

Формальные языки. Домашнее задание на 16.05

Горбунов Егор Алексеевич

16 мая 2016 г.

Задание №1 Показать, что языки не являются контекстно свободными.

Решение:

(а) Язык $a^i b^j c^k, i < j < k$. Будем показывать исходя из леммы о накачке. Для n . Рассмотрим слово $\omega = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Покажем, что какое бы разбиение не взяли $\omega = uvxyz$, что $vy \neq \varepsilon$ и $|vxy| \leq n$, то найдётся $k \geq 0$, что $uv^k xy^k z \notin L$. Т.к. $|vxy| \leq n$, то возможны только следующие случаи:

- $vxy = a^d$. Тогда мы всегда накачиваем a (v, y не пусты) и всегда можем найти такой k , что $v^k xy^k$ будет равен a^D , где $D > n + 1$.
- $vxy = a^d b^q$. В этом случае при увеличении k (накачивая) мы рано или поздно сделаем так, что либо степень a будет больше степени b , либо степень b будет больше степени c , т.к. степень c остаётся неизменной.
- $vxy = b^d$. Аналогично случаю с a^d .
- $vxy = b^d c^q$. У нас в v хотя бы один b или в y хотя бы один c . Положим $k = 0$, тогда в $uv^0 xy^0 z$ (накаченное ω) будет хотя бы на 1 b меньше чем в исходном ω (если в u есть b), но тогда это слово не принадлежит языку, ибо степень b в нём \leq степени a . Аналогично если вдруг u оказалось пустым, но тогда y точно не пусто. (как я понял, по лемме важно, чтобы vy было не пусто, а не каждый в отдельности)
- $vxy = c^d$. Тут берём $k = 0$ и аналогично предыдущему случаю.

■

(b) Язык $a^n b^n c^i$, где $i \leq n$. Аналогично исходя из леммы на накачке. Для n . Рассмотрим слово $\omega = a^n b^n c^n$. $\omega = uvxyz, |vxy| \leq n$. Таким образом возможные случаи для vxy :

- $vxy = a^d$. Тут всё понятно. При накачке с любым k мы потеряем равенство числа a -шек и b -шек
- $vxy = b^d$. Аналогично.
- $vxy = c^d$. Тут при накачке с любым $k > 0$ (достаточно $k = 1$) получим, что число c -шек стало больше, чем число a -шек, а это уже вне языка!

- $vxy = a^d b^q$. Возьмём тогда и положим $k = 0$. У нас тогда либо нарушится равенство числа a -шек и b -шек (это если в v и y их суммарно разное число), а если равенство и не нарушится, то т.к. vy не пусто, то число b и a уменьшится хоть на 1, но тогда, т.к. число c -шек станет больше хотя бы на один в силу того, что во взятом слове число a b и c одинаково.
- $vxy = b^d c^q$. Любая накачка приводит к нарушению либо равенства числа a и b , либо к тому, что c стало больше. (см. предыдущий пункт).

■

(с) Язык 0^p , где p — простое. Исходя из леммы о накачке. Для n . Рассмотрим слово подходящей длины:

$$\omega = uvxyz = 0^u 0^v 0^x 0^y 0^z$$

Накачаем его так:

$$\begin{aligned} 0^{|u|} (0^{|v|})^{|u|+|x|+|z|} 0^{|x|} (0^y)^{|u|+|x|+|z|} 0^{|z|} &= 0^{|u|} 0^{|v|(|u|+|x|+|z|)} 0^{|x|} 0^{|y|(|u|+|x|+|z|)} 0^{|z|} = \\ &= 0^{|u|+|x|+|z|+|v|(|u|+|x|+|z|)+|y|(|u|+|x|+|z|)} = 0^{(|u|+|x|+|z|)(1+|v|+|y|)} \end{aligned}$$

Получили, что длинна накаченного слова составная!

■

(d) Язык $0^i 1^j$, где $j = i^2$. Для n достаточно рассмотреть слово $\omega = 0^n 1^{n^2}$. У нас $|vxy| \leq n$ (то, что в лемме о накачке). Таким образом суммарное число 0 и 1 в этой части слова равно n . Если при накачке число 0 увеличивается на 1, то число 1 должно увеличиться на $2n + 1$, чтобы получить слово из языка. Легко увидеть (правда =)), что такое невозможно.

■

(e) Язык $a^n b^n c^i$, где $n \leq i \leq 2n$. Для n рассматриваем слово $\omega = a^n b^n c^{2n}$ и действуем аналогично пункту (b).