Домашнее задание №8

Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

6 апреля 2016 г.

Задание №1 Сведите к задаче линейного программирования задачу:

$$\min_{1 \le i \le p} \left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right] \longrightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in [1 \ldots m] \\ x_i \ge 0, i \in [1 \ldots n] \end{gathered}$$

Решение: Введём новую переменную y и такие ограничения на неё:

$$y \le \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, i \in [1 \ldots p] \tag{1}$$

Остальные ограничения оставим как есть и таким образом будем решать следующую задачу:

$$\begin{aligned} & y \longrightarrow \max \\ & y \le \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, i \in [1 \ldots p] \\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in [1 \ldots m] \\ & x_i \ge 0, i \in [1 \ldots n] \end{aligned}$$

Задачу приводим к стандартному виду (все неравенства на равенства и переменную y превращаем в положительную) так, как проходили на лекции.

Так же заметим, что такая переформулировка верна в силу того, что хотя бы одно из неравенств 1 превратится в равенство, иначе можно было бы увеличить y не нарушив условия. ■

Задание №2 Сведите к задаче линейного программирования задачу:

$$\sum_{i=1}^{p} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j - d_i \right| \longrightarrow \min$$

При ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i \in [1 \dots m]$$
$$x_i \geq 0, i \in [1 \dots n]$$

Решение: Введём переменные $y_1, y_2, \dots, y_p$. И добавим такие ограничения:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - d_i\right| \leq y_i \iff \begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - d_i \leq y_i \\ -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i \leq y_i \end{matrix}, i \in [1 \dots p]$$

И тогда задача, которая будет решаться, такова:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{p} y_i \longrightarrow \min \\ &\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - d_i \leq y_i, i \in [1 \dots p] \\ &-\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i \leq y_i, i \in [1 \dots p] \\ &x_i \geq 0, i \in [1 \dots n] \end{aligned}$$

Тут неравенства в равенства переводим как на лекции, опять же. Условия, наложенные на y_i автоматически делают y_i неотрицательными. ■

Задание №3 Приведите пример несовместной задачи линейного программирования, двойственная к которой так же несовместна.

Решение: Рассмотрим задачу:

$$-x_1 - x_2 \longrightarrow \min$$

С ограничениями:

$$\begin{aligned} -x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Видно, что задача несовместна, т.к. $x_1 \geq 0$ и $x_1 \leq -1$ одновременно.
Двойственная к ней задача:

$$y_1 + y_2 \longrightarrow \max$$

С ограничениями:

$$
\begin{aligned}
-y_1 &\leq -1 \\
y_2 &\leq -1 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Система также несовместна, поскольку одновременно требуется $y_2 \geq 0$ и $y_2 \leq -1$. ■

Задание №4 Докажите, что если политоп линейной программы в канонической форме ($Ax = b, x \geq 0$) целый для любого вектора b, то матрица A тотально унимодулярна.

Решение: