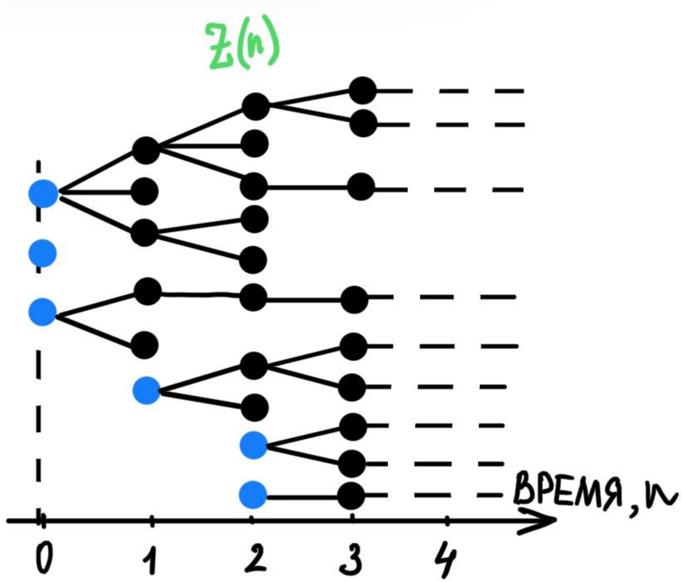
Ветвящиеся процессы

Егор Солдатов

22 мая 2025 г.

Процесс с иммиграцией

Иллюстрация



Процесс с иммиграцией

Построение

Все X и Y независимы

$$W(0) := 0$$

$$W(1) := Y^{(0)}$$

$$W(n+1) := X_1^{(n)} + \ldots + X_{W(n)}^{(n)} + Y^{(n)}$$

Производящие функции

- $f(s) := f_X(s)$
- $g(s) := f_Y(s)$

Производящая функция процесса

Общий случай

$$\phi_n(s) := f_{W(n)}(s) = \prod_{k=0}^{n-1} g(f_k(s))$$

$$X \overset{d}{=} Y \Rightarrow \phi_n(s) = \prod_{k=1}^{n} f_k(s)$$

Геометрический случай

$$X, Y \sim Geom(p)$$

$$\mathbb{P}(X = k) = q^k p, k \geq 0$$

$$A := \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 1 \Rightarrow f_X(s) = \frac{1}{1 + A(1 - s)} = \frac{1}{2 - s}$$

Производящая функция процесса (геометрический случай)

Геометрический случай

$$f_n(s) = \frac{n(1-s)+s}{n(1-s)+1}$$

$$\phi_n(s) = \frac{1}{1+n(1-s)} \Rightarrow W(n) \sim Geom(\frac{1}{n+1})$$

При $n \to \infty$:

$$\frac{W(n)}{n} \sim Exp(1)$$

Производящая функция процесса (геометрический случай)

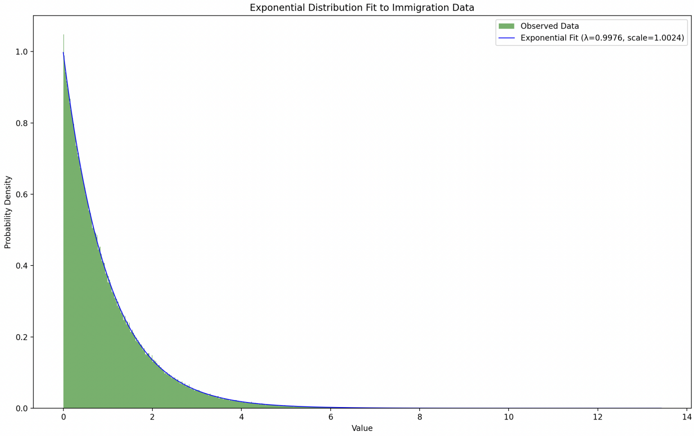


Рис.: Распределение $\frac{W(n)}{n}$

Вернемся к процессу без иммиграции

Невыродившиеся популяции

$$\phi_n(s) := \mathbb{E}[s^{\frac{Z(n)}{n}} | Z(n) > 0] = 1 - \frac{1 - f_n(s^{\frac{1}{n}})}{1 - f_n(0)}$$

Ряд тейлора в $s_0 = 1$:

$$f(s) = s + \frac{\sigma^2}{2}(s-1)^2 + o((s-1)^2)$$

$$\frac{1}{1 - f(s)} = \frac{1}{1-s} + \frac{\sigma^2}{2} + o(1)$$

$$\frac{1}{1 - f_n(s)} = \frac{1}{1-s} + \frac{n\sigma^2}{2} + o(n)$$

Вернемся к процессу без иммиграции

Невыродившиеся популяции

$$\phi_n(s) \approx \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{2}\ln s}$$

$$\int_0^\infty s^x a e^{-ax}\,dx = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}\ln s}, \quad a = \frac{2}{\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\frac{Z(n)}{n} | Z(n) > 0\} \sim Exp(\frac{2}{\sigma^2})$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{Z(n)}{n} \le t | Z(n) > 0) = \int_0^t a e^{-ax}\,dx = 1 - e^{-at}$$

Обобщение

Процесс с иммиграцией

10^6 испытаний, $X, Y \sim Binom(8, \frac{1}{8}), 500 \leq n \leq 600$

Гамма-распределение

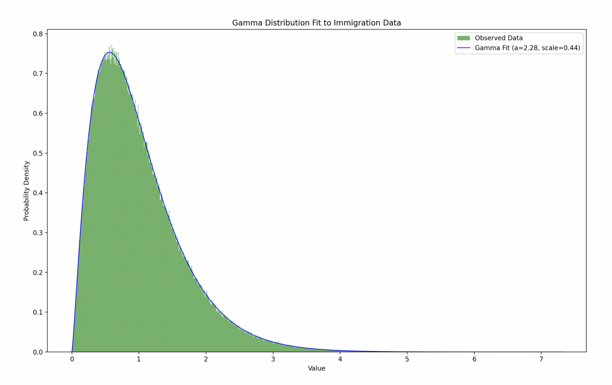


Рис.: Распределение $\frac{W(n)}{n}$