Математическая логика. Домашнее задание №11

Горбунов Егор Алексеевич

16 мая 2016 г.

Задание №1 Докажите, что отношение $\subseteq$ является частичным порядком. Какие аксиомы при этом необходимо использовать?

Решение:

- Рефлексивность. Нам нужно показать, что $\forall x\ (x \subseteq x)$, т.е. $\forall z\ (z \in x \to z \in x)$. Это доказывается вообще без использования аксиом специфичных для IZF: достаточно один раз применить правило $\to I$, а после (var).
- Антисимментричность сразу же следует из аксиомы экстенсиальности.
- Транзитивность. Нужно показать, что $\forall a \forall b \forall c\ (a \subseteq b \wedge b \subseteq c \to a \subseteq c)$.

$$(\forall z\,(z \in a \to z \in b) \wedge \forall z\,(z \in b \to z \in c)) \to \forall z\,(z \in a \to z \in c)$$

  Мы доказывали транзитивность импликации в интуиционистской логике (легко предоставить терм), так что никакие специфичные для IZF аксиомы использовать не нужно.

Задание №2 Докажите при помощи $\in$-индукции:

(a) Отношение $\in$ иррефлексивно.

(b) Не существует x и y, таких что $x in y$ и $y in x$.

Решение:

(a) Для пустого множества по его определению иррефлексивность верна. Пускай для множества x верно $\forall y \in x\ y \notin y$. Пускай у нас $x \in x$, но тогда $\exists y \in x\ (y \in y)$, что не может быть верно по предположению индукции, а поэтому верно, что $\neg(x \in x)$.

(b) Индукция по x.

- $x = \varnothing$
  - $y = \varnothing$. Понятно, что $x \notin y$ и $y \notin x$ по определению пустого множества.
  - $y \neq \varnothing$. Тут верно, что $y \notin x$, т.к. x пусто.
- x — какое-то множество, не пустое.

- $y = \varnothing$. Верно, что $x \notin y$, а значит не верно, что $x \in y \land y \in x$.
- y — какое-то множество. По предположению индукции тут верно, что

$$\forall a \forall b\, (a \in x \land b \in y \to \neg(a \in b \land b \in a))$$

Если $x \in y \land y \in x$, то предположение индукции сразу же будет нарушено, т.к. найдутся такие $a = x$ и $b = y$, что $a \in b \land b \in a$.

Я тут видимо напутал с тем, как использовать аксиому индукции, но сути это не меняет, т.к. видимо, достаточно просто последнего пункта док-ва. ■

Задание №3 Докажите следующие свойства натуральных чисел:

(a) $\forall x \in \mathbb{N}(x = 0 \lor \exists y \in \mathbb{N}(x = S(y)))$

(b) Используя предыдущий пункт и следующий принцип индукции

$$(\forall x \in \mathbb{N}(\forall y < x\; \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in \mathbb{N}\; \varphi(x)$$

докажите обычный принцип индукции для натуральных чисел:

$$\varphi(0) \land (\forall y \in \mathbb{N} \varphi(y) \to \varphi(S(y))) \to \forall x \in \mathbb{N}\; \varphi(x)$$

Решение: Пусть $S'(n)$ — это предикат в рамках теории множеств, а $S(n)$ — succ.

(a) По аксиоме, характеризующей натуральные числа, если $n \in \mathbb{N}$, то либо $n = \varnothing$, либо верен предикат $S'(n)$, а предикат $S'(n)$ в свою очередь утверждает, что $\exists k(n = \{k \cup \{k\}\})$ (неформально), т.е. $n = S(k) = \{k \cup \{k\}\}$. ■

(b) Покажем, что:

$$x \vdash (\varphi(0) \land (\forall y \in \mathbb{N} \varphi(y) \to \varphi(S(y)))) \to ((\forall y < x\; \varphi(y)) \to \varphi(x))$$

По пункту а) x может быть либо 0 либо $S(z)$ для какого-то y. Если $x = 0$, то приведённая выше импликация примет вид:

$$x \vdash \varphi(0) \to \top$$

Т.к. не существует $y < 0$. Таким образом при $x = 0$ доказали.

Если же $x = S(z)$. Тогда по левой части импликации верно, что $\varphi(z) \to \varphi(x)$. При этом по индукции верно, т.к. $z < x$, что $(\forall y < z\; \varphi(y)) \to \varphi(z)$, а тогда по транзитивности импликации получаем: $(x = S(z) \land (\forall y < z\; \varphi(y)) \to \varphi(z) \land (\varphi(z) \to \varphi(x))) \to \varphi(x)$, что эквивалентно тому, что хотим доказать. ■

Задание №4 Докажите следующие свойства натуральных чисел (hint: каждый сле- дующий пункт следует из предыдущего):

(a) Если $S(x) < S(y)$, то $x < y$.

(b) $x < y$ тогда и только тогда, когда $S(x)\ y$.

(c) Отношение $\in$ транзитивно на элементах $\mathbb{N}$. Можно показать более общее утверждение: если $x \in y \in z \in \mathbb{N}$, то $x \in z$.

(d) Если $x \in y$ и $y \in \mathbb{N}$, то $x \in \mathbb{N}$.

Решение:

(a) $S(x) = \{x, \{x\}\}$, $S(y) = \{y, \{y\}\}$. Если $S(x) < S(y)$, то:

$$\{x, \{x\}\} \in y \Rightarrow x \in \{x, \{x\}\} \in y \Rightarrow x < y$$
$$\{x, \{x\}\} = y \Rightarrow x \in \{x, \{x\}\} \subseteq y \Rightarrow x < y$$