Домашнее задание №5
Алгоритмы. 5 курс. Весенний семестр.

Горбунов Егор Алексеевич

23 марта 2016 г.

Задание №1 Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = B \cdot C$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально.

Решение: Пусть у нас есть какое-то разложение $A = B \cdot C$, что размер B равен $n \times k$, а размер C, соответственно $k \times m$. Известно тогда, что $rang(A) \leqslant rang(B)$ и $rang(A) \leqslant rang(C)$, но тогда имеем:

$$rang(A) \leqslant rang(B) \leqslant \min(n, k) \Rightarrow rang(A) \leqslant k$$

Таким образом, самым минимальным возможным k может быть $rang(A)$ — ранг исходной матрицы. Покажем, что этот минимально возможный k достигается.

Обозначим ранг матрицы A за r и выберем, соответственно, r линейно независимых стобцов матрицы A. Не умаляя общности считаем, что это первые r стобцов матрицы.

$$A = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}}, \boldsymbol{a_{r+2}}, ..., \boldsymbol{a_m}]$$

Знаем, что любой столбец матрицы A выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейной комбинацией, т.е:

$$\boldsymbol{a_j} = \boldsymbol{a_1} \cdot c_{1j} + \boldsymbol{a_2} \cdot c_{2j} + \boldsymbol{a_3} \cdot c_{3j} + \ldots + \boldsymbol{a_r} \cdot c_{rj}$$

Или раскрывая:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{1j} + a_{12}c_{2j} + \ldots a_{1r}c_{rj} \\ a_{21}c_{1j} + a_{22}c_{2j} + \ldots a_{2r}c_{rj} \\ \vdots \\ a_{n1}c_{1j} + a_{n2}c_{2j} + \ldots a_{nr}c_{rj} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ясно теперь, что если взять:

$$B = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_r}], \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

То получим искомое разложение. Находить коэффициенты c_{ij} можно, например, решая системы линейных уравнений 1 для каждого столбца известными методами. ∎

Задание №2 Для заданного n и простого p найти число таких $k \in [0, n]$, что $\binom{n}{k} \mod p = 0$ Можно считать, что все операции по модулю p происходят за $\mathcal{O}(1)$. Придумайте алгоритм, который работает за:

(a) $\mathcal{O}(n)$

(b) $\mathcal{O}(poly(\log n))$

Решение:

(a) Запишем биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k}$$

Будем поддерживать степень, в которой входит p в числитель и знаменатель, последовательно перебирая все биномиальные коэффициенты:

$$\frac{n}{1}, \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

Если мы знаем степень, в которой p входит в числитель и знаменатель, то можем сказать, делится ли на p биномиальный коэффициент просто посмотрев на разность этих степеней. Т.е. вначале мы должны знать степень, в которой p входит в n для числителя и в 1 для знаменателя. И так далее. Пусть на i-ом шаге мы знаем степень d_i^1, в которой p входит в числитель $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1)$ и в степень d_i^2, в которой p входит в знаменатель $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i$. Тогда на следующем шаге они пересчитываются так: $d_{i+1}^1 = d_i^1 + degree_p(n-i)$, $d_{i+1}^2 = d_i^2 + degree_p(i+1)$, где $degree_p(x)$ — степень, в которой p входит в x (тут в дело вступает простота p). Чтобы суммарно это дело работало за $\mathcal{O}(n)$ нам нужно уметь быстро находить $degree_p(x)$ для $x \in [1, n]$. Как? Предподсчитаем его за $\mathcal{O}(n)$ так:

$$\begin{aligned}
degree_p(p) &= 1 \\
&\ldots \\
degree_p((p-1)p) &= 1 \\
degree_p(p^2+p) &= 1 \\
&\ldots \\
degree_p(p^2) &= 2 \\
degree_p(2p^2) &= 2 \\
&\ldots \\
degree_p(p^3+p^2) &= 2 \\
\ldots degree_p(p^3) &= 3 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Такую процедуру точно можно за линию организовать, посчитав степени p, пока они меньше n и далее рекурсивно это дело строить... ■

Задание №3 На кольцевой стоят n светофоров и хитро перемигиваются. Свет на каждом светофоре зажигается в таком порядке: зеленый-желтый-красный, снова зеленый и так по кругу. Все светофоры пронумерованны от 1 до n. Если светофор по номеру i решит поменять свой цвет то следующие, k_i светофоров с шагом a_i тоже поменяют свой цвет. Ниже приведен пример, когда переключается первый светофор: $k_1 = 6, a_1 = 2$.

По начальному состоянию светофоров определите, возможен ли зеленый коридор. Т.е. такая ситуация, когда все светофоры переключены на зеленый. Решить за $\mathcal{O}(n^3)$.

Решение: Делаем все операции по модулю 3 — число состояний светофора.

Начальное состояние светофоров $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)^T \in \{0, 1, 2\}^n$. Построим матрицу A нал $\{0, 1\}$, что если $A_{ij} = 1$, то светофор j провоцирует смену цвета светофора i. Эту матрицу заплним так:

$$A_{ii} = 1, \ \ \forall i$$
$$A_{k \cdot a_i, i} = 1, \ \ \forall i, \ \ k \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$$

Пускай теперь у нас в векторе $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ записаны количества переключений i-го светофора, т.е. светофор i сам переключался c_i раз. Посмотрим на такое произведение (для примера взято $n = 3$):

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\ s_2 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 \\ s_3 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в i-ом элементе результирующего вектора записано состояние i-го светоформа после того, как каждый светофор переключился своё число раз (заданное вектором c). Это действительно так, ибо каждое слагаемое $a_{ij}c_j$ равно c_j, если переключение j провоцирует переключение i, т.е. на каждое переключение j имеем переключение i и 0, если $a_{ij} = 0$, так же учитывается начальное состояние s_i.

Таким образом мы умеем находить конечное состояние светофоров, при помощи произведения матриц, по исходному состоянию и значениям k_i, a_i и числу самостоятельных переключений каждого светоформа:

$$\boldsymbol{s} + A \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$$

Зелёный коридор — это когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. А значит, чтобы понять, возможен ли зелёный коридор, нужно проверить, имеет ли решения СЛАУ:

$$A \cdot \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{s}$$

Это делается как раз за $\mathcal{O}(n^3)$. ■