Математическая логика. Домашнее задание №4

Горбунов Егор Алексеевич

21 марта 2016 г.

Задание №1 Опишите 2-сортную сигнатуру и теорию коммутативных колец с единицей и модулей над ними (определение этих понятий легко найти в интернете).

Решение: Алгебраическая сигнатура $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$:

$$\mathcal{S} = \{R, M\}\,,\ \mathcal{F} = \left\{\begin{array}{l} *_R : R \times R \to R, \\ + : R \times R \to R, \\ neg : R \to R, \\ 0 : R, \\ 1_R : R \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} *_M : M \times M \to M, \\ 1_M : M, \\ inv : M \to M \end{array}\right\} \cup \left\{\ *_{RM} : R \times M \to M\ \right\}$$

Теория. Коммутативное кольцо с 1:

$$x + y = y + x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x$$
$$neg(x) + x = 0$$
$$(x *_R y) *_R z = x *_R (y *_R z)$$
$$x *_R y = y *_R x$$
$$1_R *_R x = x$$
$$x *_R (y + z) = x *_R y + x *_R z$$

Абелева группа:

$$(x *_M y) *_M z = x *_M (y *_M z)$$
$$x *_M y = y *_M x$$
$$1_M *_M x = x$$
$$inv(x) *_M x = 1_M$$

Модуль над кольцом:

$$(x *_R y) *_{RM} m = x *_{RM} (y *_{RM} m)$$
$$x *_{RM} (a *_M b) = (x *_{RM} a) *_M (x *_{RM} b)$$
$$(x + y) *_{RM} m = (x *_{RM} m) *_M (y *_{RM} m)$$

■

Задание №2 Рассмотрим сигнатуру $(\{N\}, \{0 : N, S : N \to N, + : N \times N \to N\})$. Рассмотрим следующую теорию:

$$0 + y = y$$
$$S(x) + y = S(x + y)$$

Докажите, что следующие формулы невыводимы в этой теории

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + y = y + x$

Решение: Рассмотрим такую интерпретацию M данной сигнатуры:

$$(\mathbb{R}, 0, id, /) = [\![N]\!] = \mathbb{R}, [\![0]\!] = 0, [\![S]\!] = id, [\![+]\!] = /$$

Для этой интерпретации аксиомы выполняются, т.к. для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ верно, что $0 + y = y$ и $id(x)/y = x/y = id(x/y)$, т.е. M — модель данной теории.

Теперь рассмотрим следующее означивание: $\rho(x) = 1, \rho(y) = 2, \rho(z) = 3$. Тогда:

$$[\![(x + y) + z]\!]_\rho = (1/2)/3 = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{2} = 1/(2/3) = [\![x + (y + z)]\!]_\rho$$
$$[\![x + y]\!]_\rho = 1/2 = \frac{1}{2} \neq 2 = 2/1 = [\![y + x]\!]_\rho$$

Получили, что для выбранного означивания $[\![(x + y) + z]\!]_\rho \neq [\![x + (y + z)]\!]_\rho$ и $[\![x + y]\!]_\rho \neq [\![y + x]\!]_\rho$, а значит формулы невыводимы в теории. ■

Задание №3 Рассмотрим сигнатуру

$$(\{D\}, \{* : D \times D \to D, 1 : D, f : D \to D, g : D \to D, i_1 : D \to D, i_2 : D \to D\})$$

Рассмотрим следующую теорию в ней:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z) \\ x * 1 &= x \\ 1 * x &= x \\ f(f(x)) &= f(x) \\ g(g(x)) &= g(x) \\ f(g(x)) &= g(f(x)) \\ i_1(f(x)) * g(x) &= 1 \\ f(x) * i_2(g(x)) &= 1 \end{aligned}$$

Какие из следующих утверждений являются теоремами этой теории? Докажите это.

1° $i_1(x) = i_2(x)$

2° $i_1(x) * x = 1$

3° $f(x) = g(x)$

4° $f(x) = x$

При доказательстве выводимости можно опускать очевидные шаги, такие как применения ассоциативности и аксиом $1 * x = x$ и $x * 1 = x$.

Решение: Рассмотрим такую интерпретацию сигнатуры:

$$\left(\mathbb{R},\ *,\ 1,\ f(x) = 1,\ g(x) = 1,\ i_1(x) = x,\ i_2(x) = x^2\right)$$

Эта интерпретация — модель, т.к. первые 3 аксиомы выполняются по свойству операции умножения над $\mathbb{R}$ и далее для любой означивающей функции будет верно:

$$\begin{aligned} [\![f(f(x))]\!] &= 1 = [\![f(x)]\!] \\ [\![g(g(x))]\!] &= 1 = [\![g(x)]\!] \\ [\![f(g(x))]\!] &= 1 = [\![g(f(x))]\!] \\ [\![i_1(f(x)) * g(x)]\!] = [\![i_1]\!]\,(1) * 1 &= 1 * 1 = [\![1]\!] \\ [\![f(x) * i_2(g(x))]\!] = 1 * [\![i_2]\!]\,(1) &= 1 * 1^2 = [\![1]\!] \end{aligned}$$

Выберем означивающую функцию $\rho(x) = 2$, тогда:

$$\llbracket i_1(x) \rrbracket = 2 \neq 2^2 = \llbracket i_2(x) \rrbracket$$
$$\llbracket i_1(x) * x \rrbracket = 2 * 2 \neq 1 = \llbracket 1 \rrbracket$$
$$\llbracket f(x) \rrbracket = 1 \neq 2 = \llbracket x \rrbracket$$

Таким образом утверждения 1°, 2°, 4° не являются теоремами в данной теории.

Осталось разобраться с утверждением 3°. Не вышло у меня.

Задание №4 Рассмотрим сигнатуру

$$(\{D\}, \{* : D \times D \to D, + : D \times D \to D, 1 : D, 0 : D, - : D \to D\})$$

. Теория колец с единицей выглядит следующим образом:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + 0 = x$$
$$0 + x = x$$
$$x + y = y + x$$
$$x + -x = 0$$
$$(x * y) * z = x * (y * z)$$
$$x * 1 = x$$
$$1 * x = x$$
$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$$
$$(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$$

Добавим к этой теории следующую аксиому:

$$x * x = x$$

Докажите, что в этой расширенной теории выводимы следующие формулы:

1° $x * y = y * x$

2° $x + x = 0$

Решение:

1° Будем считать, что уже доказали следующий пункт, т.е. $x + x = 0$, т.е. $x = -x$. Тогда:

$$(x + y) * (x + y) =^{\text{дистрибутивность}} x * x + x * y + y * x + y * y =$$
$$= x + x * y + y * x + y$$

С другой стороны $(x+y)*(x+y)=x+y$, т.е:

$$x+y=x+y+x*y+y*x \Rightarrow x+-x+y+-y=x+-x+y+-y+x*y+y*x$$
$$\Rightarrow 0=x*y+y*x \Rightarrow x*y=-y*x$$

И в силу того, что $x=-x$: $x*y=y*x$.

2° Покажем, что $0*x=0$. $x+0=x \Rightarrow x*x+0*x=x*x \Rightarrow x+0*x=x$, прибавляем слева и справа $-x$ и полчаем, что $0*x=0$. Теперь покажем то, что нужно:

$$x+-x=0 \Rightarrow x*x+-x*x=0*x \Rightarrow x+-x*x=0 \Rightarrow -x*x+-x*(-x*x)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x*(x+x)=0 \Rightarrow x+x=0$$