Домашнее задание №11
Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

11 мая 2016 г.

Задание №1 Разберитесь с пересчётом потенциалов при поиске потока. (Видимо, речь идёт об алгоритме поиска максимального потока минимальной стоимости с использованием потенциалов)

Решение: Пускай у нас есть сеть (G, s, t) (со стоимостями $\omega(u, v)$ на рёбрах) и потенциальная функция φ такая, что пересчитанные веса $\omega_\varphi(u, v) = \omega(u, v) + \varphi(u) - \varphi(v)$ неотрицательны. Пускай в этой сети мы нашли кратчайший путь из s в t и пустили по нему поток f. Тогда покажем, что:

$$\varphi_f(v) = \varphi(v) + \mathrm{dist}_\varphi(s, v)$$

есть потенциальная функция такая, что $\omega_{\varphi_f}(u, v) \geq 0$ для любого ребра из остаточной сети G_f, где dist_φ — это кратчайшее расстояние в сети G исходя из весов $\omega_\varphi(u, v)$.

Посмотрим на рёбра в G_f. Их стоимости относительно потенциальной функции φ_f равны:

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi_f}(u, v) &= \omega(u, v) + \varphi_f(u) - \varphi_f(v) = \omega(u, v) + \varphi(u) - \varphi(v) + \mathrm{dist}_\varphi(s, u) - \mathrm{dist}_\varphi(s, v) \\ &= \omega_\varphi(u, v) + \mathrm{dist}_\varphi(s, u) - \mathrm{dist}_\varphi(s, v)\end{aligned}$$

- Если $(u, v) \in G_f$ такое, что $(u, v) \in G$, то стоимость $\omega_{\varphi_f}(u, v)$ неотрицательна в силу того, что в G с пересчитанными весами выполняется неравенство треугольника, т.е. $\mathrm{dist}_\varphi(s, u) + \omega_\varphi(u, v) \geq \mathrm{dist}_\varphi(s, v)$.
- Теперь пусть $(u, v) \in G_f$, но $(u, v) \notin G$. Это значит, что $(v, u) \in G$ по определению остаточной сети. Раз такое ребро (u, v) оказалось в G_f, то по (v, u) был пущен поток f, а значит $(v, u) \in G$ лежит на кратчайшем пути от s к t в G. Но это значит, что

  $$\omega_{\varphi_f}(v, u) = \omega_\varphi(v, u) + \mathrm{dist}_\varphi(s, v) - \mathrm{dist}_\varphi(s, u) = 0$$

  Но стоимость обратного ребра $\omega_{\varphi_f}(u, v) = -\omega_{\varphi_f}(v, u) = 0$. А значит она неотрицательна. Всё. ∎

Задание №2 Дан массив, найдите k непересекающихся возрастающих последовательностей максимальной длины за $\mathcal{O}\left(kV^2\right)$.

Решение: Построим сеть G с весами и пропускными способностями на рёбрах. Добавим в неё вершину s и вершину t, а так же V вершин $1, 2, \ldots, V$, соответствующих элементам массива. Соединим вершину i с вершиной j только в том случае, если $j > i$ и $a[j] > a[i]$ (a — это наш входной массив). На каждом таком ребре проставим пропускную способность равную 1 и стоимость равную -1. Вершину s соединим со всеми V вершинами с пропускной способностью 1 и стоимостью -1 и такими же рёбрами соединим все V вершин с t.

Всё что нам теперь нужно сделать — это найти k максимальных вершинно-непересекающихся пути в построенном графе. Нам в этом поможет алгоритм поиска потока минимальной стоимости. Только перед применением нам нужно раздвоить все вершины в графе на ту, в которую рёбра входят и на ту, из которой они выходят и провести ребро — это трюк для того, чтобы вершинно-непересекающиеся пути можно было искать как рёберно-непересекающиеся. Ставим на новых рёбрах пропускную способность 1 и вес -1.

Важно заметить, что в построенном графе не будет циклов, т.к. каждая вершина с индексом i могла быть соединена только с вершинами с индексами $> i$ (для чистоты скажем, что у s индекс 0, а у t $V + 1$).

Теперь для ответа на вопрос задачи требуется найти поток размера k минимальный стоимости. В силу того, что веса на рёбрах отрицательны, то алгоритм поиска потока будет предпочитать более длинные пути, так как в них вмещается большее число отрицательных рёбер.

В качестве алгоритма для поиска такого потока будем использовать алгоритм с потенциалами, который прошли на упражнениях. ■

Задание №4 Дан граф, на каждом ребре написано 2 числа L и R и ещё дан вес c. По каждому ребру может течь не более чем R, но не менее, чем L жидкости. Найдите:

(a) произвольную циркуляцию

(b) произвольный поток

(c) максимальный поток

(d) поток минимальной стоимости

Решение:

(a) Посмотрим на ребро исходного графа: $u \xrightarrow{L,R} v$. Давайте добавим дополнительную вершину t и раз из вершины u по ребру (u, v) должно выливаться L жидкости, то спустим её в t, а по ребру (u, v) разрешим пускать на L меньше. Но теперь в вершину v у нас приходит меньше, чем требовалось ровно на L, поэтому добавим фиктивную вершинку s из которой в v будет вливаться L жидкости. Итого мы вместо каждого ребра $u \xrightarrow{L,R} v$ добавляем три следующих:

$$s \xrightarrow{0,L} u,\ u \xrightarrow{0,R-L} v,\ v \xrightarrow{0,L} t$$

Видно тогда, что если в полученном графе есть $s - t$ поток, который насыщает все рёбра из s, то в графе есть и циркуляция, которую из такого потока легко получить.

(b) Соединим сток и истоком ребром с ограничениями $L = 0, R = \infty$ и тогда, чтобы найти произвольный поток в исходном графе нужно найти произвольную циркуляцию в модифицированном.

(c) Бинарный поиск по левой границе L добавляемого ребра (из пункта выше).

(d) Бинарный поиск по правой границе R добавляемого ребра (из пункта выше).