

Домашнее задание №5

Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

23 марта 2016 г.

Задание №1 Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = B \cdot C$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально.

Решение: Пусть у нас есть какое-то разложение $A = B \cdot C$, что размер B равен $n \times k$, а размер C , соответственно $k \times m$. Известно тогда, что $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(B)$ и $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(C)$, но тогда имеем:

$$\text{rang}(A) \leq \text{rang}(B) \leq \min(n, k) \Rightarrow \text{rang}(A) \leq k$$

Таким образом, вообще самым минимальным возможным k может быть $\text{rang}(A)$ — ранг исходной матрицы. Покажем, что этот минимально возможный k достигается.

Обозначим ранг матрицы A за r и выберем, соответственно, r линейно независимых столбцов матрицы A . Не умаляя общности считаем, что это первые r столбцов матрицы.

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \dots, \mathbf{a}_m]$$

Знаем, что любой столбец матрицы A выражается через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ линейной комбинацией, т.е:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 \cdot c_{1j} + \mathbf{a}_2 \cdot c_{2j} + \mathbf{a}_3 \cdot c_{3j} + \dots + \mathbf{a}_r \cdot c_{rj}$$

Или раскрывая:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{1j} + a_{12}c_{2j} + \dots + a_{1r}c_{rj} \\ a_{21}c_{1j} + a_{22}c_{2j} + \dots + a_{2r}c_{rj} \\ \vdots \\ a_{n1}c_{1j} + a_{n2}c_{2j} + \dots + a_{nr}c_{rj} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Это очень похоже на процесс перемножения матриц! Ясно теперь, что если взять:

$$B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r], \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

Находить коэффициенты c_{ij} можно, например, решая системы линейных уравнений 1 для каждого столбца известными методами. ■

Задание №2 Для заданного n и простого p найти число таких $k \in [0, n]$, что $\binom{n}{k} \bmod p = 0$. Можно считать, что все операции по модулю p происходят за $\mathcal{O}(1)$. Придумайте алгоритм, который работает за:

- (a) $\mathcal{O}(n)$
- (b) $\mathcal{O}(\text{poly}(\log n))$

Решение:

- (a) Запишем биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k}$$

Будем поддерживать степень, в которой p входит в числитель и знаменатель, последовательно перебирая все биномиальные коэффициенты:

$$\frac{n}{1}, \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

Т.е. вначале мы должны знать степень, в которой p входит в n для числителя и в 1 для знаменателя. И так далее. Пусть на i -ом шаге мы знаем степень d_i^1 , в которой p входит в числитель $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1)$ и в степень d_i^2 , в которой p входит в знаменатель $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i$. Тогда на следующем шаге они пересчитываются так: $d_{i+1}^1 = d_i^1 + \text{degree}_p(n-i)$, $d_{i+1}^2 = d_i^2 + \text{degree}_p(i+1)$, где $\text{degree}_p(x)$ — степень, в которой p входит в x (тут в дело вступает простота p). Чтобы суммарно это дело работало за $\mathcal{O}(n)$ нам нужно уметь быстро находить $\text{degree}_p(x)$ для $x \in [1, n]$. Как? Предподсчитаем его за $\mathcal{O}(n)$ так:

$$\begin{aligned} \text{degree}_p(p) &= 1 \\ \text{degree}_p(2p) &= 1 \\ &\dots \\ \text{degree}_p((p-1)p) &= 1 \\ \text{degree}_p(p^2 + p) &= 1 \\ \text{degree}_p(p^2 + 2p) &= 1 \\ &\dots \\ \text{degree}_p(p^2) &= 2 \\ \text{degree}_p(2p^2) &= 2 \\ &\dots \\ \text{degree}_p(p^3 + p^2) &= 2 \\ \dots \text{degree}_p(p^3) &= 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Такю процедуру точно можно за линию организовать, посчитав степени p , пока они меньше n и далее рекурсивно это дело строить... ■