Расчётное задание 2b "Аппроксимация результатов измерений зависимых переменных"

- студент: Сыров Егор Романович
- группа: 5130901/30201

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from sklearn.linear_model import LinearRegression, Ridge
import statsmodels.api as sm
from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error
from scipy.interpolate import interp1d, CubicSpline, PchipInterpolator
from scipy.optimize import curve_fit
import warnings

warnings.filterwarnings("ignore")


# Считывание данных из файла
with open("Task_2b.txt", "r") as file:
    nx = int(file.readline().split("=")[1])
    ny = int(file.readline().split("=")[1])
    x = list(map(np.float64, file.readline().split("=", 1)[1].split()))
    y = []
    for line in file:
        y_i = list(map(np.float64, line.split("=", 1)[1].split()))
        y.append(y_i)

# Приводим к np.array для параллельных вычислений
x = np.array(x)
y = np.array(y)
df = pd.DataFrame(y, index=x, columns=[f"y_{i+1}" for i in range(ny)])
df
```

```
.dataframe tbody tr th {
    vertical-align: top;
}

.dataframe thead th {
    text-align: right;
}
```

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
-2.0	-16.25280	-12.49660	7.29730	-1.044000	-23.13510	-4.91375	-38.86790	-1.71512	-29.99650	-8.
-1.9	-20.55480	-25.00250	-49.13580	-35.911300	-1.44807	-2.95197	-50.14930	-16.44190	-22.28700	-39
-1.8	-58.14500	-31.38800	-47.13900	-52.170900	-36.60580	-60.95190	-48.92500	-49.29130	-24.92270	-41
-1.7	-61.17980	-67.13150	-94.42240	-47.787500	-67.94720	-74.90080	-74.55220	-78.82430	-57.32470	-84
-1.6	-59.11520	-107.44000	-55.41440	-106.930000	-48.29990	-60.90860	-82.65450	-80.99280	-90.16550	-68
-1.5	-78.41000	-88.77780	-60.87250	-64.463400	-63.67370	-75.20020	-62.05220	-77.42470	-61.74030	-41
-1.4	-69.56390	-51.53460	-97.38320	-62.444000	-69.00500	-68.26720	-67.38880	-80.12200	-67.74050	-66
-1.3	-20.52090	-39.72000	-58.42640	-43.412200	-45.59140	-27.14040	-62.03190	-37.82690	-40.32290	-48
-1.2	-24.31430	-33.43480	-10.88460	-37.963800	-13.34650	-15.08710	1.75719	-18.26120	-33.91410	-24

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
-1.1	-36.89140	-2.36692	-8.26458	-14.640700	-9.20905	-10.93300	-22.00890	5.77602	-35.03000	2.1
-1.0	25.16250	1.26959	26.66980	14.766100	8.22589	26.23410	14.37080	13.73400	14.81640	9.6
-0.9	24.20520	24.32660	28.21330	42.530300	40.26890	32.56770	23.43480	23.24390	38.47200	30
-0.8	50.49530	54.84380	54.84760	68.099200	54.78800	45.03750	65.81160	66.23170	52.05540	75
-0.7	88.39780	71.61780	71.52090	69.603000	80.55080	79.53730	74.84780	78.39850	71.38160	78
-0.6	84.64640	82.08690	91.61280	86.504100	83.29460	90.60820	88.16110	82.17800	93.69620	77
-0.5	82.86810	87.33740	89.58200	94.315800	92.14700	94.06900	89.96600	88.08700	84.68110	88
-0.4	85.85680	85.07860	81.92990	84.820000	84.48320	84.62680	83.47090	85.80940	88.19820	84
-0.3	72.20100	72.18490	72.20720	72.193700	72.19700	72.20380	72.20630	72.19980	72.20430	72
-0.2	53.27660	49.20360	52.86650	52.339800	53.17980	52.39320	57.13990	54.82550	49.83570	51
-0.1	30.81130	30.62290	28.98860	27.055000	33.69960	30.18320	26.18480	21.71400	28.83670	27
0.0	1.87762	6.36974	7.67827	4.231120	-3.17460	-5.21817	7.49572	-2.60832	2.33135	7.5
0.1	-16.56850	-24.69960	-29.71090	-20.104200	-32.30700	-35.43580	-28.36010	-36.32010	-35.75430	-32
0.2	-40.11050	-56.47820	-45.81570	-31.801500	-53.13440	-59.80900	-37.74350	-50.29940	-45.03420	-52
0.3	-84.41320	-70.81300	-63.24310	-82.369100	-79.25920	-84.45180	-66.42610	-61.18970	-76.50900	-89
0.4	-77.34230	-89.18570	-84.59460	-88.005000	-97.55160	-107.14000	-54.74830	-69.65960	-82.57200	-86
0.5	-99.74290	-76.78290	-102.41000	-100.330000	-120.92000	-100.53800	-97.65220	-93.16000	-108.61500	-10
0.6	-84.22320	-89.61860	-125.14300	-100.877000	-89.10980	-77.37390	-117.32800	-108.62900	-104.62500	-93
0.7	-89.11610	-89.23500	-94.40880	-61.092000	-78.93390	-72.55150	-77.95850	-77.14040	-88.32920	-93
0.8	-73.37740	-70.96020	-80.79430	-80.334000	-84.32890	-54.67490	-61.25170	-48.60700	-75.17120	-81
0.9	-49.36430	-22.05880	-34.29220	-56.543100	-52.88430	-30.04790	-19.95110	-47.23030	-21.56150	-72
1.0	-26.85610	-29.15310	-14.65020	-15.445200	-0.33315	-7.13160	-12.53740	-33.59610	-59.96020	-7.
1.1	10.39230	26.19110	8.90374	0.116707	35.56090	29.32620	7.95788	-11.31850	2.20500	2.8
1.2	49.09790	51.73950	48.98390	37.108000	29.43710	2.07751	28.40340	45.55680	76.28530	45
1.3	4.71816	67.88490	56.43550	45.567600	53.32400	61.09340	39.73370	42.13530	79.19430	63
1.4	83.03530	66.93950	58.90850	45.360000	82.51590	42.54700	89.63680	74.44700	68.11180	63
1.5	60.72060	98.87040	66.38410	89.421100	74.63350	83.54070	71.53060	75.41250	56.53790	91
1.6	71.70330	66.53750	53.09620	96.545400	95.34780	74.45760	63.14530	30.88590	76.69290	88
1.7	71.49980	43.35520	65.60150	55.577400	47.78450	46.50350	72.19090	69.44980	38.63010	84
1.8	59.97610	88.45850	32.80270	63.053800	53.58450	52.63180	48.12140	83.66120	35.35160	67
1.9	30.55780	36.55290	34.13320	37.357800	29.00060	37.83890	33.67530	49.18110	33.02480	40
2.0	21.27600	18.47810	6.78533	18.360500	49.25980	18.05480	2.22091	48.53600	18.05710	15

Вычислить в каждой точке средние арифметические значения, оценки дисперсий, параметрические толерантные пределы для погрешностей, доверительные интервалы для математических ожиданий, проверить гипотезу о равенстве дисперсий в этих точках по критерию Кочрена (см. приложение 3)

```
means = np.mean(y, axis=1)
variances = np.var(y, axis=1, ddof=1)
std_devs = np.sqrt(variances)
# Относительное стандартное отклонение (коэффициенты вариации)
cv = std_devs / np.abs(means) * 100



# Доверительные интервалы для Математического Ожидания
confidence_level = 0.95
alpha = 1 - confidence_level

ci_lower = np.zeros(nx)
ci_upper = np.zeros(nx)

for i in range(nx):
    ci = stats.t.interval(
        confidence_level, df=ny - 1, loc=means[i], scale=std_devs[i] / np.sqrt(ny)
    )
    ci_lower[i], ci_upper[i] = ci

# Вычисление толерантных пределов
beta = 0.80  # Доля генеральной совокупности
gamma = 0.95  # Доверительная вероятность

# Вычисление толерантного множителя K для нормального распределения
# Используем аппроксимацию Хау (Howe) для больших n
# K = z_{(1+beta)/2} * sqrt((n-1) * (1 + 1/n) / chi2_{1-gamma, n-1})

z_beta = stats.norm.ppf((1 + beta) / 2)
chi2_gamma = stats.chi2.ppf(1 - gamma, df=ny - 1)

K = z_beta * np.sqrt((ny - 1) * (1 + 1 / ny) / chi2_gamma)

tolerance_lower = means - K * std_devs
tolerance_upper = means + K * std_devs

print(f"Толерантный множитель K = {K:.4f}")
print(f"Для первой точки (x={x[0]:.4f}):")
print(f"\tСреднее = {means[0]:.4f}")
print(f"\tСтандартное отклонение = {std_devs[0]:.4f}")
print(f"Толерантные пределы: [{tolerance_lower[0]:.4f}, {tolerance_upper[0]:.4f}]")

# Статистика Кочрена: G = max(s_i^2) / sum(s_i^2)
G = np.max(variances) / np.sum(variances)



# Критическое значение для критерия Кочрена
def cochran_critical(n_groups, n_obs, alpha=0.05):
    """
    Аппроксимация критического значения критерия Кочрена
    n_groups - количество групп (nx)
    n_obs - количество наблюдений в каждой группе (ny)
    """
    df = n_obs - 1
    F_crit = stats.f.ppf(1 - alpha, dfn=df, dfd=df * (n_groups - 1))
    return F_crit / (F_crit + n_groups - 1)



G_crit = cochran_critical(nx, ny, alpha=0.05)
```

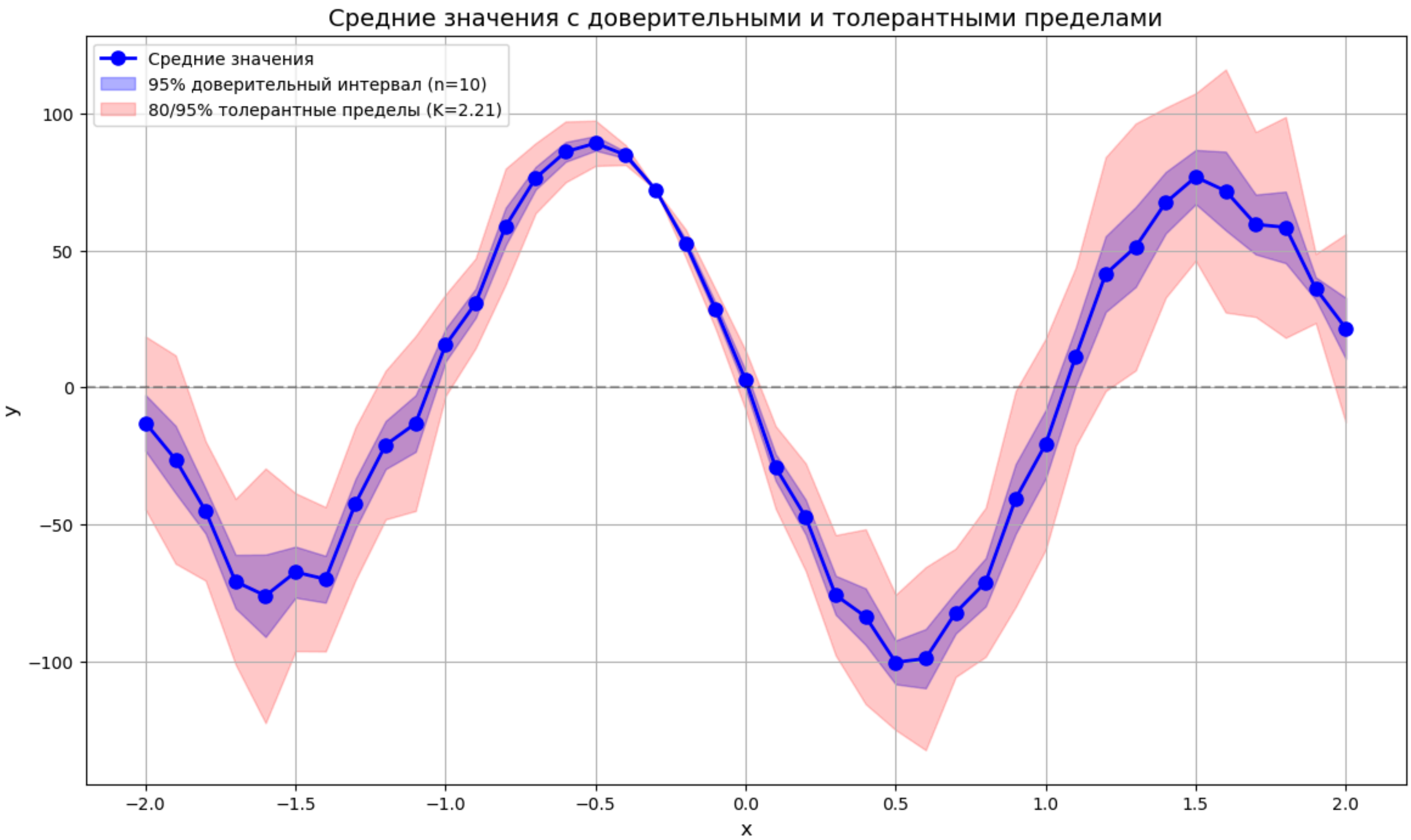
```
print(f"\nКритерий Кочрена:")
print(f"  Статистика G = {G:.6f}")
print(f"  Критическое значение G_crit = {G_crit:.6f}")
print(
    f"  Гипотеза о равенстве дисперсий {'принимается' if G < G_crit else 'отвергается'} на уровне значимости 0.05"
)
```

```
Толерантный множитель K = 2.2113
Для первой точки (x=-2.0000):
    Среднее = -12.9885
    Стандартное отклонение = 14.2876
Толерантные пределы: [-44.5829, 18.6059]

Критерий Кочрена:
  Статистика G = 0.065226
  Критическое значение G_crit = 0.045481
  Гипотеза о равенстве дисперсий отвергается на уровне значимости 0.05
```

Визуализация математичекого ожидания

```
# Визуализация результатов
plt.figure(figsize=(14, 8))

# Средние значения
plt.plot(x, means, "bo-", linewidth=2, markersize=8, label="Средние значения")

# Доверительные интервалы для математических ожиданий
plt.fill_between(
    x,
    ci_lower,
    ci_upper,
    alpha=0.3,
    color="blue",
    label=f"95% доверительный интервал (n={ny})",
)

# Параметрические толерантные пределы
plt.fill_between(
    x,
    tolerance_lower,
    tolerance_upper,
    alpha=0.2,
    color="red",
    label=f"80/95% толерантные пределы (K={K:.2f})",
)

plt.grid()
plt.xlabel("x", fontsize=12)
plt.ylabel("y", fontsize=12)
plt.title("Средние значения с доверительными и толерантными пределами", fontsize=14)
plt.legend(fontsize=10)
plt.axhline(y=0, color="k", linestyle="--", alpha=0.3)
```

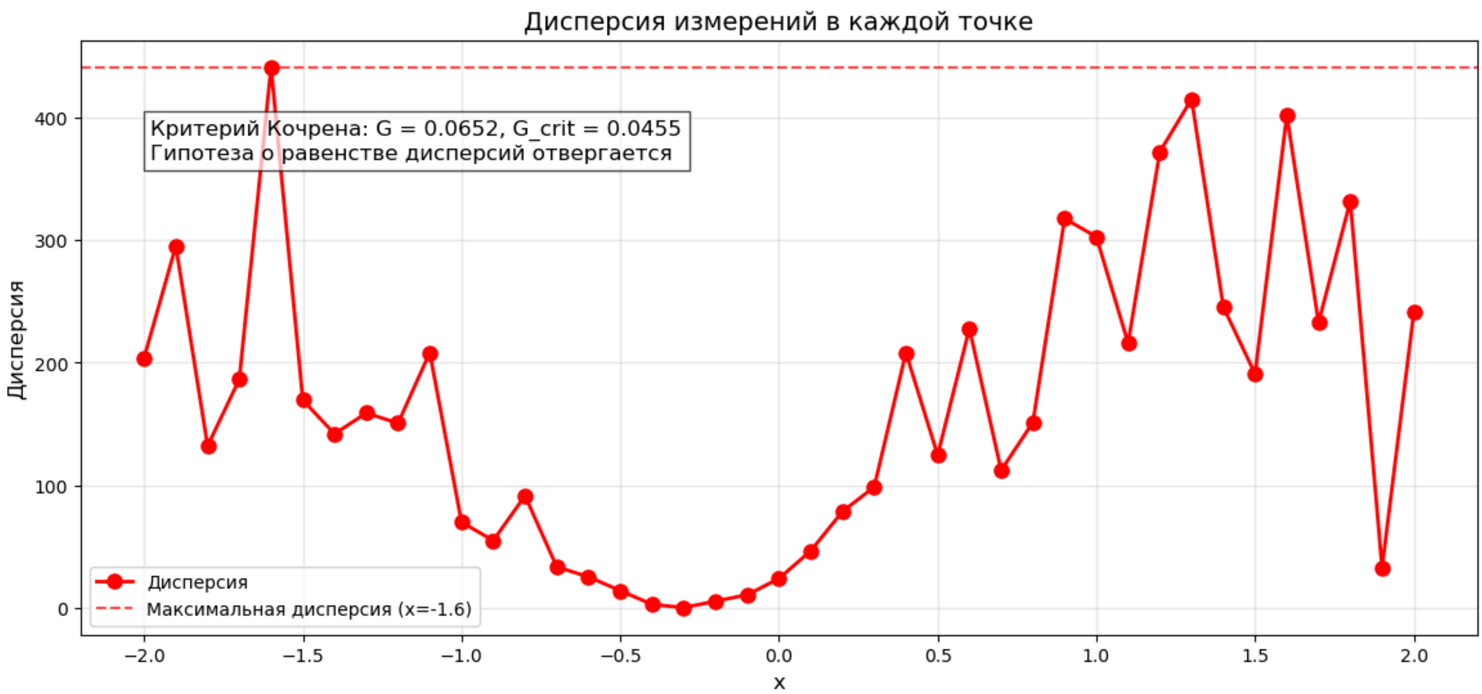
```
<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fd5b41b7c50>
```



Визуализация дисперсий и результат критерия Кочрена

```
plt.figure(figsize=(14, 6))

plt.plot(x, variances, "ro-", linewidth=2, markersize=8, label="Дисперсия")
max_var_idx = np.argmax(variances)
plt.axhline(
    y=np.max(variances),
    color="r",
    linestyle="--",
    alpha=0.7,
    label=f"Максимальная дисперсия (x={x[max_var_idx]})",
)

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x", fontsize=12)
plt.ylabel("Дисперсия", fontsize=12)
plt.title("Дисперсия измерений в каждой точке", fontsize=14)
plt.legend(fontsize=10)

plt.text(
    0.05,
    0.80,
    f"Критерий Кочрена: G = {G:.4f}, G_crit = {G_crit:.4f}\n"
    f"Гипотеза о равенстве дисперсий "
    f'{"принимается" if G < G_crit else "отвергается"}',
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=12,
    bbox=dict(facecolor="white", alpha=0.7),
)
```

```
Text(0.05, 0.8, 'Критерий Кочрена: G = 0.0652, G_crit = 0.0455\nГипотеза о равенстве дисперсий отвергается')
```

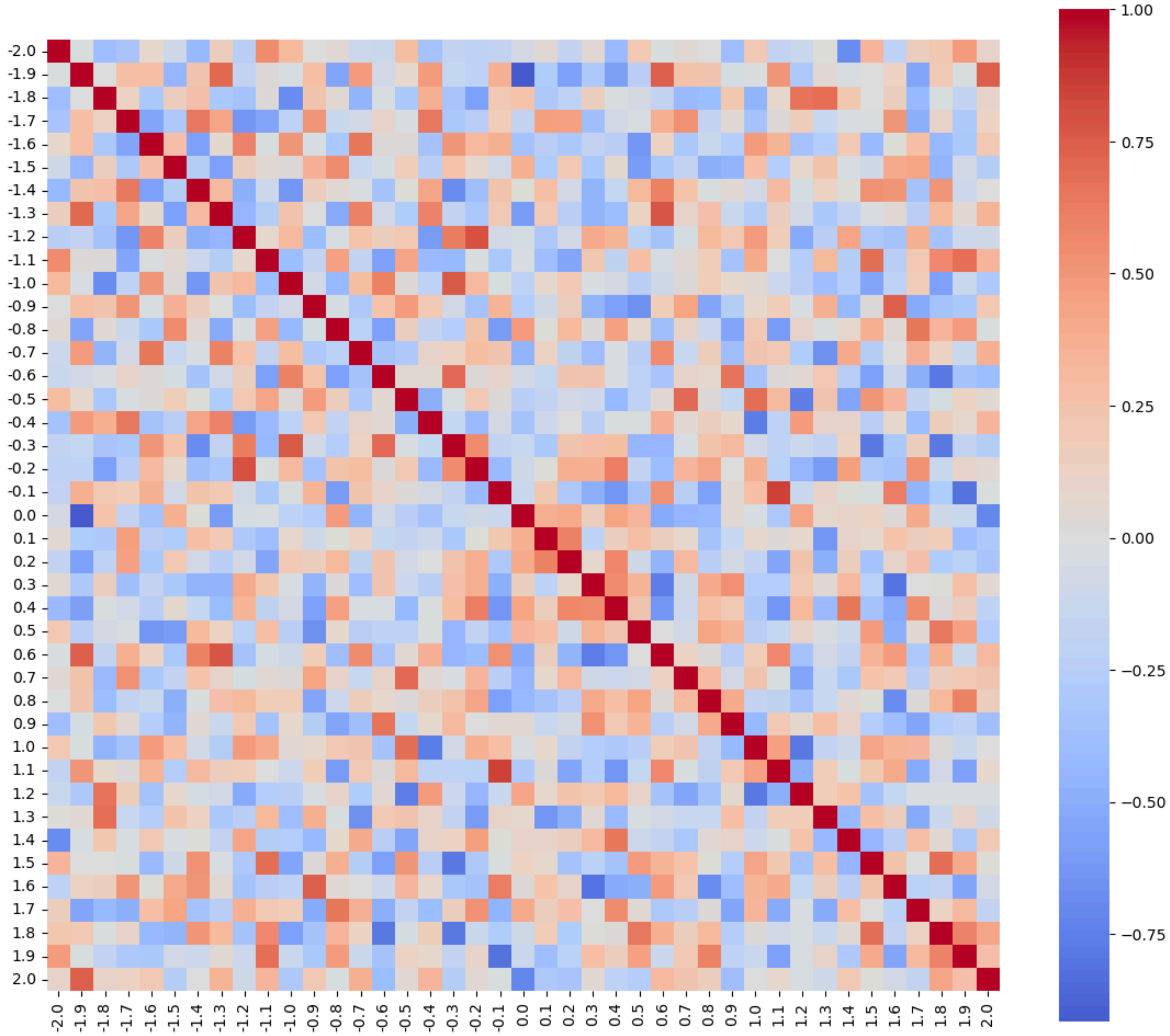


Тепловая карта корреляций между точками

```
correlation_matrix = np.corrcoef(y)

print(correlation_matrix)

plt.figure(figsize=(14, 12))
sns.heatmap(
    correlation_matrix,
    xticklabels=np.round(x, 2),
    yticklabels=np.round(x, 2),
    cmap="coolwarm",
    center=0,
    annot=False,
    square=True,
)
```

```
[[ 1.         -0.02442697 -0.38356399 ...  0.22511334  0.48978497
   0.09546305]
 [-0.02442697  1.         -0.00981815 ...  0.22156875 -0.01413118
   0.73317554]
 [-0.38356399 -0.00981815  1.         ... -0.02060997 -0.18120288
   0.10785253]
 ...
 [ 0.22511334  0.22156875 -0.02060997 ...  1.          0.58429506
   0.41851193]
 [ 0.48978497 -0.01413118 -0.18120288 ...  0.58429506  1.
   0.26090394]
 [ 0.09546305  0.73317554  0.10785253 ...  0.41851193  0.26090394
   1.        ]]
```

```
<Axes: >
```



Анализ тепловой карты корреляции

Полученный график коррелированности говорит о том, что данные слабо коррилированны - линейная связь отсутствует

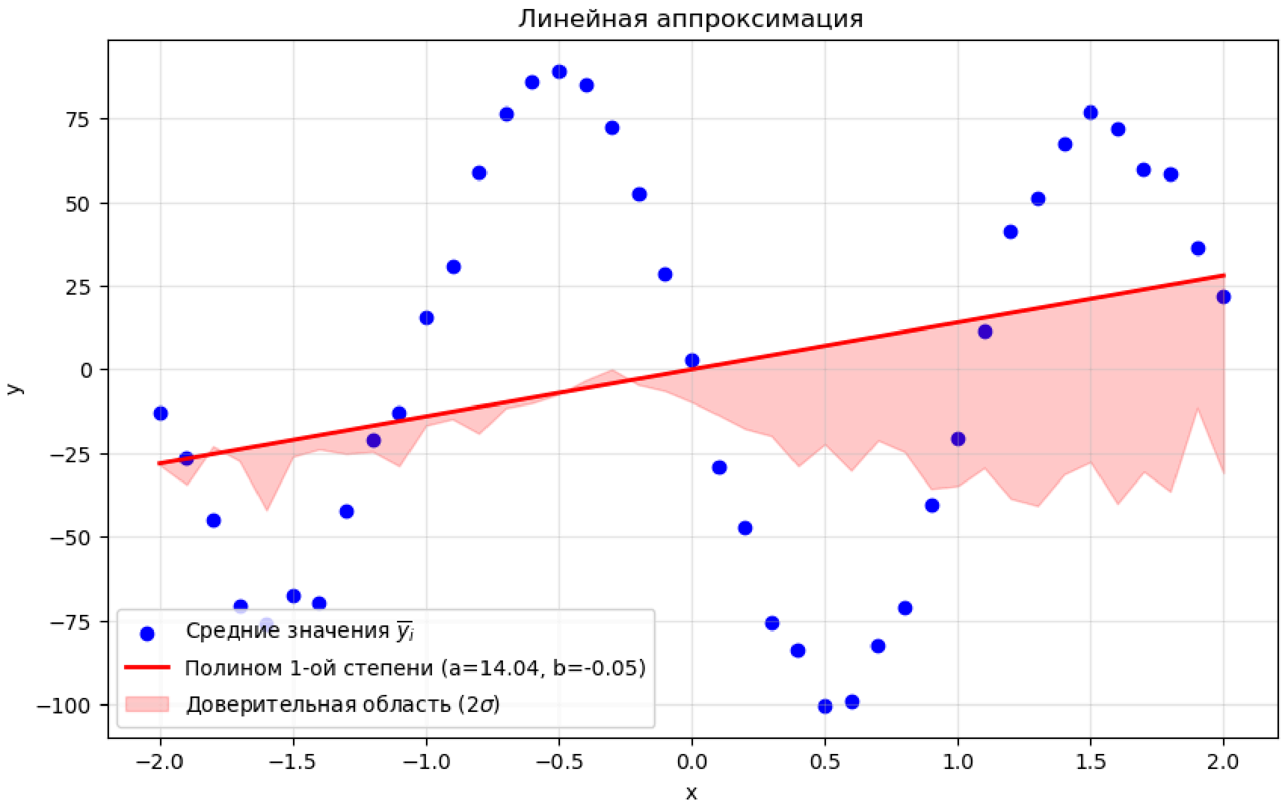
Произвести последовательную полиномиальную аппроксимацию Прим. В качестве значений y при аппроксимации необходимо использовать средние арифметические значения.

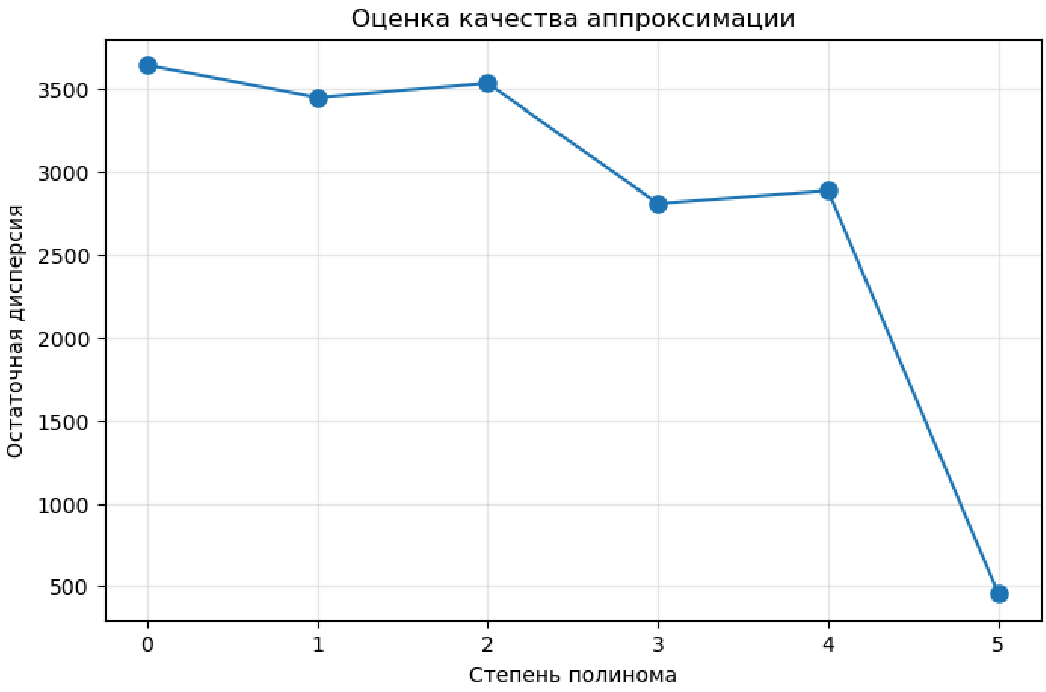
```
use_weighted = G <= G_crit


def polynomial_approximation(x, y, variances, degree, use_weighted):
    """
    Возвращает коэффициенты полинома для заданной степени.

    Аргументы:
        x: координаты точек
```

```
        y: средние значения y
        variances: дисперсии в каждой точке
        degree: степень полинома
        use_weighted: использовать взвешенный МНК (если дисперсии неравные)
    """
    X = np.vander(x, degree + 1)
    if use_weighted:
        weights = 1 / variances
        W = np.diag(weights)
        coeffs = np.linalg.solve(X.T @ W @ X, X.T @ W @ y)
    else:
        coeffs = np.linalg.solve(X.T @ X, X.T @ y)
    return coeffs


coeffs_0 = polynomial_approximation(x, means, variances, 0, use_weighted)
y_poly_0 = np.full_like(x, coeffs_0[0])

print(f"Коэффициент нулевой степени (константа): {coeffs_0[0]:.4f}")

# Первая степень (линейная модель: y = ax + b)
coeffs_1 = polynomial_approximation(x, means, variances, 1, use_weighted)
y_poly_1 = np.polyval(coeffs_1, x)

print(f"Коэффициенты линейной модели: a = {coeffs_1[0]:.4f}, b = {coeffs_1[1]:.4f}")

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(x, means, color="blue", label="Средние значения $\\overline{y}_i$")
plt.plot(
    x,
    y_poly_1,
    "r-",
    linewidth=2,
    label=f"Полином 1-ой степени (a={coeffs_1[0]:.2f}, b={coeffs_1[1]:.2f})",
)
plt.fill_between(
    x,
    y_poly_1,
    -2 * np.sqrt(variances),
    y_poly_1 + 2 * np.sqrt(variances),
    alpha=0.2,
    color="red",
    label="Доверительная область (2$\\sigma$)",
)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Линейная аппроксимация")
plt.legend()


# Подбор оптимальной степени полинома
def residual_variances(x, y, coeffs, degree):
    y_pred = np.polyval(coeffs, x)
    residuals = y - y_pred
    return np.var(residuals, ddof=degree + 1)


degrees = np.arange(6)
residual_vars = []

for d in degrees:
    coeffs = polynomial_approximation(x, means, variances, d, use_weighted)
    res_var = residual_variances(x, means, coeffs, d)
    residual_vars.append(res_var)
    print(f"Степень {d}: остаточная дисперсия = {res_var:.4f}")

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(degrees, residual_vars, "o-", markersize=8)
plt.xlabel("Степень полинома")
plt.ylabel("Остаточная дисперсия")
```

```
plt.title("Оценка качества аппроксимации")
plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```
Коэффициент нулевой степени (константа): -0.0506
Коэффициенты линейной модели: a = 14.0425, b = -0.0506
Степень 0: остаточная дисперсия = 3646.5968
Степень 1: остаточная дисперсия = 3449.8738
Степень 2: остаточная дисперсия = 3536.5973
Степень 3: остаточная дисперсия = 2810.8266
Степень 4: остаточная дисперсия = 2888.8045
Степень 5: остаточная дисперсия = 455.8899
```





После проведения оценки качества аппроксимации можно сделать вывод о том, чтоюы описать синусоиду необходим полином гораздо большей степени (>> 6).

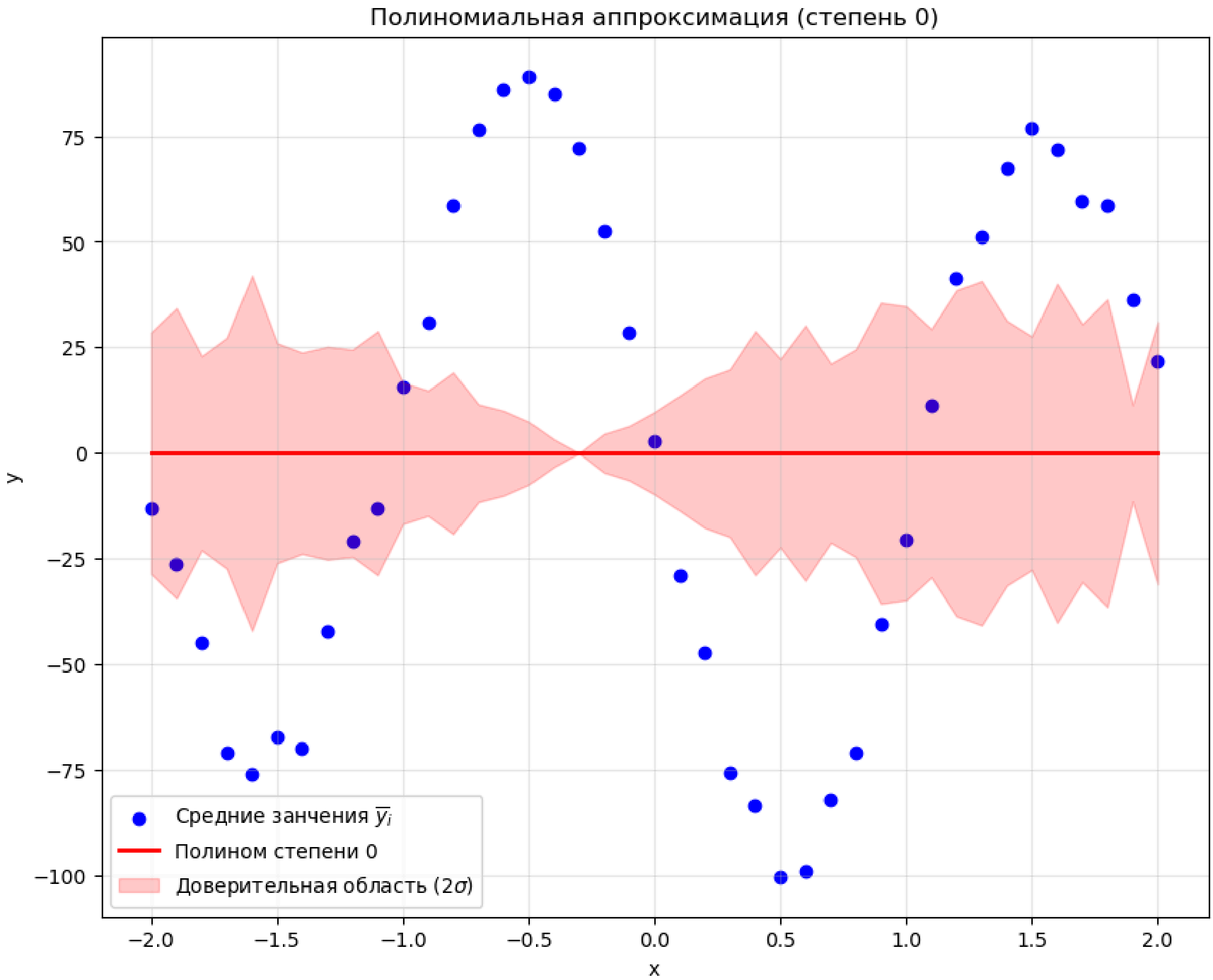
Подбор оптимальной степени полинома с помощью критерия Фишера

```
def calculate_f_statistic(x, y, q, nx, ny):
    """
    Вычисляет F-статистику для проверки гипотезы о степени полинома q.

    Аргументы:
        x: координаты точек (x_vals)
        y: средние значения (y_mean)
        q: текущая степень полинома
        nx: количество точек (41)
        ny: количество измерений в каждой точке (10)

    Возвращает:
        F: F-статистика
        F_crit: критическое значение F-распределения
        R2: коэффициент детерминации
    """

    # Построение полиномиальной модели
    coeffs = np.polyfit(x, y, q)
    y_pred = np.polyval(coeffs, x)

    # Общая сумма квадратов (SST)
    y_mean_global = np.mean(y)
    SST = np.sum((y - y_mean_global) ** 2)

    # Остаточная сумма квадратов (SSE)
    SSE = np.sum((y - y_pred) ** 2)

    # Коэффициент детерминаци
    R2 = 1 - SSE / SST

    # Выбор формулы для F-статичтики
    if ny > nx - q - 1:
        numerator = ny - nx + q + 1
        denominator = (ny - q - q) * (ny - 1)
        F = (numerator / denominator) * R2
    else:
```

```python
        F = R2 / (nx - q - 1)

    # Критическое значение F-распределения
    # df1 = 1 (увеличение степени на 1), df2 = nx * ny - (q + 1)
    df1 = 1
    df2 = nx * ny - (q + 1)
    F_crit = stats.f.ppf(0.95, df1, df2)

    return F, F_crit, R2


def find_optimal_polinomial_degree(x, y, nx, ny, max_degree=10):
    """
    Находит оптимальную степень полинома, проверяя гипотезу для q = 0, 1, ..., max_degree.

    Возвращает:
        optimal_q: оптимальная степень
        F_values: список F-статистик для каждой степени
    """
    q = 0
    F_values = []
    optimal_q = None

    while q <= max_degree:
        F, F_crit, R2 = calculate_f_statistic(x, y, q, nx, ny)
        F_values.append(F)

        print(f"Степень q = {q}: F= {F:.4f}, F_crit = {F_crit:.4f}, R2 = {R2:.4f}")

        # Если гипотеза НЕ отвергается (F <= F_crit) - останавливаемся
        if F <= F_crit:
            optimal_q = q
            print(
                f"Гипотеза о степени q = {q} НЕ отвергается. Оптимальная степень: {q}"
            )
            break
        else:
            print(f"Гипотеза о степени q = {q} отвергается. Увеличиваем степень.")
            q += 1

    if optimal_q is None:
        optimal_q = max_degree
        print(
            f"Достигнута максимальная степень {max_degree}. Оптимальная степень: {optimal_q}"
        )

    return optimal_q, F_values


optimal_q, F_values = find_optimal_polinomial_degree(x, means, nx, ny, max_degree=10)

# Построение оптимальной модели
coeffs_opt = np.polyfit(x, means, optimal_q)
y_opt = np.polyval(coeffs_opt, x)

plt.figure(figsize=(10, 8))
plt.scatter(x, means, color="blue", label="Средние занчения $\\overline{y}_i$")
plt.plot(x, y_opt, "r-", linewidth=2, label=f"Полином степени {optimal_q}")
plt.fill_between(
    x,
    y_opt - 2 * np.sqrt(variances),
    y_opt + 2 * np.sqrt(variances),
    alpha=0.2,
    color="red",
    label="Доверительная область ($2\\sigma$)",
)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title(f"Полиномиальная аппроксимация (степень {optimal_q})")
plt.legend()
```

```
Степень q = 0: F= 0.0000, F_crit = 3.8643, R2 = 0.0000
Гипотеза о степени q = 0 НЕ отвергается. Оптимальная степень: 0
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fd5b354c7d0>
```



Полиномиальная аппроксимация не может должным образом (см. Критерий Фишера) обесепчить аппроксимацию. Так как повышение степени полинома не добавляет результату аппроксимации точности - алгоритм поиска оптимальной степени полинома останавливается на нулевой степени. Для описания синусоиды нудно использовать более сложные способы аппроксимации (например Сплайны, или среднеквадратическую аппроксимацию).

Вычислить корреляционную матрицу и коэффициенты корреляции между оценками коэффициентов по матрице ковариации

```
def calculate_covariance_matrix(x, y, q, use_weighted=False, weights=None):
    X = np.vander(x, q + 1)

    if use_weighted and weights is not None:
        W = np.diag(weights)
        XTWX = X.T @ W @ X
        sigma2 = 1.0
```

```python
        Sa = np.linalg.inv(XTWX) * sigma2
    else:
        XTX = X.T @ X
        y_pred = np.polyval(np.polyfit(x, y, q), x)
        residuals = y - y_pred
        sigma2 = np.sum(residuals**2) / (len(x) - q - 1)
        Sa = np.linalg.inv(XTX) * sigma2

    return Sa


Sa = calculate_covariance_matrix(x, means, optimal_q)
print(f"Ковариационная матрица S_a (размер {optimal_q+1}x{optimal_q+1}):\n", Sa)
```

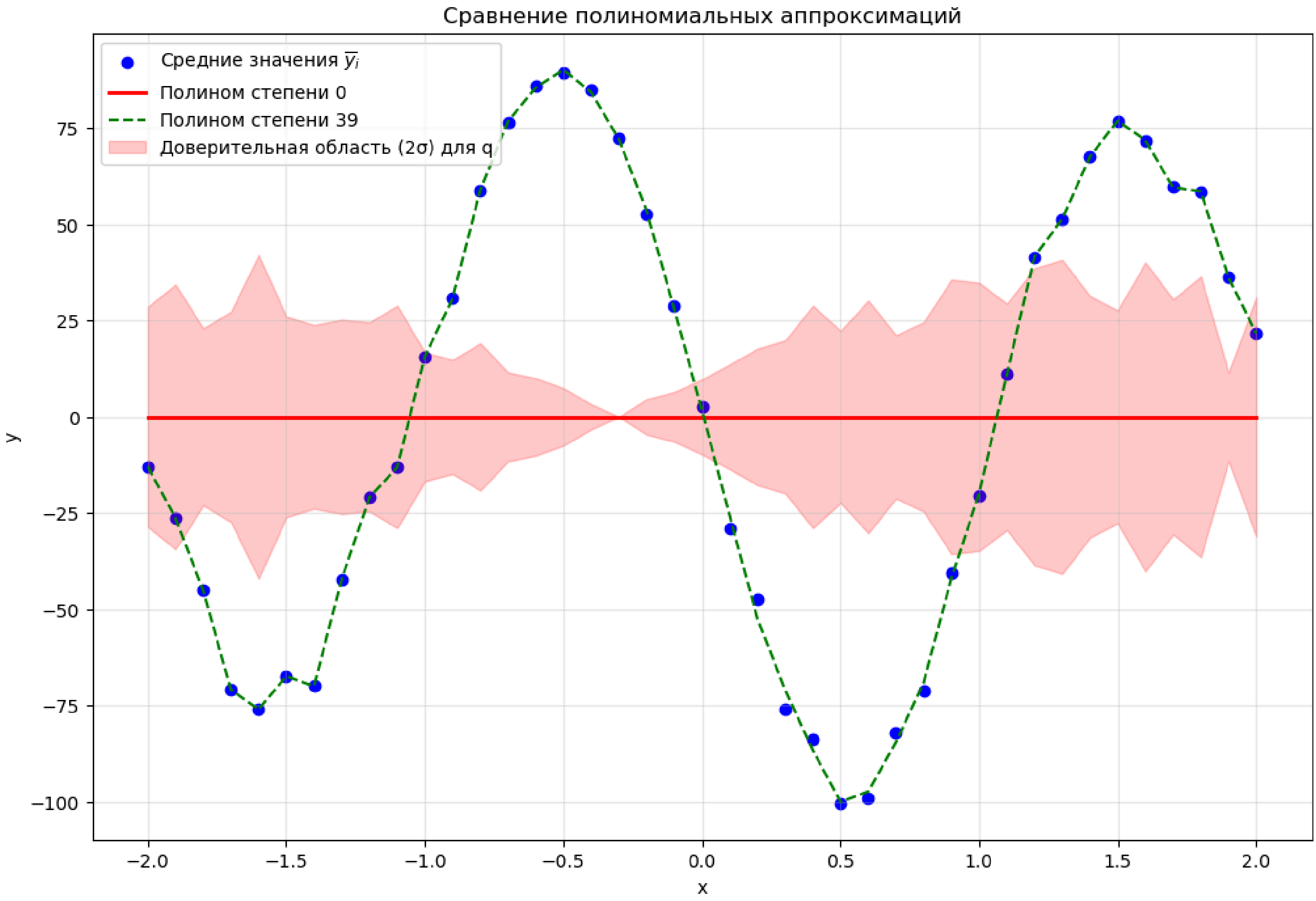
```
Ковариационная матрица S_a (размер 1x1):
 [[88.94138551]]
```

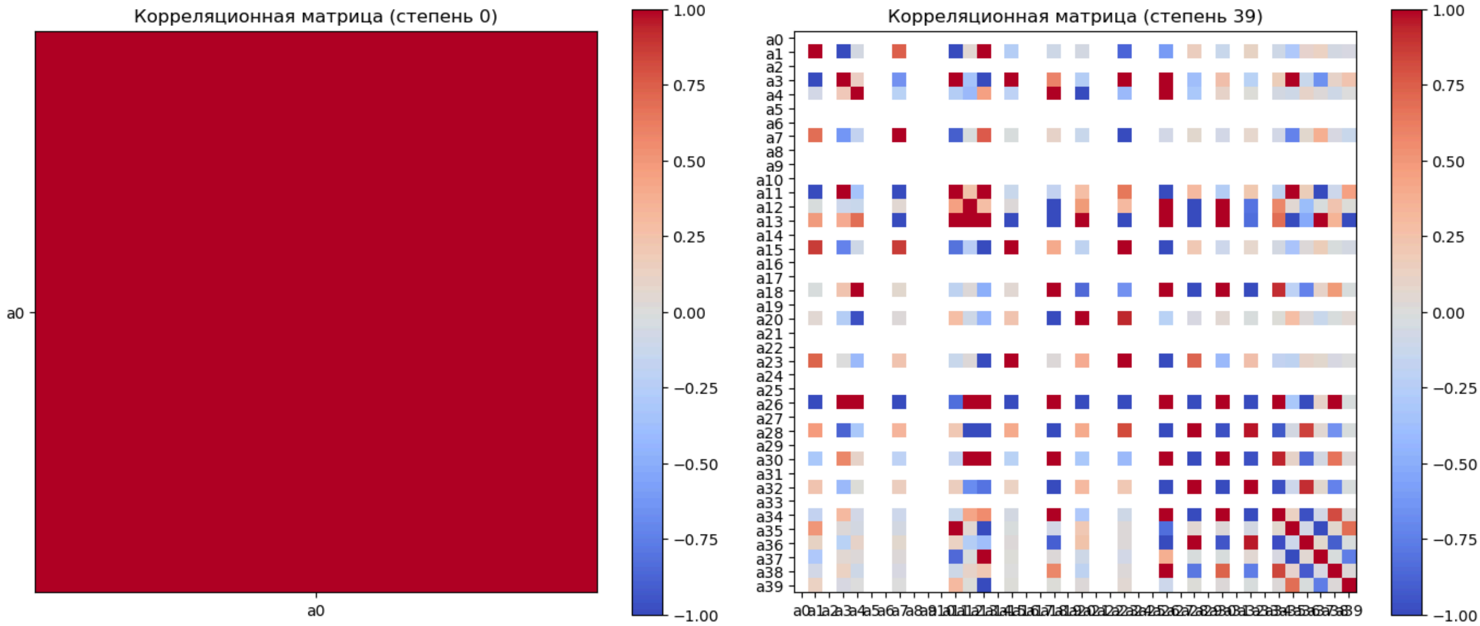
Пусть была получена степень q полинома, прошедшая гипотезу о степени полинома. Произвести все те же действия для полинома степени, равной k-1 (вычислить коэффициенты и корреляцию между ними). Сравнить результаты для степени q и k-1 (качество аппроксимации, корреляционная матрица коэффициентов, матрица ковариации исходных данных и ее обусловленность).

```python
k = nx - 1
coeffs_k1 = np.polyfit(x, means, k)
y_k1 = np.polyval(coeffs_k1, x)
residuals_k1 = means - y_k1

# Для полинома степени q
residuals_q = means - y_opt  # где y_opt - значения полинома степени q
residual_var_q = np.sum(residuals_q**2) / (k - optimal_q - 1)

# Для полинома степени k-1
residual_var_k1 = np.sum(residuals_k1**2) / (
    k - (k - 1) - 1
)  # Деление на 0 - особый случай

# В случае k-1 степени полином точно проходит через все точки
# Поэтому остаточная дисперсия должна быть близка к нулю
print(f"Остаточная дисперсия для степени q = {optimal_q}: {residual_var_q:.4f}")
print(
    f"Остаточная дисперсия для степени k-1: {np.sum(residuals_k1**2):.4e} (теоретически 0)"
)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.scatter(x, means, color="blue", label="Средние значения $\\overline{y}_i$")

# Полином степени q
plt.plot(x, y_opt, "r-", linewidth=2, label=f"Полином степени {optimal_q}")

# Полином степени k-1
plt.plot(x, y_k1, "g--", linewidth=1.5, label=f"Полином степени {k-1}")

plt.fill_between(
    x,
    y_opt - 2 * np.sqrt(variances),
    y_opt + 2 * np.sqrt(variances),
    alpha=0.2,
    color="red",
    label="Доверительная область (2σ) для q",
)

plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```python
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Сравнение полиномиальных аппроксимаций")
plt.legend()


# Корреляционная матрица
# Для полинома степени q
cov_q = calculate_covariance_matrix(x, means, optimal_q)
cond_q = np.linalg.cond(cov_q)

# Для полинома степени k-1
cov_k1 = calculate_covariance_matrix(x, means, k - 1)
cond_k1 = np.linalg.cond(cov_k1)

print(f"Число обусловленности для степени q = {optimal_q}: {cond_q:.2e}")
print(f"Число обусловленности для степени k-1: {cond_k1:.2e}")


# Коррреляционная матрица коэффициентов
def get_correlation_matrix(cov_matrix):
    stds = np.sqrt(np.diag(cov_matrix))
    corr = cov_matrix / np.outer(stds, stds)
    return corr


# Корреляционные матрицы
corr_q = get_correlation_matrix(cov_q)
corr_k1 = get_correlation_matrix(cov_k1)

# Визуализация корреляционных матриц
plt.figure(figsize=(14, 6))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.imshow(corr_q, cmap="coolwarm", vmin=-1, vmax=1)
plt.colorbar()
plt.title(f"Корреляционная матрица (степень {optimal_q})")
plt.xticks(range(optimal_q + 1), [f"a{i}" for i in range(optimal_q + 1)])
plt.yticks(range(optimal_q + 1), [f"a{i}" for i in range(optimal_q + 1)])

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.imshow(corr_k1, cmap="coolwarm", vmin=-1, vmax=1)
plt.colorbar()
plt.title(f"Корреляционная матрица (степень {k-1})")
plt.xticks(range(k), [f"a{i}" for i in range(k)])
plt.yticks(range(k), [f"a{i}" for i in range(k)])

plt.tight_layout()
```

```
Остаточная дисперсия для степени q = 0: 3740.0993
Остаточная дисперсия для степени k-1: 8.8667e+01 (теоретически 0)
Число обусловленности для степени q = 0: 1.00e+00
Число обусловленности для степени k-1: 2.35e+19
```


Сравнение полиномиальных аппроксимаций
Средние значения $\overline{y}_i$
Полином степени 0
Полином степени 39
Доверительная область (2σ) для q
y
x


Корреляционная матрица (степень 0)
a0
a0
Корреляционная матрица (степень 39)

Аппроксимация другими способами

Линейная регрессия

```
X = x.reshape(-1, 1)
model_linear = LinearRegression()
model_linear.fit(X, means)
y_pred_linear = model_linear.predict(X)

r2_linear = r2_score(means, y_pred_linear)
mse_linear = mean_squared_error(means, y_pred_linear)
coeffs_linear = model_linear.coef_[0], model_linear.intercept_

print(f"Linear Regression: R² = {r2_linear:.4f}, MSE = {mse_linear:.4f}")
print(f"Коэффициенты: a = {coeffs_linear[0]:.4f}, b = {coeffs_linear[1]:.4f}")
```

```
Linear Regression: R² = 0.0776, MSE = 3281.5872
Коэффициенты: a = 14.0425, b = -0.0506
```

Robust Regression (Робастная регрессия)

```
X_sm = sm.add_constant(x)
model_robust = sm.RLM(means, X_sm, M=sm.robust.norms.HuberT())
results_robust = model_robust.fit()
y_pred_robust = results_robust.predict(X_sm)

# Метрики
r2_robust = r2_score(means, y_pred_robust)
mse_robust = mean_squared_error(means, y_pred_robust)
coeffs_robust = results_robust.params

print(f"Robust Regression: R² = {r2_robust:.4f}, MSE = {mse_robust:.4f}")
print(f"Коэффициенты: a = {coeffs_robust[1]:.4f}, b = {coeffs_robust[0]:.4f}")
```

```
Robust Regression: R² = 0.0774, MSE = 3282.1459
Коэффициенты: a = 14.3576, b = 0.5972
```

Polyfit (полиномиальная регрессия с n = 1)

```
coeffs_poly = np.polyfit(x, means, 1)
y_pred_poly = np.polyval(coeffs_poly, x)

r2_poly = r2_score(means, y_pred_poly)
mse_poly = mean_squared_error(means, y_pred_poly)

print(f"Polyfit: R² = {r2_poly:.4f}, MSE = {mse_poly:.4f}")
print(f"Коэффициенты: a = {coeffs_poly[0]:.4f}, b = {coeffs_poly[1]:.4f}")
```

```
Polyfit: R² = 0.0776, MSE = 3281.5872
Коэффициенты: a = 14.0425, b = -0.0506
```

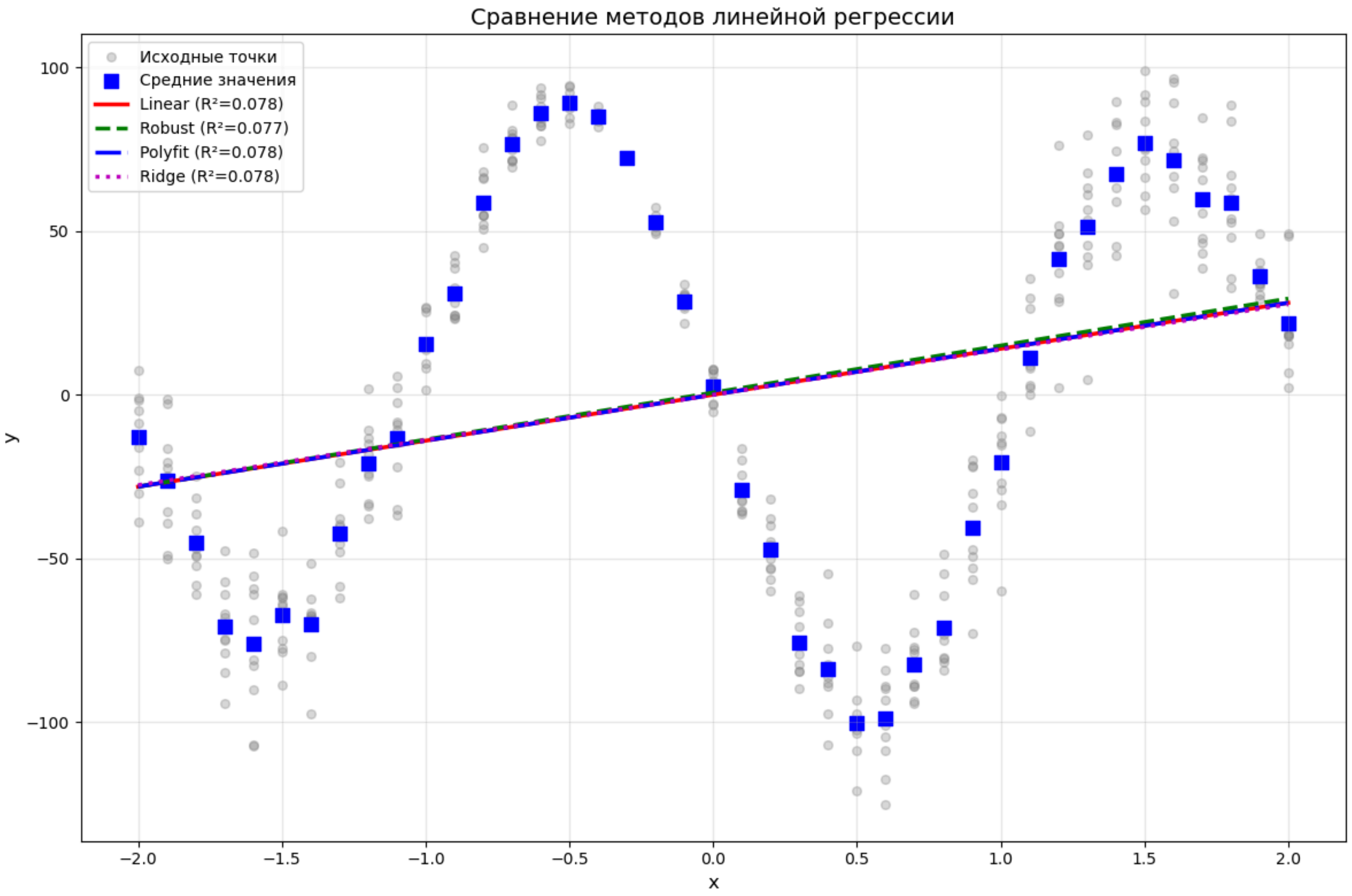
Ridge Regression (ридж-регрессия)

```
# Ридж-регрессия
model_ridge = Ridge(alpha=1.0)
model_ridge.fit(X, means)
y_pred_ridge = model_ridge.predict(X)

# Метрики
r2_ridge = r2_score(means, y_pred_ridge)
mse_ridge = mean_squared_error(means, y_pred_ridge)
coeffs_ridge = model_ridge.coef_[0], model_ridge.intercept_

print(f"Ridge Regression: R² = {r2_ridge:.4f}, MSE = {mse_ridge:.4f}")
print(f"Коэффициенты: a = {coeffs_ridge[0]:.4f}, b = {coeffs_ridge[1]:.4f}")
```

```
Ridge Regression: R² = 0.0776, MSE = 3281.6682
Коэффициенты: a = 13.8020, b = -0.0506
```

Визуализация результатов линейной аппроксимации

```
plt.figure(figsize=(12, 8))

for i in range(10):
    plt.scatter(
        x,
        y[:, i],
        color="gray",
        alpha=0.3,
        s=30,
        label="Исходные точки" if i == 0 else "",
    )
plt.scatter(x, means, color="blue", marker="s", s=80, label="Средние значения")

# Отображение аппроксимирующих прямых
plt.plot(x, y_pred_linear, "r-", linewidth=2.5, label=f"Linear (R²={r2_linear:.3f})")
plt.plot(x, y_pred_robust, "g--", linewidth=2.5, label=f"Robust (R²={r2_robust:.3f})")
plt.plot(x, y_pred_poly, "b-.", linewidth=2.5, label=f"Polyfit (R²={r2_poly:.3f})")
plt.plot(x, y_pred_ridge, "m:", linewidth=2.5, label=f"Ridge (R²={r2_ridge:.3f})")

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x", fontsize=12)
plt.ylabel("y", fontsize=12)
plt.title("Сравнение методов линейной регрессии", fontsize=14)
plt.legend(loc="best", fontsize=10)
plt.tight_layout()
```



Полиномиальная аппроксимация

```
degrees = [1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40]
results_poly = []
for deg in degrees:
    coeffs = np.polyfit(x, means, deg)
    y_pred = np.polyval(coeffs, x)
    r2 = r2_score(means, y_pred)
    mse = mean_squared_error(means, y_pred)
    results_poly.append((deg, r2, mse, coeffs, y_pred))

    print(f"Степень {deg}: R² = {r2:.4f}, MSE = {mse:.4f}")
```

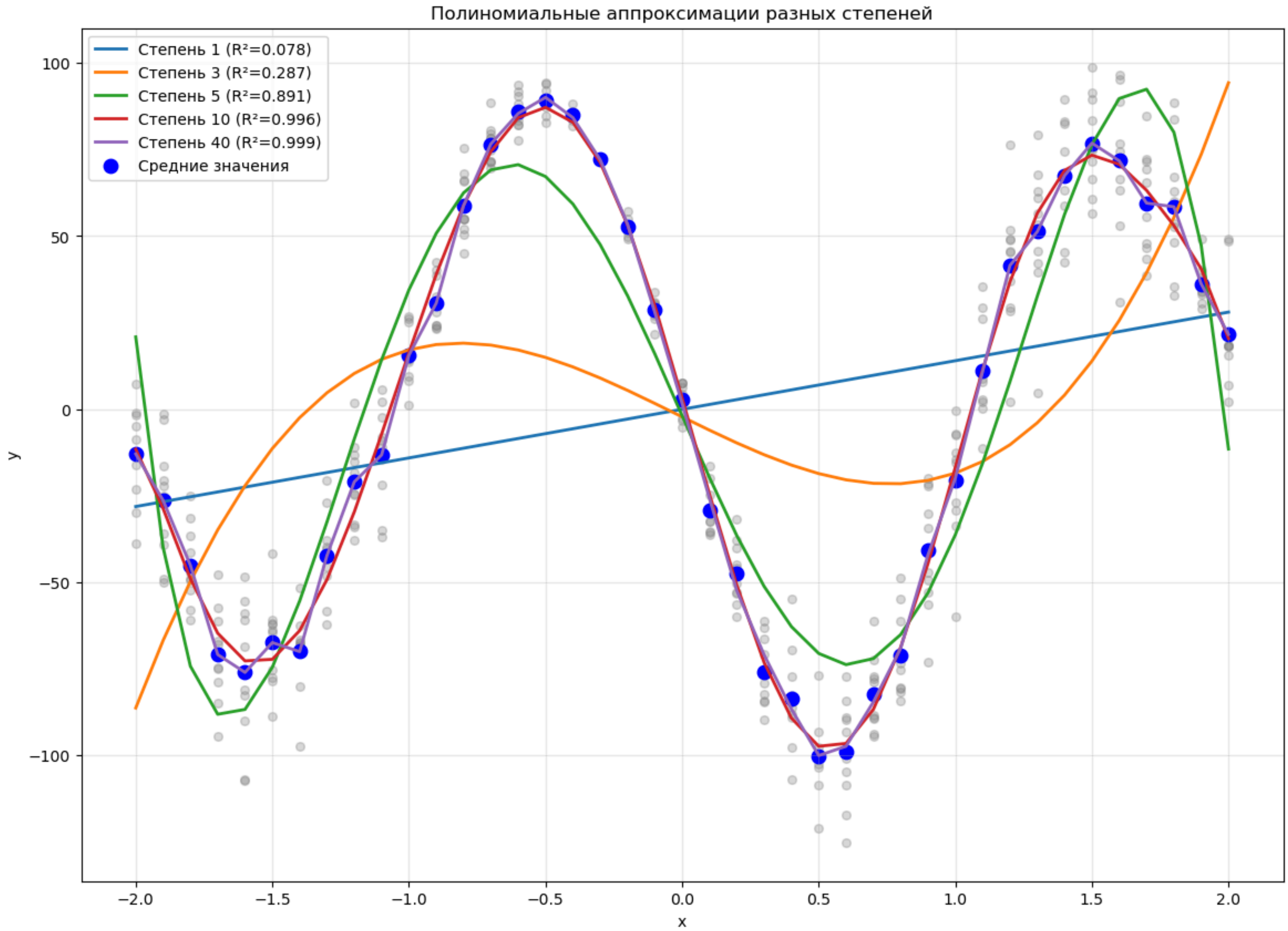
```
Степень 1: R² = 0.0776, MSE = 3281.5872
Степень 2: R² = 0.0787, MSE = 3277.8219
Степень 3: R² = 0.2870, MSE = 2536.5996
Степень 4: R² = 0.2870, MSE = 2536.5112
Степень 5: R² = 0.8906, MSE = 389.1743
Степень 10: R² = 0.9956, MSE = 15.7857
Степень 20: R² = 0.9972, MSE = 9.7958
Степень 30: R² = 0.9987, MSE = 4.5696
Степень 40: R² = 0.9994, MSE = 2.1626
```

Визуализация полиномиальных аппроксимаций

```
plt.figure(figsize=(14, 10))
for i, (deg, r2, mse, coeffs, y_pred) in enumerate(results_poly):
    if deg in [1, 3, 5, 10, 40]:
        plt.plot(x, y_pred, linewidth=2, label=f"Степень {deg} (R²={r2:.3f})")
```

```
# Исходные данные
for i in range(10):
    plt.scatter(x, y[:, i], color="gray", alpha=0.3, s=30)
plt.scatter(x, means, color="blue", s=80, label="Средние значения")

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Полиномиальные аппроксимации разных степеней")
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fd5b3168550>
```



Кусочная полиномиальная аппроксимация

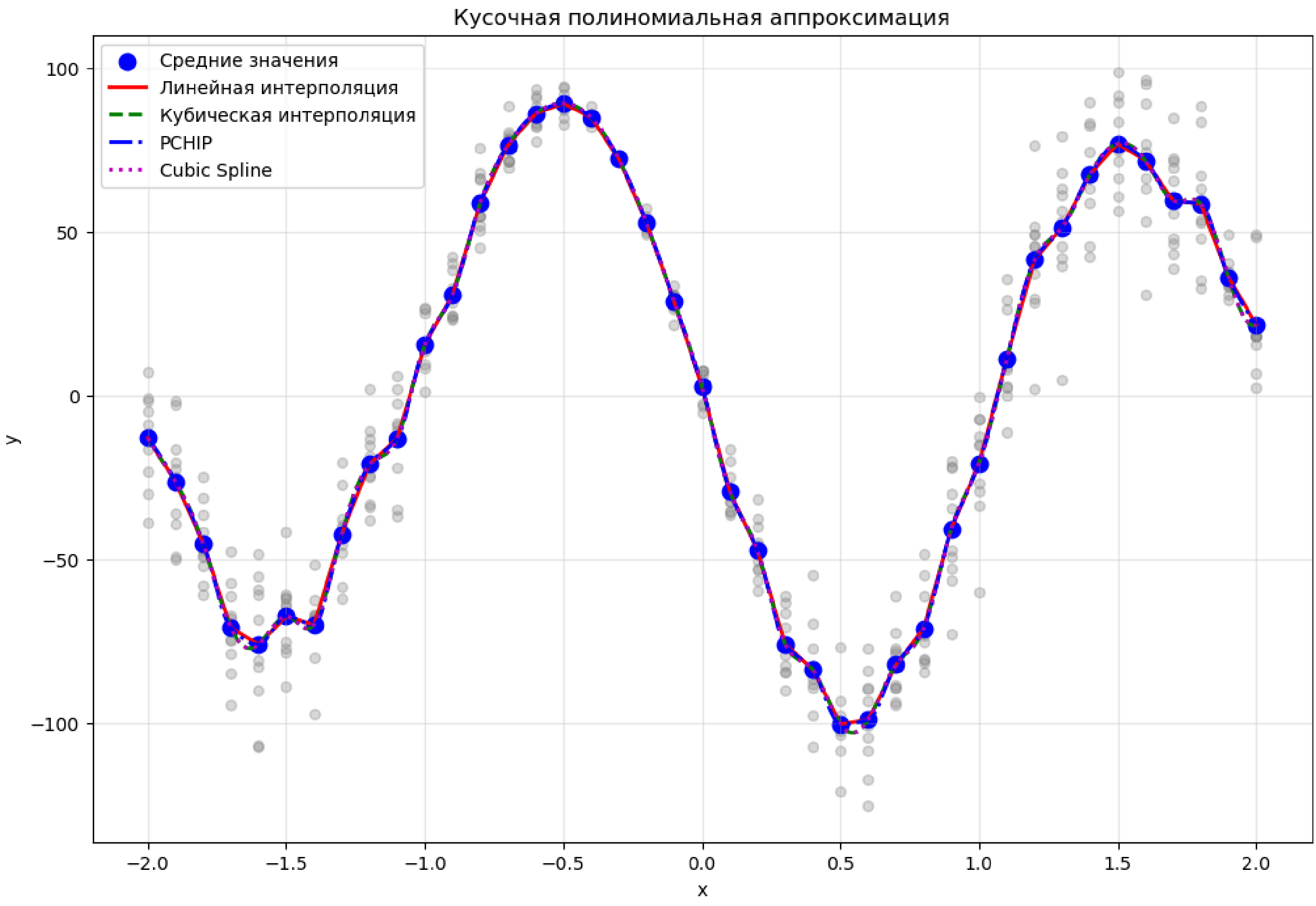
```
# Линейная интерполяция
f_linear = interp1d(x, means, kind="linear")
x_fine = np.linspace(min(X), max(x), 500)
y_linear = f_linear(x_fine)

# Кубическая интерполяция
f_cubic = interp1d(x, means, kind="cubic")
y_cubic = f_cubic(x_fine)
```

```
# PCHIP (полиномы Эрмита)
f_pchip = PchipInterpolator(x, means)
y_pchip = f_pchip(x_fine)

# Сплайны
spline = CubicSpline(x, means)
y_spline = spline(x_fine)
```

Визуализация

```
plt.figure(figsize=(12, 8))

# Отображение исходных данных
for i in range(10):
    plt.scatter(x, y[:, i], color="gray", alpha=0.3, s=30)
plt.scatter(x, means, color="blue", s=80, label="Средние значения")

# Отображение различных методов интерполяции
plt.plot(x_fine, y_linear, "r-", linewidth=2, label="Линейная интерполяция")
plt.plot(x_fine, y_cubic, "g--", linewidth=2, label="Кубическая интерполяция")
plt.plot(x_fine, y_pchip, "b-.", linewidth=2, label="PCHIP")
plt.plot(x_fine, y_spline, "m:", linewidth=2, label="Cubic Spline")

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Кусочная полиномиальная аппроксимация")
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fd5b2ffb110>
```



Нелинейная аппроксимация

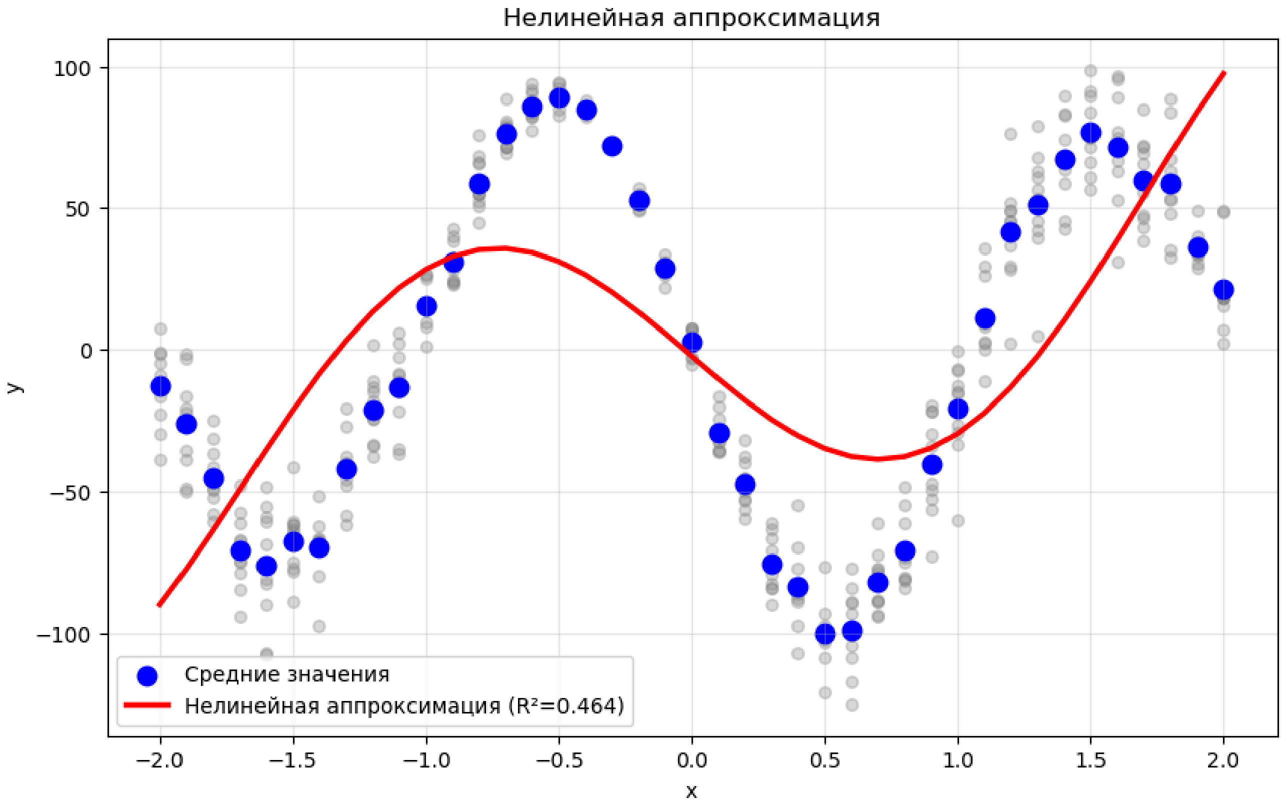
```
def nonlinear_func(x, a0, a1, a2, beta):
    """y(x) = (sin(x) + β)(a2*x^2 + a1*x + a0)"""
    return (np.sin(x) + beta) * (a2 * x**2 + a1 * x + a0)



# Начальные приближения параметров
initial_guess = [1, 1, 1, 1]

# Нелинейная регрессия
params, covariance = curve_fit(nonlinear_func, x, means, p0=initial_guess)
y_pred_nonlinear = nonlinear_func(x, *params)

# Метрики
r2_nonlinear = r2_score(means, y_pred_nonlinear)
mse_nonlinear = mean_squared_error(means, y_pred_nonlinear)

print(f"Нелинейная регрессия: R² = {r2_nonlinear:.4f}, MSE = {mse_nonlinear:.4f}")
print(
    f"Параметры: a0={params[0]:.4f}, a1={params[1]:.4f}, a2={params[2]:.4f}, beta={params[3]:.4f}"
)
```

```
Нелинейная регрессия: R² = 0.4643, MSE = 1905.8547
Параметры: a0=-80.3604, a1=0.3627, a2=45.8674, beta=0.0292
```

Визуализация

```
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Отображение исходных данных
for i in range(10):
    plt.scatter(x, y[:, i], color="gray", alpha=0.3, s=30)
plt.scatter(x, means, color="blue", s=80, label="Средние значения")

# Отображение нелинейной аппроксимации
plt.plot(
    x,
    y_pred_nonlinear,
    "r-",
    linewidth=2.5,
    label=f"Нелинейная аппроксимация (R²={r2_nonlinear:.3f})",
)

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Нелинейная аппроксимация")
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fd5b30bd450>
```



Выводы

```
# Сбор результатов в таблицу
results = []

# Линейные методы
results.append(
    (
        "Linear Regression",
```

```
        r2_linear,
        mse_linear,
        "Низкая",
        "Средняя",
        "Чувствителен к выбросам",
    )
)
results.append(
    (
        "Robust Regression",
        r2_robust,
        mse_robust,
        "Средняя",
        "Высокая",
        "Устойчив к выбросам",
    )
)
results.append(
    (
        "Polyfit (n=1)",
        r2_poly,
        mse_poly,
        "Низкая",
        "Средняя",
        "Аналогичен линейной регрессии",
    )
)
results.append(
    (
        "Ridge Regression",
        r2_ridge,
        mse_ridge,
        "Низкая",
        "Средняя",
        "Уменьшает переобучение",
    )
)

# Полиномиальные методы (выберем оптимальную степень)
optimal_deg = 5  # Например, степень 5 показала хорошие результаты
r2_optimal = next(r2 for deg, r2, mse, _, _ in results_poly if deg == optimal_deg)
mse_optimal = next(mse for deg, r2, mse, _, _ in results_poly if deg == optimal_deg)
results.append(
    (
        "Полиномиальная регрессия (оптимальная степень)",
        r2_optimal,
        mse_optimal,
        "Высокая",
        "Средняя",
        "Требует выбора степени",
    )
)

# Кусочная аппроксимация
r2_linear_interp = r2_score(means, f_linear(x))
mse_linear_interp = mean_squared_error(means, f_linear(x))
results.append(
    (
        "Линейная интерполяция",
        r2_linear_interp,
        mse_linear_interp,
        "Средняя",
        "Высокая",
        "Простота вычислений",
    )
)

r2_spline = r2_score(means, spline(x))
mse_spline = mean_squared_error(means, spline(x))
results.append(
    (
```

```python
        "Cubic Spline",
        r2_spline,
        mse_spline,
        "Высокая",
        "Высокая",
        "Гладкость аппроксимации",
    )
)

# Нелинейная аппроксимация
results.append(
    (
        "Нелинейная регрессия",
        r2_nonlinear,
        mse_nonlinear,
        "Высокая",
        "Низкая",
        "Сложность выбора модели",
    )
)

# Создаем таблицу
df_results = pd.DataFrame(
    results,
    columns=[
        "Метод",
        "R²",
        "MSE",
        "Качество аппроксимации",
        "Вычислительная сложность",
        "Особенности",
    ],
)

# Сортируем по R² в порядке убывания
df_results = df_results.sort_values(by="R²", ascending=False).reset_index(drop=True)
df_results
```

```css
.dataframe tbody tr th {
    vertical-align: top;
}

.dataframe thead th {
    text-align: right;
}
```

	Метод	R^2	MSE	Качество аппроксимации	Вычислительная сложность	Особенности
0	Cubic Spline	1.000000	0.000000	Высокая	Высокая	Гладкость аппроксимации
1	Линейная интерполяция	1.000000	0.000000	Средняя	Высокая	Простота вычислений
2	Полиномиальная регрессия (оптимальная степень)	0.890609	389.174295	Высокая	Средняя	Требует выбора степени
3	Нелинейная регрессия	0.464295	1905.854726	Высокая	Низкая	Сложность выбора модели
4	Polyfit (n=1)	0.077598	3281.587239	Низкая	Средняя	Аналогичен линейной регрессии
5	Linear Regression	0.077598	3281.587239	Низкая	Средняя	Чувствителен к выбросам
6	Ridge Regression	0.077576	3281.668184	Низкая	Средняя	Уменьшает переобучение

	Метод	R^2	MSE	Качество аппроксимации	Вычислительная сложность	Особенности
7	Robust Regression	0.077441	3282.145946	Средняя	Высокая	Устойчив к выбросам

Анализируя результаты аппроксимации данных различными методами, можно сделать следующие выводы. Методы кусочной аппроксимации (Cubic Spline и линейная интерполяция) демонстрируют идеальную точность (R^2=1.0, MSE=0), так как они по определению точно проходят через все заданные точки. Однако это не означает их превосходства для прогнозирования или обобщения данных, поскольку они склонны к переобучению и не сглаживают случайные флуктуации в измерениях. Полиномиальная регрессия с оптимально подобранной степенью показала наилучший баланс между точностью (R^2=0.8906) и обобщающей способностью среди параметрических моделей, что делает ее предпочтительной для описания общей тенденции в данных. Нелинейная регрессия с использованием гармонических функций показала умеренные результаты (R^2=0.4643), что может указывать на несоответствие выбранной модели реальной зависимости или недостаточную сложность модели для описания имеющихся данных. Все линейные методы (Linear Regression, Polyfit, Ridge Regression и Robust Regression) продемонстрировали крайне низкую объясняющую способность ($R^2 \approx 0.077$), что свидетельствует о явной нелинейности исследуемой зависимости, которую линейные модели не могут адекватно описать. Вычислительная сложность методов варьируется от низкой (нелинейная регрессия) до высокой (Cubic Spline, Robust Regression), что необходимо учитывать при работе с большими объемами данных. При выборе метода аппроксимации следует руководствоваться целями анализа: для интерполяции между известными точками предпочтительны сплайны, для построения обобщающей модели с балансом точности и простоты — полиномиальная регрессия с оптимальной степенью, а при наличии выбросов в данных — робастные методы, несмотря на их высокую вычислительную сложность. Важно отметить, что идеальная точность интерполяционных методов может быть обманчива для зашумленных данных, так как они аппроксимируют не только полезный сигнал, но и случайные погрешности измерений.