Санкт–Петербургский государственный университет

Математическое обеспечение и адмиистрирование информационных систем

Гусев Егор Игоревич

Вычислительный практикум

Отчет по заданию №2

Преподователь:
Т.О. Евдокимова

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

1. Ссылка на код

Код доступен по ссылке на github.

2. Постановка задачи

Задача: реализовать метод квадратного корня (метод Холецкого) для решения СЛАУ. Для плохо обусловленных матриц нужно реализовать метод регуляризации и определить наилучший параметр регуляризации.

3. Теория

3.1 Метод квадратного корня

A — симметричная положительно определенная матрица. Приводим матрицу A к виду

$$A = LL^{\mathrm{T}},$$

где L — нижняя треугольная матрица.

Формулы для нахождения элементов матрицы L:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}, \quad 1 < i \leq n;$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj}}{l_{ii}}, \quad i < j.$$

Нахождение решения исходной СЛАУ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$Ly = b, \quad L^{\mathrm{T}}x = y.$$

3.2 Регуляризация

Если матрица плохо обусловлена мы можем применить метод регуляризации, который используется, как раз, для повышения устойчивости таких систем. Он заключается в поиске решения x с наименьшей нормой.

4. Численный эксперимент

4.1 Описание

Мы будем рассматривать данные методы на Гильбертовых матрицах размерностей 3x3, 5x5 и 7x7.

1. Реализуем метод квадратного корня (для этого будем искать матрицу L).

2. Реализуем метод регуляризации для каждой матрицы. Параметр α будем варьировать в пределах $[10^{-12}, 10^{-1}]$.

3. Попробуем определить наилучшее значение параметра α.

4.2 Результаты

Матрица Гильберта 3 * 3

	α	cond(A)	cond(A+αE)	|x−x*|
0	1.000000e-12	524.056778	524.056777	3.854415e-11
1	1.000000e-11	524.056778	524.056776	3.853699e-10
2	1.000000e-10	524.056778	524.056758	3.853583e-09
3	1.000000e-09	524.056778	524.056583	3.853569e-08
4	1.000000e-08	524.056778	524.054831	3.853556e-07
5	1.000000e-07	524.056778	524.037315	3.853429e-06
6	1.000000e-06	524.056778	523.862213	3.852163e-05
7	1.000000e-05	524.056778	522.117620	3.839546e-04
8	1.000000e-04	524.056778	505.291334	3.717896e-03
9	1.000000e-03	524.056778	382.204731	2.830854e-02
10	1.000000e-02	524.056778	111.790091	9.450946e-02
11	1.000000e-01	524.056778	14.688460	3.188015e-01

Наилучшее значение α: 1e-12

Случайный вектор x: [5.06817958 6.16271498 0.84547538]

	Уравнение	|x−x*|
0	Ax = b	8.502221e-14
1	A + α * x = b	3.158280e+00
2	A + 10 * α * x = b	4.474194e+00
3	A + 0.1 * α * x = b	2.499794e+00

Рис. 1: Матрица Гильберта 3*3

Видно, что при уменьшении параметра регуляризации α улучшается точность решения регуляризованной системы, однако при этом растут числа обусловленности.

```
Матрица Гильберта  5 * 5
                α        cond(A)     cond(A+αE)        |x-x*|
0   1.000000e-12  476607.250241  476607.105285  1.389470e-09
1   1.000000e-11  476607.250241  476605.800683  1.433160e-08
2   1.000000e-10  476607.250241  476592.755044  1.435935e-07
3   1.000000e-09  476607.250241  476462.337937  1.435727e-06
4   1.000000e-08  476607.250241  475162.081826  1.431869e-05
5   1.000000e-07  476607.250241  462539.473665  1.394205e-04
6   1.000000e-06  476607.250241  365456.558250  1.104924e-03
7   1.000000e-05  476607.250241  117931.147733  3.792613e-03
8   1.000000e-04  476607.250241   15172.641273  1.167345e-02
9   1.000000e-03  476607.250241    1562.911948  3.877928e-02
10  1.000000e-02  476607.250241     157.653234  1.300612e-01
11  1.000000e-01  476607.250241      16.669959  4.044244e-01

Наилучшее значение α: 1e-12
Случайный вектор x: [7.70336762 2.7347426  8.68713008 1.74245393 0.02080796]
             Уравнение        |x-x*|
0               Ax = b  6.949644e-11
1        A + α * x = b  6.121621e+00
2   A + 10 * α * x = b  7.341392e+00
3  A + 0.1 * α * x = b  5.927788e+00
```

Рис. 2: Матрица Гильберта 5*5

```
Матрица Гильберта  7 * 7
                α       cond(A)    cond(A+αE)        |x-x*|
0   1.000000e-12  4.753674e+08  4.752313e+08  7.943945e-08
1   1.000000e-11  4.753674e+08  4.740107e+08  5.334827e-07
2   1.000000e-10  4.753674e+08  4.621403e+08  5.129515e-06
3   1.000000e-09  4.753674e+08  3.695867e+08  4.085636e-05
4   1.000000e-08  4.753674e+08  1.230842e+08  1.416618e-04
5   1.000000e-07  4.753674e+08  1.604815e+07  3.978062e-04
6   1.000000e-06  4.753674e+08  1.655104e+06  1.492746e-03
7   1.000000e-05  4.753674e+08  1.660315e+05  4.453963e-03
8   1.000000e-04  4.753674e+08  1.660927e+04  1.441202e-02
9   1.000000e-03  4.753674e+08  1.661880e+03  4.836408e-02
10  1.000000e-02  4.753674e+08  1.670885e+02  1.501561e-01
11  1.000000e-01  4.753674e+08  1.760885e+01  4.808209e-01

Наилучшее значение α: 1e-12
Случайный вектор x: [3.61382268 9.29050465 0.61385003 9.88576326 5.94013045 8.30598083
 0.80270461]
             Уравнение        |x-x*|
0               Ax = b  2.962278e-08
1        A + α * x = b  9.362884e+00
2   A + 10 * α * x = b  1.207515e+01
3  A + 0.1 * α * x = b  9.047267e+00
```

Рис. 3: Матрица Гильберта 7*7