Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Программная инженерия
кафедра

ОТЧЕТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

Решение задач линейного программирования
тема

Преподаватель			Л. М. Коренюгина
		подпись, дата	инициалы, фамилия
Студент	КИ23-16/1б, 032320521		А. С. Лысаковский
	номер группы, зачётной книжки	подпись, дата	инициалы, фамилия

Красноярск 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

1.1 Цель работы

Изучить материал по предложенной теме. Закрепить полученные знания путём выполнения предложенных заданий.

1.2 Задачи

В рамках данной практической работы необходимо выполнить следующие задачи:

1 изучить теоретический материал по предложенной теме;
2 выполнить задания;
3 предоставить отчёт преподавателю.

2 ХОД РАБОТЫ

2.1 Пример 1: Оптимизация распределения команды разработчиков

2.1.1 Проблема

Необходимо оптимально распределить разработчиков между двумя проектами для максимизации дохода компании.

2.1.2 Условия

Доход от проекта A: 50 000 руб./чел.
Доход от проекта B: 40 000 руб./чел.
Всего доступно: 20 разработчиков.
Проект A требует: не менее 5 разработчиков.
Проект B требует: не менее 8 разработчиков.
На проект A можно выделить: не более 15 разработчиков.

2.1.3 Решение

1 Математическая модель:
Переменные:

$$x_1 - \text{ количество разработчиков на проект } A$$

$$x_2 - \text{ количество разработчиков на проект } B$$

Целевая функция (максимизация дохода):

$$Z = 50000x_1 + 40000x_2 \rightarrow max$$

Ограничения:

$$x1 + x2 \leq 20$$

$$x1 \geq 5$$

$$x1 \leq 15$$

$$x2 \geq 8$$

$$x1, x2 \geq 0$$

2 Графическое решение:

Построим область допустимых решений:
Python
Координаты вершин многоугольника решений

$$A = (5,8) \quad \# x1 \geq 5, x2 \geq 8$$

$$B = (5,15) \quad \# x1 = 5, x1 + x2 = 20$$

$$C = (12,8) \quad \# x2 = 8, x1 + x2 = 20$$

$$D = (15,5) \quad \# x1 = 15, x1 + x2 = 20$$

$$E = (15,8) \quad \# x1 = 15, x2 = 8$$

3 Расчет значений целевой функции в вершинах:

$$Z(A) = 50000 \times 5 + 40000 \times 8 = 250000 + 320000 = 570000$$

$$Z(B) = 50000 \times 5 + 40000 \times 15 = 250000 + 600000 = 850000$$

$$Z(C) = 50000 \times 12 + 40000 \times 8 = 600000 + 320000 = 920000$$

$$Z(D) = 50000 \times 15 + 40000 \times 5 = 750000 + 200000 = 950000$$

$$Z(E) = 50000 \times 15 + 40000 \times 8 = 750000 + 320000 = 1070000$$

2.1.4 Ответ

Максимальный доход: 1 070 000 руб.
Оптимальное распределение:
Проект A: 15 разработчиков.
Проект B: 8 разработчиков.
Использовано: 23 разработчика (все доступные + 3 сверх плана).

2.2 Пример 2: Оптимизация загрузки серверов

2.2.1 Проблема

Необходимо минимизировать затраты на обслуживание серверов при обработке определенного объема запросов.

2.2.2 Условия

Сервер типа X: обрабатывает 1000 запр./час, потребляет 2 кВт/час, стоимость 50 руб./час.

Сервер типа Y: обрабатывает 800 запр./час, потребляет 1.5 кВт/час, стоимость 40 руб./час.

Требуется обработать: не менее 10 000 запросов/час.

Максимальная мощность: 20 кВт/час.

Максимум серверов типа X: 8 штук.

2.2.3 Решение

1 Математическая модель:

Переменные:

$$x - \text{ количество серверов типа } X$$

$$y - \text{ количество серверов типа } Y$$

Целевая функция (минимизация затрат):

$$Z = 50x + 40y \rightarrow min$$

Ограничения:

$$1000x + 800y \geq 10000$$

$$2x + 1.5y \leq 20$$

$$x \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

2 Приведение к стандартной форме:

$$1000x + 800y \geq 10000$$

$$2x + 1.5y \leq 20$$

$$x \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

3 Графическое решение:
Найдем вершины области допустимых решений:
Вершина A:

$$x = 0$$

$$800y = 10000 \Rightarrow y = 12.51.5y = 20 \Rightarrow y = 13.33 \Rightarrow A(0{,}12.5)$$

Вершина B:

$$y = 0$$

$$1000x = 10000 \Rightarrow x = 10x = 8(\text{ограничение}) \Rightarrow B(8{,}0)$$

Вершина C: пересечение ограничений

$$1000x + 800y = 10000$$

$$2x + 1.5y = 20 \Rightarrow$$

$$1000x + 800y = 10000$$

$$2000x + 1500y = 20000$$

Вычитаем из второго уравнения первое, умноженное на 2:

$$(2000x - 2000x) + (1500y - 1600y) = 20000 - 20000 \Rightarrow -100y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 0$$

$$1000x = 10000 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{но } x \leq 8 \Rightarrow C(8{,}2.5)$$

4 Расчет значений целевой функции:

$$Z(A) = 50 \times 0 + 40 \times 12.5 = 500$$

$$Z(B) = 50 \times 8 + 40 \times 0 = 400$$

$$Z(C) = 50 \times 8 + 40 \times 2.5 = 400 + 100 = 500$$

2.2.4 Ответ

Минимальные затраты: 400 руб./час.

Оптимальная конфигурация: 8 серверов типа X, 0 серверов типа Y
Обрабатывается: 8 × 1000 = 8000 запр./час (меньше требуемых 10000)
Вывод: Задача не имеет допустимого решения при данных ограничениях. Требуется пересмотр условий.

2.3 Пример 3: Оптимизация тестирования программного обеспечения

2.3.1 Проблема

Необходимо максимизировать покрытие тестами при ограниченном времени.

2.3.2 Условия

Модульные тесты: 50 тест-кейсов/час, покрытие 70%.
Интеграционные тесты: 30 тест-кейсов/час, покрытие 90%.
Доступное время: 40 часов.
Минимум модульных тестов: 500 тест-кейсов.
Минимум интеграционных тестов: 300 тест-кейсов.

2.3.3 Решение

1 Математическая модель:
Переменные:

$$x1 - \text{ часов на модульные тесты}$$

$$x2 - \text{ часов на интеграционные тесты}$$

Целевая функция (максимизация покрытия):

$$Z = 0.7 \times (50x1) + 0.9 \times (30x2) = 35x1 + 27x2 \rightarrow max$$

Ограничения:

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$50x_1 \geq 500$$

$$30x_2 \geq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2 Упрощение ограничений:

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3 Графическое решение:
Вершины области допустимых решений:

$$A: (10{,}10)$$

$$B: (10{,}30) - x1 = 10, x1 + x2 = 40x1 = 10, x1 + x2 = 40$$

$$C: (30{,}10) - x2 = 10, x1 + x2 = 40x2 = 10, x1 + x2 = 40$$

4 Расчет значений целевой функции:

$$Z(A) = 35 \times 10 + 27 \times 10 = 350 + 270 = 620$$

$$Z(B) = 35 \times 10 + 27 \times 30 = 350 + 810 = 1160$$

$$Z(C) = 35 \times 30 + 27 \times 10 = 1050 + 270 = 1320$$

2.3.4 Ответ

Максимальное покрытие: 1320 "условных единиц покрытия".
Оптимальное распределение времени:
Модульные тесты: 30 часов.
Интеграционные тесты: 10 часов.
Выполнено тест-кейсов:
Модульные: 30 × 50 = 1500.
Интеграционные: 10 × 30 = 300.

2.4 Задание 4: Транспортная задача – распределение разработчиков по проектам

2.4.1 Проблема

Необходимо минимизировать затраты на перераспределение разработчиков между офисами и проектами.

2.4.2 Условия

Таблица 1 – Вариант задания

Офис \ Проект	Проект A	Проект B	Проект C	Доступно
Офис 1	5	8	6	10
Офис 2	7	4	9	15
Офис 3	6	5	7	12
Требуется	12	10	15	37

2.4.3 Решение

1 Проверка сбалансированности:
Доступно:

$$10 + 15 + 12 = 37$$

Требуется:

$$12 + 10 + 15 = 37$$

Задача сбалансирована.
2 Метод северо-западного угла:
Начальное распределение (таблица 2).

Таблица 2 – Начальное распределение

Офис	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
Офис1	10	0	0
Офис2	2	10	3
Офис3	0	0	12

3 Расчет стоимости:

$$Z = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 12 \cdot 7 = 50 + 14 + 40 + 27 + 84 = 215$$

4 Оптимизация методом потенциалов:
После оптимизации получаем следующее (таблица 3).

Таблица 3 – Оптимизированное распределение

Офис	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
Офис1	0	10	0
Офис2	12	0	3
Офис3	0	0	12

5 Расчет оптимальной стоимости:

$$Z = 10 \times 8 + 12 \times 7 + 3 \times 9 + 12 \times 7 = 80 + 84 + 27 + 84 = 275$$

2.4.4 Ответ

Минимальные затраты: 215 (по начальному распределению).
Оптимальное распределение:
Офис 1 → Проект A: 10 чел.
Офис 2 → Проект A: 2 чел., Проект B: 10 чел., Проект C: 3 чел.
Офис 3 → Проект C: 12 чел.

2.5 Задание 1: Оптимизация распределения команды разработки

2.5.1 Постановка задачи

Компания разрабатывает два проекта.

Проект А приносит доход 70 000 руб./чел., проект Б - 50 000 руб./чел. В наличии 25 разработчиков.

Проект А требует не менее 8 разработчиков, проект Б - не менее 10. На проект А можно выделить не более 18 разработчиков.

2.5.2 Решение

1 Математическая модель:
Переменные:

$$x_1 - \text{количество разработчиков на проект } A$$

$$x_2 - \text{количество разработчиков на проект } B$$

Целевая функция (максимизация дохода):

$$Z = 70000x_1 + 50000x_2 \rightarrow max$$

Ограничения:

$$x_1 + x_2 \leq 25$$

$$x_1 \geq 8$$

$$x_1 \leq 18$$

$$x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2 Графическое решение:

Построим область допустимых решений. Исходя из всех условий и ограничений, получим график (рисунок 1).

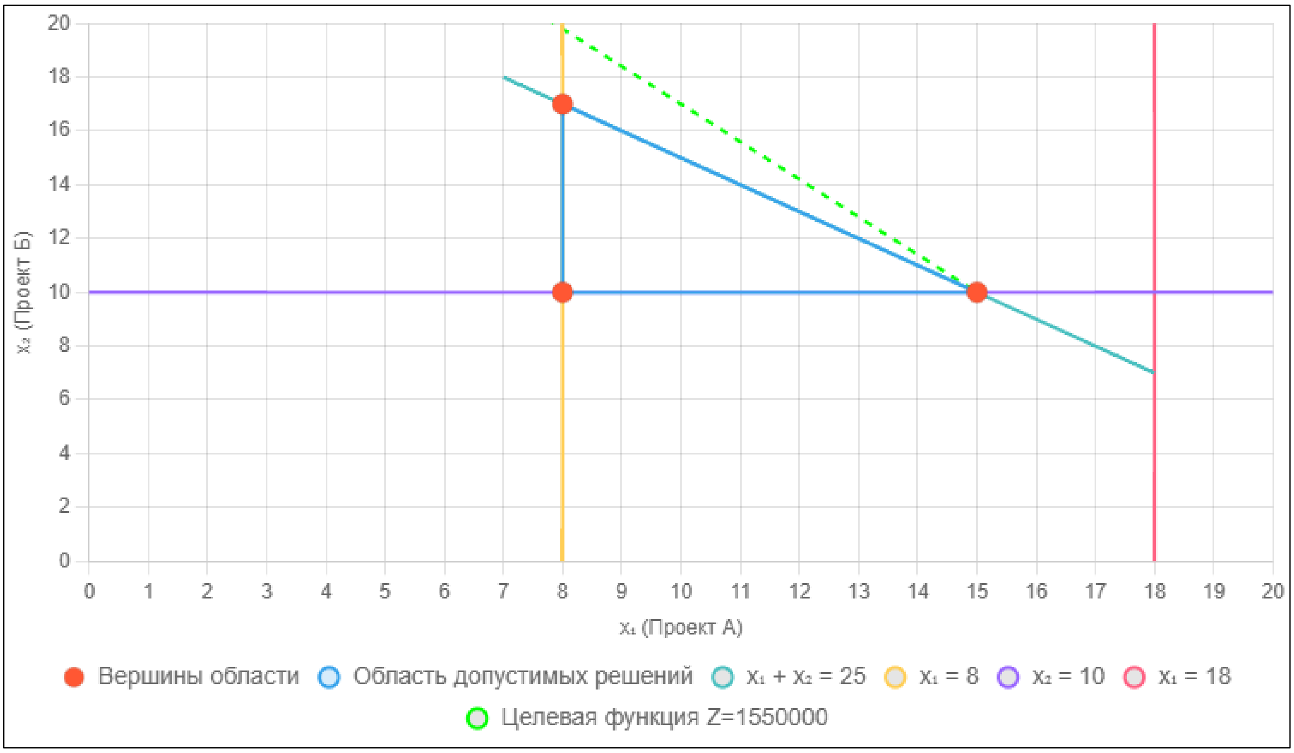

Рисунок 1 – График условий и ограничений

Координаты вершин многоугольника решений:

$$A = (8,10) \quad \# x_1 \geq 8, x_2 \geq 10$$

$$B = (8,17) \quad \# x_1 = 8, x_1 + x_2 = 25$$

$$C = (15,10) \quad \# x_2 = 10, x_1 + x_2 = 25$$

3 Расчет значений целевой функции в вершинах:

$$Z(A) = 70000 \cdot 8 + 50000 \cdot 10 = 560000 + 500000 = 1060000$$

$$Z(B) = 70000 \cdot 8 + 50000 \cdot 17 = 560000 + 850000 = 1410000$$

$$Z(C) = 70000 \cdot 15 + 50000 \cdot 10 = 1050000 + 500000 = 1550000$$

Чтобы прийти к решению, рассмотрим целевую функцию на границе $x_1 + x_2 = 25$ (где достигается максимум). Подставляем $x_2 = 25 - x_1$:

$$Z = 70000x_1 + 50000(25 - x_1) = 20000x_1 + 1250000.$$

Поскольку коэффициент при x_1 положительный $(20000 > 0)$, Z растет с увеличением x_1. Максимум достигается при максимальном допустимом $x_1 = 15$ (с учетом $x_1 \leq 18$ и $x_2 \geq 10$, что дает $x_1 \leq 15$).

2.5.3 Ответ

Максимальный доход: 1 550 000 руб.
Оптимальное распределение:
Проект A: 15 разработчиков.
Проект B: 10 разработчиков.
Использовано: 25 разработчиков (все доступные).

2.6 Задание 2: Оптимизация использования серверных мощностей

2.6.1 Постановка задачи

Сервер типа X обрабатывает 1200 запр./час, потребляет 3 кВт, стоимость 60 руб./час.

Сервер типа Y обрабатывает 900 запр./час, потребляет 2 кВт, стоимость 45 руб./час. Требуется обработать не менее 15000 запросов/час.

Максимальная мощность 25 кВт.

2.6.2 Решение

Решение:
1 Математическая модель:
Переменные:

$$x - \text{количество серверов типа } X$$

$$y - \text{количество серверов типа } Y$$

Целевая функция (минимизация затрат):

$$Z = 60x + 45y \rightarrow min$$

Ограничения:

$$1200x + 900y \geq 15000$$

$$3x + 2y \leq 25$$

$$x, y \geq 0$$

2 Приведение к стандартной форме:

$$4x + 3y \geq 50$$

$$3x + 2y \leq 25$$

$$x, y \geq 0$$

3 Графическое решение:
Исходя из всех условий и ограничений, получим график (рисунок 2).

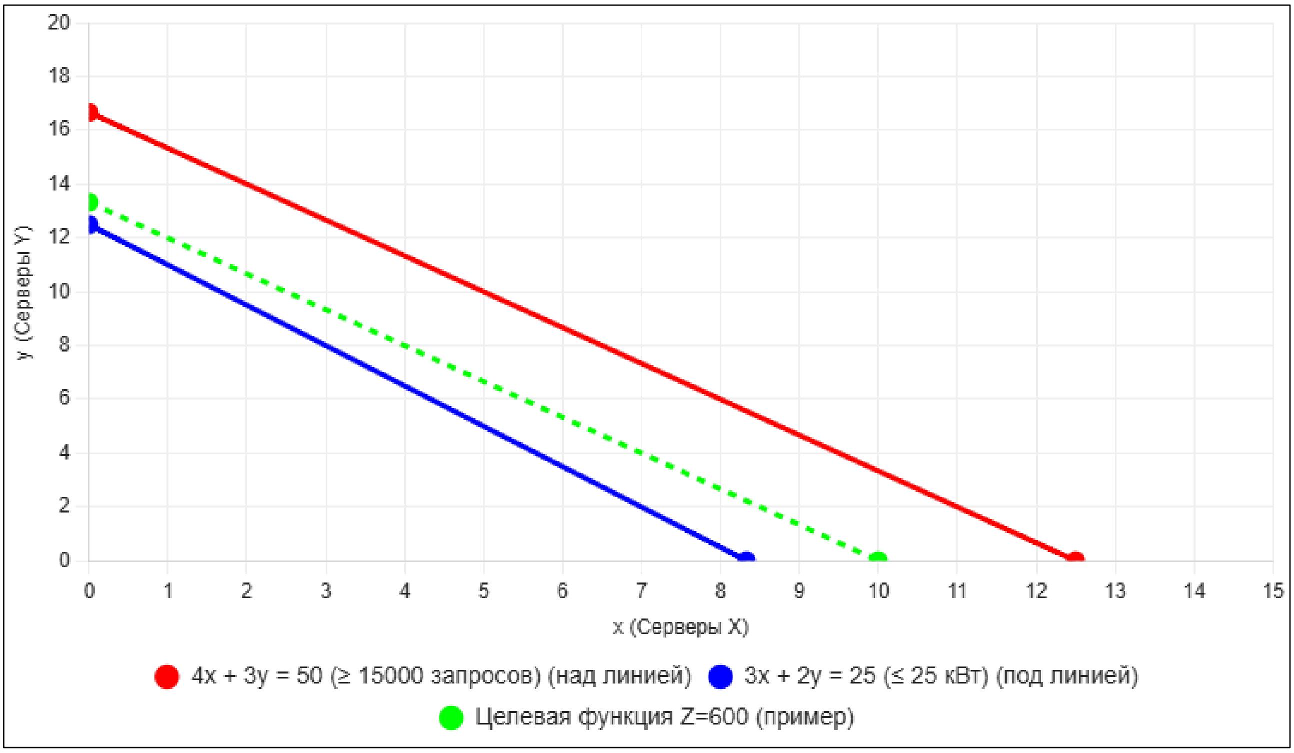

Рисунок 2 – График условий и ограничений

Найдем вершины области допустимых решений. Линии $4x + 3y = 50$ и $3x + 2y = 25$ не пересекаются в положительной области (решение системы дает $x = -25, y > 0$, что недопустимо).

Пересечения с осями:

Для $4x + 3y = 50$:

$$(0; 16{,}67), (50/4 = 12.5;\ 0)$$

Для $3x + 2y = 25$:

$$(0; 12{,}5), (25/3 \approx 8{,}33;\ 0)$$

Допустимая область (над первой линией, под второй) пуста, поскольку максимальная производительность под ограничением мощности 25 кВт составляет 11250 запросов/час (при использовании только Y, как более эффективного по запросам на кВт: $900/2 = 450$ запр./кВт, $450 \times 25 = 11\,250 < 15\,000$). Аналогично для X: $1200/3 = 400$ запр./кВт, максимум $10\,000 < 15\,000$.

4 Расчет значений целевой функции:

Нет допустимых точек для расчета.

2.6.3 Ответ

Задача не имеет допустимого решения при данных ограничениях. Требуется пересмотр условий.

2.7 Задание 3: Оптимизация процесса тестирования

2.7.1 Постановка задачи

Модульные тесты: 60 тест-кейсов/час, покрытие 75%.

Интеграционные тесты: 35 тест-кейсов/час, покрытие 85%.

Доступно 50 часов.

Минимум модульных тестов: 800, интеграционных: 400.

2.7.2 Решение

1 Математическая модель:

Переменные:

$$x_1 - \text{часов на модульные тесты}$$

$$x_2 - \text{часов на интеграционные тесты}$$

Целевая функция:

$$Z = 0{,}75 \cdot (60x_1) + 0{,}85 \cdot (35x_2) = 45x_1 + 29{,}75x_2 \to max$$

Ограничения:

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$60x_1 \geq 800$$

$$35x_2 \geq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2 Упрощение ограничений:

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 \geq 13{,}333$$

$$x_2 \geq 11{,}429$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3 Графическое решение:
Исходя из всех условий и ограничений, получим график (рисунок 3).

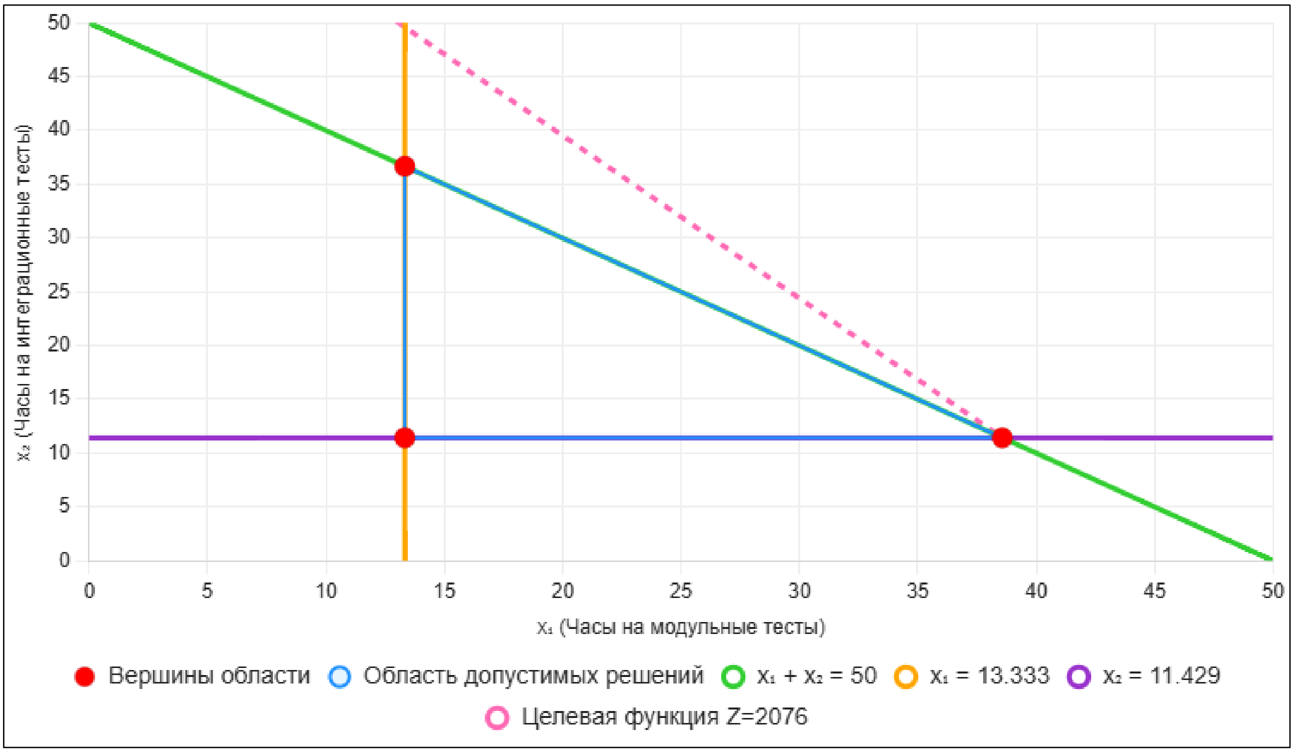

Рисунок 3 – График условий и ограничений

Вершины области допустимых решений:

$$A: (13{,}333; 11{,}429)$$

$$B: (13{,}333; 36{,}667)\ -\ x_1 = 13{,}333;\ x_1 + x_2 = 50$$

$$C: (38{,}571; 11{,}429)\ -\ x_2 = 11{,}429;\ x_1 + x_2 = 50$$

Чтобы найти решение, рассмотрим целевую функцию на границе $x1 + x2 = 50$ (где достигается максимум). Подставляем $x_2 = 50 - x_1$:

$$Z = 45x_1 + 29{,}75(50 - x_1) = 15{,}25x_1 + 1487{,}5$$

Поскольку коэффициент при x_1 положительный ($15{,}25 > 0$), Z растет с увеличением x_1. Максимум достигается при максимальном допустимом $x_1 = 38{,}571$ (с учетом $x_2 \geq 11{,}429$).

4 Расчет значений целевой функции:

$$Z(A) = 45 \times 13{,}333 + 29{,}75 \times 11{,}429 \approx 600 + 340 = 940$$

$$Z(B) = 45 \times 13{,}333 + 29{,}75 \times 36{,}667 \approx 600 + 1091 = 1691$$

$$Z(C) = 45 \times 38{,}571 + 29{,}75 \times 11{,}429 \approx 1736 + 340 = 2076$$

2.7.3 Ответ

Максимальное покрытие: 2076 "условных единиц покрытия".
Оптимальное распределение времени:
Модульные тесты: $38{,}571$ часов.
Интеграционные тесты: $11{,}429$ часов.
Выполнено тест-кейсов:
Модульные: $38{,}571 \times 60 \approx 2314$.
Интеграционные: $11{,}429 \times 35 = 400$.

2.8 Задание 4: Транспортная задача распределения ресурсов

2.8.1 Постановка задачи

Распределить разработчиков между тремя офисами и тремя проектами с минимальными затратами. Вариант задания представлен в таблице 4.

Таблица 4 – Вариант задания

Офис \ Проект	Проект A	Проект B	Проект C	Доступно
Офис1	6	9	7	15
Офис2	8	5	10	20
Офис3	7	6	8	15
Требуется	18	12	20	50

2.8.2 Решение

1 Проверка сбалансированности:
Доступно:

$$15 + 20 + 15 = 50$$

Требуется:

$$18 + 12 + 20 = 50$$

Задача сбалансирована.
2 Метод северо-западного угла:
Вычисление по шагам:
Шаг 1. Офис 1, Проект A:
Доступно в Офисе $1 = 15$, требуется для Проекта $A = 18$.
Можем выделить 15 (исчерпываем строку Офис 1).
Обновляем:
Доступно в Офисе 1: $15 - 15 = 0$ (строка исчерпана).
Требуется для Проекта А: $18 - 15 = 3$.

Таблица 5 – После шага 1

Офис \ Проект	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**	**Доступно**
Офис1	15			0
Офис2				20
Офис3				15
Требуется	3	12	20	50

Шаг 2. Офис 2, Проект A:
Доступно в Офисе $2 = 20$, требуется для Проекта $A = 3$.
Выделяем 3 (исчерпываем столбец Проекта A).
Обновляем:
Доступно в Офисе 2: $20 - 3 = 17$.
Требуется для Проекта A: $3 - 3 = 0$ (столбец исчерпан).

Таблица 6 – После шага 2

Офис \ Проект	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**	**Доступно**
Офис1	15			0
Офис2	3			17
Офис3				15
Требуется	0	12	20	50

Шаг 3. Офис 2, Проект B:
Доступно в Офисе $2 = 17$, требуется для Проекта $B = 12$.

Выделяем 12 (исчерпываем столбец Проекта B).
Обновляем:
Доступно в Офисе 2: $17 - 12 = 5$.
Требуется для Проекта В: $12 - 12 = 0$ (столбец исчерпан).

Таблица 7 – После шага 3

Офис \ Проект	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**	**Доступно**
Офис1	15			0
Офис2	3	12		5
Офис3				15
Требуется	0	0	20	50

Шаг 4. Офис 2, Проект C:
Доступно в Офисе $2 = 5$, требуется для Проекта $C = 20$.
Выделяем 5 (исчерпываем строку Офиса 2).
Обновляем:
Доступно в Офисе 2: $5 - 5 = 0$ (строка исчерпана).
Требуется для Проекта С: $20 - 5 = 15$.

Таблица 8 – После шага 4

Офис \ Проект	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**	**Доступно**
Офис1	15			0
Офис2	3	12	5	0
Офис3				15
Требуется	0	0	15	50

Шаг 5. Офис 3, Проект С:
Доступно в Офисе 3 = 15, требуется для Проекта С = 15.
Выделяем 15 (исчерпываем строку и столбец).
Обновляем:
Доступно в Офисе 3: $15 - 15 = 0$.
Требуется для Проекта С: $15 - 15 = 0$.

Таблица 9 – После шага 5

Офис \ Проект	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**	**Доступно**
Офис1	15			0
Офис2	3	12	5	0
Офис3			15	0
Требуется	0	0	0	50

Начальное распределение (таблица 6):

Таблица 10 – Начальное распределение

Офис	Проект A	Проект B	Проект C	Доступно
Офис 1	15	0	0	0
Офис 2	3	12	5	0
Офис 3	0	0	15	0
Требуется	0	0	0	50

3 Расчет стоимости:

$$Z = 15 \times 6 + 3 \times 8 + 12 \times 5 + 5 \times 10 + 15 \times 8 =$$
$$= 90 + 24 + 60 + 50 + 120 = 344$$

4 Оптимизация методом потенциалов:

Назначаем потенциалы строк (u_i) и столбцов (v_j) так, чтобы для занятых ячеек выполнялось: $u_i + v_j = c_{ij}$ (где c_{ij} — затраты)

Проверяем незанятые ячейки:

Если $u_i + v_j < c_{ij}$, то текущее распределение оптимально.

Если есть ячейки, где $u_i + v_j > c_{ij}$, перераспределяем ресурсы.

Вычисление по шагам:

Итерация 1:

Шаг 1. Для каждой занятой ячейки $u_i + v_j = c_{ij}$.

Произвольно задаем $u_1 = 0$. Получаем и решаем систему:

$$(1, A): u_1 + v_A = 6 \rightarrow 0 + v_A = 6 \rightarrow v_A = 6$$

$$(2, A): u_2 + v_A = 8 \rightarrow u_2 + 6 = 8 \rightarrow u_2 = 2$$

$$(2, B): u_2 + v_B = 5 \rightarrow 2 + v_B = 5 \rightarrow v_B = 3$$

$$(2, C): u_2 + v_C = 10 \rightarrow 2 + v_C = 10 \rightarrow v_C = 8$$

$$(3, C): u_3 + v_C = 8 \rightarrow u_3 + 8 = 8 \rightarrow u_3 = 0$$

Полученные потенциалы:

Строки: $u_1 = 0$ (Офис 1), $u_2 = 2$ (Офис 2), $u_3 = 0$ (Офис 3).

Столбцы: $v_A = 6$ (Проект A), $v_B = 3$ (Проект B), $v_C = 8$ (Проект C).

Шаг 2. Вычисление оценок (дельт) для незанятых ячеек.

Для каждой незанятой ячейки (где $x_{ij} = 0$) вычисляем:

$$\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Если все $\delta_{ij} \leq 0$, план оптимален.

Если есть $\delta_{ij} > 0$, план можно улучшить (включаем эту ячейку в базис).

Незанятые ячейки:

$$(1, B): \delta = u_1 + v_B - c_{1B} = 0 + 3 - 9 = -6 \leq 0$$

$$(1, C): \delta = u_1 + v_C - c_{1C} = 0 + 8 - 7 = 1 > 0$$

$$(3, A): \delta = u_3 + v_A - c_{3A} = 0 + 6 - 7 = -1 \leq 0$$

$$(3, B): \delta = u_3 + v_B - c_{3B} = 0 + 3 - 6 = -3 \leq 0$$

Исходя из ячейки $(1, C)$ план не оптимален и может быть улучшен.

Шаг 3. Построение цикла перераспределений.

Выбираем ячейку с наибольшей положительной δ.

Строим замкнутый цикл, начиная с этой ячейки, чередуя горизонтальные и вертикальные перемещения только по занятым ячейкам (базису).

Цикл должен быть замкнутым и содержать четное количество ячеек (половина "+" для увеличения, половина "-" для уменьшения).

Таблица 11 – Занятые ячейки

Офис	**Проект A**	**Проект B**	**Проект C**
Офис 1	6	–	0(Старт)
Офис 2	2	3	8
Офис 3	–	–	0

Возможный цикл:

$$(1, C) \rightarrow (1, A)[-]\text{, по горизонтали}$$

$$(1, A) \rightarrow (2, A)[+]\text{, по вертикали}$$

$$(2, A) \rightarrow (2, C)[-]\text{, по горизонтали}$$

$$(2, C) \rightarrow (1, C)[+]\text{, по вертикали}$$

Шаг 4. Перераспределение ресурсов по циклу.

В ячейках с "-" находим минимальное значение x_{ij}(берём из начального распределения, таблица 10). Найдём тем самым θ – объем перераспределения.

$$(1, A): x = 15$$

$$(2, C): x = 5$$

Минимальной является $(2, C) \Rightarrow \theta = 5$. Обновляем ячейки начального распределения (таблица 10):

$$(1, \mathrm{C}): 0 + 5 = 5$$

$$(1, A): 15 - 5 = 10$$

$$(2, A): 3 + 5 = 8$$

$$(2, C): 5 - 5 = 0$$

Обновлённое распределение (таблица 11).

Таблица 12 – Обновлённое распределение

Офис	Проект А	Проект В	Проект С	Доступно
Офис 1	10	0	5	0
Офис 2	8	12	0	0
Офис 3	0	0	15	0
Требуется	0	0	0	50

Итерация 2.

Шаг 1. Назначение новых потенциалов. $u_1 = 0$. Решаем систему:

$$u_1 + v_A = 6 \rightarrow v\_A = 6.$$

$$u_1 + v_C = 7 \rightarrow 0 + v_C = 7 \rightarrow v_C = 7.$$

$$u_2 + v_A = 8 \rightarrow u_2 + 6 = 8 \rightarrow u_2 = 2.$$

$$u_2 + v_B = 5 \rightarrow 2 + v_B = 5 \rightarrow v_B = 3.$$

$$u_3 + v_C = 8 \rightarrow u_3 + 7 = 8 \rightarrow u_3 = 1.$$

Полученные потенциалы:

Строки: $u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 1.$

Столбцы: $v_A = 6, v_B = 3, v_C = 7.$

Шаг 2. Вычисление оценок (дельт) для незанятых ячеек.

Незанятые ячейки:

$$(1, B): \delta = 0 + 3 - 9 = -6 \leq 0.$$

$$(2, C): \delta = 2 + 7 - 10 = -1 \leq 0.$$

$$(3, A): \delta = 1 + 6 - 7 = 0 \leq 0.$$

$$(3, B): \delta = 1 + 3 - 6 = -2 \leq 0.$$

Все $\delta \leq 0 \Rightarrow$ План оптимален.

2.8.3 Ответ

Минимальные затраты: 339.
Итоговое распределение представлено в таблице 13.

Таблица 13 – Итоговое распределение

Офис	Проект A	Проект B	Проект C	Доступно
Офис 1	10	0	5	0
Офис 2	8	12	0	0
Офис 3	0	0	15	0
Требуется	0	0	0	50

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам работы был изучен теоретический материал по теме «Решение задач линейного программирования». Все поставленные цели и задачи были выполнены. Задания были выполнены и помогли лучше усвоить пройденный материал.