

Санкт–Петербургский государственный университет

Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

Гусев Егор Игоревич

Вычислительный практикум

Отчет по заданию №7

Преподаватель:
Т.О. Евдокимова

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

1. Ссылка на код	3
2. Постановка задачи	3
3. Теория	3
4. Численный эксперимент	5
4.1. Описание	5
4.2. Результаты	5

1. Ссылка на код

Код доступен по ссылке на github.

2. Постановка задачи

1. Реализовать решение ОДУ методом сеток.
2. Вывести полученные приближения в виде графика.

3. Теория

Краевая задача вида

$$k(x)u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b.$$

Надо найти $u = u(x)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u'_0(a) = A \\ \beta_0 u_n(b) + \beta_1 u'_n(b) = B \end{cases}$$

Разбиваем $[a, b]$ на равные части с шагом h

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Заменяем производные в изначальной краевой задаче разностными производными

$$u'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$
$$u' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Получаем

$$(2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2f_i,$$

где k_i, p_i, q_i, f_i являются значениями функций $k(x), p(x), q(x), f(x)$ в точ-

ках x_i .

Аналогично производим замену в краевых условиях и получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (h\alpha_0 - \alpha_1)u_0 + \alpha_1 u_1 = hA \\ (2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2f_i \\ -\beta_1 u_{n-1} + (h\beta_0 + \beta_1)u_n = hB \end{cases}$$

Матрица этой системы трехдиагональна. Перепишем ее в более удобном виде

$$\begin{cases} B_0 u_0 + C_0 u_1 = D_0 \\ A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i \\ A_n u_{n-1} + B_n u_n = D_n \end{cases}$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Решаем эту систему с помощью метода прогонки. Ищем решение системы в виде

$$u_i = s_i u_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Прямым ходом находим

$$s_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{D_0}{B_0}$$

$$s_i = -\frac{C_i}{A_i s_{i-1} + B_i}, \quad t_i = \frac{D_i - A_i t_{i-1}}{A_i s_{i-1} + B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $C_n = 0 \Rightarrow s_n = 0 \Rightarrow u_n = t_n$.

Обратным ходом находим u_{n-1}, \dots, u_0 .

Для контроля точности используем метод сгущения сетки.

Строим сетки с шагами $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \dots$. Находим решение для каждой сетки и высчитываем погрешность по формуле

$$\Delta(x) = \frac{v_2(x) - v_1(x)}{r^p - 1},$$

где $v_2(x)$ — более мелкая сетка, r — коэффициент сгущения сетки, p —

теоретический порядок точности численного метода (в нашем случае равен 1).

Далее уточняем решение с помощью полученной погрешности

$$\tilde{v}_2(x) = v_2(x) + \Delta(x).$$

Погрешности нечетных узлов вычисляется с помощью среднего

$$\Delta(x_{2n+1}) = \frac{\Delta(x_{2n}) + \Delta(x_{2n+2})}{2}.$$

4. Численный эксперимент

4.1 Описание

1. Реализуем метод сеток, найдём значения элементов СЛАУ, соответствующей нашему ОДУ.
2. Построим графики приближений.

4.2 Результаты

- Краевая задача из учебника Амосова А.А., Дубинского Ю.А., Копчевой Н.В.

$$-u''(x) + x^2 u(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} + x^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad u(0) = 1, u(1) = 0$$

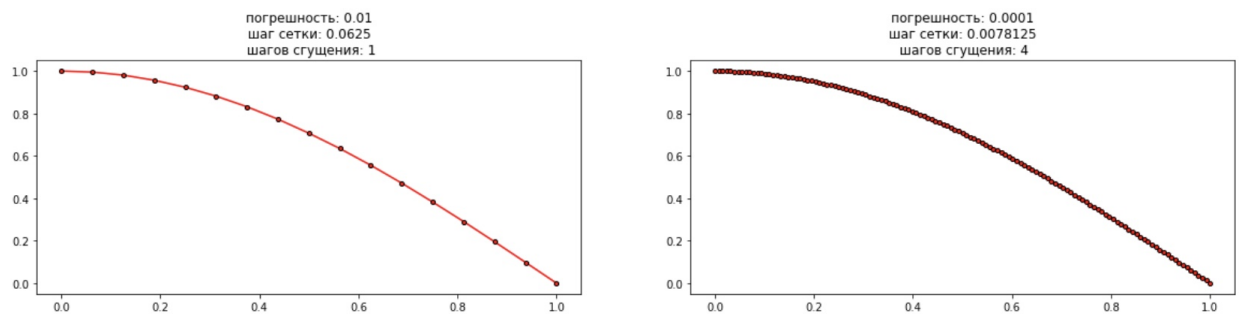


Рис. 1: Приближенное решение при заданной погрешности равной 0.01, 0.0001

- Краевая задача из учебника Пакулиной А.Н. (5 вариант)

$$-\frac{1}{x+3}u''(x) - xu'(x) + \ln(2+x)u(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) + \frac{1}{2}u(1) = 0$$

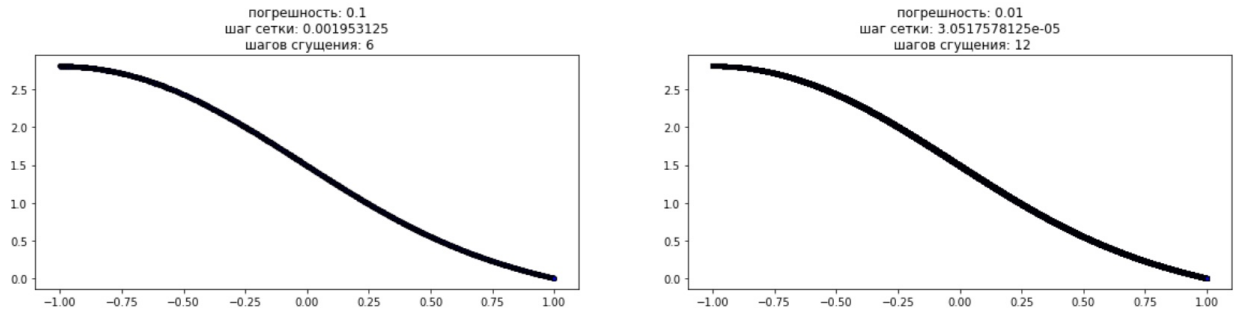


Рис. 2: Приближенное решение при заданной погрешности равной 0.1, 0.01

- Краевая задача из учебника Пакулиной А.Н. (6 вариант)

$$\frac{x-2}{x+2}u''(x) + xu'(x) + (1 - \sin(x))u(x) = x^2, \quad u(-1) = u(1) = 0$$

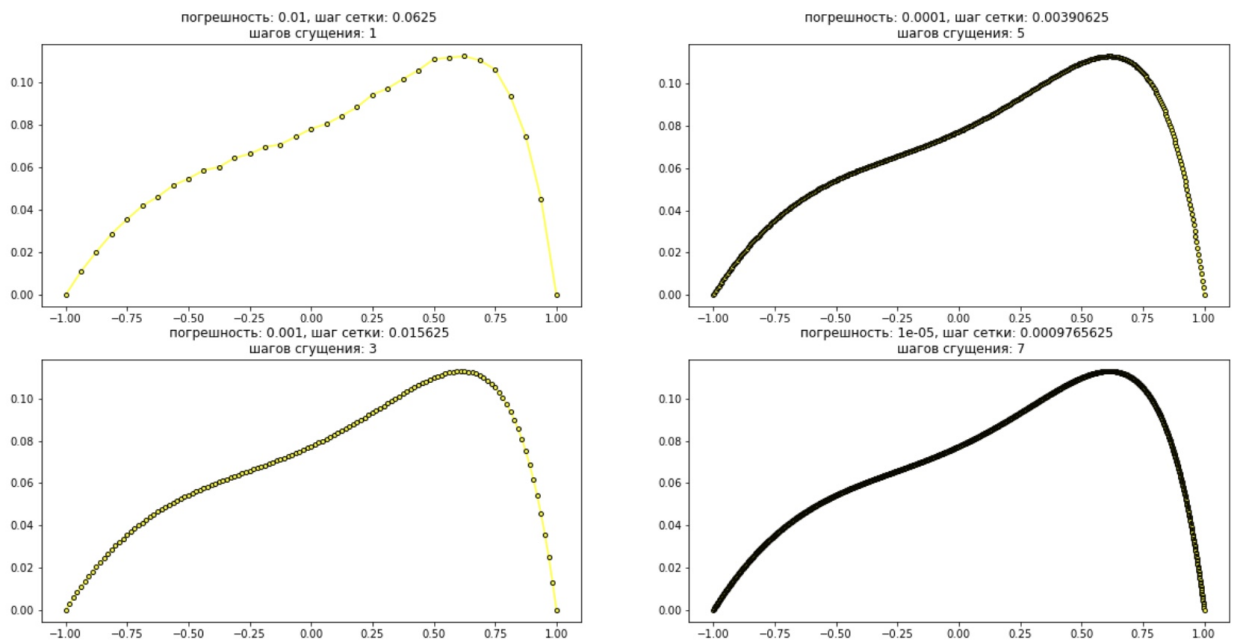


Рис. 3: Приближенное решение при заданной погрешности равной 0.01, 0.001, 0,0001, 0,00001