Алгоритмы. Домашнее задание №12

Горбунов Егор Алексеевич

10 декабря 2015 г.

Задача №1 (степень одиночества)

$LR(T) = \frac{\text{Количество единственных детей в } T}{\text{Количество вершин в } T}$. Ребёнок единственный, если он один такой у своего родителя. Корень не является единственным ребёнком.

(a) *Покажите, что в любом ненулевом AVL-дереве T $LR(T) \le \frac{1}{2}$*

(b) *Правда ли, что если $LR(T) \le \frac{1}{2}$, то $h(T) \le \log size(T)$?*

(c) *Пусть в дереве T есть всего $\Theta(size(T))$ единственных детей и все они — листья. Правда ли, что для любого такого дерева $h(T) \le \log size(T)$?*

<u>Решение:</u> Обозначим $LC(T)$ — множество единственных детей в T.

(a) В AVL-дереве на 1 вершине $LR(T) = 0 \le \frac{1}{2}$. На 2 вершинах $LR(T) = \frac{1}{2}$. Пускай утверждение верно для всех AVL-деревьев на $1, 2, \ldots, n-1$ вершине. Рассмотрим AVL-дерево T на $n > 2$ вершинах пусть T_l и T_r — это левое и правое поддерево, подвешенные к корню T. Т.к. высоты T_l и T_r отличаются максимум на 1, а $n > 2$, то оба T_l и T_r — непустые AVL-деревья. Пусть размер T_l — $n_l < n$, а размер T_r — $n_r < n$. Заметим, что индукционное предположение для T_l и T_r верно и $n = n_l + n_r + 1$.

$$LR(T) = \frac{|LC(T_l)| + |LC(T_r)|}{n} = \frac{n_l n_r}{n}\Big(\frac{|LC(T_l)|}{n_l n_r} + \frac{|LC(T_r)|}{n_l n_r}\Big) \le \frac{n_l n_r}{n}\Big(\frac{1}{2n_l} + \frac{1}{2n_r}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{n_l + n_r}{n} = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} \le \frac{1}{2}$$

Итого по индукции показали, что утверждение (a) верно. ■

(b) Нет, не правда. Рассмотрим дерево T на n вершинах (в данном случае n чётное) изображённое на рисунке 1. Высота этого дерева равна $\frac{n}{2} + 1$, но при этом единственный ребёнок лишь один — это лист n. Таким образом $LR(T) = \frac{1}{n} \le 12$, но при этом высота $h(T) = \frac{n}{2} + 1 > \log n$ ■

(c) Обозначим $n = size(T)$. Рассмотрим дерево изображённое на рисунке 2. В этом дереве $n = 3m + 1$ вершина. Высота этого дерева равна $m + 2$ (m «веточек» влево и ещё 2 уровня под корень и его сына 2). Ясно, что в таком графе одиноких детей ровно m,

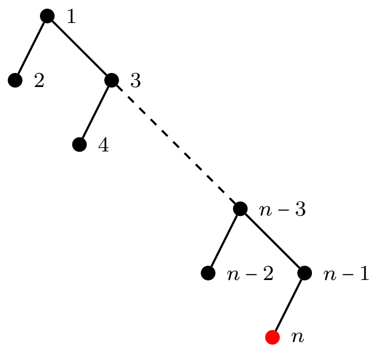

Рис. 1: К задаче 1 (b)

они выделены красным на изображении и каждый из них является листом, т.е. дерево T удовлетворяет условию задачи ($m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$). Но, как было сказано выше, высота этого дерева равна $m + 2 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2 \geq \log n$ начиная с некоторого n. Таким образом утверждение пункта задачи неверно! ■

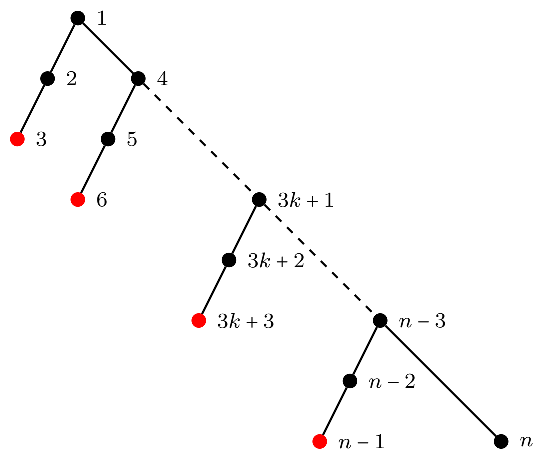

Рис. 2: К задаче 1 (c)

Задача №2 (Слияния AVL-деревьев)

Пусть даны 2 AVL-дерева T_1 и T_2. Придумать, как построить AVL-дерево T, являющееся объединением деревьев T_1 и T_2 за время:

(a) $\mathcal{O}\left(h(T_1) size(T_2)\right)$

(b) $\mathcal{O}\left(\max\left\{size(T_1), size(T_2)\right\}\right)$

<u>Решение:</u>

Задача №3 (Порядковые статистики)

(a) Придумайте, как в AVL-дереве T реализовать операцию получения k-ой порядковой статистики за $\mathcal{O}\left(h(T)\right)$

(b) *Придумайте, как в AVL-дереве T найти $index(k)$ — позицию ключа k в отсортированном массиве ключей за $\mathcal{O}\left(h(T)\right)$*

(c) *Придумайте, как в AVL-дереве T найти количество ключей между k_1 и k_2 за $\mathcal{O}\left(h(T)\right)$*

Решение: