

1.

# Математическая логика. Домашнее задание №7

Горбунов Егор Алексеевич

18 апреля 2016 г.

**Задание №1** Докажите, что формула  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  невыводима, показав, что ее выводимость влечет выводимость исключенного третьего.

**Решение:** Обозначим:

$$\frac{}{\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (x)$$

Теперь:

$$\frac{\frac{}{\vdash ((P \vee \neg P \rightarrow \perp) \rightarrow P \vee \neg P) \rightarrow (P \vee \neg P)} (x) \quad \frac{\text{см. ниже}}{(P \vee \neg P \rightarrow \perp) \rightarrow P \vee \neg P}}{\vdash P \vee \neg P} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\frac{}{P, (P \vee \neg P \rightarrow \perp) \vdash P \vee \neg P \rightarrow \perp} (\text{var}) \quad \frac{\frac{}{P, (P \vee \neg P \rightarrow \perp) \vdash P} (\text{var})}{P, (P \vee \neg P \rightarrow \perp) \vdash P \vee \neg P} (\vee I_1)}{P, (P \vee \neg P \rightarrow \perp) \vdash \perp} (\rightarrow I) \quad \frac{}{(P \vee \neg P \rightarrow \perp) \rightarrow P \vee \neg P} (\rightarrow I \text{ и } \vee I_2)$$

Видим, что у нас получилось вывести  $\vdash P \vee \neg P$  воспользовавшись тем, что  $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  выводим (то, что мы обозначили за (x)). При использовании (x) мы совершили подстановку  $[(P \vee \neg P/P, \perp/Q)]$ .

■

**Задание №2** Докажите, что в интуиционистской логике следующие правила вывода эквивалентны:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg \varphi}, (\text{lem}) \quad \frac{}{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi}, (\text{dne})$$

Для этого достаточно показать, что имея правило (lem), заключение правила (dne) выводимо, и наоборот.

**Решение:**

- $\text{dne} \Rightarrow \text{lem}$ . Вот дерево вывода, доказывающее это (в интуиционистской логике):

$$\frac{\frac{}{\vdash \neg \neg (\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)} (\text{dne}) \quad \frac{\text{см. ниже}}{\vdash \neg \neg (\varphi \vee \neg \varphi)} \rightarrow E}{\vdash \varphi \vee \neg \varphi}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}{(\text{var})} \quad \frac{\frac{\Gamma, \phi \vdash \phi}{(\text{var})} \quad \neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \phi \vee \neg\phi}{\vee I_1}}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)} \rightarrow E \\
\frac{\frac{\frac{}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}{(\text{var})} \quad \frac{\frac{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \perp}{\rightarrow I} \quad \frac{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg\phi}{\vee I_2}}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi} \rightarrow E}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \perp} \rightarrow I \\
\frac{}{\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)} \rightarrow I
\end{array}$$

- $\text{lem} \Rightarrow \text{dne}$ . Т.к. мы предполагаем исключённое третье, то можно работать в исчислении Генцена!

А тогда:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{}{\vdash \neg\phi \vee \phi}(\text{lem})}{\vdash \neg\phi, \phi} \quad \frac{\frac{}{\perp \vdash \phi} \perp L}{\neg\phi \rightarrow \perp \vdash \phi} \rightarrow L \\
\frac{}{\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi} \rightarrow R
\end{array}$$

■

**Задание №3** Формула  $\phi \wedge \psi$  доказуема тогда и только тогда когда доказуемы  $\phi$  и  $\psi$ . Верно ли аналогичное утверждение для  $\phi \vee \psi$ ? То есть, правда ли что  $\phi \vee \psi$  доказуема тогда и только тогда когда доказуема либо  $\phi$ , либо  $\psi$ ? В классической логике это не верно. Действительно,  $P \vee \neg P$  доказуема, но ни  $P$ , ни  $\neg P$  не доказуемы. Докажите, что в интуиционистской логике это свойство выполнено.

Hint: используйте в качестве доказательств формул лямбда термы и примените нормализацию.

**Решение:**

$\Rightarrow$  Тут нам нужно предоставить терм с типом  $\phi \vee \psi \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \phi) \vee (\phi \vee \psi \rightarrow \psi)$ . Вот он:

$$\lambda e. \text{case } e \text{ of } \{\text{Left}(p) \rightarrow \text{Left } (\lambda x. p); \text{Right}(q) \rightarrow \text{Right } (\lambda x. q)\}$$

$\Leftarrow$  Тут нам нужно сконструировать термы с типом  $\phi \vee \psi$  имея  $\phi$  или  $\psi$ . Ну, это довольно очевидно, два случая:

$$\begin{array}{c}
\lambda p. \text{Left } p \\
\lambda q. \text{Right } q
\end{array}$$

■

**Задание №4** Докажите в классической логике формулу  $\neg(\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$ . Напишите лямбда терм, доказывающий эту формулу.

**Решение:**

$$\begin{array}{c}
\text{тут ещё применяем } \vee R \\
\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi, \perp}{\varphi \wedge \psi \rightarrow \perp, \varphi, \psi \vdash \perp} \rightarrow L \\
\frac{\varphi \wedge \psi \rightarrow \perp, \varphi, \psi \vdash \perp}{\varphi \wedge \psi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp, \psi \rightarrow \perp} \text{дважды } \rightarrow R \\
\frac{\varphi \wedge \psi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp, \psi \rightarrow \perp}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi} \vee R \\
\frac{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi}{\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi} \rightarrow R
\end{array}$$

■

**Задание №5** Докажите в интуиционистской логике формулу  $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \rightarrow P \rightarrow P$ . Напишите лямбда терм, доказывающий эту формулу.

**Решение:**