Математическая логика. Домашнее задание №8

Горбунов Егор Алексеевич

18 апреля 2016 г.

Задание №1 Определите формулы, удовлетворяющие следующим описаниям. Для первых двух заданий мы предполагаем, что в сигнатуре есть преди- катный символ $\leq$.

(a) $\exists x \leq t\ \psi$ («Существует x, меньше либо равный t, такой что верно ψ»)

(b) $\forall x \leq t\ \psi$ («Для любого x, меньше либо равного t, верно ψ»)

(c) «Существует не менее двух элементов, удовлетворяющих $\varphi(x)$»

(d) «Существует ровно два элемента, удовлетворяющие $\varphi(x)$»

(e) «Существует по крайней мере один, но не более двух элементов, удовлетворяющих $\varphi(x)$»

(f) «Существует не более одного элемента, удовлетворяющего $\varphi(x)$»

Решение: Сокращённо пишем вместо $\varphi[y/x] := \varphi(y)$, как я понимаю.

(a) $\exists x\ ((x \leq t) \wedge \psi)$

(b) $\forall x\ ((x \leq t) \to \psi)$

(c) $\exists x\ (\exists y\ ((x = y) \to \bot \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)))$

(d) $\gamma := \exists x\ ((\exists y\ ((x = y) \to \bot \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))) \wedge \forall z(\varphi(z) \to (x = z \vee y = z))$

(e) $\gamma \vee \exists x\ (\varphi(x) \wedge \forall y\ (\varphi(y) \to (x = y)))$

(f) $(\exists x\ (\varphi(x) \wedge \forall y\ (\varphi(y) \to (x = y))) \vee (\forall x\ (\varphi(x) \to \bot))$

Задание №2 Напишите на хаскелле функцию, аналогичную конструкции $case$ для пар, используя fst и snd. Укажите ее тип (вам нужно будет использовать функции высшего порядка вместо расширения контекста). Реализуйте функции fst' и snd', эквивалентные обычным fst и snd, через эту функцию.

Решение:

```haskell
caseI :: (a, b) -> (a -> b -> c) -> c
caseI p f = f (fst p) (snd p)

fst' :: (a, b) -> a
fst' p = caseI p const

snd' :: (a, b) -> b
snd' p = caseI p (flip const)
```

Задание №3 Пусть у нас есть несколько формул:

(a) $x \neq y$

(b) $\exists x(x \neq y)$

(c) $\forall x(x \neq y)$

(d) $\exists x \exists y(x \neq y)$

(e) $\exists x \forall y(x \neq y)$

(f) $\forall x \exists y(x \neq y)$

(g) $\forall x \forall y(x \neq y)$

И несколько интерпретаций:

$$M_0 = \varnothing$$
$$M_1 = \{7\}$$
$$M_2 = \{13, 28\}$$

Какие из этих формул верны в каких моделях?

Решение:

	M_0	M_1	M_2
(a)	✓	×	×
(b)	×	×	✓
(c)	✓	×	×
(d)	×	×	✓
(e)	×	×	×
(f)	✓	×	✓
(g)	✓	×	×

Задание №4 Докажите, что формулы $\forall x \forall y(x \neq y)$ и $\neg \exists x \top$ эквивалентны, написав лямбда терм типа $((\forall x \forall y(x \neq y)) \to \neg \exists x \top) \land ((\neg \exists x \top) \to \forall x \forall y(x \neq y))$.

Решение:

$(\Rightarrow)$ Терм типа $(\forall x \forall y(x \neq y)) \to \neg \exists x \top)$:

$$t_{\Rightarrow} := \lambda f.\, (\lambda p. f\, (\mathrm{fst}\, p)\, (\mathrm{fst}\, p)\, (\mathrm{refl}\, (\mathrm{fst}\, p)))$$

Тут f имеет тип $x \to y \;\to (x = y) \to \bot$, а p имеет тип $(x, \bot \to \bot)$

$(\Leftarrow)$ Терм типа $(\neg \exists x \top) \to \forall x \forall y(x \neq y)$, тип можно переписать так:

$$((x, \bot \to \bot) \to \bot) \to (x \to y \to (x = y) \to \bot)$$

Тогда искомый терм таков:

$$t_{\Leftarrow} := \lambda g.\left(\lambda a.\lambda b.\lambda e.g\left(a, leib(x, x = y, e, e)\right)\right)$$

У нас получается, что a имеет тип x, b имеет тип y, а e имеет тип $x = y$, тогда, соответственно, можно считать, что e имеет тип $x = y[x/x]$, а значит $leib(x, x = y, e, e)$ будет иметь тип $y = y$, что эквивалентно $\top = \bot \to \bot$

Требуемый итоговый терм: $(t_{\Rightarrow}, t_{\Leftarrow})$ ■