Санкт–Петербургский государственный университет

Математическое обеспечение и admиистрирование информационных систем

Гусев Егор Игоревич

Вычислительный практикум

Отчет по заданию №10

Преподователь:
Т.О. Евдокимова

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

1. Ссылка на код

Код доступен по ссылке на github.

2. Постановка задачи

1. Реализовать решение уравнения теплопроводности по чисто неявной схеме методом сеток.

2. Реализовать решение уравнения теплопроводности по явной схеме методом сеток в двух случаях:

   Условия устойчивости соблюдены

   Условия устойчивости не соблюдены.

3. Сравнить результаты.

3. Теория

Задача вида

$$u_t(x,t) = \kappa u_{xx} + f(x,t),$$

$$\kappa = const > 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \le T.$$

Заданы одно начальное и два граничных условия

$$u(x,0) = \mu(x), \quad 0 \le x \le a,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(a,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Неоходимо найти решение $u(x,t)$ нашего уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Разбиваем отрезок $[0,a]$ на N равных частей, а отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Обозначим

$$h = \frac{a}{N}, \quad x_i = ih, \quad i = 0,\ldots,N,$$

$$\tau = \frac{T}{M}, \quad t_k = k\tau, \quad k = 0, \ldots, M.$$

Строим сетку $\{(x_i, t_k),\ i = 0, \ldots, N,\ k = 0, \ldots, M\}$.

Приближенное решение получаем в виде таблицы значений в узлах сетки. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k).

Заменяем производные в изначальном уравнении разностными производными.

Схема с весами имеет вид

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}\big(\sigma(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) +$$

$$+ (1-\sigma)\left(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}\right)\big) + f(x_i, t_{k-1} + \sigma\tau).$$

При $\sigma = 0$ получаем явную разностную схему.

В этом случае находим u_i^k из формулы, а u_i^0, u_0^k, u_N^k соответственно равны

$$u_i^0 = \mu(x_i),$$

$$u_0^k = \mu_1(t_k),$$

$$u_N^k = \mu_2(t_k).$$

При $\sigma = 1$ получаем неявную разностную схему.

$$\begin{cases} u_0^k = \mu_1(t_k) \\ \frac{\kappa}{h^2}u_{i-1}^k + \left(-\frac{2\kappa}{h^2} - \frac{1}{\tau}\right)u_i^k + \frac{\kappa}{h^2}u_{i+1}^k = -\frac{1}{\tau}u_i^{k-1} - f(x_i, t_k) \\ u_N^k = \mu_2(t_k) \end{cases}$$

Перепишем полученную СЛАУ в более удобном виде

$$\begin{cases} B_0 u_0^k = D_0^k \\ A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i^k \\ B_n u_n^k = D_n^k \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом прогонки и находим u_i^k.

4. Численный эксперимент

4.1 Результаты

$$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + \frac{t}{2} - 0.0005,$$

$$u(x,0) = \frac{x^2}{4}, \quad u(0,t) = \frac{t^2}{4}, \quad u(a,t) = \frac{t^2}{4} + 25,$$

$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$

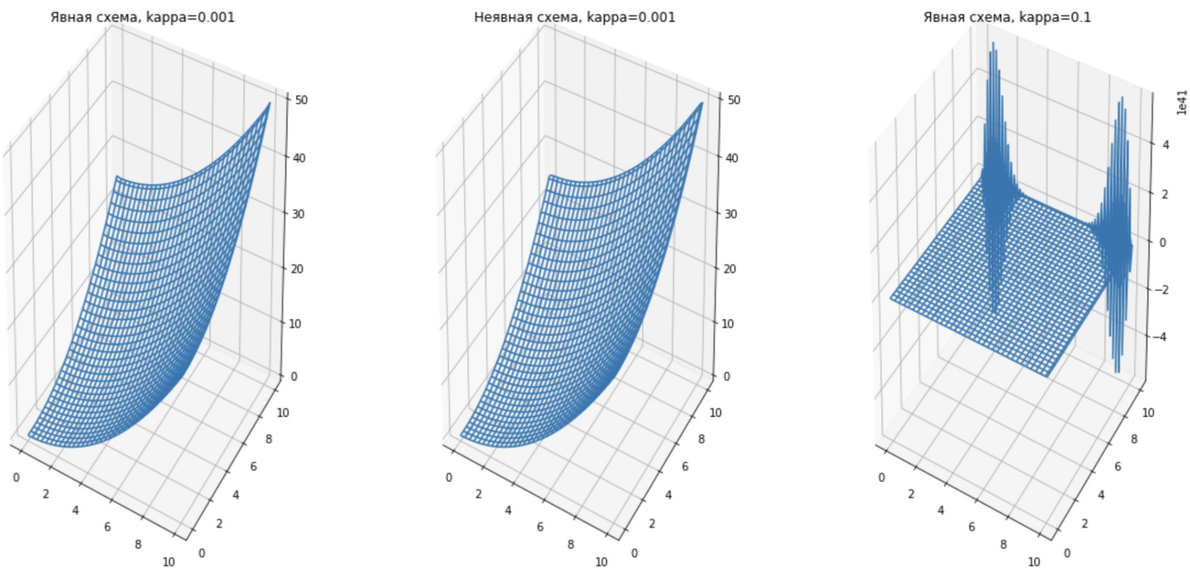

Рис. 1: При kappa=0.1 не выполняется условие устойчивостимой

$$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + x,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 10t,$$

$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$

$$u_t(x,t) = 0.001u_{xx} + 3t^2x + 0.02x^3,$$

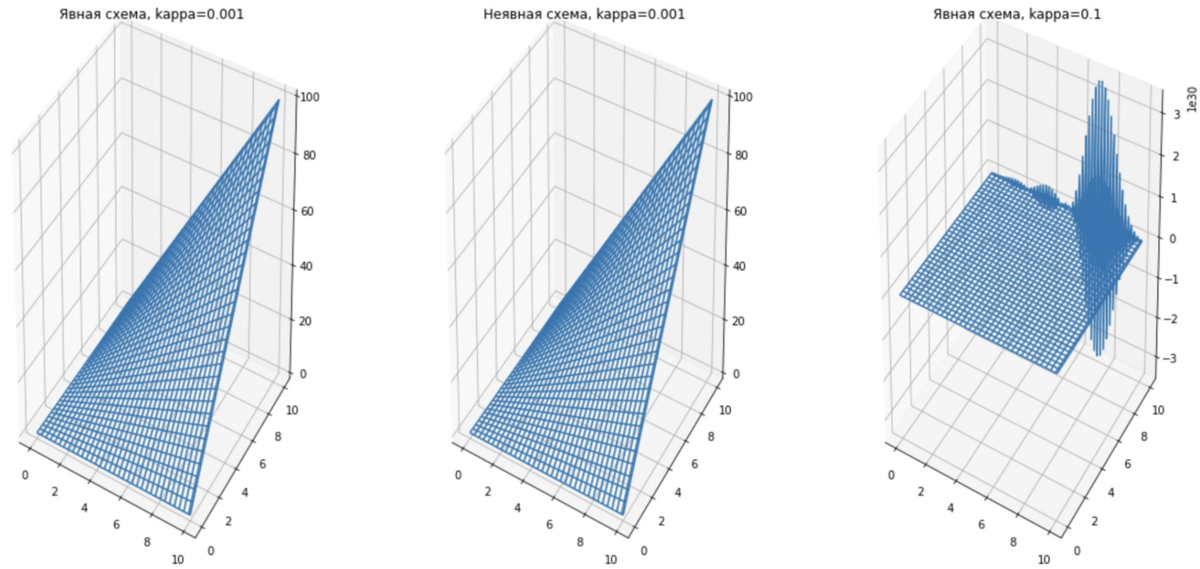

Рис. 2: При kappa=0.1 не выполняется условие устойчивостимой

$$u(x,0) = -x^5 - 2x + 25, \quad u(0,t) = 25, \quad u(a,t) = 10t^3 - 99995,$$

$$a = 10,\ T = 10,\ N = 100,\ M = 100.$$

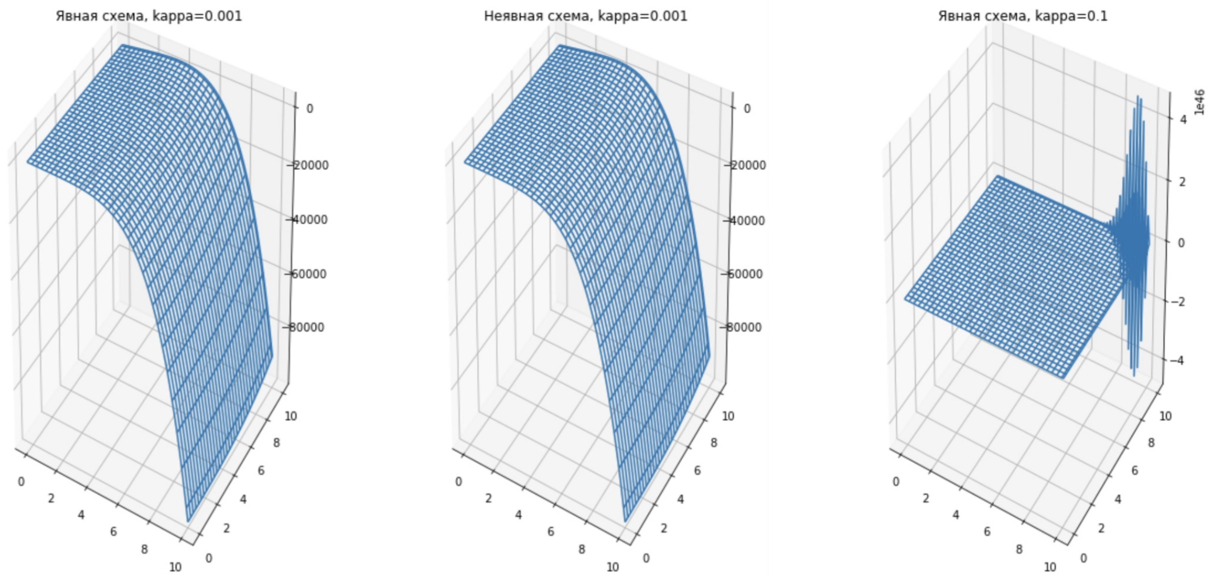

Рис. 3: При kappa=0.1 не выполняется условие устойчивостимой