Математическая логика. Домашнее задание №7

Горбунов Егор Алексеевич

10 апреля 2016 г.

Задание №1 Докажите, что формула $((P \to Q) \to P) \to P$ невыводима, показав, что ее выводимость влечет выводимость исключенного третьего.

Решение: Обозначим:

$$\dfrac{}{\vdash ((P \to Q) \to P) \to P}\,(x)$$

Теперь:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash ((P \lor \neg P \to \bot) \to P \lor \neg P) \to (P \lor \neg P)}\,(x) \qquad \dfrac{\text{см. ниже}}{(P \lor \neg P \to \bot) \to P \lor \neg P}}{\vdash P \lor \neg P}\,(\to E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, (P \lor \neg P \to \bot) \vdash P \lor \neg P \to \bot}\,(var) \qquad \dfrac{\dfrac{}{P, (P \lor \neg P \to \bot) \vdash P}\,(var)}{P, (P \lor \neg P \to \bot) \vdash P \lor \neg P}\,(\lor I_1)}{P, (P \lor \neg P \to \bot) \vdash \bot}\,(\to E)}{(P \lor \neg P \to \bot) \vdash P \to \bot}\,(\to I)}{(P \lor \neg P \to \bot) \to P \lor \neg P}\,(\to I \text{ и } \lor I_2)$$

Видим, что у нас получилось вывести $\vdash P \lor \neg P$ воспользовавшись тем, что $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$ выводим (то, что мы обозначили за (x)). При использовании (x) мы совершили подстановку $[(P \lor \neg P/P, \bot/Q)]$.

■

Задание №2 Докажите, что в интуиционистской логике следующие правила вывода эквивалентны:

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \lor \neg\varphi}\,,\text{(lem)} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi}\,,\text{(dne)}$$

Для этого достаточно показать, что имея правило (lem), заключение правила (dne) выводимо, и наоборот.

Решение:

- $dne \Rightarrow lem$. Вот дерево вывода, доказывающее это (в интуиционистской логике):

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg\neg(\phi \lor \neg\phi) \to (\phi \lor \neg\phi)}\,(dne) \qquad \dfrac{\text{см. ниже}}{\vdash \neg\neg(\phi \lor \neg\phi)}}{\vdash \phi \lor \neg\phi} \to E$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}(var) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}(var) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}(var)}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \phi \vee \neg\phi}\vee I_1}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \phi \vdash \bot} \to E}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg\phi} \to I}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi} \vee I_2}{\dfrac{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \bot}{\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)} \to I} \to E$$

- $lem \Rightarrow dme$. Т.к. мы предполагаем исключённое третье, то можно работать в исчислении Генцена! А тогда:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg\phi \vee \phi}(lem)}{\vdash \neg\phi, \phi} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash \phi}\bot L}{\dfrac{\neg\phi \to \bot \vdash \phi}{\vdash \neg\neg\phi \to \phi} \to R} \to L$$

■

Задание №3 Формула $\varphi \wedge \psi$ доказуема тогда и только тогда когда доказуемы φ и ψ. Верно ли аналогичное утверждение для $\varphi \vee \psi$? То есть, правда ли что $\varphi \vee \psi$ доказуема тогда и только тогда когда доказуема либо φ, либо ψ? В классической логике это не верно. Действительно, $P \vee \neg P$ доказуема, но ни P, ни $\neg P$ не доказуемы. Докажите, что в интуиционистской логике это свойство выполнено.

Hint: используйте в качестве доказательств формул лямбда термы и примените нормализацию.

Решение:

$\Rightarrow$ Тут нам нужно предоставить терм с типом $\varphi \vee \psi \to (\varphi \vee \psi \to \varphi) \vee (\varphi \vee \psi \to \psi)$. Вот он:

$$\lambda e.\text{case } e \text{ of}\{\mathsf{Left}(p) \to \mathsf{Left}\ (\lambda x.p); \mathsf{Right}(q) \to \mathsf{Right}\ (\lambda x.q)\}$$

$\Leftarrow$ Тут нам нужно сконструировать термы с типом $\varphi \vee \psi$ имея φ или ψ. Ну, это довольно очевдно, два случая:

$$\lambda p.\mathsf{Left}\ p$$
$$\lambda q.\mathsf{Right}\ q$$

■

Задание №4 Докажите в классической логике формулу $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$ Напишите лямбда терм, доказывающий эту формулу.

Решение:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\text{тут ещё применяем } \vee R}{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi, \bot}
      \qquad
      \dfrac{}{\bot, \varphi, \psi \vdash \bot}
    }{\varphi \wedge \psi \to \bot, \varphi, \psi \vdash \bot} \to L
  }{
    \dfrac{\varphi \wedge \psi \to \bot \vdash \varphi \to \bot, \psi \to \bot}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi} \vee R
  } \text{дважды} \to R
}{\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi} \to R
$$

■

Задание №5 Докажите в интуиционистской логике формулу $(((P \to Q) \vee (Q \to P)) \to P) \to P$. Напишите лямбда терм, доказывающий эту формулу.

Решение: