Математическая логика. Домашнее задание №3

Горбунов Егор Алексеевич

14 марта 2016 г.

Задание №1 Напишите нерекурсивное определение функции

$$f(n) = \sum_{i<n}(f(i) + 1)$$

Докажите, используя (обобщенный) принцип индукции, равенство этих двух функций.

Решение: Видимо, $f(0) = 0$, тогда:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(i) + 1) = f(0) + 1 + f(1) + 1 + \ldots + f(n-1) + 1 = n + f(n-1) + \ldots + f(1) = \\
&= n + (n-1) + 2f(n-2) + 2f(n-3) + \ldots + 2f(1) = \\
&= n + (n-1) + 2(n-2) + 4f(n-3) + 4f(n-4) + \ldots + 4f(1) = \\
&= n + (n-1) + 2(n-2) + 4(n-3) + 8f(n-4) + 8f(n-5) + \ldots + 8f(1) = \\
&= n + 2^0(n-1) + 2^1(n-2) + 2^2(n-3) + \ldots + 2^{k-1}(n-k) + \ldots + 2^{n-2} = \\
&= n + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}(n-i) = n + \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n-1} 2^i - \sum_{i=1}^{n-1} i2^{i-1}
\end{aligned}$$

Рассмотрим $F(z) = \sum_{i=1}^{n-1} z^i = \frac{z^n - z}{z-1}$, тогда $F'(z) = \sum_{i=1}^{n-1} iz^{i-1} = \frac{1 - nz^{n-1} + (n-1)z^n}{(z-1)^2}$. Таким образом:

$$\begin{aligned}
f(n) &= n + \frac{n}{2}F(2) - F'(2) = n + \frac{n}{2}(2^n - 2) - 2^n(n-1) + n2^{n-1} - 1 = \\
&= n + n2^{n-1} - n - 2^n(n-1) + n2^{n-1} - 1 = n2^n - n2^n + 2^n - 1 = \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

Теперь нужно показать равенство $2^n - 1$ и $f(n)$ в исходном определении, т.е. доказать нужно следующее утверждение:

$$P(n) = \left(2^n - 1 = \sum_{i<n}(f(i) + 1)\right)$$

- $P(0)$ верно, т.к. $f(0) = 0$ и $2^0 - 1 = 0$
- Пускай верно $P(n), P(n-1), \ldots, P(0)$, тогда докажем $P(S(n))$, т.е. $P(n+1)$. Раскроем

рекурсивное определение, как делали это выше, и воспользуемся предположением:

$$\begin{aligned}
f(n+1) = n+1+f(n)+\ldots+f(1) = (n+1) + &\overbrace{(2^n-1)+(2^{n-1}-1)+\ldots+(2^1-1)}^{n \text{ слагаемых}} = \\
&= 1+2^1+2^2+\ldots 2^n = 1+2^{n+1}-2 = \\
&= 2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

Как видим, мы показали то, что требовалось.

■

Задание №2 Докажите, что принцип зависимой рекурсии эквивалентен принципам рекурсии и индукции.

Решение: Принцип зависимой рекурсии: для задания зависимой функции $f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} B(n)$ достаточно задать:

$$\begin{gathered}
f(0) = b,\ b \in B(0) \\
f(S(n)) = e,\ e \text{ — выражение, задающее элемент } B(S(n))
\end{gathered}$$

- Покажем, как из принципа зависимой рекурсии следует принцип индукции. Положим нам хочется доказать $P(n)$. Зададим зависимые множества $B(n)$ так:

  $$\begin{gathered}
  B(n) = \{1\}, \text{ если верно } P(n) \\
  B(n) = \varnothing, \text{ если неверно } P(n)
  \end{gathered}$$

  Таким образом, чтобы доказать $P(n)$, нужно задать функцию $f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} B(n)$ по принципу зависимой рекурсии. Если такую функцию удаётся задать, то $P(n)$ будет доказано.

- Покажем, как из принципа завиимой рекурсии следует принцип рекурсии: это просто, достаточно сказать, что $B(n)$ не зависит от $\mathbb{N}$, т.е. $B(n) = B$ и получится просто принцип рекурсии. ■

Задание №3 Приведите контрпримеры, показывающие, что отдельно ни принципа рекурсии, ни принципа индукции не достаточно, чтобы гарантировать уникальность натуральных чисел. То есть нужно привести примеры множеств $\mathbb{N}_i$ вместе с $0_i \in \mathbb{N}_i$, $S_i : \mathbb{N}_i \to \mathbb{N}_i$, где $i \in \{1,2\}$, таких что $\mathbb{N}_1$ удовлетворяет принципу рекурсии, $\mathbb{N}_2$ удовлетворяет принципу индукции, но они не равномощны $\mathbb{N}$.

Решение:

- рассмотрим множество $\mathbb{N}_1 = \{0,1,2\}$ вместе с $0_1 = 0$ и $S_1(n) = (n+1) \bmod 3$. Оно удовлетворяет принципу рекурсии, т.к. можно сконструировать следующую функцию: $f(0) = 0_1,\ f(S(n)) = S_1(f(n))$. Но видно, что $|\mathbb{N}_1| = 3 < |\mathbb{N}|$.

- я чего-то не понимаю, но, кажется, что множество $\mathbb{N}_1 = \{0, 1, 2\}$ удовл. принципу индукции, т.е. если у нас есть предикат P над этим множеством, то для его доказательства достаточно показать $P(0)$ и $P(S_1(n))$ если верно $P(n)$... ∎

Задание №5 Сформулируйте принципы рекурсии, индукции и зависимой рекурсии для множества $List(A)$.

Решение:

- Принцип рекурсии: для задания функции $f : List(A) \to B$ достаточно задать:

$$f(nil) = b$$
$$f(cons(a, xs)) = e$$

  Где, $b \in B$, а выражение e может использовать xs и задаёт элемент из B

- Принцип индукции: если мы хотим доказать, что для любого $xs \in List(A)$ верно $P(xs)$, то достаточно доказать:

  - Верно $P(nil)$
  - Для любого $xs \in List(A)$, если верно $P(xs)$, то для любого $a \in A$ верно $P(cons(a, xs))$

- Принцип зависимой рекурсии: для задания зависимой функции $f \in \prod xs \in List(A) B(xs)$ нужно задать:

$$f(nil) = b$$
$$f(cons(a, xs)) = e$$

  Где, $b \in B(nil)$, а выражение e может использовать $f(xs) \in B(xs)$ и задаёт элемент из $B(cons(a, xs))$

Задание №6 Опишите индуктивным образом предикат на $\mathbb{N}$, задающий нечетные числа.

Решение:

$$\frac{}{1 \ is \ odd} \qquad \frac{n \ is \ odd}{n + 2 \ is \ odd}$$