Алгоритмы. Домашнее задание №7

Горбунов Егор Алексеевич

25 октября 2015 г.

Задача №1 (Сильная ориентация графа)

Нужно ориентировать рёбра данного неориентированного графа $G(V,E)$ за $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ так, чтобы получившийся граф был сильно связным.

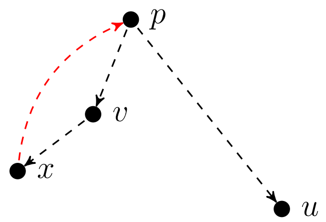
Из курса по дискретной математике нам известно, что неориентированный граф G может быть сильно ориентирован тогда и только тогда, когда он двусвязный, т.е. в G нет точек сочленения. Искать точки сочленения в графе G мы умеем за $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ и первым делом запустим алгоритм поиска точек сочленения и в случае, если точки сочленения будут найдены, то сообщим о том, что данный граф G не допускает сильной ориентации.

Далее будем считать, что граф G не содержит точек сочленения, т.е. двусвязен, а значит допускает сильную ориентицаю рёбре. Построим такую ориентацию рёбер:

```
procedure DFS(v)
    isUsed[v] = true
    for u ∈ Γ(v) do
        orientEdgeFromTo(v, u)
        if isUsed[u] = false then
            DFS(u)
```

Вызов «orientEdgeFromTo(v,u)» просто ориентирует ребро $\{v,u\}$ так: (v,u), т.е. $v \to u$. Таким образом мы просто ориентируем все рёбра в порядке обхода в глубину от предка к сыну, а если встречаем обратное ребро, которое может вести из вершины v к её предку, то ориентируем его от сына (v) к предку.

Этот алгоритм будет работать по следующим причинам: рассмотрим 2 любые вершины v и u графа G', который есть ориентированный граф G по процедуре, приведённой выше. Посмотрим на эти вершины в дереве, которое было построено поиском в глубину. Пускай p — это любой общий предок вершины v и u в этом дереве (он может совпадать с v или u). Заметим теперь, что т.к. G — двусвязный, то нам известно (из того же курса дискретной математики), что **любые 2 вершины G лежат на одном цикле**, но это значит, что p и v лежат на некотором цикле. Ясно тогда, что найдётся такая вершина x, что в дереве, построенном обходом в глубину, v будет предком x (x может совпадать с v) и из x будет торчать обратное ребро в p:



Но тогда мы видим, что из v можно пройти в u так: $v \to \ldots \to x \to p \to \ldots \to u$. Таким образом мы показали, что для любых двух вершин v и u графа G', который есть ориентация графа G по приведённой процедуре, из v существует путь по ориентированным рёбрам в u. А это значит, что граф G' сильно ориентирован. ∎