Домашнее задание №10

Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

20 апреля 2016 г.

Задание №1 Докажите, что в регулярном двудольном графе есть полное паросочетание.

Решение: Пускай доли графа G — это A и B, а степень каждой вершины равна d.

1. Покажем, что существует A-насыщенное паросочетание в G (такое паросочетание, которое покрывает всё множество A). Рассмотрим $X \subset A$. Предположим, что $|N(X)| < |X|$ (обозначения как в теореме Холла), но т.к. $\forall v \in X \ deg(v) = d$, то суммарно в $N(X)$ входит $|X| \cdot d$ рёбер. По обобщённому принципу Дирихле найдётся такая вершина $u \in N(X)$, что $deg(u) \geq \lceil \frac{|X| \cdot d}{|N(X)|} \rceil > d$, но у нас граф регулярный, а значит получено противоречие и для выбранного (произвольно) X $|N(X)| \geq |X|$, а значит выполнена теорема Холла и существует A-насыщенное паросочетание.
2. Абсолютно аналогично получаем, что существует B-насыщенное паросочетание и при этом из теоремы холла в первом и втором случае следует, что $|A| \leq |N(A)| \leq |B|$ и $|B| \leq |N(B)| \leq |A|$, а значит $|A| = |B|$. Таким образом получили, что A-насыщенное паросочетание является совершенным (полным), т.е. в регулярном графе G существует полное паросочетание. ■

Задание №2 Для заданного клетчатого поля с дырками выберите максимальное количество попарно не смежных клеток. Смежными считаются клетки с общей стороной.

Решение: Раскрасим клетки доски в шахматном порядке (на дырки краска не ложится) в чёрный и белый цвета. Заметим, что чёрные попарно не смежны и белые клетки попарно не смежны тоже. Теперь сконструируем граф: каждой клетке доски соответствует вершина, вершина соединена рёбрами со смежными ей клетками. Ясно, что такой граф то будет двудольным, причём в первой доле будут чёрные клетки, а во второй белые. По теореме Кёнига знаем, что размер максимального независимого множества вершин двудольного графа (а оно то нас и интересует, ибо в данном случае это будет максимальное множество попарно несмежных клеток) равен размеру максимального паросочетания. Ну вот, теперь просто найдём максимальное паросочетания в двудольном графе известным нам алгоритмом. ■

Задание №4 Разбейте вершины ориентированного графа на циклы. Т.е. каждая вершина должна быть покрыта ровно одним циклом. Либо скажите, что это невозможно.

Решение: Давайте заметим такую вещь, что если каждой вершине v поставлено в соответствие ребро e_{in}^{v}, входящее в v и ребро e_{out}^{v} исходящее из v, причём существует вершина x, что e_{in}^{v} для неё является e_{out}^{x} и существует вершина y, что e_{out}^{v} для неё является e_{in}^{y}, тогда мы получим разбиение исходного графа на циклы (т.е. каждой вершине сопоставим какой-то цикл). Действительно, пускай такое соответствие задано, тогда:

$M \leftarrow 0$
for $v \in V$ **do**
  if $mark[v] > 0$ **then**
    $continue$
  $M \leftarrow M + 1$
  $cur \leftarrow v$
  while $mark[cur] < 0$ **do**
    $mark[cur] \leftarrow M$
    $cur \leftarrow e_{out}^{cur}.to$

Тут условие в цикле $mark[cur] < 0$ эквивалентно тому, что мы пришли обратно в v.

Теперь научимся находить такое соответствие вершин и рёбер. Построим двудольный граф с долями X и Y, причём в X будет $|V|$ вершин и в Y будет $|V|$ вершин. Если $v \in V$, то $v_{from} \in X$ и $v_{to} \in Y$. Если же в исходном графе есть дуга (v, u), то в двудольном графе есть ребро $\{v_{from}, u_{to}\}$. Заметим теперь, что если в этом двудольном графе есть совершенное паросочетание, то мы нашли, описанное выше, соответствие и разбили граф на циклы, т.к. совершенному (в силу его совершенности) паросочетанию будут принадлежать какие-то рёбра $\{v_{from}, a_{to}\}$ и $\{b_{from}, v_{to}\}$, что означает, что в соответствие вершине v поставлены дуги (v, a) и (b, v). ■

Задание №5 Дано N различных прямых. Нужно выбрать максимальное по размеру подмножество прямых такое, что никакие две прямые не параллельны, и никакие прямые не пересекаются в точке с $x = 0$.

Решение: Считаем, что все прямые заданы тройкой чисел (v, k, b), причём если прямая вертикальная, т.е. параллельна оси ординат, то $v = true$, а k равно её смещению по оси абсцисс, а если $v = false$, то k и b задают прямую обычным образом: $y = kx + b$. Таким образом можно легко сформулировать условия, при которых две линии параллельны или пересекаются в точке с $x = 0$ (эти совсем простые проверки не указываю за ненадобностью).

Теперь возьмём и каждой прямой сопоставим по вершине и получим тем самым множество вершин X. Продублируем это множество и получим множество вершин Y, каждая из которых так же соответствует какой-то линии. Теперь вершину v соединим ребром с вершиной из u, если линия, соответствующая v параллельна или пересекается в $x = 0$ с линией, соответствующей u. Получили двудольный граф. Умеем искать паросочетание максимального размера в нём, но по теореме Кёнига размер максимального паросочетания равен размеру наибольшего независимого множества, которое по условию задачи от нас и требуется. Искать наибольшее независимое множество так же умеем... ■