

Задания

21 марта 2016 г.

1. Опишите 2-сортную сигнатуру и теорию коммутативных колец с единицей и модулей над ними (определение этих понятий легко найти в интернете).
2. Рассмотрим сигнатуру $(\{N\}, \{0 : N, S : N \rightarrow N, + : N \times N \rightarrow N\})$. Рассмотрим следующую теорию:

$$\begin{aligned}0 + y &= y \\ S(x) + y &= S(x + y)\end{aligned}$$

Докажите, что следующие формулы невыводимы в этой теории

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + y = y + x$

Напомню, что для доказательства невыводимости формулы достаточно привести пример модели в которой эта формула не верна.

3. Рассмотрим сигнатуру $(\{D\}, \{* : D \times D \rightarrow D, 1 : D, f : D \rightarrow D, g : D \rightarrow D, i_1 : D \rightarrow D, i_2 : D \rightarrow D\})$. Рассмотрим следующую теорию в ней:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= x * (y * z) \\ x * 1 &= x \\ 1 * x &= x \\ f(f(x)) &= f(x) \\ g(g(x)) &= g(x) \\ f(g(x)) &= g(f(x)) \\ i_1(f(x)) * g(x) &= 1 \\ f(x) * i_2(g(x)) &= 1\end{aligned}$$

Какие из следующих утверждений являются теоремами этой теории? Докажите это.

- (a) $i_1(x) = i_2(x)$
- (b) $i_1(x) * x = 1$

(c) $f(x) = g(x)$

(d) $f(x) = x$

При доказательстве выводимости можно опускать очевидные шаги, такие как применения ассоциативности и аксиом $1 * x = x$ и $x * 1 = x$.

4. Рассмотрим сигнатуру $(\{D\}, \{* : D \times D \rightarrow D, + : D \times D \rightarrow D, 1 : D, 0 : D, - : D \rightarrow D\})$. Теория колец с единицей выглядит следующим образом:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = x$$

$$0 + x = x$$

$$x + y = y + x$$

$$x + -x = 0$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$x * 1 = x$$

$$1 * x = x$$

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$$

$$(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$$

Добавим к этой теории следующую аксиому:

$$x * x = x$$

Докажите, что в этой расширенной теории выводимы следующие формулы:

(a) $x * y = y * x$

(b) $x + x = 0$