_1) = d_{H'}(a_5) = d_{H'}(a_6) = 2.$$

Если $V(G) \setminus V(H') \neq \emptyset$, то трёхвершинное множество $\{a_1, a_5, a_6\}$ отделяет $\{a_2, a_3, a_4\}$ от $V(G) \setminus V(H')$, что невозможно в четырёхсвязном графе (см. рисунок 5.30b).

Таким образом, $V(H') = V(G)$. Чтобы сделать граф H' 4-регулярным графом G на тех же 6 вершинах, нам нужно добавить все 3 возможных ребра a_1a_5, a_1a_6, a_5a_6 (см. рисунок 5.30c). Нетрудно проверить, что полученный граф G — это квадрат цикла $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ длины 6. \square

5.6.3 Трёхсвязные графы: происхождение от колеса

В этом разделе основным объектом нашего исследования станет трёхсвязный граф G и его разделяющие множества.

Мы начнем с описания вершинно-реберных разрезов трехсвязного графа G и их простейших свойств. Позже эти разрезы помогут нам доказать теорему Татта о происхождении трёхсвязных графов от колеса.

Определение 5.27. 1) Обозначим через $\mathfrak{N}(G)$ семейство, состоящее из всех разделяющих множеств, содержащих i ребер и $3-i$ вершин графа G . Пусть $\mathfrak{N}(G) = \cup_{i=1}^3 \mathfrak{N}_i(G)$.

Множества из $\mathfrak{N}(G)$ мы будем называть (вершинно-реберными) *разрезами* графа G .

2) Пусть $N \in \mathfrak{N}(G)$. *Часть разбиения* графа G разрезом N — это максимальное по включению множество вершин графа, не разделяемых разрезом N . Обозначим через $\text{Part}(N)$ множество всех таких частей.

Для части $A \in \text{Part}(N)$ обозначим через $\text{Bound}(N)$ множество всех вершин из A , входящих в N или являющихся концами рёбер разреза N . Пусть $\text{Int}(A) = A \setminus \text{Bound}(A)$.

Назовём часть A *пустой*, если $\text{Int}(A) = \emptyset$.

Замечание 5.15. 1) Никакая вершина разреза $M \in \mathfrak{N}(G)$ не может быть инцидентна никакому ребру из N .

2) Если два ребра разреза $M \in \mathfrak{N}(G)$ имеют общий конец x , то x является единственной вершиной одной из компонент связности графа $G - M$. Действительно, в противном случае заменив в разрезе M эти два ребра вершиной x , мы получим разделяющее множество из двух элементов, что противоречит трехсвязности G .

3) Пусть разрез $M \in \mathfrak{N}(G)$ содержит ребро x_1x_2 . Нетрудно понять, что тогда $|\text{Part}(M)| = 2$, причем одна из частей содержит вершину x_1 , а другая — вершину x_2 . Отсюда следует, что в границе каждой части $\text{Part}(M)$ ровно три вершины.

Определение 5.28. Назовем разрез $M \in \mathfrak{N}(G)$ *невыврожденным*, если $\text{Int}(G_1^M) \neq \emptyset$ и $\text{Int}(G_2^M) \neq \emptyset$ и *выврожденным* в противном случае.

Лемма 5.31. 1) Пусть $M \in \mathfrak{N}(G)$, $A \in \text{Part}(M)$ — непустая часть, $T = \text{Bound}(A)$. Тогда $T \in \mathfrak{N}_3(G)$, причем A — объединение нескольких частей $\text{Part}(T)$.

2) Пусть $M = \{u, v, x_1x_2\} \in \mathfrak{N}(G)$ — вырожденный разрез, а именно, часть $x_1 \in A \in \text{Part}(M)$ пуста. Тогда $d_G(x_1) = 3$ и $N_G(x_1) = \{x_2, u, v\}$.

Доказательство. 1) Из определения разреза нетрудно понять, что множество T отделяет друг от друга непустые множества $\text{Int}(A)$ и $V(G) \setminus A$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение.

2) Вершина x_1 может быть смежна с вершинами из A_1 , то есть, с x_2, u, v . Из $d_G(x_1) \geq 3$ немедленно следует утверждение леммы. \square

Определение 5.29. Назовем *колесом* граф W_n на вершинах p, q_1, \dots, q_n (где $n \geq 3$), в котором проведены рёбра pq_i и q_iq_{i+1} для всех $i \in [1..n]$ (нумерация вершин — циклическая).

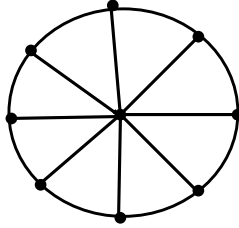


Рис. 5.31: Колесо W_8 .

Понятно, что любое колесо — трёхсвязный граф. Татт доказал, что с каждым отличным от колес трёхсвязным графом G можно провести одну из двух операций, переводящих его в трёхсвязный граф, содержащий на одно ребро меньше. Эти операции — удаление ребра и стягивание ребра, не входящего в треугольник. Действуя в обратном порядке, можно построить списки всех трёхсвязных графов с $t \geq 6$ рёбрами. Все это ожидает нас в данном разделе.

Начнем с леммы.

Лемма 5.32. Трёхсвязный граф G минимален тогда и только тогда, когда для любого его ребра e существует разрез $N_e \in \mathfrak{N}_1(G)$, содержащий e .

Доказательство. Утверждение леммы очевидно: минимальность G означает, что граф $G - e$ не трёхсвязен для любого ребра $e \in E(G)$, то есть, этот граф содержит разделяющее множество x, y . А это равносильно тому, что $\{x, y, e\} \in \mathfrak{N}_1(G)$. \square

Теорема 5.28. (W. T. Tutte, 1966.) Пусть G — трёхсвязный граф, отличный от колеса. Тогда выполняется хотя бы одно из двух утверждений.

1° Существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G - e$ трёхсвязен.

2° Существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ трёхсвязен и ребро e не входит ни в один треугольник.

Доказательство. Пусть G — минимальный трёхсвязный граф G , отличный от колеса. Достаточно показать, что для G выполняется утверждение 2°. Предположим противное. Вспомним, что по теореме 5.8 в минимальном трёхсвязном графе есть вершина степени 3 и рассмотрим два случая.

1. Существует такая вершина $x \in V(G)$, что $d_G(x) = 3$, $N_G(x) = \{y, t_1, t_2\}$ и $yt_1, yt_2 \notin E(G)$.

Тогда ребро xy не входит ни в один треугольник. Так как утверждение 2° не выполнено, существует множество $S = \{x, y, z\} \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда множество $T = N_G(x) \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с S , а значит, $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$ и множество S отделяет $t_1 \in \text{Int}(A_1)$ от $t_2 \in \text{Int}(A_1)$ (см. рисунок 5.32). Теперь очевидно, что $t_1t_2 \notin E(G)$ и ребро xt_1 не входит ни в один треугольник.

Понятно, что $\text{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$, причем можно считать, что $\text{Int}(B_1) = \{x\}$. Рассмотрим часть $F = A_1 \cap B_2 \in \text{Part}(\{S, T\})$. Так как $t_1y \notin E(G)$ и $d_G(t_1) \geq 3$, существует хотя бы одна отличная от t_1 вершина $v \in \text{Int}(A_1)$. Понятно, что $v \in \text{Int}(F)$, стало быть, F — непустая часть с границей $\text{Bound}(F) = \{y, t_1, z\}$, поэтому $\text{Bound}(F) \in \mathfrak{R}_3(G)$.

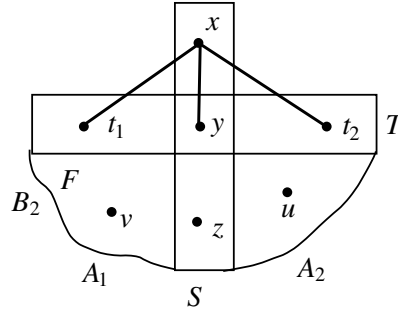


Рис. 5.32: Случай 1.

Предположим, что существует множество $S' = \{x, t_1, u\} \in \mathfrak{R}_3(G)$. В этом случае S' должно быть зависимо с T и отделять y от t_2 . Вспомним, что $y \in A_2$, $t_2 \in \text{Int}(A_2)$, откуда понятно, что $u \in \text{Int}(A_2)$ (иначе S' не разделяет часть $A_2 \in \text{Part}(S)$). Следовательно, S' зависимо с S , то есть,

отделяет y от z , а это означает, что S' зависимо с $\text{Bound}(F)$. При этом, S' не пересекает внутренность F , что невозможно.

Полученное противоречие показывает, что граф $G \cdot tx_1$ трёхсвязен и для ребра tx_1 выполняется утверждение 2° (очевидно, это ребро не входит в треугольник).

2. Для любой вершины $x \in V(G)$ степени 3 в графе $G(N_G(x))$ хотя бы два ребра.

Пусть $d_G(x_2) = 3$, $N_G(x_2) = \{x_1, x_3, y\}$, причем $x_1y, x_3y \in E(G)$ (см. рисунок 5.33a). Пусть $d_G(y) = 3$. Если при этом $V(G) \neq \{x_1, x_2, x_3, y\}$, то $\{x_1, x_3\}$ отделяет $\{y, x_2\}$ от остальных вершин графа, что в трёхсвязном графе невозможно. Значит, $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, y\}$ и в этом случае G — это граф K_4 (он же колесо W_3). Следовательно, $d_G(y) > 3$. Предположим, что в нашем графе нашёлся простой путь $x_1x_2 \dots x_k$, где $k \geq 3$, все эти вершины смежны с вершиной y и

$$d_G(x_2) = \dots = d_H(x_{k-1}) = 3, \quad d_G(y) > 3.$$

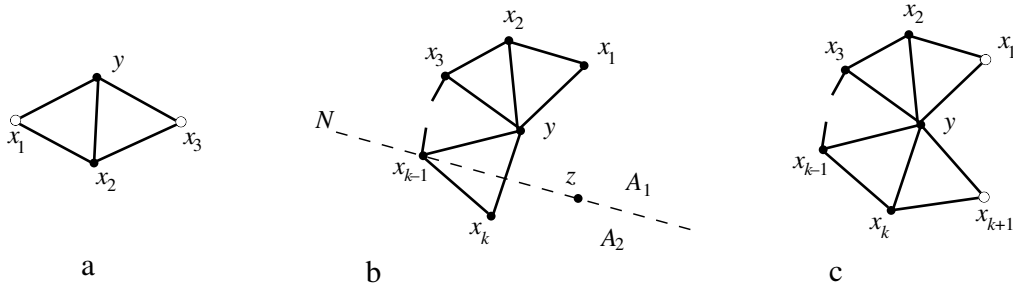


Рис. 5.33: Случай 2.

По лемме 5.32 ребро yx_k должно входить в разрез $N \in \mathfrak{N}_1$. Как мы знаем, разрез N разделяет концы y и x_k ребра yx_k , поэтому вершина x_{k-1} , смежная и с y , и с x_k , должна принадлежать N (см. рисунок 5.33b). Пусть $N = \{yx_k, x_{k-1}, z\}$, $\text{Part}(N) = \{A_1, A_2\}$, где $y \in A_1$, $x_k \in A_2$, а $T_i = \text{Bound}(A_i)$. Так как $d_G(y) > 3$, часть A_1 непуста, а $T_1 = \{x_{k-1}, y, z\} \in \text{Bound}_3(G)$.

Предположим, что $d_G(x_k) > 3$. Тогда $\text{Int}(A_2) \neq \emptyset$, $T_2 = \{x_{k-1}, x_k, z\} \in \text{Bound}_3(G)$. Таким образом, вершина x_{k-1} , входящая и в T_1 , и в T_2 , должна быть смежна и с вершиной из $\text{Int}(A_1)$, и с вершиной из $\text{Int}(A_2)$. Кроме того, x_{k-1} смежна с y и x_k , а значит, $d_G(x_k) \geq 4$, что не так. Противоречие показывает нам, что $d_G(x_k) = 3$ и, аналогично, $d_G(x_1) = 3$.

Если $x_1x_k \in E(G)$, то граф G — это колесо W_k . Пусть $x_1x_k \notin E(G)$ и вершина x_k смежна с вершиной $x_{k+1} \notin V(H)$ (см. рисунок 5.33c). От-

метим, что $N_G(x_k) = \{x_{k-1}, x_{k+1}, y\}$ и между этих трех вершин должны быть проведены два ребра графа G . Мы знаем, что $x_{k-1}x_k \in E(G)$ и $x_{k-1}x_{k+1} \notin E(G)$, следовательно, $yx_{k+1} \in E(G)$. Таким образом, мы продлили нашу цепочку ещё на одну вершину. \square

Глава 6

Планарные графы

Определение 6.1. Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках.

Строго говоря, это определение недостаточно: нужно сказать, как же мы изображаем рёбра. Однако мы не будем вдаваться в подробности, выходящие за пределы теории графов и будем считать, что рёбра — “хорошие” кривые (или ломаные)...

Кроме того, во всем разделе будет считаться очевидным совсем неочевидный факт — теорема Жордана — которую мы сформулируем так: любая замкнутая несамопересекающаяся хорошая кривая делит плоскость на две части.

Плоским графом мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечения рёбер. Каждый плоский граф делит плоскость на несколько частей, которые мы будем называть *гранями* или *странами*.

Рассмотрим ребро e плоского графа G . Либо e входит в некоторый цикл, тогда по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e — *граничное* ребро этих двух граней), либо e является *мостом* (то есть не входит ни в какой цикл), в этом случае по обе стороны от e одна и та же грань, тогда назовем ребро e *внутренним* ребром этой грани.

Граничные вершины грани D — это вершины, от которых можно дойти до внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер. Понятно, что концы внутренних и граничных рёбер грани D — это её граничные вершины. *Граница* грани D — это подграф $B(D)$ графа G , множество вершин которого составляют граничные вершины, а множество рёбер — внутренние и граничные рёбра грани D . *Размер*

границы грани D мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(D)$. Таким образом, если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.

Отметим, что граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках. Это очевидно, так как плоскость и сфера переводятся друг в друга стереографической проекцией. (Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N . Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения пересечения плоскости и луча NA . Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра.)

6.1 Формула Эйлера

Строго говоря, грани есть только у плоского изображения планарного графа G , а не у планарного графа как такового. Более того, в разных изображениях графа G получаются разные грани. Однако, их количество является инвариантом графа.

Теорема 6.1. (L. Euler.) Пусть G — плоский граф с v вершинами, e рёбрами и f странами, имеющий k компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.

Доказательство. Доказательство теоремы легко делается индукцией по количеству рёбер. База для случая, когда граф G — лес, очевидна, ибо в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Пусть для графов с меньшим числом вершин формула Эйлера уже доказана. Предположим, что в графе есть цикл, пусть ребро ℓ входит в цикл. Тогда по ребру ℓ граничат две разные страны, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$. Таким образом, в графе $G - \ell$ — v вершин, $e - 1$ рёбер и $f - 1$ стран. Теперь формула Эйлера для G следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению. \square

Мы всегда будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа G буквами v , e и f соответственно.

Следствие 6.1. Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $e \leq 3v - 6$.
- 2) Если граф G — двудольный, то $e \leq 2v - 4$.

Доказательство. 1) Нетрудно проверить, что размер границы каждой грани графа G не менее 3. В самом деле, пусть в границе некоторой грани не более двух рёбер. Так как кратных рёбер нет, то граница этой грани не содержит цикла. Следовательно, все ее рёбра — внутренние, тогда такое ребро всего одно, откуда легко вывести, что в графе всего две вершины, противоречие. Таким образом, в каждой грани хотя бы три ребра, а сумма количеств рёбер в границах всех граней, как уже замечено выше, есть $2e$. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.

Тогда из формулы Эйлера следует

$$v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

2) Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, аналогично первому пункту выводится, что размер границы каждой грани графа G не менее 4, то есть, $f \leq \frac{e}{2}$. Подставив это неравенство в формулу Эйлера, получим доказываемое утверждение. \square

Следствие 6.2. Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство. В случае $v \leq 2$ утверждение очевидно. Пусть $v \geq 3$ и при этом $\delta(G) \geq 6$. Тогда $6v \leq 2e$, то есть, $e \geq 3v$ — противоречие со следствием 6.1. \square

Следствие 6.3. K_5 и $K_{3,3}$ — непланарные графы.

Доказательство. 1) Пусть K_5 планарен. Для этого графа $v = 5$, $e = 10$. Тогда по пункту 1 следствия 6.1 мы имеем $10 = e \leq 3v - 6 = 9$, что, очевидно, противоречит действительности.

2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6$, $e = 9$. Тогда по пункту 2 следствия 6.1 мы имеем $9 = e \leq 2v - 4 = 8$, что, очевидно, противоречит действительности. \square

6.2 Теорема Куратовского

Нам понадобится понятие подразбиения графа, определенное во введении (определение 1.7.)

Лемма 6.1. Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in E(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если $G \cdot xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.
- 2) Если $G \cdot xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$.

Доказательство. Пусть w — вершина графа $G \cdot xy$, в которую стянуто ребро xy . Пусть H — подграф $G \cdot xy$, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или K_5 . Если $w \notin V(H)$ то, очевидно, $G \supset K_{3,3}$ или $G \supset K_5$ соответственно.

Остается рассмотреть случай, когда $w \in V(H)$. Очевидно, в графе G существует подграф H' такой, что $H' \cdot xy = H$. Для каждого ребра $aw \in E(H)$ в графе H' есть хотя бы одно из ребер ax и ay . Если $ax, ay \in E(H')$, одно из этих двух ребер мы удалим. В результате получится подграф H^* графа G .

Рёбра графа $H^* - xy$, инцидентные вершине x , назовем *красными*, а рёбра графа $H^* - xy$, инцидентные вершине y — *синими*. Тогда суммарное количество красных и синих рёбер равно $d_H(w)$.

Если в графе H^* ровно $d_H(w)$ красных рёбер, то $H^* - y$ — подграф графа G , изоморфный H . В этом случае доказательство леммы закончено. Аналогично для синих рёбер.

Пусть ay — единственное синее ребро графа H^* . Тогда ребру $aw \in E(H)$ соответствует путь aux в графе H^* , то есть, H^* является подразбиением графа H . В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.

Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда $d_H(w) \geq 4$, откуда сразу же следует, что $H \supset K_5$, $d_H(w) = 4$. Пусть тогда z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре оставшихся вершины графа H , соответствующие вершинам K_5 . Каждая пара из вершин w, z_1, z_2, z_3, z_4 соединена в H путём — подразбиением соответствующего ребра графа K_5 . Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе H^* . Не умаляя общности можно считать, что в графе H^* есть xz_1 -путь, xz_2 -путь, yz_3 -путь и yz_4 -путь. Тогда нетрудно заметить, что $H^* \supset K_{3,3}$: каждая из вершин x, z_3, z_4 соединена путём с каждой из вершин y, z_1, z_2 , разные пути не имеют общих внутренних. \square

Теорема 6.2. (К. Kuratowski, 1930) *Граф G (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен тогда и только тогда, когда $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$.*

Доказательство. (Ю. Макарычев, 1997.)

\Leftarrow В следствии 6.3 показана непланарность K_5 и $K_{3,3}$, тогда и любое подразбиение каждого из этих графов непланарно (граф не может стать планарным из-за замены ребра цепочкой рёбер).

\Rightarrow Покажем, что любой граф, не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, планарен. Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример G (непланарный граф, не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$). Любой не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$ граф с меньшим чем G

числом вершин или с таким же, как у G числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным. Тогда легко понять, что $\delta(G) \geq 3$. (Добавление в граф вершин степени 0 и 1 не делает его непланарным. Очевидно, минимальный контрпример не может быть подразбиением графа с меньшим числом вершин и потому не содержит вершин степени 2.)

Также несложно понять, что G не имеет петель и кратных рёбер. В самом деле, пусть e — петля графа G . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно без труда дорисовать петлю к плоскому изображению $G - e$). Теперь пусть G имеет два кратных ребра e и f . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно без труда дорисовать ребро e вдоль ребра f в плоском изображении $G - e$).

1. Пусть $xy \in E(G)$. Рассмотрим граф $G \cdot xy$ (стягивание графа G по ребру xy), пусть w — вершина этого графа, образованная при стягивании ребра xy . По лемме 6.1 мы имеем $G \cdot xy \not\supset K_5$, $G \cdot xy \not\supset K_{3,3}$, следовательно, граф $G \cdot xy$ планарен. Пусть $G' = G - x - y = G \cdot xy - w$ (изоморфность этих двух графов очевидна). Изучим свойства графа G' .

1.1. $\delta(G') \geq 2$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $z \in V(G')$, $d_{G'}(z) \leq 1$. Если $d_{G'}(z) = 0$, то $d_G(z) \leq 2$, противоречие с доказанным выше. Пусть $d_{G'}(z) = 1$. Тогда $d_G(z) = 3$, вершина z смежна в графе G с обеими вершинами x и y и ещё одной вершиной u . Отметим, что граф $G - xy$ планарен, изобразим его на плоскости без пересечений рёбер. Рассмотрим вершину z и три выходящие из нее ребра zx , zy и zu . Легко понять, что мы можем дорисовать ребро xy вдоль пути xzy так, чтобы оно не пересекало zu и остальные рёбра графа (см. рисунок 6.1). Тем самым мы установили планарность G , противоречие. \square

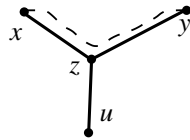


Рис. 6.1: Ребро xy .

1.2. Граф G' не содержит θ -подграфа (то есть, подграфа из трёх непересекающихся путей между двумя вершинами, который в некотором смысле является подразбиением буквы θ).

Доказательство. Изобразим планарный граф $G \cdot xy$ на плоскости без пересечений рёбер. Удалим с этого изображения вершину w , получив тем самым изображение графа G' . Пусть F — грань G' (в полученном плоском изображении), содержащая вершину w (см. рисунок 6.2а, толстые рёбра). Назовем рёбра границы грани F *чёрными*, пусть H — граф из чёрных рёбер. Так как граф H — граница грани, то из теоремы Жордана легко выводится, что $H \not\cong \theta$ (так мы будем обозначать отсутствие θ -подграфа у графа H). Мы покажем, что $G' = H$ и тем самым завершим доказательство пункта.

Предположим противное, пусть $G' \neq H$, тогда существуют рёбра в графе G' , не входящие в границу грани F . Такие рёбра должны быть отделены от вершины w каким-то простым циклом, являющимся частью границы грани F . Таким образом, существует простой цикл C в графе H , в одной части относительно которого лежит вершина w (и, разумеется, все рёбра из $H - C$), и есть рёбра графа G' в другой части относительно C . Назовём эти рёбра *красными* (см. рисунок 6.2а, тонкие рёбра). Возможно, не все рёбра графа G' являются чёрными или красными: в графе H такой цикл C может быть неединственным. Все остальные рёбра графа G' назовём *синими*, тогда каждое синее ребро отделено от вершины w каким-то простым циклом C' графа H , причем $C' \neq C$ (см. рисунок 6.2а, пунктирные рёбра).

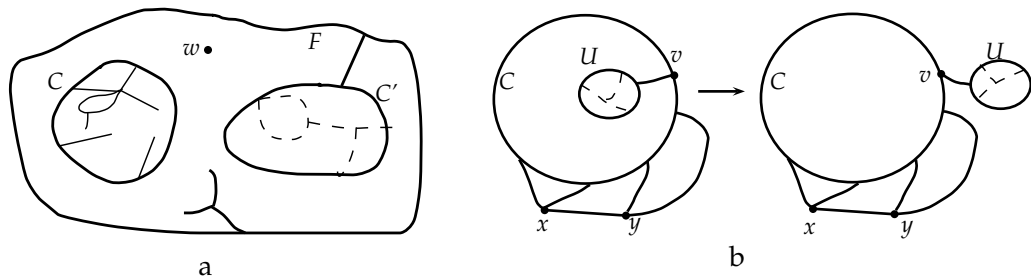


Рис. 6.2: Графы G' и G^* .

Рассмотрим граф G^* , полученный из G удалением всех красных рёбер. Этот граф очевидно планарен, рассмотрим его изображение на плоскости. Очевидно, смежные вершины x и y изображены в одной части относительно цикла C , не умаляя общности будем считать, что вне цикла. Мы исправим изображение графа G^* так, чтобы внутри цикла C ничего не было нарисовано. Рассмотрим граф $G^* - x - y$. Все его рёбра — это чёрные рёбра из графа $H - C$ и синие рёбра. Каждое синее ребро отделено от цикла C каким-то простым циклом C' графа $H - C$, так что достаточно изобразить вне C все рёбра графа $H - C$, после чего оставши-

еся синие рёбра можно изобразить внутри соответствующих им циклов графа $H - C$.

Пусть U — компонента связности графа $H - C$, $H' = H(U)$. Тогда существует не более одной вершины v в цикле C , смежной с вершинами из H' , иначе в H был бы θ -подграф, что, как мы доказали выше, невозможно. Если такая вершина v есть, то мы изобразим H' вне цикла C в маленькой окрестности вершины v так, чтобы изображение не пересекало выходящих из v вне цикла C рёбер (см. рисунок 6.2b). Если же такой вершины v нет, изобразить H' вне C еще проще. Так поступим с каждой компонентой связности графа $H - C$.

Таким образом, существует плоское изображение графа G^* без пересечений рёбер, в котором внутри цикла C ничего нет. Там-то мы и изобразим красные рёбра, они по своему определению могут быть изображены в одной части относительно цикла C ! Тем самым мы установили планарность графа G и пришли к противоречию. Значит, $G' = H$, откуда немедленно следует $G' \not\cong \theta$. \square

2. Рассмотрим любое ребро $xy \in E(G)$. Так как граф $G - x - y \not\cong \theta$, любые два цикла графа $G - x - y$ имеют не более одной общей вершины. Построим вспомогательный граф T , вершины которого будут соответствовать циклам графа $G - x - y$ и вершинам графа $G - x - y$, не входящим ни в один цикл. Две вершины графа T будут смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им объекты смежны в $G - x - y$ или имеют общую вершину (последнее возможно только для двух циклов). Из $G - x - y \not\cong \theta$ легко вывести, что T — лес. Рассмотрим висячую вершину T . Из $\delta(G - x - y) \geq 2$ следует, что ей соответствует цикл Z графа $G - x - y$.

Тогда у цикла Z не более одной вершины имеет степень более двух в графе $G - x - y$, остальные же хотя бы две вершины цикла Z имеют степень два в графе $G - x - y$. Из $\delta(G) \geq 3$ следует, что каждая из этих вершин смежна в графе G хотя бы с одной из вершин x и y . Следовательно, если $U = V(Z) \cup \{x, y\}$, то $G(U) \supset \theta$. Отсюда немедленно следует, что $G - U$ — пустой граф: если $vv' \in E(G)$ и $v, v' \notin U$, то $G - v - v' \supset \theta$, что противоречит пункту 1.2.

Предположим, что существует вершина $v \in V(G)$, $v \notin U$. Тогда v смежна в графе $G - x - y$ не более, чем с одной вершиной цикла Z и из $\delta(G - x - y) \geq 2$ следует, что существует вершина $v' \notin U$, смежная с v . Противоречие с доказанным выше. Таким образом, $G - x - y = Z$. Тем самым мы получили $G = G(U)$. Значит, любая вершина цикла Z смежна в графе G хотя бы с одной из вершин x и y . Пусть $Z = a_1 a_2 \dots a_k$, тогда $k \geq 3$. Если все вершины цикла Z смежны и с x , и с y , то очевидно

$G \supset K_5$, противоречие.

Пусть $a_1x \in E(G)$, $a_1y \notin E(G)$. Докажем, что $a_2x \notin E(G)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $a_2x \in E(G)$. Изобразим (очевидно, планарный) граф $G - a_2x$ на плоскости без пересечений рёбер. Так как из вершины a_1 выходит только одно ребро вне цикла Z (это ребро a_1x), то мы без труда сможем дорисовать вдоль пути a_2a_1x ребро a_2x так, чтобы оно не пересекало рёбер графа $G - a_2x$ (см. рисунок 6.3). Тем самым мы установили планарность графа G и получили противоречие. \square

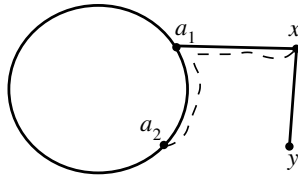


Рис. 6.3: Ребро a_2x .

Следовательно, остается единственный случай: k четно, $k \geq 4$, вершины цикла Z с четными номерами смежны с x , а вершины цикла Z с нечетными номерами смежны с y . Легко видеть, что в этом случае $G \supset K_{3,3}$. Полученное противоречие показывает, что минимального контрпримера G не существует и завершает доказательство теоремы. \square

6.2.1 Части разбиения и планарность

Понятно, что связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен любой его блок. В этом разделе мы докажем аналогичный критерий планарности для двусвязных графов — в терминах частей разбиения этого графа. Нам понадобится вспомнить определения одиночного множества и блока двусвязного графа (см. раздел 5.5.3).

Теорема 6.3. (S. MacLane, 1937.) Пусть G — двусвязный граф, а G' — граф, полученный из G добавлением всех ребер вида ab , где $\{a, b\}$ — одиночное множество графа G . Тогда граф G планарен если и только если для любого блока $B \in \text{Part}(G)$ граф $G'(B)$ планарен.

Доказательство. \Leftarrow . Так как цикл планарен, для любой части $B \in \text{Part}(A)$ граф $G'(B)$ планарен.

Пусть граф G непланарен. Тогда по теореме 6.2 граф G имеет подграф H — подразбиение K_5 или $K_{3,3}$. Поскольку графы K_5 и $K_{3,3}$ трёхсвязны, то любое двухвершинное разделяющее множество графа H не разделяет множество его главных вершин M . Поэтому существует такая часть $B \in \text{Part}(G)$, что $B \supset M$.

Предположим, что существует такая вершина $x \in V(H)$, что $x \notin B$. Тогда эта вершина лежит на пути $S_{a,b}$ между какими-то двумя главными вершинами $a, b \in B$. Пусть $x \in A \in \text{Part}(G)$. Так как $\text{BT}(G)$ — дерево, существует смежное с B в $\text{BT}(G)$ (то есть, входящее в границу B) одиночное множество $R = \{y, y'\}$, отделяющее A от B . Тогда если мы пойдём по пути $S_{a,b}$ от x в обе стороны, мы попадём в вершины множества R . Заменяем участок пути между y и y' на ребро yy' . После нескольких таких операций вершины вне части A кончатся и мы получим граф H' — подразбиение K_5 или $K_{3,3}$ — вершины которого лежат в B . Так как мы проводили только рёбра между парами вершин, образующих одиночное множество, входящее в границу части B , то H' — это подграф $G'(B)$. Значит, $G'(B) \supset K_5$ или $G'(B) \supset K_{3,3}$, что противоречит планарности $G'(B)$.

\Rightarrow . Пусть $G'(B)$ непланарен. По лемме 5.19 существует подграф H графа G , являющийся подразбиением $G'(B)$. Тогда, очевидно, и граф H непланарен, что противоречит планарности графа G . \square

6.3 Двойственный граф

Пусть G — связный плоский граф. Мы определим двойственный к нему граф G^* следующим образом. Вершины G^* будут соответствовать граням (странам) графа G , внутри каждой грани a графа G мы отметим соответствующую ей вершину a^* графа G^* . Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани a и b графа G . Ему будет соответствовать ребро e^* двойственного графа G^* , соединяющее соответствующие странам a и b вершины a^* и b^* . Если a совпадает с b (или, что равносильно, ребро e — мост), то ребро e^* оказывается петлёй. Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют грани a и b . Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами G и рёбрами G^* , очевидно, $e(G) = e(G^*)$.

Граф G^* зависит не только от графа G , но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем G^* для плоского графа G . При разных изображениях на плоскости (без пересечения рёбер) изоморфных графов могут получиться неизоморфные двойственные графы. Поэтому двойственный граф G^* также будет конкретным изображением

ем на плоскости: его вершины мы изобразим внутри соответствующих граней. Ребро $e^* \in E(G^*)$, соединяющее вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ мы проведём так, чтобы оно пересекало соответствующее ему ребро $e \in E(G)$. Наглядно очевидно, что это можно сделать так, чтобы рёбра G^* не пересекались во внутренних точках. Зафиксируем на каждом ребре графа G по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку a^* внутри грани a можно соединить непересекающимися путями с серединами всех входящих в границу грани a рёбер (а если ребро e_a — мост, с обеих сторон от которого расположена грань a , то можно провести и два таких пути, из которых получится соответствующая e_a петля графа G^*).

Разумеется, двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа G , ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер: получатся изоморфные графы, “одинаково” нарисованные на плоскости. Строго говоря, нужно было бы определить изоморфизм плоских изображений графов, но мы не будем вдаваться в топологические подробности.

Итак, вершины графа G^* соответствуют граням графа G , а рёбра графа G^* соответствуют рёбрам графа G . Совершенно естественно получается, что грани G^* должны соответствовать вершинам графа G . Это становится понятным из нашего способа “рисования” графа G^* : рассмотрим вершину $v \in V(G)$ и все грани, в которые она входит. Эти грани можно считать упорядоченными по часовой стрелке, соседние грани имеют общее ребро, инцидентное вершине v , каждому такому ребру будет соответствовать ребро двойственного графа G^* , соединяющее соответствующие грани. Таким образом, выходящие из v рёбра графа G перейдут в опоясывающие вершину v рёбра графа G^* , образующие границу грани v^* плоского графа G^* .

Теперь покажем, что $(G^*)^*$ изоморфен G . В самом деле, это становится понятным из сказанного выше, так как грани G^* соответствуют вершинам G , в качестве точек на гранях двойственного графа G^* можно выбрать вершины исходного графа G .

В заключение еще раз подчеркнём, что чему соответствует: вершины G — грани G^* , грани G — вершины G^* , рёбра G — рёбра G^* . В последнем соответствии подчеркнём, что мосты G соответствуют петлям G^* , и, наоборот, петли G соответствуют мостам G^* .

Задача 6.1. Докажите, что найдётся такой плоский граф G со сколь угодно большим числом вершин, что графы G и G^* изоморфны.

6.4 Вокруг 4СС

Безусловно, самым известным не только относительно планарных графов, но и вообще в теории графов утверждением является гипотеза четырёх красок (4 Color Conjecture), которую теперь часто называют 4СТ (4 Color Theorem), поскольку имеется её доказательство. За первым доказательством 1977 года последовало более короткое доказательство. Однако и сейчас актуален вопрос о доказательстве этого утверждения, не настолько опирающемся на использования компьютера.

Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.) Грани любого плоского графа без мостов можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

Отметим, что раскраска граней называется правильной, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Сразу же понятно, что в плоском графе, грани которого мы пытаемся правильно раскрасить, не должно быть мостов: мосты в двойственном графе переходят в петли. Для плоского графа G мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа G . Благодаря описанной в предыдущем разделе двойственности очевидно, что $\chi^*(G) = \chi(G^*)$. Таким образом, 4СС эквивалентна утверждению, что для любого планарного графа $\chi(G) \leq 4$.

С 1878 года, когда 4СС впервые попала к математикам, и по наше время многие пытались и пытаются гипотезу сначала доказать, теперь — придумать короткое доказательство. Однако, пока эти попытки безуспешны. В 1879 году Кемпе (F. Kempe) опубликовал первую попытку доказать 4СС, однако на самом деле доказал лишь раскрашиваемость в 5 цветов (или 5СТ).

В 1880 году Тэйт (P. G. Tait) опубликовал свой подход к доказательству 4СС. Гипотеза Тэйта о гамильтоновом цикле в планарном графе оказалась ошибочной (мы подробно разберём этот вопрос в одном из разделов), а теорема об эквивалентной переформулировке 4СС оказалась очень полезной: в последующих работах авторы доказывали не собственно 4СС, а эквивалентную переформулировку о рёберных раскрасках триангуляции.

Определение 6.2. 1) Плоский граф называется *триангуляцией*, если граница каждой его грани — треугольник (цикл длины 3). Кратные рёбра при этом допускаются (однако, они не могут быть рёбрами одной грани), петли запрещены.

2) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.

Замечание 6.1. 1) Понятно, что триангуляция T — рёберно двусвязный граф, так как каждое ребро графа T , очевидно, входит в цикл-треугольник.

2) Двойственный граф T^* — рёберно двусвязный кубический граф (то есть, граф, степени всех вершин которого равны 3).

Лемма 6.2. 1) Пусть G — плоский граф без петель, причём в границе каждой грани не менее трёх вершин. Тогда существует триангуляция T , остовным подграфом которой является G .

2) Пусть D — грань G , а $t(D)$ — количество треугольников, на которые оказалась разбита грань D в триангуляции T . Тогда $t(D) = b(D) - 2$ в случае, когда граница грани D — связный граф и $t(D) \geq b(D)$ если граница грани D несвязна.

Доказательство. Пусть D — грань нашего графа, граница которой — не треугольник. Рассмотрим два случая: граф $B(D)$ связан и граф $B(D)$ несвязен.

1. Граф $B(D)$ связан.

Мысленно раздвоим каждое внутреннее ребро грани D , превратив $B(D)$ в цикл Z , проходящий каждое граничное ребро грани D ровно один раз и каждое внутреннее ребро — ровно два раза, грань D будет внутренней областью цикла Z . При этом, некоторые вершины в цикле Z могут повторяться.

Триангулировать грань D значит триангулировать внутренность цикла Z . В цикле Z ровно $b(d)$ рёбер, поэтому при его триангуляции получится ровно $b(d) - 2$ треугольника. Единственное, за чем при триангуляции нужно проследить — новые рёбра должны соединять различные вершины. Докажем вспомогательное утверждение.

Пусть Z — цикл, $v(Z) \geq 3$, вершины цикла Z покрашены так, что цветов хотя бы три и любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать внутреннюю область цикла Z так, что все проведённые диагонали цикла соединяют вершины разных цветов.

Доказательство. Индукция по количеству вершин. База для цикла из трёх вершин очевидна, докажем переход. Пусть $Z = v_1 v_2 \dots v_k$ (нумерация вершин — циклическая), $k \geq 4$. Очевидно, найдётся диагональ $a_i a_{i+2}$, соединяющая две вершины разных цветов. Эта диагональ разрезает цикл Z на треугольник $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ и меньший цикл Z' . Единственная возможная проблема — вершины цикла Z' могут быть покрашены в два цвета, иначе, применив к циклу Z' индукционное предположение, мы завершим доказательство.

Пусть вершина a_{i+1} покрашена в цвет 3, а вершины цикла Z' покрашены в цвета 1 и 2. Тогда цвета вершин цикла Z' чередуются, следовательно, $v(Z')$ чётно, то есть, $v(Z') \geq 4$. Таким образом, в исходном цикле Z была единственная вершина a_{i+1} цвета 3 и хотя бы по две вершины цветов 1 и 2. Тогда отрезав треугольник диагональю $a_{i+1}a_{i+3}$ (очевидно, её концы разноцветные), мы получим меньший цикл Z'' , среди вершин которого представлены все три цвета. По индукционному предположению, мы триангулируем внутренность цикла Z'' и завершим доказательство. \square

Вернёмся к доказательству леммы. Покрасим $b(D)$ вершин цикла Z в $v(B(D)) \geq 3$ цветов так, чтобы в один цвет были покрашены одинаковые вершины. Тогда любые две соседние вершины разноцветны. По доказанному выше утверждению, мы можем триангулировать внутренность цикла Z так, чтобы проведённые рёбра имели разноцветные концы, то есть, не были петлями, что и требовалось доказать.

2. Граф $B(D)$ несвязен.

Пусть теперь граф $B(D)$ несвязен, а x и y — две вершины из разных компонент связности графа $B(D)$. Проведём ребро xy внутри грани D . Это ребро будет внутренним для грани D , поэтому $b(D)$ увеличится на 2. Будем действовать таким образом, пока граница грани не окажется связной. При этом, мы провели хотя бы одно ребро и получили размер грани D в новом графе $b'(D) \geq b(D) + 2$. По доказанному выше, в результате триангуляции грани получится хотя бы $b'(D) - 2 \geq b(D)$ треугольников. Таким образом, в этом случае $t(D) \geq b(D)$. \square

Замечание 6.2. Если в плоском графе G нет петель, $v(G) \geq 3$ и никакая грань не является циклом из двух кратных рёбер, то в границе каждой грани хотя бы три вершины и мы можем триангулировать этот граф, воспользовавшись леммой 6.2.

Определение 6.3. Пусть T — триангуляция. Назовём *Тэйтовой раскраской* триангуляции T такую раскраску рёбер T в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

На всякий случай подчеркнём, что далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

Теорема 6.4. (Р. Г. Тэйт, 1880.) Следующие четыре утверждения равносильны.

- 1° Для любого плоского графа G выполняется $\chi(G) \leq 4$.
- 2° Для любого рёберно двусвязного плоского графа G выполняется $\chi^*(G) \leq 4$.

3° Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа G выполняется $\chi'(G) = 3$.

4° Для любой триангуляции T существует Тэйтова раскраска.

Доказательство. 1° \Rightarrow 2°. Рёберно двусвязный граф G не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф G^* не имеет петель. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) \leq 4$.

2° \Rightarrow 3°. Пусть G — рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска ρ^* граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что ρ^* принимает значения из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ (здесь \mathbb{Z}_2 — поле вычетов по модулю 2).

Так как G — рёберно двусвязный граф, каждое ребро $e \in E(G)$ разделяет две разные грани a и b . Мы положим $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$ (сложение по модулю 2 по каждой координате). Так как $a \neq b$, то $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$, следовательно, $\rho'(e) \neq (0, 0)$. Таким образом, ρ' — раскраска рёбер графа G в три цвета.

Докажем, что раскраска ρ' — правильная. Пусть v — вершина графа G , а a, b, c — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро. Следовательно, $\rho^*(a)$, $\rho^*(b)$ и $\rho^*(c)$ — три разных цвета, откуда очевидно следует, что все три цвета инцидентных вершине v рёбер

$$\rho^*(a) + \rho^*(b), \quad \rho^*(a) + \rho^*(c), \quad \rho^*(b) + \rho^*(c)$$

также различны. Таким образом, ρ' — правильная раскраска рёбер G в 3 цвета, следовательно, $\chi'(G) = 3$ (так как очевидно, что $\chi'(G) \geq 3$).

3° \Rightarrow 1°. Достаточно рассмотреть связный граф G с $v(G) \geq 3$. По лемме 6.2, граф G является подграфом триангуляции H . Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф H^* . Как мы знаем, существует правильная раскраска ρ' рёбер этого графа в 3 цвета. Пусть $H_{i,j}^*$ — подграф H^* на рёбрах цветов $i, j \in \{1, 2, 3\}$ в раскраске ρ' . Тогда $d_{H_{i,j}^*}(v) = 2$ для любой вершины $v \in V(H^*)$, следовательно, $H_{i,j}^*$ — объединение нескольких циклов. Тогда легко видеть, что существует правильная раскраска $\rho_{i,j}^*$ граней $H_{i,j}^*$ в два цвета.

Рассмотрим произвольную грань a графа H^* . Пусть a_{12} — грань H_{12}^* , частью которой является a , а a_{13} — грань H_{13}^* , частью которой является a (понятно, что a_{12} и a_{13} определены однозначно). Положим $\rho^*(a) = (\rho_{1,2}^*(a_{1,2}), \rho_{1,3}^*(a_{1,3}))$. Мы получили раскраску граней графа H^* в четыре цвета. Покажем, что эта раскраска является правильной.

Рассмотрим имеющие общее ребро e грани a и b графа H^* , пусть $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}$, $b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$ — определённые выше представления в виде

пересечений граней. Если $\rho'(e) \in \{1, 2\}$, то $a_{1,2} \neq b_{1,2}$, причём эти грани графа $H_{1,2}^*$ граничат по ребру e , следовательно, $\rho_{1,2}^*(a_{1,2}) \neq \rho_{1,2}^*(b_{1,2})$, а тогда и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$. Если $\rho'(e) = 3$, аналогично $\rho_{1,3}^*(a_{1,3}) \neq \rho_{1,3}^*(b_{1,3})$ и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.

Таким образом, $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$, что и требовалось доказать.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Очевидно, двойственный граф T^* триангуляции T является рёберно двусвязным, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета — Тэйтовой раскраской рёбер T .

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть G — кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф G^* — триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции G^* является правильной раскраской рёбер G в три цвета. \square

Успешные попытки доказательства 4СТ состоят примерно в следующем. Доказывается существование Тэйтовой раскраски рёбер любой триангуляции. Предполагается противное и рассматривается минимальный контрпример. На первом этапе рассматривается множество так называемых *неизбежных конфигураций* и доказывается, что в каждой триангуляции обязательно есть одна из них (и, в частности, в минимальном контрпримере T). На втором этапе показывается, что вопрос о раскраске рёбер триангуляции T можно свести к вопросу о раскраске меньшей триангуляции (что невозможно для минимального контрпримера). Это делается отдельно для случая каждой неизбежной конфигурации с использованием компьютера. Остаётся лишь добавить, что в первом доказательстве было около 2000 неизбежных конфигураций, а во втором доказательстве — около 700. Понятно, что в доказательстве “неизбежности” этих конфигураций также не обходится без перебора. Всё это делает открытым вопрос о коротком (или хотя бы не настолько переборном) доказательстве 4СС.

Однако, среди неизбежных конфигураций есть такие, в случае наличия которых легко доказывается раскрашиваемость графа. Мы разберём случай триангуляции сферы, содержащей вершину степени не более 4. Нам понадобится обобщение классического понятия Тэйтовой раскраски.

Определение 6.4. Пусть G — плоский граф.

1) Назовём *Тэйтовой раскраской* графа G раскраску рёбер этого графа в три цвета, в которой три ребра любой грани-треугольника покрашены в разные цвета. По умолчанию будем считать, что рёбра всегда красятся в цвета 1, 2 и 3.

2) Пусть *треугольный* граф G^T плоского графа G — это граф, вершины которого соответствуют рёбрам G , и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра являются рёбрами одной треугольной грани.

Мы считаем граф G^T плоским: пусть его вершины изображены как середины рёбер графа G , а рёбра — как “средние линии” граней.

3) Пусть D — треугольная грань графа G . Будем говорить, что ребро графа G^T — *на грани* D , если оно изображено как средняя линия этой грани.

Замечание 6.3. Нетрудно понять, что Тэйтова раскраска плоского графа G — это правильная раскраска его треугольного графа G^T .

Определение 6.5. 1) Пусть ρ — Тэйтова раскраска графа G . Обозначим через $G^{i,j}(\rho)$ подграф графа G^T на вершинах цветов i и j .

2) Подграф H графа G^T назовём *двуцветным графом* в G , если H представляется в виде $G^{i,j}(\rho)$ для некоторой Тэйтовой раскраски ρ графа G и пары цветов i, j .

Следующее тривиальное замечание будет важным инструментом в наших доказательствах.

Замечание 6.4. 1) Рёбра графа G , соответствующие вершинам ненулевой степени в графе $G^{i,j}(\rho)$, покрашены правильным образом в два цвета: i и j . Легко понять, что граф $G^{i,j}(\rho)$ однозначно задает раскраску ρ : в третий цвет нужно покрасить все рёбра графа G , по которым не проходит $G^{i,j}(\rho)$.

2) Пусть H — двуцветный граф в G . Отметим, что несмотря на название, его вершины не покрашены в два цвета (разумеется, это можно сделать, причем, как правило, не единственным способом). Двуцветный граф содержит по одному ребру на каждой треугольной грани G . Каждая компонента связности H — путь или четный цикл.

Двуцветный граф H может быть представлен в виде $G^{i,j}(\rho)$ разными способами: это может получиться для разных Тэйтовых раскрасок ρ и пар цветов. Мы специально не фиксируем цвета вершин двуцветного графа! Каждая правильная раскраска вершин H в два цвета задает его представление в виде $G^{i,j}(\rho)$ и, следовательно, Тэйтову раскраску ρ .

Лемма 6.3. Пусть G — двусвязный плоский граф, все грани которого, кроме одной грани D — треугольники. Пусть k — это количество рёбер грани D . Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Для любого двуцветного графа H в G^T концы всех его путей лежат на рёбрах грани D , а суммарное количество рёбер в этих путях имеет ту же четность, что и k .

2) Пусть ρ — Тэйтова раскраска G , а k_i — это количество рёбер грани D , покрашенных в цвет i . Тогда числа k , k_1 , k_2 и k_3 имеют одинаковую четность.

Доказательство. 1) Так как каждое ребро входит ровно в две грани, и только грань D — не треугольник, то все вершины H , соответствующие рёбрам грани D имеют степень 1, а все остальные вершины — степень 2. Значит, граф H есть объединение нескольких циклов и нескольких путей с концами на граничных рёбрах D . Поскольку граф H двудолен, то все циклы четны. Следовательно, суммарная длина путей имеет ту же четность, что и число граней-треугольников в G , которое, что нетрудно проверить, имеет ту же четность, что и количество рёбер в D (то есть k).

2) Количество концов путей в двуцветном графе $G^{i,j}(\rho)$, очевидно, чётно. С другой стороны, это количество есть $k_i + k_j$, откуда очевидно следует доказываемое утверждение. \square

Теорема 6.5. Пусть триангуляция G не имеет Тэйтовой раскраски, а любая меньшая триангуляция имеет Тэйтову раскраску. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) G не имеет кратных рёбер.
- 2) Любой треугольник в G — граница грани.
- 3) Любой цикл длины 4 в G отделяет две грани от остальных, то есть, в одной из областей, на которые этот цикл делит плоскость, нет вершин G .

Доказательство. Очевидно $v(G) > 3$.

1) Пусть G имеет два кратных ребра e и e' , соединяющих x и y , и эти два ребра образуют цикл C . Пусть V_1 — множество из x, y и всех вершин G внутри цикла C , а V_2 — из x, y и всех вершин вне C . Пусть $G_i = G(V_i)$. Все грани графа G_i являются треугольниками, кроме одной грани, граница которой — цикл C из рёбер e и e' . Тогда $H_i = G_i - e'$ — триангуляция, причем меньшая, чем G .

Обе триангуляции H_1 и H_2 имеют Тэйтовы раскраски, пусть это ρ_1 и ρ_2 соответственно. Можно считать, что эти раскраски согласованы на общем ребре: $\rho_1(e) = \rho_2(e)$. Положим $\rho(e') = \rho(e) = \rho_1(e)$. Любое из остальных рёбер триангуляции T входит ровно в одну из триангуляций H_1 и H_2 . Для $f \in E(H_1)$ мы положим $\rho(f) = \rho_1(f)$, а для $f \in E(H_2)$ положим $\rho(f) = \rho_2(f)$. Нетрудно понять, что ρ — Тэйтова раскраска триангуляции G . Противоречие.

2) Предположим, что G имеет цикл xuz , не являющийся границей грани. Пусть V_1 — множество из x, y, z и всех вершин G внутри цикла C , а V_2 — из x, y, z и всех вершин вне C . Понятно, что $H_i = G(V_i)$ — триангуляция, причем меньшая, чем G .

Обе триангуляции H_1 и H_2 имеют Тэйтовы раскраски, пусть это ρ_1 и ρ_2 соответственно. Каждая из раскрасок ρ_1 и ρ_2 красит рёбра xy , xz и yz в разные цвета, поэтому можно считать, что раскраски совпадают на этих рёбрах. Далее аналогично пункту 1 мы построим Тэйтову раскраску триангуляции G и придём к противоречию.

3) Начнем как в предыдущих пунктах. Пусть $C = x_1x_2x_3x_4$ — цикл длины 4 в G , причем и внутри C , и вне C есть хотя бы по одной вершине. Пусть V_1 — это множество вершин, лежащих внутри цикла C или на цикле, V_2 — это множество вершин, лежащих вне цикла C или на цикле, $G_i = G(V_i)$.

Рассмотрим граф G_2 . В этом графе ровно одна грань-четырёхугольник (граница этой грани — цикл C), все остальные грани — треугольники. Пусть плоский граф H_2 получен из G_2 добавлением ребра x_1x_3 , проведённого внутри цикла C , а плоский граф F_2 получен из G_2 добавлением ребра x_2x_4 , проведённого внутри цикла C (см. рисунок 6.4). Понятно, что H_2 и F_2 — триангуляции, причём меньшие, чем G . Тогда у этих двух графов (а значит, и у G_2) есть Тэйтовы раскраски,

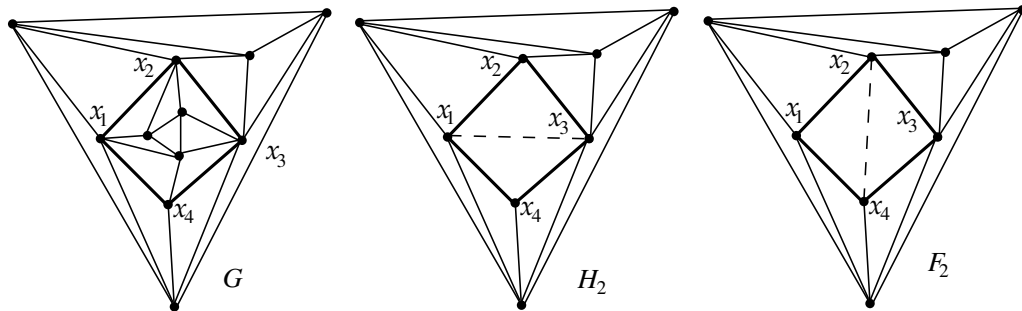


Рис. 6.4: Графы G , H_2 и F_2 .

По лемме 6.3 в Тэйтовой раскраске графа G_2 количество рёбер каждого цвета на цикле C должно быть четным. Тогда рёбер какого-то цвета в цикле C нет. Не умаляя общности положим, что все рёбра цикла C покрашены в цвета 1 и 2.

Пусть y_{12} , y_{23} , y_{34} , y_{41} — середины соответствующих рёбер цикла C . Рассмотрим граф $Q = G_2^{1,2}(\rho)$. Это двуцветный граф, содержащий два пути с концами на рёбрах C , и эти пути имеют длины одинаковой четности. Так как граф Q — плоский, два его пути не пересекаются. Значит, они соединяют середины соседних рёбер цикла C : либо это $y_{12}y_{23}$ -путь и $y_{34}y_{41}$ -путь (см. рисунок 6.5а, в этом случае назовём Q *двуцветным графом типа 1*, если пути нечетные и *типа 2*, если пути четные), либо —

$y_{23}y_{34}$ -путь и $y_{41}y_{12}$ -путь (см. рисунок 6.5b, назовём Q *двуцветным графом типа 3*, если пути нечетные и *типа 4*, если пути четные). Пусть $p(i)$ — количество двуцветных подграфов графа G^T , имеющих тип i .



Рис. 6.5: Типы 1, 2, 3 и 4.

Обе триангуляции H_2 и F_2 имеют Тэйтовы раскраски, в которых рёбра цикла C покрашены в цвета 1 и 2 (назовём такие раскраски *хорошими*). Раскраска ρ может быть продолжена до хорошей Тэйтовой раскраски триангуляции H_2 если и только если добавив к $G_2^{12}(\rho)$ рёбра $y_{12}y_{23}$ и $y_{34}y_{41}$ мы не получим нечётных циклов (мы должны получить подграф графа H_2^T на вершинах цветов 1 и 2), то есть, если и только если граф $G_2^{12}(\rho)$ имеет тип 1, 3 или 4. Аналогично, продолжить ρ до хорошей Тэйтовой раскраски триангуляции F_2 можно если и только если граф $G_2^{12}(\rho)$ имеет тип 1, 2 или 3.

Таким образом, возможны три случая: $p(1) \neq 0$, $p(3) \neq 0$, или одновременно $p(2) \neq 0$ и $p(4) \neq 0$. Разберём эти случаи.

1. $p(1) \neq 0$.

Пусть Q — двуцветный граф типа 1. Покрасим в цвет 3 рёбра G , не входящие в Q . Нетрудно покрасить входящие в Q рёбра триангуляции G в цвета 1 и 2, так, чтобы получилась раскраска ρ' с $\rho'(x_1x_2) = \rho'(x_3x_4) = 1$, $\rho'(x_2x_3) = \rho'(x_4x_1) = 2$ (тип A , см. рисунок 6.6a), а также раскраска ρ^* с $\rho^*(x_1x_2) = \rho^*(x_4x_1) = 1$, $\rho^*(x_2x_3) = \rho^*(x_3x_4) = 2$ (тип B , см. рисунок 6.6b).

2. $p(3) \neq 0$.

Аналогично предыдущему случаю, теперь мы можем получить либо раскраску типа A (см. рисунок 6.6c), либо раскраску ρ'' с $\rho''(x_1x_2) = \rho''(x_2x_3) = 1$ и $\rho''(x_4x_1) = \rho''(x_3x_4) = 2$ (тип C , см. рисунок 6.6d).

3. $p(2) \neq 0$ и $p(4) \neq 0$.

Пусть Q — двуцветный граф типа 2. В нем есть четные $y_{12}y_{23}$ -путь и $y_{34}y_{41}$ -путь, поэтому нетрудно получить Тэйтову раскраску типа C (см. рисунок 6.7a). Аналогично, из двуцветного графа типа 4 можно получить Тэйтову раскраску типа B (см. рисунок 6.7b).

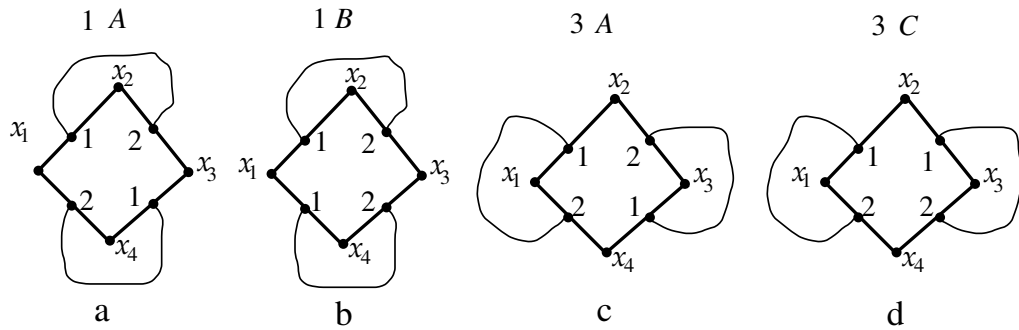


Рис. 6.6: Раскраски двучетного графа с двумя нечетными путями.

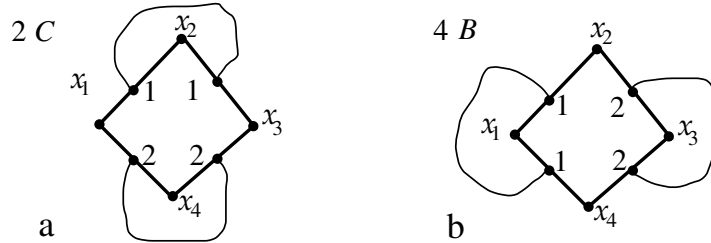


Рис. 6.7: Раскраски двучетного графа с двумя четными путями.

Таким образом, существуют Тэйтовы раскраски графа G_2 хотя бы двух типов из A , B и C . Аналогичное утверждение верно и для Тэйтовых раскрасок графа G_1 . Таким образом, у графов G_1 и G_2 существуют Тэйтовы раскраски одного типа (из A , B и C), то есть, совпадающие на общих рёбрах графов G_1 и G_2 — рёбрах цикла C . Объединив эти две раскраски, мы получим Тэйтову раскраску триангуляции G . Противоречие. \square

Следствие 6.4. Пусть триангуляция G не имеет Тэйтовой раскраски, а любая меньшая триангуляция имеет Тэйтову раскраску. Тогда $\delta(G) \geq 5$.

Доказательство. Очевидно, триангуляция не содержит вершин степени 1. Пусть $x \in V(G)$, $d_G(x) = 2$. Так как G — не треугольник, то существует два кратных ребра, соединяющих две вершины из $N_G(x)$ (по одному ребру в каждой из двух различных граней, содержащих x). Это противоречит пункту 1 теоремы 6.5.

Пусть $x \in V(G)$, $3 \leq d_G(x) \leq 4$. Можно считать, что $v(G) \geq 6$, иначе легко построить Тэйтову раскраску G . Тогда вершины из окрестности x образуют в G цикл из 3 или 4 вершин, по обе стороны от которого есть

другие вершины, что противоречит пунктам 2 и 3 теоремы 6.5. \square

6.5 Списочные раскраски планарных графов

В этом разделе мы изучим *списочные раскраски* (*list colorings*) планарных графов. Списочные раскраски определены в разделе 4.8. Для планарных графов мы приведём списочные версии известных классических теорем: теоремы о пяти красках и теоремы Грёцша. Во втором случае доказательство много проще исходного доказательства классической версии. Все результаты раздела относительно новые и принадлежат Томассену (C. Thomassen).

Теорема 6.6. (C. Thomassen, 1994.) *Для любого плоского графа G выполняется $\text{ch}(G) \leq 5$.*

Доказательство. Ввиду леммы 6.2, достаточно доказать теорему для случая, когда G — триангуляция. Мы переформулируем теорему так, чтобы она удобнее доказывалась по индукции. *Внешняя грань* любого плоского графа — это единственная его неограниченная грань, *внешний цикл* — её граница. Пусть каждой вершине v соответствует список цветов $L(v)$, введём обозначение $\ell(v) = |L(v)|$.

Пусть G — плоский граф, все грани которого, кроме внешней — треугольники. Пусть цикл $C = v_1v_2 \dots v_k$ — граница внешней грани. Пусть вершины v_1 и v_2 уже покрашены в различные цвета, $\ell(v_i) \geq 3$ для $i \in [3..k]$ и $\ell(u) = 5$ для каждой вершины $u \in V(G) \setminus V(C)$. Тогда раскраска может быть продолжена до правильной раскраски всего графа G с данными списками.

Доказательство. Пусть ρ — правильная раскраска вершин графа G по данным спискам, которую мы строим. Рассмотрим несколько случаев.

1. $G = C$. В этом случае доказательство очевидно.

2. Цикл C имеет хорду v_iv_j .

В этом случае хорда делит цикл C на две части C_1 и C_2 , пусть ребро v_1v_2 лежит в цикле C_1 . Кроме того, хорда разбивает на две части граф G : это граф G_1 с внешним циклом C_1 и граф G_2 с внешним циклом C_2 . По индукционному предположению, сначала мы можем покрасить G_1 , потом перейдём к покраске G_2 . На внешнем цикле C_2 покрашено ровно две соседние вершины: это v_i и v_j , их цвета очевидно различны. Понятно, что ограничения на длины списков соблюдаются и мы по индукционному предположению можем покрасить G_2 , построив тем самым раскраску вершин графа G с данными списками.

3. Цикл не имеет хорд, $G \neq C$.

Рассмотрим в этом случае окрестность вершины v_k . Пусть в порядке следования по часовой стрелке в нашем изображении графа это $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$. Так как все внутренние грани G — треугольники, $v_1 u_1 \dots u_m v_{k-1}$ — путь в графе G . Выберем два отличных от $\rho(v_1)$ цвета $i, j \in L(v_k)$ и удалим их из $L(u_1), \dots, L(u_m)$. Покрасим меньший граф $G' = G - v_k$ (это можно сделать по индукционному предположению: внешнюю грань ограничивает цикл $C' = v_1 v_2 \dots v_{k-1} u_m u_{m-1} \dots u_1$, на котором покрашены две вершины v_1 и v_2 , списки остальных вершин граничного цикла имеют не менее трёх цветов, списки вершин из $G' - C'$ — по 5 цветов). После этого выберем из цветов i, j отличный от $\rho(v_{k-1})$ положим $\rho(v_k)$ равным этому цвету. Очевидно, получилась правильная раскраска G по данным спискам. \square

Теперь легко доказать теорему для любой триангуляции G — достаточно лишь покрасить две вершины цикла-границы внешней грани в два разных цвета, которые в их списках, безусловно, есть. \square

Следствие 6.5. Для любого планарного графа G выполняется $\chi(G) \leq 5$.

Отметим, что существует плоский граф G , для которого $\text{ch}(G) = 5$, поэтому результат Томассена — наилучший возможный.

Определение 6.6. Пусть C — простой цикл. Простой путь L называется *трансверсалью* цикла C , если концы пути L — различные вершины C , а внутренние вершины не принадлежат циклу C . Длинной трансверсали назовём длину пути L , то есть, количество его рёбер.

Замечание 6.5. Отметим, что хорда цикла — это трансверсаль длины 1.

Определение 6.7. Для пути N через $\text{Int}(N)$ обозначим множество его внутренних (отличных от концов) вершин.

Доказательство следующей теоремы основано на тех же принципах, но технически гораздо сложнее. Однако, трудности возникают не на пустом месте. Отметим, что исходное доказательство классической (не списочной) версии этой теоремы много длиннее.

Теорема 6.7. (С. Thomassen, 1995.) Пусть G — плоский граф, причём $g(G) \geq 5$. Тогда $\text{ch}(G) \leq 3$.

Доказательство. Пусть каждой вершине v соответствует список цветов $L(v)$, введём обозначение $\ell(v) = |L(v)|$. Пусть ρ — правильная раскраска вершин по заданным спискам, которую мы строим. Будем называть вершину v *покрашенной*, если её цвет $\rho(v)$ уже задан, в этом случае

$\ell(v) = 1$. Будем называть вершину v *опасной*, если $\ell(v) = 2$. Мы изменим утверждение так, чтобы его было удобнее доказывать по индукции.

Лемма 6.4. Пусть G — плоский граф, $g(G) \geq 5$, а C — граница внешней грани графа G . Пусть некоторые вершины графа покрашены без нарушения правильности, причём они образуют простой путь или цикл $P = v_1 v_2 \dots v_q$ ($q \leq 6$), который является подграфом C .

Пусть все опасные вершины лежат на C , никакие две опасные вершины не смежны, каждая опасная вершина смежна не более, чем с одной покрашенной и выполняется одно из следующих трёх условий:

(P1) $v(P) \leq 6$, причём если P — путь, то опасные вершины не смежны с концами P .

(P2) $v(P) \leq 5$, причём если P — путь, то хотя бы один из концов пути P не смежен с опасными вершинами.

(P3) $v(P) \leq 4$.

Тогда раскраска может быть продолжена до правильной раскраски всего графа G с данными списками.

Доказательство. Будем считать, что для любого меньшего чем G графа, удовлетворяющего условию, утверждение уже доказано. Мы рассмотрим несколько случаев.

В некоторых случаях мы будем разбивать граф на части и по очереди применять индукционное предположение к этим частям без предварительной раскраски вершин. При таком алгоритме действий *не будет появляться новых опасных вершин*.

Во ряде случаев мы будем красить некоторые вершины графа и удалять эти вершины из графа, а их цвета — из списков их соседей. При таком алгоритме действий *могут появляться новые опасные вершины*.

В каждом случае мы будем считать, что граф не удовлетворяет условию ни одного из рассмотренных ранее случаев.

Замечание 6.6. Пусть H — подграф графа G , в котором покрашенные вершины образуют простой путь или цикл P_H (подграф P). Легко понять, что путь P_H является подграфом границы внешней грани графа H и поэтому к графу H можно применить индукционное предположение.

1. Граф G не связен.

Если граф G не связен, то можно доказать утверждение отдельно для каждой компоненты связности. Пусть граф G связен. Нам потребуются определение блоков и точек сочленения и факты, которые можно найти в разделе 1.8.2. Как известно, в не связном графе G не менее двух крайних блоков. Пусть B — тот из крайних блоков, который содержит меньше вершин пути P . Обозначим через a единственную входящую в B

точку сочленения (см. рисунок 6.8a). Понятно, что блок B содержит не более трёх вершин из P .

Пусть $G_1 = G - \text{Int}(B)$. Очевидно, к графу G_1 можно применить индукционное предположение. В результате в графе B окажется покрашенной точка сочленения a и входящие в блок B вершины пути P . В случае $\text{Int}(B) \cap V(P) \neq \emptyset$ в блоке B покрашена только вершина a , тогда положим $P' = \{a\}$.

Пусть $\text{Int}(B) \cap V(P) \neq \emptyset$. Так как внутренние вершины разных блоков несмежны, в этом случае P — путь, блок B содержит участок P' этого пути от точки сочленения a до одного из концов.

Так как граф B двусвязен, то границей его внешней грани будет цикл Z , содержащий a . Поскольку новых опасных вершин не добавилось, то все опасные вершины графа B лежат на внешнем цикле Z и ввиду $g(G_2) \geq 5$ и $v(P') \leq 3$ ни одна из них не смежна с двумя покрашенными вершинами. Таким образом, к графу B можно применить индукционное предположение. В результате мы получим искомую раскраску вершин всего графа G .



Рис. 6.8: Случаи 1 и 3.

Далее во всех случаях граф G двусвязен. Поэтому граница его внешней грани — цикл C . Занумеруем его вершины так, чтобы вершины P начинались с первой: $C = v_1 \dots v_q \dots v_k$.

2. Среди вершин v_k и v_{q+1} есть опасные.

Если $\ell(v_k) = 2$, то вершина v_k смежна не более, чем с одной покрашенной и мы покрасим v_k , не нарушая правильности раскраски. Если $\ell(v_{q+1}) = 2$, то покрасим v_{q+1} , не нарушая правильности раскраски. Отметим, что в этом случае $v_k \neq v_{q+1}$. Мы дополнительно покрасили не более, чем две вершины пути (v_k и v_{q+1}), теперь покрашено не более шести вершин. Так как исходно опасные вершины не были смежны друг с другом, дополнительно покрашенные вершины не смежны с опасными. При необходимости изменим q и перенумеруем вершины так, чтобы покрашенные вершины снова образовывали путь $v_1 \dots v_q$.

Легко понять, что и после произведённых действий граф удовлетворяет одному из условий $(P1) - (P3)$. Кроме того, теперь вершины v_k и v_{q+1} — не опасные.

3. Пусть трансверсаль L отсекает от C цикл C' из 5 или 6 вершин, причём во внутренней области цикла C' содержится хотя бы одна вершина графа G .

Пусть $V = V(C')$, W — вершины, лежащие во внешней области C' , а U — вершины, лежащие во внутренней области C' (см. рисунок 6.8b). Пусть $G_1 = G(V \cup W)$, $G_2 = G(V \cup U)$. Понятно, что $W \neq \emptyset$ и $U \neq \emptyset$. Применим индукционное предположение к графу G_1 (этот граф меньше G , цикл C — граница его внешней грани) и покрасим все его вершины, в частности, все вершины цикла C' . Теперь посмотрим на граф G_2 : целиком покрашен его внешний цикл C' из 5 или 6 вершин, все внутренние вершины имеют список из 3 цветов. По индукционному предположению, можно докрасить вершины G_2 , завершив тем самым покраску вершин G по данным спискам.

4. (а). У цикла C есть хорда.

(б). У цикла C есть трансверсаль $v_s u v_t$, причём в случае $q \geq 5$ трансверсаль L отлична от $v_{q-2} u v_{q+1}$ и $v_3 u v_k$.

(в). У цикла C есть трансверсаль $v_s u w v_t$, где $v_s, v_t \notin \text{Int}(P)$ и хотя бы одна из вершин v_s и v_t — опасная или конец пути P .

Назовём трансверсали из условий (а), (б) и (в) *плохими* и предположим, что хотя бы одна плохая трансверсаль L с концами v_s, v_t у цикла C есть. Она делит цикл C на две дуги (то есть, пути) $N_2 = v_s v_{s+1} \dots v_t$ и $N_1 = v_t v_{t+1} \dots v_s$. Пусть $n_i = |\text{Int}(N_i) \cap V(P)|$. Выберем нумерацию так, чтобы $n_2 \leq n_1$, тогда $n_2 \leq 2$. Можно считать, что вершины из P , лежащие на N_1 образуют путь — подграф P : иначе $v_s, v_t \in \text{Int}(P)$, $v_1, v_q \in \text{Int}(N_1)$ и $\text{Int}(N_2) \subset V(P)$ (см. рисунок 6.9а). Тогда условие (в) не может быть выполнено, следовательно, $v(L) \leq 3$ и из $g(G) \geq 5$ следует, что $n_2 = n_1 = 2$. В этом случае мы переименуем дуги.

Замечание 6.7. Будем считать, что не существует плохой трансверсали, отсекающей от цикла C дугу, лежащую строго в N_2 , иначе мы рассмотрим эти трансверсаль и дугу вместо L и N_2 .

Пусть цикл C_1 образован дугой N_1 и трансверсалью L , а цикл C_2 — дугой N_2 и трансверсалью L , V_i — множество из всех вершин цикла C_i и вершин, лежащих внутри этого цикла, $H_i = G(V_i)$. Отметим, что $V_1 \cup V_2 = V(G)$, $V_1 \cap V_2 = V(L)$. По построению, к графу H_1 можно применить индукционное предположение и покрасить его вершины

по данным спискам. В результате покрашенными в графе H_2 окажутся вершины трансверсали L и лежащие в $\text{Int}(N_2)$ вершины пути P .

Мы хотим проверить условие и применить к графу H_2 индукционное предположение. Отметим, что опасная вершина v графа H_2 — это опасная вершина графа G , причём $v \in \text{Int}(N_2)$. Следовательно, в графе H_2 нет пар смежных опасных вершин.

Докажем, что опасная вершина $v \in \text{Int}(N_2)$ не может быть смежна с концом пути P , лежащим на дуге N_2 .

Пусть $v \in \text{Int}(N_2)$ — опасная вершина, смежная, например, с $v_q \in V(P) \cap V(N_2)$. Ввиду отсутствия хорды, соединяющей вершину дуги N_2 с вершиной из $\text{Int}(N_2)$, это означает, что $v = v_{q+1}$, но такой случай рассмотрен в пункте 2.

Осталось разобраться с рёбрами, соединяющие опасные вершины с покрашенными и покрашенные вершины друг с другом. В графе H_2 появились новые покрашенные вершины — вершины трансверсали L .

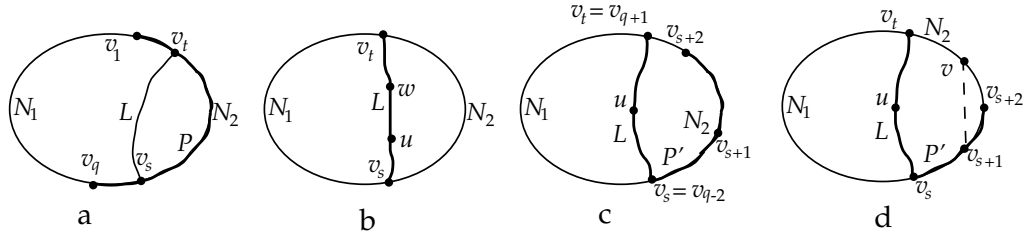


Рис. 6.9: Случай 4.

Рассмотрим случай (в), пусть $L = v_s u v v_t$, причём $v_s, v_t \notin \text{Int}(P)$. Тогда $\text{Int}(N_2) \cap V(P) = \emptyset$ и покрашенные вершины графа H_2 — это ровно четыре вершины L , что подходит под условие (P3) (см. рисунок 6.9b). Никакие две вершины L не смежны ввиду $g(G) \geq 5$. Пусть $v \in \text{Int}(N_2)$ — опасная вершина. Если она смежна с двумя покрашенными, то из $g(G) \geq 5$ следует, что v смежна с v_s и v_t . Однако, по условию (в) одна из вершин v_s и v_t — опасная или конец пути P и не может быть смежна с опасной вершиной v , противоречие.

Рассмотрим случаи (а) и (б), пусть $L = v_s v_t$ или $L = v_s u v_t$. Тогда покрашенные вершины образуют путь P' — подграф C_2 , содержащий L и лежащие в $\text{Int}(N_2)$ вершины пути P , которых $n_2 \leq 2$. Таким образом, $v(P') \leq 5$. Ввиду $g(G) \geq 5$ никакие две вершины пути P' не смежны, кроме, возможно, концов пути P' .

Пусть концы пути P' смежны. Это возможно только при $v(P') = 5$, а следовательно, $L = v_s u v_t$. Более того, в этом случае $n_2 = 2$, а значит $n_1 \geq 2$ и $q \geq 5$.

Так как вершины пути P были покрашены без нарушения правильности, один из концов трансверсали L (пусть это v_t) не принадлежит пути P . Учитывая замечание 6.7, получаем $P' = v_t u v_s v_{s+1} v_{s+2}$ и $v_t = v_{s+3}$ (см. рисунок 6.9с). Значит, $q \geq 5$, $v_{s+2} = v_q$ — конец P , $s = q - 2$ и $t = q + 1$ — получаем исключительный случай, описанный в условии (б). Рассматривая вариант $v_s \notin V(P)$, мы аналогично получим второй исключительный случай из условия (б). Итак, концы пути P несмежны, а значит, и покрашенные вершины одинакового цвета несмежны.

Пусть $v \in \text{Int}(N_2)$ — опасная вершина, смежная с двумя покрашенными вершинами. Из $g(G) \geq 5$ следует, что тогда $v(P') \geq 4$ и следовательно $\text{Int}(N_2) \cap V(P) \neq \emptyset$. Отметим, что $\text{Int}(N_2) \not\subset V(P)$ (иначе два конца пути P' смежны, а этот случай рассмотрен выше). Тогда хотя бы один из концов P' является концом P и не может быть смежен с v . В силу $g(G) \geq 5$ остается единственная возможность: $v(P') = 5$, второй конец пути P' не является концом P и этот конец смежен с v . Таким образом, один из концов трансверсали L (пусть это v_t) не принадлежит пути P , $P' = v_t u v_s v_{s+1} v_{s+2}$, (где вершина $v_{s+2} = v_q$ не может быть смежна с v). Из $g(G) \geq 5$ следует, что тогда вершина v смежна с v_t и v_{s+1} (см. рисунок 6.9d). Однако, вспомним, что $v \in \text{Int}(N_2)$ и по замечанию 6.7 не существует хорды vv_{s+1} . Противоречие.

Таким образом, никакая опасная вершина графа H_2 не смежна с двумя покрашенными. При $v(P') = 5$ один из концов пути P' (тот, что совпадает с концом P) несмежен с опасными вершинами, как требует условие (P2). Следовательно, к графу H_2 можно применить индукционное предположение.

Во всех случаях применим индукционное предположение к H_2 и покрасим его вершины, тем самым завершив покраску вершин исходного графа G по заданным спискам.

Замечание 6.8. В рассматриваемых далее случаях граф G и цикл C удовлетворяет следующим свойствам.

1) У цикла C нет хорд. Учитывая пункт 2 можно сделать вывод, что опасные вершины несмежны с концами пути P . Следовательно, выполняется условие (P1).

2) Если у цикла C есть трансверсаль T длины 2, то $q \geq 5$ и либо $T = v_{q-2} u v_{q+1}$, либо $T = v_3 u v_k$. В частности, один конец трансверсали T является одной из покрашенных вершин v_3 и v_{q-2} , а другой конец — непокрашенной вершиной.

3) У цикла C не может быть трансверсали длины 3, один из концов которой является опасной вершиной или концом пути P , а другой — непокрашенной вершиной.

5. Пусть граф G не удовлетворяет условиям разобранных ранее случаев.

В этом случае мы выберем множество W из нескольких вершин цикла C .

(1). Если v_{q+2} — неопасная, то $W = \{v_q\}$.

(2). Если v_{q+2} — опасная, а v_{q+4} — неопасная и $v_{q+4} \neq v_1$, то $W = \{v_{q+1}, v_{q+2}\}$.

(3). Если v_{q+2} — опасная, а v_{q+4} — опасная или $v_{q+4} = v_1$, то $W = \{v_{q+1}, v_{q+2}, v_{q+3}\}$.

Отметим, что вершина v_{q+1} — неопасная ввиду условия (P1). В случае, когда v_{q+2} — опасная, мы знаем, что вершина v_{q+3} — неопасная и $v_{q+3} \neq v_1$. Поэтому описанные выше три варианта покрывают все возможности.

Пусть $G' = G - W$. Мы покрасим вершины множества W в цвета из их списков так, чтобы раскраска была правильной. Для каждой вершины $u \in V(G')$ мы определим список цветов $L'(u)$, который получен из $L(u)$ удалением цветов всех соседей вершины u из множества W . Введём обозначение $\ell'(u) = |L'(u)|$. Из $g(G) \geq 5$ следует, что вершина u не может быть смежна с двумя вершинами множества W , поэтому $\ell'(u) \geq \ell(u) - 1$.

Покраска вершин множества W .

Разберём случаи. В случае (1) ничего красить не нужно.

В случае (3) мы имеем $\ell(v_{q+3}) = \ell(v_{q+1}) = 3$. Пусть $v_{q+4} \neq v_1$. Тогда, так как у цикла C нет хорд, то v_{q+3} не смежна ни с одной из вершин пути P и мы можем покрасить её в цвет $\rho(v_{q+3}) \notin L(v_{q+4})$. Если $v_{q+4} = v_1$, то v_{q+3} не смежна ни с одной из вершин пути P , кроме v_1 и мы можем покрасить её в цвет $\rho(v_{q+3}) \neq \rho(v_1)$. После этого несложно докрасить v_{q+2} без нарушения правильности раскраски, а затем, так как $\ell(v_{q+1}) = 3$, докрасим и эту вершину. В результате новых опасных вершин на цикле C не появилось.

В случае (2) сначала красим v_{q+2} , а затем v_{q+1} (это возможно, так как $\ell(v_{q+1}) = 3$). Единственной новой опасной вершиной на цикле C в результате могла стать v_{q+3} , однако ввиду условий и отсутствия хорд у цикла C вершина v_{q+3} несмежна со старыми опасными вершинами, которые ещё не покрашены.

Пусть $v \in V(C)$ — опасная вершина графа G и $\ell'(v) = 1$.

Тогда v должна быть смежна с вершиной множества W . Так как у цикла C нет хорд, то мы имеем дело со случаем (3) и $v = v_{q+4} \neq v_1$. Но при покраске множества W мы позаботились о том, чтобы выполнялось $\ell'(v_{q+4}) = 2$. Противоречие показывает, что для каждой опасной вершины v мы имеем $\ell'(v) = 2$.

В графе G' покрашенные вершины образуют путь P' ($P' = P$ в случаях (2) и (3), $P' = v_1v_2 \dots v_{q-1}$ в случае (1)) — подграф границы внешней грани.

Рассмотрим новую опасную вершину v графа G' . Эта вершина смежна с одной из удаленных вершин множества W , лежащих на границе внешней грани графа G . Следовательно, v лежит на границе внешней грани графа G' .

По замечанию 6.8 каждая новая опасная вершина смежна не более, чем с одной покрашенной вершиной, причём отличной от концов пути P' , поэтому ни одно из рёбер внешней грани не соединяет концы пути P' с опасными вершинами, то есть, выполнено условие $(P1)$. Единственное, что может помешать применить к графу G' индукционное предположение — это случай, когда две опасные вершины смежны (этот случай мы разберём позже). Если же такой проблемы не возникло, то мы применим к графу G' индукционное предположение и в результате получим искомую раскраску вершин всего графа G по заданным спискам.

Лемма 6.5. Пусть две опасные вершины u и w графа G' смежны. Тогда $u, w \notin V(C)$.

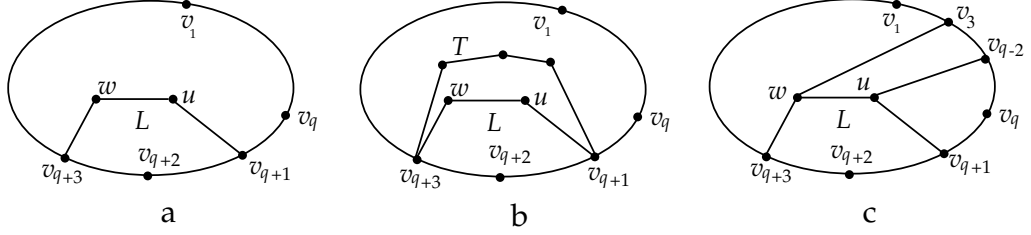
Доказательство. По построению, новые опасные вершины на цикле C появлялись только в случае (2), причём не были смежны со старыми опасными вершинами. Поэтому можно считать, что $w \notin V(C)$ и w смежна с вершиной $v_t \in W$. Пусть $u = v_i$ лежит на цикле C . Тогда у цикла C есть трансверсаль $v_tv_iv_i$, где обе вершины $v_t, v_i \notin V(P)$ — противоречие с замечанием 6.8. \square

Итак, рассмотрим случай, когда в графе G' есть две смежные опасные вершины $u, w \notin V(C)$. По лемме 6.5 каждая из вершин u и w должна быть смежна с вершиной множества W .

Пусть в графе G вершина u смежна с v_s , а w смежна с v_t , где $v_s, v_t \in W$, $s < t$. Тогда у цикла C есть трансверсаль $L = v_s u w v_t$. Поскольку $g(G') = 5$, то $t \geq s + 2$. Это возможно лишь в случае (3) при $s = q + 1$, $t = q + 3$ (см. рисунок 6.10а). Трансверсаль L отрезает от цикла C цикл C' длины 5. Поскольку граф не удовлетворяет условию случая 2, то внутри цикла C' нет вершин.

Лемма 6.6. 1) У цикла C не существует отличной от L трансверсали T с $v(T) \leq 5$, соединяющей v_{q+1} и v_{q+3} .

2) В графе G' существует единственная пара смежных опасных вершин — это вершины u и w .

Рис. 6.10: Смежные опасные вершины u и w .

Доказательство. 1) Пусть трансверсаль T отделяет от C цикл Z (содержащий v_{q+2}). Поскольку $v(T) \leq 5$, то $v(Z) \leq 6$. Поскольку $g(G) \geq 5$, то хотя бы одна из вершин u и w не лежит на T . Так как граф G' — плоский, а внутри цикла C' нет вершин, то эта вершина лежит внутри цикла Z (см. рисунок 6.10b). Тогда граф G удовлетворяет условию пункта 3, противоречие.

2) Если в графе G' есть еще одна пара смежных опасных вершин, то существует отличная от L трансверсаль длины 4, соединяющая v_{q+1} и v_{q+3} , что противоречит утверждению 1. \square

Мы хотим покрасить вершины u и w , не нарушая правильности раскраски.

Пусть w смежна с покрашенной вершиной (то есть, вершиной пути P). Тогда у цикла C существует трансверсаль $N_w = v_{q+3}wv_i$, где $v_i \in V(P)$. По замечанию 6.8 тогда $q \geq 5$ и либо $N_w = v_k w v_3$, либо $N_w = v_{q+1} w v_{q-2}$. Второй вариант очевидно невозможен, а значит, вершина w в этом случае смежна с v_3 (см. рисунок 6.10c).

Пусть u смежна с покрашенной вершиной. Тогда у цикла C существует трансверсаль $N_u = v_{q+1} u v_i$, где $v_i \in V(P)$. По замечанию 6.8 тогда $q \geq 5$ и $N_u = v_{q+1} u v_{q-2}$ (см. рисунок 6.10c). При этом, $q - 2 \in \{3, 4\}$, а значит, если каждая из вершин u и w смежна с покрашенной, то в графе G есть цикл длины не более 4 (это $w u v_3$ при $q = 5$ и $w u v_4 v_3$ при $q = 6$, см. рисунок 6.10c). Противоречие с $g(G) \geq 5$.

Значит, хотя бы одна из вершин u и w не смежна с покрашенными вершинами. Не умаляя общности положим, что это w . Так как $\ell'(u) = \ell'(w) = 2$, можно сначала покрасить u , затем w .

Рассмотрим граф $H = G' - u - w$.

Удалим цвета вершин u и w из списков их соседей, в результате для каждой вершины $z \in V(H)$ получится список цветов $L^*(z)$, пусть $\ell^*(z) = |L^*(z)|$. Никакая вершина $z \in V(H)$ не смежна одновременно с u и w , так как $g(G') \geq 5$. Следовательно, $\ell^*(u) \geq \ell(u) - 1$. По лемме 6.6, никакая

отличная от u , w опасная вершина графа G' не смежна ни с u , ни с w , поэтому $\ell^*(z) \geq 2$ для каждой непокрашенной вершины $z \in V(H)$.

Лемма 6.7. Пусть вершина $v_i \in V(C)$ такова, что $\ell^*(v_i) = 2$. Тогда $\ell(v_i) = 2$.

Доказательство. Понятно, что $v_i \notin V(P)$. В рассматриваемом случае (3) при удалении вершин множества W не появлялось новых опасных вершин на цикле C , поэтому $\ell'(v_i) = \ell(v_i)$. Предположим, что $\ell'(v_i) = 3$. Тогда v_i смежна с u или w , следовательно, в графе G у цикла C есть трансверсаль $v_i u v_{q+1}$ или $v_i w v_{q+3}$, оба конца которой не покрашены. Это невозможно по замечанию 6.8. \square

Так как внутренность цикла C' пуста, в графе G с вершиной v_{q+2} смежны только v_{q+1} и v_{q+3} . Опасные вершины графа H , не лежащие на C , очевидно, смежны с v_{q+1} , v_{q+3} , u или w , поэтому лежат на границе внешней грани графа H .

Лемма 6.8. Опасная вершина графа H не может быть смежна ни с v_1 , ни с v_q , то есть, выполняется условие (P1).

Доказательство. Пусть v — опасная вершина графа H , смежная с v_1 или v_q . Предположим, что $v \in V(C)$. Ввиду леммы 6.7 тогда v — опасная вершина графа G , что противоречит условию (P1).

Значит, вершина v смежна в графе G с одной из вершин v_{q+1} , v_{q+3} , u , w . Если v смежна с v_{q+1} или v_{q+3} , то у цикла C существует трансверсаль длины 2 с концом v_1 или v_q , что противоречит замечанию 6.8.

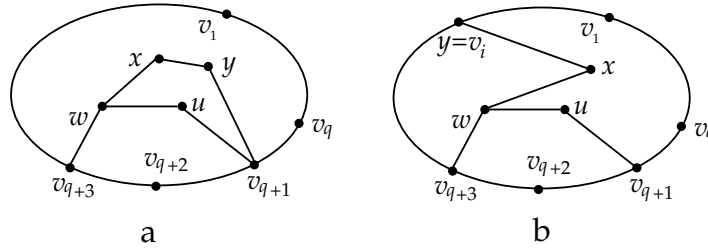
Если v смежна с w , то у цикла C существует трансверсаль $v_q v w v_{q+3}$ или $v_1 v w v_{q+3}$. Один конец такой трансверсали совпадает с концом пути P , а другой — непокрашенная вершина, что противоречит замечанию 6.8. Аналогично разбирается случай, когда v смежна с u . \square

Лемма 6.9. Никакие две опасные вершины графа H не смежны.

Доказательство. Предположим, что две опасные вершины x и y графа H смежны. Тогда ввиду леммы 6.6 хотя бы для одна из них (пусть это x) не является опасной в графе G' , то есть, x смежна с u или w и $\ell^*(x) = \ell(x) - 1 = 2$. Пусть вершина x смежна с w .

Если y смежна с u , w или v_{q+3} , то $g(G) < 5$, противоречие. Если y смежна с v_{q+1} , то существует трансверсаль $v_{q+1} y x w v_{q+3} \neq L$ (см. рисунок 6.11a), противоречие с леммой 6.6.

Остается случай, когда $y = v_i$ лежит на цикле C . Тогда $\ell^*(v_i) = \ell(v_i) = 2$ по лемме 6.7 и у цикла C существует трансверсаль $v_{q+3} w x v_i$, один из концов которой — опасная вершина v_i графа G , а другой —

Рис. 6.11: Смежные опасные вершины x и y .

непокрашенная в исходной раскраске вершина v_{q+3} (см. рисунок 6.11b). Противоречие с замечанием 6.8. Все варианты для вершины y разобраны.

Случай, когда x смежна в графе G с вершиной u аналогичен. \square

Таким образом, к графу H можно применить индукционное предположение и раскрасить его вершины в соответствии с их списками. Тем самым, мы покрасим все вершины графа G и закончим разбор последнего случая. \square

Утверждение теоремы является частным случаем утверждения леммы 6.4. \square

Теорема 6.8. (Н. Grötzsch, 1958) Пусть G — плоский граф, причём $g(G) \geq 4$. Тогда $\chi(G) \leq 3$.

Доказательство. Мы изменим утверждение так, чтобы его было удобнее доказывать по индукции.

Пусть G — плоский граф, $g(G) \geq 4$, C — граница внешней грани. Тогда $\chi(G) \leq 3$. Более того, если C — цикл из 4 или 5 вершин, то любая правильная раскраска цикла C в 3 цвета может быть продолжена до правильной раскраски всего графа в 3 цвета.

Доказательство. Будем считать, что для любого меньшего чем G графа, удовлетворяющего условию, утверждение уже доказано. Если в графе G нет циклов длины 4, то утверждение следует из леммы 6.4. Предположим, что единственным циклом длины 4 является внешний цикл C . Если его вершины не были покрашены, то мы легко можем покрасить их правильным образом в 3 цвета. Добавим на одном из рёбер цикла C новую вершину степени 2, покрасим её не нарушая правильности раскраски и опять же воспользуемся утверждением леммы 6.4.

Предположим, что в графе G существует цикл Z длины 4, отличный от C . Пусть U — множество вершин графа G внутри цикла Z , а W —

множество вершин вне цикла Z (см. рисунок 6.12а). Очевидно, $W \neq \emptyset$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $U \neq \emptyset$.

Разрежем граф G по циклу Z : пусть $G_1 = G(W \cup V(Z))$, $G_2 = G(U \cup V(Z))$. Отметим, что внешним циклом G_1 является C . Очевидно, можно применить к графу G_1 индукционное предположение и покрасить все его вершины в 3 цвета правильным образом. В графе G_2 в результате будут покрашены только вершины внешнего цикла Z и по индукционному предположению мы можем докрасить вершины графа G_2 , получив правильную раскраску графа G в три цвета.

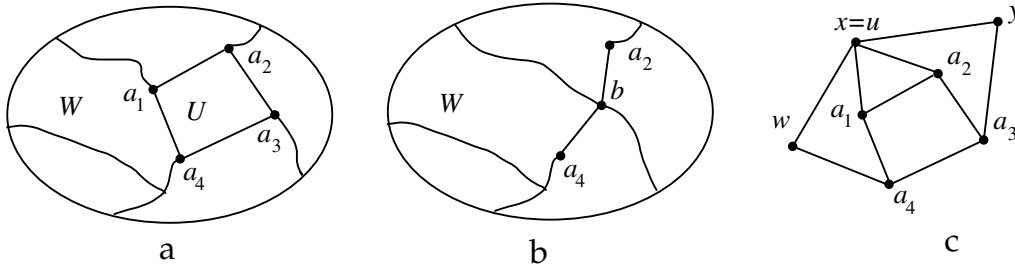


Рис. 6.12: Цикл $a_1a_2a_3a_4$.

2. Пусть $U = \emptyset$.

Тогда $Z = a_1a_2a_3a_4$ — грань графа G . Очевидно, $a_1a_3, a_2a_4 \notin E(G)$. Стынем вершины a_1 и a_3 : пусть $G_1 = (G + a_1a_3) \cdot a_1a_3$ (см. рисунок 6.12b). Если $g(G_1) \geq 4$, то по индукционному предположению существует правильная раскраска ρ вершин графа G_1 в 3 цвета. Пусть b — вершина G_1 , образованная при стягивании a_1 и a_3 . Тогда положим $\rho'(a_1) = \rho'(a_3) = \rho(b)$ и $\rho'(v) = \rho(v)$ для $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_3\}$. Так как $a_1a_3 \notin E(G)$, полученная раскраска ρ' — правильная раскраска вершин графа G в четыре цвета.

Остаётся случай, когда $g(G_1) = 3$. Аналогично рассмотрим граф $G_2 = (G + a_2a_4) \cdot a_2a_4$ и получим, что $g(G_2) = 3$. Что же отсюда следует? Тогда в графе G существуют трансверсали $S_1 = a_1xu a_3$ и $S_2 = a_2y a_4$ цикла Z , которые проходят во внешней области цикла Z (внутри грани не может проходить трансверсаль). Значит, S_1 и S_2 пересекаются. Так как граф G — плоский, пути S_1 и S_2 имеют общую вершину. Не умаляя общности, пусть $x = u$ (см. рисунок 6.12c). В этом случае в графе G есть треугольник a_1xa_2 . Противоречие с $g(G) \geq 4$ показывает, что в рассматриваемом случае $\chi(G) = 3$. \square

Остаётся лишь заметить, что утверждение теоремы является частным случаем доказанного. \square

6.6 Пути и циклы в планарном графе

В 1880 году Тэйт (P. G. Tait) в одной из попыток доказательства гипотезы четырёх красок предположил, что любой 3-регулярный трёхсвязный планарный граф имеет гамильтонов цикл. Гипотеза Тэйта оказалась совсем неочевидной. Лишь в 1946 году её опроверг Татт (W. T. Tutte), построив контрпример. Доказательство отсутствия гамильтонова цикла в примере Татта делается только перебором. Этот контрпример долгое время оставался единственным известным, лишь в 1968 году Е.Я.Гринберг придумал критерий негамильтоновости планарных графов.

Во всем разделе под графом мы будем понимать связный *плоский граф*, то есть, конкретное изображение планарного графа на плоскости (или сфере) без пересечения рёбер во внутренних точках.

6.6.1 Негамильтоновы планарные графы

Теорема 6.9. (Е. Я. Гринберг, 1968.) Пусть G — плоский граф без петель с гамильтоновым циклом C , который делит плоскости на две области R и R' . Пусть k_i и k'_i — количества граней размера i в R и R' соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{v(G)} (i-2)(k_i - k'_i) = 0. \quad (6.1)$$

Доказательство. Отметим, что в гамильтоновом графе G , очевидно, нет мостов и граница любой грани — простой цикл. Поэтому размер границы каждой его грани не более $v(G)$. Пусть ε и ε' — количества рёбер графа G , лежащих внутри областей R и R' соответственно. Так как C — гамильтонов цикл графа G , то область R разбита на $\varepsilon + 1$ граней, а область R' — на $\varepsilon' + 1$ граней. Получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^{v(G)} k_i = \varepsilon + 1, \quad \sum_{i=1}^{v(G)} k'_i = \varepsilon' + 1. \quad (6.2)$$

Каждое внутреннее ребро области R входит в границы двух внутренних граней области R , а каждое ребро цикла C — в границу одной внутренней грани этой области. Аналогичное соотношение верно и для R' . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{v(G)} i \cdot k_i = 2\varepsilon + e(C), \quad \sum_{i=1}^{v(G)} i \cdot k'_i = 2\varepsilon' + e(C). \quad (6.3)$$

Из формул (6.2) и (6.3) получаем

$$\sum_{i=1}^{v(G)} i \cdot (k_i - k'_i) = 2(\varepsilon - \varepsilon') = \sum_{i=1}^{v(G)} 2(k_i - k'_i),$$

откуда немедленно следует доказываемое утверждение. \square

На основании формулы (6.1) легко можно построить негамильтонов планарный граф. Так, Гринберг построил трёхсвязный кубический плоский граф, в котором ровно одна грань имеет 9 рёбер, а все остальные — по 5 или 8 рёбер (см. рисунок 6.13). Левая часть соотношения (6.1) в таком графе, очевидно, не делится на 3, так как сравнима по модулю 3 с $(9 - 2)(k_9 - k'_9) = \pm 7$.

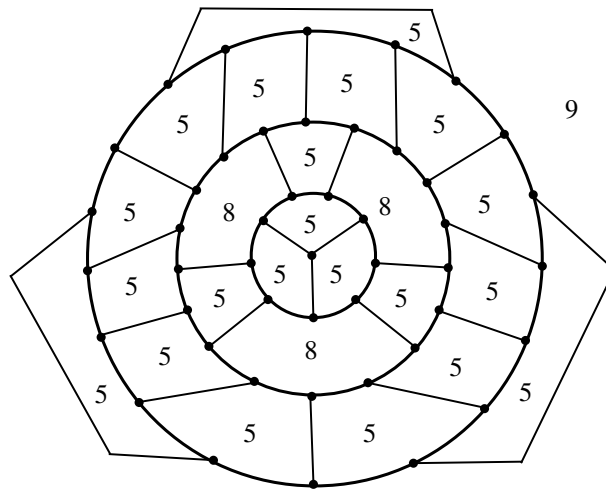


Рис. 6.13: Граф Гринберга.

6.6.2 Теорема Томассена о пути в планарном графе

В 1956 году Татт доказал, что любой четырёхсвязный планарный граф — гамильтонов. На самом деле, Татт доказал более сильную теорему 6.12. В 1975 году Пламмер (M. Plummer) предположил, что любой 4-связный планарный граф является Гамильтоново-связным, а именно, для любых двух вершин $u, v \in V(G)$ существует гамильтонов путь с концами u и v . Все эти и некоторые другие результаты мы получим в качестве следствий из теоремы Томассена.

Определение 6.8. 1) Пусть H подграф плоского графа G . Назовём H -компонентой любую компоненту связности графа $G - H$.

2) Назовём вершину $x \in V(H)$ *контактом* H -компоненты U , если она смежна хотя бы с одной из вершин U . Через $W(U)$ обозначим множество всех контактов U , пусть $w(U) = |W(U)|$.

Теорема 6.10. (С.Thomassen, 1983.) Пусть G — двусвязный плоский граф, цикл C — граница его внешней грани, $v \in V(C)$, $e \in E(C)$, $u \neq v$ — вершина графа G . Тогда существует путь P с концами v и u , проходящий по ребру e и удовлетворяющий следующим условиям:

1° $w(U) \leq 3$ для любой P -компоненты U ;

2° $w(U) = 2$ для любой P -компоненты U , содержащей хотя бы одну вершину цикла C .

Замечание 6.9. Из теоремы 6.10 следует, что мы можем найти vu -путь, удовлетворяющий условиям 1° и 2°, а также vu -путь, проходящий через произвольную вершину $w \in V(C)$ и удовлетворяющий этим же условиям.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $v(G)$. База для $v(G) = 3$ очевидна.

В случае, когда $e = vu$, путь $P = vu$ нам очевидно подходит. Поэтому далее можно считать, что u не является концом e (если u инцидентно e , а v — нет, то $u \in V(C)$ и мы можем поменять местами вершины v и u).

Будем называть *разбиением* такие вершины x и y цикла C , что $\{x, y\}$ разделяет G на два подграфа G_1 и G_2 (не обязательно связных), удовлетворяющих следующим условиям

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}, \quad v \in V(G_1), \quad e \in E(G_2),$$

$$V(G_1) \setminus \{x, y, v\} \neq \emptyset, \quad V(G_2) \setminus \{x, y\} \neq \emptyset.$$

Допускается случай $v \in \{x, y\}$.

Разберём несколько случаев.

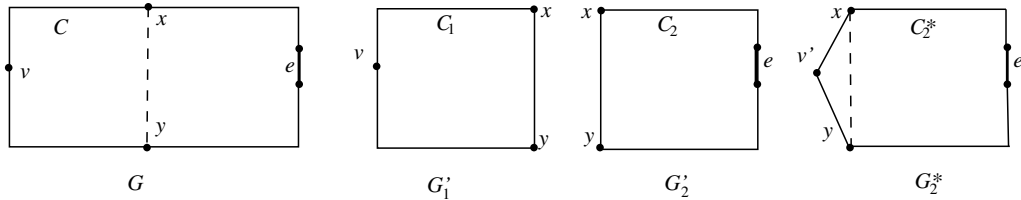


Рис. 6.14: Графы G , G'_1 , G'_2 и G_2^* .

1. Пусть существует разбиение.

Среди всех разбиений выберем пару вершин x, y так, что $v(G_2)$ минимально. Пусть $G'_1 = G_1 + xy$, если $xy \notin E(G)$ и $G'_1 = G_1$, если $xy \in E(G)$. Аналогично определяется граф G'_2 . Пусть G_2^* — граф, полученный из $G'_2 - xy$ добавлением новой вершины v' , смежной с x и y (см. рисунок 6.14). Очевидно, графы G'_1 , G'_2 и G_2^* двусвязны. Граница внешней грани графа G'_1 (цикл C_1) — это часть цикла C и ребро xy . Граница внешней грани графа G'_2 (цикл C_2) — это часть цикла C и ребро xy , граница внешней грани графа G_2^* — цикл C_2^* , получающийся из $C_2 - xy$ добавлением вершины v' и рёбер xv' и $v'y$. Тогда $v \in V(C_1)$, $e \in E(C_2)$ и $e \in E(C_2^*)$. Отметим, что $v(G'_2) < v(G)$ и $v(G'_1) < v(G)$, поэтому к графам G'_1 и G'_2 можно применять индукционное предположение. Рассмотрим несколько случаев.

1.1. $u \in V(G_1)$.

По индукционному предположению мы найдём vu -путь P_1 в графе G'_1 , проходящий по ребру xy и xu -путь P_2 в графе G'_2 , проходящий по ребру e , удовлетворяющие условиям 1° и 2° (см. рисунок 6.15а). Пусть P — vu -путь, полученный из P_1 заменой ребра xy на путь P_2 . Тогда P содержит ребро e . Так как $V(P) \supset \{x, y\} = V(G_1) \cap V(G_2)$, любая P -компонента есть либо P_1 -компонента графа G'_1 , либо P_2 -компонента графа G'_2 , следовательно, P удовлетворяет условиям 1° и 2°.

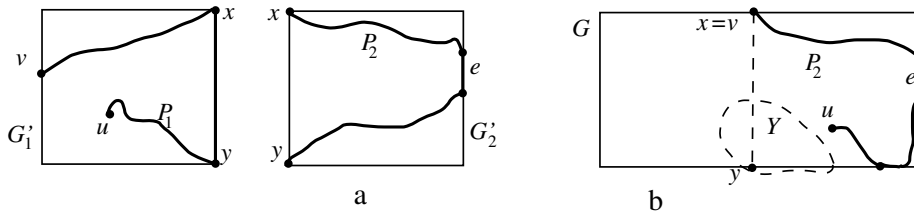


Рис. 6.15: Построение пути: случаи 1.1 и 1.2.1.

1.2. $u \in V(G_2)$, $v \in \{x, y\}$.

Пусть $v = x$. По индукционному предположению мы найдём xu -путь P_2 в графе G'_2 , проходящий по ребру e и удовлетворяющий условиям 1° и 2°. Рассмотрим два случая.

1.2.1. $xy \notin E(P_2)$.

Мы докажем, что путь P_2 подходит и для графа G . Если $x, y \in V(P_2)$, то граф G'_1 распадается на несколько P_2 -компонент с контактами x и y , а остальные P_2 -компоненты графа G — это P_2 -компоненты графа G_2 . Таким образом, условия 1° и 2° для графа G выполнены.

Пусть $y \notin V(P_2)$. Тогда $x = v \in V(P_2)$. Рассмотрим P_2 -компоненту $Y \ni y$ графа G'_2 . По условию 2° , $w(Y) = 2$ (одним из контактов компоненты U является вершина $x = v$, см. рисунок 6.15b). Понятно, что $Y' = V(G_1) \cup Y$ будет P_2 -компонентой графа G , $W(Y') = W(Y)$. Таким образом, условия 1° и 2° для графа G в этом случае выполнены.

1.2.2. $xy \in E(P_2)$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $xy \in E(G_2)$. В этом случае мы по индукционному предположению найдём xy -путь P_1 в графе G'_1 , удовлетворяющий условиям 1° и 2° и проходящий по произвольному ребру $f \neq xy$. Тогда $xy \notin P_1$ и аналогично пункту 1.1, путь P , полученный из P_2 заменой ребра xy на путь P_1 , удовлетворяет условиям 1° и 2° для графа G .

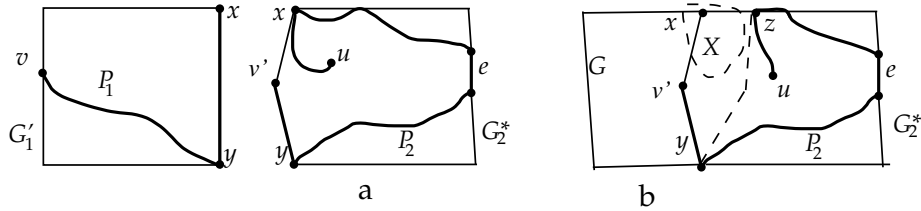


Рис. 6.16: Построение пути: случай 1.3.

1.3. $u \in V(G_2)$, $v \notin \{x, y\}$.

В этом случае две различные вершины входят в $V(G) \setminus V(G_2^*)$, поэтому $v(G_2^*) < v(G)$ и к графу G_2^* можно применить индукционное предположение: найдём в этом графе $v'u$ -путь P_2 , проходящий по ребру e и удовлетворяющий условиям 1° и 2° . Не умаляя общности предположим, что P_2 проходит по ребру $v'y$. Найдём также vx -путь P_1 в графе G'_1 , проходящий по ребру xy и удовлетворяющий условиям 1° и 2° .

Предположим, что $x \in V(P_2)$ (см. рисунок 6.16a). Тогда аналогично пункту 1.1 получается, что путь $P = (P_1 - x) + (P_2 - v')$ — это vu -путь в графе G , содержащий ребро e и удовлетворяющий условиям 1° и 2° .

Пусть $x \notin V(P_2)$. Тогда рассмотрим P_2 -компоненту $X \ni x$ графа G_2^* . По условию 2° , $w(X) = 2$. Понятно, что $W(X) \ni v'$, пусть $W(X) = \{v', z\}$ (см. рисунок 6.16b). Так как входящее в P_2 ребро e лежит на внешнем цикле C_2 графа G_2 , то второй контакт z должен также лежать на цикле C_2^* . Тогда z — точка сочленения графа G_2 , отделяющая X от u , следовательно, множество $\{y, z\}$ отделяет X от u в графе G .

Пусть $H_2 = G_2 - X$. Отметим, что $V(H_2)$ содержит хотя бы три вершины: это u и концы ребра e . Поэтому $\{y, z\}$ является разбиением, причём роль графа G_2 в этом случае достанется меньшему графу H_2 что противоречит минимальности $v(G_2)$.

2. Пусть разбиений нет.

2.1. О структуре графа.

Далее пусть P_1 — дуга цикла C от v до одного из концов ребра e , не содержащая e и u . (Если v инцидентна e , то P_1 состоит из единственной вершины v .) Пусть $H = G - V(P_1)$, $P_2 = C - V(P_1)$. Пусть v_1 — общий конец ребра e и пути P_2 , а v_2 — второй конец пути P_2 (возможно, $v_2 = v_1$). Рассмотрим отличную от C грань D графа G , содержащую ребро e . В этой грани пусть e_1 — второе ребро, инцидентное v_1 .

Пусть B — блок графа H , содержащий ребро e_1 , цикл C' — граница внешней грани B , а $e'_1 = v_1 v'_1$ — второе ребро C' , инцидентное v_1 . (Возможно, $E(B) = e_1$, тогда C' — это не цикл, а ребро e_1 и, соответственно, $e'_1 = e_1$.) Мы хотим доказать, что B содержит все вершины пути P_2 . Разберём несколько случаев.

2.1.1. Пусть e'_1 не лежит на цикле C .

В этом случае блок B и путь P_2 имеют ровно одну общую вершину — v_1 . Следовательно, $v'_1 \notin V(C)$. Рассмотрим C -компоненту $K \ni v'_1$ графа G . Очевидно, $K \supset V(B) \setminus v_1$. Из двусвязности G следует, что K имеет отличный от v_1 контакт $z \in V(C)$.

Поскольку v_1 отделяет $V(P_2)$ от B , то $z \notin V(P_2)$. Следовательно, все контакты компоненты K лежат на пути P_1 . Тогда выберем в качестве z из этих контактов ближний к вершине v по пути P_1 (см. рисунок 6.17а, возможно, $z = v$). Если $v_2 \neq v_1$, то $\{z, v_1\}$ отделяет B от v_2 в графе G , а следовательно, $\{z, v_1\}$ — разбиение (граф G_1 в этом случае содержит вершину $v_2 \notin \{v, v_1, z\}$, а граф G_2 — вершину $v'_1 \notin \{v_1, z\}$). Противоречие.

Следовательно, $v_1 = v_2$, то есть, блок B содержит единственную вершину пути P_2 .

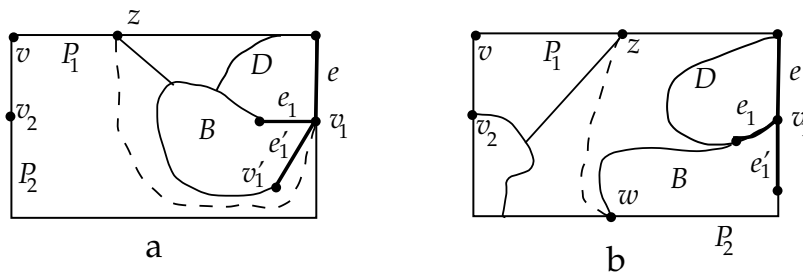


Рис. 6.17: Блок B .

2.1.2. Пусть e'_1 лежит на цикле C .

Предположим, что $V(B) \not\subset V(P_2)$. В этом случае $v_2 \neq v_1$ и существует входящая в блок B точка сочленения $w \in V(P_2)$, которая отделяет от B

от v_2 в графе H . Поскольку e'_1 лежит на цикле C , то $w \neq v_1$ и блок B содержит участок пути P_2 от v_1 до w (см. рисунок 6.17b). Так как граф G двусвязен, существуют вершины из $V(P_1)$, до которых можно дойти от v_2 , не проходя через w и вершины пути P_1 (например, v — такая вершина). Пусть z — самая дальняя из этих вершин по пути P_1 от v (возможно, $z = v$). Нетрудно понять, что тогда z и w — разбиение (в этом случае граф G_1 содержит вершину $v_2 \notin \{v, z, w\}$, а граф G_2 содержит вершину $v_1 \notin \{z, w\}$). Противоречие. Таким образом, $V(B) \supset V(P_2)$.

2.2. Продолжим изучение структуры графа G .

Рассмотрим P_1 -компоненту $U \ni u$ и C -компоненту $U' \ni u$. Если $U \not\subset V(B)$, то U' не имеет контакта на P_2 . В этом случае поменяем пути местами: заменим P_1 на дугу P'_1 цикла C от v до v_1 , не содержащую e — это ребро vv_2 плюс путь P_2 . В таком случае роль пути P_2 достанется $P'_2 = P_1 - v$, а этот путь содержится в той же P'_1 -компоненте, что и вершина u .

Итак, остается рассмотреть ситуацию, когда P_1 -компонента U содержит u вершину u , и блок B , который в свою очередь содержит путь P_2 .

2.3. Построение пути.

Если $u \in V(B)$, положим $u' = u$, если же u содержится в другом блоке графа $G(U)$, пусть $u' \in V(B)$ — точка сочленения, отделяющая u от B .

По индукционному предположению, в двусвязном графе B существует v_1u' -путь T' , содержащий v_2 . Положим $T = P_1 + e + T' - vu'$ -путь, содержащий ребро e и вершину v_2 . На основе пути T мы будем конструировать искомым путь S . Изначально положим $S = T$.

Пусть $D = G(V(B) \cup V(C))$. По доказанному выше, внешний цикл блока B содержит путь P_2 . Пусть v_1v_2 -путь Q — оставшаяся часть этого цикла. Понятно, что контакты D -компонент в блоке B могут лежать только на пути Q . Следовательно, любая T' -компонента графа B , не пересекающаяся с Q , не смежна с D -компонентами и путём P_1 , поэтому она останется S -компонентой графа G с тем же множеством контактов. Таким образом, нам нужно будет рассмотреть все T' -компоненты графа B , пересекающиеся с $V(Q)$, и все D -компоненты графа G и изменить путь S внутри этих компонент так, чтобы контакты каждой S -компоненты удовлетворяли условиям 1° и 2°.

Рассмотрим D -компоненту J и её контакты. Так как B — блок (то есть, максимальный по включению двусвязный подграф) графа $H = G - P_1$, то J имеет не более одного контакта в $V(B)$. Если такой контакт есть, обозначим его через b_J . Из двусвязности графа G следует, что J имеет хотя бы один контакт на пути P_1 . Пусть x_J и y_J — два крайних

контакта из $W(J)$ на P_1 (самый близкий к v и самый далёкий от v по пути P_1 соответственно, возможно, $x_J = y_J$). Пусть L_J — участок от x_J до y_J пути P_1 (см. рисунок 6.18a).

Назовём D -компоненту J *особой*, если $u \in V(J)$ и *неособой* в противном случае. Понятно, что особая компонента не более, чем одна.

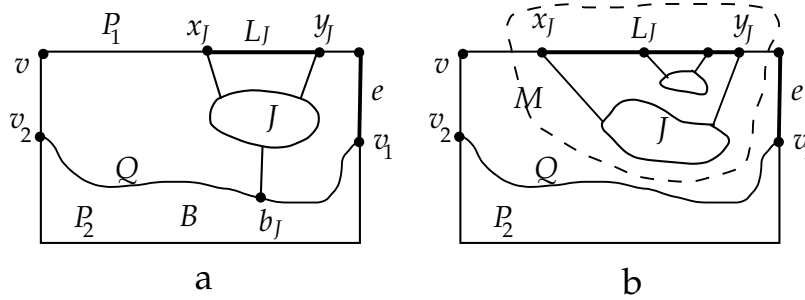


Рис. 6.18: D -компонента и ее контакты.

2.3.1. Пусть существует D -компонента J , для которой $W(J) \subset V(P_1)$.

Тогда J — отличная от U компонента связности графа $H = G - P_1$, следовательно, $u \notin J$. Из двусвязности графа G следует, что $x_J \neq y_J$. Пусть L'_J — это произвольный $x_J y_J$ -путь по вершинам компоненты J . Тогда $L_J \cup L'_J$ — это цикл, во внутренней области которого, возможно, располагаются некоторые D -компоненты, которые мы назовём J -внутренними. Из планарности графа G следует, что все контакты любой J -внутренней компоненты расположены на L_J . Пусть M — объединение вершин J и всех J -внутренних компонент, если они есть (см. рисунок 6.18b).

Понятно, что граф $F = G(M \cup L_J)$ — двусвязный. Пусть G' — граф, полученный из $G - M$ заменой пути L_J на новое ребро $x_J y_J$ (изображенное вдоль пути L_J). Этот граф также является двусвязным, его внешний цикл C' получается из C заменой L_J на ребро $x_J y_J$. Понятно, что $v \in V(C')$, $u \in V(G')$, $e \in E(C')$.

Применим индукционное предположение к графу G' и найдем удовлетворяющий 1° и 2° vu -путь P' , содержащий e . Если путь P' не проходит по новому ребру $x_J y_J$, то путь P' , подходит и для графа G (это доказывается аналогично случаю 1.2.1). Пусть P' проходит по $x_J y_J$. Тогда по индукционному предположению мы построим $x_J y_J$ -путь P_F в графе F , удовлетворяющий 1° и 2°. Аналогично случаю 1.1, vu -путь P , полученный из P' заменой ребра $x_J y_J$ на путь P_F , подойдёт для графа G .

Таким образом, мы можем считать, что контакт b_J существует для каждой D -компоненты J . Тогда из планарности графа G для любой

D -компоненты $J' \neq J$ следует, что $W(J')$ не содержит внутренних вершин пути L_J .

Сначала мы по очереди рассмотрим все неособые компоненты J , для которых контакт $b_J \in T'$. Рассматривая очередную D -компоненту J , мы будем менять только участок L_J пути S , поэтому измененный путь S будет по-прежнему содержать ребро e , участок T' и участок $L_{J'}$ для любой еще не рассмотренной D -компоненты J' . В изменениях будут участвовать только вершины рассматриваемых компонент и пути P_1 .

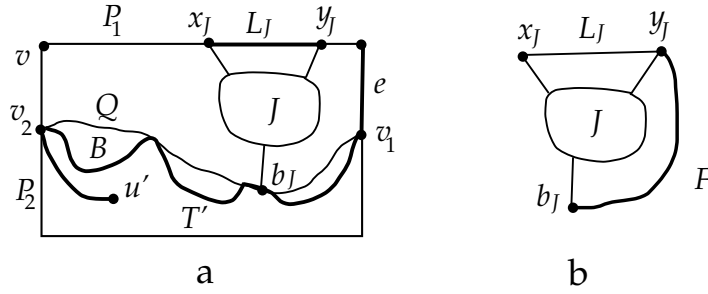


Рис. 6.19: Изменение пути: случай $b_J \in V(T')$.

2.3.2. Пусть J — неособая D -компонента, $b_J \in V(T')$.

Пусть $x_J \neq y_J$ (см. рисунок 6.19a). Понятно, что граф $F = G(J \cup V(L_J) \cup \{b_J\}) + y_J b_J$ (см. рисунок 6.19b) — двусвязный (он представляет собой цепочку из блоков, в которой первый (содержащий L_J) и последний (содержащий b_J) замкнули ребром $y_J b_J$). По индукционному предположению мы построим $x_J b_J$ -путь P_J в графе F , содержащий ребро $y_J b_J$ и удовлетворяющий 1° и 2°. Заменим участок L_J пути S на $x_J y_J$ -путь $P_J - b_J$ — очевидно, получится простой путь. Новый путь S содержит x_J , y_J и b_J , поэтому любая S -компонента X графа G , для которой $X \cap V(F) \neq \emptyset$, является P_J -компонентой графа F и удовлетворяет условиям 1° и 2°.

Если же $x_J = y_J$, то J — это S -компонента с двумя контактами, в этом случае не будем менять путь S , он итак удовлетворяет условиям 1° и 2°.

2.3.3. Пусть J — неособая D -компонента, $b_J \notin V(T')$.

Как мы знаем, $b_J \in V(Q)$. Таким образом, b_J принадлежит T' -компоненте Y графа B , пересекающей путь Q . При рассмотрении T' -компоненты Y мы обязательно позаботимся и о всех D -компонентах, имеющих контакт в Y .

2.3.4. Пусть Y — T' -компонента графа B , $Y \cap V(Q) \neq \emptyset$.

По свойству 2°, $w(Y) = 2$. Поскольку концы пути Q вершины $v_1, v_2 \in V(T')$, то у компоненты Y есть два контакта на Q — пусть это p (первый

по пути Q от v_1) и r . Значит, $W(Y) = \{p, r\}$. Пусть N — это дуга пути Q с концами p и r , именно на ней могут располагаться вершины, смежные с D -компонентами (то есть, их контакты) и вершины, смежные с путём P_1 — пусть все эти вершины образуют множество W_N .

Если $W_N = \emptyset$, то Y — это S -компонента с тем же множеством контактов $W(Y)$, в этом случае мы не будем менять путь S , так как Y удовлетворяет условиям 1° и 2° .

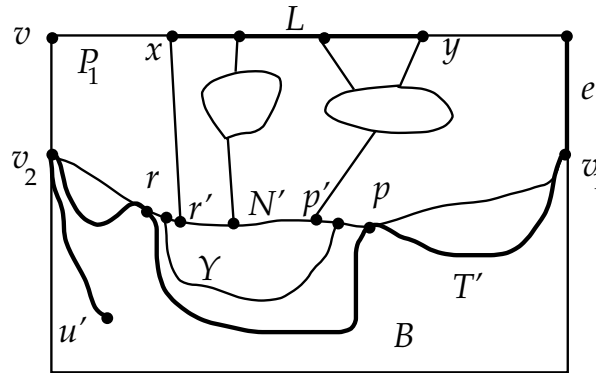


Рис. 6.20: Компонента Y , множество компонент K и их контакты.

Пусть $W_N \neq \emptyset$, обозначим через p' ближайшую к p вершину из W_N , а через r' — ближайшую к r (возможно, $p' = r'$), пусть N' — это $p'r'$ -участок дуги N . Пусть K — объединение всех D -компонент, контакты которых лежат в множестве W_N (то есть на дуге N'). Тогда $K \cup Y$ — это S -компонента графа G .

Отметим на пути P_1 все контакты $K \cup Y$ (то есть, все контакты D -компонент, составляющих K и все вершины, смежные с W_N). Пусть x — ближайшая к v , а y — ближайшая к v_1 отмеченная точка (возможно, $x = y$).

Если $x = y$, то $K \cup Y$ — это S -компонента, не пересекающаяся с внешним циклом C и имеющая три контакта: $W(K \cup Y) = W(Y) \cup \{x\}$. В этом случае мы не будем менять путь S , так как Y удовлетворяет условиям 1° и 2° .

Остается случай $x \neq y$, обозначим xu -участок пути P_1 через L . В этом случае мы изменим путь S внутри $K \cup Y \cup V(L)$, сохранив в нём вершины x, y, p и r . Поэтому S -компоненты, отличные от $K \cup Y$, не изменятся. Мы проверим, что в результате изменений $K \cup Y$ распадется на S -компоненты, удовлетворяющие условиям 1° и 2° .

Пусть $F = G(K \cup Y \cup V(L))$. Если граф F не двусвязен, то нетрудно понять, что все вершины из $V(L)$ лежат в одном блоке графа F — назо-

вём этот блок F' . Если граф F двусвязен, то положим $F' = F$. Введенные выше обозначения можно увидеть на рисунке 6.20.

2.3.4.1. Пусть $V(F') \cap V(B) = \emptyset$.

Очевидно, в этом случае граф F не двусвязен (так как $V(F) \cap V(B) = Y \neq \emptyset$), то есть $F' \neq F$. В случае, когда $p' \neq r'$ нетрудно понять, что путь N' лежит в блоке F' , то есть, $V(F') \cap V(B) \neq \emptyset$, противоречие. Значит, $p' = r'$, то есть, на дуге N расположен ровно один контакт D -компонент. Следовательно, граф $F - F'$ связан и отделяется от F' одной точкой сочленения $t \in V(F')$ (см. рисунок 6.21).

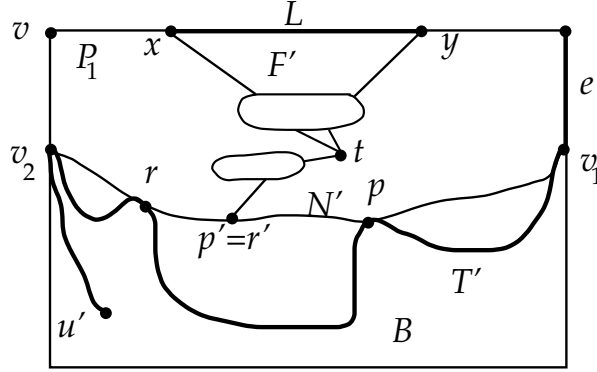


Рис. 6.21: Случай $V(F') \cap V(B) = \emptyset$.

По индукционному предположению мы построим в двусвязном графе F' xy -путь P_F , удовлетворяющий 1° и 2° и содержащий вершину t . Заменяем xy -участок L пути S на путь P_F . Новый путь S содержит x, y, t, p и r . Поэтому $V(F) \setminus V(S)$ разбивается на S -компоненты.

Одна из этих S -компонент — это $V(F - F')$, у неё три контакта: p, r и t . Эта компонента, очевидно, не пересекается с внешним циклом C и, следовательно, удовлетворяет условиям 1° и 2°.

Остальные S -компоненты, лежащие в $V(F)$ — это P_F -компоненты графа F' . Пусть H — одна из них. Тогда $H \cap V(B) = \emptyset$, следовательно, H отделена точкой сочленения t от p и r , а значит, контакты H , как S -компоненты графа G и как P_F -компоненты графа F' — одни и те же, то есть, компонента H удовлетворяет условиям 1° и 2°.

2.3.4.2. Пусть $V(F') \cap V(B) \neq \emptyset$.

Пусть Z — внешний цикл графа F' . В этом случае цикл Z должен пересекать дугу Q внешнего цикла графа B , причем легко понять, что вершины p' и r' будут лежать в $V(Z) \cap V(Q)$. Пусть Z' — это пересекающая $V(B)$ дуга цикла Z с концами p' и r' .

Если граф F не двусвязен, то каждая компонента связности графа $F - F'$ отделяется от F' одной точкой сочленения. Так как $V(F - F') \subset V(B)$, все эти точки сочленения лежат на дуге Z' . Для каждой точки $z \in V(Z')$ обозначим через F_z множество, состоящее из z и вершин всех компонент связности графа $F - F'$, отделяемых вершиной z от F' .

Вершины из $V(F)$, смежные с p или r , могут лежать на дуге Z' или на границах компонент связности графа $F - F'$. Таким образом, множество $\cup_{z \in V(Z')} F_z$ содержит все вершины графа F , смежные с p или r . Обозначим через W_p множество всех вершин $z \in V(Z')$, для которых F_z содержит вершину, смежную с p , а через W_r — множество всех вершин $z \in V(Z')$, для которых F_z содержит вершину, смежную с r . Пусть w_p — самая дальняя от p' по пути Z' вершина из W_p (если $W_p = \emptyset$, положим $w_p = p'$), а w_r — самая ближняя к p' вершина из W_r (если $W_r = \emptyset$, положим $w_r = r'$). Возможно, $w_p = w_r$.

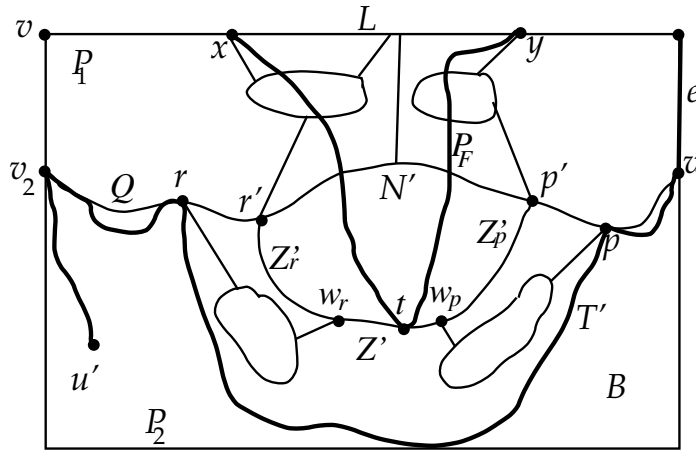


Рис. 6.22: Случай $V(F') \cap V(B) \neq \emptyset$.

Докажем, что на дуге Z' указанные вершины следуют в порядке p', w_p, w_r, r' . Если $w_p = p'$ или $w_r = r'$, утверждение очевидно. Пусть $w_p \neq p'$ и $w_r \neq r'$. Тогда существует pw_p -путь, все внутренние вершины которого лежат в F_{w_p} и rw_r -путь, все внутренние вершины которого лежат в F_{w_r} . Так как граф G — плоский, то указанные пути не пересекаются, откуда немедленно следует, что вершины p', w_p, w_r, r' расположены на дуге Z' в указанном порядке. Следовательно, вершины множества F_z могут быть смежны и с p , и с r в единственном случае: $z = w_p = w_r$.

Пусть t — любая из вершин, лежащую на дуге Z' между w_p и w_r (при $w_p = w_r$ обязательно $t = w_r$). Тогда при $z \neq t$ вершины из F_z смежны не более, чем с одной из вершин p и r .

По индукционному предположению мы построим в двусвязном графе F' xy -путь P_F , удовлетворяющий 1° и 2° и содержащий вершину t . Заменяем xy -участок L пути S на путь P_F . Новый путь S содержит x , y , t , p и r , поэтому $V(F) \setminus V(S)$ разбивается на S -компоненты.

Пусть S -компонента X не пересекает $V(F')$. Тогда $X \subset F_z$ для некоторой вершины $z \in V(Z') \cap V(P_F)$, а значит, X имеет не более трёх контактов: z , p и r . Очевидно, X не может пересекать $V(C)$ и, следовательно, она удовлетворяет условиям 1° и 2° .

Пусть S -компонента X пересекает $V(F')$. Тогда X — это объединение P_F -компоненты X' графа F' и множеств F_z для всех вершин $z \in X' \cap V(Z')$. Если $X' \cap V(Z') = \emptyset$, то X не смежна ни с p , ни с r и $X = X'$. В этом случае контакты X , как S -компоненты графа G и как P_F -компоненты графа F' — одни и те же, то есть, компонента X удовлетворяет условиям 1° и 2° .

Пусть $X' \cap V(Z') \neq \emptyset$. Так как P_F -компонента X' графа F' пересекает внешний цикл Z графа F' , то $|W(X')| = 2$. Пусть Z'_p — это $p't$ -участок дуги Z' , а Z'_r — это $r't$ -участок дуги Z' . Отметим, что путь P_F содержит участок от x до t и участок от t до y , и тем самым отделяет Z'_p от Z'_r и оба эти участка цикла Z от пути L . Таким образом, компонента X' может пересекать лишь одно из множеств $V(Z'_p)$ и $V(Z'_r)$ и не может пересекать L , а значит, X' не пересекает внешний цикл C . Не умаляя общности предположим, что $X' \cap V(Z'_p) \neq \emptyset$ и $X' \cap V(Z'_r) = \emptyset$. В этом случае X не смежна с r , поэтому $W(X) \subset W(X') \cup \{p\}$, то есть, у S -компоненты X не более трёх контактов и она удовлетворяет условиям 1° и 2° .

Если все D -компоненты графа G — неособые, то $u = u'$ и построенный vu' -путь S удовлетворяет всем требованиям теоремы.

2.3.5. Пусть J — особая компонента. Понятно, что тогда $b_J = u' \in V(S)$.

Рассмотрим граф $F = G(J \cup V(L_J) \cup \{u'\}) + y_J u'$. Выше (пункт 2.2.1, см. рисунок 6.19b) уже объяснялось, что этот граф двусвязен. Найдём в нём $x_J u'$ -путь N , содержащий ребро $y_J u'$ и удовлетворяющий условиям 1° и 2° . Рассмотрим два случая.

Если путь N проходит ребро $x_J u$ в направлении от x_J к u , то построим искомый vu -путь P так: начнём с vx_J -участка пути S (см. рисунок 6.23а, участок 1), далее $x_J u_J$ -участок пути N (см. рисунок 6.23а, участок 2), затем, вместо ребра $y_J u'$ пути N — $y_J u'$ -участок пути S (см. рисунок 6.23а: участок 3, затем ребро e и участок 4), и, наконец, $u'u$ -участок пути S (см. рисунок 6.23а: участок 5).

Если путь N проходит ребро $x_J u$ в направлении от u к x_J , то построим искомый vu -путь P так: начнём с vx_J -участка пути S (см. рисунок 6.23b,

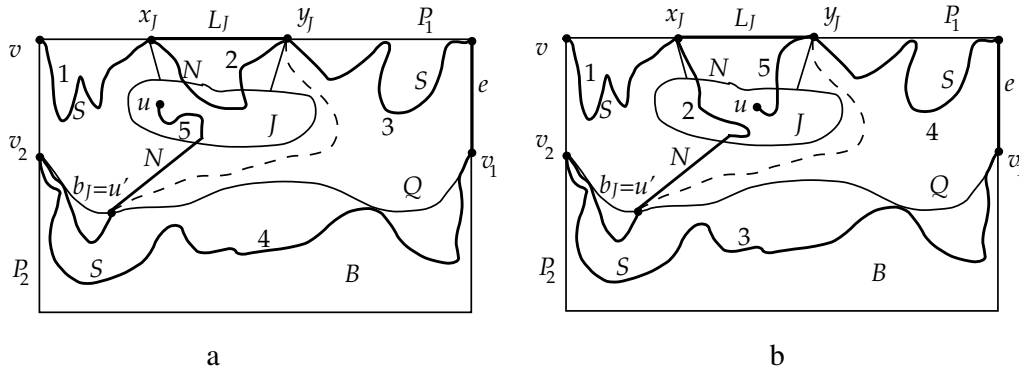


Рис. 6.23: Особая компонента.

участок 1), далее $x_J u'$ -участок пути N (см. рисунок 6.23b, участок 2), затем, вместо ребра $u' y_J$ пути N — $u' y_J$ -участок пути S (см. рисунок 6.23b: участок 3, затем ребро e и участок 4), и, наконец, $y_J u$ -участок пути S (см. рисунок 6.23b: участок 5).

В результате мы включили в этот путь весь путь N , кроме ребра $y_J u'$ и весь путь S , кроме $x_J y_J$ -участка (этот участок — L_J). Поэтому путь P содержит ребро e . По построению пути P , каждая P -компонента графа G является либо N -компонентой графа F , либо S -компонентой графа $G - J - L_J$, следовательно, путь P удовлетворяет условиям 1° и 2°, то есть соответствует всем требованиям теоремы. \square

Напрямую из этой теоремы следует гипотеза Пламмера.

Теорема 6.11. Пусть G — четырёхсвязный планарный граф, $v(G) \geq 5$, $v, u \in V(G)$. Тогда существует гамильтонов путь с концами v и u .

Доказательство. Построим vu -путь P , удовлетворяющий условиям 1° и 2° теоремы 6.10 и проходящий через какое-либо ребро e , лежащее в одной грани D с v . Пока выберем это ребро произвольно с единственным условием: чтобы оно не было инцидентно v . Позже при необходимости мы конкретизируем выбор.

Пусть путь P — не гамильтонов, тогда существует P -компонента U с $w(U) \leq 3$. Так как граф G — четырёхсвязный, это означает, что $V(P) = W(U)$. Из выбора ребра e следует, что $v(P) \geq 3$, поэтому $w(U) \geq 3$. По условию 2° теоремы 6.10 это означает, что U не пересекает цикл D , то есть, все вершины этого цикла содержатся в P . Таким образом, $v(P) = v(D) = 3$, то есть, $u \in V(D)$ — один из концов ребра e и одновременно вершина, смежная с v .

Тогда рассмотрим грань, граница которой D' содержит v , но не содержит u . Так как $d_G(v) \geq 4$, такая грань очевидно есть (вершина v входит хотя бы в четыре грани, и границы лишь двух из них содержат ребро uv). Выбрав e как неинцидентное v ребро грани D' , мы получим по теореме 6.10 удовлетворяющий условиям 1° и 2° vi -путь P' , для которого описанная выше ситуация невозможна, и поэтому P' -компонент нет. Таким образом, мы найдём гамильтонов vi -путь в графе G . \square

Следствие 6.6. Пусть G — вершинно четырёхсвязный плоский граф, $v(G) \geq 5$. Тогда для любого ребра $e \in E(G)$ в графе G существует гамильтонов цикл, содержащий e .

Доказательство. Пусть $e = uv \in E(G)$. По теореме 6.11 в графе есть гамильтонов vi -путь P . Понятно, что $uv \notin E(P)$. Тогда $P + uv$ — гамильтонов цикл в графе G , проходящий по ребру e . \square

6.6.3 Теорема Татта о цикле в планарном графе

Другим следствием теоремы Томассена будет классическая теорема Татта, с помощью которой он доказывал существование гамильтонова цикла в 4-связном планарном графе.

Теорема 6.12. (W. T. Tutte, 1956.) Пусть G — связный плоский граф, ребро $e \in E(G)$ — не мост, циклы C и C' — границы содержащих e граней, а e' — отличное от e ребро цикла C . Тогда существует цикл Z , содержащий рёбра e и e' и удовлетворяющий следующим условиям:

$1^\circ w(U) \leq 3$ для любой Z -компоненты U ;

$2^\circ w(U) = 2$ для любой Z -компоненты U , содержащей хотя бы одну вершину $V(C) \cup V(C')$.

Доказательство. Пусть $e = vi$. Докажем теорему индукцией по $v(G)$.

Базу составит случай, когда граф $G - e$ двусвязен. Применим теорему 6.10 к графу $G - e$, изображенному так, что $C = C \cup C' - e$ — его внешняя грань и найдём vi -путь P , удовлетворяющий условиям 1° и 2° и содержащий e' . Добавив ребро e , замкнём этот путь в искомый цикл Z .

Пусть граф G не двусвязен, B — блок, содержащий e и e' . Тогда построим искомый цикл Z для блока B , вершины остальных блоков либо добавятся в Z -компоненты B , не увеличив число их контактов, либо разобьются на новые Z -компоненты с одним контактом — отделяющей их от B точкой сочленения.

Пусть G двусвязен, но $G - e$ не двусвязен. Тогда граф $G - e$ имеет точку сочленения z , разбивающую его на два графа G_1 и G_2 , где

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{z\}, \quad V(G_1) \ni u, \quad V(G_2) \ni v.$$

Пусть $G'_1 = G_1 + uz$, $G'_2 = G_2 + vz$. Не умаляя общности будем считать, что $e' \in E(G'_1)$. Поскольку e — общее ребро циклов C и C' , а вершина z разделяет в $G - e$ концы ребра e , то z — также общая вершина циклов C и C' .

В графе $G - e$ грани C и C' склеиваются в одну грань $K = C + C' - e$. Тогда рёбра uz и vz мы нарисуем, как диагонали грани K . В результате в графе G'_1 получатся две грани C_1 и C'_1 с общим ребром uz , а в графе G'_2 — грани C_2 и C'_2 с общим ребром vz , объединение этих четырёх граней содержит грань K , а следовательно, и ребро e' (см. рисунок 6.24).

По индукционному предположению, существуют удовлетворяющие условиям 1° и 2° цикл Z_1 в графе G'_1 , проходящий по uz и e' и цикл Z_2 в графе G'_2 , проходящий по vz . Построим Z , как $(Z_1 - uz) + e + (Z_2 - vz)$. Этот цикл содержит ребро e и вершины u, v, z и поэтому любая Z -компонента U содержится либо в $V(G_1)$, либо в $V(G_2)$. Мы рассмотрим первый случай, второй аналогичен. Тогда множество контактов U , как Z -компоненты графа G и как Z_1 -компоненты графа G'_1 — одно и то же. Следовательно, $w(U) \leq 3$. Если U содержит вершину одного из циклов C или C' , то она содержит вершину одного из циклов C_1 или C'_1 и следовательно, $w(U) = 2$. \square

Из теоремы Татта следует более сильное утверждение о гамильтоновых циклах в 4-связном планарном графе, чем следствие 6.6. Доказательство следующей теоремы очень похоже на вывод гипотезы Пламмера из теоремы Томассена.

Теорема 6.13. (W. T. Tutte, 1956.) Пусть G — вершинно четырёх-связный плоский граф без кратных рёбер, $v(G) \geq 5$. Тогда для любых двух рёбер e и e' , входящих в границу одной грани, существует гамильтонов цикл, содержащий e и e' .

Доказательство. Пусть цикл K_1 — граница грани, содержащей оба ребра e и e' , а цикл K_2 — граница второй грани, содержащей e . По теоре-

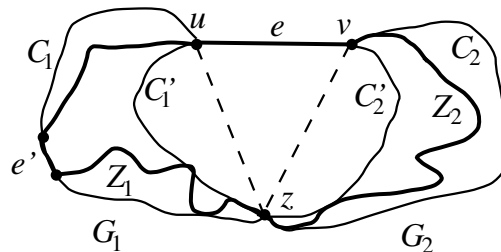


Рис. 6.24: Случай, когда граф $G - e$ не связен.

ме 6.12, существует цикл Z , проходящий по рёбрам e и e' , удовлетворяющий условиям 1° и 2°.

Предположим, что цикл Z — не гамильтонов, тогда существует Z -компонента U . По теореме 6.12 выполняется условие $w(U) \leq 3$. Однако, из четырёхсвязности графа G следует, что $W(U)$ не может быть разделяющим множеством графа G . Следовательно, $V(Z) = W(U)$ и Z -компонента U — единственная, то есть, содержит все не входящие в цикл Z вершины графа. Поскольку циклов из двух вершин в графе G нет, то $v(Z) = w(U) = 3$. Следовательно, по условию 2° теоремы 6.12 мы имеем $V(Z) \supset (V(K_1) \cup V(K_2))$. Тогда $v(K_1) = v(K_2) = 3$ и $V(K_1) = V(K_2) = V(Z)$, то есть, все три цикла совпадают. Так как границы двух содержащих e граней совпадают, то очевидно $G = Z$ и граф G гамильтонов. \square

А что же можно сказать о циклах в регулярных планарных графах степени 3? Пусть не гамильтоновых (гипотеза Тэйта выше уже опровергнута), но хотя бы достаточно длинных?

Напомним, что граф G является 4-циклически-связным, если никакое множество рёбер $F \subset E(G)$, $|F| \leq 3$, не разделяет $E(G - F)$, то есть, все рёбра графа $G - F$ соединяют вершины одной компоненты связности, а остальные компоненты связности этого графа — изолированные вершины.

Теорема 6.14. Пусть G — вершинно трёхсвязный, 4-циклически-связный 3-регулярный плоский граф, $v(G) \geq 3$. Тогда для любых двух рёбер e и e' , входящих в границу одной грани, существует простой цикл длины не менее $\frac{3}{4} \cdot v(G)$, содержащий e и e' .

Доказательство. Пусть цикл K_1 — граница грани, содержащей оба ребра e и e' , а цикл K_2 — граница второй грани, содержащей e . По теореме 6.12 существует цикл Z , проходящий по рёбрам e и e' , удовлетворяющий условиям 1° и 2°. Очевидно, $v(Z) \geq 3$.

Предположим, что цикл Z — не гамильтонов, тогда существует Z -компонента U . По теореме 6.12 мы имеем $w(U) \leq 3$. Однако, из трёхсвязности графа G и условия $v(Z) \geq 3$ следует, что $w(U) = 3$. Пусть $W(U) = \{w_1, w_2, w_3\}$. Так как $d_G(w_i) = 3$, то у каждой вершины w_i существует ровно одно ребро f_i , не входящее в цикл Z ($i \in [1..3]$). Отметим, что множество рёбер $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ отделяет U от $V(Z)$ и так как граф G является 4-циклически-связным а $v(G) \geq 3$, остаётся единственная возможность: $|U| = 1$.

Таким образом, все компоненты связности графа $G - Z$ — изолированные вершины. Каждая изолированная вершина u графа $G - Z$ смежна с

тремя вершинами цикла Z , а каждая вершина цикла Z смежна не более, чем с одной вершиной, не входящей в Z . Поэтому в цикле Z не менее, чем $\frac{3v(G)}{4}$ вершин. \square

6.7 Почти планарные графы

В этом разделе мы рассмотрим графы, которые могут быть изображены на плоскости с ограничением на количество пересечений каждого ребра с другими.

Определение 6.9. Граф G назовём k -почти планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более, чем k других.

Как известно, в планарном графе G без петель и кратных рёбер, $e(G) \leq 3(v(G) - 2)$, причём оценка точная и достигается для любой триангуляции. Для $k \leq 4$ и k -почти планарного графа G мы докажем оценку $e(G) \leq (k + 3)(v(G) - 2)$. Серии примеров покажут, что оценка для $k = 1$ и $k = 2$ точная.

Теорема 6.15. (J. Pach, G. Toth, 1997.) Пусть $k \leq 4$. Тогда для k -почти планарного графа G без петель и кратных рёбер выполняется неравенство $e(G) \leq (k + 3)(v(G) - 2)$.

Доказательство. Мы будем рассматривать k -почти планарный граф G как его изображение на плоскости с минимальным количеством пересечений рёбер.

Назовём два кратных ребра графа *параллельными*, если хотя в одной из областей относительно образованного этими рёбрами цикла нет вершин графа.

Для удобства доказательства мы разрешим в графе G кратные рёбра, но запретим параллельные рёбра.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим контрпример с минимальным количеством точек пересечения рёбер — пусть это k -почти планарный граф G .

Зафиксируем максимальный по количеству рёбер остовный плоский подграф M графа G . Так как $v(M) \geq 3$, то легко видеть, что в границе каждой грани графа M хотя бы три вершины.

Все рёбра из $F = E(G) \setminus E(M)$ пересекают рёбра графа M . Пусть $f \in F$. Назовём *полуребром* часть ребра f от вершины до ближайшей точки пересечения с ребром из M . Таким образом, каждое ребро множества F имеет два непересекающихся полуребра. Для любой грани D графа

M обозначим через $h(D)$ количество полурёбер, выходящих из вершин грани D вовнутрь грани D (будем называть их *полурёбрами грани D*).

Начнём с нескольких лемм. Напомним, что во всем доказательстве теоремы $k \in [0..4]$.

Лемма 6.10. Пусть D — грань графа M со связной границей. Пусть участок ребра $f \in F$ лежит внутри грани D . Тогда концы этого участка не могут принадлежать одному ребру границы D .

Доказательство. Предположим противное. Назовём *зацеплением* ребра $f \in F$ за ребро $e \in B(D)$ участок ребра f , лежащий внутри грани D , с концами на e . Пусть X_1Y_1, \dots, X_nY_n — все зацепления за ребро $e = xy$, причем X_i — конец, ближний к x , а Y_i — конец, ближний к y . Рассмотрим минимальное по включению зацепление X_jY_j . Пусть оно образовано ребром $f \in F$. Заменим участок F_j ребра f с концами X_j и Y_j на участок S_j ребра e .

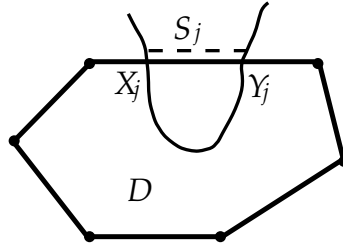


Рис. 6.25: Зацепление.

Пусть ребро f' пересекает S_j . Если при этом f' не пересекает F_j , то f' дважды пересекает ребро e между X_j и Y_j и образует зацепление, что противоречит минимальности X_jY_j . Таким образом, лишних пересечений с ребрами из F не появилось. Теперь нарисуете путь S_j вдоль ребра e (очень близко к этому ребру) вне грани D (см. рисунок 6.25). В результате новых пересечений не прибавилось, но исчезли 2 пересечения ребер f и e . Мы получили изображение графа G с меньшим числом пересечений, противоречие. \square

Следствие 6.7. Пусть D — грань графа M со связной границей, а ребро $f \in F$ содержит полуребро грани D . Тогда f не может пересекать ребро грани D , имеющее с f общую вершину.

Утверждение непосредственно следует из леммы 6.10.

Лемма 6.11. Пусть D — грань графа M со связной границей $B(D)$, причём $b(D) \geq 3$. Тогда $h(D) \leq (b(D) - 2)(k + 1) - 1$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $b(D)$. Начнём с **базы** для $b(D) = 3$. В этом случае очевидно, что $B(D)$ — треугольник на различных вершинах, которые мы обозначим через a, b и c . Пусть из этих вершин выходит h_a, h_b и h_c полурёбер в грани D соответственно. Нам нужно доказать, что $h(D) = h_a + h_b + h_c \leq k$.

Отметим, что по следствию 6.7 любое полуребро грани D , выходящее из вершины a , пересекает ребро bc . Аналогично для остальных двух вершин. Поэтому $h_a \leq k, h_b \leq k$ и $h_c \leq k$.

Из сказанного выше следует, что любые два полуребра грани D , выходящие из разных вершин, пересекаются. Поэтому *при $h_a + h_b \geq k$ немедленно получаем $h_c = 0$* (полуребро грани D , выходящее из c , в этом случае пересечёт k выходящих из a и b полурёбер и ребро ab , что невозможно). Таким образом, случай $k = 1$ можно считать рассмотренным, а в остальных случаях ограничим перебор условиями $h_a < k, h_b < k$ и $h_c < k$.

Пусть $h_a + h_b + h_c \geq k + 1, h_a \geq h_b \geq h_c$. Если $h_c \geq 2$, то $h_a + h_b \geq 4 \geq k$ и мы получаем, что $h_c = 0$, противоречие. Значит, $h_c \leq 1$, откуда опять же $h_a + h_b \geq k$ и $h_c = 0$. Таким образом, $h_a + h_b \geq k + 1$. Так как $h_a, h_b < k$, мы имеем $h_a \geq h_b \geq 2$, следовательно, $k \geq 3$.

Отметим, что $h_a \geq \frac{k+1}{2}$, что при $k \leq 4$ означает $h_a \geq k - 1$. Тогда рассмотрим два полуребра, выходящих из вершины b , пусть e и e' — содержащие их рёбра. Оба ребра e и e' пересекают ребро ac и $k - 1$ полурёбер, выходящих из a . Поэтому e и e' не пересекают рёбер графа $M - ac$ и друг друга, а следовательно, $M' = (M - ac) + e + e'$ — плоский подграф графа G и $e(M') = e(M) + 1$. Противоречие с максимальнойностью M .

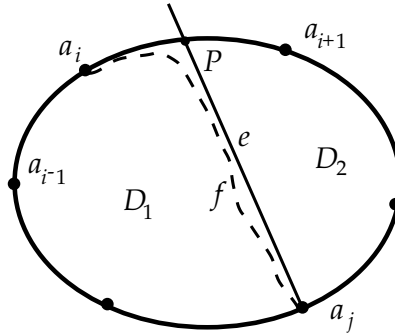
Таким образом, база доказана.

Пусть теперь $b(D) = s \geq 4$ и для граней с меньшим размером границы утверждение уже доказано. Как и в лемме 6.2, мысленно раздвоим каждое внутреннее ребро грани D , превратив $B(D)$ в цикл Z , проходящий каждое граничное ребро грани D ровно один раз и каждое внутреннее ребро — ровно два раза, грань D будет внутренней областью цикла Z . В цикле Z , как нам известно, ровно s рёбер, пусть $Z = a_1 a_2 \dots a_s$ (среди этих вершин, возможно, есть совпадающие, но любые две соседние вершины обязательно различны). Рассмотрим два случая.

1. Пусть полуребро, выходящее из вершины a_j пересекает ребро $a_i a_{i+1}$ в точке P и выполняется одно из двух условий:

- 1° на участке ребра от a_i до P нет точек пересечения и $a_j \neq a_{i-1}$;
- 2° на участке ребра от a_{i+1} до P нет точек пересечения и $a_j \neq a_{i+2}$.

В силу симметричности достаточно рассмотреть первый случай. Пусть e

Рис. 6.26: Рёбра e и f .

— ребро, выходящее из a_j и проходящее через точку P . Тогда рассмотрим граф $G' = G - e + f$, в котором ребро $f = a_j a_i$ проведено сначала вдоль ребра e (почти до точки P), потом вдоль ребра $a_i a_{i+1}$ в грани D (см. рис. 6.26). Это можно сделать так, чтобы новое ребро f пересекло лишь те рёбра, что пересекают полуребро ребра e от a_j до P , то есть, не более k рёбер. Поэтому граф G' является k -почти планарным. Новое ребро делит грань графа M на две грани D_1 и D_2 , в каждой из которых не менее трёх вершин (по следствию 6.7 мы имеем $a_j \neq a_i$ и $a_j \neq a_{i+1}$), поэтому в графе G' нет ребра, параллельного f .

Новое ребро f пересекает лишь те рёбра, что пересекает удаленное ребро e , но не все: f не пересекает $a_i a_{i+1}$. Поэтому число пересечений в изображении G' строго меньше, чем в G , что противоречит выбору G .

2. Нет полуребра грани D , удовлетворяющего условию 1° или условию 2°.

Назовём ребро цикла Z *пустым*, если оно не пересекает полурёбер грани D и *непустым* в противном случае. Каждое полуребро грани D пересекает одно из s рёбер цикла Z . Поэтому, если хотя бы два из s ребер Z — пустые, то $h(D) \leq (s-2)k < (s-2)(k+1) - 1$. Значит, не более чем одно из рёбер цикла Z — пустое. Следовательно, существуют $s-1 \geq 3$ непустых ребра цикла Z подряд.

Пусть $a_i a_{i+1}$ — непустое ребро. Тогда ближайшая к a_i точка пересечения — с полуребром e_{i-1}^+ , выходящим из вершины a_{i-1} , а ближайшая к a_{i+1} точка пересечения — с полуребром e_{i+2}^- , выходящим из вершины a_{i+2} . Так как рёбра с общим концом по следствию 6.7 не пересекаются, из четырех вершин a_{i-1} , a_i , a_{i+1} и a_{i+2} могут совпадать только a_{i-1} и a_{i+2} .

Предположим, что вершина a_{i-1} совпадает с a_{i+2} , а вершина a_i совпадает с a_{i+3} . Расклеим пары совпадающих вершин a_{i-1} , a_{i+2} и a_i , a_{i+3} на

различные копии. Вне грани D должно быть можно провести непересекающиеся рёбра $a_{i-1}a_{i+2}$ и $a_i a_{i+3}$ (так как грань D связна). Это, очевидно, невозможно, что показывает невозможность одновременного совпадения двух указанных пар вершин.

Пусть $a_{i-1}a_i$, $a_i a_{i+1}$ и $a_{i+1}a_{i+2}$ — три последовательных непустых ребра грани D . Нам хочется, чтобы вершины a_{i-1} и a_{i+2} не совпадали. Предположим, противное, пусть вершины a_{i-1} и a_{i+2} совпадают. Так как соседние вершины грани совпадать не могут, легко понять, что $s \geq 5$, а ребра $a_{i-2}a_{i-1}$ и $a_{i+1}a_{i+2}$ различны. Понятно, что хотя бы одно из них — непустое. Пусть это ребро $a_{i+1}a_{i+2}$. Как сказано выше, тогда вершины a_i и a_{i+3} не совпадают.

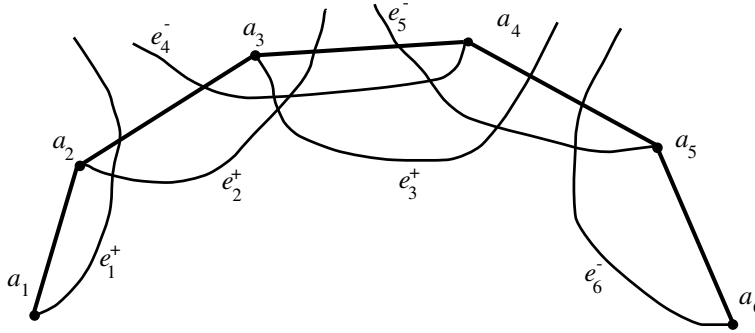


Рис. 6.27: Рёбра e_2^+ и e_5^- .

Итак, теперь можно считать, что рёбра a_1a_2 , a_2a_3 и a_3a_4 — непустые, а все вершины a_1 , a_2 , a_3 , a_4 — различны, см. рисунок 6.27. Тогда полуребро e_2^+ пересекает a_3a_4 , e_1^+ , e_3^+ и e_4^- (это 4 различных ребра, так как вершины a_1 , a_2 , a_3 , a_4 различны), а полуребро e_5^- пересекает a_3a_4 , e_6^- , e_4^- и e_3^+ (опять же, это 4 различных ребра). Такое возможно лишь при $k = 4$ и в этом случае рёбра f_2 и f_5 графа G , содержащие полуребра e_2^+ и e_5^- соответственно, не пересекают рёбер графа G вне грани D и друг друга. Тогда $M' = (M - a_3a_4) + f_2 + f_5$ — плоский подграф графа G и $e(M') > e(M)$, что невозможно. \square

Лемма 6.12. Пусть D — грань графа M , причём $t(D) \geq 1$. Тогда $h(D) \leq (k + 1) \cdot t(D) - 1$.

Доказательство. Если граница грани несвязна, то $t(D) \geq b(D)$ по лемме 6.2. Так как каждое ребро границы пересекает не более, чем k полуребер грани D , мы имеем

$$h(D) \leq k \cdot b(D) \leq k \cdot t(D) \leq (k + 1) \cdot t(D) - 1.$$

Пусть $B(D)$ — связный граф. Тогда $t(D) = b(D) - 2$ по лемме 6.2 и по лемме 6.11 мы имеем

$$h(D) \leq (b(D) - 2)(k + 1) - 1 = (k + 1)t(D) - 1.$$

□

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Пусть D_1, \dots, D_n — все грани M . По построению, в границе каждой грани хотя бы три вершины, следовательно $t(D_i) \geq 1$ для всех $i \in [1..n]$. Триангулируем граф M , в результате получится триангуляция T с $e(T) = 3v(M) - 6 = 3v(G) - 6$. Грань D_i в результате разбивается на $t(D_i)$ треугольников, для чего нужно провести не менее, чем $t(D_i) - 1$ рёбер (на самом деле, $t(D_i) - 2$ плюс количество компонент связности графа $B(D_i)$.) Отметим, что в силу формулы Эйлера общее количество граней триангуляции, очевидно, равно $2v(G) - 4$:

$$\sum_{i=1}^n t(D_i) = 2v(G) - 4. \quad (6.4)$$

В силу леммы 6.2 мы имеем

$$e(M) \leq 3v(G) - 6 - \sum_{i=1}^n (t(D_i) - 1). \quad (6.5)$$

Каждое ребро из $E(G) \setminus E(M)$ содержит два полуребра, поэтому по лемме 6.12

$$e(G) - e(M) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h(D_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((k + 1) \cdot t(D_i) - 1). \quad (6.6)$$

Так как $t(D_i) \geq 1$, из формул (6.4)–(6.6) следует

$$\begin{aligned} e(G) &\leq 3v(G) - 6 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((k - 1) \cdot t(D_i) + 1) \leq \\ &\leq 3(v(G) - 2) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n t(D_i) = (k + 3)(v(G) - 2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Что интересно, оценка из теоремы 6.15 для $k = 1$ и $k = 2$ точна. Более того, серии примеров графов, подтверждающие её точность, имеют много общего с триангуляциями, на которых достигается максимум количества рёбер в планарных графах без петель и кратных рёбер.

Для $k = 1$ пусть G'_n — плоский граф на n вершинах, все грани которого — четырёхугольники. Несложно построить такие графы для всех достаточно больших n . Количество рёбер $e(G'_n)$ такого графа равно удвоенному количеству граней $f(G'_n)$, откуда по формуле Эйлера получаем $f(G'_n) = n - 2$, $e(G'_n) = 2n - 4$. Проведём в каждой грани графа G'_n две диагонали и получим серию 1-почти планарных графов G_n с $e(G_n) = 2n - 4 + 2(n - 2) = 4(n - 2)$, подтвердив тем самым точность оценки.

Для $k = 2$ мы построим серию плоских графов H'_n на n вершинах, все грани которых — пятиугольники (такие графы существуют при всех достаточно больших $n = 3m + 2$). Тогда $f(H'_n) = \frac{2(n-2)}{3} = 2m$, $e(H'_n) = \frac{5(n-2)}{3} = 5m$. Получим 2-почти планарный граф H_n , проведя в H'_n все 5 диагоналей каждой грани. Таким образом, $e(H_n) = e(H'_n) + 5f(H'_n) = 5(n - 2)$ и точность оценки из теоремы 6.15 доказана.

Для больших k максимальное возможное число рёбер в k -почти планарном графе G на n вершинах имеет порядок $c \cdot \sqrt{k} \cdot n$.

Задача 6.2. Пусть G — двудольный граф без петель и кратных рёбер, изображенный на плоскости так, что каждое его ребро пересекает не более, чем одно другое и $v(G) = n \geq 3$.

а) Докажите, что $e \leq 3v - 8$.

б) Докажите, что существуют бесконечные серии примеров графов, для которых оценка из пункта а) достигается.

Глава 7

Циклическое пространство графа

В этой главе нам понадобится знание о том, что такое линейное пространство. Мы будем использовать линейные пространства над полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Пусть $n = v(G)$, $m = e(G)$, $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Определение 7.1. Определим *рёберное пространство* $\mathcal{E}(G)$ графа G — линейное пространство над полем \mathbb{F}_2 . Элементами этого пространства будут подмножества $E(G)$, а сложение элементов $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(G)$ — их симметрическая разность $E_1 \triangle E_2$ (то есть, множество всех рёбер, входящих ровно в одно из множеств E_1 и E_2).

Легко понять, что $\mathcal{E}(G)$ — линейное пространство над \mathbb{F}_2 , а $\{e_1\}, \dots, \{e_n\}$ — базис $\mathcal{E}(G)$. Тогда $\dim \mathcal{E}(G) = m$.

Определение 7.2. 1) Определим скалярное произведение $\langle E, E' \rangle$ элементов $E, E' \in \mathcal{E}(G)$, как остаток от деления на 2 количества элементов в $E \cap E'$.

2) Определим ортогональное дополнение подпространства \mathcal{F} рёберного пространства $\mathcal{E}(G)$ стандартным образом:

$$\mathcal{F}^\perp = \{E \in \mathcal{E}(G) \mid \langle E, F \rangle = 0 \text{ для всех } F \in \mathcal{F}\}.$$

Замечание 7.1. 1) Можно считать, что элемент $F \in E(G)$ представляется в виде $F = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$, где коэффициент $\lambda_i \in \mathbb{F}_2$ равен 1 тогда и только тогда, когда $e_i \in F$.

2) Тогда если $E = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$, а $E' = \sum_{i=1}^m \lambda'_i e_i$, то $\langle E, E' \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \lambda'_i$, то есть, определённое выше скалярное произведение есть скалярное произведение в общепринятом смысле этого термина.

3) Напомним, что $\mathcal{F}^{\perp\perp} = \mathcal{F}$.

Определение 7.3. 1) Определим *циклическое пространство* $\mathcal{C}(G)$ графа G , как подпространство $\mathcal{E}(G)$, порожденное рёберными множествами простых циклов.

2) *Индукцированный цикл* графа G — это простой цикл в G , являющийся индуцированным подграфом (то есть, не содержащий диагоналей).

Именно в циклическом пространстве и его свойствах заключено много информации о графе.

Лемма 7.1. Для множества $F \in E(G)$ следующие три утверждения равносильны.

1° $F \in \mathcal{C}(G)$.

2° В графе $G(F)$ степени всех вершин четны.

3° F является объединением рёберных множеств нескольких простых циклов.

Доказательство. Для пустого множества рёбер все три условия выполняются. Далее пусть $F \neq \emptyset$.

1° \Rightarrow 2°. Вспомним, что $\mathcal{C}(G)$ порождено рёберными множествами циклов, а у каждого цикла степени всех вершин равны 2. Взятие симметрической разности, очевидно, сохраняет четность степеней.

2° \Rightarrow 3°. Если степени всех вершин графа $G(F)$ четны, то он содержит простой цикл. Удалим рёбра этого цикла и продолжим аналогичные рассуждения до тех пор, пока не останется пустое множество рёбер.

3° \Rightarrow 1° очевидно. \square

Лемма 7.2. Рёберные множества индуцированных циклов графа G порождают циклическое пространство $\mathcal{C}(G)$.

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{C}(G)$ порождено множествами рёбер простых циклов, достаточно доказать, что множество рёбер простого цикла C порождено множествами рёбер индуцированных циклов. Это несложно сделать индукцией по количеству рёбер.

Пусть C — не индуцированный цикл и имеет диагональ xy , которая разбивает его на два меньших цикла C_1 и C_2 . Тогда $E(C) = E(C_1) \triangle E(C_2)$, а для C_1 и C_2 утверждение уже доказано. \square

7.1 Связь циклов и разрезов

Напомним определение (рёберного) *разреза*.

Определение 7.4. 1) *Разрезом* называется множество рёбер $E(V_1, V_2)$ (все рёбра между V_1 и V_2) для произвольного разбиения $V(G)$ на два непересекающихся множества вершин V_1 и V_2 .

2) *Пространство разрезов* $\mathcal{C}^*(G)$ — подпространство $\mathcal{E}(G)$, порожденное всеми разрезами.

3) Для каждой вершины $v \in V(G)$ определим $E(v) = E(v, V(G-v))$ — разрез из всех рёбер, инцидентных v .

Лемма 7.3. 1) $\mathcal{C}^*(G)$ состоит из всех разрезов графа G и пустого множества.

2) Разрезы вида $E(v)$ порождают пространство разрезов.

3) $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}^*(G)^\perp$.

Доказательство. 1) Достаточно доказать, что множество всех разрезов замкнуто относительно взятия симметрической разности. Пусть $D_1 = E(V_1, V_2)$, $D_2 = E(W_1, W_2)$ — два разреза. Тогда $D_1 \Delta D_2$ есть множество всех рёбер, пересекающих ровно один из двух разрезов (то есть, концы этих рёбер находятся в разных частях ровно одного из двух разбиений $V(G)$). Таким образом,

$$D_1 \Delta D_2 = E((V_1 \cap W_1) \cup (V_2 \cap W_2), (V_1 \cap W_2) \cup (W_1 \cap V_2))$$

является разрезом.

2) Пусть $D = E(V_1, V_2)$ — произвольный разрез. Тогда D есть сумма всех разрезов вида $E(w)$ для $w \in V_1$ (напомним, что сумма у нас — это симметрическая разность, поэтому при сложении указанных разрезов все рёбра между вершинами V_1 сократятся, и останутся в точности рёбра разреза D).

3) Пусть $E \in \mathcal{E}(G)$. Из пункта 2 леммы следует, что $E \in \mathcal{C}^*(G)^\perp$ тогда и только тогда, когда $\langle E, E(w) \rangle = 0$ для любой вершины w , то есть, степень любой вершины графа $G(E)$ четна. А это по лемме 7.1 означает, что $E \in \mathcal{C}(G)$. \square

Определение 7.5. Пусть G — связный граф, а T — его остовное дерево.

1) Для каждого ребра $e \in E(T)$ граф $T - e$ имеет ровно две компоненты связности — пусть это W_e и U_e . Назовём *T -разрезами* все разрезy вида $D_e = E(W_e, U_e)$.

2) Для каждого ребра $f \in E(G) \setminus E(T)$ граф $T + f$ содержит ровно один цикл C_f . Назовём *T -циклами* все циклы вида C_f .

Теорема 7.1. Пусть G — связный граф, T — его остовное дерево. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) T -циклы образуют базис циклического пространства $\mathcal{C}(G)$.

- 2) T -разрезы образуют базис пространства разрезов $\mathcal{C}^*(G)$.
 3)

$$\dim \mathcal{C}(G) = e(G) - v(G) + 1, \quad \dim \mathcal{C}^*(G) = v(G) - 1. \quad (7.1)$$

Доказательство. Каждое ребро $f \in E(T)$ входит ровно в один T -разрез D_e . Поэтому все T -разрезы линейно независимы в $\mathcal{C}^*(G)$, следовательно, $\dim \mathcal{C}^*(G) \geq v(G) - 1$.

Каждое ребро $e \in E(G) \setminus E(T)$ входит ровно в один T -цикл C_f . Поэтому все T -циклы линейно независимы в $\mathcal{C}(G)$, следовательно, $\dim \mathcal{C}(G) \geq e(G) - v(G) + 1$.

Из пункта 3 леммы 7.3, что $\mathcal{C}(G) = (\mathcal{C}^*(G))^\perp$. По свойствам ортогонального дополнения тогда

$$e(G) = \dim \mathcal{E}(G) = \dim \mathcal{C}(G) + \dim \mathcal{C}^*(G),$$

откуда немедленно следуют равенства (7.1). Теперь из равенства размерностей видно, что T -разрезы порождают $\mathcal{C}^*(G)$, а T -циклы порождают $\mathcal{C}(G)$. \square

7.2 Циклическое пространство трёхсвязного графа

Определение 7.6. Цикл C графа G назовём *неразделяющим*, если множество его вершин не является разделяющим, то есть, граф $G - V(C)$ является связным.

Теорема 7.2. (W. T. Tutte, 1963.) *Циклическое пространство трёхсвязного графа порождено множествами рёбер его неразделяющих индуцированных циклов.*

Доказательство. Индукция по размеру графа. База для K_4 очевидна: множества рёбер четырёх треугольных циклов этого графа, очевидно, порождают $\mathcal{C}(K_4)$. Вместе с тем, эти треугольники являются неразделяющими индуцированными циклами.

Пусть $v(G) \geq 5$ и для любого меньшего чем G трёхсвязного графа утверждение доказано. По теореме 5.25 существует такое ребро $e = xy \in E(G)$, что граф $G' = G \cdot e$ трёхсвязен. Пусть $w \in V(G')$ — вершина, образованная из x и y в результате стягивания.

Пусть вершина $u \in V(G)$ смежна и с x , и с y . Назовём цикл uxy *фундаментальным треугольником*. Очевидно, фундаментальный треугольник — неразделяющий цикл. (Если $\{x, y, u\}$ — разделяющее множество

в G , то $\{w, u\}$ — разделяющее множество в графе G' , что противоречит двусвязности G' .) Очевидно, любой треугольник является индуцированным циклом. Таким образом, мы можем использовать фундаментальные треугольники в порождении $\mathcal{C}(G)$.

Мы будем считать множества рёбер $E_1, E_2 \in E(G)$ *похожими*, если $E_1 \triangle E_2$ представляется в виде суммы множеств рёбер нескольких фундаментальных треугольников и, возможно, ребра e . Очевидно, отношение похожести является отношением эквивалентности.

Ввиду леммы 7.2 нам достаточно доказать, что множество рёбер любого индуцированного цикла C графа G есть сумма рёберных множеств нескольких индуцированных неразделяющих циклов графа G .

Определим цикл C' графа G' следующим образом. Если $e \in E(C)$, то $C' = C \cdot e$. Пусть $e \notin E(C)$. Так как цикл C — индуцированный, он не содержит хорд, а значит, $V(C)$ содержит не более, чем одну из вершин x и y . Если цикл C содержит одну из этих вершин (например, x), то C' получается из C заменой x на w . Наконец, если $x, y \notin V(C)$, то положим $C' = C$.

Наоборот, для каждого цикла Z' графа G' мы построим множество рёбер $E^*(Z') \subset E(G)$ так: все неинцидентные w рёбра Z' есть и в $E^*(Z')$, а вместо каждого из рёбер вида wu в $E^*(Z')$ есть ровно одно из рёбер xu и yu (не имеет значения, какое именно). Отметим, что хотя бы одно из этих рёбер обязательно есть в $E(G)$.

Мы воспользуемся индукционным предположением, то есть, результатом теоремы для графа G' . Получим, что

$$E(C') = E(C'_1) \triangle E(C'_2) \triangle \dots \triangle E(C'_k),$$

где все циклы из правой части — индуцированные и неразделяющие в графе G' . Для каждого цикла C'_i мы построим такой индуцированный неразделяющий цикл C_i в графе G , что $E(C_i)$ похоже на $E^*(C'_i)$.

Если $w \notin V(C'_i)$, то, очевидно, нам подойдёт $C_i = C'_i$. Пусть $w \in V(C'_i)$, причем $C'_i = Puvw$, где P — некоторый путь. Рассмотрим два случая.

1. $E(G)$ содержит все четыре ребра xu, xv, yu, yv .

Рассмотрим в графе G циклы $C_i^x = Puxv$ и $C_i^y = Puyv$ (см. рисунок 7.1а). Очевидно, оба цикла являются индуцированными. Предположим, что $V(C_i^x)$ — разделяющее множество в графе G . Так как $V(C'_i)$ — не разделяющее множество в графе G' , то $V(C_i^x)$ отделяет y от остальных вершин графа G . Аналогично, если $V(C_i^y)$ — разделяющее множество в графе G , то оно отделяет x от остальных вершин графа G .

Таким образом, если оба множества $V(C_i^x)$ и $V(C_i^y)$ — разделяющие в графе G , то вершины x и y могут быть смежны в графе G только

с u, v , вершинами пути P и друг с другом. Но ввиду отсутствия хорд у циклов C_x и C_y , очевидно, x и y не смежны с вершинами пути P , то есть, $N_G(\{x, y\}) = \{x, y, u, v\}$. Таким образом, $\{u, v\}$ отделяет $\{x, y\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит трёхсвязности этого графа.

Значит, хотя бы один из циклов C_i^x и C_i^y является неразделяющим — пусть, например, это C_i^x . Очевидно, $E(C_i^x)$ похоже на $E^*(C_i')$ и мы можем положить $C_i = C_i^x$.

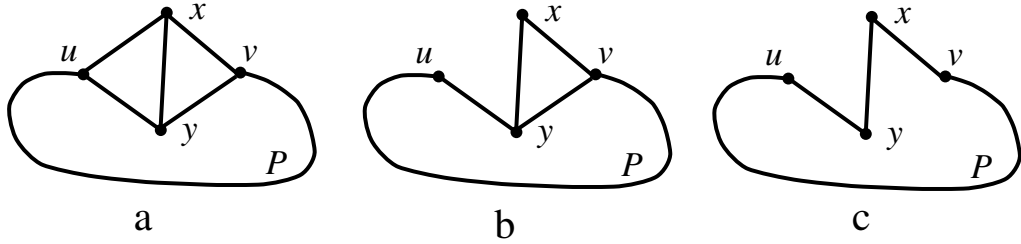


Рис. 7.1: Построение цикла C_i .

2. $E(G)$ содержит не все четыре ребра xu, xv, yu, yv .

Не умаляя общности будем считать, что $xu \notin E(G)$. Тогда $yu \in E(G)$. Если $yv \in E(G)$, то положим $C_i = Puyv$ (см. рисунок 7.1b). Как и в первом пункте, $C_i = Puyv$ — индуцированный цикл графа G и если $V(C_i)$ — разделяющее множество в G , то оно отделяет x от остальных вершин графа. Но тогда $N_G(x) = \{y, v\}$, что невозможно в трёхсвязном графе.

Пусть $yv \notin E(G)$. Тогда $xv \in E(G)$ и мы положим $C_i = Puyxv$ (см. рисунок 7.1c). Так как $xu, yv \notin E(G)$, цикл C_i — индуцированный. На этот раз очевидно, что цикл C_i — неразделяющий.

Остается лишь добавить, что в любом случае, как нетрудно заметить, $E(C_i)$ похоже на $E^*(C_i')$.

Так как для каждого i мы знаем, что $E(C_i)$ похоже на $E^*(C_i')$, то $E(C_1) \triangle \dots \triangle E(C_k)$ похоже на $E^*(C_1') \triangle \dots \triangle E^*(C_k')$, а значит, и на $E^*(C')$, которое, в свою очередь, похоже на $E(C)$. Следовательно, $E(C)$ представляется в $\mathcal{C}(G)$ в виде суммы $E(C_1), \dots, E(C_k)$, множеств рёбер нескольких фундаментальных треугольников и, возможно, ребра e . Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что ребра e в этой сумме быть не может: если бы оно там было, то $e \in \mathcal{C}(G)$, что не так. \square

7.3 Циклическое пространство планарного графа

Определение 7.7. Множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)$ называется *простым*, если каждое ребро $e \in E(G)$ принадлежит не более, чем двум подмножествам из \mathcal{F} .

Замечание 7.2. Самый естественный пример простого множества — это $\{E(v)\}_{v \in V(G)}$ — базис пространства разрезов $\mathcal{C}^*(G)$ (см. лемму 7.3). Таким образом, пространство разрезов графа всегда имеет простой базис.

А вот простой базис циклического пространства существует далеко не у каждого графа.

Лемма 7.4. Пусть $e \in E(G)$, граф $G - e$ связан и циклическое пространство $\mathcal{C}(G)$ имеет простой базис. Тогда циклическое пространство $\mathcal{C}(G - e)$ также имеет простой базис.

Доказательство. Пусть C_1, \dots, C_k — простой базис $\mathcal{C}(G)$. Из теоремы 7.1 ясно, что

$$\dim \mathcal{C}(G - e) = \dim \mathcal{C}(G) - 1. \quad (7.2)$$

1. Пусть e принадлежит одному из множеств C_1, \dots, C_k .

Например, пусть $e \in C_k$. Тогда множества $C_1, \dots, C_{k-1} \in \mathcal{C}(G - e)$ линейно независимы и ввиду (7.2) образуют простой базис $\mathcal{C}(G - e)$.

2. Пусть e принадлежит двум из множеств C_1, \dots, C_k .

Например, пусть $e \in C_{k-1}$ и $e \in C_k$. Тогда множества $C_1, \dots, C_{k-2}, C_{k-1} \triangle C_k \in \mathcal{C}(G - e)$ линейно независимы и ввиду (7.2) образуют простой базис $\mathcal{C}(G - e)$. \square

Теорема 7.3. (S. MacLane, 1937.) Граф G планарен тогда и только тогда, когда его циклическое пространство $\mathcal{C}(G)$ имеет простой базис.

Доказательство. Мы будем считать, что $v(G) \geq 3$, иначе утверждение очевидно. Также будем считать, что утверждение доказано для любого графа с меньшим числом вершин. Рассмотрим два случая.

1. Пусть G не двусвязен.

В этом случае существуют два таких подграфа G_1 и G_2 графа G , что

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad |V(G_1) \cap V(G_2)| \leq 1, \quad E(G_1) \cup E(G_2) = E(G).$$

Понятно, что граф G планарен тогда и только тогда, когда оба графа G_1 и G_2 планарны.

Каждый цикл графа G является циклом в одном из графов G_1 и G_2 , поэтому $\mathcal{C}(G)$ является прямой суммой $\mathcal{C}(G_1)$ и $\mathcal{C}(G_2)$. Следовательно, $\mathcal{C}(G)$ имеет простой базис тогда и только тогда, когда оба циклических пространства $\mathcal{C}(G_1)$ и $\mathcal{C}(G_2)$ имеют простой базис.

Таким образом, в этом случае утверждение теоремы для графа G следует из утверждений для меньших графов G_1 и G_2 .

2. Пусть G двусвязен.

\Rightarrow . В этом случае в графе нет точек сочленения и мостов, поэтому граница любой грани графа G — простой цикл. Каждое ребро принадлежит границе ровно двух граней, поэтому множество границ всех граней — простое.

Докажем, что множества рёбер границ граней порождают $\mathcal{C}(G)$. Для этого достаточно доказать, что они порождают любой цикл C . Цикл C делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Пусть D_1, \dots, D_k — границы всех граней внутренней области цикла C . Нетрудно понять, что $E(C) = E(D_1) \Delta \dots \Delta E(D_k)$ (любое ребро, проведенное внутри C входит в границы ровно двух внутренних граней и потому сократится, останутся в точности рёбра цикла C).

Для завершения доказательства остается заметить, что из полученной простой порождающей системы можно выбрать простой базис $\mathcal{C}(G)$.

\Leftarrow . Докажем, что G не может содержать подразбиения K_5 или $K_{3,3}$ (см. определение 1.7). Предположим противное, пусть подграф H графа G является подразбиением K_5 или $K_{3,3}$. Из леммы 7.4 следует, что $\mathcal{C}(H)$ имеет простой базис. Очевидно, если H — подразбиение графа K , то $\mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(K)$.

Докажем, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не имеют простых базисов.

По теореме 7.1 мы имеем $\dim \mathcal{C}(K_5) = e(K_5) - v(K_5) + 1 = 6$. Предположим, что $\mathcal{C}(K_5)$ имеет простой базис C_1, \dots, C_6 . Пусть

$$C_0 = C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_6.$$

Отметим, что каждое ребро $e \in E(K_5)$ входит ровно в два из множеств C_0, C_1, \dots, C_6 . (Ребро e входит не более чем в два из множеств C_1, \dots, C_6 . Если такое множество одно, то $e \in C_0$, а если два, то $e \notin C_0$).

Так как в графе K_5 нет кратных рёбер, а степень каждой вершины в графе $G(C_i)$ четна, то $e(C_i) \geq 3$ (для всех $i \in [0..6]$). Таким образом, $21 \leq |C_0| + \dots + |C_6| = 2e(K_5) = 20$, что невозможно. Значит, K_5 не имеет простого базиса.

По теореме 7.1 мы имеем $\dim \mathcal{C}(K_{3,3}) = e(K_{3,3}) - v(K_{3,3}) + 1 = 4$. Предположим, что $\mathcal{C}(K_{3,3})$ имеет простой базис C_1, \dots, C_4 . Пусть $C_0 =$

$C_1 \triangle C_2 \triangle C_3 \triangle C_4$. Как и выше, каждое ребро $e \in E(K_{3,3})$ входит ровно в два из множеств C_0, C_1, \dots, C_4 .

Так как в графе $K_{3,3}$ нет кратных рёбер и нечетных циклов, а степень каждой вершины в графе $G(C_i)$ четна, то $e(C_i) \geq 4$ (для всех $i \in [0..4]$). Таким образом, $20 \leq |C_0| + \dots + |C_4| = 2e(K_{3,3}) = 18$, что невозможно. Значит, $K_{3,3}$ не имеет простого базиса.

Из доказанного следует, что граф G не содержит ни подразбиения K_5 , ни подразбиения $K_{3,3}$ и потому ввиду теоремы Куратовского (6.2) граф G планарен. \square

Лемма 7.5. *Пусть G — трёхсвязный планарный граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.*

Доказательство. Пусть C — неразделяющий цикл в G (даже не обязательно индуцированный). Тогда в одной из частей, на которые C делит плоскость, нет вершин графа G , то есть, C — граница одной из граней графа G .

Наоборот, пусть цикл C — граница грани D графа G . Предположим, что C содержит хорду xy . Вершины x и y делят цикл C на две дуги C_1 и C_2 . Граф $G - x - y$ должен быть связан ввиду трёхсвязности графа G , поэтому у цикла C должна быть трансверсаль P , концы которой — внутренние вершины дуг C_1 и C_2 соответственно. Понятно, что и диагональ xy , и трансверсаль P должны проходить вне грани D , но тогда они пересекаются, что невозможно.

Докажем, что граф $G - V(C)$ связан. Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни (5.2), в трёхсвязном графе G существуют три вершинно непересекающиеся uv -пути P_1, P_2 и P_3 , которые делят плоскость на три части. Грань D лежит в одной из этих частей, пусть это часть, граница которой образована путями P_2 и P_3 . Тогда путь P_1 не пересекается с границей грани D — циклом C , а значит, вершины u и v связаны в $G - V(C)$.

Таким образом, граница грани графа G является индуцированным неразделяющим циклом. \square

Теорема 7.4. (А. Kelmans, 1978.) *Трёхсвязный граф G является планарным тогда и только тогда, когда каждое его ребро лежит не более, чем на двух неразделяющих индуцированных циклах.*

Доказательство. \Rightarrow . Пусть G — трёхсвязный планарный граф. Тогда каждое его ребро принадлежит границам ровно двух граней, а границы граней графа G в точности есть все его неразделяющие индуцированные циклы по лемме 7.5.

\Leftarrow . Пусть G — трёхсвязный граф, у которого каждое ребро принадлежит не более, чем двум неразделяющим индуцированным циклам. По теореме 7.2 у циклического пространства $\mathcal{C}(G)$ существует базис из рёберных множеств неразделяющих индуцированных циклов, и такой базис, очевидно, является простым. Тогда по теореме 7.3 граф G планарен. \square

Непосредственно из доказательства теоремы 7.4 следует еще одно утверждение.

Замечание 7.3. Пусть G — трёхсвязный граф, причем каждое его ребро принадлежит не более, чем двум неразделяющим индуцированным циклам. Тогда каждое ребро графа G принадлежит ровно двум неразделяющим индуцированным циклам.

Глава 8

Оrientированные графы

Основным предметом нашего изучения будет ориентированный граф G .

8.1 Сильная связность

8.1.1 Компоненты сильной связности

Определение 8.1. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a .

Оrientированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

Легко видеть, что отношение связности вершин ориентированного графа G является отношением эквивалентности. Таким образом, множество вершин $V(G)$ оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности*. Очевидна аналогия с определением компонент связности неориентированных графов.

Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $C(G)$, вершины которого — компоненты сильной связности ориентированного графа G . Проведем в графе $C(G)$ стрелку $V_i \rightarrow V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть хотя бы одна стрелка, направленная от V_i к V_j .

Лемма 8.1. Для любого ориентированного графа G выполняются следующие утверждения.

- 1) В орграфе $C(G)$ нет циклов.
- 2) Для любой компоненты сильной связности V_i индуцированный подграф $G(V_i)$ сильно связан.

Доказательство. 1) Предположим противное, пусть в $C(G)$ есть цикл $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow V_1$. Тогда в графе G все вершины из $\cup_{i=1}^k V_i$ попарно связаны и, следовательно, входят в одну компоненту сильной связности. Противоречие.

2) Пусть $w_1, w_2 \in V_i$. Тогда существует $w_1 w_2$ -путь S и $w_2 w_1$ -путь T в графе G . Понятно, что все вершины из $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$ связаны в графе G , следовательно, $V(S) \cup V(T) \subset V_i$, то есть, вершины w_1 и w_2 связаны в $G(V_i)$. Таким образом, граф $G(V_i)$ сильно связан. \square

Определение 8.2. Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G . Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует стрелка, входящая в V_i , и существует стрелка, выходящая из V_i . В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.

Так как в $C(G)$ нет циклов, то любой путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности. Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности ориентированного графа G лежит в $C(G)$ на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

Итак, мы описали структуру компонент сильной связности ориентированного графа.

Задача 8.1. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна стрелка. Докажите, что можно добавить не более 100 новых стрелок так, чтобы этот орграф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько стрелок.)

8.1.2 Минимальные сильно связные графы

Как мы знаем, из любого связного графа G можно выделить остовное дерево (связный граф без циклов, содержащий все вершины графа G). Так как в дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро, то для “обеспечения связности” n -вершинного связного графа G достаточно оставить $n - 1$ ребро, а вот никаких $n - 2$ ребер, понятное дело, не хватит.

А как обстоит дело с аналогичным вопросом для сильно связного ориентированного графа?

Лемма 8.2. Для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

1) Существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 2$ стрелок.

2) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 3$ стрелок.

Доказательство. 1) Выберем любую вершину v графа G . Построим *исходящее дерево* вершины v . Корнем этого дерева будет сама вершина v , в первый уровень войдут вершины, в которые выходят стрелки из v , и так далее: в k -й уровень войдут не вошедшие в предыдущие уровни вершины, в которые выходят стрелки из вершин $(k - 1)$ -го уровня. Из сильной связности графа G следует, что в эти уровни войдут все вершины графа. Каждая отличная от v вершина присоединяется к дереву с помощью одной стрелки, выходящей к ней из предыдущего уровня. Аналогично построим *входящее дерево* вершины v . Понятно, что остовный подграф графа G , полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более $2n - 2$ стрелок.

2) Очевидно, в сильно связном ориентированном графе есть цикл Z . Пусть в нем k вершин. Из условия следует, что $k > 2$. Построим новый граф G' , объединив все вершины цикла Z в одну вершину z . (Все стрелки, соединяющие остальные вершины графа G с вершинами цикла Z , в новом графе будут соединять эти же вершины с z . Возможно, в графе G' появятся кратные стрелки.) Легко видеть, что граф G' на $n - k + 1$ вершинах также будет сильно связным, следовательно, по пункту 1 в нем можно оставить $2(n - k)$ стрелок, обеспечивающих его связность. В графе G к этим стрелкам мы добавим k стрелок цикла Z и получим сильно связный остов, в котором $2(n - k) + k \leq 2n - 3$ стрелок. \square

Задача 8.2. Для всех $n \geq 3$ постройте примеры орграфов, для которых оценки из факта 8.2 являются точными.

Задача 8.3. Дан оргграф G с $n \geq 4$ вершинами, в котором из каждой вершины выходит хотя бы две стрелки и любые две вершины соединены не более, чем одной стрелкой. Докажите, что существует такая стрелка $e \in A(G)$, что оргграф $G - e$ сильно связан.

8.2 Сильная k -связность

Мы определим разделяющие множества в ориентированном графе, как в обычном. В этом разделе D — оргграф.

Определение 8.3. Пусть D — оргграф, $X, Y \subset V(D)$, $R \subset V(D) \cup A(D)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если оргграф $D - R$ не является сильно связным.

2) Орграф D называется *сильно k -связным*, если он не имеет разделяющего множества, состоящего из менее чем k вершин.

3) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *отделяет* множества X от множества Y , если в орграфе $D - R$ ни для каких вершин $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ нет $v_x v_y$ -пути.

Замечание 8.1. Главное отличие разделяющих множеств в ориентированном графе от неориентированного случая в том, что множество R может отделять X от Y , но не отделять Y от X .

Для сильно k -связного графа выполняются аналог теоремы Менгера (см. раздел 5.1). Более того, у следующих теорем доказательства похожи на доказательства их неориентированных аналогов.

Теорема 8.1. Пусть $X, Y \subset V(D)$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$ и любое множество $R \subset V(G)$, отделяющее X от Y , содержит хотя бы k вершин. Тогда в орграфе D существуют k непересекающихся XY -путей.

Доказательство. Доказательство аналогично теореме 5.1. Индукция по количеству вершин в орграфе. Доказывая утверждение для орграфа D и пары множеств X, Y мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов. Рассмотрим два случая.

1. Существует множество R из k вершин, отделяющее X от Y . Тогда $X \setminus R \neq \emptyset$ и $Y \setminus R \neq \emptyset$. Отметим, что никакой XR -путь не содержит вершины из $Y \setminus R$ (иначе существовал бы XY -путь, не содержащий ни одной вершины множества R). Следовательно, любое множество S , отделяющее X от R в орграфе $D_x = D - (Y \setminus R)$, отделяет X от R и в D . Но тогда S отделяет X от Y в орграфе D , следовательно, $|S| \geq k$.

Таким образом, по индукционному предположению, существует k непересекающихся XR -путей в графе D_y , а следовательно, и в орграфе D . Аналогично, существует k непересекающихся RY -путей в орграфе D . Отметим, что никакой XR -путь не пересекает никакой RY -путь (иначе существовал бы XY -путь, не содержащий ни одной вершины множества R). Так как $|R| = k$, то мы можем состыковать XR -пути и RY -пути по вершинам множества R , получив k непересекающихся XY -путей в D .

2. Нет множества из k вершин, разделяющего X и Y . Случай, когда в D нет стрелок, очевиден. Пусть $A(D) \neq \emptyset$. Тогда удалим из графа произвольную стрелку xy . Если условие теоремы выполняется в меньшем орграфе $D - xy$, то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для $D - xy$, а следовательно, и для орграфа D .

Остается рассмотреть случай, когда существует множество $T \subset V(G)$, $|T| \leq k-1$, отделяющее X от Y в $D - xy$. Пусть $X' = X \setminus T$, $Y' = Y \setminus T$, эти

множества, очевидно, непусты и не пересекаются. Пусть $T_x = T \cup \{x\}$, $T_y = T \cup \{y\}$. Любой путь из X' в Y' в орграфе D проходит по ребру xy или по вершине множества T . Пусть $x \notin Y'$. Если $X' \neq \{x\}$, то любой путь из $X' \setminus \{x\}$ в Y' проходит через одну из вершин множества T_x , следовательно, T_x отделяет X от Y в D , противоречие с условием (множество T_x состоит не более чем из $k-1$ вершины). Значит, $X' = \{x\}$. Аналогично, $Y' = \{y\}$.

Таким образом, $T \supset X \setminus \{x\}$ и $T \supset Y \setminus \{y\}$. Учитывая $|T| \leq k-1$, $|X| \geq k$ и $|Y| \geq k$, мы получаем

$$X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T \quad \text{и} \quad |T| = k-1.$$

В этом случае легко увидеть искомые пути — это стрелка xy и $k-1$ общая вершина из $T = X \cap Y$. \square

Следствие 8.1. 1) Пусть вершины $x, y \in V(D)$, $xy \notin A(D)$ и любое множество $R \subset V(D)$, отделяющее x от y , содержит не менее чем k вершин. Тогда в D существует k путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.

2) Пусть $x \in V(D)$, $Y \subset V(D)$, $|Y| \geq k$ и любое множество $R \subset V(D)$, отделяющее x от Y , содержит не менее чем k вершин. Тогда существуют k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y .

3) Пусть $X \subset V(D)$, $y \in V(D)$, $|X| \geq k$ и любое множество $R \subset V(D)$, отделяющее X от y , содержит не менее чем k вершин. Тогда существуют k непересекающихся путей от различных вершин множества X до y .

Доказательство. 1) Любой простой xy -путь в D идёт из x в $x_1 \in N_D^+(x)$, далее в $y_1 \in N_D^-(y)$ и затем в y (возможно, вершины x_1 и y_1 совпадают). Тогда любое множество вершин R , отделяющее $N_D^+(x)$ от $N_D^-(y)$, отделяет вершину x от вершины y . Следовательно, $|R| \geq k$. Понятно, что $|N_D^+(x)| \geq k$ и $|N_D^-(y)| \geq k$. Тогда по теореме 8.1 существует k непересекающихся $N_D^+(x)N_D^-(y)$ -путей. Теперь легко найти и k непересекающихся по внутренним вершинам xy -путей.

2) Очевидно, $|N_D^+(x)| \geq k$. Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R , отделяющее $N_D^+(x)$ от Y , отделяет вершину x от множества Y . Следовательно, $|R| \geq k$. Тогда по теореме 8.1 существует k непересекающихся $N_D^+(x)Y$ -путей в орграфе D , а следовательно, и k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y .

3) Доказательство аналогично пункту 2. \square

Следствие 8.2. Пусть D — сильно k -связный орграф. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Для любых двух вершин $x, y \in V(D)$ существует k путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.
- 2) Пусть $x \in V(D)$, $Y \subset V(D)$, $|Y| \geq k$. Тогда существуют k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y .
- 3) Пусть $X \subset V(D)$, $y \in V(D)$, $|X| \geq k$. Тогда существуют k непересекающихся путей от различных вершин множества X до y .

Доказательство. 1) Индукция по k , база для $k = 1$ очевидна. Докажем утверждения для сильно k -связного орграфа, считая, что оно доказано для орграфов меньшей связности.

Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из следствия 8.1. Пусть вершины x и y смежны. Если в $D - xy$ нельзя отделить x от y множеством из $k - 2$ вершин, то по индукционному предположению существует $k - 1$ не пересекающихся по внутренним вершинам xy -путей в $D - xy$, а еще один путь — это стрелка xy .

Пусть $T \subset V(D)$ отделяет x от y в $D - xy$ и $|T| \leq k - 2$. Но T не является разделяющим множеством в D . Следовательно, в орграфе $D - T - xy$ граф компонент сильной связности — простой путь с крайними компонентами $U_x \ni x$ (из нее нет исходящих стрелок) и $U_y \ni y$. Если $U_x \neq \{x\}$, то множество $T \cup \{x\}$ является разделяющим в орграфе D (отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y). Но это множество состоит из менее чем k вершин, противоречие. Следовательно, $U_x = \{x\}$. Но тогда $d_D^+(x) \leq k - 1$ (стрелки из x могут выходить только в $T \cup \{y\}$), противоречие.

2) Добавим новую вершину y с $N_D^+(y) = N_D^-(y) = Y$. Легко понять, что полученный орграф D' сильно k -связен. По пункту 1 в нем есть k путей без общих внутренних вершин из x в y . Понятно, что перед y все эти пути проходят через Y , причем в разных точках.

3) Доказательство аналогично пункту 2. □

8.3 Турниры

Определение 8.4. Турниром, или полным ориентированным графом назовем орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

Полные ориентированные графы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

Лемма 8.3. 1) В турнире существует гамильтонов путь.

2) В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

Доказательство. 1) Существование гамильтонова пути в любом турнире несложно доказать индукцией по количеству вершин.

2) Рассмотрим в нашем турнире максимальный несамопересекающийся ориентированный цикл $a_1 a_2 \dots a_k$. Предположим, что в него вошли не все вершины графа, пусть вершина b не вошла в этот цикл. Пусть не все стрелки от b к нашему циклу ориентированы одинаково, тогда существуют последовательные вершины цикла a_i и a_{i+1} такие, что стрелки ориентированы следующим образом: $a_i \rightarrow b$ и $b \rightarrow a_{i+1}$ (см. рисунок 8.1a). Тогда несложно удлинить наш максимальный цикл, вставив вершину b между a_i и a_{i+1} , противоречие.

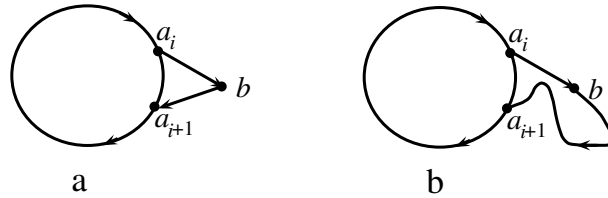


Рис. 8.1: Гамильтонов цикл в турнире.

Пусть из всех вершин цикла стрелки входят в b . По сильной связности графа существует путь S от b до цикла, пусть этот путь впервые пересекает наш цикл в вершине a_{i+1} (см. рисунок 8.1b). Тогда, опять же, несложно удлинить наш максимальный цикл, заменив стрелку $a_i \rightarrow a_{i+1}$ на стрелку $a_i \rightarrow b$ и участок пути S от b до a_{i+1} . Противоречие. Случай, когда из b выходят ребра ко всем вершинам цикла, аналогичен. \square

Как мы знаем, в любом связном графе G существует вершина, удаление которой не нарушает связности этого графа (в качестве такой вершины подойдет любая висячая вершина произвольного остовного дерева графа G). Аналогичный факт для произвольного ориентированного графа неверен, мы докажем его для турниров.

Теорема 8.2. В сильно связном турнире G с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(G)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ — сильно связные.

Доказательство. Рассмотрим в нашем графе гамильтонов цикл $a_1 a_2 \dots a_k$ (он существует по лемме 8.3, нумерация вершин — циклическая). Если для какого-то i существует ребро $a_i \rightarrow a_{i+2}$, то нетрудно понять, что граф $G - a_{i+1}$ сильно связан. Если таких ребер хотя бы два, то утверждение доказано.

Рассмотрим случай, когда существует не более, чем одно ребро вида $a_i \rightarrow a_{i+2}$. Тогда можно предположить, что $a_{i+2} \rightarrow a_i \in A(G)$ при $i \neq k$, а ориентация ребра $a_k a_{k+2} = a_k a_2$ может быть произвольной.

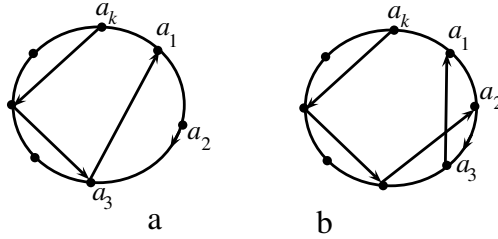


Рис. 8.2: Удаление вершины a_k с сохранением сильной связности.

Докажем, что в таком случае орграф $G - a_k$ сильно связан. Для этого достаточно показать, что существует путь из a_{k-1} в a_1 . Это несложно: по стрелкам-диагоналям гамильтонова цикла существует путь

$$a_{k-1} \rightarrow a_{k-3} \rightarrow \dots,$$

приходящий, в зависимости от четности $k-1$, в a_1 (см. рисунок 8.2a) или в a_2 (см. рисунок 8.2b). Во втором случае дополним этот путь участком $a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$. Таким образом, существует путь из a_{k-1} в a_1 , то есть, граф $G - a_k$ сильно связан. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами $a_k a_2$ и $a_k a_{k-2}$, их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что граф $G - a_{k-2}$ сильно связан. \square

Задача 8.4. а) Пусть G — турнир с n вершинами ($n \neq 3$, $n \neq 5$). Тогда в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$, что его концы соединены стрелкой $a_1 \rightarrow a_n$.

б) Найдите все турниры на 3 и 5 вершинах, для которых такого гамильтонова пути не существует.

Отметим, что на основании леммы 8.1 и того, что любые две вершины турнира соединены стрелкой можно сделать вывод, что структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой цепь $V_1 V_2 \dots V_m$, в которой для любых двух различных компонент V_i и V_j , где $i < j$, все ребра графа ориентированы от V_i к V_j .

Задача 8.5. Дан турнир G с $n \geq 7$ вершинами.

а) Докажите, что в этом турнире можно выбрать вершину v и поменять направление всех стрелок с концами в v так, чтобы получился сильно связный турнир.

б) Найдите все турниры менее, чем с 7 вершинами, для которых такой вершины нет.

8.3.1 Циклы в сильно связных турнирах

Теорема 8.3. (J. W. Moon, 1966.) Для сильно связного турнира G выполняются следующие утверждения.

- 1) Пусть $v \in V(G)$, $3 \leq k \leq v(G)$. Тогда существует простой цикл длины k , проходящий через v .
- 2) Для любого $k \in \mathbb{N}$, $3 \leq k \leq v(G)$, в орграфе G существует хотя бы $v(G) + 1 - k$ простых циклов длины k .

Доказательство. Зафиксируем k и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин графа G . При $v(G) = k$ оба утверждения следуют из пункта 2 леммы 8.3: в сильно связном турнире G есть гамильтонов цикл.

- 1) Пусть $v(G) > k$. Тогда по теореме 8.2 существует такая вершина $w \neq v$, что граф $G - w$ — сильно связный. Так как

$$3 \leq k \leq v(G) - 1 = v(G - w),$$

по индукционному предположению в турнире $G - w$ есть простой цикл длины k , проходящий через v . Этот же цикл есть и в графе G .

- 2) Пусть $v(G) > k$. Тогда по теореме 8.2 существует такая вершина w , что граф $G - w$ — сильно связный. В графе $G - w$ существует не менее $v(G - w) + 1 - k = v(G) - k$ простых циклов длины k . По пункту 1 в графе G существует простой цикл длины k , проходящий через вершину w , следовательно, в графе G не менее, чем $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k . \square

Что интересно, оценка из пункта 2 теоремы 8.3 точна и, более того, для каждого n существует сильно связный турнир, на котором достигается минимум количества простых циклов длины k для каждого $k \in [3..v(G)]$, а значит, и минимум суммарного количества циклов. Этот турнир G_n таков: пусть $V(G_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$, в графе есть ориентированный путь $P = a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$, а для любой пары индексов i, j , где $j \geq i + 2$, стрелка $a_j \rightarrow a_i \in A(G)$ (то есть, все остальные стрелки ориентированы против направления пути P). Нетрудно убедиться, что для этого турнира неравенства из теоремы 8.3 для всех возможных k обращаются в равенства.

Отметим, что вопрос о максимуме количества простых циклов длины $k > 3$ в сильно связном турнире с числом вершин более k остается открытым.

8.3.2 Гамильтоновы пути в турнирном графе

Определение 8.5. Количество гамильтоновых путей в орграфе G будем обозначать через $h(G)$.

Теорема 8.4. (L. Redei, 1934.) *Количество гамильтоновых путей в турнире нечетно.*

Доказательство. Индукция по количеству вершин графа. База для турнира на двух вершинах очевидна, докажем индукционный переход.

Введем следующие обозначения для количеств гамильтоновых путей в турнире G :

$h(G, ab)$ — это количество гамильтоновых путей, проходящих ребро ab (в том направлении, в котором оно есть в турнирном графе G);

$h(G, abc)$ — это количество гамильтоновых путей, проходящих участков $a \rightarrow b \rightarrow c$;

$h(G, |a)$ и $h(G, a|)$ — это количество гамильтоновых путей графа G , начинающихся и кончающихся в a соответственно;

$h(G, |ab)$ — количество гамильтоновых путей, начинающихся в a и проходящих по стрелке $a \rightarrow b$;

$h(G, ab|)$ — количество гамильтоновых путей, проходящих по стрелке $a \rightarrow b$ и кончающихся в b .

Докажем следующее утверждение. *Четность количества гамильтоновых путей в турнире не изменится, если поменять направление одной стрелки.*

Доказательство. Пусть турниры G и G' отличаются единственной стрелкой: $ab \in A(G)$, $ba \in A(G')$ (см. рисунок 8.3а). Отметим, что

$$h(G) - h(G') = h(G, ab) - h(G', ab) \quad (8.1)$$

и потому нам достаточно доказать четность $h(G, ab) - h(G', ab)$.

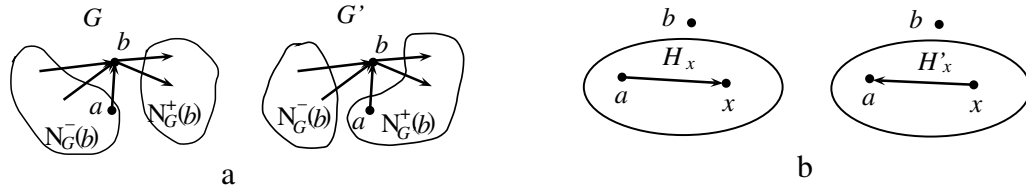


Рис. 8.3: Графы G , G' , H_x , H'_x .

Рассмотрим произвольную вершину $x \in V(G) \setminus \{a, b\}$. Введем обозначения (см. рисунок 8.3b)

H_x — это граф $G - b$, в котором, возможно, изменено направление стрелки между a и $x : ax \in A(H_x)$;

H'_x — это граф $G - b$, в котором, возможно, изменено направление стрелки между a и $x : xa \in A(H_x)$.

Как мы знаем из индукционного предположения,

$$h(H_x) \equiv h(H'_x) \equiv h(G - b) \pmod{2}.$$

Графы H_x и H'_x отличаются ориентацией одного ребра ax , граф $G - b$ совпадает с одним из графов H_x и H'_x . Следовательно,

$$h(G - b) - h(H_x) = h(G - b, ax) - h(H_x, ax) \text{ и}$$

$$h(G - b) - h(H'_x) = h(G - b, ax) - h(H'_x, ax),$$

откуда

$$h(G - b, ax) \equiv h(H_x, ax) \equiv h(H'_x, ax) \pmod{2}.$$

Теперь можно сделать вывод

$$\begin{aligned} h(G, ab) &= h(G, ab|) + \sum_{x \in N_G^+(b)} h(G, abx) = h(G - b, a|) + \sum_{x \in N_G^+(b)} h(H_x, ax) \equiv \\ &\equiv h(G - b, a|) + \sum_{x \in N_G^+(b)} h(G - b, ax) \pmod{2}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} h(G', ab) &= h(G', |ba) + \sum_{y \in N_{G'}^-(b)} h(G', yba) = h(G - b, |a) + \sum_{y \in N_{G'}^-(b)} h(H'_y, ya) \equiv \\ &\equiv h(G - b, |a) + \sum_{y \in N_{G'}^-(b)} h(G - b, ay) \pmod{2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Сложив сравнения (8.2) и (8.3) и принимая во внимание, что

$$N^+G(b) \cup N^-G'(b) = V(G) \setminus \{a, b\}$$

(см. рисунок 8.3а), получим

$$h(G, ab) + h(G', ab) \equiv h(G - b, a|) + h(G - b, |a) + \sum_{y \in V(G) \setminus \{a, b\}} h(G - b, ay) \pmod{2}. \quad (8.4)$$

Заметим, что каждый гамильтонов путь графа $G - b$ либо проходит через вершину a и в этом случае содержит две инцидентных вершине a стрелки, либо начинается или кончается в вершине a и в этом случае содержит одну инцидентную вершине a стрелку. Следовательно, правая часть сравнения (8.4) равна $2 \cdot h(G - b)$, и потому четна. Ввиду равенства (8.1) утверждение доказано. \square

Теперь просто поменяем все ребра так чтобы остался только один гамильтонов путь и получим, что в исходном турнире количество гамильтоновых путей было нечетным. \square

Определение 8.6. 1) Назовём турнир T на n вершинах *транзитивным*, если его вершины можно пронумеровать v_1, \dots, v_n так, что $v_i v_j \in A(T)$ при $i < j$.

2) Назовём турнир T на $n \geq 3$ вершинах *почти транзитивным*, если его вершины можно пронумеровать v_1, \dots, v_n так, что $v_n v_1 \in A(T)$ и $v_i v_j \in A(T)$ при $i < j$, $(i, j) \neq (1, n)$.

Отметим, что сильно связный турнир, который можно сделать транзитивным, поменяв направление ровно одной стрелки — это почти транзитивный турнир.

Итак, в любом турнире есть гамильтонов путь. Нетрудно понять, что в транзитивном турнире гамильтонов путь единственен. Казалось бы, вот он, минимум числа гамильтоновых путей в турнирах! Но посмотрим глубже: пусть турнир T не является сильно связным, $V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_k$ — его компоненты сильной связности, $T_i = T(V_i)$. Тогда, очевидно, любой гамильтонов путь турнира T должен проходить сначала все вершины из V_1 , затем — вершины из V_2 , и так далее, заканчиваясь путь будет вершинами компоненты V_k . Поэтому $h(T) = h(T_1) \dots h(T_k)$. Тем самым, интересна следующая задача: найти минимум количества гамильтоновых путей в сильно связных турнирах на n вершинах (естественно, при $n \geq 3$). Обозначим этот минимум через $h(n)$. Эта задача имеет достаточно изящное решение, которое было получено лишь в 2005 году Бушем. Отметим, что начал эти исследования Мун в 1972 году, построив серию примеров, на которых достигается оценка из теоремы 8.5.

Теорема 8.5. (А. Н. Busch, 2005.) Пусть $n \geq 3$, $\beta = \sqrt[3]{5}$.

$$h(n) = \begin{cases} \beta^{n-1} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3 \cdot \beta^{n-3} \approx 1.026 \cdot \beta^{n-1} & \text{при } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 9 \cdot \beta^{n-5} \approx 1.053 \cdot \beta^{n-1} & \text{при } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Для начала докажем несколько лемм. Первая из них очевидна.

Лемма 8.4. В нетранзитивном турнире T есть треугольник (то есть, ориентированный цикл из трёх вершин).

Доказательство. В нетранзитивном турнире есть хотя бы один цикл, пусть C — минимальный цикл турнира T . Тогда этот цикл является треугольником, иначе, рассмотрев любую его диагональ, можно найти меньший цикл. \square

Лемма 8.5. Пусть T — сильно связный турнир. Тогда либо T — почти транзитивный, либо существуют такие множества $A, B \subset V(T)$, что $|A|, |B| \geq 3$, $A \cup B = V(T)$, $A \cap B = \{w\}$, а турниры $T(A)$ и $T(B)$ — сильно связные.

Доказательство. По лемме 8.3, в турнире T есть гамильтонов цикл $Z = a_1 a_2 \dots a_n$. Нумерация вершин — циклическая, то есть $a_{i+n} = a_i$. Все не входящие в него стрелки мы назовём *диагоналями*, пусть длина диагонали $a_i a_j$ — это остаток от деления на n числа $j - i$. Рассмотрим два случая.

1. Для каждого i выполняется $a_i a_{i+2} \in A(T)$.

Тогда пусть A состоит из всех вершин с нечётными номерами, B — из a_1 и всех вершин с чётными номерами. Нетрудно видеть, что $A \cap B = \{a_1\}$, а индуцированные турниры $T(A)$ и $T(B)$ — сильно связные.

2. Существует диагональ $a_{i+2} a_i \in A(T)$.

Не умаляя общности будем считать, что $a_1 a_{n-1} \in A(T)$. Докажем, что при $1 \leq i < j \leq n-1$ диагональ $a_i a_j \in A(T)$. Пусть это не так, тогда выберем диагональ $a_x a_y \in A(T)$, где $x > y$ и $x - y$ — максимально. Понятно, что выполняется хотя бы одно из условий $x \neq n-1$ и $y \neq 1$. Пусть $x \neq n-1$ (второй случай аналогичен). Тогда $a_y a_{x+1} \in A(T)$, следовательно, для множеств $A = \{a_y, a_{y+1}, \dots, a_x\}$ и $B = \{a_{x+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_y\}$ индуцированные турниры $T(A)$ и $T(B)$ сильно связны, $A \cap B = \{a_y\}$ (см. рисунок 8.4a).

Осталось разобраться, как направлены стрелки, инцидентные a_n . Если существует такое $i \in [2..n-2]$, что $a_i a_n, a_n a_{i+1} \in A(T)$, то множества

$$A = \{a_n, a_1, \dots, a_i\}, \quad \text{и} \quad B = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n\}$$

таковы, что турниры $T(A)$ и $T(B)$ сильно связны и $A \cap B = \{a_n\}$ (см. рисунок 8.4b).

Остаётся случай, когда для некоторого $k \in [1..n-2]$ стрелки в нашем графе стрелки ориентированы таким образом:

$$a_n a_1, \dots, a_n a_k \in A(T), \quad a_{k+1} a_n, \dots, a_{n-1} a_n \in A(T).$$

При $k = n - 2$ турнир T почти транзитивен (с порядком a_n, a_1, \dots, a_{n-1}). При $k = 1$ турнир T почти транзитивен (с порядком a_1, \dots, a_{n-1}, a_n). Если же $k \in [2..n - 3]$, то $a_{k-1}a_{k+2} \in A(T)$. Следовательно, множества $A = \{a_k, a_{k+1}, a_n\}$ и $B = V(T) \setminus \{a_k, a_{k+1}\}$ таковы, что $T(A)$ и $T(B)$ сильно связны и $A \cap B = \{a_n\}$ (см. рисунок 8.4с). \square

Лемма 8.6. Пусть T_n — почти транзитивный турнир на n вершинах. Тогда $h(T_n) = 2^{n-2} + 1$.

Доказательство. Пусть $V(T_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$, причём $v_nv_1 \in A(T)$ и $v_iv_j \in A(T)$ при $i < j$, $(i, j) \neq (1, n)$. Очевидно, существует ровно один гамильтонов путь в графе T_n , не проходящий по ребру v_nv_1 .

Рассмотрим гамильтонов путь P , проходящий по ребру v_nv_1 . Тогда множество вершин $U = \{v_2, \dots, v_{n-1}\}$ можно разбить на два подмножества U_P и U'_P так, что сначала путь P обходит вершины из U_P в порядке возрастания номеров, затем идёт в вершину v_n , потом в v_1 и, наконец, обходит вершины из U'_P в порядке возрастания номеров. Таким образом, существует биекция $P \rightarrow U_P$ между гамильтоновыми путями турнира T_n , проходящими по ребру v_nv_1 и подмножествами U , а значит, количество таких путей равно 2^{n-2} . \square

Лемма 8.7. Пусть P и Q — два непересекающихся пути в турнире T . Тогда существует путь R на вершинах $V(P) \cup V(Q)$, в котором все вершины из $V(P)$ следуют в порядке пути P , а все вершины из $V(Q)$ следуют в порядке пути Q .

Доказательство. Пусть $P = u_1 \dots u_n$, $Q = v_1 \dots v_m$. Докажем лемму индукцией по m — длине пути Q . В случае, когда $m = 0$, утверждение очевидно. В случае $m = 1$ тоже несложно: если из u_1 выходят стрелки во все вершины пути P , то добавим v_1 в начало пути. Иначе найдём такое наибольшее число k , что $u_kv_1 \in A(G)$ и вставим вершину v_1 после u_k .

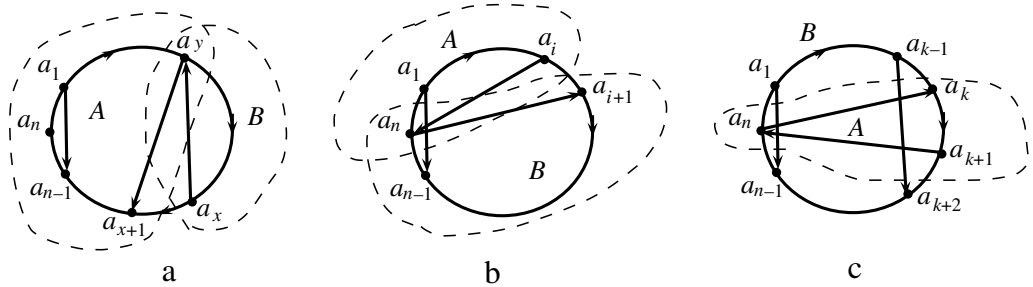


Рис. 8.4: Множества вершин A и B .

Пусть утверждение доказано для пути меньшей длины, воспользуемся им для пути P и $Q' = v_1 \dots v_{m-1}$ и построим путь R' . Если вершина v_{m-1} — конец пути R' , то поставим v_m после v_{m-1} . Пусть вершина v_{m-1} вставлена в путь R' перед вершиной u_t . Тогда воспользуемся утверждением базы для путей $P' = u_t \dots u_n$ и вершины v_m и поставим полученный путь S после вершины v_{m-1} (очевидно, это возможно). В результате вершина v_m будет вставлена в объединённый путь после вершины v_{m-1} . \square

Лемма 8.8. Пусть T — турнир на n вершинах, $A, B \subset V(T)$, $A \cup B = V(T)$, $A \cap B = \{w\}$, $|A| = k \geq 3$, $|B| = m \geq 3$. Тогда $h(T) \geq h(T(A)) \cdot h(T(B))$.

Доказательство. Рассмотрим любые гамильтоновы пути P графа $T(A)$ и Q графа $T(B)$. Эти пути, очевидно, имеют вид $P = P_1 w P_2$ и $Q = Q_1 w Q_2$ (возможно, какие-то из участков P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 — пустые). По лемме 8.7 существует путь R_1 на вершинах $V(P_1) \cup V(Q_1)$, в котором все вершины из $V(P_1)$ следуют в порядке пути P_1 , а все вершины из $V(Q_1)$ следуют в порядке пути Q_1 . Отметим, что если $V(R_1) \neq \emptyset$, то путь R_1 кончается либо последней вершиной пути P_1 , либо последней вершиной пути Q_1 . Таким образом, либо $V(R_1) = \emptyset$, либо из последней вершины пути R_1 выходит стрелка в w .

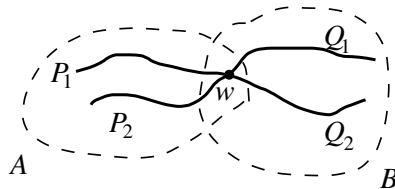


Рис. 8.5: Пути P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 .

Аналогично, существует путь R_2 на вершинах $V(P_2) \cup V(Q_2)$, в котором все вершины из $V(P_2)$ следуют в порядке пути P_2 , а все вершины из $V(Q_2)$ следуют в порядке пути Q_2 . Если $V(R_2) \neq \emptyset$, то этот путь начинается либо первой вершиной пути P_2 , либо первой вершиной пути Q_2 . Таким образом, либо $V(R_2) = \emptyset$, либо из w выходит стрелка в первую вершину пути R_2 .

Тогда $R = R_1 w R_2$ — гамильтонов путь в графе T , в котором вершины подграфа $T(A)$ следуют в порядке пути P , а вершины подграфа $T(B)$ следуют в порядке пути Q . Каждой паре гамильтоновых путей (P, Q) очевидно, соответствует свой путь R . Таким образом, неравенство пункта 1 доказано. \square

Доказательство теоремы 8.5. Пусть

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{3}{\beta^2} \approx 1.026 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{9}{\beta^4} \approx 1.053 & \text{при } n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

где, напомним, $\beta = \sqrt[3]{5}$. Нам нужно доказать, что $h(n) = c_n \beta^{n-1}$.

\geq . Докажем, что $h(n) \geq c_n \beta^{n-1}$ индукцией по количеству вершин. Базу составит случаи $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$. Нетрудно проверить, что в этих случаях $h(n) = h(T_n) = 2^{n-2} + 1$, то есть, $h(3) = 3$, $h(4) = 5$ и $h(5) = 9$, как того требует теорема.

Пусть $n \geq 6$ и T — сильно связный турнир на n вершинах. Пусть T — турнир, для которого $h(T) = h(n)$. Если $T = T_n$ — почти транзитивный турнир — то $h(T_n) = 2^{n-2} + 1$, что, как несложно проверить, больше указанных в теореме значений. Поэтому турнир T не является почти транзитивным.

Тогда по лемме 8.5 существуют такие множества $A, B \subset V(G)$, что $A \cup B = V(T)$, $A \cap B = \{w\}$, $|A| = k \geq 3$, $|B| = n + 1 - k \geq 3$, а турниры $T(A)$ и $T(B)$ — сильно связные. По лемме 8.8 мы имеем

$$h(T) \geq h(T(A)) \cdot h(T(B)) \geq h(k) \cdot h(n + 1 - k) \geq c_k c_{n+1-k} \beta^{n-1} \geq c_n \beta^{n-1}.$$

В неравенстве $c_k \cdot c_{n+1-k} \geq c_n$ несложно убедиться, перебирая различные остатки от деления на 3 числа k .

\leq . Пусть T_1, T_2, \dots, T_m — почти транзитивные турниры на (пока что) непересекающихся множествах вершин. Для каждого $i \in [1..m-1]$ мы отождествим последнюю вершину турнира T_i и первую вершину турнира T_{i+1} (вершины почти транзитивного турнира нумеруются, как в определении 8.6), назовём эту вершину w_i . Пусть w_0 — это первая вершина турнира T_1 , а w_n — последняя вершина турнира T_n . Все стрелки, не являющиеся рёбрами склеенных турниров мы ориентируем от турнира с меньшим номером к турниру с большим номером. Обозначим полученный граф за T , будем называть его *цепочкой почти транзитивных турниров* T_1, \dots, T_m . Вершину w_0 назовём *началом*, а вершину w_n — *концом* цепочки T .

Лемма 8.9. Пусть T — турнир на n вершинах, $A, B \subset V(G)$, $A \cup B = V(T)$, $A \cap B = \{w\}$. Пусть $T(A)$, $T(B)$ и T — цепочки почти транзитивных турниров. Тогда $h(T) = h(T(A)) \cdot h(T(B))$.

Доказательство. Понятно, что w — конец цепочки $T(A)$ и начало цепочки $T(B)$. Обозначим через T_A почти транзитивный турнир — последнее звено цепочки $T(A)$. Понятно, что последняя вершина T_A — это w ,

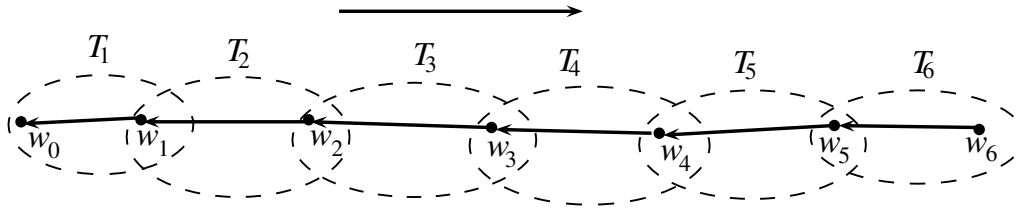
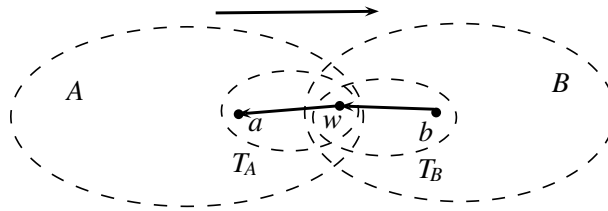


Рис. 8.6: Цепочка почти транзитивных турниров.

обозначим первую вершину T_A за a . Аналогично, пусть почти транзитивный турнир T_B — первое звено цепочки $T(B)$, пусть b — последняя вершина T_B (первой вершиной, очевидно, является w). Тогда a — единственная вершина множества A , в которую выходит стрелка из w , а b — единственная вершина множества B , из которой выходит стрелка в w (см. рисунок 8.7).

Рис. 8.7: Вершины w , a и b .

Пусть $R = R_1 w R_2$ — гамильтонов путь в графе T . Рассмотрим путь R_1 . Он не проходит по вершине w , поэтому сначала в этом пути идут вершины множества A (обозначим этот участок пути за P_1), а потом — вершины множества B (обозначим этот участок пути за Q_1). Аналогично, в пути R_2 сначала в этом пути идут вершины множества A (обозначим этот участок пути за P_2), а потом — вершины множества B (обозначим этот участок пути за Q_2). Возможно, какие-то из путей P_1, P_2, Q_1, Q_2 — пустые. Отметим, что $V(P_1) \cup V(P_2) = A \setminus \{w\}$, $V(Q_1) \cup V(Q_2) = B \setminus \{w\}$.

Итак, $R = P_1 Q_1 w P_2 Q_2$. Тогда либо $V(P_2) = \emptyset$, либо первая вершина пути P_2 — эта единственная вершина множества A , в которую выходит стрелка из w — вершина a . Мы хотим доказать, что $P_1 w P_2$ — путь, тогда он будет гамильтоновым путём в $T(A)$. Для этого остаётся доказать, что путь P_1 кончается вершиной, из которой выходит стрелка в w , то есть, что P_1 не кончается в a . Предположим, что это не так и последняя вершина пути P_1 — это a . Тогда из доказанного выше следует, что $V(P_2) = \emptyset$. Тогда P_1 — гамильтонов путь в $T(A) \setminus \{w\}$, заканчивающийся в a . Но $T_A - w$ — транзитивный турнир, поэтому из вершин непустого

множества $V(T_A) \setminus \{a, w\}$, куда гамильтонов путь P_1 обязательно должен зайти, он не сможет попасть в свой конец a . Полученное противоречие показывает, что $P = P_1 w P_2$ — гамильтонов путь в $T(A)$. Аналогично, $Q = Q_1 w Q_2$ — гамильтонов путь в $T(B)$.

Таким образом, каждому гамильтонову пути R графа T соответствует пара гамильтоновых путей (P, Q) графов $T(A)$ соответственно, причём нетрудно понять, что это соответствие — биекция: описанная в лемме 8.8 операция, наоборот, поставит в соответствие паре путей (P, Q) путь R . Тем самым, лемма доказана. \square

Вернёмся к нашей цепочке T почти транзитивных турниров T_1, \dots, T_m . Применив последовательно к склейкам турниров-звеньев цепочки в вершинах w_1, \dots, w_{m-1} лемму 8.9, мы получим равенство $h(T) = h(T_1) \cdot \dots \cdot h(T_m)$.

Теперь осталось использовать полученную формулу для построения турнира на n вершинах T , на котором достигается равенство $h(T) = h(n)$. Пусть сначала $n = 3k + 1$. Тогда пусть T — цепочка из k почти транзитивных турниров на 4 вершинах. Понятно, что $v(T) = 3k + 1 = n$, $h(T) = h(4)^k = \beta^{n-1}$.

Для $n = 3k$ пусть T — цепочка из $k - 1$ почти транзитивных турниров на 4 вершинах и одного турнира на 3 вершинах. Тогда $v(T) = 3k = n$, $h(T) = h(3) \cdot h(4)^{k-1} = c_n \beta^{n-1}$.

Для $n = 3k + 2$ пусть T — цепочка из $k - 1$ почти транзитивных турниров на 4 вершинах и одного турнира на 5 вершинах. Тогда $v(T) = 3k + 2 = n$, $h(T) = h(5) \cdot h(4)^{k-1} = c_n \beta^{n-1}$. \square

8.4 Независимые множества вершин в орграфе

Пусть G — орграф. Как и в неориентированном случае, $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном *независимом* множестве вершин графа G (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой). В этом разделе мы докажем две теоремы, связанные с независимыми множествами в орграфе.

8.4.1 Теорема Хватала-Ловаса

Теорема 8.6. (V. Chvatal, L. Lovasz, 1974.) *В любом орграфе G существует такое независимое множество $S \subset V(G)$, что для любой*

вершины $v \in V(G) \setminus S$ существует путь длины не более 2 с началом в S и концом v .

Доказательство. Доказательство будет индукцией по количеству вершин в орграфе. База при $v(G) = 1$ очевидна, докажем индукционный переход. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V(G)$. Если $V(G) = \{v\} \cup N_G^+(v)$, то утверждение теоремы очевидно, нам подходит $S = \{v\}$.

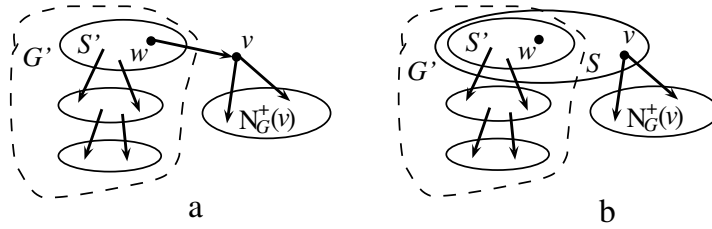


Рис. 8.8: Множества S' и S .

В противном случае для орграфа $G' = G(V(G) \setminus (\{v\} \cup N_G^+(v)))$ утверждение доказано, возьмем соответствующее этому графу независимое множество S' . Если существует такая вершина $w \in S'$, что $v \in N_G^+(w)$, то множество S' подходит и для графа G (см. рисунок 8.8a). В противном случае положим $S = S' \cup \{v\}$. Так как $S' \cap N_G^+(v) = \emptyset$, в рассматриваемом случае множество S независимо, и, очевидно, любая вершина $x \in V(G) \setminus S$ достижима из S по пути длины не более 2 (см. рисунок 8.8b). \square

Следствие 8.3. В любом турнирном графе G существует такая вершина v , что для любой вершины $w \in V(G)$ существует путь длины не более 2 с началом в v и концом w .

Утверждение является прямым следствием теоремы 8.6 ввиду того, что в полном графе не может быть независимого множества более чем из одной вершины.

8.4.2 Покрытие вершин путями

Теорема 8.7. (Т. Gallai, А. Milgram, 1960.) Вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ попарно непересекающимися путями.

Доказательство. Мы рассматриваем только простые пути (то есть, не имеющие самопересечений). Для каждого простого пути P обозначим его конец через $t(P)$.

Будем называть *покрытием* орграфа G множество из нескольких попарно непересекающихся простых путей графа G , покрывающих все его вершины. Для каждого покрытия \mathcal{P} обозначим через $T(\mathcal{P})$ множество концов всех путей из \mathcal{P} .

На множестве покрытий орграфа G мы введём отношение порядка: будем считать, что $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$, если $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$ и $T(\mathcal{P}_1) \subseteq T(\mathcal{P}_2)$.

Пусть \mathcal{P} — минимальное по введённому отношению порядка покрытие орграфа G . Тогда на каждом пути из \mathcal{P} можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин в орграфе G . Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$, $u_i = t(P_i)$. Если множество $\{u_1, \dots, u_n\}$ — независимое, то утверждение доказано. Предположим, что стрелка $u_i u_j \in A(G)$. Пусть путь Q_i получен из P_i добавлением ребра $u_i u_j$. Если $V(P_j) = \{u_j\}$, то заменой P_i и P_j на Q_i получаем строго меньшее в нашем порядке, чем \mathcal{P} , покрытие, что невозможно.

Значит, $V(P_j) \neq \{u_j\}$. Тогда рассмотрим граф $G' = G - u_j$ и его покрытие \mathcal{P}' , полученное заменой пути P_j на $P'_j = P_j - u_j$. Докажем, что \mathcal{P}' — минимальное покрытие графа G' . Если это не так, рассмотрим строго меньшее в нашем порядке покрытие \mathcal{Q}' графа G' . Пусть $u'_j = t(P'_j)$, ясно, что $u'_j u_j \in A(G)$. Отметим, что единственная вершина, которая может входить в $T(\mathcal{Q}')$ и не входит в $T(\mathcal{P})$ — это u'_j . Рассмотрим три случая.

1. *Существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с концом в u'_j .*

Пусть путь Q получен из Q' добавлением ребра $u'_j u_j$, тогда $t(Q) = u_j$. Рассмотрим покрытие \mathcal{Q} графа G , полученное из \mathcal{Q}' заменой пути Q' на Q . Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором \mathcal{P} .

2. *В покрытии \mathcal{Q}' нет пути с концом в u'_j , но существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с концом в u_i .*

Пусть путь Q получен из Q' добавлением ребра $u_i u_j$, тогда $t(Q) = u_j$. Рассмотрим покрытие \mathcal{Q} графа G , полученное из \mathcal{Q}' заменой пути Q' на Q . Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором \mathcal{P} .

3. *В покрытии \mathcal{Q}' нет ни пути с концом в u'_j , ни пути с концом в u_i .*

Тогда $|T(\mathcal{Q})'| \leq |T(\mathcal{P})| - 2$, следовательно, $|\mathcal{Q}'| \leq |\mathcal{P}| - 2$. Тогда дополним \mathcal{Q}' до покрытия \mathcal{Q} графа G , добавив путь $\{u_j\}$. И на этот раз оказывается, что $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$, противоречие.

Таким образом, \mathcal{P}' оказывается минимальным покрытием графа G' . Так как $v(G') < v(G)$, по индукционному предположению на путях по-

крытия \mathcal{P}' можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым. По построению покрытия \mathcal{P}' , выбранные вершины подходят и для покрытия \mathcal{P} графа G . \square

Теперь легко доказать теорему. Рассмотрим любое минимальное покрытие \mathcal{P} графа G . На его путях можно выбрать по вершине так, чтобы эти вершины образовывали независимое множество, следовательно, $|\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$. \square

В качестве следствия из теоремы 8.7 мы представим классическую теорему Дилворса.

Определение 8.7. Пусть V — частично упорядоченное множество с порядком $<$. Подмножество $U \subset V$ — *цепь*, если любые два его элемента сравнимы и *антицепь*, если никакие два его элемента несравнимы.

Следствие 8.4. (R. P. Dilworth, 1950.) Пусть V — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих V , равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V .

Доказательство. Построим оргграф G на элементах множества V , как на вершинах: для любых $x, y \in V$ мы положим $xy \in A(G)$ тогда и только тогда, когда $x < y$. Очевидно, $\alpha(G)$ равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V , а путь в оргграфе G проходит по вершинам цепи множества V . По теореме 8.7 вершины оргграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ путями, то есть, множество V можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ цепями. Остаётся лишь добавить, что две вершины антицепи не могут оказаться в одной цепи, поэтому покрывающих множество V цепей будет ровно $\alpha(G)$. \square

8.5 Ориентации графа и его раскраски

Определение 8.8. Пусть G — неориентированный граф. Назовем оргграф \vec{G} ориентацией графа G , если для любой стрелки $ab \in A(\vec{G})$ существует ребро $ab \in E(G)$ и, наоборот, для любого ребра $ab \in E(G)$ либо $ab \in A(\vec{G})$, либо $ba \in A(\vec{G})$.

Проще говоря, ориентация графа — оргграф, в котором каждое ребро исходного графа ориентировали.

8.5.1 Теорема Роя-Галлаи

Теорема 8.8. (В. Roy, 1967; Т. Gallai, 1968) Пусть G — неориентированный граф, \vec{G} — его ориентация. Тогда граф \vec{G} содержит путь длины не менее $\chi(G) - 1$.

Доказательство. Пусть $A \subset A(\vec{G})$ — минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф $G' = \vec{G} - A$ — ациклический. Для любого $v \in V(G)$ положим $\rho(v)$ равным длине наибольшего простого пути в графе G' с началом в v . Покажем, что ρ — правильная раскраска вершин графа G .

Пусть вершины $a, b \in V(G)$ соединены простым путём P в орграфе G' . Рассмотрим путь P_b длины $\rho(b)$ в орграфе G' . Так как G' — ациклический, то любой путь в графе G' — простой, в частности, равный объединению P и P_b путь P_a с началом в a . Так как $|P_a| > |P_b|$, то $\rho(a) > \rho(b)$.

Таким образом, мы доказали, что для концов a и b любого простого пути в орграфе G' выполняется условие $\rho(a) \neq \rho(b)$. Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in A(G)$, тогда не умаляя общности можем положить $xy \in A(G)$. Если $xy \in A(G')$, то, как доказано выше, $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Пусть $xy \notin A(G')$, тогда можно считать, что $xy \in A$. Из минимальности A следует, что в орграфе $G' + xy$ есть цикл, но тогда в орграфе G' есть путь с началом y и концом x , а следовательно, $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Мы доказали правильность раскраски ρ . Пусть k — номер наибольшего цвета в ρ . Тогда в орграфе G' (а значит, и в \vec{G}) есть простой путь длины k . Поскольку раскраска ρ красит вершины в цвета $0, 1, \dots, k$, то $\chi(G) \leq k + 1$, что и требовалось доказать. \square

Оценка из теоремы 8.8, очевидно, оптимальна: можно взять правильную раскраску графа G в $\chi(G)$ цветов и ориентировать любое ребро графа от вершины с меньшим цветом к вершине с большим цветом. Очевидно, длина максимального пути в полученной ориентации \vec{G} будет $\chi(G) - 1$, так как номера цветов вершин на любом пути строго возрастают.

Забавный факт: из теоремы Роя-Галлаи следует наличие гамильтонова пути в любом турнирном графе, так как хроматическое число полного графа равно количеству его вершин.

8.5.2 Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер

В этом разделе мы докажем с помощью ориентаций графа двудольный случай гипотезы о списочных раскрасках (см. раздел 4.8).

Определение 8.9. Пусть H — орграф. Независимое множество вершин $U \subset V(H)$ называется *ядром*, если для любой вершины $v \in V(H) \setminus U$ существует хотя бы одна стрелка $vu \in A(H)$, где $u \in U$.

Лемма 8.10. Пусть H — орграф, каждой вершине $v \in V(H)$ соответствует список цветов $L(v)$, причём $d_H^+(v) < |L(v)|$. Пусть каждый индуцированный подграф графа H имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин H в соответствии с данными списками.

Доказательство. Индукция по $v(H)$, база для пустого графа очевидна. Пусть i — цвет, присутствующий в списках, $V_i \subset V(H)$ — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет i , $H_i = H(V_i)$. По условию, граф H_i содержит ядро U_i , покрасим все вершины из U_i в цвет i (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет i из списков всех вершин из $v \in V_i \setminus U_i$ и получим новые списки $L'(v)$.

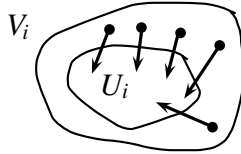


Рис. 8.9: Ядро графа H_i

Пусть $H' = H - U_i$. Поскольку U_i — ядро графа $H_i = H(V_i)$, то для любой вершины $v \in V_i \setminus U_i$ выполняется

$$d_{H'}^+(v) \leq d_H^+(v) - 1 < L(v) - 1 = L'(v),$$

следовательно, к графу H' можно применить индукционное предположение и покрасить его вершины правильным образом по спискам, в которых нет цвета i . В результате получится правильная раскраска всех вершин графа G по спискам. \square

Теорема 8.9. (F. Galvin, 1995) Для любого двудольного графа G выполняется $\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Пусть $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$, $k = \Delta(G)$. По теореме 4.8 мы имеем $\chi'(G) = k$, существует правильная раскраска ρ рёбер графа G в k цветов (пусть это цвета $1, \dots, k$). Пусть G' — *рёберный граф* двудольного графа G (вершины G' — это рёбра из $E(G)$, две вершины $e, f \in E(G)$ смежны в G' тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра имеют общий конец). Пусть каждому ребру e графа G (а значит, и

каждой вершине графа G') соответствует список $L(e)$ из k цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа G' по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу G' лемму 8.10.

Введём *множество предпочтений* (см. определения в разделе 2.4) для вершин исходного графа G . Для вершины $a \in V_1(G)$ предпочтение $<_a$ строго упорядочивает инцидентные a рёбра по возрастанию их цветов в раскраске ρ , а для вершины $b \in V_2(G)$, предпочтение $<_b$ строго упорядочивает инцидентные b рёбра по убыванию их цветов в раскраске ρ . Мы ориентируем каждое ребро ef рёберного графа G' от e к f , если для их общей вершины v имеет место $e <_v f$, тем самым получим ориентацию \vec{G}' графа G' . По построению множества предпочтений мы имеем $d_{\vec{G}'}^+(e) \leq k-1 < |L(e)|$. (Если $e = ab$, $a \in V_1(G)$, $b \in V_2(G)$ и $\rho(e) = i$, то из e могут выходить стрелки к инцидентным a рёбрам цветов $i+1, \dots, k$ и к инцидентным b рёбрам цветов $1, \dots, i-1$, всего не более $k-1$ стрелки.)

Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа \vec{H}' орграфа \vec{G}' есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой 2.5. Пусть F — множество всех рёбер графа G , соответствующих вершинам из \vec{H}' , $H = G(F)$. Для введённого выше множества приоритетов существует стабильное паросочетание M графа H . Тогда рёбра из M образуют независимое множество вершин орграфа \vec{H}' . По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации \vec{H}' , для любого ребра $f \in F \setminus M$ существует такое ребро $e \in M$ и общая вершина v рёбер e и f , что $f <_v e$, то есть, $fe \in A(\vec{H}')$. Таким образом, M — ядро \vec{H}' .

Теперь воспользуемся леммой 8.10 и получим, что существует правильная раскраска вершин графа G' (и, соответственно, рёбер графа G) по заданным спискам. Таким образом, $\text{ch}'(G) = k$. \square

8.6 Орграфы исходящей степени не менее 2

В этом разделе орграфы могут иметь две стрелки, образующие цикл длины 2.

Лемма 8.11. *Пусть G — сильно связный орграф, исходящие степени всех вершин которого не менее 2. Тогда существует такая вершина $v \in V(G)$, что $G - v$ сильно связан.*

Доказательство. Очевидно, G имеет сильно связный подграф, содержащий не все вершины (например, кратчайший цикл орграфа G не может быть гамильтоновым, так как исходящая степень любой его вершины не менее 2). Пусть H — максимальный по включению сильно связный

подграф оргграфа G , содержащий не все вершины G . Пусть $U = V(H)$, $W = V(G) \setminus U$.

Из сильной связности оргграфа G существует такой путь $P = x_1 \dots x_k$ с вершинами из W , что есть стрелка из U в x_1 и из x_n в U (возможно, $n = 1$). Тогда индуцированный подграф $G(U \cup V(P))$ сильно связан и больше, чем H , поэтому $G(U \cup V(P)) = G$. Если $n > 1$, то вспомним, что существует стрелка $x_1 y$, где $y \neq x_2$. Если $y \in U$, то оргграф $G(U \cup \{x_1\})$ — сильно связан, больше чем H и не равен G , противоречие с выбором H . Значит, $y = x_\ell$, $\ell > 2$. Тогда оргграф $G - \{x_2, \dots, x_{\ell-1}\}$ сильно связан, больше чем H и не равен G , противоречие. Значит, $n = 1$ и $H = G - x_1$ сильно связан. \square

Теорема 8.10. (С. Thomassen, 1985.) Пусть G — оргграф, исходящие степени всех вершин которого не менее 2. Тогда G содержит два цикла, имеющие ровно одну общую вершину.

Доказательство. Индукция по $v(G)$. Очевидно, $v(G) \geq 3$, база для $v(G) = 3$ очевидна. Далее мы докажем переход: при доказательстве утверждения для G считаем, что для всех меньших оргграфов оно уже доказано.

Предположим, что оргграф G не связан и рассмотрим его крайнюю компоненту сильной связности U , из которой не выходят стрелки в другую компоненту. Очевидно, в сильно связанном оргграфе $G(U)$ исходящая степень каждой вершины хотя бы 2 и для этого графа утверждение уже доказано. Далее считаем, что оргграф G сильно связан.

По лемме 8.11 существует такая вершина $x \in V(G)$, что оргграф $G - x$ сильно связан. Пусть $Y = N_G^-(x)$ — множество всех вершин, из которых выходят стрелки в x . Очевидно, $Y \neq \emptyset$. Рассмотрим два случая.

1. В оргграфе $G(Y)$ есть цикл C .

Тогда рассмотрим кратчайший путь от x до C , пусть он кончается в точке $z \in V(C)$. Этот путь мы замкнем в цикл стрелкой zx и получим два цикла, имеющие ровно одну общую вершину z (см. рисунок 8.10а).

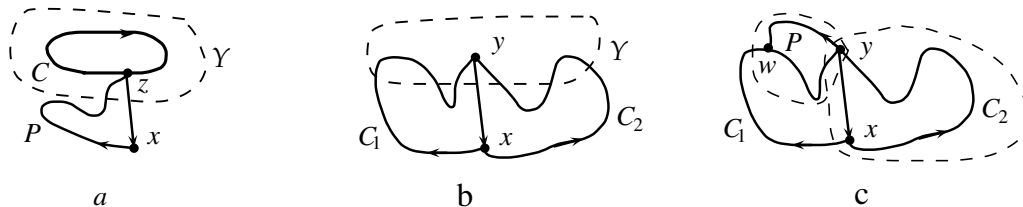


Рис. 8.10: Два цикла с одной общей вершиной.

2. Орграф $G(Y)$ ацикличесен.

Тогда существует вершина $y \in Y$, для которой $N_G^-(y) \cup Y = \emptyset$. Рассмотрим два случая.

2.1. $xy \in A(G)$.

Тогда стрелки xy и yx образуют цикл C . В сильно связном орграфе $G - x$ существует цикл C' , проходящий по вершине y . Эти два цикла нам подходят.

2.2. $xy \notin A(G)$.

Построим орграф H следующим образом: к орграфу $G - y$ добавим отсутствующие в нем стрелки множества $\{vx : v \in N_G^-(y)\}$. Так как $N_G^-(y) \cap N_G^-(x) = \emptyset$, исходящая степень каждой вершины $v \neq x$ в орграфах G и H одинакова, то есть, хотя бы два. В рассматриваемом случае $N_G^+(x) = N_H^+(x)$. Таким образом, исходящая степень каждой вершины орграфа H не менее 2 и по индукционному предположению, в нем есть два искомого цикла C'_1 и C'_2 , имеющие единственную общую вершину a .

Построим два цикла C_1 и C_2 , соответствующие C'_1 и C'_2 в орграфе G : если нам нужна стрелка $vx \notin A(G)$, то возьмем вместо него стрелки $vy \in A(G)$ и yx . Если циклы C_1 и C_2 имеют более одной общей вершины, то $a = x$ и циклы имеют две общие вершины x и y (см. рисунок 8.10b). Отметим, что стрелки обоих циклов входят в вершину y .

Орграф $G - x$ сильно связан, поэтому он содержит цикл C_3 , проходящий по y . Пусть $W = V(C_1) \cup V(C_2)$. Отметим, что стрелка, выходящая в цикле C_3 из y , не принадлежит ни одному из циклов C_1 и C_2 . Тогда пусть P — это дуга от y до следующего попадания в множество W , пусть в вершину w (см. рисунок 8.10с). Не умаляя общности будем считать, что $w \notin V(C_2) \setminus \{y\}$. Тогда P вместе с wy -участком цикла C_2 образует цикл, имеющий ровно одну общую вершину с C_1 — вершину y . \square

Следствие 8.5. Пусть G — орграф, исходящие степени всех вершин которого не менее 2. Тогда G имеет цикл длины не более $\frac{v(G)+1}{2}$.

Определим две операции на орграфах.

Определение 8.10. Пусть G — орграф.

1) *Подразбиение* стрелки — операция замены стрелки $ab \in A(G)$ на цепочку axb , где $x \notin V(G)$ — новая вершина (см. рисунок 8.11a и b).

2) *Расщепление* вершины $a \in V(G)$ — это операция замены вершины a на пару вершин a_1, a_2 . В граф добавляется стрелка a_1a_2 , все стрелки вида xa_1 , где $x \in N_G^-(a)$, и все стрелки вида a_2y , где $y \in N_G^+(a)$ (см. рисунок 8.11c и d).

Теперь определим несколько странный на первый взгляд объект, который в дальнейшем окажется очень важным.

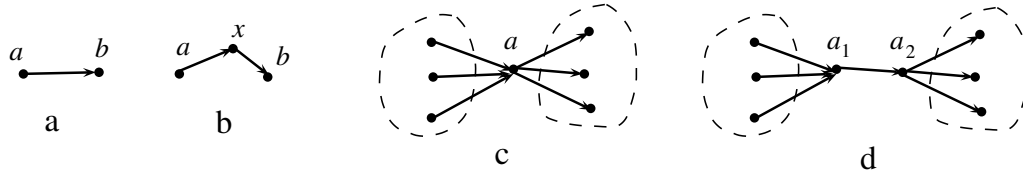


Рис. 8.11: Подразбиение стрелки и расщепление вершины.

Определение 8.11. 1) *Двойной цикл* длины k — это орграф на вершинах a_1, \dots, a_k с рёбрами вида $a_i a_{i+1}$ и $a_{i+1} a_i$ для всех $i \in [1..k]$ (нумерация — циклическая по модулю k , см. рисунок 8.12a).



Рис. 8.12: Двойной цикл и слабый двойной цикл длины 5.

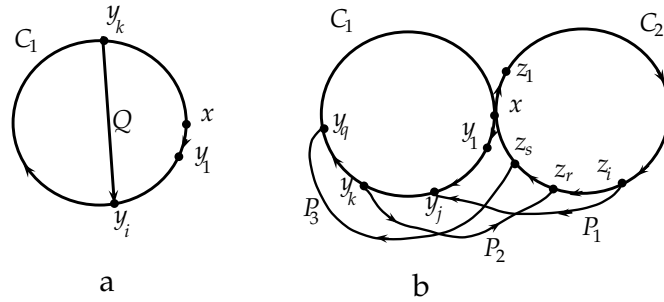
2) *Слабый двойной цикл* длины k — это орграф, полученный из двойного цикла длины k несколькими операциями подразбиения рёбер и расщепления вершин (см. рисунок 8.12b).

3) Двойной цикл и слабый двойной цикл называется *нечетным* (четным), если его длина k нечетна (четна).

Теорема 8.11. Пусть G — орграф, исходящие степени всех вершин которого не менее 2. Тогда G имеет два цикла без общих вершин или слабый двойной треугольник (цикл длины 3).

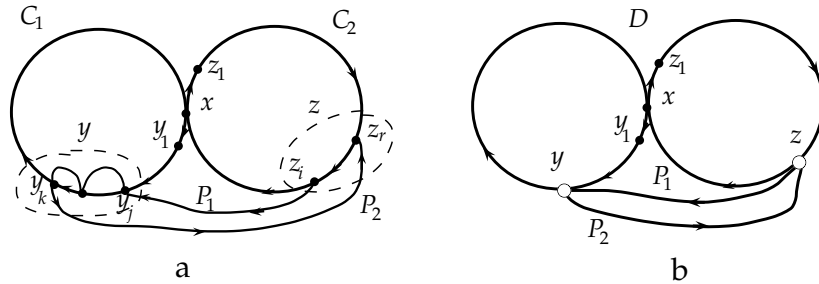
Доказательство. 1. По теореме 8.10 существуют циклы $C_1 = xy_1 \dots y_n$ и $C_2 = xz_1 \dots z_n$ с единственной общей вершиной x . Назовём *правильной* $y_k y_i$ -трансверсаль Q цикла C_1 , если $k < i$ и *неправильной* в противном случае. Аналогично для цикла C_2 . Предположим, что цикл C_1 имеет неправильную трансверсаль (см. рисунок 8.13a). Тогда эта трансверсаль вместе с дугой цикла C_1 образует цикл, непересекающийся с C_2 и утверждение теоремы выполнено. Следовательно, все трансверсали цикла C_1 — правильные, аналогично для цикла C_2 .

2. В графе $G - x$, очевидно, существует цикл C_3 . Если C_3 не пересекает хотя бы один из циклов C_1 и C_2 , то существует два непересекающихся

Рис. 8.13: Циклы C_1 , C_2 и C_3 .

цикла. Значит, C_3 пересекает оба цикла C_1 и C_2 . Тогда цикл C_3 содержит дугу P_1 , являющуюся C_2C_1 -путём (все внутренние вершины этой дуги не принадлежат циклам C_1 и C_2 , начало — z_i , а конец — y_j , см. рисунок 8.14а). Возможно, такая дуга неединственна, тогда мы выберем P_1 таким образом, чтобы номер i был наибольшим возможным среди всех таких дуг.

От точки y_j цикл C_3 должен вернуться в $V(C_2)$, тогда он содержит дугу P_2 , идущую от $y_k \in V(C_1)$ до $z_r \in V(C_2)$ (все внутренние вершины P_2 не принадлежат циклам C_1 и C_2 , вершины цикла C_3 от y_j до y_k не принадлежат циклу C_2). Тогда цикл C_3 на участке от y_j до y_k состоит из нескольких трансверселей и, возможно, стрелок цикла C_1 . По доказанному выше все трансверсели C_1 — правильные, поэтому $k > j$.

Рис. 8.14: Графы H и D .

3. Предположим, что $r < i$ (см. рисунок 8.14а). Обозначим через H орграф, состоящий из вершин и стрелок циклов C_1 и C_2 , а также путей P_1 и P_2 . Докажем, что H — слабый двойной треугольник. Заменим y_jy_k -дугу цикла C_1 на вершину y , в которую входят и выходят стрелки цикла C_1 и путей P_1 и P_2 . Аналогично, заменим z_rz_i -дугу цикла C_2 на вершину z (см. рисунок 8.14б). Назовем полученный орграф D . Отметим,

что стрелки D , входящие в y , соответствуют стрелкам H , входящим в y_j , а стрелки D , исходящие из y , соответствуют стрелкам H , исходящим из y_k . Поэтому $y_j y_k$ -путь в графе H (участок цикла C_1) может быть получен расщеплением вершины y и подразбиением полученного при этом ребра. Аналогично, $z_r z_i$ -путь в графе H (участок цикла C_2) может быть получен расщеплением вершины z и подразбиением полученного при этом ребра. Таким образом, H получается из D расщеплениями и подразбиениями. Очевидно, оргграф D является подразбиением двойного треугольника. Следовательно, H — слабый двойной треугольник.

4. Остается случай, когда $r > i$ (см. рисунок 8.13b). Пусть следующий выход цикла C_3 из $V(C_2)$ в $V(C_1)$ (он обязательно есть!) — это путь P_3 от z_s до y_q (все внутренние вершины пути не принадлежат циклам C_1 и C_2). Тогда, из-за того, что все трансверсали цикла C_2 — правильные, мы аналогично пункту 2 имеем $s > r > i$. Это противоречит выбору первого пути P_1 . \square

Следствие 8.6. Для сильно двусвязного оргграфа G выполняются следующие утверждения.

- 1) Оргграф G содержит два цикла, имеющие ровно одну общую вершину.
- 2) Оргграф G имеет цикл длины не более $\frac{v(G)+1}{2}$.
- 3) Оргграф G имеет два цикла без общих вершин или слабый двойной треугольник (цикл длины 3).

Доказательство. Очевидно, исходящая степень любой вершины двусвязного оргграфа не менее 2. Теперь утверждения напрямую следуют из доказанных выше. \square

8.7 Циклический базис оргграфа

Пусть D — оргграф, а G_D — неориентированный граф на тех же вершинах, рёбра которого — это стрелки графа D без направлений.

Определение 8.12. 1) Циклическим пространством оргграфа D (обозначение: $\mathcal{C}(D)$) называется циклическое пространство $\mathcal{C}(G_D)$ графа G_D .

2) Ориентированный циклический базис оргграфа D — это базис циклического пространства $\mathcal{C}(D)$, все элементы которого — множества (неориентированных) рёбер (ориентированных) циклов оргграфа D .

Теорема 8.12. Для сильно связного оргграфа D выполняются следующие утверждения.

- 1) D имеет ориентированный циклический базис.

2) Если множество стрелок $A \subset A(D)$ таково, что оргграф $D - A$ сильно связан, то существует такой ориентированный циклический базис оргграфа D , что каждая стрелка из A входит ровно в один из циклов, составляющих этот базис.

Доказательство. 1) Построим последовательность сильно связных оргграфов $H_0, H_1, \dots, H_n = D$, где H_0 — ориентированный цикл, а H_{j+1} получается из H_j добавлением рёбер и внутренних вершин пути P_{j+1} , соединяющего две (возможно, совпадающие) вершины графа H_j , но проходящего каждую внутреннюю вершину ровно один раз.

Очевидно, в оргграфе D есть цикл, любой такой цикл и будет графом H_0 . Пусть мы уже построили граф $H_k \neq D$, построим теперь путь P_{k+1} . Если существует стрелка не из $A(H_k)$, соединяющая две вершины из $V(H_k)$, то она и образует путь P_{k+1} . Если такой стрелки нет, то есть стрелка $ab \in E(D)$, где $a \in V(H_k)$, $b \notin V(H_k)$. Тогда ab вместе с кратчайшим путем от b до $V(H_k)$ (кратчайший путь не может иметь самопересечений) образуют искомый путь P_{k+1} . Понятно, что граф H_{k+1} , полученный присоединением к H_k пути P_{k+1} , сильно связан.

Так как граф H_k сильно связан, путь P_{k+1} можно замкнуть стрелками из $A(H_k)$ в цикл C_k . Мы докажем, что H_0, C_1, \dots, C_k образуют ориентированный циклический базис H_k . Для $k = n$ мы получим утверждение пункта 1 теоремы.

База $k = 0$ очевидна, докажем переход $k \rightarrow k + 1$. По теореме 7.1 мы знаем, что $\dim(\mathcal{C}(H)) = e(H) - v(H) + 1$ для любого связного графа H . При переходе от H_k к H_{k+1} мы добавили все внутренние вершины и все рёбра простого пути P_{k+1} , а значит, рёбер было добавлено на одно больше, чем вершин. Таким образом, $\dim(\mathcal{C}(H_{k+1})) = \dim(\mathcal{C}(H_k)) + 1$. Значит, достаточно доказать, что добавленное множество ребер $E(C_{k+1})$ не есть линейная комбинация $E(H_0), E(C_1), \dots, E(C_k)$. Но это очевидно, так как C_{k+1} содержит хотя бы одно ребро пути P_{k+1} , а этого ребра нет в $E(H_k)$.

2) Построим ориентированный циклический базис для сильно связного оргграфа $D - A$. В этом оргграфе уже есть все вершины из $V(G)$, поэтому на следующих шагах построения мы будем каждый раз добавлять путь, состоящий из одной стрелки. Пусть на i -м шаге мы добавляем стрелку $xy \in A$. Так как граф $D - A$ сильно связан, можно замкнуть эту стрелку в цикл C_i путём в $D - A$. Тогда C_i содержит ровно одну стрелку из A . Аналогично для остальных шагов. \square

8.8 Четные орграфы

Определение 8.13. Мы будем называть *взвешенным* оргграф, стрелкам которого присвоены целочисленные веса. Цикл в таком оргграфе называется *четным*, если сумма весов его стрелок четна, и *нечетным*, если сумма весов его стрелок нечетна.

Определение 8.14. Оргграф D называется *четным*, если при любом присваивании целочисленных весов его рёбрам в нем найдется четный цикл (то есть, ориентированный цикл четного суммарного веса).

Сразу же сформулируем эквивалентное определение.

Определение 8.15. Оргграф D называется четным, если любое разбиение D содержит цикл четной длины.

Главная цель этого раздела — доказательство теоремы о том, что четный оргграф содержит слабый нечетный двойной цикл. Мы начнем с доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Определение 8.16. Граф G называется *минимально рёберно двусвязным*, если он не имеет мостов, но для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ имеет мост.

Нам понадобятся некоторые факты о таких графах.

Лемма 8.12. Пусть G — минимальный рёберно двусвязный граф (возможно, с кратными рёбрами). Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Каждый блок графа G — минимальный рёберно двусвязный граф.
- 2) Если G имеет кратные рёбра между вершинами x и y , то таких рёбер ровно два и вершины x, y вместе с рёбрами между ними образуют блок.
- 3) Если $v(G) \geq 3$, граф G (вершинно) двусвязен, не имеет вершин степени 3, то G имеет не менее $\max(3, \frac{v(G)}{2} + 1)$ вершин степени 2.

Доказательство. 1) Пусть B — блок графа G . Если B состоит из двух вершин и ребра e между ними, то граф $G - e$ несвязен, противоречие. Следовательно, B двусвязен, а значит, и рёберно двусвязен.

Пусть $e \in E(B)$. Тогда существует такое $f \in E(G)$, что граф $G - \{e, f\}$ несвязен. Пусть $f \in E(B')$, $B' \neq B$. Мы показали, что каждый блок графа G двусвязен, поэтому $B - e$ и $B' - f$ связны, а следовательно, связан и граф $G - \{e, f\}$, противоречие. Значит, $f \in E(B)$, то есть, блок G — минимальный рёберно двусвязный граф.

2) Пусть между вершинами x и y хотя бы три кратных ребра, одно из них e . Все эти рёбра принадлежат некоторому блоку B . По пункту 1 тогда существует такое ребро $f \in E(B)$, что $B - \{e, f\}$ несвязен. Так как граф $B - f$ связан, вершины x и y лежат в разных компонентах связности графа $B - \{e, f\}$, что, очевидно, не так. Противоречие.

3) В графе G не менее трёх вершин. Если их три, то G — цикл, и все три его вершины имеют степень два. Если $v(G) \geq 4$, то $\frac{v(G)}{2} + 1 \geq 3$. Поэтому нам достаточно доказать, что вершин степени 2 не менее чем $\frac{v(G)}{2} + 1$.

Назовём *большой* вершину степени не менее 4, пусть в графе G ровно n больших вершин и k вершин степени 2. Нам нужно доказать, что $k \geq n + 2$. Предположим, что это не так, тогда $k \leq n + 1$. Назовём *большим* ребро, соединяющее две большие вершины, пусть в графе t больших рёбер. Назовём *малым* ребро, соединяющее две вершины степени 2, пусть в графе s малых рёбер. Посчитаем количество q рёбер, соединяющих большие вершины с вершинами степени 2. С одной стороны, $q = 2k - 2s$. С другой стороны, $q \geq 4n - 2t$. Следовательно, $n + 1 \geq k \geq 2n - t + s$, а значит, $t - s \geq n - 1$.

Докажем, что существует цикл Z , в котором не более одной вершины степени 2. Пусть B — множество всех больших вершин. В графе $G(B)$ проведено $t \geq n - 1$ рёбер на n вершинах, а значит, либо в $G(B)$ существует цикл (он нам подходит), либо $G(B)$ — дерево. Рассмотрим второй случай. Тогда $t = n - 1$, а следовательно, $s = 0$, то есть, каждая вершина степени 2 смежна с двумя большими. Добавим к $G(B)$ вершину a степени 2 и два инцидентных ей ребра и получим искомый цикл Z (проходящий по a и большим вершинам.)

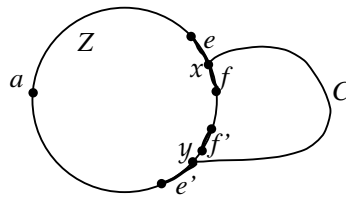


Рис. 8.15: Циклы Z и C .

Итак, цикл Z найден, отметим в нем вершину a : это вершина степени 2, если такая есть и любая вершина, если все они большие. Для каждого ребра $e \in E(Z)$ есть такое ребро e' , что $G - \{e, e'\}$ — несвязный граф. Понятно, что $e' \in E(Z)$ (иначе вершины ребра e связаны в $G - \{e, e'\}$, что невозможно). Выберем разделяющую граф G пару рёбер e, e' цикла Z так, чтобы между ними на дуге L цикла Z , не содержащей a ,

было минимальное число рёбер (см. рисунок 8.15). Пусть x — конец ребра e , лежащий на L . Из x выходит ребро, не лежащее на цикле Z . Если это ребро — не хорда цикла, то из его конца $a \notin V(Z)$ существует путь до $V(Z) \setminus \{x\}$, не проходящий через x . Таким образом, цикл Z имеет хорду или диагональ от $x \in L$ до y . Так как граф $G - \{e, e'\}$ несвязен, $y \in L$. Таким образом, мы построили цикл C , имеющий с Z общую дугу L' (часть дуги L , лежащая между x и y).

Рассмотрим ребро f дуги L' и такое ребро f' , что граф $G - \{f, f'\}$ несвязен. Так как f лежит на циклах Z и C , ребро f' также лежит на обоих этих циклах, то есть лежит на их общей дуге L' . Но количество рёбер между f и f' на дуге между ними, не содержащей a меньше, чем это количество для e и e' , противоречие.

□

Определение 8.17. Оргграф D — *эйлеров*, если у каждой его вершины одинаковы исходящая и входящая степени.

Лемма 8.13. Пусть D — *эйлеров* граф, причем неориентированный граф \underline{D} *связен*. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Оргграф D *сильно* *связен*.
- 2) Все вершины каждого блока B графа \underline{D} имеют *четную* *степень*. Более того, для каждой вершины $x \in V(B)$ поровну инцидентных x рёбер блока B , соответствующих входящим и исходящим стрелкам в D .

Доказательство. 1) Пусть это не так и W крайняя компонента сильной связности D , в которую нет входящих стрелок. Так как у каждой вершины D входящая степень равна исходящей, сумма входящих и исходящих степеней у вершин W одинакова. Стрелки оргграфа $D(W)$ вносят поровну в сумму входящих и в сумму исходящих степеней. Значит, в оргграфе D нет стрелок, входящих в W из других компонент, что противоречит связности графа \underline{D} .

2) Пронумеруем B_1, \dots, B_m блоки графа \underline{D} так, чтобы каждый блок имел общую точку сочленения не более, чем с одним блоком большего номера (это легко сделать, ранжировав дерево блоков и точек сочленения). Докажем утверждение индукцией по номеру блока. Пусть мы уже доказали утверждение для блоков с номером меньше k . Отметим в блоке B_k единственную точку сочленения a , принадлежащую блоку с большим номером (если такая есть). Пусть $x \neq a$ — вершина блока B_k . Количество инцидентных x рёбер графа \underline{D} , соответствующих стрелкам графа D , выходящим из x в $V(D) \setminus V(B_k)$ и входящим в x из $V(D) \setminus V(B_k)$ — одинаково (все такие рёбра принадлежат блокам графа \underline{D} с меньшим

номером, для которых уже доказано утверждение.) Значит, количество инцидентных x рёбер блока B , соответствующих входящим и исходящим стрелкам орграфа D , одинаково. Отсюда очевидно следует, что аналогичное утверждение верно и для a \square

8.8.1 Ориентированный циклический базис и четные циклы

Лемма 8.14. Пусть \mathcal{F} — такое конечное семейство непустых подмножеств конечного множества A , что симметрическая разность любого нечетного числа подмножеств из \mathcal{F} непуста и лежит в \mathcal{F} . Пусть $T \subset A$ — минимальное подмножество, пересекающее все подмножества из \mathcal{F} . Тогда T пересекает каждое подмножество из \mathcal{F} по нечетному числу элементов.

Доказательство. Пусть $S_0 \in \mathcal{F}$ таково, что $S_0 \cap T = \{x_1, \dots, x_{2k}\}$ содержит четное число элементов. Из минимальности T следует, что для каждого элемента x_i существует такое подмножество $S_i \in \mathcal{F}$, что $T \cap S_i = \{x_i\}$. По условию, множество

$$S = S_0 \Delta S_1 \Delta \dots \Delta S_{2k} \in \mathcal{F},$$

однако, $S \cap T = \emptyset$, противоречие. \square

Лемма 8.15. Пусть \mathcal{M} — конечное семейство непустых подмножеств конечного множества A . Тогда выполняется ровно одно из следующих двух утверждений.

1° Существует $T \subset A$ такое, что T пересекает каждое подмножество из \mathcal{M} по нечетному числу элементов.

2° Существуют такие $S_1, \dots, S_{2k+1} \in \mathcal{M}$, что $S_1 \Delta \dots \Delta S_{2k+1} = \emptyset$.

Доказательство. Пусть семейство \mathcal{F} получено из \mathcal{M} добавлением симметрических разностей любого нечетного числа подмножеств. Если $\emptyset \in \mathcal{F}$, то выполняется условие 2°. А если $\emptyset \notin \mathcal{F}$, то по лемме 8.14 выполнено условие 1°.

Если выполнено условие 1°, то заметим, что $S_1 \Delta \dots \Delta S_{2k+1}$ имеет нечетное пересечение с T и, следовательно, непусто, то есть, условие 2° не выполняется. \square

Напомним, что сумма элементов циклического пространства орграфа по определению — их симметрическая разность (то есть, сумма по модулю 2).

Лемма 8.16. Пусть D — сильно связный орграф, а \mathcal{F} — его ориентированный циклический базис. Тогда можно присвоить дугам из $A(D)$ такие веса, чтобы каждый цикл из \mathcal{F} имел нечетный суммарный вес.

Доказательство. Применим лемму 8.15 для $A = E(D)$ (множество неориентированных рёбер орграфа D) и семейства его подмножеств \mathcal{F} . Так как \mathcal{F} — базис циклического пространства, входящие в него подмножества линейно независимы, поэтому условие 2° не может быть выполнено. Следовательно, выполнено условие 1° и существует множество T , пересекающее любой цикл из \mathcal{F} по нечетному числу рёбер. Положим веса всех рёбер из T равными 1, а остальных рёбер — 0 и получим искомые веса. \square

Лемма 8.17. Пусть D — взвешенный сильно связный орграф, а \mathcal{F} — его циклический базис из нечетных циклов. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны.

- 1° Орграф D четен.
- 2° Орграф D имеет четный цикл (то есть, цикл четного веса).
- 3° Орграф D имеет цикл C , представляющийся в виде суммы четного числа слагаемых из \mathcal{F} .
- 4° Орграф D имеет такие циклы C_1, \dots, C_m , что m нечетно и

$$E(C_1) \triangle E(C_2) \triangle \dots \triangle E(C_m) = \emptyset.$$

Доказательство. Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ очевидна.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть C — четный цикл в орграфе D . Пусть $E(C)$ представляется в виде суммы m слагаемых из ориентированного циклического базиса \mathcal{F} . Так как все эти слагаемые нечетны, m четно.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Пусть цикл $E(C) = E(S_1) \triangle \dots \triangle E(S_n)$, где n — четно. Тогда C, S_1, \dots, S_n — искомые циклы.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Для любого присвоения весов стрелкам из $A(D)$ один из циклов C_1, \dots, C_m должен иметь четный вес, так как количество циклов нечетно, а сумма их весов четна. \square

8.8.2 Редукция

Определение 8.18. Пусть D — сильно связный орграф, а вершина $z \in V(D)$ такова, что $V(D-z)$ есть объединение непересекающихся множеств U_1 и U_2 , причем в $D-z$ нет стрелок из U_2 в U_1 .

Назовем (z, U_1) -редукцией орграфа D орграф, полученный из $D - U_2$ добавлением всех отсутствующих в этом орграфе рёбер множества

$$\{xz : xy \in A(D), x \in U_1, y \in U_2\}.$$

Аналогично, назовем (z, U_2) -редукцией орграфа D оргграф, полученный из $D - U_1$ добавлением всех отсутствующих в этом оргграфе рёбер множества

$$\{zy : xy \in A(D), x \in U_1, y \in U_2\}.$$

Замечание 8.2. Пусть D — сильно связный оргграф, а вершина $z \in V(D)$ такова, что $D - z$ — не сильно связный оргграф. Тогда можно построить (z, U) -редукцию D для любой крайней компоненты сильной связности U оргграфа $D - z$.

Лемма 8.18. Пусть D — сильно связный оргграф, а вершина $z \in V(D)$ такова, что $V(D - z)$ есть объединение непересекающихся множеств U_1 и U_2 , причем в $D - z$ нет стрелок из U_2 в U_1 . Предположим, что оргграф (z, U_i) -редукция оргграфа D (где $i \in \{1, 2\}$) содержит слабый двойной нечетный цикл H . Тогда D также содержит слабый двойной нечетный цикл.

Доказательство. Пусть D_i — это (z, U_i) -редукция оргграфа D . Будем считать, что $i = 1$ (случай $i = 2$ аналогичен). Пусть H не является подграфом D , иначе лемма доказана. Тогда H содержит стрелки вида xz , отсутствующие в D (таких стрелок одна или две, так как в слабом двойном нечетном цикле в каждую вершину входит не более двух стрелок). Если $xz \in A(D_1) \setminus A(D)$, то существует такая вершина $y \in U_2$, что $xy \in A(D)$. В сильно связном оргграфе D есть yz -путь P , который, очевидно, не проходит по U_1 . Тогда стрелка xy вместе с путём P образует xz -путь P_x , внутренние вершины которого лежат в U_2 . Если есть еще одна стрелка $x'z \in A(D_1) \setminus A(D)$, мы аналогично построим $x'z$ -путь $P_{x'}$ в D , внутренние вершины которого лежат в U_2 .

Если $A(D_1) \setminus A(D) = \{xz\}$, то заменим в H стрелку xz на xz -путь P_x и получим оргграф H' — подграф D — который можно получить из H несколькими подразделениями стрелок, а следовательно, H' является слабым двойным нечетным циклом, противоречие.

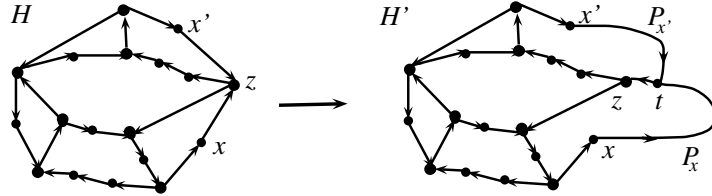


Рис. 8.16: Слабые двойные нечетные циклы H и H' .

Пусть $A(D_1) \setminus A(D) = \{xz, x'z\}$. Заменим в H стрелку xz на xz -путь P_x . Теперь определим вершину t как первое (по пути $P_{x'}$) пересечение

путей $P_{x'}$ и P_x . Пусть $Q_{x'}$ — это $x't$ -участок пути $P_{x'}$. Тогда $Q_{x'}$ не имеет общих внутренних вершин с P_x , заменим стрелку $x'z$ на путь $Q_{x'}$ (см. рисунок 8.16). Полученный оргграф H' является подграфом D и может быть получен из H расщеплением вершины z на $t \rightarrow z$ с последующим подразбиением нескольких стрелок. Следовательно, H' является слабым двойным нечетным циклом. \square

8.8.3 Основная теорема

Теорема 8.13. (С. Thomassen, 1985.) *Оргграф D четен тогда и только тогда, когда он содержит слабый двойной нечетный цикл.*

Доказательство. \Leftarrow . Достаточно доказать, что слабый двойной нечетный цикл четен. Сначала рассмотрим двойной нечетный цикл (см. рисунок 8.12a). Всего циклов нечетное число: для двойного цикла длины k их ровно $k + 2$. Отметим, что каждая его вершина входит в 4 цикла, а каждая стрелка — в два цикла.

Операции подразбиения стрелки и расщепления вершины (см. рисунок 8.11) не изменяют количество циклов. Мы докажем, что после любого количества операций подразбиения и расщепления каждая стрелка и каждая вершина входят в четное число циклов. Две стрелки и вершина, возникающие после подразбиения, входят во столько же циклов, во сколько входила исходная стрелка, то есть, в четное число.

При расщеплении вершины a на $a_1 \rightarrow a_2$ (см. рисунок 8.11b) количество циклов, в которые входят все стрелки, кроме a_1a_2 , и все вершины, кроме a_1 и a_2 — такое же, как было у соответствующих стрелок и вершин исходного графа, то есть, четное. Стрелка $a_1 \rightarrow a_2$ и вершины a_1 и a_2 входят во столько же циклов, во сколько входила вершина a , то есть, в четное число.

Итак, в слабом двойном нечетном цикле длины k нечетное число циклов (их $k + 2$), а каждая стрелка входит в четное число циклов. Следовательно, есть цикл четной длины.

\Rightarrow . Пусть D — минимальный контрпример (четный оргграф с наименьшим числом вершин и ребер, не содержащий слабого двойного нечетного цикла). Мы будем последовательно выяснять свойства оргграфа D пока, наконец, не придем к противоречию.

Сразу же заметим очевидное: оргграф D содержит хотя бы четыре вершины. Действительно, четных оргграфов менее чем на 3 вершинах нет, а единственный четный оргграф на 3 вершинах — это двойной нечетный цикл. Оргграф D является сильно связным (так как любой цикл лежит в одной компоненте сильной связности, одна из компонент сильной

связности четного орграфа должна быть четным орграфом).

1. Орграф D сильно двусвязен.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такая вершина $z \in V(D)$, что $V(D - z)$ есть объединение непересекающихся множеств U_1 и U_2 , причем в D нет стрелок из U_2 в U_1 . Пусть D_i — это (z, U_i) -редукция орграфа D .

Пусть орграф D_i (где $i \in \{1, 2\}$) четен. Из минимальности D следует, что D_i имеет слабый двойной нечетный цикл. Но тогда по лемме 8.18 и орграф D имеет слабый двойной нечетный цикл, противоречие.

Следовательно, ни один из орграфов D_1 и D_2 не является четным. Тогда присвоим стрелкам орграфов D_1 и D_2 такие веса, что нет четных циклов.

Для любой стрелки $xy \in A(D)$, где $x \in U_1$, $y \in U_2$, существует цикл в графе D , проходящий по xy . Любой такой цикл обозначим через C_{xy} . Понятно, что C_{xy} проходит по z . Присвоим стрелке xy такой вес, чтобы цикл C_{xy} был нечетен. Теперь все стрелки орграфа D имеют вес.

В полученном взвешенном орграфе D есть четный цикл C . Понятно, что C не является циклом в одном из орграфов D_1 и D_2 , а значит, должен проходить по какой-то стрелке $xy \in A(D)$, где $x \in U_1$, $y \in U_2$, а также по вершине z .

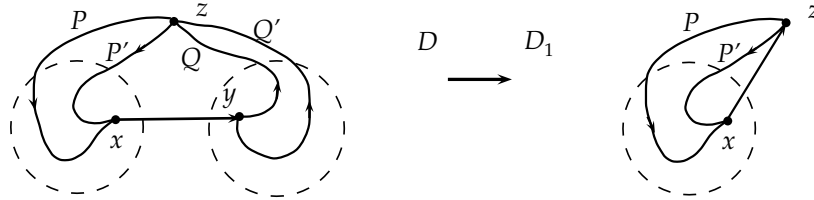


Рис. 8.17: Слабые двойные нечетные циклы H и H' .

Оба цикла C и C_{xy} проходят по стрелке xy и по вершине z , а значит, содержат zx -пути (пусть P и P' в циклах C и C_{xy} соответственно) и yz -пути (пусть Q и Q' в циклах C и C_{xy} соответственно). Циклы C и C_{xy} имеют разную четность, следовательно, либо пути P и P' , либо пути Q и Q' имеют разную четность. Пусть P и P' имеют разную четность, второй случай аналогичен. Тогда стрелка $xz \in A(D_1)$ замыкает P и P' в циклы разной четности (см. рисунок 8.17), один из этих циклов четен. Противоречие с отсутствием четных циклов в D_1 показывает, что орграф D — сильно двусвязный. \square

2. Если $A \subset A(D)$ таково, что $D - A$ — сильно связный орграф, то D содержит простой цикл, проходящий по всем стрелкам из A .

Доказательство. По теореме 8.12 оргграф D имеет такой ориентированный циклический базис \mathcal{F} , что каждая стрелка из A принадлежит ровно одному циклу из \mathcal{F} . По лемме 8.16 можно присвоить стрелкам оргграфа D такие веса, что все циклы из \mathcal{F} будут нечетны. Так как оргграф D четен, лемма 8.17 показывает, что существует четный цикл S_0 , представляющийся в виде $S_0 = S_1 \triangle \dots \triangle S_k$, где k четно и $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{F}$. Пусть D' — подграф D , заданный таким образом:

$$V(D') = \bigcup_{i=1}^k V(S_i), \quad A(D') = \bigcup_{i=1}^k A(S_i).$$

По лемме 8.17 оргграф D' четен. Разумеется, D' также как и D не может содержать слабый двойной нечетный цикл. Значит, из минимальности D следует, что $D = D'$. Это означает, что $\bigcup_{i=1}^k A(S_i) = A(D)$, следовательно, циклы S_1, \dots, S_k содержат все стрелки из A . Тогда $A(S_0) \supset A$, что и требовалось доказать. \square

3. Все вершины оргграфа D имеют входящую и исходящую степени ровно 2.

Доказательство. Из пункта 1 следует, что входящие и исходящие степени всех вершин D не менее 2. Пусть вершина z такова, что $d_D^+(z) \geq 3$, а e и e' — две исходящие из z стрелки. Из двусвязности D следует, что оргграф $D - z$ сильно связан, а значит, и $D - \{e, e'\}$ сильно связан. Тогда по пункту 3 существует простой цикл, проходящий по обоим стрелкам e и e' . Очевидно, это невозможно: e и e' выходят из одной вершины z . Аналогично разбирается случай, когда $d_D^-(z) \geq 3$. \square

4. Пусть C — такой цикл в D , что $D - A(C)$ — сильно связный оргграф. Тогда неориентированный граф $\underline{D - A(C)}$ и каждый его блок — минимальные рёберно двусвязные графы.

Доказательство. Обозначим этот граф через G . Пусть $e \in A(D) \setminus A(C)$. Если оргграф $D - A(C) - e$ сильно связан, то по пункту 2 существует простой цикл оргграфа D , содержащий $A(C) \cup \{e\}$, что, очевидно, невозможно. Значит, оргграф $D - A(C) - e$ — не сильно связный, то есть $V(D)$ есть объединение непересекающихся множеств U_1 и U_2 таких, что все стрелки из U_2 в U_1 принадлежат $A(C) \cup \{e\}$.

Так как в силу пункта 4 оргграф D эйлеров, в $A(D)$ количество стрелок из U_1 в U_2 равно количеству стрелок из U_2 в U_1 . Аналогично для стрелок цикла C . Значит, в оргграфе $D - A(C)$ поровну стрелок из U_1 в U_2 и из U_2 в U_1 . Так как $D - A(C)$ сильно связан, в этом графе есть

стрелка из U_1 в U_2 — это должна быть стрелка e . Из сказанного выше следует, что из U_1 в U_2 в $D - A(C)$ ровно одна стрелка — назовем ее e' .

Обозначим неориентированные рёбра, соответствующие стрелкам e и e' через \tilde{e} и \tilde{e}' соответственно. Для произвольно выбранного ребра \tilde{e} графа $G = \underline{D - A(C)}$ мы доказали, что граф $G - \tilde{e}$ связан, а граф $G - \{\tilde{e}, \tilde{e}'\}$ несвязен. Это означает, что граф G — минимальный реберно двусвязный.

По лемме 8.12 тогда и каждый блок графа G — минимальный реберно двусвязный граф. \square

5. Пусть D не имеет цикла длины 2. Тогда D имеет такой простой цикл C длины не более $\frac{v(D)+1}{2}$, что неориентированный граф $\underline{D - A(C)}$ двусвязен.

Доказательство. Так как орграф D двусвязен и не содержит слабого двойного треугольника, по следствию 8.6 орграф D имеет цикл длины не более $k = \frac{v(D)+1}{2}$. Тогда рассмотрим множество \mathcal{C} всех циклов длины не более k в D и выберем из них цикл Z так, чтобы выполнялись следующие два условия.

1° Один из блоков B неориентированного графа $\underline{D - A(Z)}$ имеет максимальное количество вершин (среди всех блоков для всех циклов $Z' \in \mathcal{C}$).

2° Компонента связности $U \supset V(B)$ графа $\underline{D - A(Z)}$ максимальна (среди таких компонент для всех циклов $Z' \in \mathcal{C}$).

Докажем несколько утверждений.

5.1. Граф $G = \underline{D - A(Z)}$ связан, а орграф $D - A(Z)$ сильно связан.

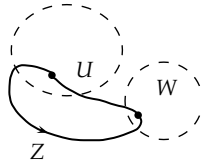


Рис. 8.18: Случай несвязного графа $\underline{D - A(Z)}$.

Доказательство. Пусть это не так и он имеет компоненту связности $W \neq U$ (см. рисунок 8.18). Из пункта 3 мы знаем, что в графе $D(W)$ исходящая и входящая степень каждой вершины орграфа $D(W)$ не менее 1, поэтому $D(W)$ имеет цикл Z' . Ввиду максимальной U мы имеем $v(Z') \leq |W| \leq \frac{v(D)+1}{2}$. Цикл Z имеет вершину и в U , и в W , поэтому в графе $\underline{D - A(Z')}$ все вершины множества $V(Z) \cup U \supsetneq U$ лежат в одной компоненте связности U' . Так как B — подграф $\underline{D - A(Z')}$, вершины которого лежат как раз в компоненте связности U' , то эта компонента

содержит блок не меньший, чем B . Это противоречит выбору цикла Z . Таким образом, G связан.

По лемме 8.13 орграф $D - A(Z)$ сильно связан. \square

5.2. Блок B имеет хотя бы три вершины степени 2.

Доказательство. Очевидно, граф $D - A(Z)$ эйлеров. По пункту 4 блок B графа $D - A(Z)$ — минимальный реберно двусвязный граф. По условию пункта 5, B имеет более двух вершин. Значит, по лемме 8.13 все вершины B имеют четную степень. По лемме 8.12 блок B имеет хотя бы 3 вершины степени 2. \square

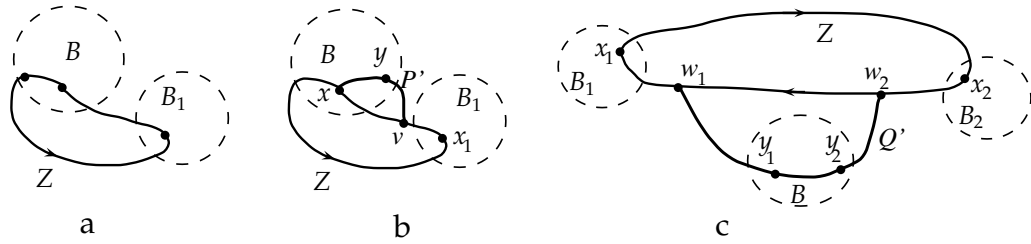
Мы хотим доказать, что $G = B$, откуда следует двусвязность G . Предположим, что это не так и рассмотрим крайний блок $B' \neq B$ графа G . Ввиду леммы 8.13 в орграфе $D(V(B'))$ есть цикл Z' . Пусть $G' = G - A(Z')$. Отметим, что ввиду двусвязности орграфа D цикл Z содержит по внутренней вершине каждого крайнего блока графа G . Кроме того, ввиду пункта 3 каждая из вершин степени 2 блока B либо является точкой сочленения графа $D - A(Z)$, либо входит в цикл Z . Мы докажем, что в графе G' есть блок, больший чем B , и получим противоречие с выбором цикла Z . Рассмотрим три случая.

а. Цикл Z содержит хотя бы две вершины блока B .

Ни одно ребро из $E(B) \cup E(Z)$ не принадлежит циклу Z' . Поэтому вершины из $V(B) \cup V(Z)$ нельзя разделить точкой сочленения в G' (см. рисунок 8.19а), а значит, есть блок K содержащий все эти вершины. В графе G есть крайний блок $B_1 \neq B$, а цикл Z содержит хотя бы одну вершину B_1 . Поэтому, $v(B) < v(K)$, что противоречит выбору цикла Z .

б. Цикл Z содержит одну вершину блока B .

Пусть это вершина x (см. рисунок 8.19б). Блок B имеет хотя бы три вершины степени 2, в нашем случае хотя бы две из них — точки сочленения графа G . Хотя бы одна из них — назовем ее y — лежит в дереве блоков и точек сочленения на пути от B до крайнего блока $B_1 \neq B'$. Пусть x_1 — внутренняя вершина блока B_1 , лежащая в $V(Z)$. Тогда существует xx_1 -путь P , проходящий через y . Пусть v — первая точка пути P (по направлению от x), принадлежащая циклу Z . Понятно, что $v \notin V(B)$. Пусть P' — это xv -участок пути P . Тогда ни одно из ребер пути P' , цикла Z и блока B не принадлежит циклу Z' , следовательно, $V(P') \cup V(B) \cup V(Z)$ невозможно разделить точкой сочленения в G' (то есть, существует блок K графа G' , содержащий все эти вершины). Блок K содержит $V(B)$ и вершину $v \notin B$, а значит, $v(K) > v(B)$, что противоречит выбору цикла Z .

Рис. 8.19: Случай несвязного графа $\underline{D - A(Z)}$.

с. Цикл Z не содержит вершин блока B .

Тогда все три вершины степени 2 блока B — это точки сочленения графа G . Хотя бы две из них — пусть это y_1 и y_2 — лежат в дереве блоков и точек сочленения на путях от B до отличных от B' крайних блоков B_1 и B_2 соответственно (см. рисунок 8.19с). Пусть x_1 и x_2 — внутренние вершины блоков B_1 и B_2 соответственно, принадлежащие циклу Z . Тогда в графе G существует путь Q от x_1 до x_2 , проходящий через блок B и содержащий точки сочленения y_1 и y_2 . Пусть w_1 — первая точка на пути Q при проходе от y_1 к x_1 , принадлежащая циклу Z , а w_2 — первая точка на пути Q при проходе от y_2 к x_2 , принадлежащая циклу Z . Понятно, что $w_1, w_2 \notin V(B)$. Пусть Q' — это $w_1 w_2$ -участок пути Q . Тогда ни одно из рёбер пути Q' , цикла Z и блока B не принадлежит циклу Z' , а значит, $V(Q') \cup V(B) \cup V(Z)$ невозможно разделить точкой сочленения в G' (то есть, существует блок K графа G' , содержащий все эти вершины). Блок K содержит $V(B)$ и вершину $w_1 \notin B$, а значит, $v(K) > v(B)$, что противоречит выбору цикла Z .

Таким образом, все случаи разобраны. Полученные противоречия показывают, что граф $\underline{D - A(Z)}$ двусвязен, то есть, цикл $Z = C$ нам подходит. \square

6. D имеет цикл длины 2.

Доказательство. Если это не так, то пункту 5 в орграфе D есть такой цикл C , что $v(C) \leq \frac{v(D)+1}{2}$ и неориентированный граф $\underline{D - A(C)}$ двусвязен. Тогда по лемме 8.13 орграф $\underline{D - A(C)}$ сильно связан (так как этот граф эйлеров). По пункту 5 граф $\underline{D - A(C)}$ — минимальный рёберно двусвязный. По лемме 8.12 граф $\underline{D - A(C)}$ имеет не менее $\frac{v(D)+2}{2}$ вершин степени 2. В силу пункта 3 все эти вершины должны принадлежать циклу C длины не более $\frac{v(D)+1}{2}$, что невозможно. Противоречие. \square

7. D — двойной цикл.

Доказательство. В силу пункта 6 оргграф D имеет цикл C длины 2, состоящий из двух стрелок между вершинами a и b . Из двусвязности оргграфа D следует сильная связность оргграфов $D - a$. Так как $d_D^+(a) = d_D^-(a)$ по пункту 3, после добавления к $D - a$ вершины a и инцидентных ей стрелок, кроме стрелок цикла C , получится сильно связный оргграф. Таким образом, оргграф $D - A(C)$ сильно связан. Так как граф \underline{D} двусвязен, граф $G = \underline{D} - A(C)$ связан и становится двусвязным при добавлении двух рёбер между a и b . Это означает, что дерево блоков и точек сочленения графа G имеет не более двух крайних блоков, то есть, является простым путем.

Рассмотрим некрайний блок B графа G . Он содержит две точки сочленения. Но все вершины степени 2 блока B — точки сочленения G , значит, их ровно две. Рассмотрим некрайний блок B' графа G . Он содержит одну точку сочленения и одну из вершин a и b , поэтому тоже имеет не более двух вершин степени 2.

Таким образом, любой блок B графа G имеет не более двух вершин степени 2. Но из пункта 4 следует, что блок B — минимальный реберно двусвязный граф. Если $v(B) > 2$, то B двусвязен и по лемме 8.12 имеет не менее трёх вершин степени 2, противоречие. Значит, каждый блок графа G состоит из двух кратных рёбер. Так как дерево блоков и точек сочленения графа G — простой путь, сам этот граф — двойной путь. Значит, \underline{D} — двойной (неориентированный) цикл. Из двусвязности G следует, что каждая пара кратных рёбер \underline{D} соответствует противоположно направленным стрелкам оргграфа D , то есть, D — двойной цикл. \square

Закончим доказательство теоремы. Предположив, что D — минимальный четный оргграф, не содержащий слабого двойного нечетного цикла, мы сделали вывод, что D — двойной цикл. Следовательно, D — четный двойной цикл. Тогда несложно расставить веса на его стрелках так, чтобы не было четного цикла. Следовательно, D не является четным графом. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

8.8.4 Условия существования слабого двойного треугольника

Лемма 8.19. Пусть оргграф D сильно двусвязен, а $v \in V(D)$ и цикл C в оргграфе $D - v$ таковы, что выполняется одно из двух условий:

- 1° Из каждой вершины цикла C выходит стрелка в v ;
- 2° Из вершины v выходят стрелки во все вершины цикла C .

Тогда D содержит слабый двойной треугольник.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1° (для условия 2° аналогично). По следствию 8.2 существует два P_1 и P_2 из v в $V(C)$, не имеющие общих вершин, кроме v . Пусть эти пути кончаются в вершинах $x_1, x_2 \in V(C)$. Тогда пути P_1, P_2 , стрелки x_1v и x_2v , а также две дуги цикла C , на которые его разбивают вершины x_1 и x_2 , образуют слабый двойной треугольник (см. рисунок 8.20а). \square

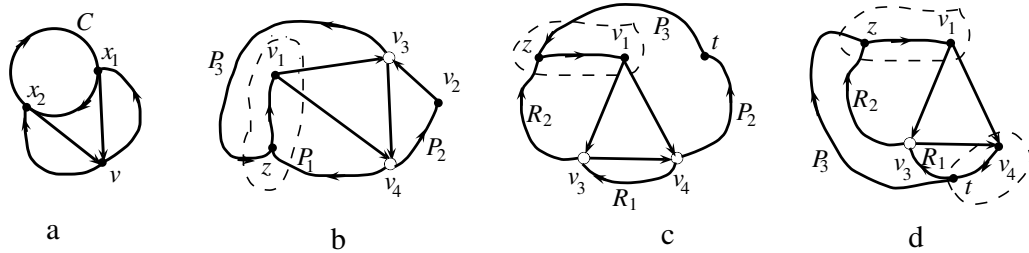


Рис. 8.20: Слабые двойные треугольники.

Лемма 8.20. Пусть орграф D сильно двусвязен, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(D)$ и выполняется одно из условий:

$1^\circ v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 \in A(D)$;

$2^\circ v_3v_1, v_4v_1, v_3v_2, v_4v_2, v_4v_3 \in A(D)$.

Тогда в D есть слабый двойной треугольник.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1° (условие 2° получается из него сменой ориентации всех стрелок). По следствию 8.2 существуют v_4v_1 -путь P_1 и v_4v_2 -путь P_2 , не имеющие общих вершин, кроме v_4 . Рассмотрим два случая.

1. $V(P_1) \cup V(P_2) \not\ni v_3$.

В графе $D - v_4$ существует путь P_3 от v_3 до $V(P_1) \cup V(P_2)$, пусть конец этого пути — вершина $z \in V(P_1)$. Тогда мы имеем слабый двойной треугольник, изображенный на рисунке 8.20b (путь из z в v_1 нужно стянуть в вершину v , после чего получится двойной треугольник на вершинах v, v_3 и v_4 , рёбра которого подразбиты).

2. $V(P_1) \cup V(P_2) \ni v_3$.

Не умаляя общности будем считать, что $V(P_1) \ni v_3$. Тогда v_3 разбивает путь P_1 на v_4v_3 -путь R_1 и v_3v_1 -путь R_2 . В графе $D - v_3$ существует путь P_3 от $V(R_1) \cup V(P_2)$ до $V(R_1)$, пусть конец этого пути — вершина $z \in V(R_1)$, а начало — вершина t . Рассмотрим два случая.

2.1. $t \in V(P_2)$.

Тогда мы имеем слабый двойной треугольник, изображенный на рисунке 8.20с (путь из z в v_1 нужно стянуть в вершину v , после чего получится двойной треугольник на вершинах v , v_3 и v_4 , рёбра которого подразбиты).

2.2. $t \in V(R_1)$.

Тогда мы имеем слабый двойной треугольник, изображенный на рисунке 8.20d (путь из z в v_1 нужно стянуть в вершину v , путь из v_4 в t нужно стянуть в вершину v' , после чего получится двойной треугольник на вершинах v , v' и v_3 , рёбра которого подразбиты). \square

Лемма 8.21. Пусть орграф D имеет вершину v исходящей степени 1, $vi \in A(D)$, $D' = D \cdot vi$. Тогда D содержит слабый двойной треугольник если и только если D_1 содержит слабый двойной треугольник.

Доказательство. Очевидно, ввиду того, что как стягивание стрелки vi с $d_D^+(v) = 1$ в вершину $w = v \cdot u$, так и обратная операция расщепления вершины w на $v \rightarrow u$ переводят слабый двойной треугольник в слабый двойной треугольник. \square

Следующая теорема — основной результат раздела.

Теорема 8.14. (С. Thomassen, 1992.) Пусть D — сильно связный орграф с $\delta^+(D) \geq 2$, удовлетворяющий следующим условиям.

1° Вершины v_1, v_2, v_3 таковы, что все остальные вершины орграфа D имеют исходящую степень хотя бы 3.

2° Для любых различных вершин $x, y \in V(G)$, где $x \neq v_1$, в графе $D - x$ существует путь от v_1 до y .

Тогда орграф D содержит слабый двойной треугольник. В частности, орграф D четен.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и рассмотрим минимальный контрпример D (сначала минимизируем число вершин, потом число стрелок.) Мы будем выяснять свойства орграфа D до тех пор, пока не придем к противоречию.

1. D сильно двусвязен.

Доказательство. Предположим, что это не так и рассмотрим такую вершину $z \in V(D)$, что орграф $D - z$ не является сильно связным. Пусть U — крайняя компонента сильной связности орграфа $D - z$, из которой не выходит стрелок. Из условия 2° следует, что $v_1 \notin U$. Пусть D' — это (z, U) -редукция орграфа D .

Для любой вершины $x \in U$ мы имеем $d_{D'}^+(x) = d_D^+(x) \geq 2$. В частности это означает, что $|U| \geq 2$ и в графе D' не более трех вершин исходящей степени менее 3 — это могут быть v_2 и v_3 (если они лежат в U) и z .

Для любой вершины $x \in U$ в орграфе $D - x$ есть путь из $V(D) \setminus U \ni v_1$ в $U \setminus \{x\}$, не проходящий через x . Значит, по построению (z, U) -редукции, в орграфе $D' - x$ есть путь из z в $U \setminus \{x\}$. Отсюда следует, что $d_{D'}^+(z) \geq 2$ и оргграф D' удовлетворяет условию теоремы с $v_1 = z$.

Теперь из минимальности оргграфа D следует, что D' содержит слабый двойной треугольник. Так как оргграф D сильно связан, по лемме 8.18 и оргграф D содержит слабый двойной треугольник, противоречие. \square

Теперь мы знаем, что оргграф D сильно двусвязен. Поэтому условие 2° выполняется для любой вершины вместо v_1 . Значит, разницы между v_1 , v_2 и v_3 нет. Мы будем считать, что исходящая степень вершины v_1 — минимальная в оргграфе D .

$$2. \quad d_D^+(v_1) = 2.$$

Доказательство. Если это не так, то $\delta^+(D) \geq 3$. Для любой вершины $z \in N_D^-(v_1)$ оргграф $D - zv_1$ удовлетворяет условиям 1° (очевидно) и 2° (это условие наследуется из оргграфа D : никакой простой v_1x -путь не проходит по ребру zv_1). Так как D — минимальный контрпример, оргграф $D - zv_1$ содержит слабый двойной треугольник, что, очевидно, невозможно. \square

Пусть $N_D^+(v_1) = \{u_1, u_2\}$. Введем обозначения

$$D_1 = (D - v_1u_2) \cdot v_1u_1, \quad u'_1 = v_1 \cdot u_1, \quad D_2 = (D - v_1u_1) \cdot v_1u_2, \quad u'_2 = v_1 \cdot u_2.$$

3. Можно выбрать обозначения так, что $\delta^+(D_1) \geq 2$.

Доказательство. Предположим, что утверждение для D_1 в исходных обозначениях не выполнено. Если $d_{D_1}^+(u'_1) \leq 1$, то выполнено условие:

(а) $d_D^+(u_1) = 2$ и $u_1v_1 \in A(D)$.

Если же $d_{D_1}^+(x_1) \leq 1$ для некоторой вершины $x_1 \neq u'_1$, то выполнено условие:

(б) существует такая вершина $x_1 \in V(D)$, что $N_D^+(x_1) = \{u_1, v_1\}$.

Все вершины исходящей степени 2 в оргграфе D — это v_1, v_2, v_3 . Рассмотрим несколько случаев в зависимости от соединения стрелками этих трех вершин. Напомним, что v_1, v_2, v_3 равноправны, их можно произвольно перенумеровывать.

3.1. $v_2v_1, v_3v_1 \notin A(D)$.

Рассмотрим оргграф D_1 (в исходной нумерации). В нашем случае в вершину v_1 не входит стрелки ни из одной вершины исходящей степени 2 в оргграфе D , а значит, ни условие (а), ни условие (b) не может быть выполнено, следовательно $\delta^+(D_1) \geq 2$.

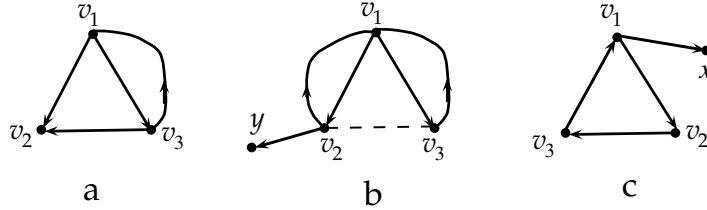


Рис. 8.21: Конфигурации пункта 3.

3.2. $v_1v_2, v_1v_3 \in A(D)$.

Рассмотрим $D' = (D - v_1v_3) \cdot v_1v_2$.

Пусть этот оргграф нам не подходит. Предположим, что выполняется условие (b). Так как единственная отличная от v_1 и v_2 вершина исходящей степени 2 — это v_3 , тогда $v_3v_2, v_3v_1 \in A(D)$ (см. рисунок 8.21a). В этом случае существует цикл из двух вершин v_1v_3 , причем $v_1v_2, v_3v_2 \in A(D)$. Тогда по лемме 8.19 оргграф D содержит слабый двойной треугольник, противоречие. Значит, выполнено условие (а), то есть, $v_2v_1 \in A(D)$. Аналогично, $v_3v_1 \in A(D)$ (см. рисунок 8.21b).

Если $v_2v_3 \in A(D)$, то применим лемму 8.19 к циклу v_1v_2 и вершине v_3 и получим, что оргграф D содержит слабый двойной треугольник, противоречие. Значит, $v_2v_3 \notin A(D)$ и, аналогично, $v_3v_2 \notin A(D)$.

Тогда существует такая вершина $y \in V(D)$, что $v_2y \in A(D)$ и $y \notin \{v_1, v_2\}$, а значит, $d_D^+(y) \geq 3$. Пусть

$$D^* = (D - v_2v_1) \cdot v_2y, \quad w = v_2 \cdot y.$$

Из $d_D^+(y) \geq 3$ следует, что $d_{D^*}^+(w) \geq 2$. Пусть $d_{D^*}^+(t) \leq 1$, где $t \neq w$. Тогда $N_D^+(t) = \{v_1, y\}$. Это означает, что $t \notin \{v_1, v_2, v_3\}$ — четвертая вершина исходящей степени 2 в оргграфе D , противоречие с условием 1°. Значит, $\delta^+(D^*) \geq 2$ и $D_1 = D^*$ нам подходит.

3.3. Ни одно из предыдущих условий не выполнено.

Рассмотрим оргграф $H = D(\{v_1, v_2, v_3\})$. Тогда $\delta^-(H) \geq 1$, иначе выполнено условие 3.2. Следовательно, в этом графе хотя бы три стрелки. Но из любой вершины выходит не более чем одна стрелка. Значит, исходящая и входящая степень каждой вершины H равна 1, откуда понятно, что этот граф — треугольник (можно считать, что $A(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$).

Пусть $N_D^+(v_1) = \{v_2, x\}$. Тогда рассмотрим орграф $D' = (D - v_1x) \cdot v_1v_2$. Поскольку $v_2v_1 \notin A(D)$ и нет вершины t исходящей степени 2 с $N^+_{D(t)=\{v_1, v_2\}}$, то $\delta^+(D') \geq 2$ и этот орграф нам подходит. \square

Итак, пусть обозначения таковы, что $\delta^+(D_1) \geq 2$. Далее мы исследуем граф D_1 . Если и $\delta^+(D_2) \geq 2$, то все доказанное далее для D_1 верно и для D_2 .

4. D_1 имеет не более трех вершин исходящей степени 2.

Доказательство. В орграфе D было не более трёх вершин исходящей степени 2: это v_1, v_2 и v_3 . Вершина v_1 исчезла. Вершины v_2 и v_3 сохранили исходящую степень (если $u_1 = v_i$, где $i \in \{2, 3\}$, то $d_{D_1}^+(u'_1) = 2$, эта вершина будет вместо v_i). Новой вершиной исходящей степени 2 в D_1 могла стать u'_1 в случае

(1) $d_D(u_1) = 3$ и $u_1v_1 \in A(D)$.

Также могла появиться новая вершина $w \neq u'_1$ исходящей степени $d_{D_1}(w) = 2$ в случае

(2) $d_D(w) = 3$ и $wu_1, wv_1 \in A(D)$.

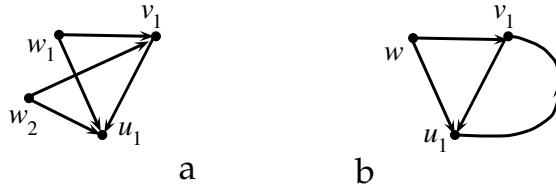


Рис. 8.22: Конфигурации пункта 4.

Если есть две вершины w_1, w_2 , удовлетворяющие условию (2), то по лемме 8.20 (ее можно применить для вершин w_1, w_2, v_1, u_1 , см. рисунок 8.22a) в орграфе D есть слабый двойной треугольник, противоречие.

Если выполнены оба условия (1) и (2), то в D существует цикл u_1v_1 и $wu_1, wv_1 \in A(D)$ (см. рисунок 8.22b). Тогда по лемме 8.19 в орграфе D есть слабый двойной треугольник, противоречие.

Следовательно, в D_2 добавилось не более одной вершины исходящей степени 2. \square

5. Орграф D_1 не содержит слабого двойного треугольника.

Доказательство. Если орграф D_1 содержит слабый двойной треугольник, то по лемме 8.21 и орграф D содержит слабый двойной треугольник, что не так. \square

Если оргграф D_1 сильно двусвязен, то для него выполняется утверждение теоремы (он меньше чем D), то есть, D_1 содержит слабый двойной треугольник, что противоречит пункту 5. Значит, оргграф D_1 не является сильно двусвязным. Рассмотрим все способы удалить вершину из D_1 так, чтобы получился не сильно связный граф, и у каждого такого графа рассмотрим все крайние компоненты, из которых не выходит стрелок. Среди всех таких компонент найдем минимальную компоненту U_1 , пусть это крайняя компонента сильной связности оргграфа $D_1 - z_1$, $W_1 = V(D_1 - z_1) \setminus U_1$.

Если $U_1 \ni u'_1$, то положим $U_1^* = (U_1 \setminus \{u'_1\}) \cup \{u_1\}$. Иначе, в силу пункта 6 мы знаем, что $u'_1 = z_1$. Тогда положим $U_1^* = U_1$. Аналогично определим U_2^* . Тогда $U_1^*, U_2^*, W_1, W_2 \subset V(D)$. По построению компонент графов D_1 и D_2 , компонент сильной связности U_1 и U_2 можно сделать следующий вывод.

6. В оргграфе D нет стрелок из U_1^* в W_1 . Стрелки оргграфа D , выходящие из множества U_1^* в $V(D) \setminus U_1^*$, могут входить в вершину z_1 и в вершину v_1 (при условии $v_1 \notin W_1$).

Доказательство. Утверждение следует из построения оргграфа D_1 и выбора компоненты сильной связности U_1 . \square

7. $u'_1 \in U_1 \cup \{z_1\}$, $u_2 \in W_1$.

Доказательство. Если $u'_1 \in W_1$, то в $D - z_1$ нет стрелок, выходящих из U_1^* , то есть, этот граф не является сильно связным. Противоречие с пунктом 1. Значит, $u'_1 \in U_1 \cup \{z_1\}$.

Пусть $u_2 \in U_1$. Если $u'_1 \neq z_1$, тогда в $D - z_1$ нет стрелок, выходящих из $U_1^* \cup \{v_1\}$, то есть, этот граф не является сильно связным. Если $u'_1 = z_1$, то в $D - u_1$ нет стрелок, выходящих из $U_1^* \cup \{v_1\}$, то есть, этот граф не является сильно связным. В обоих случаях получено противоречие с пунктом 1. \square

Отметим, что из $\delta^+(D_1) \geq 2$ и сильной связности оргграфа $D - z_1$ несложно следует, что $|U_1| \geq 3$.

8. Пусть H_1 — это (z_1, U_1) -редукция оргграфа D_1 . Тогда оргграф H_1 сильно двусвязен.

Доказательство. Очевидно, оргграф $H_1 - z_1 = D_1(U_1)$ сильно связан. Пусть $t \in U_1$. Докажем, что оргграф $H_1 - t$ сильно связан. Пусть $x \in U_1$, $x \neq t$.

Если $H_1 - t$ не сильно связан, то из x можно попасть в компоненту сильной связности U оргграфа $H_1 - t$, из которой не выходит стрелок.

Из минимальности U_1 следует, что U не является компонентой сильной связности орграфа $D_1 - t$, а значит, $z_1 \in U$. Таким образом, из вершины x в $H_1 - t$ можно попасть в z_1 .

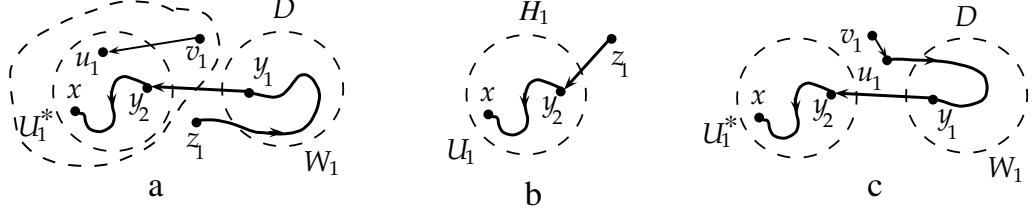


Рис. 8.23: Пути в $D - t$ и $D_1 - t$.

Остается доказать, что в $H_1 - t$ существует и z_1x -путь. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $u'_1 \notin \{t, z_1\}$.

Рассмотрим простой путь P в орграфе $D - t$ от z_1 до x (если $x \neq u'_1$) и до v_1 (если $x = u'_1$). Такой путь есть по сильной двусвязности орграфа D . Если $V(P) \subset U_1^* \cup \{v_1, z_1\}$, то искомый z_1x -путь в графе H_1 есть. Остается случай, когда P пересекает W_1 . Пусть $y_1y_2 \in A(P)$, $y_1 \in W_1$, $y_2 \in U_1^* \cup \{v_1\}$, причем это последнее такое ребро при проходе от z_1 (см. рисунок 8.23a). Тогда по построению редукции при $y_2 \notin \{u_1, v_1\}$ мы имеем $z_1y_2 \in A(H_1)$, а при $y_2 \in \{u_1, v_1\}$ мы имеем $z_1u'_1 \in A(H_1)$. Следовательно, существует z_1x -путь в $H_1 - t$ (см. рисунок 8.23b).

Если $z_1 = u'_1$, то мы строим в орграфе $D - t$ путь P от u_1 до x (см. рисунок 8.23c) и действуем аналогично.

Если $t = u'_1$, то мы строим z_1x -путь P в орграфе $D - u_1$ (см. рисунок 8.23a) и действуем аналогично. Нужно лишь добавить, что на этот раз y_2x -участок пути P не содержит v_1 (это необходимо ввиду $t = u'_1 = v_1 \cdot u_1$). Действительно, если на этом участке есть v_1 , то далее путь может следовать только по дуге v_1u_2 (напомним, что $N_D^+(v_1) = \{u_1, u_2\}$), в результате чего путь снова попадет в W_1 , противоречие с выбором стрелки y_1y_2 . В остальном рассуждения аналогичны первому случаю. \square

9. H_1 имеет хотя бы четыре вершины исходящей степени 2.

Доказательство. Предположим, что H_1 имеет не более трёх вершин исходящей степени 2. Так как H_1 меньше чем D , этот граф не может быть контрпримером к утверждению теоремы. Следовательно, H_1 имеет слабый двойной треугольник. Тогда по лемме 8.18 и орграф D_1 содержит слабый двойной треугольник, что противоречит пункту 5. \square

Какие вершины в H_1 могут иметь исходящую степень 2? По пункту 4, в орграфе D_1 таких вершин не более трех, а у любой вершины $t \neq z_1$, очевидно, $d_{H_1}^+(t) = d_{D_1}^+(t)$. Поэтому выполняется следующее утверждение.

10. $d_{H_1}^+(z_1) = 2$. В D_1 ровно три вершины исходящей степени 2 и все они лежат в U_1 (в частности, эти вершины отличны от z_1).

Как мы знаем из пункта 4, тогда

$$\begin{aligned} d_{H_1}^+(v_2) = d_{H_1}^+(v_3) = 2 & \quad \text{при} \quad u_1 \notin \{v_2, v_3\} \quad \text{и} \\ d_{H_1}^+(v_i) = d_{H_1}^+(u'_1) = 2 & \quad \text{при} \quad u_1 = v_{5-i}. \end{aligned}$$

Четвертой вершиной исходящей степени 2 в H_1 должна быть вершина, удовлетворяющая условию (1) или условию (2).

По пункту 6 нам известно, что $u_2 \in W_1$. Значит, $v_2u_2, v_3u_2 \notin A(D)$, $d_D^+(u_2) \geq 3$. Из сказанного следует, что ни одно из условий (a2) и (b2) не выполнено, поэтому $\delta^+(D_2) \geq 2$ (см. пункт 3).

Напомним, что $u'_2 = v_1 \cdot u_2$. Для орграфа D_2 аналогично определим компоненту сильной связности U_2 , вершину z_2 , множества W_2 и U_2^* , а также орграф H_2 — (z_2, U_2) -редукцию орграфа D_2 .

Все доказанное в пунктах 4 — 10 про оргграф D_1 , верно и для оргграфа D_2 . Сформулируем два из этих утверждений.

6а. В орграфе D нет стрелок из U_2^* в W_2 . Стрелки орграфа D , выходящие из множества U_2^* в $V(D) \setminus U_2^*$, могут входить только в вершину z_2 и в вершину v_1 (при условии $v_1 \notin W_2$.)

7а. $u'_2 \in U_2 \cup \{z_2\}$, $u_1 \in W_2$.

11. $u_1 \in W_2$, $v_2, v_3 \in U_2^*$.

Доказательство. По пункту 7а, $u_1 \in W_2$. По пункту 7, $u_2 \in W_1$. По пункту 10 мы имеем $v_2, v_3 \in U_1$. Значит, $u_2 \notin \{v_2, v_3\}$. Тогда по аналогу пункта 10 для графа D_2 мы имеем $v_2, v_3 \in U_2$. Остается лишь отметить, что $v_2 \neq u'_2$. \square

12. Существует такая вершина $x \in W_1 \cup \{z_1\}$, что $xv_1 \in A(D)$.

Доказательство. В орграфе H_2 должно быть хотя бы четыре вершины исходящей степени 2, а значит, аналогично доказанному выше получаем, что выполняется аналог одного из условий (1) и (2):

(1') $d_D(u_2) = 3$ и $u_2v_1 \in A(D)$;

(2') существует такая вершина $w \in V(D)$, что $w \notin \{v_1, u_2\}$, $d_D(w) = 3$ и $wu_2, wv_1 \in A(D)$.

Если выполнено условие (1'), то $x = u_2$ нам подходит (напомним, что $u_2 \in W_1$ по пункту 7). Если выполнено условие (2'), то из $u_2 \in W_1$ следует, что $w \in W_1 \cup \{z_1\}$. Тогда вершина $x = w$ нам подходит. \square

13. $z_1 \neq u'_1$ или $z_2 \neq u'_2$.

Доказательство. Предположим противное: $z_1 = u'_1$ и $z_2 = u'_2$. В пунктах 7 и 10 доказано, что $u_2 \in W_1$ и $v_2 \in U_1^*$. По пункту 6, любой $v_2 u_2$ -путь в орграфе $D - v_1$ содержит u_1 . Аналогично, любой $v_2 u_1$ -путь в орграфе $D - v_1$ содержит u_2 . Но в силу сильной двусвязности D в орграфе $D - v_1$ существует простой путь из v_2 до $\{u_1, u_2\}$, что противоречит доказанному выше. \square

Выберем нумерацию так, чтобы $z_1 \neq u'_1$. Отметим, что тогда $z_1 \in V(D)$. Однако, возможно, что $z_2 = u'_2$. Поэтому далее менять нумерацию мы не сможем.

14. Единственная стрелка орграфа D из v_1 в W_1 — это $v_1 u_2$.

Доказательство. По пункту 7 и из $u'_1 \neq z_1$ мы имеем $u'_1 = v_1 \cdot u_1 \in U_1$. Отсюда немедленно следует доказываемое утверждение. \square

15. Если $z_2 = u'_2$ или $z_2 \in W_1 \setminus \{u_2\}$, то $z_1 \in U_2^*$.

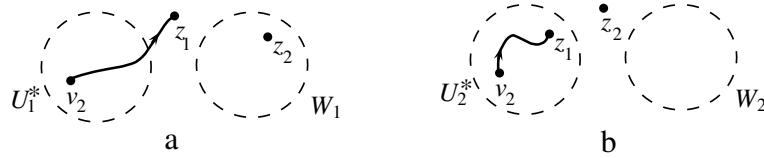


Рис. 8.24: $v_2 z_1$ -путь P .

Доказательство. Так как орграф D сильно двусвязен, в $D - v_1$ есть $v_2 z_1$ -путь P . Поскольку $v_2 \in U_1^*$, из пункта 6 следует, что путь P не может проходить по W_1 (см. рисунок 8.24а). В частности, это означает, что P не содержит вершину z_2 . По пункту 11 $v_2 \in U_2^*$, а по пункту 6а из U_2^* в орграфе D не выходит стрелок в W_2 . Следовательно, $V(P) \subset U_2^*$. В частности, конец пути P вершина $z_1 \in U_2^*$ (см. рисунок 8.24б). \square

16. Если $z_2 = u'_2$ или $z_2 \in U_1^* \cup \{z_1\}$, то $W_1 \setminus \{u_2\} \subset U_2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $z_2 = u'_2$. Пусть P — это простой путь из z_1 в произвольную вершину $x \in W_1 \setminus \{u_2\}$ в орграфе $D - u_2$ (такой путь есть так как орграф D сильно двусвязен, см. рисунок 8.25а). Путь P не может проходить по $\{u_1, v_1\}$: по пунктам 6 и 14 из $\{u_1, v_1\}$ в орграфе $D - u_2$ нельзя попасть в W_1 , не проходя через z_1 . Путь P стартует в $z_1 \in U_2^*$ (напомним, что $z_1 \in U_2^*$ по пункту 15) и не проходит ни через u_2 , ни через v_1 . Значит, $V(P) \subset U_2^*$, в частности, $x \in U_2^*$ (см. рисунок 8.25б).

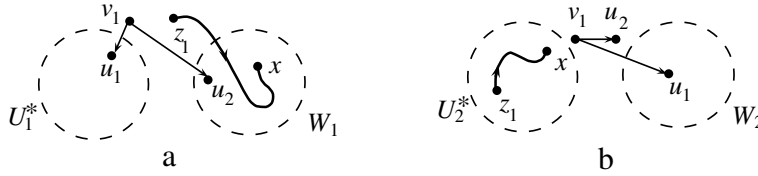


Рис. 8.25: z_1x -путь P .

Пусть $z_2 \in U_1^* \cup \{z_1\}$. Тогда в силу пункта 7а мы имеем $u'_2 \in U_2$, а значит, $u_2 \in U_2^*$. Из сильной двусвязности D следует, что для любой вершины $x \in W_1 \setminus \{u_2\}$ в $D - z_1$ существует простой u_2x -путь P (см. рисунок 8.26а). Предположим, что путь P проходит по v_1 , тогда далее он идет по стрелке v_1u_1 и попадает в U_1^* , откуда не сможет попасть в $x \in W_1$, так как не проходит по z_1 и больше не попадает в v_1 . Если P проходит по $z_2 \in U_1^*$, он также может попасть в W_2 лишь пройдя через v_1 или z_1 , что невозможно. Значит, $z_2, v_1 \notin V(P)$.

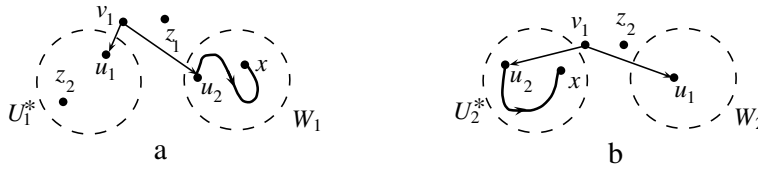


Рис. 8.26: u_2x -путь P .

Путь P начинается в вершине $u_2 \in U_2^*$ и не проходит ни по z_2 , ни по z_1 , а значит, по пункту 6а его конец $x \in U_2^*$ (см. рисунок 8.26б).

В обоих случаях мы получили, что $W_1 \setminus \{u_2\} \subset U_2^*$, то есть, утверждение доказано. \square

17. Если $z_2 \in W_1 \setminus \{u_2\}$, то $(W_1 \setminus \{z_2\}) \cup \{z_1\} \subset U_2^*$.

Доказательство. По пункту 15, $z_1 \in U_2$. По пункту 6а мы имеем $u'_2 \in U_2$. Из сильной двусвязности D следует, что для любой вершины $x \in W_1 \setminus \{u_2\}$ в $D - z_2$ существует кратчайший путь P от $\{z_1, u_2\}$ до x (см. рисунок 8.27а). Предположим, что P проходит через v_1 . Так как этот путь — простой, он не может идти по стрелке $v_1 u_2$, а значит, идет по стрелке $v_1 u_1$ и попадает в U_1^* , откуда не сможет вернуться в $x \in W_1$: по пункту 6 это можно сделать только через вершины v_1 и z_1 , что невозможно.

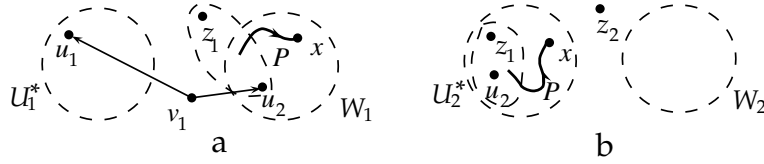


Рис. 8.27: Путь P из $\{z_1, u_2\}$ в x .

Путь P начинается в вершине из U_2^* и не проходит ни по z_2 , ни по v_1 , а значит, по пункту 6а его конец $x \in U_2^*$ (см. рисунок 8.27б). \square

18. Существует не более одной такой вершины $x \in W_1 \cup \{z_1\}$, что $xu_1 \in A(D)$. Такой вершиной может быть только одна из вершин z_2 и u_2 .

Доказательство. Вспомним, что $u_1 \in W_2$, а из U_2 в W_2 нет стрелок в орграфе D_2 .

Пусть $z_2 = u'_2$. Тогда $W_1 \cup \{z_1\} \subset U_2^*$ по пунктам 15 и 16. Значит, в этом случае возможно только $x = u_2$.

Пусть $z_2 \in W_1 \setminus \{u_2\}$. Тогда $(W_1 \setminus \{z_2\}) \cup \{z_1\} \subset U_2^*$ по пункту 17. Значит, в этом случае возможно только $x = z_2$.

Наконец, пусть $z_2 = z_1$. Вспомним, что $u'_2 \in U_2 \cup \{z_2\}$ по пункту 7а. Однако, $u'_2 \neq z_1 = z_2$ (вершина z_1 выбиралась в графе D_1 , в котором нет u'_2). Значит, $u_2 \in U_2^*$, откуда $u_2 u_1 \notin A(D)$ по пункту 6а. В этом случае возможно только $x = z_2 = z_1$. \square

По пункту 12, существует такая вершина $x \in W_1 \cup \{z_1\}$, что $xv_1 \in A(D)$. Если $x = z_1$, то $z_1 u'_1 \in A(H_1)$. Если $x \in W_1$, то по построению графа D_1 и его (z_1, U_1) -редукции мы имеем $z_1 u'_1 \in A(H_1)$. Кроме того, $d_{H_1}^+(z_1) = 2$ по пункту 10. Значит, $N_{H_1}^+(z_1) = \{u'_1, r\}$. Вершина r будет нужна нам в последующих рассуждениях.

Положим $G = D(W_1 \cup \{r, v_1, z_1\}) + rv_1 + rz_1$ (стрелки rv_1 и rz_1 добавляются, если их нет, см. рисунок 8.28a). Отметим, что из $z_1 \neq u'_1$ следует $z_1 \neq v_1$.

По построению, единственная стрелка, выходящая в G из вершины v_1 — это v_1u_2 . Пусть $G' = G \cdot v_1u_2$, $u'_2 = v_1 \cdot u_2$ (см. рисунок 8.28b).

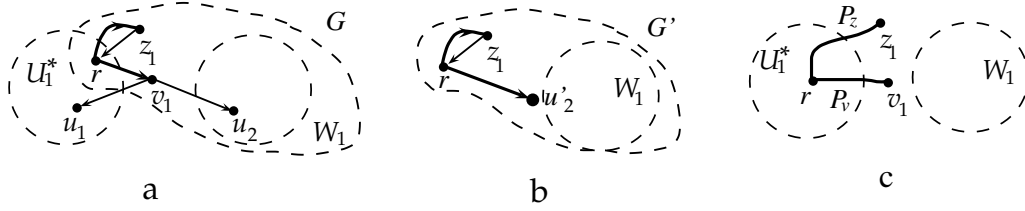


Рис. 8.28: Графы G и G' .

19. Орграф G' не содержит слабого двойного треугольника.

Доказательство. Так как орграф D сильно двусвязен, по следствию 8.2 он содержит два простых пути из r в $\{z_1, v_1\}$, не имеющие общих вершин, кроме r . Пусть это rz_1 -путь P_z и rv_1 -путь P_v (см. рисунок 8.28c).

Ометим, что $r \in U_1^*$. Следовательно, пути P_z и P_v не содержат вершин из W_1 (по пункту 6, чтобы попасть в W_1 путь в орграфе D с началом в r должен пройти через z_1 или v_1).

Тогда орграф G_1 , полученный из G заменой стрелок rv_1 и rz_1 на пути P_v и P_z соответственно, является подразбиением орграфа G и, одновременно, подграфом D .

Предположим, что G' содержит слабый двойной треугольник. Тогда по лемме 8.18 и граф G содержит слабый двойной треугольник. Но тогда и его подразбиение G_1 — подграф орграфа D — очевидно, тоже содержит слабый двойной треугольник, противоречие. \square

Мы докажем, что G' удовлетворяет условиям теоремы с вершиной r в качестве v_1 .

20. $\delta^+(G') \geq 2$. Более того, G' имеет не более трёх вершин исходящей степени 2.

Доказательство. Рассмотрим вершину $w \in V(G) \setminus \{v_1, r\}$. Предположим, что $wy \in A(D)$, где $y \in U_1^* \setminus \{v_1, u_1, r\}$. По построению (z_1, U_1) -редукции, тогда $y \in N_{H_1}^+(z_1) = \{u'_1, r\}$, противоречие. Значит, исходящая стрелка из вершины w в орграфе D , которой нет в орграфе G может

быть только одна, и это стрелка wu_1 . По пункту 16 такая вершина w может быть только одна, причем $w \in \{z_2, u_2\}$. Таким образом,

$$d_G^+(w) = d_D^+(w) - 1 \geq 2 \quad \text{и} \quad d_G^+(x) = d_D^+(x) \geq 3 \quad \text{при} \quad x \in V(G) \setminus \{v_1, r, w\}.$$

Очевидно, $d_{G'}^+(r) = 2$. Рассмотрим вершину u'_2 . Отметим, что

$$d_{G'}^+(u'_2) = d_G^+(u_2) - 1 \quad \text{при} \quad u_2v_1 \in A(D) \quad \text{и} \quad d_{G'}^+(u'_2) = d_G^+(u_2) \quad \text{при} \quad u_2v_1 \notin A(D).$$

Таким образом, $d_{G'}^+(u'_2) \leq 1$ возможно только при $u_2v_1 \in A(D)$ и $u_2 = w$, то есть, $u_2u_1 \in A(D)$. Но в этом случае в орграфе D есть цикл v_1u_2 и стрелки $v_1u_1, u_2u_1 \in A(D)$, а значит, по лемме 8.19 в D есть слабый двойной треугольник, противоречие. Следовательно, $d_{G'}^+(u_2) \geq 2$.

Так как $z_1 \neq u'_1$, мы знаем, что $d_D^+(z_1) \geq 3$.

Теперь рассмотрим вершину w , для которой $wu_1 \in A(D)$. Если $w \in W_1$, то также $d_D^+(w) \geq 3$. Тогда $d_{G'}^+(w) \leq 1$ возможно только в случае, когда $wu_1, wv_1, wu_2 \in A(D)$. Учитывая стрелки v_1u_1 и v_1u_2 , мы видим, что для u_1, u_2, v_1, w выполнено условие 2° леммы 8.20, следовательно, в орграфе D есть слабый двойной треугольник, противоречие.

Пусть $x \in V(G') \setminus \{u'_2, r, w\}$. Тогда $d_{G'}^+(x) \geq d_G^+(x) - 1 = d_D^+(x) - 1 \geq 2$. Таким образом, $\delta^+(G') \geq 2$.

Теперь посчитаем потенциальные вершины исходящей степени 2 в G' . Это точно r и, возможно, следующие варианты:

(V1) вершина w , для которой $wu_1 \in A(D)$ или вершина u'_2 при $u_2u_1 \in A(D)$;

(V2) вершина u'_2 , если $u_2v_1 \in A(D)$;

(V3) вершина y , для которой $yv_1, yu_2 \in A(D)$.

Как показано выше, вариант (V1) дает нам не более одной вершины исходящей степени 2 в G' . Если условию (V3) удовлетворяют две вершины y_1, y_2 , то по лемме 8.20 в орграфе D есть слабый двойной треугольник, что не так. Пусть существует вершина y с $yv_1, yu_2 \in A(D)$ и $u_2v_1 \in A(D)$. Тогда к циклу u_2v_1 и вершине y можно применить лемму 8.19 и опять получить слабый двойной треугольник в D , которого нет. Значит, варианты (V2) и (V3) вместе дают не более одной вершины исходящей степени 2 в G' , а всего таких вершин не более трёх. \square

21. Для любых двух отличных от r вершин $z, z' \in V(G')$ в орграфе $G' - z'$ есть rz -путь.

Доказательство. Так как $rz_1, ru'_2 \in A(G')$, будем считать, что $z \notin \{z_1, u'_2\}$. Значит, $z \in W_1$.

Рис. 8.29: Построение rz -пути в графе $G' - z'$.

Пусть

$$M = \begin{cases} \{z_1, u_2\}, & \text{если } z' \notin \{z_1, u'_2\}, \\ \{z_1\}, & \text{если } z' = u'_2, \\ \{u_2\}, & \text{если } z' = z_1. \end{cases}$$

Пусть P — кратчайший путь в орграфе $D - z'$ от M до z (см. рисунок 8.29а). Такой путь есть по сильной двусвязности D . Докажем, что $V(P) \subset W_1$. Сразу же отметим, что ни одна вершина пути P , кроме его начала, не входит в множество $\{z_1, u_2\}$ (так как $\{z_1, u_2\} \subset M \cup \{z'\}$).

Пусть P проходит по v_1 . Тогда далее он идет по стрелке $v_1 u_1$ и оказывается в U_1^* . В силу пункта 6а из U_1^* путь P может пройти в W_1 только через $\{z_1, v_1\}$, но он не может попасть ни в z_1 , ни второй раз в v_1 , противоречие. Значит, $v_1 \notin V(P)$. Если же P содержит вершину из U_1^* , то вернуться из U_1^* в W_1 он сможет только пройдя через $\{v_1, z_1\}$, что, как показано выше, невозможно.

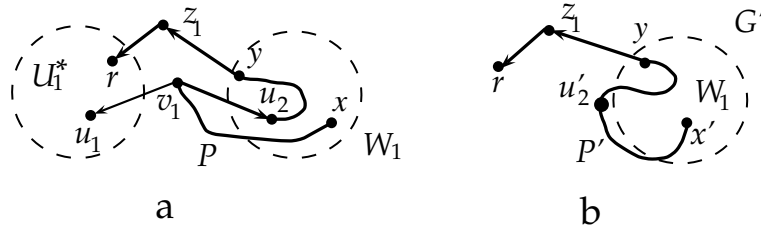
Значит, $V(P) \subset W_1$ и одно из ребер ru'_2 и rz_1 вместе с P образует искомый rz -путь в G' (см. рисунок 8.29b). \square

22. G' сильно связан.

Доказательство. Так как из r можно попасть в любую вершину G' и $z_2 r \in A(G')$, осталось показать, что из любой вершины $x' \in (W_1 \setminus \{u_2\}) \cup \{u'_2\}$ можно попасть в r .

Пусть $x = x'$, если $x' \neq u'_2$ и $x = u_2$, если $x' = u'_2$. Из сильной двусвязности орграфа D следует, что в $D - u_1$ существует xr -путь P (см. рисунок 8.30а). На этом пути есть стрелка yy' , где $y \in W_1 \cup \{v_1\}$, $y' \in U_1^* \cup \{z_1\}$. Так как $u_1 \notin V(P)$ и $N_D^+(v_1) = \{u_1, u_2\}$, можно сделать вывод $y \neq v_1$. Более того, если $v_1 \in V(P)$, то из v_1 путь P идет в вершину u_2 .

Тогда можно построить в орграфе G' путь P' от x' до y , заменив вхождение вершины u_2 или последовательное вхождение вершин $v_1 u_2$ на вершину u'_2 (см. рисунок 8.30b). Если $y' = z_1$, то мы дополним путь P' участком $yz_1 r$ до искомого пути в G' .

Рис. 8.30: Построение xr -пути в графе G' .

Пусть $y' \neq z_1$. Тогда по построению орграфа D_1 и его (z_1, U_1) редукции H_1 можно сделать вывод $z_1 y' \in A(H_1)$, следовательно, $y' = r$ и мы дополним путь P' ребром yr до искомого пути в G' . \square

В пунктах 20 – 22 показано, что орграф G' удовлетворяет условию теоремы, он меньше D и поэтому должен содержать слабый двойной треугольник. Но в пункте 19 показано, что это невозможно. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

8.8.5 Критерии четности орграфа

Начнем с прямого следствия теоремы 8.14.

Следствие 8.7. Пусть G — сильно двусвязный орграф, у которого все вершины, кроме, может быть, трёх, имеют исходящую степень не менее 3. Тогда D четен.

Томассен отметил, что условия сильной двусвязности и ровно трех вершин исходящей степени менее 3 не могут быть улучшены. Сформулируем эти результаты в виде задачи.

Задача 8.6. 1) Докажите, что существует сильно двусвязный орграф с 4 вершинами исходящей степени 2, не являющийся четным.

2) Докажите, что существует сильно связный орграф D с $\delta^+(D) \geq 3$, не являющийся четным.

Однако, при ограничениях на входящую и исходящую степени одновременно получается следующая теорема.

Теорема 8.15. (С. Thomassen, 1992.) Пусть сильно связный орграф D таков, что $\delta^+(D) \geq 3$ и $\delta^-(D) \geq 3$. Тогда D четен.

Доказательство. Если орграф D не сильно связан, рассмотрим любую его компоненту сильной связности и подграф, индуцированный на ней,

для этого орграфа также выполняется условие теоремы. Далее мы считаем D сильно связным. Если D — сильно двусвязен, мы воспользуемся теоремой 8.14.

Пусть D сильно связан, но не сильно двусвязен. Рассмотрим все способы удалить вершину из D_1 так, чтобы получился не сильно связный орграф, и у каждого такого графа рассмотрим все крайние компоненты сильной связности (как те, из которых не выходит стрелок, так и те, в которые не входит стрелок). Среди всех таких компонент найдем минимальную компоненту U , пусть это крайняя компонента сильной связности орграфа $D - z$, а $W = V(D - z) \setminus U$, а орграф H — это (z, U) -редукция D .

Пусть из U не выходит стрелок в орграфе $D - z$. Мы докажем, что H — сильно двусвязен. Очевидно, орграф $H - z = D(U)$ сильно связан. Пусть $t \in U$. Предположим, что орграф $H - t$ не сильно связан и рассмотрим его крайнюю компоненту связности U' , не содержащую z (у орграфа $H - t$ хотя бы две крайних компоненты сильной связности, и хотя бы одна из них не содержит V .) Если из U' не выходит стрелок в $H - t$, то очевидно, не выходит стрелок и в $D - t$ (так как в орграфе D нет стрелок из U в W). Тогда U' — крайняя компонента сильной связности орграфа $D - t$, причем $U' \subsetneq U$, противоречие с минимальностью U .

Пусть в U' не входит стрелок в орграфе $H - t$, но входит стрелка xy в орграфе $D - t$. Тогда $x \in W$, $y \in U'$ и по построению (z, U) -редукции в H есть стрелка zy . Но $z \in U \setminus U'$, противоречие. Значит, и в этом случае $U' \subsetneq U$ — крайняя компонента сильной связности, что невозможно.

Итак, H — сильно двусвязный орграф, все его вершины, кроме, может быть, z , имеют исходящую степень не менее 3. По следствию 8.7 орграф H , а следовательно, и орграф D — четен.

В случае, когда в U не входит ни одно ребро из W в $D - z$, мы поменяем в орграфе H все стрелки на противоположные и обозначим полученный орграф через H' . Аналогично, H' четен, но тогда четны орграфы H и D . \square

В 1975 году Л.Ловас сформулировал два вопроса о четных циклах в орграфах.

Вопрос 1. *Существует ли такое k , что любой орграф D с $\delta^+(D) \geq k$ содержит четный цикл?*

Вопрос 2. *Существует ли такое k , что любой сильно k -связный орграф содержит четный цикл?*

Отрицательный ответ на первый вопрос Томассен дал в 1985 году. Из сказанного выше понятно, что для положительного ответа нужно не

только ограничение на исходящую степень, но и ограничение на входящую степень (теорема 8.15).

Ответ на второй вопрос положителен: как видно из следствия 8.7 подходит $k = 3$. Несложно построить примеры, показывающие, что сильной двусвязности для наличия четного цикла недостаточно.

8.8.6 Снова о раскрасках гиперграфа в два цвета

Мы продолжим разговор о правильных раскрасках гиперграфа в два цвета, начатый в разделе 4.9.2.

Теорема 8.16. (С. Thomassen, 1992.) Пусть \mathcal{H} — минимальный неведущий гиперграф с $e(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. Тогда \mathcal{H} имеет вершину степени не более 3 или гиперребро, содержащее не более трех вершин.

Доказательство. Напомним определение 4.18. Пусть D — орграф. Для каждой вершины $x \in V(D)$ пусть $e_x = \{x\} \cup \{y \in V(D) : xy \in A(D)\}$. Определим гиперграф \mathcal{G}_D : пусть

$$V(\mathcal{G}_D) = V(D) \quad \text{и} \quad E(\mathcal{G}_D) = \{e_x : x \in V(D)\}.$$

В теореме 4.15 доказано, что гиперграф \mathcal{H} имеет вид \mathcal{G}_D для сильно связного орграфа D без нечетных циклов. Предположим, что $\delta(\mathcal{H}) \geq 4$ и каждое гиперребро имеет хотя бы 4 вершины. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V(D)$. Из $|e_v| \geq 4$ следует, что $\delta_D^+(v) \geq 3$. Из $d_{\mathcal{H}}(v) \geq 4$ следует, что v содержится хотя бы в трёх отличных от e_v гиперребрах $e_x, e_y, e_z \in E(\mathcal{H})$. Но это означает, что $xv, yv, zv \in A(D)$, то есть, $\delta_D^-(v) \geq 3$.

Таким образом, $\delta^+(D) \geq 3$ и $\delta^-(D) \geq 3$, что по теореме 8.15 означает наличие в орграфе D четного цикла. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Глава 9

Сети и потоки

9.1 Теорема Форда-Фалкерсона

Определение 9.1. Пусть задано множество вершин V , в котором выделены две вершины: s (*вход* или *исток*) и t (*выход* или *сток*). Пусть определена функция $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G .

Множество $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ называется множеством *стрелок* сети G .

Определение 9.2. Пусть G — сеть, а функция $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

(F1) для любых $x, y \in V$ $f(x, y) \leq c(x, y)$;

(F2) для любых $x, y \in V$ $f(x, y) = -f(y, x)$;

(F3) для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f — *поток* в сети G . Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Замечание 9.1. Вообще-то не очевидно, что максимальный поток существует.

Определение 9.3. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — *разрез* сети G .

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*. Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Для любого потока f в сети G величина $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *поток через разрез (S, T)* .

Замечание 9.2. Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

Лемма 9.1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G выполняется $|f| = f(S, T)$.

Доказательство. Отметим, что ввиду условия (F3)

$$|f| = \sum_{x \in V} f(s, x) = \sum_{y \in S} \left(\sum_{x \in V} f(y, x) \right). \quad (9.1)$$

В правой части равенства (9.1) для любых двух вершин $y, z \in S$ присутствуют слагаемые $f(y, z)$ и $f(z, y)$, в силу (F2) в сумме дающие 0. Поэтому

$$\sum_{y \in S} \left(\sum_{x \in V} f(y, x) \right) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y) = f(S, T),$$

что и требовалось доказать. \square

Определение 9.4. 1) Пусть f — поток в сети G . Рассмотрим сеть G_f с теми же V , s , t и пропускной способностью

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = s \text{ или } x = t, \\ c(x, y) - f(x, y) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Назовем G_f *остаточной сетью* потока f .

2) Любой путь из s в t , проходящий по стрелкам из $A(G_f)$, называется *дополняющим путем* потока f .

Лемма 9.2. Пусть f — поток в сети G , f' — поток в остаточной сети G_f . Тогда $f + f'$ — поток в сети G , причём $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Доказательство. Нетрудно проверить для потока $f + f'$ условия (F1), (F2) и (F3). Утверждение про величину потока очевидно. \square

Теорема 9.1. (L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956)

В сети G с пропускной способностью c задан поток f . Тогда следующие три утверждения равносильны.

- 1° Поток f максимален.
- 2° Существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;
- 3° В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Доказательство. $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Рассмотрим другой поток f' . По условию (F1) и лемме 9.1 мы имеем

$$|f'| = f'(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f'(x, y) \leq \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y) = c(S, T) = |f|,$$

откуда следует максимальность f .

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$ Предположим противное, пусть в остаточной сети G_f есть дополняющий путь P . Пусть c — минимальная пропускная способность ребра пути P . Рассмотрим поток f_p вдоль пути P :

$$f_p(x, y) = c \text{ при } xy \in P, \quad f_p(x, y) = -c \text{ при } yx \in P,$$

$$f_p(x, y) = 0 \text{ при } xy, yx \notin P.$$

По лемме 9.2, $f + f_p$ — поток в G , причём $|f + f_p| = |f| + c > |f|$, противоречие с максимальностью f .

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Рассмотрим в ориентированном графе $(V, A(G_f))$ множество S всех вершин, достижимых из s . Так как в остаточной сети G_f нет дополняющего пути, то $t \notin S$. Тогда $(S, T = V \setminus S)$ — разрез в сетях G и G_f . По построению, не существует стрелок из $A(G_f)$, идущих из S в T , следовательно, $0 = c_f(S, T) = c(S, T) - f(S, T)$, откуда $c(S, T) = f(S, T)$. \square

Следствие 9.1. Величина максимального потока в сети G равна пропускной способности минимального разреза сети G .

9.2 Целочисленные сети

Объект рассмотрения в этом разделе — сеть G с целочисленной пропускной способностью c .

Теорема 9.2. В целочисленной сети G существует максимальный поток, причём среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

Доказательство. Будем последовательно строить поток. Изначально положим $f = 0$. Пусть в некоторый момент есть целочисленный поток f в целочисленной сети G . Рассмотрим остаточную сеть G_f . Если в G_f нет дополняющего пути P , то по теореме 9.1 поток f — максимальный.

Если же в G_f есть дополняющий путь P , то пусть $c \in \mathbb{N}$ — минимальная пропускная способность ребра пути P , аналогично доказательству теоремы 9.1 построим поток f_p вдоль пути P в остаточной сети G_f и положим $f := f + f_p$. Получился новый целочисленный поток, причем его пропускная способность на c больше, чем у предыдущего. Так как с каждым шагом величина потока возрастает на целую величину, процесс обязательно закончится, в результате мы получим целочисленный максимальный поток в сети G . \square

Задача 9.1. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G . Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными

- а) для целочисленной сети G ;
- б) для произвольной сети G .

Именно теорему 9.2 можно применить для доказательства многих фактов из теории графов, что мы и сделаем в следующем разделе.

9.3 Рёберная теорема Менгера

Именно так обычно называют следующую теорему. Несмотря на то, что эта теорема имеет много общего с теоремой Менгера (теорема 5.1) и даже может быть из нее выведена, впервые она была доказана Фордом и Фалкерсоном в качестве примера применения разработанного ими метода.

Определение 9.5. Пусть G — неориентированный граф без петель, кратные рёбра допускаются.

Пусть $x, y \in V(G)$. Обозначим через $\lambda_G(x, y)$ размер минимального множества рёбер $R \subset E(G)$ такого, что R разделяет x и y . Назовем $\lambda_G(x, y)$ *рёберной связностью* вершин x и y .

Замечание 9.3. Очевидно, рёберная связность графа может быть задана как $\lambda(G) = \min_{x, y \in V(G)} \lambda_G(x, y)$.

Теорема 9.3. (L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956)

1) Пусть $s, t \in V(G)$. Тогда существует $\lambda_G(s, t)$ путей из s в t , не имеющих общих рёбер.

2) В рёберно k -связном графе G для любых двух вершин s, t существует k путей из s в t , не имеющих общих рёбер.

Доказательство. 1) Построим сеть \vec{G} на множестве вершин $V(G)$. Входом будет s , выходом будет t . Определим пропускные способности: $c(x, y)$ равняется кратности ребра xy в графе G (то есть, 0, если такого ребра нет, и m , если в графе G есть m кратных рёбер xy). Дополнительно определим $c(x, s) = c(t, x) = 0$ для всех $x \in V(G)$. Отметим, что при $x, y \notin \{s, t\}$ мы имеем $c(x, y) = c(y, x)$.

Сеть \vec{G} — целочисленная, поэтому по теореме 9.2 в ней есть целочисленный максимальный поток f . Пусть $|f| = k$. Докажем, что поток f распадается на k непересекающихся st -путей.

Построим новый орграф G' на тех же вершинах. Если $f(x, y) = \ell > 0$ для $x, y \in V(G)$, мы проведем в G' ровно ℓ стрелок $x \rightarrow y$. Понятно, что $\ell \in \mathbb{Z}$ и в графе G есть не менее ℓ ребер, соединяющих x и y . Тогда из вершины s выходит ровно k стрелок, а в каждой отличной от s и t вершине v по свойству потока ($F3$) количества входящих и исходящих стрелок в v равны. Теперь очевидно, что поток распадается на k не пересекающихся по рёбрам st -путей в графе G (не обязательно простых) и, возможно, нескольких циклов, не проходящих по s и t . Эти циклы нас не интересуют.

Воспользуемся теоремой 9.1. В силу максимальности потока f существует разрез (S, T) нашей сети пропускной способности $c(S, T) = k$. Тогда из S в T направлено k стрелок нашей сети (пропускная способность каждой стрелки равна 1). Для каждой стрелки $x \rightarrow y$ из S в T поместим в множество R ребро xy графа G . Тогда $|R| = k$ и нетрудно понять, что R отделяет S от T , а стало быть, и s от t . Следовательно, $k \geq \lambda(s, t)$ и утверждение пункта 1 доказано.

2) Утверждение пункта 2 непосредственно следует из пункта 1. \square

Вообще-то, можно вывести предыдущую теорему из аналогичного факта для вершинной связности — теоремы Менгера (следствие 5.1), известного с 1927 года. Удивительно, что это не было замечено до 1956 года, когда теорему с помощью сетей и потоков доказали Форд и Фалкерсон. Сформулируем несколько задач на вывод доказательства классических фактов теории графа из теоремы Форда-Фалкерсона.

Задача 9.2. Докажитете с помощью теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

- а) теорему Холла (теорема 2.2);
- б) теорему Кёнига (теорема 2.3);
- в) теорему Менгера (следствие 5.1, пункт 1).

9.4 Максимальный поток в произвольной сети

Теорема 9.4. *В любой сети G существует максимальный поток.*

Доказательство. План доказательства такой же, как и в теореме 9.2: мы будем постепенно увеличивать максимальный поток, добавляя к нему поток вдоль дополняющего пути. Однако, на этот раз нам нельзя произвольно выбирать дополняющий путь.

Итак, пусть в некоторый момент построен поток f в сети G . Рассмотрим остаточную сеть G_f . Если в G_f нет дополняющего пути P , то по теореме 9.1 поток f — максимальный. Пусть в G_f есть дополняющие пути.

Мы выберем самый короткий дополняющий путь P (напомним, что длина пути — это количество его рёбер), аналогично доказательству теоремы 9.1 построим поток f_p вдоль пути P в остаточной сети G_f и положим $f' := f + f_p$. Почему же этот процесс когда-нибудь закончится?

Лемма 9.3. *Пусть Q — простой st -путь в остаточной сети $G_{f'}$, которого нет в остаточной сети G_f . Тогда Q длиннее, чем P .*

Доказательство. Пусть $s = x_0x_1 \dots x_k = t$ — это путь P . Понятно, что путь P — простой, а значит, все его вершины различны. Через $P[x_i, x_j]$ мы обозначим участок пути P от x_i до x_j .

Сначала поймем, какие же стрелки могут входить в $A(G_{f'}) \setminus A(G_f)$. Такая стрелка yz имеет $c_f(y, z) = 0$, но

$$0 < c_{f'}(y, z) = c_f(y, z) - f_p(y, z).$$

Значит, $zy \in A(P)$, то есть, $z = x_i$ и $y = x_{i+1}$ для некоторого i . По условию, путь P содержит хотя бы одну такую стрелку.

Напомним, что *трансверсаль* пути P — это путь между двумя его вершинами, внутренние вершины которого не принадлежат P . Назовём x_ix_j -трансверсаль L цикла P *правильной*, если $i < j$ и *неправильной* в противном случае. Стрелку x_ix_{i+1} , мы будем считать правильной трансверсалью пути P , а стрелку x_ix_{i+1} — неправильной. Таким образом, весь путь Q разбивается на трансверсали пути P — пусть это L_1, \dots, L_m . Как показано выше, среди них есть хотя бы одна неправильная трансверсаль.

Пусть L — правильная x_ix_j -трансверсаль пути P . Отметим, что все стрелки трансверсали L , как показано выше, лежат в $A(G_f)$. Если L короче, чем $P[x_i, x_j]$, то мы могли бы заменить этот участок пути P на трансверсаль L и найти в G_f более короткий путь, чем P , противоречие с выбором пути P .

Таким образом, каждая правильная трансверсаль L пути P не короче участка пути P между ее концами. Тогда заменим каждую правильную трансверсаль на соответствующий участок между ее концами — в результате получится путь Q' , который не длиннее чем Q . Поскольку оба пути P и Q' ведут из S в T , путь Q' содержит все рёбра пути P . Так как Q (а стало быть, и Q') содержит хотя бы одну неправильную трансверсаль пути P , путь Q' (а следовательно, и Q) строго длиннее чем P . \square

Таким образом, после каждого шага взамен одного из кратчайших путей из s в t в остаточной сети могут появиться лишь строго более длинные пути. Значит, в результате каждого шага либо увеличивается длина кратчайшего пути, либо эта длина сохраняется, но уменьшается количество кратчайших путей. Отметим, что кратчайший путь всегда простой, а длина простого пути из s в t ограничена количеством вершин сети. Значит, процесс построения закончится, и в результате получится остаточная сеть без дополняющих путей. По теореме 9.1 это означает, что будет построен максимальный поток. \square

Глава 10

Теория Рамсея

Всё началось с классической работы Рамсея (P. Ramsey) 1930 года, в которой было доказано, что в графе на достаточно большом количестве вершин без больших клик обязательно есть большое независимое множество вершин.

10.1 Числа Рамсея

Основным объектом изучения в этой главе будут полные графы, рёбра которых покрашены в несколько цветов. Для простоты полный граф на n вершинах мы будем называть *кликой*.

Определение 10.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Число Рамсея $r(m, n)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в два цвета обязательно найдётся клика на n вершинах с рёбрами цвета 1 или клика на m вершинах с рёбрами цвета 2.

10.1.1 Существование. Оценки сверху

В 1930 году Рамсей доказал, что число Рамсея существует. Несмотря на современные вычислительные мощности, известно немного точных значений чисел Рамсея. Очевидно,

$$r(n, 1) = r(1, n) = 1, \quad r(n, 2) = r(2, n) = n, \quad r(m, n) = r(n, m).$$

Мы приведём оценки сверху и снизу на числа Рамсея. Начнём с простейших оценок сверху.

Теорема 10.1. (P. Erdős, G. Szekeres, 1935.) Пусть $n, m \geq 2$ — натуральные числа. Тогда

$$r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m). \quad (10.1)$$

Если оба числа $r(n, m-1)$ и $r(n-1, m)$ — чётные, то неравенство — строгое.

Замечание 10.1. Из утверждения теоремы 10.1 в частности следует, что число Рамсея $r(m, n)$ для любых натуральных m и n существует (то есть, конечно).

Доказательство. 1) Рассмотрим клику на $r(n, m-1) + r(n-1, m)$ вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и ее произвольную вершину a . Тогда либо от вершины a отходит хотя бы $r(n, m-1)$ рёбер цвета 2, либо от вершины a отходит хотя бы $r(n-1, m)$ рёбер цвета 1. Случаи аналогичны, рассмотрим первый случай и клику на $r(n, m-1)$ вершинах, соединённых с a рёбрами цвета 2. На этих вершинах есть либо клика на n вершинах с рёбрами цвета 1, либо клика на $m-1$ вершинах с рёбрами цвета 2. Во втором случае добавим вершину a и получим клику на m вершинах с рёбрами цвета 2. Теперь из определения $r(n, m)$ следует неравенство (10.1).

2) Рассмотрим клику на $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и его произвольную вершину a . Если вершине a инцидентны хотя бы $r(n, m-1)$ рёбер цвета 2 или хотя бы $r(n-1, m)$ рёбер цвета 1, то мы найдём в графе клику на n вершинах с рёбрами цвета 1 или клику на m вершинах с рёбрами цвета 2. Остаётся лишь случай, когда вершине a инцидентны ровно $r(n, m-1) - 1$ рёбер цвета 2, то же самое для всех остальных вершин. Это означает, что в графе из рёбер цвета 2 всего $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ вершин и степень каждой вершины равна $r(n, m-1) - 1$. Однако, тогда в графе нечётное количество вершин нечётной степени. Противоречие показывает нам, что в случае, когда $r(n, m-1)$ и $r(n-1, m)$ — чётные, выполняется неравенство $r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$. \square

Следствие 10.1. Для натуральных чисел m, n выполняется неравенство $r(n, m) \leq C_{n+m-2}^{n-1}$.

Доказательство. Очевидно, $C_{n+m-2}^{n-1} = 1$ при $n = 1$ или $m = 1$, как и соответствующие числа Рамсея. Индукцией по n и m при $n, m \geq 2$ получаем

$$r(n, m) \leq r(n, m-1) + r(n-1, m) \leq C_{n+m-3}^{n-1} + C_{n+m-3}^{m-2} = C_{n+m-2}^{n-1}.$$

\square

Как это ни странно, с помощью неравенства из теоремы 10.1 мы можем получить несколько точных значений чисел Рамсея. Отметим, что $r(3, 3) \leq 2r(2, 3) = 6$. Так как числа $r(3, 3)$ и $r(2, 4)$ четны, можно вывести неравенства $r(3, 4) \leq r(3, 3) + r(2, 4) - 1 = 9$. И, наконец, $r(3, 5) \leq r(2, 5) + r(3, 4) = 14$, а также $r(4, 4) \leq 2r(3, 4) = 18$. Все эти значения являются точными.

10.1.2 Экстремальные примеры и оценки снизу

Задача нахождения точных значений чисел Рамсея чрезвычайно трудна, этих значений известно немногим больше, чем перечислено выше. *Графом Рамсея* $R(n, m)$ назовём такой граф на $r(n, m) - 1$ вершинах, не содержащий ни клики на n вершинах, ни независимого множества на m вершинах (то есть, граф на рёбрах цвета 1 из раскраски в два цвета рёбер графа $K_{r(n, m)-1}$, не содержащей ни клики на n вершинах с рёбрами цвета 1, ни клики на m вершинах с рёбрами цвета 2).

Граф $R(3, 3)$ — это цикл на пяти вершинах. Экстремальный граф $R(3, 4)$ — это цикл на 8 вершинах с проведёнными четырьмя главными диагоналями. Графы $R(3, 5)$ и $R(4, 4)$ имеют интересную числовую природу.

Так, если ассоциировать 13 вершин графа $R(3, 5)$ с элементами поля вычетов по модулю 13, то рёбра будут соединять вычеты, разность которых — кубический вычет по модулю 13 (то есть, 1, 5, 8 или 12).

Если считать 17 вершин графа $R(4, 4)$ элементами поля вычетов по модулю 17, то рёбра будут соединять вычеты, разность которых — квадратичный вычет по модулю 17 (то есть, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 или 16).

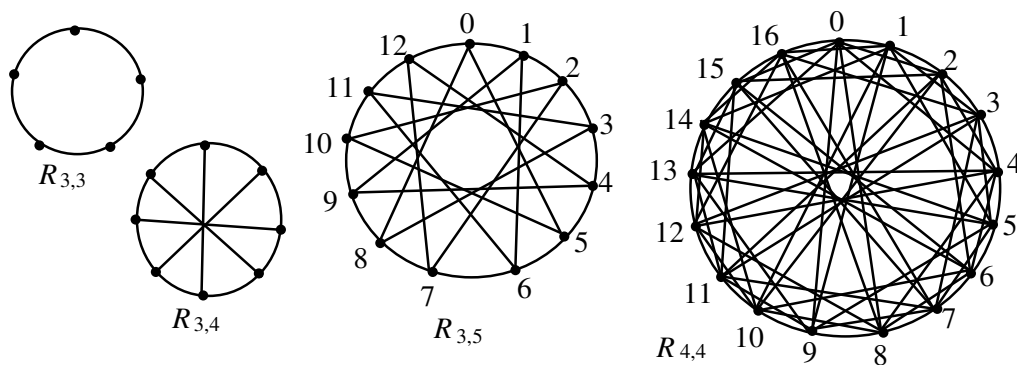


Рис. 10.1: Графы Рамсея.

Существует гипотеза, что любой граф $R(k, k)$ изоморфен своему дополнению (или что в раскраске полного графа на $r(k, k) - 1$ вершинах

в два цвета граф с рёбрами цвета 1 обязательно изоморфен графу с рёбрами цвета 2). Однако, это не более чем красивое предположение, в обоснование которого можно положить лишь немногие известные примеры.

Теорема 10.2. (Р. Erdős, 1947.) Для любого натурального числа $k \geq 2$ выполняется неравенство $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Доказательство. Так как $r(2, 2) = 2$, достаточно рассмотреть случай $k \geq 3$.

Зафиксируем множество различных помеченных вершин v_1, \dots, v_n . Пусть $g(n, k)$ — доля среди всех графов на вершинах v_1, \dots, v_n тех графов, что содержат клику на k вершинах. Всего графов на наших вершинах, очевидно, $2^{C_n^2}$ (каждое из возможных C_n^2 можно провести или не провести).

Посчитаем графы с кликой на k вершинах так: существует C_n^k способов выбрать k вершин для клики в нашем множестве, после чего все рёбра между ними будем считать проведёнными, а остальные рёбра выбираются произвольным образом. Таким образом, каждый граф с кликой на k вершинах будет посчитан, причём некоторые даже более одного раза. Количество графов с кликой оказывается не более, чем $C_n^k \cdot 2^{C_n^2 - C_k^2}$. Следовательно,

$$g(n, k) \leq \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} < \frac{n^k}{k! \cdot 2^{C_k^2}}. \quad (10.2)$$

Подставив $n < 2^{k/2}$ в неравенство (10.2) мы получаем

$$g(n, k) < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-C_k^2}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2} \quad \text{при } k \geq 3.$$

Предположим, что $r(k, k) = n < 2^{k/2}$ и разобьём все графы на n вершинах на пары G, \overline{G} (граф и его дополнение). Так как $g(n, k) < \frac{1}{2}$, то существует пара, в которой ни G , ни \overline{G} не содержат клики на k вершинах. Рассмотрим раскраску рёбер K_n в два цвета, в которой рёбра цвета 1 образуют граф G . В такой раскраске нет клики на k вершинах ни цвета 1, ни цвета 2, противоречие. Следовательно, $r(k, k) \geq 2^{k/2}$. \square

Следствие 10.2. Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ таких, что $2 \leq k \leq m$, выполняется неравенство $r(k, m) \geq 2^{k/2}$.

Удивительно, но известные конструкции не могут ни дать более точную оценку на $r(k, k)$, чем в теореме 10.2, ни дать более точную оценку на $r(k, m)$, чем в следствии 10.2.

10.1.3 Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов

Естественным обобщением классических чисел Рамсея является случай, когда рёбра полного графа красятся не в два, а в произвольное число цветов.

Определение 10.2. Пусть $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Число Рамсея $r(k; n_1, \dots, n_k)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в k цветов для некоторого $i \in [1..k]$ обязательно найдётся клика на n_i вершинах с рёбрами цвета i .

Замечание 10.2. Отметим, что $r(2; n, m)$ — это определённое ранее число Рамсея $r(n, m)$.

Обобщение оказывается настолько естественным, что по сути не добавляет нам ничего нового: полностью аналогично теореме 10.1 и следствию 10.1 можно доказать следующие факты.

Теорема 10.3. Пусть $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ — натуральные числа. Тогда выполняются следующие утверждения.

1)

$$r(k; n_1, \dots, n_k) \leq r(k; n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + r(k; n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \dots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k - 1) - k + 2. \quad (10.3)$$

2)

$$r(k; n_1, \dots, n_k) \leq \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (10.4)$$

Доказательство. 1) Доказательство полностью аналогично пункту 1 доказательства теоремы 10.1.

2) Доказательство аналогично следствию 10.1. Нужно лишь убедиться в очевидном неравенстве для случая, когда хотя бы одно из чисел n_1, \dots, n_k равно 1 (левая часть в этом случае равна 1, а правая, очевидно, не меньше 1) и заметить, что *полиномиальные коэффициенты* из очевидных комбинаторных соображений удовлетворяют соотношению

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_1 + \dots + (n_i - 1) + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot \dots \cdot (n_i - 1)! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Следовательно, неравенство (10.4) выводится из неравенства (10.3) по индукции. \square

10.2 Числа Рамсея больших размерностей

Результат этого раздела не относится к классической теории графов, но тесно с ней связан. Даже формулировать определения и результаты мы будем не на языке графов.

Определение 10.3. Пусть $m, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, причём $n_1, \dots, n_k \geq m$. Число Рамсея $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске m -элементных подмножеств x -элементного множества M в k цветов для некоторого $i \in [1..k]$ обязательно найдётся такое множество W_i , что $|W_i| = n_i$ и все m -элементные подмножества множества W_i имеют цвет i .

Число m называется *размерностью* числа Рамсея $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$.

Замечание 10.3. 1) Нетрудно понять, что числа Рамсея размерности 2 — это определённые выше числа Рамсея для клик.

2) При количестве цветов, равном 2, этот параметр мы будем опускать и писать $r_m(n_1, n_2)$ вместо $r_m(2; n_1, n_2)$.

Определение 10.4. Для каждого множества M через M^k мы будем обозначать множество всех k -элементных подмножеств M .

Теорема 10.4. Пусть m, k, n_1, \dots, n_k — натуральные числа, причём $k \geq 2$, а $n_1, \dots, n_k \geq m$. Тогда число Рамсея $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$ существует (то есть, конечно).

Доказательство. 1. Мы будем доказывать теорему по индукции. Начнем со случая $k = 2$. Приступая к доказательству для числа $r_m(n_1, n_2)$ мы будем считать доказанным утверждение теоремы для чисел Рамсея всех меньших размерностей и чисел Рамсея размерности m с меньшей суммой $n_1 + n_2$. В качестве базы будем использовать случай чисел Рамсея размерности 2, разобранный выше.

Итак, мы докажем, что

$$r_m(n_1, n_2) - 1 \leq p = r_{m-1}(r_m(n_1 - 1, n_2), r_m(n_1, n_2 - 1)).$$

Рассмотрим $(p+1)$ -элементное множество M и выделим в нём элемент a . Пусть $M_0 = M \setminus \{a\}$. Пусть $\rho : M^m \rightarrow \{1, 2\}$ — произвольная раскраска в два цвета. Рассмотрим раскраску $\rho' : M_0^{m-1} \rightarrow \{1, 2\}$, определённую следующим образом: для каждого множества $B \in M_0^{m-1}$ пусть $\rho'(B) = \rho(B \cup \{a\})$.

Так как $|M_0| = p$, либо существует $r_m(n_1 - 1, n_2)$ -элементное подмножество $M_1 \subset M_0$, для которого $\rho'(B) = 1$ на всех $B \in M_1^{m-1}$, либо

существует $r_m(n_1, n_2 - 1)$ -элементное подмножество $M_2 \subset M_0$, для которого $\rho'(B) = 2$ на всех $B \in M_2^{m-1}$. Случаи аналогичны, рассмотрим первый случай и множество M_1 .

По индукционному предположению из $|M_1| = r_m(n_1 - 1, n_2)$ следует, что либо существует $n_1 - 1$ -элементное подмножество $N_1 \subset M_1$, для которого $\rho(A) = 1$ на всех $A \in N_1^m$, либо существует n_2 -элементное подмножество $N_2 \subset M_1$, для которого $\rho(A) = 2$ на всех $A \in N_2^m$. Во втором случае искомое подмножество найдено (это N_2), рассмотрим первый случай и множество $N = N_1 \cup \{a\}$. Пусть $A \in N^m$. Если $A \not\ni a$, то $A \in N_1^m$ и следовательно $\rho(A) = 1$. Если же $A \ni a$, то множество $A \setminus \{a\} \in N_1^{m-1} \subset M_1^{m-1}$ и потому $\rho(A) = \rho'(A \setminus \{a\}) = 1$. Учитывая, что $|N| = n_1$, мы нашли искомое подмножество и в этом случае.

2. При $k > 2$ будем вести индукцию по k с доказанной выше базой $k = 2$. При $k > 2$ мы докажем неравенство

$$r_m(k; n_1, \dots, n_k) \leq q = r_m(r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1}), n_k).$$

Для этого мы рассмотрим множество M на q вершинах и произвольную раскраску $\rho : M^m \rightarrow [1..k]$ в k цветов. Рассмотрим раскраску $\rho' : M^m \rightarrow \{0, k\}$, в которой цвета $1, \dots, k-1$ раскраски ρ склеены в цвет 0. Тогда существует либо такое подмножество $M_0 \subset M$, что $|M_0| = r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1})$ и $\rho'(A) = 0$ на всех $A \in M_0^m$, либо существует такое n_k -элементное подмножество $M_k \subset M$, что $\rho(A) = \rho'(A) = k$ на всех $A \in M_k^m$. Во втором случае M_k — искомое подмножество, а в первом случае заметим, что на любом подмноестве $A \in M_0^m$ из $\rho'(A) = 0$ следует $\rho(A) \in [1..k-1]$. Исходя из размера множества M_0 по индукционному предположению получаем, что найдётся искомое подмножество множества M для одного из цветов $1, \dots, k-1$. \square

10.3 Числа Рамсея для произвольных графов

Ещё один способ обобщения классической теории Рамсея — замена клик на произвольные графы-шаблоны.

Определение 10.5. Пусть H_1, H_2 — два данных графа. Число Рамсея $r(H_1, H_2)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в два цвета обязательно найдётся подграф, изоморфный H_1 с рёбрами цвета 1 или подграф, изоморфный H_2 с рёбрами цвета 2.

В принципе, из результатов классической теории Рамсея понятно, что числа $r(H_1, H_2)$ обязательно существуют (то есть, конечны). Интересно, что иногда их можно точно вычислить.

Лемма 10.1. Пусть $m > 1$, а граф H таков, что $v(H) \geq (m-1)(n-1)+1$ и $\alpha(H) \leq m-1$. Тогда граф H содержит в качестве подграфа любое дерево на n вершинах.

Доказательство. Зафиксируем m и проведём индукцию по n . База для $n = 1$ очевидна. Докажем индукционный переход $n-1 \rightarrow n$ ($n > 1$). Рассмотрим произвольное дерево T_n на n вершинах, пусть дерево T_{n-1} получено из T_n удалением висячей вершины. Пусть U — максимальное независимое множество вершин графа H . Тогда $|U| = \alpha(H) \leq m-1$, следовательно, $v(H-U) \geq (m-1)(n-2)+1$ и, очевидно, $\alpha(H-U) \leq m-1$.

По индукционному предположению, граф $H-U$ содержит в качестве подграфа дерево T_{n-1} . Пусть a — вершина этого дерева, присоединив к которой висячую вершину мы получим дерево T_n . Заметим, что множество $U \cup \{a\}$ не является независимым ввиду максимальной U , следовательно, вершина a смежна хотя с одной вершиной $x \in U$. Отметим, что $x \notin V(T_{n-1})$ и, присоединив вершину x к вершине a дерева T_{n-1} , получим дерево T_n в качестве подграфа графа H . \square

Теорема 10.5. (V. Chvatal) Пусть T_n — дерево на n вершинах. Тогда $r(T_n, K_m) = (m-1)(n-1) + 1$.

Доказательство. 1) Докажем, что $r(T_n, K_m) \geq (m-1)(n-1) + 1$. Для этого предъявим раскраску рёбер графа $K_{(m-1)(n-1)+1}$, в которой нет ни одного связного подграфа на n вершинах с рёбрами цвета 1 и нет клики на m вершинах с рёбрами цвета 2. Разобьём вершины графа на $m-1$ клику по $n-1$ вершине и покрасим все рёбра этих клик в цвет 1. Тогда любой связный подграф с рёбрами цвета 1 содержит не более $n-1$ вершины, в частности, нет подграфа с рёбрами цвета 1, изоморфного T_n . Рёбра цвета 2 (то есть, все оставшиеся рёбра) образуют $(m-1)$ -дольный граф, в котором, очевидно, нет клики на m вершинах.

2) Рассмотрим произвольную раскраску рёбер полного графа $K_{(m-1)(n-1)+1}$ в два цвета. Предположим, что не существует клики на m вершинах с рёбрами цвета 2. Тогда $m > 1$ и $\alpha(G_1) \leq m-1$. По лемме 10.1, граф G_1 содержит в качестве подграфа любое дерево на n вершинах, в частности, дерево, изоморфное T_n . \square

10.4 Индуцированная теорема Рамсея

В этом разделе мы докажем похожее на теорему Рамсея, но значительно более сложное утверждение.

Определение 10.6. Пусть H — граф. Граф G называется *рамсеевским графом* для H , если при любой раскраске рёбер графа G в два цвета существует одноцветный по рёбрам индуцированный подграф графа G , изоморфный H .

При замене произвольного графа H на клику мы получаем частный случай классической теоремы Рамсея. Для клики добавленное слово “индуцированный” ничего не меняет. Но значительно усложняет ситуацию для произвольного графа H . В 1973 году независимо несколькими авторами было доказано, что для любого графа существует рамсеевский граф. Это сделали Deuber, Erdős, Hajnal и Posa, Rödl. Это утверждение получило название *индуцированной теоремы Рамсея*. Мы приведём доказательство, которое придумали J. Nešetřil и V. Rödl в 1981 году.

10.4.1 Случай двудольного графа

Здесь мы будем рассматривать двудольный граф G , как

$$G = (V_1(G), V_2(G), E(G)),$$

где $V_1(G)$ и $V_2(G)$ — разбиение множества вершин $V(G)$ на две доли, а рёбра соединяют вершины из разных долей.

Определение 10.7. Пусть H, G — двудольные графы. Инъективное отображение $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$ назовём *погружением*, если оно удовлетворяет двум условиям.

$$1^\circ \varphi(V_1(H)) \subset V_1(G), \varphi(V_2(H)) \subset V_2(G).$$

$$2^\circ \varphi(u)\varphi(v) \in E(G) \text{ тогда и только тогда, когда } uv \in E(H).$$

В этом случае будем говорить, что двудольный граф H *погружён* в двудольный граф G и использовать обозначение $\varphi(H) = G(\varphi(V(H)))$.

Замечание 10.4. Отметим, что если существует погружение φ двудольного графа H в двудольный граф G , то индуцированный подграф $\varphi(H)$ графа G изоморфен H .

Напомним, что для множества X через X^k мы обозначаем множество всех k -элементных подмножеств множества X .

Определение 10.8. Назовём *особым* двудольный граф вида

$$H = (V, V^k, E(H)), \quad \text{где} \quad E(H) = \{xY \mid x \in V, Y \in V^k, x \in Y\}.$$

Лемма 10.2. *Любой двудольный граф может быть погружен в особый двудольный граф.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный двудольный граф P , пусть $V_1(P) = \{a_1, \dots, a_n\}$, $V_2(P) = \{b_1, \dots, b_m\}$. Положим

$$V = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\}.$$

Построим погружение P в особый двудольный граф $H = (V, V^{n+1}, E)$.

Изначально положим $\varphi(a_i) = x_i$. Попробуем построить такое множество $Y_j \in V^{n+1}$, что $\varphi(b_j) = Y_j$. По определению погружения и множества $E(H)$, должно выполняться условие

$$Y_j \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \varphi(N_P(b_j)). \quad (10.5)$$

Условие (10.5) оставляет незаполненными $n+1-d_P(b_j) \geq 1$ элементов множества Y_j (единственное ограничение: эти элементы не могут быть вершинами x_1, \dots, x_n). Поместим в Y_j элемент-индекс z_j (чтобы $Y_j \neq Y_\ell$ при $j \neq \ell$) и дополним произвольно элементами из y_1, \dots, y_n , чтобы в множестве Y_j было ровно $n+1$ элементов. \square

Лемма 10.3. *Для любого двудольного графа H существует такой двудольный граф G , что для любой раскраски рёбер G в два цвета обязательно существует погружение φ графа H в граф G , в котором все рёбра $\varphi(H)$ одноцветны.*

Замечание 10.5. Разумеется, указанный в условии леммы 10.3 граф G будет рамсеевским графом для H . Утверждение леммы более сильное: мы дополнительно требуем, чтобы все вершины одной доли H можно было погрузить в одну долю графа G .

Доказательство. Ввиду леммы 10.2 достаточно доказать утверждение для особого двудольного графа $H = (V, V^k, E(H))$. Пусть $|V| = n$. Докажем, что рамсеевским графом для H будет особый двудольный граф $G = (U, U^{2k-1}, E(G))$, где

$$|U| = r_{2k-1}(2C_{2k-1}^k; kn+k-1, \dots, kn+k-1). \quad (10.6)$$

Рассмотрим произвольную раскраску рёбер графа G в два цвета 1 и 2. Каждое множество $Y \in U^{2k-1}$ смежно как вершина особого двудольного

графа G с $2k - 1$ вершиной, хотя бы k из этих рёбер имеет одинаковый цвет. Выберем и зафиксируем для каждого множества Y его подмножество $S(Y)$, состоящее из k вершин доли U , соединённых с Y рёбрами одинакового цвета. Пусть $c(Y) \in \{1, 2\}$ — это цвет рёбер, соединяющий Y с вершинами из $S(Y)$.

Можно считать, что элементы U упорядочены. Тогда элементы каждого множества $Y \in U^{2k-1}$ будут упорядочены. Обозначим через $\sigma(Y)$ множество номеров k элементов множества $S(Y)$ в порядке элементов множества U . Тогда $\sigma(Y)$ может принимать ровно C_{2k-1}^k значений.

Покрасим множество U^{2k-1} (то есть, все $(2k - 1)$ -элементные подмножества U) в $2C_{2k-1}^k$ цветов: цветом подмножества Y будет пара $(\sigma(Y), c(Y))$. Из выбора размера множества U (см. условие (10.6)) следует, что существует такое подмножество $W \subset U$, что $|W| = kn + k - 1$ и все подмножества $Y \subset W^{2k-1}$ имеют одинаковый цвет $(\sigma(Y), c(Y))$ (не умаляя общности будем считать, что $\sigma(Y) = \sigma$, $c(Y) = 1$). Мы найдём погружение графа H в $G(W)$, все рёбра в котором покрашены в исходной раскраске в цвет 1 и тем самым докажем лемму.

Занумеруем элементы множества W в порядке их следования в U : пусть $W = \{w_1, \dots, w_{kn+k-1}\}$. Введем обозначения

$$t_j = w_{kj}, \quad T = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad V = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Положим $\varphi(a_i) = t_i$. Остаётся корректно определить $\varphi(Z)$ для каждого множества $Z \in V^k$. Прежде чем построить $\varphi(Z) = Y \in U^{2k-1}$ мы положим $S(Y) = \{\varphi(x) : x \in Z\}$. Из определения погружения понятно, что тогда должно выполняться условие $S(Y) = Y \cap T$, а следовательно, нам нужно дополнить множество Y ещё $k - 1$ элементами, не входящими в множество T . Мы сделаем это так, чтобы множество порядков номеров элементов множества $S(Y)$ среди элементов множества Y было $\sigma(Y) = \sigma$: так как $t_i = w_{ki}$, не входящих в T элементов W хватит, чтобы обеспечить это.

Так как по выбору множества W мы имеем $\sigma(Y) = \sigma$, множество $S(Y)$ выбрано корректно и, опять же в силу выбора W , все рёбра особого двудольного графа G между вершинами из $S(Y) = \{\varphi(x) : x \in Z\}$ и $Y = \varphi(Z)$ покрашены в цвет 1. В завершение остается лишь добавить, что при $Z \neq Z'$ мы по построению имеем $S(\varphi(Z)) \neq S(\varphi(Z'))$, поэтому $\varphi(Z) \neq \varphi(Z')$. Таким образом, искомое погружение построено. \square

10.4.2 Случай произвольного графа

Теорема 10.6. *Для произвольного графа H существует рамсеевский граф.*

Доказательство. Пусть $k = v(H)$, $n = r(k, k)$. Пронумеруем вершины графа H . Построим граф G^0 следующим образом: разместим его вершины в виде таблице $n \times C_n^k$. Таким образом, в каждом столбце вершины окажутся пронумерованы числами от 1 до n , как соответствующие строки таблицы. В каждом столбце одним из C_n^k способов разместим граф H (каждый столбец соответствует одному из возможных способов размещения). Все рёбра графа G^0 будут рёбрами указанных копий графа H .

Граф G^0 является n -дольным, его естественное разбиение на доли задаётся таблицей: $V_i(G^0)$ — это вершины, соответствующие i ряду таблицы. Мы последовательно в несколько шагов будем перестраивать наш граф с помощью леммы 10.3, так, чтобы вершины последующих графов также разбивались на n долей и записывались в виде таблицы. Каждый шаг будет соответствовать одной паре строк таблицы.

Шаг перестройки графа.

Итак, пусть мы имеем n -дольный граф G^ℓ , доли которого $V_i = V_i(G^\ell)$ (где $i \in [1..n]$). Пусть с парой строк (и, соответственно, долей) i, j мы еще не выполняли шаг. Очевидно, граф $G_{i,j} = G^\ell(V_i \cup V_j)$ двудольный и для него по лемме 10.3 существует двудольный рамсеевский граф $P_{i,j}$. Более того, если вершины $P_{i,j}$ разбиты на две доли W_i и W_j , то для любой раскраски рёбер $P_{i,j}$ в два цвета существует одноцветное погружение φ графа $G_{i,j}$ в $P_{i,j}$, в котором $\varphi(V_i) \subset W_i$ и $\varphi(V_j) \subset W_j$. Назовём такое погружение *одноцветным*.

Перейдём к построению $G^{\ell+1}$. Заменяем V_i на W_i и V_j на W_j , проведём между этими долями все рёбра графа $P_{i,j}$. Наша цель в том, чтобы для любого погружения $G_{i,j}$ в $P_{i,j}$ была содержащая его копия G^ℓ (причём доли этой копии лежали в соответствующих строках таблицы графа $G^{\ell+1}$).

Занумеруем всевозможные погружения $G_{i,j}$ в $P_{i,j}$: пусть это $G_{i,j}(1), \dots, G_{i,j}(q)$. Каждому погружению $G_{i,j}(s)$ мы поставим в соответствие отдельные копии всех отличных от V_i и V_j долей: $V_1(s), \dots, V_n(s)$. Положим $V_i(s) = V(G_{i,j}(s)) \cap W_i$ и $V_j(s) = V(G_{i,j}(s)) \cap W_j$. На этих долях построим копию графа G^ℓ . В результате для каждого погружения графа $G_{i,j}$ в $P_{i,j}$ мы построили свою копию графа G^ℓ .

Выделение одноцветного индуцированного подграфа.

Итак, докажем, что $G = G_n^{C_n^2}$ и есть рамсеевский граф для H . Пусть $p_1, \dots, p_{C_n^2}$ — именно такая нумерация пар строк в нашей таблице, в порядке которой совершались шаги перестройки графа. Рассмотрим произвольную раскраску рёбер ρ графа G в два цвета и докажем следующий факт.

Для каждого $\ell \in [0..C_n^2]$ существует изоморфный G^ℓ индуцирован-

ный подграф графа G , в котором для пар строк $p_{\ell+1}, \dots, p_{C_n^2}$ все рёбра между вершинами соответствующих пар строк в раскраске ρ одноцветны.

Доказательство. Индукция с обратным ходом от $\ell = C_n^2$ к $\ell = 0$. База для $\ell = C_n^2$ очевидна. Докажем переход $\ell \rightarrow \ell - 1$.

Итак, рассмотрим наш изоморфный G^ℓ подграф, который мы для простоты будем обозначать G^ℓ и пару строк p_ℓ в нём: пусть это строки i и j , а $P_{i,j}$ и $G_{i,j}$ — те двудольные графы между этими строками, что описаны в шаге построения. Так как $P_{i,j}$ (подграф графа G^ℓ) — рамсеевский граф для $G_{i,j}$, мы можем выбрать одноцветное в раскраске ρ погружение $G_{i,j}$ в $P_{i,j}$ и соответствующая ему по построению копия $G^{\ell-1}$ будет искомым (из построения очевидно, что индуцированным!) подграфом G^ℓ , а значит, и G . \square

Таким образом, существует изоморфный G^0 индуцированный подграф графа G , в котором для каждой пары строк i, j все рёбра между вершинами соответствующих строк одноцветны в раскраске ρ . Будем обозначать этот граф просто G^0 . Рассмотрим граф K_n , вершины которого соответствуют строкам таблицы и покрасим каждое ребро в цвет, в который покрашены рёбра G^0 между соответствующими строками. Так как $n = r(k, k)$, существуют k вершин, между которыми все рёбра одноцветны. Рассмотрим столбец графа G^0 , в котором H размещён именно в строчках, соответствующих этим k вершинам. Подграф H' графа G^0 на вершинах этого столбца и соответствующих строчках изоморфен H , по построению является индуцированным подграфом графа G^0 и все его рёбра одноцветны в раскраске ρ . Остаётся лишь заметить, что H' — индуцированный подграф графа G . \square

Глава 11

Экстремальные графы

Это сравнительно новая область теории графов, истоки которой уходят в середину XX века к работам Турана, Эрдеша и других венгерских математиков. В принципе, экстремальная теория графов интересуется произвольными вопросами типа: “Какое наибольшее количество рёбер может быть в графе, обладающим некоторым свойством P ?” Наиболее классический вид свойства, с которого начиналась эта область — это свойство не содержать подграфа, изоморфного данному графу (или графу из данного списка). Именно так называемой *задаче о запрещенных подграфах* в основном и будет посвящена эта глава.

11.1 Наследственное свойство

Определение 11.1. Назовем свойство P графа *наследственным*, если для любого графа G , удовлетворяющего свойству P , любой подграф H графа G также удовлетворяет свойству P .

Обозначим через $P(n)$ наибольшее возможное количество рёбер в графе на n вершинах, удовлетворяющем свойству P .

Наследственных свойств довольно много. Например, свойства “граф не содержит подграфа, изоморфного данному” или “хроматическое число графа не превосходит k ” являются наследственными.

Теорема 11.1. Пусть P — наследственное свойство графов. Тогда $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф G с множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, удовлетворяющий свойству P . Так как граф $G_i = G - v_i$ также удовлетворяет свойству P , мы имеем неравенство

$e(G) - d_G(v_i) = e(G_i) \leq P(n-1)$. Сложив такие неравенства для всех $i \in [1..n]$ мы получим

$$(n-2)e(G) = ne(G) - \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1).$$

В силу произвольности выбора удовлетворяющего свойству P графа G мы получаем доказываемое неравенство. \square

Даже с помощью столь простой и, казалось бы, примитивной технологии можно вывести ряд точных оценок в экстремальной теории графов. Предоставим читателю возможность решить несложное техническое упражнение, не используя последующих результатов.

Задача 11.1. а) Докажите при помощи теоремы о наследственном свойстве, что в графе на v вершинах без треугольников не более, чем $\lfloor \frac{v^2}{4} \rfloor$ рёбер.

б) Докажите при помощи теоремы о наследственном свойстве, что в графе на v вершинах без подграфа, изоморфного K_n не более, чем $\frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$ рёбер, где r — остаток от деления v на $n-1$.

11.2 Задача о запрещенном подграфе

Пусть H — некоторый фиксированный граф. Через $ex(v, H)$ мы обозначим наибольшее возможное количество рёбер в графе на v вершинах, не содержащем подграфа, изоморфного H .

11.2.1 Теорема Турана

Исторически первым был результат Пола Турана (Pál Turán, 1941 г), нашедшего $ex(v, K_n)$. Мы приведем усиленную версию теоремы Турана, заодно доказав единственность экстремального графа (то есть, графа с максимальным числом рёбер, не содержащего K_n).

Пусть $v = q(n-1) + r$, где r — остаток от деления v на $n-1$. Обозначим через $T_{v,n}$ полный $(n-1)$ -дольный граф на v вершинах с r долями размера $q+1$ и $n-1-r$ долями размера q . Туран доказал, что $ex(v, K_n)$ равно количеству рёбер графа $T_{v,n}$ (нетрудно проверить, что это количество равняется оценке из пункта б) задачи 11.1).

Определение 11.2. Пусть G и G' — два графа на n вершинах с последовательностями степеней $d_n \geq d_{n-1} \geq \dots \geq d_1$ и $d'_n \geq d'_{n-1} \geq \dots \geq d'_1$. Мы будем говорить, что граф G *мажорирует* граф G' , если $d_i \geq d'_i$ для всех $i \in [1..n]$.

Теорема 11.2. (Р. Erdős, 1970.) Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Если граф G не содержит подграфа, изоморфного K_n , то существует $(n-1)$ -дольный граф H , который мажорирует G . Более того, если степенные последовательности графов G и H совпадают, то граф G изоморфен H .

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n . База для $n = 2$ очевидна. Предположим, что утверждение выполняется для $n - 1$. Рассмотрим такую вершину $u \in V(G)$, что $d_G(u) = \Delta(G)$. Пусть $G_1 = G(N_G(u))$, тогда, поскольку G не содержит K_n , то G_1 не содержит K_{n-1} и по индукционному предположению существует $(n-2)$ -дольный граф H_1 на множестве вершин $N_G(u)$, мажорирующий G_1 . Можно построить граф H_1 так, чтобы $d_{H_1}(y) \geq d_{G_1}(y)$ для любой вершины $y \in N_G(u)$.

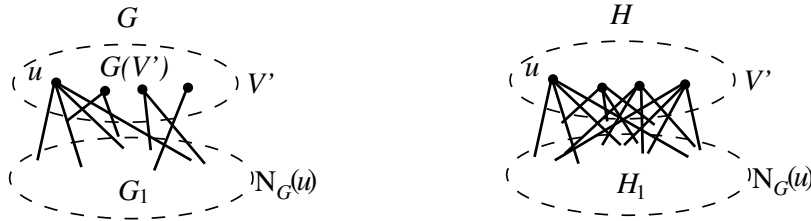


Рис. 11.1: Графы G и H .

Рассмотрим граф H с множеством вершин $V(G)$, в котором между вершинами множества $N_G(u)$ проведены рёбра графа H_1 , между вершинами множества $V' = V \setminus N_G(u)$ рёбер нет и каждая вершина из множества V' смежна с каждой вершиной множества $N_G(u)$. Очевидно, граф H является $(n-1)$ -дольным. Для каждой вершины $x \in V'$ мы имеем

$$d_H(x) = |N_G(u)| = \Delta(G) \geq d_G(x).$$

Для каждой вершины $y \in N_G(u)$ по построению графа H мы имеем

$$d_H(y) = |V'| + d_{H_1}(y) \geq |V'| + d_{G_1}(y) \geq d_G(y). \quad (11.1)$$

Таким образом, граф H мажорирует граф G .

Предположим, что степенные последовательности графов H и G совпадают. Тогда неравенство (11.1) обращается в равенство на всех вершинах множества $N_G(u)$, следовательно, степенные последовательности графов H_1 и G_1 совпадают, откуда по индукционному предположению следует изоморфность этих графов. Отсюда же следует, что каждая вершина множества $N_G(u)$ смежна в графе G со всеми вершинами множества V' . Но тогда каждая вершина множества V' смежна в графе G со

всеми вершинами множества $N_G(u)$. Из $|N_G(u)| = \Delta(G)$ следует, что рёбер между вершинами множества V' в графе G нет, то есть, графы G и H изоморфны. \square

Следствие 11.1. (Р. Turán, 1941.) При $n \geq 3$

$$ex(v, K_n) = \frac{(n-2)(v^2 - r^2)}{2(n-1)} + C_r^2,$$

где r — остаток от деления v на $n-1$. Если граф G на v вершинах не содержит полного подграфа на n вершинах и имеет $ex(v, K_n)$ рёбер, то G изоморфен $T_{v,n}$.

Доказательство. Пусть G — граф на v вершинах с $e(G) = ex(v, K_n)$. Тогда по теореме 11.2 существует $(n-1)$ -дольный граф H на n вершинах, мажорирующий G . Так как H , очевидно, не содержит изоморфного K_n подграфа, то $e(H) \leq ex(v, K_n) = e(G)$, следовательно, по теореме 11.2 графы G и H изоморфны. Нетрудно проверить, что из всех $(n-1)$ -дольных графов на v вершинах граф $T_{v,n}$ имеет строго наибольшее число рёбер, следовательно, H изоморфен $T_{v,n}$. Остается лишь заметить, что в графе $T_{v,n}$ ровно $\frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$ рёбер. \square

11.2.2 Графы без полного двудольного подграфа

Для неполного графа H редко удастся не то что найти все экстремальные примеры, но даже найти точное значение $ex(v, H)$. Иногда удастся найти асимптотику $ex(v, H)$ при $v \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай $H = K_{m,n}$. Он много сложнее случая полного графа. Сначала мы докажем оценку сверху на $ex(v, K_{m,n})$, потом в ряде случаев приведем серии примеров графов, в которых количество рёбер близко к экстремальному. Для построения примеров нам понадобятся числовые и алгебраические конструкции.

Оценка

Теорема 11.3. (Т. Kövari, V. T. Sós, Р. Turán, 1954.) Для натуральных $m, n \geq 2$, $v \geq m+n$ выполняется неравенство

$$ex(v, K_{m,n}) \leq \frac{1}{2} \cdot ((m-1)^{1/n} v^{(2-1/n)} + nv).$$

Доказательство. Пусть G — граф на v вершинах, не содержащий $K_{m,n}$, d_1, \dots, d_v — степени вершин графа G , а $d = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^v d_i$ — средняя степень вершины графа G .

Введем обозначение $x^n = x(x-1) \dots (x-n+1)$.

Лемма 11.1. Для графа G на $v \geq m + n$ вершинах, не содержащего $K_{m,n}$, выполняется неравенство

$$d^n \leq (m-1) \cdot (v-1)^{\underline{n-1}}. \quad (11.2)$$

Доказательство. Если $d \leq n-1$, то несложно понять, что

$$d^n < (n-1)! < (v-1)^{\underline{n-1}}$$

и доказываемое неравенство очевидно. Далее будем считать, что $d > n-1$.

1. Докажем, что $\sum_{i=1}^v d_i^n \leq (m-1)v^n$.

Для каждого множества $S \subset V(G)$, $|S| = n$, количество таких вершин $x \in V(G)$, что $N_G(x) \supset S$ не превосходит $m-1$ (иначе в графе будет подграф, изоморфный $K_{m,n}$). Следовательно, сложив по всем вершинам $x \in V(G)$ количество n -элементных подмножеств множества $N_G(x)$, мы получим не более, чем $(m-1) \cdot C_v^n$. таким образом, $\sum_{i=1}^v C_{d_i}^n \leq (m-1)C_v^n$, откуда домножением на $n!$ получаем доказываемое неравенство.

2. Остаётся доказать, что

$$v \cdot d^n \leq \sum_{i=1}^v d_i^n. \quad (11.3)$$

Мы будем менять числа d_1, d_2, \dots, d_v так, чтобы их сумма не изменялась и правая часть неравенства (11.3) не увеличивалась. Конечной целью этого процесса изменений будет замена каждого из этих чисел на их среднее арифметическое d .

Сначала добьемся того, чтобы все эти числа были не менее, чем $n-1$. Пусть это не так, рассмотрим наименьшее из них d_i , тогда $d_i < n-1$. Так как $d \geq n-1$, то существует j такое, что $d_j > n-1$. Заметим, что при $d_i \in [0..n-1]$ имеет место $d_i^n = 0$. Значит,

$$d_i^n + d_j^n = d_j^n \geq (d_j + d_i - n + 1)^n = (d_i + d_j - n + 1)^n + (n-1)^n,$$

так как все рассматриваемые числа натуральные и x^n возрастает при $x \geq n-1$. Следовательно, замена d_i и d_j на $(n-1)$ и $(d_i + d_j - n + 1)$ уменьшает правую часть неравенства (11.3). После нескольких таких замен все числа будут не меньше, чем $n-1$. Поскольку при $x \geq n-1$ функция x^n выпукла вниз, то заменив v чисел на их среднее арифметическое d мы не увеличим сумму значений x^n в них, то есть, неравенство (11.3) верно. Разделив это неравенство на количество вершин v , мы завершим доказательство леммы. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Так как $e(G) = \frac{v \cdot d}{2}$, для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство

$$d \leq d_0 = (m-1)^{1/n} v^{(1-1/n)} + n.$$

Так как $d_0 > n-1$, ввиду монотонности функции x^n при $x \geq n-1$ достаточно доказать, что при $d = d_0$ неравенство (11.2) не выполняется. Проверим это:

$$\begin{aligned} d_0^n &= \prod_{i=0}^{n-1} ((m-1)^{1/n} v^{(1-1/n)} + n - i) > ((m-1)^{1/n} v^{(1-1/n)})^n = \\ &= (m-1) \cdot v^{n-1} > (m-1) \cdot (v-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Отдельно остановимся на случае $n = m = 2$.

Следствие 11.2. Для $v \geq 4$ выполняется неравенство

$$ex(v, K_{2,2}) \leq \frac{v(1 + \sqrt{1 + 4(v-1)})}{4}. \quad (11.4)$$

Доказательство. При $n = m = 2$ неравенство (11.2) — квадратное и его легко решить, получив неравенство (11.4). □

Квадратный корень в неравенство (11.4) извлекается нацело при $v = p^2 + p + 1$ и оказывается, что $ex(p^2 + p + 1, K_{2,2}) \leq \frac{(p+1)(p^2+p+1)}{2}$. Неспроста возникают ассоциации с конечной проективной плоскостью. Именно на основе проективной плоскости над конечным полем мы построим пример серии экстремальных графов без $K_{2,2}$.

Проективная плоскость и графы без $K_{2,2}$

Итак, что же такое проективная плоскость над полем F_p (полем вычетов по модулю простого числа p)? Рассмотрим множество M_p всех упорядоченных троек (x, y, z) элементов F_p , не все из которых равны 0. Введем на M_p отношение эквивалентности: $(x, y, z) \sim (x_1, y_1, z_1)$ тогда и только тогда, когда существует такой ненулевой вычет $\lambda \in F_p$, что $x_1 = \lambda x$, $y_1 = \lambda y$, $z_1 = \lambda z$. Легко понять, что \sim — отношение эквивалентности, все множество M_p разбивается на классы эквивалентности. Так как ненулевой элемент $\lambda \in F_p$ можно выбрать $p-1$ способом, в каждом классе эквивалентности по отношению \sim ровно $p-1$ элемент множества M_p .

Точками проективной плоскости R_p будут как раз классы эквивалентности, количество которых, что нетрудно понять, равно $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$. Точки проективной плоскости будем записывать *однородными координатами* $(x : y : z)$ (такая запись подразумевает, что от домножения всех трех координат на ненулевой вычит $\lambda \in F_p$ точка не меняется).

Двойственными к точкам объектами на проективной плоскости являются прямые. Каждой точке $(a : b : c) \in R_p$ соответствует прямая $\ell_{a:b:c}$ — множество всех таких точек $(x : y : z) \in R_p$, что

$$ax + by + cz = 0. \quad (11.5)$$

Легко понять, что от выбора a, b, c в одном классе эквивалентности (то есть, умножения всех этих чисел на произвольный ненулевой вычит $\lambda \in F_p$) решения уравнения (11.5) не меняется, и элементы класса $(x : y : z)$ либо все являются решениями (11.5), либо все не являются. Таким образом, определение прямой корректно. Прямые и точки на проективной плоскости имеют много интересных свойств, которые мы сформулируем в следующей лемме.

Лемма 11.2. *Для любого $p \in \mathbb{P}$ выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Точка $(x : y : z)$ лежит на прямой $\ell_{a:b:c}$ тогда и только тогда, когда прямая $\ell_{x:y:z}$ проходит через точку $(a : b : c)$.*
- 2) *На любой прямой $\ell_{a:b:c}$ лежит ровно $p + 1$ точка.*
- 2а) *Через любую точку $(a : b : c)$ проходит ровно $p + 1$ прямая.*
- 3) *Любые две прямые на проективной плоскости имеют ровно одну общую точку.*
- 3а) *Через любые две точки на проективной плоскости проходит ровно одна прямая.*
- 4) *Существует не более $2(p + 1)$ таких точек $(a : b : c)$, что $(a : b : c) \in \ell_{a:b:c}$.*

Доказательство. 1) Очевидно, и то и другое означает, что $ax + by + cz = 0$. Благодаря такой двойственности объектов проективной плоскости пункт 2 эквивалентен пункту 3, а пункт 4 — пункту 5.

2) и 2а) Зафиксируем точку $(a : b : c)$. Нам нужно доказать, что количество таких точек $(x : y : z)$, что $ax + by + cz = 0$, есть $p + 1$. Так как a, b, c можно умножать на любой ненулевой вычит (не выходя из класса эквивалентности-точки проективной плоскости), то можно считать, что одно из чисел равно 1, пусть это будет c . Тогда $z = -(ax + by)$. Понятно, что при $x = y = 0$ мы получаем $z = 0$, а тройке $(0, 0, 0)$ не соответствует ни одной точки проективной плоскости. Каждой из $p^2 - 1$ остальных пар

(x, y) соответствует единственное z . Поделив $p^2 - 1$ пар $p - 1$ — размер класса эквивалентности — мы получим $p + 1$ точку $(x : y : z)$.

3) и 3а) Зафиксируем различные точки $(a_1 : b_1 : c_1)$ и $(a_2 : b_2 : c_2)$. Нам нужно найти количество таких точек $(x : y : z)$, что $a_1x + b_1y + c_1z = a_2x + b_2y + c_2z = 0$. Разберём два случая.

а. У точек $(a_1 : b_1 : c_1)$ и $(a_2 : b_2 : c_2)$ существуют две одноименные ненулевые координаты, например, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

Тогда домножением на подходящие множители можно добиться $c_1 = c_2 = 1$. Итак, у нас есть система уравнений в поле F_p :

$$a_1x + b_1y = -z, \quad a_2x + b_2y = -z.$$

Так как $(a_1 : b_1 : 1) \neq (a_2 : b_2 : 1)$, то определитель системы $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Следовательно, для любого z существует единственное решение системы (x_z, y_z) . Для $z = 0$ очевидно, единственным решением будет $x_z = y_z = 0$, но тройке $(0, 0, 0)$ не соответствует ни одной точки проективной плоскости. Таким образом, получается $p - 1$ тройка (x_z, y_z, z) , которым как раз соответствует единственный класс эквивалентности — единственная точка проективной плоскости.

б. У точек $(a_1 : b_1 : c_1)$ и $(a_2 : b_2 : c_2)$ нет двух одноименных ненулевых координат.

Тогда домножением на подходящие множители и перестановкой координат можно привести наши точки к виду $(a : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$. Тогда $z = 0$ и $ax = -y$. Легко понять, что единственным решением системы в этом случае будет точка $(1 : -a : 0)$.

4) На этот раз нам надо оценить количество таких точек проективной плоскости, что $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Для $p = 2$ все очевидно, пусть $p > 2$. Существует ровно p^2 упорядоченных пар (a, b) элементов F_p . Для каждой пары (a, b) существует не более чем два решения уравнения $c^2 = -a^2 - b^2$, так как квадратное уравнение в поле F_p имеет не более двух решений. Итого получили не более $2p^2$ решений. Учитывая, что все решения, конечно, разбиваются на классы эквивалентности (точки проективной плоскости), количество точек не превосходит $\left\lceil \frac{2p^2}{p-1} \right\rceil = 2p + 2$. \square

Замечание 11.1. На самом деле для любого нечетного p существует ровно $p + 1$ такая точка $(a : b : c)$ на проективной плоскости, что $(a : b : c) \in \ell_{a:b:c}$. Читатель может это доказать самостоятельно.

Перейдем к построению примера графа G_p без $K_{2,2}$ на основе проективной плоскости R_p . Впервые эта серия примеров была опубликована Т. Kövari, V. T. Sós и Р. Turán в 1954 году. Поставим в соответствие каждой точке проективной плоскости $(a : b : c)$ вершину $v_{a:b:c}$. Соединим

ребром вершины $v_{a:b:c}$ и $v_{x:y:z}$ при $ax + by + cz = 0$ (кроме случаев, в которых образуются петли). Тогда вершина $v_{a:b:c}$ соединена с $p + 1$ вершинами, соответствующими точкам прямой $\ell_{a:b:c}$. По свойству 3 из леммы 11.2 две прямые проективной плоскости имеют ровно одну общую точку (а никак не две!), следовательно, G_p не содержит $K_{2,2}$. Отметим, что непроведенные нами петли соответствуют таким точкам $(a : b : c)$, что $(a : b : c) \in \ell_{a:b:c}$, а таких точек на проективной плоскости по лемме 11.2 не более $2p + 2$. Таким образом,

$$v(G_p) = p^2 + p + 1, \quad e(G_p) \geq \frac{(p^2 + p + 1)(p + 1)}{2} - p - 1.$$

Мы получим классический пример графа без $K_{2,2}$, в котором количество ребер очень близко к оптимальной оценке (11.4). Подставив $v = p^2 + p + 1$ в неравенство (11.4), мы получим для $v = p^2 + p + 1$ разность между верхней и нижней оценками всего лишь $p + 1$, что по порядку примерно \sqrt{v} . При точной оценке количества удаленных петель мы можем получить разницу $\frac{p+1}{2}$ между оценками. С помощью теоретико-числовых фактов о плотности расположения простых чисел и приведенного примера мы можем вывести асимптотику $ex(v, K_{2,2})$ при $v \rightarrow \infty$. Однако, сначала мы покажем серию примеров графов без $K_{2,n}$.

11.2.3 Корни из единицы в F_q и графы без $K_{2,n+1}$

Мы опишем несложную алгебраическую конструкцию, дающую серию примеров графов без $K_{2,n+1}$. Эту конструкцию придумал Z. Füredi в 1996 году. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, $q = p^{\varphi(n)}$ (через $\varphi(n)$, как обычно, мы обозначаем функцию Эйлера).

Рассмотрим конечное поле F_q . Поскольку $q - 1 = (p^{\varphi(n)} - 1) : n$, а F_q — поле разложения многочлена

$$x^q - x = x(x^{q-1} - 1) : x^n - 1,$$

в этом поле многочлен $x^n - 1$ раскладывается на линейные множители. Значит, в F_q содержатся все корни n -й степени из единицы. Обозначим эти корни через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Рассмотрим множество упорядоченных пар (x, y) ненулевых элементов поля F_q . Введем на этих парах отношение \sim : будем считать, что $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, если существует такое $i \in [1..n]$, что $x_1 = \varepsilon_i x_2$, $y_1 = \varepsilon_i y_2$. Легко видеть, что \sim — отношение эквивалентности. В каждом классе эквивалентности будет ровно n пар. Мы будем обозначать класс эквивалентности пары (a, b) через $\langle a, b \rangle$. Обозначим через $M_n(p)$ множество

всех таких классов эквивалентности. Нетрудно видеть, что в $M_n(p)$ ровно $\frac{(q-1)^2}{n}$ элементов. Элементы $M_n(p)$ мы будем называть точками.

Каждой точке $\langle a, b \rangle$ поставим в соответствие множество $T_{\langle a, b \rangle}$ точек $\langle x, y \rangle$ таких, что $(ax + by)^n = 1$. Нетрудно видеть, что определение $T_{\langle a, b \rangle}$ корректно, то есть не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности.

Лемма 11.3. 1) Для любой точки $\langle a, b \rangle$ множество $T_{\langle a, b \rangle}$ состоит ровно из $q - 2$ точек.

2) Для любых двух разных точек $\langle a, b \rangle$ и $\langle c, d \rangle$ пересечение множеств $T_{\langle a, b \rangle}$ и $T_{\langle c, d \rangle}$ содержит не более n точек.

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольный элемент $x \in F_q$. Поскольку $(ax + by)^n = 1$ тогда и только тогда, когда $ax + by = \varepsilon_i$ для некоторого i , то элементы $y_i = \frac{\varepsilon_i - ax}{b}$ дают n пар (x, y_i) — решений уравнения $(ax + by)^n = 1$, и других пар с элементом x на первом месте нет. Аналогично, с каждым фиксированным y на втором месте получится ровно n пар решений. Поскольку $x = y = 0$, очевидно, не является решением нашего уравнения, мы имеем ровно $n(q - 2)$ пар решений, в которых оба числа не равны 0. Очевидно, эти пары разбиваются на $q - 2$ класса эквивалентности и дают нам $q - 2$ точки.

2) Пусть $\langle x, y \rangle \in T_{\langle a, b \rangle} \cap T_{\langle c, d \rangle}$. Это означает, что

$$(ax + by)^n = (cx + dy)^n = 1 \quad (11.6)$$

Тогда $ax + by = \varepsilon_i(cx + dy)$, откуда

$$(\varepsilon_i c - a)x = (b - \varepsilon_i d)y.$$

Если одно из этих выражений равно нулю, то второе также равно нулю, и это означает, что $(a, b) \sim (c, d)$, то есть $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$. Значит, эти выражения не равны нулю, тогда определено и не равно нулю

$$k_i = \frac{\varepsilon_i c - a}{b - \varepsilon_i d}.$$

Подставив $y = k_i x$ в уравнение (11.6), мы получим $((a + bk_i)x)^n = 1$, что равносильно существованию $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такого, что $(a + bk_i)x = \varepsilon_j$. Это уравнение при $a + bk_i \neq 0$ имеет n решений, образующих один класс эквивалентности, при $a + bk_i = 0$ решений нет. Поскольку есть n вариантов коэффициента k_i , в пересечении $T_{\langle a, b \rangle} \cap T_{\langle c, d \rangle}$ не более n точек. \square

Для $v = \frac{(q-1)^2}{n}$ мы построим не содержащий подграфа $K_{2,n+1}$ граф с v вершинами и количеством ребер, близким к оценке (11.4).

Построим граф $G_n(p)$, вершины которого будут соответствовать точкам из $M_n(p)$, и каждую вершину $v_{\langle a,b \rangle}$ мы соединим со всеми такими вершинами $v_{\langle x,y \rangle}$, что $\langle x,y \rangle \in T_{\langle a,b \rangle}$, исключая петли. Количество исключенных петель не превосходит количества точек $\langle a,b \rangle$ таких, что $\langle a,b \rangle \in T_{\langle a,b \rangle}$, то есть, $(a^2 + b^2)^n = 1$. Это означает, что существует такое $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $a^2 + b^2 = \varepsilon_j$. Для каждого ненулевого $a \in F_q$ есть не более $2n$ вариантов выбора b , следовательно, количество решений этого уравнения не превосходит $2n(q-1)$, и они, очевидно, разбиваются на не более, чем $2(q-1)$ точек.

Таким образом, с помощью пункта 1 леммы 11.3 мы получаем

$$v(G_n(p)) = \frac{(q-1)^2}{n},$$

$$e(G_n(p)) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(q-2)(q-1)^2}{n} - 2(q-1) \right) > \frac{1}{2} \cdot (n^{1/2} \cdot v^{3/2} - v).$$

Построенный граф $G_n(p)$ не будет содержать подграфа $K_{2,n+1}$, так как для любых двух вершин $\langle a,b \rangle$ и $\langle c,d \rangle$ по лемме 11.3 мы имеем

$$T_{\langle a,b \rangle} \cap T_{\langle c,d \rangle} \leq n.$$

Теорема 11.4. При $v \rightarrow \infty$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$

$$ex(v, K_{2,n+1}) = \frac{1}{2} \cdot n^{1/2} \cdot v^{3/2} + o(v^{3/2}).$$

Доказательство. Классический результат теории чисел говорит нам, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого x , между x и $x + \varepsilon x^{2/3}$ есть простое число p . Воспользуемся этим фактом.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует такое v_ε , что для любого $v > v_\varepsilon$ существует такое $p \in \mathbb{P}$, что

$$(\sqrt{nv} + 1)^{1/\varphi(n)} > p > (\sqrt{nv(1-\varepsilon)} + 1)^{1/\varphi(n)}.$$

Пусть $v_p = \frac{(p^{\varphi(n)} - 1)^2}{n}$. Поскольку $ex(v, K_{2,n+1})$ не убывает по v и $v > v_p > v(1-\varepsilon)$, то выполняется цепочка неравенств

$$ex(v, K_{2,n+1}) \geq ex(v_p, K_{2,n+1}) > \frac{(nv_p)^{3/2}}{2} - (nv_p)^{1/2} >$$

$$\frac{(nv(1-\varepsilon))^{3/2}}{2} - (nv)^{1/2} > \frac{(nv)^{3/2}(1-4\varepsilon)}{2} - (nv)^{1/2}.$$

Учитывая оценку сверху из теоремы 11.3, при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получается доказываемая оценка. \square

Глава 12

Остовные деревья

В этой главе всегда подразумевается, что граф G — связный. Мы обсудим вопросы о количестве остовных деревьев в графе G , о наличии остовных деревьев с достаточно большим количеством висячих вершин и о выделении в графе нескольких непересекающихся остовных деревьев.

12.1 Количество остовных деревьев

Начнём с классического вопроса, исследованного еще в конце 19 века.

Определение 12.1. Обозначим через $ST(G)$ количество остовных деревьев графа G .

Следующий результат иногда называют *формулой Кэли*.

Теорема 12.1. (А. Cayley, 1889.) Пусть G — граф, в котором возможны петли и кратные рёбра, а ребро $e \in E(G)$ — не петля. Тогда $ST(G) = ST(G - e) + ST(G * e)$.

Доказательство. Количество остовных деревьев графа G , не содержащих ребра e , очевидно, равно $ST(G - e)$. Между остовными деревьями, содержащими ребро e и остовными деревьями графа $G * e$ существует взаимно однозначное соответствие $T \rightarrow T * e$ (где T — остовное дерево графа G , $e \in E(T)$). \square

С помощью формулы Кэли можно вычислить количество остовных деревьев произвольного графа, однако, этот процесс весьма небыстрый. Для ряда графов можно напрямую вычислить количество остовных деревьев. Наверное, наиболее известный результат в этом направлении —

подсчёт количества остовных деревьев полного графа, который был получен Артуром Кэли также в 1889 году. Вместо первоначального доказательства со сложными рекуррентными соотношениями мы приведём ставшее даже более классическим доказательство Прюфера, опубликованное в 1918 году. Каждому дереву будет поставлен в соответствие так называемый *код Прюфера*.

Теорема 12.2. (А. Cayley, 1889.) $ST(K_n) = n^{n-2}$.

Доказательство. (Н. Prüfer, 1918.) Пусть $V(K_n) = [1..n]$. Мы построим взаимно однозначное соответствие между остовными деревьями K_n (то есть, всеми деревьями на наших n вершинах) и последовательностями длины $n-2$, в которых каждый член принимает натуральное значение от 1 до n . Этого достаточно для доказательства теоремы.

Пусть T — дерево на n занумерованных вершинах. Построим соответствующую ему последовательность t_1, \dots, t_{n-2} . Пусть ℓ_1 — висющаяся вершина наименьшего номера в дереве T , тогда t_1 — единственная смежная с ℓ_1 вершина дерева T , $T_1 = T - \ell_1$. Затем найдём в T_1 висющую вершину наименьшего номера ℓ_2 , пусть t_2 — единственная смежная с ℓ_2 вершина дерева T_1 , $T_2 = T_1 - \ell_2$, и так далее, будем повторять процесс, пока не получим последовательность длины $n-2$ (при этом, останется дерево T_{n-2} на двух вершинах).

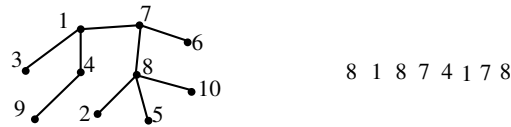


Рис. 12.1: Дерево и его код Прюфера.

Построим обратное соответствие. Пусть дана последовательность $t_1, \dots, t_{n-2} \in V = [1..n]$. Отметим, что по построению каждая вершина x встречается в последовательности дерева T ровно $d_T(x) - 1$ раз, поэтому вершины, которые в этой последовательности не встречаются, и есть висющие вершины дерева. Выберем такую вершину ℓ_1 с наименьшим номером и соединим её с t_1 , после чего удалим ℓ_1 из списка номеров: $V_1 = V \setminus \{\ell_1\}$. Теперь выберем вершину $\ell_2 \in V_1$ с наименьшим номером, которая не встречается в последовательности t_2, \dots, t_{n-2} , соединим ℓ_2 с t_2 и положим $V_2 = V_1 \setminus \{\ell_2\}$. И так далее, повторим такую операцию $n-2$ раз. В результате будет использована вся последовательность и проведено $n-2$ ребра, останется множество V_{n-2} из двух вершин и одно непроведённое ребро дерева T . Именно две вершины из V_{n-2} и нужно соединить

ребром: их степени в имеющемся графе равны количеству вхождений этих вершин в последовательность t_1, \dots, t_{n-2} , то есть, на 1 меньше, чем их степени в дереве T . \square

Задача 12.1. Докажите, что $ST(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$.

12.2 Количество висячих вершин

В этом разделе мы обсудим гораздо более современные результаты.

Определение 12.2. Пусть F — связный граф. Мы обозначим через $u(T)$ наибольшее возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G .

Нетрудно понять, что если T — дерево, то $u(T)$ — количество его висячих вершин.

12.2.1 Теорема о промежуточных значениях

Именно так называется следующий результат. Мы докажем, что на самом деле все количества висячих вершин в остовных деревьях связного графа G от минимума до максимума достижимы.

Теорема 12.3. (S. Schuster, 1983.) Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Тогда для любого натурального $k \in [m..n]$ существует остовное дерево графа G ровно с k вершинами.

Доказательство. Пусть T_1 и T^* — остовные деревья с $u(T_1) = m$ и $u(T^*) = n$. Начиная с дерева T_1 будем выполнять следующий шаг. Пусть уже построена последовательность остовных деревьев T_1, \dots, T_i графа G . Если $T_i \neq T^*$, то существует ребро $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$, пусть $G_i = T_i + e_i$. В графе G_i есть ровно один простой цикл C_i , проходящий по ребру e_i . Понятно, что $E(C_i) \not\subset E(T^*)$, поэтому существует ребро $f_i \in E(C_i) \setminus E(T^*)$. Пусть $T_{i+1} = G_i - f_i = T_i + e_i - f_i$.

Поскольку в дереве T_{i+1} больше рёбер из $E(T^*)$, чем в T_i , в некоторый момент мы получим $T_k = T^*$. Рассмотрим последовательность деревьев $T_1, T_2, \dots, T_k = T^*$. Деревья T_i и T_{i+1} отличаются двумя рёбрами, поэтому легко видеть, что $|u(T_i) - u(T_{i+1})| \leq 2$. Следовательно, количества висячих вершин деревьев нашей последовательности деревьев покрывают отрезок натурального ряда $[m..n]$ с пробелами не более чем в одно число.

Пусть $t \in [m..n]$ и в нашей последовательности нет дерева с t вершинами. Тогда существует такое j , что $u(T_j) = t - 1$ и $u(T_{j+1}) = t + 1$. По построению, $T_{j+1} = G_j - f_j$ и $T_j = G_j - e_j$, пусть $f_j = ab$, $e_j = xy$. Тогда $d_{G_j}(a) = d_{G_j}(b) = 2$ (обе вершины a и b становятся висячими после удаления ребра e_j), $d_{G_j}(x) > 2$ и $d_{G_j}(y) > 2$ (вершины x и y не становятся висячими после удаления ребра f_j). Таким образом, в цикле C_j есть вершины степени 2 и есть вершины степени более 2, тогда одно из рёбер $e' = uw \in E(C_i)$ таково, что $d_{G_j}(u) > 2$ и $d_{G_j}(w) = 2$. Значит, в дереве $T' = G_i - e'$ ровно одна из вершин $V(C_i)$ — вершина w — становится висячей, то есть, $u(T') = t$. Таким образом, утверждение теоремы доказано. \square

12.2.2 Минимальная степень и количество висячих вершин

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. В 1981 году Линиал предположил, что $u(G) \geq \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G) + c$ при $\delta(G) \geq 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d , для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$, мы расскажем об этом в разделе 12.2.2. Таким образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ и $d = 4$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест (1991), для $d = 5$ — Григгс и Ву (1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*. С развитием этого метода для $d \geq 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ Алона и других математиков следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым. Мы приведем доказательство гипотезы для случая $d = 3$.

Экстремальные примеры

Заметим, что если в графе G существует остовное дерево, в котором все вершины из множества $W \subset V(G)$ являются висячими, то удаление всех вершин любого подмножества $U \subset W$ не нарушает связности графа G .

Обозначим через K_{d+1}^- граф, полученный из полного графа K_{d+1} в результате удаления одного ребра. Граф G_n^d будет “цепочкой” из n блоков, в которой два крайних блока изоморфны графу K_{d+1} , а остальные $n - 2$ блока изоморфны K_{d+1}^- . В k -ом (некрайнем) блоке обозначим через a_k

и b_k две несмежные вершины. В первом блоке одну из вершин обозначим через a_1 , в n -ом блоке одну из вершин обозначим через b_n . Для всех $k \in [1..n-1]$ соединим вершины a_k и b_{k+1} . Мы получили граф G_n^d , в котором $v(G_n^d) = n(d+1)$ и $\delta(G_n^d) = d$.

Все вершины a_k (при $1 \leq k \leq n-1$) и b_k (при $2 \leq k \leq n$) являются точками сочленения и поэтому не могут быть висячими вершинами в остовном дереве графа G_n^d . Рассмотрим k -й (некрайний) блок. Кроме двух точек сочленения a_k и b_k в этом блоке есть еще $d-1$ вершина. Однако, при удалении всех этих вершин нарушается связность графа G_n^d , значит, не более чем $d-2$ вершины из каждого некрайнего блока могут одновременно быть висячими вершинами в остовном дереве графа G_n^d . В каждом из двух крайних блоков точки сочленения не могут быть висячими вершинами. Таким образом,

$$u(G_n^d) \leq n(d-2) + 4 = \frac{d-2}{d+1} \cdot v(G_n^d) + 2.$$

Для некоторых значений d существуют принципиально другие серии экстремальных примеров. Пусть $d = 3m + 2$, графы A_1, A_2, \dots, A_n изоморфны графу K_{m+1} . Соединим эти графы в кольцо: все пары вершин графов A_i и A_{i+1} (нумерация циклическая) сделаем попарно смежными. Для полученного таким образом графа H_n , очевидно, $\delta(H_n) = 3m + 2$ и $v(H_n) = n(m+1)$. Нетрудно доказать, что

$$u(H_n) = nm + 2 = \frac{d-2}{d+1} \cdot v(G_n^d) + 2.$$

Отметим, что все графы H_n являются $(2m+2)$ -связными, что существенно отличает эту серию от серии графов $\{G_n^d\}$, в которых любые два соседних блока цепочки соединены мостом. Эти две серии примеров показывают нам разнообразие локальной структуры экстремальных примеров.

Алгоритм построения остовных деревьев

Теорема 12.4. (D. J. Kleitman, D. B. West, 1991.) *В связном графе G с $\delta(G) \geq 3$ существует остовное дерево, в котором не менее, чем $v(G) \cdot \frac{1}{4} + 2$ висячих вершин.*

Доказательство. Мы приведем алгоритм построения остовного дерева с соответствующим количеством висячих вершин. Алгоритм будет выделять в графе G дерево, последовательно, по шагам добавляя к нему вершины.

Пусть в некоторый момент уже построено дерево F — подграф графа G .

Определение 12.3. Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если все вершины графа G , смежные с x , входят в дерево F .

Количество мёртвых вершин дерева F мы обозначим через $b(F)$.

Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения.

Для дерева F мы определим

$$\alpha(F) = \frac{3}{4}u(F) + \frac{1}{4}b(F) - \frac{1}{4}v(F).$$

Мы хотим построить такое остовное дерево T графа G , что $\alpha(T) \geq 2$. Так как в остовном дереве все висячие вершины — мертвые, то $u(T) = b(T) = \frac{1}{4}v(F) + \alpha(T)$ и дерево T нас устраивает.

Мы будем строить дерево последовательно, на каждом шаге добавляя к нему новые вершины. Подробнее остановимся на шаге алгоритма. Пусть после нескольких шагов построения мы получили дерево F (естественно $V(F) \subset V(G)$, $E(F) \subset E(G)$). Пусть в результате шага добавилось Δv вершин, количество висячих вершин увеличилось на Δu , а количество мертвых вершин на Δb .

Определение 12.4. Назовем доходом шага S величину

$$P(S) = \frac{3}{4}\Delta u + \frac{1}{4}\Delta b - \frac{1}{4}\Delta v.$$

Мы будем выполнять только шаги с неотрицательным доходом. При вычислении дохода шага мы будем полагать, что все добавленные вершины, про которые это не сказано, не являются мёртвыми. Это предположение лишь уменьшит доход шага.

Замечание 12.1. Понятно, что для итогового остовного дерева T число $\alpha(T)$ будет складываться из $\alpha(F')$ (где F' — базовое дерево, с которого мы начали построение) и суммы доходов всех шагов.

Мы опишем несколько вариантов шага алгоритма. К очередному варианту мы будем переходить только когда убедимся в невозможности всех предыдущих. Введём обозначение $W = V(G) \setminus V(F)$. Итак, вот какие шаги мы будем выполнять.

S1. В дереве F есть невисячая вершина x , смежная с $y \in W$.

Добавим в дерево вершину y , получим $\Delta v = \Delta u = 1$ и

$$p(S1) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

S2. В дереве F есть вершина x , смежная хотя бы с двумя вершинами из W .

Добавим в дерево эти две вершины, получим $\Delta v = 2$, $\Delta u = 1$ и

$$p(S2) \geq \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

S3. Существует вершина $y \in W$, смежная с деревом F и хотя бы с двумя вершинами из W .

Добавим в дерево y и две смежные с ней вершины из W . Получим $\Delta v = 3$, $\Delta u = 1$ и

$$p(S3) \geq \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

S4. Существуют не вошедшие в дерево F вершины.

Тогда существует и смежная с деревом F вершина $y \in W$. Так как невозможно выполнить $S3$, то y смежна не более, чем с одной вершиной из W . Однако, $d_G(y) \geq 3$, следовательно, вершина y смежна с двумя вершинами $x, x' \in V(F)$. Присоединим y к x . Так как невозможно выполнить $S1$ и $S2$, вершина x' — висющаяся в дереве F и смежна ровно с одной вершиной из W — с вершиной y . Поэтому в новом дереве вершина x' — мёртвая. Таким образом, $\Delta v = 1$, $\Delta b \geq 1$ и $P(S4) \geq 0$.

Замечание 12.2. Если невозможно выполнить ни один из вариантов шага, то, очевидно, уже построено остовное дерево графа G .

Базовое дерево.

Вернемся к началу нашего построения. Мы хотим начать с базового дерева F' с $\alpha(F') \geq \frac{3}{2}$. Потом мы объясним, почему в процессе построения добавится еще $\frac{1}{2}$. Разберём два случая.

B1. В графе G есть вершина a степени не менее 4.

Тогда базовое дерево F' — это дерево, в котором вершина a соединена с $k \geq 4$ вершинами из ее окрестности. Мы имеем $v(F') = k + 1$, $u(F') = k$ и

$$\alpha(F') \geq \frac{3}{4} \cdot k - \frac{1}{4} \cdot (k + 1) = \frac{2k - 1}{4} > \frac{3}{2}.$$

B2. В графе G все вершины имеют степень 3.

Сначала рассмотрим дерево F' , в котором вершина a соединена с тремя вершинами b_1, b_2, b_3 из своей окрестности. Очевидно,

$$\alpha(F') \geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{4}.$$

Нам не хватает $\frac{1}{4}$ и в случае, когда одна из трёх висячих вершин дерева F' — мёртвая, она обеспечивает нам дополнительную $\frac{1}{4}$ и $\alpha(F') \geq \frac{3}{2}$.

Остаётся случай, когда каждая из вершин b_1, b_2, b_3 смежна хотя бы с одной вершиной вне $V(F')$. В нашем случае все вершины графа G имеют степень 3, а сумма степеней вершин индуцированного подграфа $G(\{a, b_1, b_2, b_3\})$ чётна, поэтому одна из вершин b_1, b_2, b_3 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами не из $V(F)$. Тогда мы выполним шаг $S2$ и добавим доход в $\frac{1}{2}$, что нам более чем достаточно.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать, что шаги построения принесут нам неучтённый выше доход не менее, чем $\frac{1}{2}$. Для этого мы посмотрим на конец построения.

Если последним был шаг $S1$, то его доход не менее $\frac{1}{2}$. Пусть это был шаг $S2$ или $S3$. Тогда мы добавили две новые вершины, которые должны оказаться мёртвыми, так как больше шагов не выполнялось. Это приносит дополнительный доход хотя бы $\frac{1}{2}$. Отметим, что даже если последним был шаг $S1$, описанный в базе $B2$, то доход за эти две мёртвые вершины мы в нём не учитывали.

Пусть последним был шаг $S4$. Тогда добавленная вершина y оказалась мёртвой (что добавляет нам $\frac{1}{4}$), а значит, y была смежна только с вершинами дерева F . Но $d_G(y) = 3$, то есть, таких вершин было три, а не две, как мы посчитали при описании шага $S4$. Вот мы и нашли еще одну мёртвую вершину и еще одну $\frac{1}{4}$, завершив тем самым доказательство теоремы. \square

12.2.3 Остовные деревья в графах с вершинами степеней 1 и 2

В описанном выше методе мертвых вершин существенно используется ограничение $\delta(G) \geq 3$. В этом разделе мы допускаем наличие в графе вершин степеней 1 и 2, причем висячие вершины внесут свой вклад в оценку на $u(G)$.

Итак, пусть G — связный граф. Через $S(G)$ мы будем обозначать множество всех вершин степени не 2 в графе G , пусть $s(G) = |S(G)|$. Мы докажем, что $u(G) \geq \frac{1}{4}(s(G) - 2) + 2$ и построим бесконечную серию примеров графов, для которых эта оценка достигается.

Теорема 12.5. (Д. Карпов, А. Банкевич, 2011.) Пусть G — связный граф, в котором $v(G) \geq 2$ и s вершин имеют степень, отличную от 2. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее $\frac{1}{4}(s - 2) + 2$ висячих вершин.

В качестве очевидного следствия мы получаем оценку на количество висячих вершин в остовном дереве графа без вершин степени 2.

Следствие 12.1. Пусть G — связный граф без вершин степени 2, причем $v(G) \geq 2$. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее, чем $\frac{1}{4}(v(G) - 2) + 2$ висячих вершин.

Доказательство теоремы 12.5. Мы будем считать, что в графе G есть висячие вершины, иначе можно воспользоваться теоремой 12.4. Пусть U — множество всех висячих вершин графа G , W — множество всех вершин графа G , смежных с висячими, X — множество всех не вошедших в $U \cup W$ вершин графа G , смежных с вершинами из W и, наконец, Y — множество всех остальных вершин. Пусть $H = G - U$. Очевидно, граф H связан.

Доказательство теоремы 12.5 будем вести индукцией по размеру графа: приступая к доказательству для графа G будем считать утверждение доказанным для графов с меньшим числом вершин и графов с таким же числом вершин, но меньшим числом рёбер.

Базу индукции составит очевидный случай, когда в графе H не более двух вершин. Все возможные в этом случае варианты нетрудно перебрать.

В индукционном переходе мы разберём несколько случаев.

1. В графе G есть вершина a степени 2.

Если a — точка сочленения, то, стянув инцидентное ей ребро, мы получим меньший граф G' с $s(G') = s(G)$ и $u(G') = u(G)$. Если же a — не точка сочленения, то рассмотрим инцидентное ей ребро ab . Это ребро — не мост, а значит, граф $G' = G - ab$ связан. Очевидно, $a \in S(G') \setminus S(G)$. Отметим, что $S(G) \setminus S(G') \subseteq \{b\}$, так как степени отличных от a и b вершин в графах G и G' совпадают. Следовательно, $s(G') \geq s(G)$. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G , мы имеем $u(G') \leq u(G)$. В обоих случаях утверждение теоремы для графа G следует из утверждения теоремы для меньшего графа G' .

Далее мы будем считать, что все вершины графа G имеют степень не 2, то есть $s(G) = v(G)$.

2. Граф H не двусвязен.

Пусть a — точка сочленения графа H . Тогда a — точка сочленения графа G , разбивающая H хотя бы на две части. Это означает, что существуют такие связные графы G_1 и G_2 , для которых

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\} \quad \text{и} \quad v(G_1), v(G_2) > 2.$$

Для $i \in \{1, 2\}$ рассмотрим граф G'_i , полученный из G_i присоединением новой висячей вершины x_i к вершине a (см. рисунок 12.2). Две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 мы будем считать различными вершинами.

Тогда граф G получается из G'_1 и G'_2 склейкой вершин x_1 и x_2 в одну вершину x и последующим стягиванием двух инцидентных x мостов (при этом две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 склеятся в вершину a графа G).

Вершина a — точка сочленения графа G , поэтому легко понять, что любое остовное дерево T графа G получается из остовных деревьев T_1 и T_2 графов G'_1 и G'_2 соответственно склеиванием по висячим вершинам x_1 и x_2 и стягиванием двух мостов, инцидентных a , поэтому $u(T) = u(T'_1) + u(T'_2) - 2$ и, как нетрудно понять, $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$.

Нетрудно понять, что $v(G'_1) < v(G)$ и $v(G'_2) < v(G)$. Тогда по индукционному предположению $u(G'_1) \geq \frac{s(G'_1)-2}{4} + 2$ и $u(G'_2) \geq \frac{s(G'_2)-2}{4} + 2$.

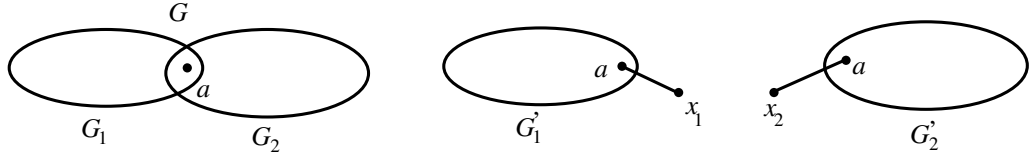


Рис. 12.2: разрез графа по точке сочленения a .

Отметим, что $s(G) = v(G)$ и все вершины графов G'_1 и G'_2 , кроме a , имеют степень не 2. Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G'_1}(a) + d_{G'_2}(a) - 2$, то вершина a имеет степень не 2 хотя бы в одном из графов G'_1 и G'_2 . Поэтому

$$s(G) = v(G) = v(G'_1) + v(G'_2) - 3 \leq s(G'_1) + s(G'_2) - 2.$$

Таким образом,

$$u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2 \geq \frac{s(G'_1) - 2}{4} + \frac{s(G'_2) - 2}{4} + 2 \geq \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

Далее мы будем считать, что в графе H нет точек сочленения. Это означает, что все точки сочленения графа G — это вершины множества W (вершина $w \in W$ отделяет смежные с ней висячие вершины от остальных вершин графа).

Для дальнейших продвижений нам потребуется лемма.

Лемма 12.1. Пусть $a, b \in V(G)$ — смежные вершины, а G' — индуцированный подграф на компоненте связности графа $G - a$, содержащей вершину b . Тогда, если b — точка сочленения графа G' , то $u(G) \geq u(G') + 1$.

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Построим остовное дерево T графа G , присоединив вершину a

к b и далее присоединив к вершине a все отличные от G' компоненты связности графа $G - a$. Вершина b — точка сочленения графа G' , поэтому она не является висячей вершиной в дереве T' . Следовательно, $u(G) \geq u(T) \geq u(T') + 1 = u(G') + 1$. \square

Продолжим разбор случаев в доказательстве теоремы 12.5.

3. *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что $d_G(a) \leq 3$, a, b — точка сочленения графа $G - a$.*

Пусть G' — индуцированный подграф на компоненте связности графа $G - a$, содержащей b . Из двусвязности H понятно, что в G' не попала только вершина a и смежные с ней висячие вершины. Таким образом,

$$S(G) \setminus S(G') \subseteq \{a\} \cup N_G(a), \quad \text{поэтому} \quad s(G') \geq s(G) - d_G(a) - 1 \geq s(G) - 4.$$

По индукционному предположению, лемме 12.1 и доказанному выше мы имеем

$$u(G) \geq u(G') + 1 \geq \frac{s(G') - 2}{4} + 3 \geq \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

4. *Существуют такие смежные вершины $x, y \in V(H)$, что $d_G(x) \geq 4$, $d_G(y) \geq 4$.*

Тогда рассмотрим граф $G' = G - xy$. Поскольку граф H двусвязен, то граф G' — связан и для него утверждение теоремы уже доказано. Понятно, что $s(G') = s(G)$, а остовное дерево графа G' является остовным деревом G , поэтому утверждение доказано и для G .

5. Подытожим разобранные случаи и выясним свойства, которыми теперь обладает граф G .

Лемма 12.2. *Если граф G не удовлетворяет условию ни одного из разобранных случаев, то он удовлетворяет следующим условиям.*

- 1° *Никакие две вершины множества W не смежны.*
- 2° *Все вершины множества W имеют степень 3.*
- 3° *Множество X непусто и состоит из вершин степени более 3.*
- 4° *Каждая вершина множества W смежна с одной висячей вершиной графа G и двумя вершинами множества X .*

Доказательство. Рассмотрим вершину $w \in W$ и смежную с ней висячую вершину $u \in U$. Вершина w — точка сочленения, отделяющая u от остальных вершин графа. Если вершина w смежна с отличной от u вершиной степени не более трёх, то граф был бы рассмотрен в пункте 3. Поэтому все смежные с w вершины, кроме ровно одной висячей, имеют

степень более трёх. Таким образом, степени всех вершин множества X больше 3.

Докажем, что W — независимое множество графа G . Пусть вершины $w, w' \in W$ смежны. Тогда хотя бы одна из них имеет степень не более 3, пусть $d_G(w') \leq 3$. Но в этом случае вершина $w \in W$ смежна с висячей вершиной степени не более 3.

Итак, W — независимое множество. Тогда каждая вершина $w \in W$ смежна хотя бы с $d_G(w) - 1 \geq 2$ вершинами из X , следовательно, множество X непусто. Так как степени вершин множества X больше 3, то $d_G(w) = 3$. Таким образом, все утверждения леммы доказаны. \square

Рассмотрим вершину $w \in W$ и смежные с ней вершины $x, x' \in X$. Пусть $a \neq w$ — смежная с x вершина. Легко понять, что либо $a \in W$, либо $a \in Y$ и в обоих случаях $d_G(a) = 3$ (см. рисунок 12.3).

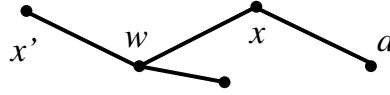


Рис. 12.3: Вершины w, x, x' и a .

Пусть $G^* = G - x'w$, а G' — индуцированный подграф на компоненте связности графа $G^* - a$, содержащей вершину w . Очевидно, вершина x — точка сочленения графа G' (отделяющая w и смежную с ней висячую вершину от остальных вершин графа), поэтому, применив лемму 12.1 к графам G^* и G' , мы получим $u(G^*) \geq u(G') + 1$.

Смежная с a вершина x не является точкой сочленения графа $G - a$ (иначе наш граф уже был бы рассмотрен в пункте 3), поэтому ребро xw — не мост графа $G - a$. Так как w смежна с висячей вершиной и двумя вершинами $x, x' \in X$, это означает, что $x'w$ — также не мост графа $G - a$. Следовательно, в графе $G - a - x'w = G^* - a$ все вершины, кроме a и — в случае, когда $a \in W$ — смежной с ней висячей вершины, входят в G' .

Все вершины из $V(G)$, кроме a, x', w и вершин из $N_G(a)$ входят в граф G' и имеют там такую же степень, как в графе G . Для вершины $x \in N_G(a)$ мы имеем $d_{G'}(x) = d_G(x) - 1 \geq 3$. Если $x' \notin N_G(a)$, то $d_{G'}(x') = d_G(x') - 1 \geq 3$. Следовательно, множество $S(G) \setminus S(G')$ состоит не более, чем из $d_G(a) + 1 \leq 4$ вершин: это могут быть w, a и отличные от x вершины из $N_G(a)$. Таким образом, $s(G') \geq s(G) - 4$. По индукционному предположению, $u(G') \geq \frac{s(G') - 2}{4} + 2$. Учитывая, что G^* — подграф G и доказанные выше неравенства, мы имеем

$$u(G) \geq u(G^*) \geq u(G') + 1 \geq \frac{s(G') - 2}{4} + 3 \geq \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать. \square

12.2.4 Экстремальные примеры

Рассмотрим дерево T , в котором есть только вершины степеней 1 и 3, причём вершин степени 3 ровно n . Легко видеть, что количество вершин степени 1 тогда равно $n + 2$, а $e(T) = 2n + 1$. Заменяем каждую вершину x степени 3 дерева T на треугольник, передав каждой из трёх вершин треугольника по одному из рёбер, инцидентных в дереве T вершине x . Пример такого графа для $n = 5$ на рисунке 12.4. В полученном графе G будет $n + 2$ вершины степени 1 и n треугольников, итого $v(G) = n + 2 + 3n = 4n + 2$. Все невисячие вершины графа G являются точками сочленения и потому не могут быть висячими вершинами остовного дерева. Следовательно, $u(G) = n + 2 = \frac{v(G)-2}{4} + 2$.

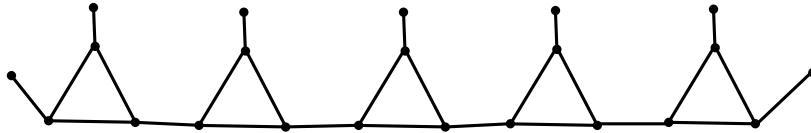


Рис. 12.4: Экстремальный пример к оценке из теоремы 12.5.

12.3 Непересекающиеся остовные деревья

Основной вопрос этого раздела: при каком условии в графе можно выделить k остовных деревьев, не имеющих общих рёбер?

Теорема 12.6. (C. St. J. A. Nash-Williams, 1961 и W. T. Tutte, 1961)

Граф содержит k рёберно-непересекающихся остовных деревьев тогда и только тогда, когда для любого разбиения его вершин P на несколько множеств существует хотя бы $k(|P| - 1)$ рёбер между вершинами разных множеств разбиения. (Здесь через $|P|$ обозначается количество множеств в разбиении P .)

Доказательство. Начнем издалека. Рассмотрим все упорядоченные наборы $F = (F_1, \dots, F_k)$ из k реберно-непересекающихся остовных лесов — подграфов G . Пусть $E(F) = E(F_1) \cup \dots \cup E(F_k)$, обозначим через \mathcal{D} множество всех таких наборов F с максимальным количеством рёбер $e(F) = |E(F)|$. Начнём с изучения свойств наборов из множества \mathcal{D} .

Пусть $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{D}$, $e \notin E(F)$. Тогда из максимальной количества рёбер в F следует, что в графе $F_i + e$ есть цикл Z , причем,

очевидно, единственный. Пусть $e' \in E(F_i)$ — ребро цикла Z , тогда $F'_i = F_i + e - e' =$ лес, причем с теми же компонентами связности, что и лес F_i . Очевидно, набор из k лесов F' , полученный из F заменой ребра e на e' также принадлежит \mathcal{D} . Будем говорить, что F' получен из F *заменой ребра*. Очевидно, тогда F также получается из F' заменой ребра.

Подытожим сказанное выше. Пусть наборы $F = (F_1, \dots, F_k)$, $F' = (F'_1, \dots, F'_k) \in \mathcal{D}$ получают друг из друга заменой ребра. Тогда для каждого $i \in [1..k]$ у лесов F_i и F'_i одинаковые компоненты связности.

Лемма 12.3. Пусть $F^* \in \mathcal{D}$, $e_0 \notin E(F^*)$. Тогда существует содержащее оба конца ребра e_0 множество $U \subset V(G)$ такое, что для каждого $i \in [1..k]$ граф $F_i^*(U)$ является деревом.

Доказательство. Пусть \mathcal{D}^* — множество всех наборов из \mathcal{D} , которые получаются из F^* цепочками замен рёбер. Пусть E^- — это множество всех ребер $e \in E(G)$, для которых существует такой $F \in \mathcal{D}^*$, что $e \notin E(F)$. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 12.4. Пусть $F^1, F^2 \in \mathcal{D}^*$, $x, y \in V(G)$. Тогда лес F_i^1 содержит xy -путь по рёбрам из E^- если и только если такой путь содержит лес F_i^2 .

Доказательство. Пусть P_1 — указанный в условии xy -путь в G_i^1 . Понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда F^2 получается из F^1 заменой ребра e_1 на ребро e_2 . Если $e_1 \notin E(F_i^1)$, то утверждение очевидно.

Пусть $e_1 \in E(F_i^1)$, тогда в графе $G_1 = E(F_i^1) + e_2 = E(F_i^2) + e_1$ существует ровно один цикл Z , причем этот цикл содержит рёбра e_1 и e_2 . Рассмотрим любое ребро $e' \in E(Z)$. При замене в F^1 ребра e' на e_2 мы, очевидно, получим набор лесов $F' \in \mathcal{D}^*$, не содержащий ребра e' . Поэтому, $E(Z) \subset E^-$. Значит, концы заменённого ребра e_1 связаны в F_i^2 путём по рёбрам из E^- . Таким образом, даже если ребро e_1 входит в путь P_1 , в графе G_i^2 есть xy -путь P_2 по рёбрам из E^- \square

Вернёмся к доказательству леммы 12.3. Пусть G^- — граф на $V(G)$ с множеством ребер $E(G^-) = E^-$. Так как $e_0 = vw \in E^-$, концы этого ребра v и w связаны в G^- . Пусть U — компонента связности графа G^- , содержащая v и w . Докажем, что множество U нам подходит.

Пусть $H_j = F_j^*(U)$ — несвязен. Тогда существуют компоненты связности U_1, U_2 графа H_j , соединённые ребром $e' = ab \in E^-$ в G^- . Рассмотрим такой набор лесов $F' \in \mathcal{D}^*$, что $e' \notin E(F')$. По лемме 12.4, тогда вершины a и b не связаны путём в лесу F'_j , а значит, заменив лес F'_j на лес $F'_j + e'$, мы получим набор лесов F^+ с большим числом рёбер, чем F^* , что противоречит максимальной последнему. \square

Вернемся к доказательству теоремы.

\Rightarrow Пусть существуют рёберно-непересекающиеся остовные деревья T_1, \dots, T_k и разбиение множества вершин $P = \{V_1, \dots, V_m\}$. Рассмотрим графы G^P, T_1^P, \dots, T_k^P , полученные из G, T_1, \dots, T_k в результате стягивания каждого из множеств V_i в одну вершину (в результате стягивания между вершинами V_i и V_j нового графа проводится столько рёбер, сколько было между множествами V_i и V_j в старом графе). Тогда T_1^P, \dots, T_k^P — связные остовные подграфы графа G^P , следовательно, $s = e(T_1^P) + \dots + e(T_k^P) \geq k(m-1)$. Остается лишь заметить, что между разными множествами разбиения P в графе G было проведено не менее s рёбер.

\Leftarrow Докажем обратную импликацию индукцией по количеству вершин в графе, база для $v(G) = 2$ очевидна. Применив условие для разбиения графа на одиночные вершины, мы получим $e(G) \geq k(v(G) - 1)$. Рассмотрим произвольный набор $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{D}$. Предположим, что не все остовные леса F_1, \dots, F_k являются деревьями. Тогда $e(F) < k(v(G) - 1)$, следовательно, существует ребро $e \in E(G) \setminus E(F)$. Тогда по лемме 12.3 существует такое множество вершин $U \subset V(G)$, что графы $F_i(U)$ связны для всех $i \in [1..k]$. Понятно, что $F_1(U), \dots, F_k(U)$ — рёберно-непересекающиеся деревья на вершинах множества U .

Рассмотрим граф $G' = G \cdot U$, пусть u — вершина, образовавшаяся при стягивании множества U . Каждое разбиение P' вершин графа G' индуцирует разбиение P вершин графа G (вместо вершины u в одно из множеств попадут все вершины множества U). Поэтому для разбиения P' существует не менее $k(|P'| - 1)$ рёбер графа G' между различными множествами. Значит, по индукционному предположению существует k рёберно-непересекающихся остовных деревьев T'_1, \dots, T'_k в графе G' . Теперь пусть T_i — остовное дерево графа G , полученное заменой в дереве T'_i вершины u на дерево $F_i(U)$. Легко понять, что мы построили искомый набор рёберно-непересекающихся остовных деревьев. \square

Следствие 12.2. *Рёберно $2k$ -связный граф содержит k рёберно-непересекающихся остовных деревьев.*

Доказательство. Проверим условие из теоремы 12.6. Рассмотрим разбиение вершин графа $P = \{V_1, \dots, V_r\}$. Из рёберной связности графа G следует, что для каждого множества V_i существует хотя бы $2k$ рёбер от V_i к остальным множествам. Сложив неравенства для всех i , мы получим, что существует не менее $\frac{2k \cdot r}{2} > (k-1)r$ рёбер между разными множествами. По теореме 12.6 получаем существование k рёберно-непересекающихся остовных деревьев. \square

Что интересно, точно так же выводится теорема с похожим по форме, но двойственным по сути утверждением.

Теорема 12.7. (C. St. J. A. Nash-Williams, 1964) *Граф G может быть разбит на k лесов тогда и только тогда, когда для любого множества $U \subset V(G)$ в графе $G(U)$ не более $k(|U| - 1)$ рёбер.*

Доказательство. \Rightarrow Пусть $F = (F_1, \dots, F_k)$ — разбиение графа G на k лесов, $U \subset V(G)$. Тогда все графы $F_1(U), \dots, F_k(U)$ — ациклические, а их объединение есть $G(U)$. Следовательно, $e(G(U)) \leq k(|U| - 1)$.

\Leftarrow Рассмотрим, как и в доказательстве теоремы 12.6, множество \mathcal{D} и произвольный набор $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{D}$. Наша цель — доказать, что $E(G) = E(F)$. Предположим, что это не так и рассмотрим ребро $e \notin E(F)$. По лемме 12.3, существует такое множество $U \subset V(G)$, что все графы $F_1(U), \dots, F_k(U)$ — связны. Но тогда $e(F_i(U)) \geq |U| - 1$ для каждого $i \in [1..k]$. Учитывая не входящее в $e(F)$ ребро e , получаем

$$e(G(U)) \geq 1 + \sum_{i=1}^k e(F_i(U)) > k(|U| - 1),$$

противоречие. □

Глава 13

Графы и многочлены

13.1 Хроматический многочлен

Определение 13.1. Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Функция $\chi_G(k)$ называется *хроматическим многочленом* графа G .

Таким образом, $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$, и $\chi_G(k) = 0$ для любого натурального числа $k < \chi(G)$.

Лемма 13.1. Пусть G — непустой граф, а uv — его ребро. Тогда

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G*uv}(k).$$

Доказательство. Разобьем правильные раскраски графа $G-uv$ на два типа: те, в которых вершины u и v одного цвета (тип 1) и те, в которых вершины u и v разных цветов (тип 2). Нетрудно видеть, что количество раскрасок первого типа равно $\chi_{G*uv}(k)$, а количество раскрасок второго типа равно $\chi_G(k)$. \square

Замечание 13.1. Для графов с кратными рёбрами нетрудно доказать формулу $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G*uv}(k)$.

Теорема 13.1. 1° Для любого графа G функция $\chi_G(k) \in \mathbb{Z}[k]$ — унитарный многочлен с целыми коэффициентами, степень которого равна $v(G)$.

2° Знаки коэффициентов $\chi_G(k)$ чередуются (то есть, старший коэффициент не меньше нуля, следующий не больше нуля, далее опять не меньше нуля и так далее).

Замечание 13.2. Как видно из утверждения теоремы 13.1, функция $\chi_G(k)$ совершенно справедливо называется *хроматическим многочленом* графа G .

Доказательство. Мы будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин и ребер графа G . А именно, доказывая утверждение для графа G , мы будем считать его справедливым для всех графов с меньшим числом вершин и для графов на $v(G)$ вершинах с меньшим, чем $e(G)$ количеством ребер.

Базу докажем для пустого графа \overline{K}_n — нетрудно видеть, что $\chi_{\overline{K}_n}(k) = k^n$, что удовлетворяет всем утверждениям теоремы. Пусть G — непустой граф, а uv — его ребро. Тогда по лемме 13.1 мы имеем

$$\chi_G(k) = \chi_{G-uv}(k) - \chi_{G \cdot uv}(k). \quad (13.1)$$

В графе $G \cdot uv$ менее $v(G)$ вершин, а в графе $G - uv$ ровно $v(G)$ вершин, но менее $e(G)$ ребер, поэтому для них уже доказаны все утверждения теоремы. Тогда остается заметить, что $\chi_{G-uv}(k)$ — унитарный многочлен степени $v(G)$, а $\chi_{G \cdot uv}(k)$ — унитарный многочлен степени $v(G) - 1$. Из чередования знаков коэффициентов этих двух многочленов очевидно следует утверждение про чередование знаков коэффициентов $\chi_G(k)$. \square

Упражнение 13.1. а) Найдите хроматический многочлен дерева с n вершинами.

б) Докажите, что граф с таким хроматическим многочленом обязательно является деревом с n вершинами.

Упражнение 13.2. Найдите коэффициент при x^{n-1} хроматического многочлена графа G с n вершинами и m рёбрами.

Упражнение 13.3. Найдите хроматический многочлен простого цикла с n вершинами.

13.1.1 Корни хроматического многочлена

Лемма 13.2. Пусть U_1, \dots, U_n — компоненты связности графа G , а $G_i = G(U_i)$. Тогда

$$\chi_G(k) = \prod_{i=1}^n \chi_{G_i}(k).$$

Доказательство. Очевидно ввиду того, что при правильной раскраске вершин графа вершины разных компонент связности можно красить независимо друг от друга. Следовательно, произведение количеств правильных раскрасок графов G_1, \dots, G_n в k цветов есть количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. \square

Теорема 13.2. Для любого графа G число 0 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству компонент связности графа G .

Доказательство. Легко видеть, что 0 является корнем хроматического многочлена любого графа. Это очевидно из определения: правильных раскрасок в 0 цветов не бывает. Ввиду леммы 13.2 достаточно доказать, что для связного графа G кратность корня 0 у $\chi_G(k)$ равна 1.

Пусть $v(G) = n$. Индукцией по количеству вершин докажем для связного графа G , что коэффициент при k многочлена $\chi_G(k)$ не равен 0 и имеет такой же знак, как $(-1)^{n-1}$. База для $n = 1$ очевидна.

Докажем переход. Пусть G — связный граф с $v(G) = n \geq 2$, для меньшего количества вершин утверждение доказано, а T — остовное дерево графа G . Нетрудно понять, что $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Тогда существует последовательность графов $G_0 = T, \dots, G_n = G$, в которой граф G_{i+1} получается из G_i добавлением ребра e_i . Пусть a_i — коэффициент при k многочлена $\chi_{G_i}(k)$. Докажем по индукции, что $a_i \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^{n-1}$. База для $i = 0$ очевидна из приведенной выше формулы.

Докажем переход. Пусть коэффициент $a_i \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$. По лемме 13.1 мы имеем

$$\chi_{G_{i+1}}(k) = \chi_{G_i}(k) - \chi_{G_i \cdot e_i}(k).$$

Отметим, что у многочлена $\chi_{G_i \cdot e_i}(k)$ по индукционному предположению знак коэффициента b при k такой же, как у $(-1)^{n-2}$, то есть, *отличается от знака a_i* . Поэтому $a_{i+1} = a_i - b$ имеет такой же знак, как a_i и отличен от 0. \square

Лемма 13.3. Пусть G — связный граф с n блоками B_1, \dots, B_n . Тогда

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n \chi_{B_i}(k).$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по количеству блоков в графе G . База для двусвязного графа, который является своим единственным блоком, очевидна.

Докажем переход. Пусть в графе G хотя бы два блока. Тогда по замечанию 1.4 у графа G есть крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения — пусть это блок B_n и содержит он точку сочленения a . Пусть $G' = G - \text{Int}(B_n)$. Понятно, что в G' ровно на один блок меньше — исчез блок B_n , остальные блоки не изменились. По индукционному предположению, доказываемая формула верна для графа G' :

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_{B_i}(k).$$

Докажем, что $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение для графа G . Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов и попробуем докрасить вершины блока B_n с соблюдением правильности. Единственное ограничение, которое накладывается на раскраску блока B — зафиксирован цвет вершины a , что уменьшает количество раскрасок блока B_n ровно в k раз. Эти соображения немедленно доказывают нужную нам формулу. \square

Теорема 13.3. (Е. G. Whitehead, L.-C. Zhao, 1984.) Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной. Тогда число 1 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G .

Доказательство. В каждом блоке графа G , очевидно, хотя бы две вершины. Ввиду леммы 13.3 достаточно доказать, что у хроматического многочлена двусвязного графа H число 1 является корнем кратности ровно 1. Тогда из доказанной в лемме 13.3 формулы будет следовать утверждение теоремы.

Сначала отметим, что двусвязный граф H на хотя бы двух вершинах невозможно правильно покрасить в 1 цвет, следовательно, 1 является корнем хроматического многочлена такого графа. Остается показать, что кратность этого корня равна 1. Для этого достаточно доказать, что $\chi'_H(1) \neq 0$. Точнее, мы покажем, что для двусвязного графа H на m вершинах знак $\chi'_H(1)$ такой же, как у $(-1)^m$.

Доказательство будет индукцией по количеству рёбер графа H . Приступая к доказательству для графа с m вершинами мы будем считать утверждение доказанным для всех двусвязных графов с меньшим числом вершин.

Если граф H — это полный граф на трёх вершинах, то утверждение несложно проверить. Пусть H неизоморфен K_3 . Тогда по теореме 5.24 существует такое ребро $e \in E(H)$, что граф $H \cdot e$ двусвязен. Применим доказанную в лемме 13.1 формулу:

$$\chi'_H(1) = \chi'_{H-e}(1) - \chi'_{H \cdot e}(1).$$

Так как $v(H \cdot e) = m-1$ и граф $H \cdot e$ двусвязен, мы можем утверждать, что $\chi'_{H \cdot e}(1) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $(-1)^{m-1}$. Граф $H-e$ имеет меньше рёбер, чем H , поэтому, если граф $H-e$ двусвязен, то уже доказано, что $\chi'_{H-e}(1)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^m$.

Если же граф $H-e$ не двусвязен, то он связан и имеет хотя бы два блока и для него верна формула из леммы 13.3. Однако, как показано выше, хроматический многочлен каждого блока имеет своим корнем 1 и поэтому для недвусвязного графа $H-e$ его хроматический многочлен

имеет 1 корнем кратности хотя бы 2, то есть, в этом случае $\chi'_{H-e}(1) = 0$. Все доказанное выше позволяет сделать вывод, что $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет тот знак, что нам нужен. \square

Следствие 13.1. Пусть G — граф с более чем одной вершиной. Тогда число 1 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G , состоящих более чем из одной вершины.

Доказательство. В каждой компоненте связности графа G , содержащей хотя бы две вершины, любой блок содержит хотя бы две вершины. Поэтому доказываемое утверждение следует из леммы 13.2 и теоремы 13.3. \square

13.2 Многочлен Татта

У графа есть немало характеристик, удовлетворяющих так называемой *формуле стягивания-удаления ребер*: характеристика графа G выражается как линейная комбинация характеристик графов $G * e$ и $G - e$ (где $e \in E(G)$). Например, мы рассматривали *хроматический многочлен* графа $\chi_G(\lambda)$ и количество остовных деревьев для связного графа G .

В этом разделе мы будем работать с графами, содержащими петли и кратные рёбра. Поэтому элементы множества рёбер $E(G)$ уже не пары вершин, а конкретные рёбра между парами вершин. Для работы со стягиванием ребер в таких графах будем пользоваться определением 1.6. Пусть φ — отображение стягивания.

Татт определил многочлен $T(G; x, y)$, как функцию, удовлетворяющую следующим условиям.

- 1° Если G — пустой граф (без рёбер), то $T(G; x, y) = 1$.
- 2° Если $e \in E(G)$ — мост (то есть, при удалении ребра e увеличивается количество компонент связности), то $T(G; x, y) = x \cdot T(G * e; x, y)$.
- 3° Если $e \in E(G)$ — петля, то $T(G; x, y) = y \cdot T(G - e; x, y)$.
- 4° Если ребро $e \in E(G)$ — не мост и не петля, то

$$T(G; x, y) = T(G * e; x, y) + T(G - e; x, y).$$

Сразу же понятно, что если функция $T(G; x, y)$ определена корректно, то для каждого графа G она является многочленом от двух переменных. Корректность определения мы проверим ниже. Отметим, что многочлен Татта содержит много информации о графе G , которую можно извлечь, подставляя различные значения переменных x и y . Несколько примеров нас ожидают в конце главы.

13.2.1 Многочлен Татта и ранговый многочлен

Определение 13.2. 1) Обозначим через $c(G)$ количество компонент связности графа G .

2) Подграф графа G назовём *остовным лесом*, если он состоит из остовных деревьев всех компонент связности графа G . В частности, остовный лес связного графа — это его остовное дерево.

3) Пусть $A \subseteq E(G)$. Рангом множества рёбер A мы назовём $\rho(A) = v(G) - c(G[A])$ — количество рёбер в остовном лесу графа $G[A]$.

4) Для множества рёбер $A \subseteq E(G)$ введём обозначение $p(G, A; u, v) = u^{\rho(E(G)) - \rho(A)} v^{|A| - \rho(A)}$. Определим ранговый многочлен графа G так:

$$R(G; u, v) = \sum_{A \subseteq E(G)} u^{\rho(E(G)) - \rho(A)} v^{|A| - \rho(A)} = \sum_{A \subseteq E(G)} p(G, A; u, v).$$

Этот многочлен придумал Хасслер Уитни, иногда он называется *Whitney rank polynomial*, в некоторых источниках — *corank-nullity polynomial*. Мы представим вниманию читателей удобную для применения интерпретацию параметров рангового многочлена.

Определение 13.3. Пусть $A \subseteq E(G)$. Зафиксируем любой остовный лес F графа G , содержащий в качестве подграфа остовный лес графа $G[A]$. Назовём все рёбра из $E(F) \setminus A$ *важными* рёбрами A , а все рёбра из $A \setminus E(F)$ *лишними* рёбрами A . Пусть $\rho^*(A)$ — количество важных рёбер A , а $\bar{\rho}(A)$ — количество лишних рёбер A .

Замечание 13.3. 1) По определению, $\rho(A)$ — количество рёбер в остовном лесу графа $G[A]$.

2) Вне зависимости от выбора остовного леса F мы имеем $\rho^*(A) = \rho(E(G)) - \rho(A)$ и $\bar{\rho}(A) = |A| - \rho(A)$. Таким образом,

$$p(G, A; u, v) = u^{\rho^*(A)} v^{\bar{\rho}(A)}.$$

Мы будем выбирать остовный лес F так, как это удобно.

Итак, пусть $e \in E(G)$. Как уже отмечалось выше, существует биекция стягивания $\varphi : E(G - e) \rightarrow E(G * e)$ (см. определение 1.6). Мы будем отождествлять соответствующие при этой биекции рёбра множеств $E(G - e)$ и $E(G * e)$. Для простоты мы будем обозначать такие рёбра одинаково и считать, что $E(G - e) = E(G * e)$. В свете таких обозначений отметим достаточно очевидный и полезный факт.

Замечание 13.4. Пусть $e \in A' \subset E(G)$, $A = A' \setminus \{e\}$, а $F_{A'}$ — остовный лес графа $G(A')$. Тогда $(F_{A'}) * e$ — остовный лес графа $G(A') * e = (G * e)(A)$.

Для множества рёбер $A \subset E(G - e)$ пусть $\rho(A)$, $\rho^*(A)$ и $\bar{\rho}(A)$ — это ранги A в графе G , $\rho_1(A)$, $\rho_1^*(A)$ и $\bar{\rho}_1(A)$ — ранги в графе $G * e$, а $\rho_2(A)$, $\rho_2^*(A)$ и $\bar{\rho}_2(A)$ — ранги в графе $G - e$.

Лемма 13.4. Пусть $e \in A' \subset E(G)$, $A = A' \setminus \{e\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если e — не петля, то $\rho^*(A') = \rho_1^*(A)$ и $\bar{\rho}(A') = \bar{\rho}_1(A)$.
- 2) Если e — не мост, то $\rho^*(A) = \rho_2^*(A)$ и $\bar{\rho}(A) = \bar{\rho}_2(A)$.
- 3) Если e — мост, то $\rho^*(A) = 1 + \rho^*(A')$ и $\bar{\rho}(A) = \bar{\rho}(A')$.
- 4) Если e — петля, то $\rho^*(A') = \rho^*(A)$ и $\bar{\rho}(A') = 1 + \bar{\rho}(A)$.

Доказательство. 1) Так как e — не петля, существует остовный лес $F_{A'}$ графа $G[A']$, содержащий ребро e . Пусть F — содержащий $F_{A'}$ остовный лес графа G . По замечанию 13.4 тогда то $F * e$ — остовный лес графа $G * e$, который содержит остовный лес графа $(G * e)[A]$. При таком выборе остовных лесов важные и лишние рёбра A' в графе G соответственно являются важными и лишними рёбрами A в графе $G * e$.

2) Пусть F_A — произвольный остовный лес графа $G[A]$. Так как e — не мост, F_A можно дополнить до остовного леса F графа G , не включая в F ребро e . Таким образом, важные и лишние рёбра множества A в графе G те же, что в графе $G - e$.

3) Пусть F_A — остовный лес графа $G[A]$. Так как e — мост, то $F_{A'} = F_A + e$ — остовный лес графа $G[A']$, который можно дополнить до остовного леса графа G . Поэтому множество A имеет на одно важное ребро больше, чем A' , а лишних рёбер у A' и A поровну.

4) Так как e — петля, то у графов $G[A]$ и $G[A']$ — один и тот же остовный лес F_A , который можно дополнить до остовного леса графа G . Поэтому множество A' имеет на одно лишнее ребро больше, чем A , а важных рёбер у A' и A поровну. \square

Следующая теорема покажет связь между $T(G; x, y)$ и $R(G; x, y)$, тем самым будет доказана корректность определения многочлена Татта.

Теорема 13.4. (W. T. Tutte) Для произвольного графа G выполняется равенство $T(G; u + 1, v + 1) = R(G; u, v)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что для пустого графа G мы имеем $R(G; u, v) = 1$. Нужно проверить, что $R(G; u, v)$ удовлетворяет условиям 2° — 4° из определения многочлена Татта.

Все подмножества $E(G)$ мы разобьём на пары вида (A, A') , где $A \subseteq E(G - e)$, $A' = A \cup \{e\}$. Отметим, что

$$R(G; u, v) = \sum_{A \subseteq E(G - e)} (p(G, A; u, v) + p(G, A'; u, v)).$$

Поэтому нам достаточно для каждого множества $A \subseteq E(G-e)$ проверить выполнение следующих трёх условий.

(R2) Если $e \in E(G)$ — мост, то

$$p(G, A; u, v) + p(G, A'; u, v) = (u + 1) \cdot p(G * e, A; u, v).$$

(R3) Если $e \in E(G)$ — петля, то

$$p(G, A; u, v) + p(G, A'; u, v) = (v + 1) \cdot p(G - e, A; u, v).$$

(R4) Если ребро $e \in E(G)$ — не мост и не петля, то

$$p(G, A; u, v) + p(G, A'; u, v) = p(G * e, A; u, v) + p(G - e, A; u, v).$$

Проверка (R2).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — мост. Рассмотрим пару множеств рёбер (A, A') . Применив пункты 1 и 3 леммы 13.4 мы получим, что

$$p(G, A'; u, v) = p(G * e, A; u, v) \text{ и } p(G, A; u, v) = u \cdot p(G, A'; u, v),$$

откуда следует (R2).

Проверка (R3).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — петля. Рассмотрим пару множеств рёбер (A, A') . Применив пункты 2 и 4 леммы 13.4 мы получим, что

$$p(G, A; u, v) = p(G - e, A; u, v) \text{ и } p(G, A'; u, v) = v \cdot p(G, A; u, v),$$

откуда следует (R3).

Проверка (R4).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — не петля и не мост. Рассмотрим пару множеств рёбер (A, A') . Применив пункты 1 и 2 леммы 13.4 мы получим, что

$$p(G, A'; u, v) = p(G * e, A; u, v) \text{ и } p(G, A; u, v) = p(G - e, A; u, v),$$

откуда следует (R4). \square

13.2.2 Значения многочлена Татта

В этом разделе мы покажем, какая информация о графе заключается в некоторых значениях многочлена Татта.

Обозначим через $ST(G)$ количество остовных лесов графа G , а через $SC(G)$ — количество таких подграфов H графа G , у которых $s(H) = s(G)$. Отметим, что если граф G — связный, то $ST(G)$ — количество остовных деревьев графа G (см. раздел 12.1), а $SC(G)$ — количество связных остовных подграфов графа G .

Обозначим через $Ac(G)$ количество ациклических подграфов G (то есть, таких подмножеств $A \subset E(G)$, что $G[A]$ — лес).

Теорема 13.5. Для графа G выполняются следующие утверждения.

- 1) $ST(G) = T(G; 1, 1)$.

- 2) $SC(G) = T(G; 1, 2)$.
 3) $Ac(G) = T(G; 2, 1)$.

Доказательство. По теореме 13.4,

$$T(G; x + 1, y + 1) = R(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E(G)} x^{\rho^*(A)} y^{\bar{\rho}(A)}. \quad (13.2)$$

1) Подставим $x = y = 0$ в формулу (13.2) и получим, что $T(G; 1, 1) = R(G; 0, 0)$ — количество подмножеств $A \subseteq E(G)$, удовлетворяющих условию $\rho^*(A) = \bar{\rho}(A) = 0$. Равенство $0 = \rho^*(A) = \rho(E(G)) - \rho(A)$ означает, что $c(G) = c(G[A])$, а равенство $\bar{\rho}(A) = 0$ означает, что у множества A нет лишних рёбер, то есть, $G[A]$ — лес. Таким образом, $T(G; 1, 1)$ равно $ST(G)$.

2) Подставим $x = 0, y = 1$ формулу (13.2) и получим, что $T(G; 1, 2) = R(G; 0, 1)$ — количество тех подмножеств $A \subseteq E(G)$, у которых $\rho^*(A) = 0$, что означает $c(G) = c(G[A])$. Таким образом, $T(G; 1, 2)$ равно $SC(G)$.

3) Подставим $x = 1, y = 0$ в формулу (13.2) и получим, что $T(G; 2, 1) = R(G; 1, 0)$ — количество тех подмножеств $A \subseteq E(G)$, у которых $\bar{\rho}(A) = 0$, то есть, $G[A]$ — лес. Таким образом, $T(G; 2, 1)$ равно $Ac(G)$. \square

13.2.3 Универсальное свойство многочлена Татта

Теорема 13.6. (W. T. Tutte) Пусть $f(G)$ удовлетворяет следующим свойствам (здесь a, b, x_0, y_0 — константы, причём $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

- (f1) Если G — пустой граф, то $f(G) = 1$.
 (f2) Если $e \in E(G)$ — мост, то $f(G) = x_0 \cdot f(G * e)$.
 (f3) Если $e \in E(G)$ — петля, то $f(G) = y_0 \cdot f(G - e)$.
 (f4) Если ребро $e \in E(G)$ — не мост и не петля, то
- $$f(G) = a \cdot f(G * e) + b \cdot f(G - e).$$

Тогда $f(G) = a^{\rho(E(G))} b^{\bar{\rho}(E(G))} \cdot T(G; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$.

Доказательство. Очевидно, многочлен $a^{\rho(E(G))} b^{\bar{\rho}(E(G))} \cdot T(G; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$ удовлетворяет условию (f1). Остаётся проверить, что он удовлетворяет условиям (f2) — (f4), тогда мы убедимся в справедливости утверждения теоремы.

Зафиксируем ребро $e \in E(G)$. Пусть $E' = E(G)$, $E = E(G - e) = E(G * e)$. Отметим, что если ребро e — не петля, то

$$\rho(E') = \rho_1(E) + 1, \quad \bar{\rho}(E') = \bar{\rho}_1(E). \quad (13.3)$$

Если ребро e — не мост, то

$$\rho(E') = \rho_2(E), \quad \bar{\rho}(E') = \bar{\rho}_2(E) + 1. \quad (13.4)$$

Проверка (f2).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — мост. По условию (13.3) и свойству 2° многочлена Татта

$$a^{\rho(E')} b^{\bar{\rho}(E')} \cdot T(G; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = (a \cdot \frac{x_0}{a}) \cdot a^{\rho_1(E)} b^{\bar{\rho}_1(E)} \cdot T(G * e; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}).$$

Проверка (f3).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — петля. По условию (13.4) и свойству 3° многочлена Татта

$$a^{\rho(E')} b^{\bar{\rho}(E')} \cdot T(G; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = (b \cdot \frac{y_0}{b}) \cdot a^{\rho_2(E)} b^{\bar{\rho}_2(E)} \cdot T(G - e; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}).$$

Проверка (f4).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — не мост и не петля. По условиям (13.3), (13.4) и свойству 4° многочлена Татта

$$\begin{aligned} & a^{\rho(E')} b^{\bar{\rho}(E')} \cdot T(G; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = \\ & = a \cdot a^{\rho_1(E)} b^{\bar{\rho}_1(E)} \cdot T(G * e; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) + b \cdot a^{\rho_2(E)} b^{\bar{\rho}_2(E)} \cdot T(G - e; \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}). \end{aligned}$$

□

С помощью этой теоремы можно расшифровывать информацию, скрытую в значениях многочлена Татта.

13.2.4 Многочлен Татта и хроматический многочлен

Исторически именно хроматический многочлен графа послужил отправной точкой для изобретения многочлена Татта (который сам Татт называл *дихроматом графа*). В следующей теореме мы выразим хроматический многочлен графа $\chi_G(\lambda)$ через многочлен Татта.

Теорема 13.7. Для любого графа G и натурального числа λ выполняется соотношение

$$\chi_G(\lambda) = (-1)^{v(G)-c(G)} \lambda^{c(G)} \cdot T(G; 1 - \lambda, 0).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 13.6. Пусть

$$P(G; \lambda) = \frac{1}{\lambda^{v(G)}} \cdot \chi_G(\lambda).$$

Отметим, что для пустого графа G очевидно $P(G; \lambda) = 1$. Проверим свойства (f2) – (f4) для $P(G; \lambda)$.

Проверка (f4).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — не петля. Тогда по теореме 13.1 мы знаем (см. формулу (13.1)), что

$$\chi_G(\lambda) = \chi_{G-e}(\lambda) - \chi_{G*e}(\lambda). \quad (13.5)$$

Так как $v(G) = v(G - e) = v(G * e) + 1$, мы получаем

$$P(G; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} P(G * e; \lambda) + P(G - e; \lambda)$$

В случае, когда ребро e — не мост, мы немедленно получаем соотношение (f4) для $a = -\frac{1}{\lambda}$, $b = 1$.

Проверка (f2).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — мост, $e = uw$. Тогда $V(G)$ разбивается на два несвязанных в $G - e$ множества вершин $V_1 \ni u$ и $V_2 \ni w$. Понятно, что вершины множеств V_1 и V_2 красятся в любой правильной раскраске графа $G - e$ независимо друг от друга, поэтому

$$\chi_{G-e}(\lambda) = \chi_{G(V_1)}(\lambda) \cdot \chi_{G(V_2)}(\lambda).$$

Пусть z — вершина графа $G * e$, в которую стянуты концы u и w ребра e . Пусть V'_1 — это множество V_1 , в котором вершина u заменена на z , а V'_2 — это множество V_2 , в котором вершина w заменена на z . Легко понять, что граф $G(V_i)$ изоморфен графу $(G * e)(V'_i)$. Каждую правильную раскраску графа $G * e$ можно получить следующим образом: сначала покрасить правильным образом вершины множества V'_1 , а потом — V'_2 , причём единственное ограничение, накладываемое на покраску вершин множества V'_2 — это фиксированный цвет вершины z . Следовательно,

$$\chi_{G*e}(\lambda) = \chi_{(G*e)(V_1)}(\lambda) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \chi_{(G*e)(V_2)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \chi_{G(V_1)}(\lambda) \cdot \chi_{G(V_2)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \chi_{G-e}(\lambda).$$

Учитывая формулу (13.5), получаем $\chi_G(\lambda) = (\lambda - 1) \chi_{G*e}(\lambda)$. Следовательно,

$$P(G; \lambda) = \frac{1}{\lambda^{v(G)}} \chi_G(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^{v(G)-1}} \cdot \chi_{G*e}(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot P(G * e; \lambda).$$

Таким образом, (f2) выполняется при $x_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Проверка (f3).

Пусть ребро $e \in E(G)$ — петля. Тогда у графа G не существует правильных раскрасок в $\lambda > 0$ цветов, следовательно, $P(G; \lambda) = 0$, то есть, (f3) выполняется для $y_0 = 0$.

Подставим в утверждение теоремы 13.6 полученные значения $a = -\frac{1}{\lambda}$, $b = 1$, $x_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ и $y_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\chi_G(\lambda) &= \lambda^{v(G)} \cdot P(G; \lambda) = \lambda^{v(G)} \cdot \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^{\rho(E(G))} \cdot T(G; 1 - \lambda, 0) = \\ &= (-1)^{v(G)-c(G)} \lambda^{c(G)} \cdot T(G; 1 - \lambda, 0), \quad \text{так как} \quad \rho(E(G)) = v(G) - c(G).\end{aligned}$$

□

13.2.5 Многочлен Татта двойственного графа

В этом разделе мы рассмотрим плоский граф G и его двойственный граф G^* . Как мы знаем, существует естественная биекция между $E(G)$ и $E(G^*)$, при которой петли переходят в мосты, а мосты — в петли.

Теорема 13.8. Пусть G — плоский граф, а G^* — его двойственный граф. Тогда $T(G; x, y) = T(G^*; y, x)$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по размеру графа. База для пустого графа очевидна на одной вершине очевидна. Докажем индукционный переход, в котором достаточно проверить редукционные условия из определения многочлена Татта, а именно, что происходит при удалении и стягивании ребер. Отметим, что при этих операциях связность графа не нарушается, так как мы не удаляем мосты.

Пусть $e \in E(G)$ и $e^* \in E(G^*)$ — рёбра, соответствующие друг другу при описанной выше естественной биекции. Рассмотрим два случая.

1. Пусть e — мост, или, что равносильно, e^* — петля с концами в вершине a^* . Очевидно, грани у плоских графов G и G^*e — одни и те же, только исчезло одно внутреннее ребро грани a^* , которому соответствовала петля e^* двойственного графа G^* . Таким образом, в этом случае $(G^*e)^* = G^* - e$, и по индукционному предположению мы имеем

$$T(G; u, v) = u \cdot T(G^*e; u, v) = u \cdot T(G^* - e^*; v, u) = T(G^*; v, u).$$

В случае, когда e — петля, ребро e^* — мост, случай разбирается аналогично предыдущему, только графы G и G^* меняются местами (вспомним, что $(G^*)^* = G$).

2. Оба ребра e и $e^* = a^*b^*$ не являются ни мостами, ни петлями. Тогда удаление ребра e из графа G означает, что грани a^* и b^* склеиваются в одну (мы удалили их граничное ребро), что означает стягивание ребра $e^* = a^*b^*$ в графе G^* . Таким образом, $(G - e)^* = G^* * e^*$. Аналогично (поменяем местами G и G^* и вспомним, что $(G^*)^* = G$) доказывается, что $(G * e)^* = G^* - e^*$. Теперь по индукционному предположению мы имеем

$$\begin{aligned} T(G; u, v) &= T(G * e; u, v) + T(G - e; u, v) = \\ &= T(G^* - e^*; v, u) + T(G^* * e^*; v, u) = T(G^*; v, u). \end{aligned}$$

□

Следствие 13.2. Пусть G — плоский граф, а G^* — его двойственный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $ST(G) = ST(G^*)$.
- 2) $SC(G) = Ac(G^*)$, $SC(G^*) = Ac(G)$.

Это непосредственное следствие теорем 13.5 и 13.8.

13.3 Дискриминант графа

В этом разделе от читателя потребуются минимальные знания по алгебре — нужно знать, что такое кольцо многочленов от нескольких переменных и идеал.

Определение 13.4. Пусть дан граф G . Пронумеруем произвольно x_1, \dots, x_n все вершины графа G , пусть каждой вершине соответствует независимая переменная, которую мы будем обозначать так же, как и вершину. Пусть $\mathbb{C}_G = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ — это кольцо многочленов с комплексными коэффициентами от переменных, соответствующих вершинам графа.

Назовём *дискриминантом* графа G многочлен

$$D_G = \prod_{x_i x_j \in E(G)} (x_i - x_j).$$

Сразу же отметим, что дискриминант определен с точностью до знака, который в каждом сомножителе $x_i - x_j$ можно выбрать произвольно. Это нам нисколько не помешает.

Определение 13.5. 1) Рассмотрим произвольный многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени k без кратных корней. Определим идеал $I_f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ (идеал в кольце \mathbb{C}_G , порожденный многочленами $f(x_i)$ для всех переменных).

2) Пусть $\overline{D_G}$ — класс вычетов многочлена D_G по модулю идеала I_f (то есть, множество всех многочленов кольца \mathbb{C}_G , сравнимых с D_G по модулю I_f .)

3) Пусть $A_f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ — множество всех комплексных корней многочлена f .

В следующих леммах мы определим остаток от деления D_G на идеал I_f .

Лемма 13.5. Если многочлен $P \in \mathbb{C}_G$ таков, что его степень по каждой переменной менее k и $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых чисел $a_1, \dots, a_n \in A_f$, то $P(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n . База для многочлена от одной переменной очевидна: ненулевой многочлен от одной переменной не может иметь больше корней, чем его степень. Докажем переход.

Пусть $P_i(x_2, \dots, x_n) = P(\alpha_i, x_2, \dots, x_n)$. По индукционному предположению мы имеем $P_i(x_2, \dots, x_n) \equiv 0$. Зафиксируем набор значений b_2, \dots, b_n (не обязательно из A) и положим $P_{b_2, \dots, b_n}(x) = P(x, b_2, \dots, b_n)$. Мы знаем, что $P_{b_2, \dots, b_n}(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен степени не более $k-1$, имеющий k корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, а потому равный 0 при всех x . Таким образом, мы доказали, что $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ при любых значениях переменной, то есть, в этом многочлене все коэффициенты равны 0. \square

Лемма 13.6. 1) Для любых чисел $a_1, \dots, a_n \in A_f$ и многочлена $P \in \overline{D_G}$ выполняется $P(a_1, \dots, a_n) = D_G(a_1, \dots, a_n)$.

2) В классе вычетов $\overline{D_G}$ существует единственный многочлен $D_{G,f}$, степень которого по каждой переменной не превосходит $k-1$.

Доказательство. 1) Заметим, что $P(a_1, \dots, a_n) - D_G(a_1, \dots, a_n)$ лежит в I_f и потому существуют такие многочлены $H_1, \dots, H_k \in \mathbb{C}_G$, что

$$P(a_1, \dots, a_n) - D_G(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^k f(a_i) H_k(a_1, \dots, a_k) = 0,$$

так как $f(a_i) = 0$ для всех $i \in [1..n]$.

2) *Существование.* Произведем деление с остатком многочлена D_G на $f(x_1)$, остаток $D_{G,1} \in \overline{D_G}$ — многочлен, чья степень по переменной x_1 менее k . Затем поделим $D_{G,1}$ с остатком на $f(x_2)$ — получим остаток $D_{G,2} \in \overline{D_G}$ — многочлен, чья степень и по x_1 , и по x_2 менее k . И так далее, в результате после всех делений получим многочлен $D_{G,f} = D_{G,n} \in \overline{D_G}$, чья степень по каждой переменной менее k .

Единственность. Предположим, что есть два многочлена P_1 и P_2 , обладающих такими свойствами. Тогда многочлен $P = P_1 - P_2$ таков, что $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ и его степень по каждой переменной не превосходит k . По лемме 13.5 мы имеем $P(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, то есть, многочлены P_1 и P_2 совпадают. \square

Теорема 13.9. (Ю. В. Матиясевич, 1974.) Пусть $f \in \mathbb{C}(x)$ — многочлен степени k без кратных корней, а G — граф. Тогда следующие два утверждения равносильны:

- 1° $\chi(G) \leq k$;
- 2° $D_G \notin I_f$ или, что то же самое, $D_{G,f} \neq 0$.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Покрасим вершины нашего графа в цвета — корни многочлена f (обозначим их множество, как в предыдущей лемме). Пусть a_i — цвет вершины v_i . Тогда числа $a_1, \dots, a_n \in A$ таковы, что $D_{G,f}(a_1, \dots, a_n) = D_G(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, то есть, выполняется условие 2° .

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть выполняется условие 2° , тогда $D_{G,f} \neq 0$, а значит, по пункту 1 леммы 13.6 и лемме 13.5 существуют такие $a_1, \dots, a_n \in A$, что $D_G(a_1, \dots, a_n) = D_{G,f}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Тогда, покрасив каждую вершину v_i в цвет a_i , мы получим правильную раскраску в k цветов. \square

13.3.1 Дискриминант плоской триангуляции

Пусть G — триангуляция, то есть, двусвязный плоский граф без петель, все грани которого — треугольники. Напомним, что Тэйтова раскраска G — это раскраска рёбер в три цвета, в которой три ребра каждой грани покрашены в разные цвета. Тэйтовы раскраски изучались в разделе 6.4 и тесно связаны с гипотезой четырёх красок, чем и вызван большой интерес к ним.

Пусть G' — граф, вершины которого соответствуют рёбрам G (и обозначаются так же), а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра лежат в одной грани. Тогда Тэйтовы раскраски — это правильные раскраски графа G' . Мы покажем, как связано количество Тэйтовых раскрасок триангуляции G с дискриминантом графа G' .

Напомним, что в дискриминанте графа G' мы используем для переменных обозначения такие же, как для соответствующих вершин графа G' , а значит, рёбер триангуляции G . Пусть $T(G)$ — множество всех троек рёбер триангуляции G , образующих её треугольные грани. Запись $xyz \in T(G)$ будет обозначать, что x, y, z — рёбра треугольной грани G . Итак,

$$\begin{aligned}
D_{G'} &= \prod_{xy \in E(G')} (x - y) = \prod_{x_1 x_2 x_3 \in T(G)} (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = \\
&\prod_{x_1 x_2 x_3 \in T(G)} (x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 - x_2 x_1^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2). \quad (13.6)
\end{aligned}$$

Выбор знака в каждой скобке не имеет значения. Мы определимся с выбором знака, чтобы нам было удобнее. Граф G изображен на плоскости, поэтому всегда будем считать, что в записи $x_1 x_2 x_3 \in T(G)$ подразумевается, что рёбра треугольной грани указаны по часовой стрелке.

Пусть $f(x) = x^3 - 1$. Очевидно, этот многочлен не имеет кратных корней. Положим $D'_G = D_{G',f}$ — остаток от деления дискриминанта $D_{G'}$ на идеал I_f . При $f(x) = x^3 - 1$ этот остаток строится очень просто: нужно в каждом одночлене дискриминанта $D_{G'}$ заменить показатель степени каждой переменной на его остаток от деления на 3.

Пусть триангуляция G имеет $n + 2$ вершины. По формуле Эйлера нетрудно вывести, что тогда G имеет $2n$ граней и $3n$ рёбер. В произвольном порядке занумеруем рёбра триангуляции y_0, \dots, y_{3n-1} . Тогда каждый одночлен D'_G представляется в виде $\prod_{i=0}^{3n-1} y_i^{\ell_i}$. Для удобства будем записывать такой одночлен в виде y^ℓ , где $\ell = \sum_{i=0}^{3n-1} \ell_i$. Таким образом,

$$D'_G = \sum_{\ell=0}^{3n-1} \alpha_\ell \cdot y_0^{\ell_0} \dots y_{3n-1}^{\ell_{3n-1}} = \sum_{\ell=0}^{3n-1} \alpha_\ell \cdot y^\ell.$$

Теорема 13.10. Коэффициент α_0 равен количеству Тэйтовых раскрасок триангуляции G .

Доказательство. Для доказательства нам понадобится новый объект. Мы изобразим вершины определенного выше графа G' , как середины рёбер G , а рёбра — как средние линии графов-треугольников.

Определение 13.6. 1) Мы будем говорить, что ребро графа G' лежит на грани a графа G , если оно изображено как средняя линия этой грани.

2) Назовём подграф H графа G' *системой циклов*, если каждая его компонента связности — простой цикл, и H содержит ровно по одному ребру на каждой грани триангуляции G . Если все циклы-компоненты связности четны, то H — *система четных циклов*.

3) Вес системы циклов H — это $w(H) = 2^k$, где k — количество компонент связности графа H .

4) Назовём *системой ориентированных циклов* оргграф, получающийся из системы циклов H транзитивной ориентацией каждого цикла.

Замечание 13.5. Очевидно, существует ровно $w(H)$ способов сделать из системы циклов H систему ориентированных циклов (по два способа ориентировать каждый цикл).

Перейдём к доказательству теоремы, которое мы разобьём на две части. Пусть s — это сумма весов всех систем четных циклов графа G' .

1. Докажем, что количество Тэйтовых раскрасок триангуляции G равно s .

Для каждой Тэйтовой раскраски ρ рассмотрим подграф H_ρ графа G' на вершинах, имеющих цвета 1 и 2 в ρ . Так как на каждой грани G ровно по одному ребру цветов 1 и 2, а каждое ребро G входит ровно в две грани, то H_ρ — система циклов, причём четных, так как этот граф двудолен.

Наоборот, каждой системе четных циклов H можно поставить в соответствие Тэйтову раскраску, покрасив не входящие в H рёбра в цвет 3 и раскрасив каждый из четных циклов правильным образом в два цвета. Количество таких раскрасок будет как раз $w(H)$, так как каждый из циклов системы H можно покрасить ровно двумя способами.

2. Докажем, что $\alpha_0 = s$.

Какие именно одночлены дискриминанта $D_{G'}$ при редукции становятся равны y^0 (назовем их *хорошими*)? Несложно понять, что те, в которых степень каждого ребра G (то есть, соответствующей ему переменной, но мы их не различаем) кратна 3. Рассмотрим любой хороший одночлен и изобразим его следующим образом. На каждой грани $x_1x_2x_3 \in T(G)$ выбор одночлена в правой части формулы (13.6) будем изображать стрелочкой от середины ребра, входящего в степени 1 к середине ребра, входящего в степени 2. Например, выбор $x_1^2x_2$ соответствует стрелке от x_1 к x_2 (см. рисунок 13.1a). Из (13.6) ясно, что стрелка, задающая вращение по часовой стрелке, будет учитываться со знаком $+$, а задающая вращение против часовой стрелки — со знаком $-$. Знаки стрелок определяют итоговый знак одночлена.

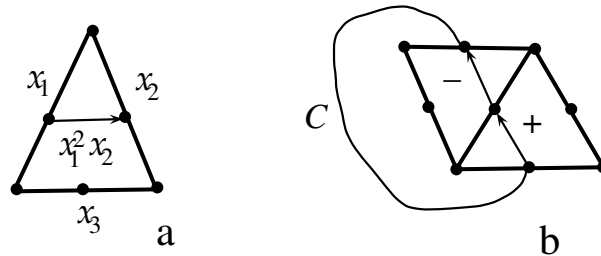


Рис. 13.1: Изображение одночлена стрелками.

Напомним, что в (13.6) мы выбираем на каждой грани по одной стрелке. Так как каждое ребро входит ровно в две грани, его степень не превосходит 4. Поэтому в интересующих нас одночленах степень каждого ребра должна быть равна 0 или 3. Таким образом, в каждое ребро, середина которого инцидентна хотя бы одной стрелке, одна стрелка входит и одна стрелка выходит. Это означает, что хороший одночлен представляет собой систему ориентированных циклов, определенную выше.

Рассмотрим систему циклов H и все способы ориентации этих циклов. Очевидно, все полученные системы ориентированных циклов — это хорошие одночлены. Каждый четный цикл не меняет знак от переориентации, а нечетный — меняет. Поэтому суммарный вклад в α_0 всех одночленов, являющихся ориентациями H , равен 0.

Теперь рассмотрим систему четных циклов H . Количество ориентаций этой системы есть её вес $w(H)$ и у всех ориентаций — одинаковый знак. Для доказательства утверждения теоремы нам остается доказать, что этот знак всегда $+$.

Рассмотрим любой четный цикл C системы H , ориентируем его и докажем, что его ориентация положительна, то есть, содержит четное число положительных стрелок и четное число отрицательных стрелок. Разрежем плоскую триангуляцию G по циклу C на две части и рассмотрим часть слева от цикла. Она представляет из себя плоский граф M . Все нетронутые разрезом грани — треугольники, и их количество четно, так как они покрыты четными циклами системы H (которые, очевидно, не могут пересекать C). Сам четный цикл C образует четную грань в M . Остаются грани, образованные при разрезе треугольных граней по C . Среди этих граней четное число треугольников, так как число нечетных граней в M должно быть четно. Остается лишь заметить, что мы отрезали от грани G треугольник слева от цикла C ровно в том случае, когда стрелка, по которой производился разрез, задает направление вращения по часовой стрелке, то есть, положительна (см. рисунок 13.1b). Таким образом, ориентация C положительна, как и любого другого цикла из H .

Значит, любая ориентация H положительна, что нам и оставалось доказать. \square