Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники

Н.Н. Горбанёв, А.А. Ельцов, Л.И. Магазинников

Линейная алгебра
Аналитическая геометрия

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия для студентов
и преподавателей вузов*

2011

УДК [512.64+514.12+517.2](075)
ББК 22.1я73
М 12

Рецензенты:
кафедра алгебры Томского гос. ун-та, зав. каф. д-р физ.-мат. наук, проф. П.А. Крылов;
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики Томского политехнического ун-та М.Р.Куваев.

Горбанёв Н.Н.
Ельцов А.А.
Магазинников Л.И.
М 12 Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: : Учебное пособие.—2-е изд., перераб. и доп. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2011. — 163 с.

ISBN 5-86889-027-2

В краткой форме изложен материал по линейной алгебре и аналитической геометрии в объёме, предусмотренном ныне действующей программой втузов. Отличительной особенностью данного пособия является широкое использование матричного аппарата. Теоретический курс дополнен многочисленными иллюстративными примерами и контрольными заданиями, которые можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля.

УДК [512.64+514.12+517.2](075)
ББК 22.1я73

ISBN 5-86889-027-2

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математики в техническом вузе состоит из большого числа самостоятельных дисциплин и реальна угроза его распада на отдельные, мало связанные между собой разделы, которые можно распределить между разными преподавателями, что порождает проблему преемственности и стыковки разных разделов курса. С другой стороны, это единый курс со своей внутренней структурой и иерархией. Поэтому весьма актуальной является задача построения курса с единых позиций. В качестве базового раздела, на основе которого можно построить изложение математики во втузе, может быть выбран курс линейной алгебры, что подчёркивали многие математики (Г.Е. Шилов, Ш.Пизо и М. Заманский). Предлагаемый курс начинается с изучения матриц и их частных случаев вектор-строк и вектор-столбцов. Во-первых, операции над матрицами достаточно формализованы и декларативное их введение как операций над массивами чисел не вызывает трудностей в усвоении данного материала. Во-вторых, матрицы и вектора могут быть использованы в качестве источника примеров при изучении таких структур как линейные пространства, группы и кольца в самом курсе математики. Кроме того, матричный аппарат ценен сам по себе и имеет многочисленные применения как в курсе математики, так и во многих дисциплинах, использующих математику. Далее изучаются системы линейных уравнений и связанные с ними определители и понятие ранга матрицы. Векторная форма записи системы линейных уравнений позволяет более доходчиво объяснить обычно трудно усваиваемые вопросы о линейной зависимости и линейной независимости систем векторов. Матричная форма записи систем линейных уравнений позволяет в компактной форме дать доказательства теоремы Крамера, теоремы о наложении решений систем линейных уравнений и следствий последней теоремы, имеющих большое прикладное значение. Матричный аппарат также удобен при изложении теории линейных операторов. Курс линейной алгебры является единственным формализованным разделом в курсе математики втуза. Поэтому здесь уместно дать понятие о математической структуре и кратко изучить некоторые из них. Наиболее подробно изучаются структуры линейного, аффинного и точечно-векторного евклидова пространства, широко применяемые в дальнейшем. Здесь же даны тесно примыкающие к ним понятия метрического, нормированного пространств и пространства со скалярным произведением. Векторная алгебра излагается как пример линейного пространства и даётся геометрическая характеристика понятия линейной зависимости и линейной независимости систем векторов, базиса в линейном пространстве. Аналитическая геометрия излагается как пример приложения векторной алгебры. При таком подходе изложение аналитической геометрии становиться очень компактным. Появление тензорного исчисления в курсе продиктовано необходимостью его использования в некоторых специальных курсах, читаемых студентам. Разделом переходным между линейной алгеброй и математическим анализом является глава, посвящённая линейным и полилинейным отображениям. Подробно изучаются наиболее простые из операторов — линейные. Здесь доказывается, что суперпозиция (композиция) линейных операторов и отображение, обратное к линейному оператору являются линейными отображениями. Раздел получается общим для линейной алгебры и математического анализа. Кроме объединяющей роли происходит экономия времени, а также показ места линейных отображений среди других типов отображений.

Предлагаемое учебное пособие состоит из двух глав. Первая глава содержит основные сведения из линейной алгебры.

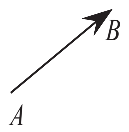
Во второй главе кратко изучаются некоторые геометрические объекты: прямая на плоскости и в пространстве, плоскости, кривые и поверхности второго порядка.

По материалу каждой главы составлены индивидуальные задания в 10 вариантах каждое, которые можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля (при наличии устройства “Символ” или его компьютерного аналога).

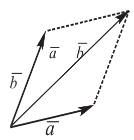
ВВЕДЕНИЕ

Кратко остановимся на основных понятиях, которые будут подробно изучаться в данном пособии.

Исходными понятиями геометрии являются точки, прямые и плоскости. Это первичные понятия которые определению не подлежат. Их свойства описываются аксиомами, изучаемыми в средней школе. В физике и математике широко применяются векторные величины, характеризующиеся величиной и направлением. Вектором называют упорядоченную пару точек A и B и изображают в виде отрезка с началом в точке A и концом

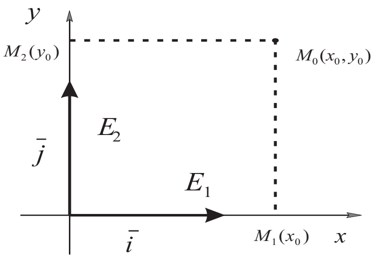


в точке B. Направление указывают стрелкой. Обозначают векторы записью $\overline{AB}$. Расстояние между точками A и B называют модулем вектора $\overline{AB}$ и обозначают $|\overline{AB}|$. Иногда векторы обозначают одной буквой $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.
Если прямые AB и CD параллельны и $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются равными. Если точки A и B совпадают, то вектор $\overline{AB}$ называется нулевым. Нулевой вектор не имеет направления. Над векторами определены линейные операции умножения на число и сложения. Вектор $\overline{b}$ называется произведением вектора $\overline{a}$ на число λ, если $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$, при этом a и b одинаково направлены, если $\lambda > 0$ и противоположно, если $\lambda < 0; \overline{b} = 0$, если $\lambda = 0$. Пишут $\overline{b} = \lambda\overline{a}$. Складывают векторы по правилу параллелограмма.

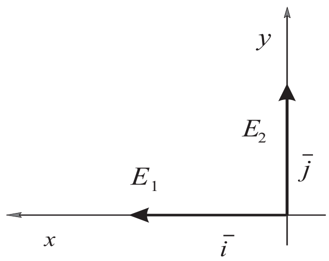


Если на прямой, плоскости и в пространстве выбрать систему кординат, то точки и векторы можно задавать одними или несколькими числами. Числовой осью называют прямую с заданной на ней точкой O,

направлением и единицей масштаба. Направление и единицу масштаба обычно задают вектором $\overline{i} = \overline{OE}$ таким, что $|\overline{OE}| = 1$. Каждой точке M на оси можно сопоставить единственное действительное число x, называемое координатой точки M, такое что $\overline{OM} = x\overline{OE}$. Справа от точки O все точки имеют положительные координаты, а слева отрицательные. Положение точки на плоскости можно определить, задав систему координат в виде двух перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O (начало системы координат). В зависимости от расположения осей различают два типа систем координат: правую и левую. Если поворот на меньший угол от первой оси до второй происходит против часовой стрелки, то систему координат называют правой, а если — по часовой — то — левой. На рисунке а) изображена правая система координат, а на рисунке б) — левая.

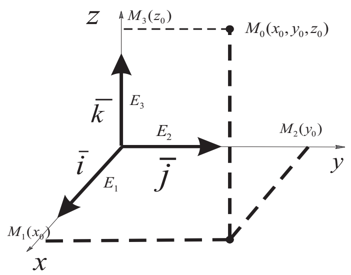


А)

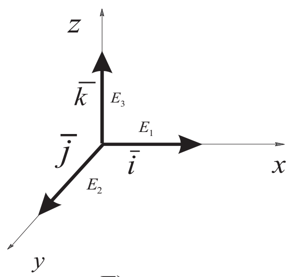


Б)

Ось OX называют осью абсцисс, а ось OY — осью ординат. Единицы масштаба и направление задаются единичными векторами $\bar{i} = \overline{OE_1}$ и $\bar{j} = \overline{OE_2}$. Обычно, если не оговорено особо, применяют правую систему координат. Аналогично вводят и системы координат в пространстве, состоящие из трёх взаимно ортогональных осей OX, OY, OZ с заданными на них единичными векторами $\bar{i} = \overline{OE_1}$, $\bar{j} = \overline{OE_2}$ и $\bar{k} = \overline{OE_3}$. Ось OZ называют осью аппликат, а оси OX и OY, как и на плоскости, называют осью абсцисс и ординат, соответственно.



В)



Г)

Пару векторов $\bar{i}, \bar{j}$ или тройку $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называют базисами плоскости или пространства. Система координат $OXYZ$ называется правой, если из точки E_3 система OXY видна как правая и левой, если — как левая. на рисунке в) изображена правая система координат, а на рисунке г) — левая. Описанные системы координат называются декартовыми.

Пусть на плоскости выбрана система координат OXY. Любую точку M_0 можно спроектировать на оси OX и OY и получить точки M_1 и M_2. Координаты x_0 и y_0 этих точек на осях OX и OY соответственно называются координатами точки M_0. Пишут $M_0(x_0, y_0)$. Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке плоскости можно сопоставить единственную пару действительных чисел, и наоборот, каждой паре чисел можно сопоставить единственную точку. Точке O — началу координат — сопоставляется пара $(0; 0)$. Аналогично, если в пространстве выбрать систему координат $OXYZ$, то каждой точке M_0 можно сопоставить единственную тройку действительных чисел x_0, y_0, z_0 — координат точки M_0. Пишут $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Позднее будет доказано, что если выбраны пара базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}$ на плоскости или тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ в пространстве, то любой вектор $\bar{a}$ на плоскости единственным образом может быть представлен в виде

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j},$$

а в пространстве

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Пара чисел (x, y) или тройка чисел (x, y, z) называется координатами вектора $\bar{a}$ относительно выбранных базисов. Пишут $\bar{a} = (x, y)$ или $\bar{a} = (x, y, z)$.

Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - x_1)$, равные разностям координат его конца и начала. Вектор $\overline{OM}$, где O — начало координат, называют радиус вектором точки M.

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются.

Множества векторов на прямой, плоскости и в пространстве будем обозначать соответственно V_1, V_2, V_3.

Широко применяются операции скалярного и векторного произведения векторов.

Пусть даны два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (обозначается $(\bar{a}, \bar{b})$) называется число определяемое формулой

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi,$$

где $|\bar{a}|$ и $|\bar{b}|$ — модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ меньший или равный π. Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ — нулевой, то по определению полагаем $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и из определения скалярного произведения векторов видно, что $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$. Верно и обратное утверждение, что если для ненулевых векторов $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами в декартовой системе координат:

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k},$$

$$\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$$

то

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

то есть скалярное произведение равно сумме произведений одноимённых декартовых координат.

Так как $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^\circ = |\overline{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, то

$$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

то есть модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Если $\overline{AB}$ – вектор, соединяющий точки A и B, $\overline{F}$ – вектор силы приложенный к материальной точке, то $(\overline{AB}, \overline{F}) = |\overline{AB}| \cdot |\overline{F}| cos\varphi$ есть работа по перемещению материальной точки по прямой из A в B под действием силы F.

Пусть даны два непараллельных ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Их векторным произведением называется вектор $\overline{c}$ (обозначается $[\overline{a}, \overline{b}]$), удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) вектор $\overline{c}$ ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) вектор $\overline{c}$ ориентирован так, чтобы с конца вектора $\overline{c}$ поворот на наименьший угол от вектора $\overline{a}$ к $\overline{b}$ был виден совершающимся против часовой стрелки;

3) $|\overline{c}| = |[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллельны или хотя бы один из них нулевой, то по определению полагаем $[\overline{a}, \overline{b}] = 0$.

Зная, что $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$, можно найти, что $\overline{c} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}$.

Как видим, после выбора системы координат точки и векторы можно задавать парами или тройками чисел. Это позволяет кривые и поверхности описывать уравнениями, связывающими координаты x, y, z их произвольных точек. Приведём некоторые примеры. Окружность с центром в точке $C(a, b)$ радиуса R можно определить как множество всех точек $M(x, y)$, удалённых от точки $C(a, b)$ на расстояние R, то есть тех точек, для которых выполняется условие

$|\overline{CM}| = R$. Так как $\overline{CM} = (x-a, y-b)$, то $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение окружности. Прямую на плоскости не параллельную оси OY можно задать уравнением $y = kx + b$, где k — тангенс угла наклона прямой к оси OX, а b — длина отрезка отсекаемого прямой от оси OY. Если ввести обозначения $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$, то уравнение прямой можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{0.1}$$

которое называется общим уравнением прямой. Пусть $M(x,y)$ — произвольная, а $M_0(x_0, y_0)$ — любая фиксированная точки прямой. Тогда координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению прямой, то есть выполнено равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{0.2}$$

Вычитая из (0.1) соотношение (0.2) получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{0.3}$$

Введём в рассмотрение векторы $\overline{N} = (A, B)$, $\overline{r} = (x, y)$, $\overline{r_0} = (x_0, y_0)$. Векторы $\overline{r} = (x, y)$ и $\overline{r_0} = (x_0, y_0)$ являются радиус-векторами точек $M(x,y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ соответственно. Вектор $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$. Теперь уравнение (0.3) можно переписать в виде

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{N}) = 0. \tag{0.4}$$

по правилу вычисления скалярного произведения. Видим, что вектор $\overline{N} = (A, B)$ ортогонален вектору $\overline{r} - \overline{r_0}$ для любой точки M, то есть вектор $\overline{N}$ ортогонален данной прямой. Вектор $\overline{N} = (A, B)$ называют вектором нормали прямой или нормальным вектором прямой. Этим определяется геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ прямой, а именно A и B есть координаты нормального вектора прямой.

Две прямые на плоскости могут иметь общие точки, а могут и не иметь. Если у прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ есть одна общая точка, то есть прямые пересекаются, то координаты этой точки удовлетворяют как уравнению первой прямой, так и уравнению второй прямой, и, таким образом, координаты точки являются решением системы двух линейных уравнений, определяющих данные прямые.

Если прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ не имеют общих точек, то они параллельны, следовательно параллельны их нормальные векторы $\overline{N_1}(A_1, B_1), \overline{N_2}(A_2, B_2)$, то есть $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$, где λ — любое число. В этом случае соответствующая система уравнений решений не имеет. Такие системы называются несовместными. Если в дополнение к условию параллельности двух прямых $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$ выполняется ещё и условие $C_2 = \lambda C_1$ с тем же λ, то данные уравнения определяют одну и ту же прямую и соответствующая система уравнений имеет бесконечно много решений. Заметим, что прямые ортогональны, если векторы $\overline{N_1}(A_1, B_1)$ и $\overline{N_2}(A_2, B_2)$ ортогональны, то есть если $(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = 0$.

Таким образом, вопрос о взаимном расположении двух прямых на плоскости сводится к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{array} \right. \tag{0.5}$$

относительно x и y.

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называют коэффициентами системы, а c_1 и c_2 — её свободными членами. Таблица чисел $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ называется основной матрицей системы. Это частный случай матриц, называется квадратной матрицей второго порядка. Матрица $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы. Говорят, что матрица B имеет размер 2×3 (2 строки, 3 столбца).

Умножая первое уравнение в (0.5) на b_2, а второе на b_1 и вычитая из первого результата второй, получаем $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$. Аналогично, если умножить первое уравнение на a_2, а второе на a_1 и вычесть из второго результата первый, то получим $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$. Если $a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2 \neq 0$, то система (0.5) имеет единственное решение

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{0.6}$$

.

Число $\Delta = (a_1b_2 - a_2b_1)$ называют определителем второго порядка и обозначают $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Обозначив $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$, формулы (0.6) можем переписать в виде

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x и Δ_y не равен нулю, то система (0.5) не имеет решений. В этом случае говорят, что система (0.5) не совместна. При условии $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ система имеет бесконечно много решений. Говорят, что система неопределённа. При этом строки расширенной матрицы пропорциональны.

Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{0.7}$$

где x, y, z координаты произвольной точки $M(x, y, z)$ пространства, а A, B, C, D — константы, определяет плоскость. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная фиксированная точка плоскости. Тогда

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{0.8}$$

Вычитая из соотношения (0.7) соотношение (0.8), получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{0.9}$$

Введём в рассмотрение векторы $\overline{N} = (A, B, C)$, $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overline{r} - \overline{r_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ Теперь уравнение (0.9) можно записать в векторной форме

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{N}) = 0. \tag{0.10}$$

Отсюда следует, что вектор $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ и $\overline{N} = (A, B, C)$ ортогональны при любом выборе точки M плоскости. Следовательно вектор $\overline{N}$ ортогонален плоскости. Этот вектор называют вектором нормали плоскости или нормальным вектором плоскости. Как видим, чтобы записать уравнение плоскости в виде(0.9) нужно знать координаты вектора нормали, то есть числа A, B, C и координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскости. Сравнивая уравнения (0.4) и (0.10) видим, что уравнения прямой и плоскости в векторной форме имеют один и тот же вид. Кроме того, одинаковый геометрический смысл имеют векторы r_0, r, N в этих уравнениях: r_0 и r — радиус-векторы фиксированной и текущей точек соответственно прямой или плоскости, N — их нормальный вектор. Если известны какие-нибудь векторы $\overline{l_1}, \overline{l_2}$, параллельные плоскости, то в качестве вектора $\overline{N}$ можно принять их векторное произведение $[\overline{l_1}, \overline{l_2}]$.

При отыскании точки пересечения трёх плоскостей возникает система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{0.11}$$

Таблица чисел $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ называется основной матрицей системы, а таблица $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы. Матрица A квадратная третьего порядка. В матрице B три строки и четыре столбца, говорят что она имеет размер 3×4.

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

определяемое равенством

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \qquad (0.12)$$

Будем говорить, что элементы a_1, b_2, c_3 образуют главную диагональ определителя, а элементы a_3, b_2, c_1 — побочную. Первое слагаемое в сумме (0.12) есть произведение элементов, расположенных на главной диагонали, а два последующих слагаемых есть произведение элементов расположенных в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три последующих слагаемых, взятых со знаком минус, строятся по тому же способу, но с применением побочной диагонали. Заметим, что в каждом произведении суммы (0.12) имеется ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A.

Непосредственно из правила вычисления оределителя следуют свойства:

1) если все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, то определитель равен нулю;

2) общий множитель элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя;

3) определитель поменяет знак на противоположный, если поменять местами какие-либо две строки или два столбца;

4) определитель имеющий две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца равен нулю;

5) определитель не изменится, если к какой-либо его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец) умноженную на некоторое число.

Вычисление определителя третьего порядка можно свести к вычислению трёх определителей второго порядка.

Соотношение (0.12) можно переписать в виде

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2). \qquad (0.13)$$

Величины $b_2c_3 - b_3c_2$, $a_3c_2 - a_2c_3$, $a_2b_3 - a_3b_2$ обозначают символами A_1^1, A_2^1, A_3^1 и называют алгебраическими дополнениями элементов a_1, b_1 и c_1 соответственно. Алгебраическое дополнение можно вычислить для любого элемента. Для этого нужно в сумме (0.12) выделить слагаемые, в которых содержится этот элемент, и вынести его за скобку. Величина оставшаяся в скобках и называется алгебраическим дополнением этого элемента. Возьмём, например, элемент c_2. Он расположен во второй строке и третьем столбце. Его алгебраическое дополнение обозначается A_3^2. Элемент c_2 содержится в сумме $a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 = c_2(a_3b_1 - a_1b_3)$. Следовательно $A_3^2 = a_3b_1 - a_1b_3$. Справедливо следующее утверждение: "Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки или столбца на их алгебраические дополнения". Сумму (0.13) можно записать в виде

$$\Delta = a_1A_1^1 + b_1A_2^1 + c_1A_3^1. \tag{0.14}$$

О равенстве (0.14) говорят, что определитель Δ разложен по элементам первой строки. Для вычисления алгебраического дополнения вводят понятие минора M_k^i для каждого элемента определителя. Возьмём элемент определителя, стоящий в i — й строке и k — том столбце и вычеркнем из определителя строку с номером i и столбец с номером k. Получившийся определитель второго порядка обозначают M_k^i и называют минором данного элемента. Используя равенство (0.12) легко проверяется равенство

$$A_k^i = (-1)^{i+k}M_k^i. \tag{0.15}$$

Теперь соотношение (0.14) можно переписать в виде

$$\Delta = a_1(-1)^{1+1}M_1^1 + b_1(-1)^{1+2}M_2^1 + c_1(-1)^{1+3}M_3^1$$

или в подробной записи

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Подобное выражение можно записать для любой строки или любого столбца, например, равенство

$$\Delta = -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} -$$

является разложением определителя по элементам второго столбца.

Пользуясь свойством 5) определителя можно в любой её строке или столбце получить два нулевых элемента. Тогда вычисление определителя третьего порядка сведётся к нахождению одного определителя второго порядка.

Позднее мы рассмотрим понятие определителя порядка n. Путём разложения его по строке или столбцу вычисление этого определителя сводится к вычислению n определителей $n-1$ порядка.

Возвращаемся к решению системы (0.11). Кроме определителя Δ будем применять определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Как и в случае системы двух уравнений с двумя неизвестными можно показать, что если $\Delta \neq 0$, то система (0.11) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

называемых формулами Крамера.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ отличен от нуля, то система не имеет решений. Если же $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система либо имеет бесконечно много решений, то есть неопределённа, либо не имеет решений и нужны дополнительные исследования.

При решении систем формулы Крамера применяются редко. Обычно системы решают методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Метод Гаусса продемонстрируем на примере.

Пример. Найти решение системы

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ 3x + 2y - 3z = -2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу этой системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Действуя только со строками, получим ниже главной диагонали $1, 3, -3$ нули. Для этого первую строку в матрице B умножим на два и вычтем из второй, а затем первую строку умножим на три и вычтем из третьей. Это равносильно умножению первого уравнения на два и вычитания полученного результата из второго уравнения и умножению первого уравнения на три и вычитания полученного результата из третьего уравнения. В результате получаем матрицу

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -6 & -26 \end{pmatrix}.$$

Умножая вторую строку матрицы B_1 на четыре и вычитая результат из третьей строки, получаем матрицу

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Матрица B_2 соответствует системе

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ -y - z = -5, \\ -2z = -6. \end{cases}$$

Легко находим $z = 3, y = 2, x = 1$. Мы нашли решение $(1, 2, 3)$.

В этом процессе иногда может получится строка типа $0 \cdot z = \lambda$. Если $\lambda \neq 0$, то система не имеет решений, то есть не совместна.

Каждое из уравнений в системе (0.11) определяет плоскость, а векторы $\overline{N_1} = (a_1, b_1, c_1), \overline{N_2} = (a_2, b_2, c_2), \overline{N_3} = (a_3, b_3, c_3)$ являются нормальными векторами к ним. Если среди векторов $\overline{N_1}, \overline{N_2}, \overline{N_3}$ нет параллельных, а система (0.11) неопределённа, то все три плоскости пересекаются по одной прямой. В этом случае одно из уравнений в системе можно вычеркнуть, так как оно не несёт новой информации. Система (0.11) будет эквивалентна системе, содержащей любые два уравнения исходной системы, например

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases} \tag{0.16}$$

Если векторы $\overline{N_1}, \overline{N_2}$ непараллельны, то система (0.16) определяет прямую линию в пространстве. Очевидно, что эта прямая параллельна вектору $\bar{l} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}]$ и проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (0.11). Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z, \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z \end{cases} \tag{0.17}$$

относительно x и y имеет единственное решение в которое войдёт неизвестное z. В этом случае неизвестные x и y называются зависимыми, а неизвестное z свободным. Неизвестному z можно придавать любые значения, после чего находить значения зависимых неизвестных x и y.

Положим $z = z_0$ (z_0 может быть любым числом) и решим систему (0.17) при $z = z_0$. Получим $x = x_0, y = y_0$. Мы нашли координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на прямой и вектор $\bar{l} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}]$, параллельный прямой. Этими условиями положение прямой определяется однозначно. Для отыскания векторного произведения $[\overline{N_1}, \overline{N_2}]$ используют символический определитель:

$$\bar{l} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Обозначим

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = m, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = n, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = p.$$

Тогда $\bar{l} = (m, n, p)$. Возьмём любую точку $M(x, y, z)$. Она будет принадлежать прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} \| \bar{l}$, то есть если $\overline{M_0M} = t\bar{l}$, или $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tm, tn, tp)$. Из равенства векторов следует равенство их координат:

$$x - x_0 = tm, y - y_0 = tn, z - z_0 = tp,$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{array} \right. \tag{0.18}$$

Соотношения (0.18) называют параметрическими уравнениями прямой в пространстве. Подчеркнём, что в параметрических уравнениях x_0, y_0, z_0 — координаты фиксированной точки на прямой, а m, n, p — координаты какого-либо вектора, параллельного прямой. Вектор $\bar{l} = (m, n, p)$ называют направляющим вектором прямой.

Одними из важнейших в математике являются понятия множества и отображения одних множеств в другие. При этом под множеством мы понимаем совокупность объектов объединённых каким-нибудь общим для этих объектов свойством, а под отображением множества X в множество Y закон f по которому каждому элементу x из множества X ставиться в соответствие элемент $f(x)$ множества Y. Вместо слова отображение будем также употреблять слова функция и оператор, считая их синонимами. Если

X и Y векторные или, что то же самое, линейные пространства, например введённые ранее или V_1 или V_2 или V_3, то самыми простыми отображениями являются линейные отображения, то есть отображения обладающие свойством $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ для любых векторов x_1, x_2 из X и любых чисел α, β. Для отображений $f : V_1 \to V_1$ линейный оператор действует по формуле $u = f(x) = ax$, где a — некоторое число, а для отображений $f : V_2 \to V_2$ линейный оператор действует по формуле $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — числа. Аналогично можно записать выражения для линейных операторов отображающих V_1 в V_2; V_2 в V_1; V_1 в V_3; V_2 в V_3;V_3 в V_1,; V_3 в V_2; V_3 в V_3. В частности, для отображений $f : V_1 \to V_2$ линейный оператор действует по формуле $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} a_1x \\ a_2x \end{pmatrix}$,где a_1, a_2 — числа, а для отображений $f : V_3 \to V_3$ линейный оператор действует по формуле $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2b_3, c_1, c_2, c_3$ — числа.

Все приведённые выше операторы можно записать в координатной форме, например, для отображений $f : V_3 \to V_3$ покоординатная запись будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \tag{0.19}$$

Каждому линейному отображению (оператору) поставим в соответствие матрицу состоящую из коэффициентов этого оператора. В простейшем случае отображения $f : V_1 \to V_1$ эта матрица состоит из одного числа. Каждый линейный оператор порождает некоторую матрицу и каждая матрица порождает линейный оператор.

Над отображениями можно производить операции. Рассмотрим некоторые из этих операций.

Пусть $f : X \to Y, \varphi : Y \to Z$. Рассмотрим отображение $\psi : X \to Z$ действующее по формуле $\psi(x) = \varphi(f(x))$. Это отображение называется сложным отображением, сложной функцией, композицией отображений, суперпозицией отображений. Если отображения f и φ линейны, то нетрудно показать, что отображение ψ тоже линейно. Действительно $\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) =$

$\varphi(f(\alpha x_1 + \beta x_2)) = \varphi(\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)) = \alpha\varphi(f(x_1)) + \beta\varphi(f(x_2)) = \alpha\psi(x_1) + \beta\psi(x_2)$. Пусть f есть отображение V_3 в V_3 ($f : V_3 \to V_3$), имеющее в покоординатной записи вид (0.19) и $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов этого оператора. Пусть, далее, φ отображает V_3 в V_2 ($\varphi : V_3 \to V_2$), покоординатная запись которого выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} s &= d_1 u + e_1 v + g_1 w, \\ t &= d_2 u + e_2 v + g_2 w. \end{aligned} \tag{0.20}$$

и $B = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & g_1 \\ d_2 & e_2 & g_2 \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов оператора φ. Подставляя значения переменных u, v, w из (0.19) в (0.20), получаем

$$\begin{aligned} s = {} & (d_1 a_1 + e_1 a_2 + g_1 a_3)x + (d_1 b_1 + e_1 b_2 + g_1 b_3)y + \\ & +(d_1 c_1 + e_1 c_2 + g_1 c_3)z, \\ t = {} & (d_2 a_1 + e_2 a_2 + g_2 a_3)x + (d_2 b_1 + e_2 b_2 + g_2 b_3)y + \\ & +(d_2 c_1 + e_2 c_2 + g_2 c_3)z. \end{aligned}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} d_1 a_1 + e_1 a_2 + g_1 a_3 & d_1 b_1 + e_1 b_2 + g_1 b_3 & d_1 c_1 + e_1 c_2 + g_1 c_3 \\ d_2 a_1 + e_2 a_2 + g_2 a_3 & d_2 b_1 + e_2 b_2 + g_2 b_3 & d_2 c_1 + e_2 c_2 + g_2 c_3 \end{pmatrix}$$

суперпозиции операторов φ и f называется произведением матриц B и A этих операторов и обозначается $C = BA$. Каждый элемент произведения матриц равен сумме произведений элементов соответствующей строки первого сомножителя на элементы соответствующего столбца второго сомножителя. Например, элемент, стоящий во второй строке и третьем столбце произведения матриц равен сумме произведений элементов второй строки первого сомножителя на соответствующие элементы третьего столбца второго сомножителя. Аналогично для любого другого элемента произведения матриц. Перемножать можно матрицы у которых число столбцов первого сомножителя совпадает с числом строк второго сомножителя.

Заметим, что линейный оператор может быть задан как произведение матрицы этого оператора на вектор переменных. Например, оператор заданный соотношениями (0.19) и (0.20) можно соответственно записать в виде $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

для оператора (0.19) и в виде $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & g_1 \\ d_2 & e_2 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ для оператора (0.20).

Аналогично можно определить операции сложения операторов и умножения оператора на число и соответствующие им операции сложения матриц и умножение матрицы на число. Все перечисленные выше операции можно ввести и декларативно. Этот подход реализован в книге. Изучением свойств различных операций над матрицами занимаются в теории матриц. Матрицы имеют многочисленные применения в различных областях использующих математику.

Так как линейные операторы наиболее просты по структуре и хорошо изучены, то возникает естественное желание приблизить произвольное отображение вблизи точки линейным. Соответствующая задача носит название задачи линеаризации. С помощью линеаризации получены многие физические понятия, например, сила тока, скорость, модуль вектора скорости. Изучением классов функций допускающих линеаризацию и свойств полученных в процессе линеаризации линейных операторов занимаются в разделе математики который называется дифференциальным исчислением.

Пусть $f : X \to Y$ — некоторое отображение. С этим отображением связана задача состоящая в нахождении для всякого элемента b из Y тех x из X для которых справедливо равенство $f(x) = b$. Если f — линейное отображение, то уравнение $f(x) = b$ является системой линейных уравнений, которая в этом случае записывается обычно в виде $Ax = b$. В простейшем случае система линейных уравнений состоит из одного уравнения с одним неизвестным. Вопросами изучения свойств решений системы линейных уравнений занимаются в теории этих систем.

Введение систем координат Рене Декартом и возникшая в связи с этим алгебраизация геометрии значительно упростили изучение геометрических объектов и породили новый раздел математики— аналитическую геометрию. Введение в аналитическую геометрию векторной алгебры и, как следствие, векторной формы записи ещё упростило её изложение.

1. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра — один из разделов математики, в котором изучается важнейшая математическая структура — конечномерные линейные пространства, а также их линейные и полилинейные отображения. Основным инструментом при этом является теория матриц и систем линейных уравнений, широко применяемая как в математике, так и в других науках.

1.1. Матрицы и действия над ними

1.1.1. Понятие матрицы. Некоторые виды матриц

Некоторые виды информации удобно представлять в виде таблиц чисел. Предположим, например, что четыре завода 1, 2, 3, 4 производят пять видов продукции, которые также можно пронумеровать числами 1, 2, 3, 4, 5. Через a_k^i ($k = 1,2,3,4,5$, $i = 1,2,3,4$) обозначим количество продукции с номером k, которое произвёл завод с номером i. Можем составить таблицу чисел

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Например, число a_3^4 означает количество продукции с номером 3, которое произвёл завод с номером 4. Объясните, что обозначено числами a_5^3, a_4^2, a_3^1. Какую информацию даёт сумма $a_1^1 + a_1^2 + a_1^3 + a_1^4$? Таблицы, подобные (1.1), широко встречаются в математике и получили название “матриц”.

Матрицей называется любая прямоугольная таблица чисел.

Произвольную матрицу можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают так: $A = [a_k^i]$ ($i = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,n}$).

Числа a_k^i называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжён двумя индексами. Верхний индекс (i) означает номер строки, а нижний (k) — номер столбца, в которых расположен этот элемент. Например, элемент a_3^4 расположен в четвёртой строке и третьем столбце.

В матрице A имеется m строк и n столбцов. Будем говорить, что матрица A имеет размер $(m \times n)$. В матрице (1.1) имеется 4 строки и 5 столбцов, поэтому её размер (4×5).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*, а число её строк (или столбцов) называется *порядком* матрицы.

Запишем квадратную матрицу порядка n

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Говорят, что элементы $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$ образуют главную диагональ, а элементы $a_1^n, a_2^{n-1}, \dots, a_n^1$ — побочную. Квадратную матрицу, у которой элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называют *треугольной.* Матрица, не обязательно квадратная, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Квадратная матрица вида

$$B = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

называется *диагональной*, а матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется *единичной.*

Мы познакомились с новым понятием — матрица. Рассмотрим некоторые операции над матрицами.

1.1.2. Равенство матриц

Две матрицы $A = [a_k^i]$ и $B = [b_k^i]$ одного размера называются *равными*, если равны их элементы, расположенные на одинаковых местах.

Таким образом, если матрицы A и B равны (пишут $A = B$), то $a_1^1 = b_1^1$, $a_1^2 = b_1^2$, …, $a_k^i = b_k^i$. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушается, то $A \neq B$.

1.1.3. Сложение матриц

Пусть даны две матрицы $A = [a_k^i]$ и $B = [b_k^i]$ одного размера. Суммой матриц A и B называется матрица $C = [c_k^i]$ (обозначают $C = A + B$) такая, что $c_k^i = a_k^i + b_k^i$.

Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах.

Пример 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Запомним, что складывать можно только матрицы одинакового размера. Для матриц разных размеров операция сложения не определена.

1.1.4. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = [a_k^i]$ на число λ называется матрица $B = [b_k^i]$ (обозначают $B = \lambda A$) такая, что для любых значений i и k выполняется равенство $b_k^i = \lambda a_k^i$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу A на число λ, нужно умножить все её элементы на число λ.

Пример 2.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -12 & 18 & 3 \\ 15 & -21 & -6 \end{bmatrix}.$$

1.1.5. Умножение матриц

Пусть даны две матрицы A и B, размеры которых согласованы следующим образом: число столбцов (число элементов в строках) первой матрицы равно числу строк (числу элементов в столбцах) второй матрицы. Если матрица A имеет размер $(m \times n)$, то матрица B должна иметь размер $(n \times k)$. При этом числа m и k могут быть произвольными. Заметим, что из согласованности размеров матриц A и B не следует согласованность размеров B и A. Если же размеры матриц A и B, а также B и A согласованы и матрица A имеет размер $(m \times n)$, то матрица B имеет размер $(n \times m)$.

Пусть даны две матрицы A и B с согласованными размерами $(m \times n)$ и $(n \times l)$ соответственно. Произведением матриц $A = [a_i^k]$ и $B = [b_j^s]$ называется матрица $C = [c_p^q]$ (записывают $C = A \cdot B$) размера $(m \times l)$, элемент c_p^q которой равен сумме произведений элементов строки с номером q матрицы A на соответствующие элементы столбца с номером p матрицы B, т.е.

$$c_p^q = \sum_{i=1}^{n} a_i^q b_p^i = a_1^q b_p^1 + a_2^q b_p^2 + \cdots + a_n^q b_p^n, \; q = \overline{1, m}, \; p = \overline{1, k}. \qquad (1.2)$$

Предположим, что завод с номером q поставил потребителю с номером p продукцию с номером i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в количестве a_i^q

тонн. Стоимость доставки одной тонны этой продукции указанному потребителю обозначим b_i^p. Тогда сумма (1.2) означает стоимость доставки всей продукции, поставленной заводом с номером q потребителю с номером p. Матрица C в этом случае даёт полную информацию о затратах всех заводов на доставку произведённой продукции потребителям.

Пример 3. Найти произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Размеры матриц A и B согласованы, так как число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B. По формуле (1.2) находим

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 4 & 1\cdot 2 - 2\cdot 2 + 3\cdot 3 - 3\cdot 4 \\ -1\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & -1\cdot 2 - 3\cdot 2 - 2\cdot 3 - 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 6\cdot 2 - 3\cdot 4 & 4\cdot 2 - 5\cdot 2 + 6\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -5 \\ 4 & -23 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}. \quad \text{Получили матрицу размера } (3\times 2).$$

В рассмотренном примере произведение матриц $B \cdot A$ не определено, так как размеры матриц B и A не согласованы.

Из определения произведения матриц следует, что если размеры матриц A, B и B, A согласованы, то в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если же A — квадратная, а E — единичная того же порядка, что и A, то очевидно, $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Можно доказать, что рассмотренные операции над матрицами обладают свойствами:

$$\left.\begin{array}{c} (\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A), \\ (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A, \\ A + B = B + A, \\ \lambda_1(A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B, \\ A(BC) = (AB)C, \\ A(B+C) = AB + AC, \\ (A+B)C = AC + BC, \\ A(\lambda_1 B + \lambda_2 C) = \lambda_1 AB + \lambda_2 AC, \\ (\lambda_1 B + \lambda_2 C)A = \lambda_1 BA + \lambda_2 CA. \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

Свойства (1.3) справедливы для любых действительных чисел λ_1 и λ_2 и любых матриц A, B и C, для которых определены соответствующие операции.

Пример 4. Найти матрицу $(2A+3B)\cdot C$, если

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя правила умножения матрицы на число и сложения матриц, находим

$$2A+3B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем

$$(2A+3B)C=\begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -2+20-10 & -4-5-2 & 0+15+4 \\ -9+32-10 & -18-8-2 & 0+24+4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 8 & -11 & 19 \\ 13 & -28 & 28 \end{bmatrix}.$$

Получена матрица размера (2×3).

1.2. Определители порядка n

1.2.1. Перестановки

Всякое расположение чисел $1,2,\ldots,n$ в некотором определённом порядке называется *перестановкой* из n чисел.

Перестановку будем обозначать $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Здесь каждое из α_k $(k=1,2,\ldots,n)$ является одним из чисел $1,2,\ldots,n$ и среди α_k нет одинаковых. Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

Выберем в перестановке $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ два числа α_i, α_j. Если большее из чисел α_i и α_j расположено левее меньшего, то говорят, что числа α_i и α_j образуют инверсию, или беспорядок. Перестановка называется *чётной*, если в ней имеется чётное число инверсий, и *нечётной*, если это число нечётно.

Например, перестановка (4,3,1,5,2) является чётной, так как в ней 6 инверсий: единица образует две инверсии (с четвёркой и тройкой), двойка образует три инверсии (с четвёркой, тройкой и пятёркой), тройка — одну инверсию (с четвёркой). После учёта предыдущих инверсий числа 4 и 5 инверсий не образуют. Всего имеем 2+3+1=6 инверсий. Перестановка (3,4,1,5,2) нечётна. В ней имеется 5 инверсий (подсчитайте самостоятельно).

Если в перестановке поменять местами два любых элемента, оставив все остальные на месте, то получим новую перестановку.

Это преобразование перестановки называется *транспозицией*. Покажем, что всякая транспозиция меняет чётность перестановки. Действительно, если переставили рядом стоящие элементы α_k и α_{k+1}, то число инверсий изменится на единицу, т.е. перестановка из чётной превратится в нечётную или наоборот. Переставить два элемента α_k и α_{k+m+1}, между которыми содержится m других элементов, можно, совершив $(2m+1)$ перестановок рядом стоящих элементов. При этом исходная перестановка изменит нечётное число раз свой характер, следовательно, перейдёт в перестановку из чётной в нечётную или из нечётной в чётную.

1.2.2. Понятие определителя порядка n

Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим произведение n элементов матрицы A, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_n}^{\alpha_n}. \tag{1.4}$$

Обозначим число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ через s, а в перестановке $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — через t. Заметим, что чётность числа $s+t$ не зависит от порядка сомножителей в этом произведении, так как при перестановке двух сомножителей каждая из перестановок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ перейдёт в перестановку противоположной чётности.

Два произведения вида (1.4) будем считать совпадающими, если они отличаются лишь порядком сомножителей, и различными, если они отличаются хотя бы одним сомножителем. Ясно, что число различных произведений вида (1.4) равно $n!$, т.е. числу всевозможных перестановок из чисел $1, 2, \dots, n$.

Определение. Определителем, или *детерминантом*, квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$ всех возможных различных произведений её элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца, в которой каждое произведение умножается на $(-1)^{s+t}$, где s — число инверсий в перестановке номеров строк, в которые входят сомножители, а t — число инверсий в перестановке из номеров столбцов.

Обозначается определитель так:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots a_{\beta_n}^{\alpha_n}.$$

Слагаемые этой суммы называются членами определителя, а числа a_i^j — его элементами.

Замечание. Как видим, определитель — это число. Если говорят о строках или столбцах определителя, то имеют в виду строки или столбцы матрицы, которой соответствует этот определитель.

1.2.3. Определители второго порядка

Из элементов квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$ можно образовать всего два различных произведения $a_1^1 a_2^2$ и $a_2^1 a_1^2$. Так как перестановка (1, 2) чётна, (2, 1) нечётна, а перестановка (1, 2) инверсий не имеет, то

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2.$$

Пример 1. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22$.

1.2.4. Определители третьего порядка

Из чисел 1, 2, 3 можно образовать $6 = 3!$ различных перестановок, три из них чётны, а три нечётны. Поэтому

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - \\ -a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3, \end{array}$$

поскольку перестановки $(1,2,3)$; $(2,3,1)$ и $(3,1,2)$ — чётны, $(3,2,1)$; $(2,1,3)$ и $(1,3,2)$ — нечётны, а перестановка $(1,2,3)$ инверсий не имеет.

Сумма D построена по правилу “треугольников”: первое слагаемое есть произведение элементов матрицы, расположенных на главной диагонали, а два других — в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, четвёртое слагаемое является произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, а два последних состоят из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. Три последних слагаемых взяты со знаком “минус”.

Пример 2. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = 13 + 17 + 49 + 91 + 17 - 7 = 180.$

1.2.5. Свойства определителей

Определение. Операция замены строк матрицы A её столбцами с теми же номерами, и наоборот, называется *транспонированием* матрицы. Полученная при этом матрица обозначается A^T и называется *транспонированной* по отношению к матрице A.

Свойство 1. При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения, т.е. $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Между множеством всех членов определителя матрицы A и определителя матрицы A^T можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу

$$(-1)^{s+t} a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n} \leftrightarrow (-1)^{t+s} \tilde{a}^{\beta_1}_{\alpha_1} \tilde{a}^{\beta_2}_{\alpha_2} \cdots \tilde{a}^{\beta_n}_{\alpha_n},$$

где через $\tilde{a}^{\beta_i}_{\alpha_j}$ обозначены элементы матрицы A^T. Но $a^{\alpha_j}_{\beta_i} = \tilde{a}^{\beta_i}_{\alpha_j}$ по определению транспонированной матрицы. Поэтому соответствующие члены определителей $\det A$ и $\det A^T$ равны между собой, а потому справедливо равенство $\det A = \det A^T$.

Из свойства 1 следует, что любое свойство, доказанное для строк, справедливо и для столбцов (и наоборот).

Свойство 2. (Свойство антисимметрии). При перестановке двух строк матрицы её определитель меняет знак.

Доказательство. Обозначим исходный определитель D_1. Переставим в нём строки с номерами i и k. Полученный определитель обозначим D_2. Каждому члену

$$(-1)^{s+t} a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots a^{\alpha_i}_{\beta_i} \cdots a^{\alpha_k}_{\beta_k} \cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n}$$

определителя D_1 поставим в соответствие член

$$(-1)^{s_1+t} \tilde{a}^{\alpha_1}_{\beta_1} \tilde{a}^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots \tilde{a}^{\alpha_k}_{\beta_i} \cdots \tilde{a}^{\alpha_i}_{\beta_k} \cdots \tilde{a}^{\alpha_n}_{\beta_n}$$

определителя D_2. Это соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Так как $\tilde{a}^{\alpha_k}_{\beta_i} = a^{\alpha_k}_{\beta_k}$, $a^{\alpha_i}_{\beta_i} = \tilde{a}^{\alpha_i}_{\beta_k}$, а числа s и s_1 имеют противоположную чётность, то соответствующие члены равны по модулю и отличаются знаком, следовательно, $D_1 = -D_2$.

Свойство 3. Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

Действительно, переставив две одинаковые строки, с одной стороны, мы ничего не изменим, т.е. $D_1 = D_2$. С другой стороны, по свойству 2 имеет место $D_1 = -D_2$, следовательно, $D_1 = -D_1$, а потому $D_1 = 0$.

Свойство 4. (Линейное свойство). Если все элементы i-й строки матрицы A представлены в виде $a^i_j = \lambda b_j + \mu c_j$, где $j = 1, 2, \ldots, n$; i — фиксировано, то $\det A = \lambda \det B + \mu \det C$, где матрица B получена из A заменой i-й строки числами b_j, а C числами c_j.

Доказательство. Каждый член определителя D будет содержать, причём один, множитель вида $(\lambda b_j + \mu c_j)$. Раскрываем и группируем произведения, содержащие λb_j, и отдельно — содержащие μc_j. После вынесения множителя λ из первой группы и множителя μ — из второй группы получим требуемое.

Свойство 5. Если матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A умножением всех её элементов i-й строки на число λ: $\tilde{a}_i^j = \lambda a_i^j$, $j = \overline{1, n}$, i — фиксировано, то $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

Заметим, что $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Справедливость свойства следует из свойства 4 при $\mu = 0$.

Свойство 6. Определитель матрицы, содержащей две пропорциональные строки, равен нулю.

Справедливость свойства 6 следует из свойств 3 и 5.

Свойство 7. Если к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженной на некоторое число, то получим матрицу с тем же определителем.

Доказательство. Вновь полученный определитель по свойству 4 можно представить в виде суммы двух определителей, первый из которых будет исходным, а второй равен нулю, так как две строки его пропорциональны.

Свойство 8. Если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то её определитель равен нулю.

Справедливость свойства следует из определения определителя.

Свойство 9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Предлагается проверить справедливость этой формулы для определителей второго порядка самостоятельно.

1.2.6. Понятия алгебраического дополнения и минора и связь между ними

Возьмём какой-нибудь элемент a_i^j матрицы, составим сумму всех тех членов определителя, в которые входит этот элемент в качестве сомножителя, и вынесем его за скобки. Выражение, оставшееся в скобках, называется *алгебраическим дополнением* элемента a_i^j и обозначается A_i^j.

Дан определитель матрицы порядка n. Определитель матрицы $(n-1)$ порядка, полученной из данной вычёркиванием её строки с номером j и столбца с номером i, называется *минором* $n-1$ порядка и обозначается M_i^j.

Для определителя третьего порядка можем записать

$$D = a_1^1(a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3) + a_2^1(a_3^2 a_1^3 - a_1^2 a_3^3) + a_3^1(a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3).$$

Поэтому $A_1^1 = (a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3) = M_1^1$, $A_2^1 = (a_3^2 a_1^3 - a_1^2 a_3^3) = -M_2^1$, $A_3^1 = (a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3) = M_3^1$.

Следовательно, для определителя третьего порядка имеет место

$$D = a_1^1 M_1^1 - a_2^1 M_2^1 + a_3^1 M_3^1.$$

Теорема 1. Алгебраическое дополнение A_i^j и минор M_i^j связаны соотношением

$$A_i^j = (-1)^{i+j} M_i^j. \tag{1.5}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение для случая $i = j = 1$. Алгебраическое дополнение A_1^1 представляет сумму всех возможных произведений $(n-1)$ элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, кроме первой строки и первого столбца, причем произведение $a_2^{\alpha_2} \cdot a_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ берется со знаком $(-1)^{N(1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)}$, где $N(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — число инверсий в перестановке $1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Эти же произведения, и только они, входят в разложение минора M_1^1 (как определителя порядка $n-1$) со знаком $(-1)^{N(\alpha_2-1,\alpha_3-1,\ldots,\alpha_n-1)}$, так как порядковые номера строк и столбцов в миноре M_1^1 меньше на единицу по сравнению с их номерами в определителе D, но очевидно, что $N(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = N(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n) = N(\alpha_2-1,\alpha_3-1,\ldots,\alpha_n-1)$. Поэтому произведения $a_2^{\alpha_2} \cdot a_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ входят в A_1^1 и M_1^1 с одинаковыми знаками.

Рассмотрим общий случай. Возьмем элемент a_i^j определителя. Переставляя $(i-1)$ раз столбцы и $(j-1)$ раз строки, переведем этот элемент в левый верхний угол. В результате получим новый определитель $\tilde{D}$, связанный со старым соотношением $\tilde{D} = (-1)^{i+j} D$. Поэтому $\tilde{A}_1^1 = (-1)^{i+j} A_i^j$. (Все обозначения с “волной” относятся к определителю $\tilde{D}$). Очевидно, $M_i^j = \tilde{M}_1^1$. На основании доказанного (для случая $i = j = 1$) $\tilde{M}_1^1 = \tilde{A}_1^1$. Поэтому $M_i^j = (-1)^{i+j} A_j^i$ или, что то же самое, $A_i^j = (-1)^{i+j} M_i^j$. Теорема доказана.

Теорема 2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы, т.е.

$$D = a_1^j A_1^j + a_2^j A_2^j + \ldots + a_n^j A_n^j, \tag{1.6}$$

j — фиксировано.

Доказательство. Каждый член определителя входит в сумму (1.6) только один раз, так как каждый элемент из j-й строки войдёт в какой-нибудь член определителя в качестве только одного из сомножителей, т.е. сумма (1.6) состоит из тех же слагаемых, что и определитель.

О соотношении (1.6) говорят, что определитель D разложен по элементам j-й строки.

Теорема 3. Сумма всех произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Составим сумму $s = a_1^j A_1^i + a_2^j A_2^i + \ldots + a_n^j A_n^i$ произведений элементов j-й строки на алгебраические дополнения элементов i-й строки. Сумма s есть разложение по j-й строке определителя, у которого равны строки с номерами i и j.

Используя свойство 7 и формулы (1.5) и (1.6), вычисление определителя порядка n можно свести к вычислению одного определителя порядка $(n-1)$, для чего в какой-либо строке (или столбце) следует получить $(n-1)$ нулей, а затем разложить определитель по этой строке или столбцу. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 3. Найти определитель $D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

(прибавили ко второй строке третью, умноженную на 2, а из первой вычли третью, умноженную на 2). Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$D = 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 0 & -9 & -16 \\ 0 & -27 & -42 \end{vmatrix} = 20(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -16 \\ -27 & -42 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 \cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = -360 \cdot (21 - 24) = 1080.$$

1.2.7. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* к заданной квадратной матрице A, если
$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{1.7}$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель $\det A \neq 0$.

В случае матриц размера 1×1 вида (a) и (b) можем записать $(a)(b) = (ab)$. Поэтому, если (b) — обратная к (a) матрица, то $(a)(b) = (ab) = (1)$ и, следовательно, $ab = 1$, или $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Таким образом, для матриц размера 1×1 получаем $(a)^{-1} = (a^{-1})$. Так как для матриц размера 1×1 определитель $\det(a) = a$, то из полученного выше сотношения $ab = 1$ следует, что матрица (a) размера 1×1 имеет обратную тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, то есть её определитель отличен от нуля. Единственность обратной матрицы в этом случае следует из единственности операции деления чисел.

Из (1.7) и по свойству 9 определителей находим: $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$. Следовательно, $\det A \neq 0$. Таким образом, если матрица имеет обратную, то она невырождена. Существование у каждой невырожденной матрицы обратной для матриц размера 1×1 показана выше. В общем случае имеем.

Теорема. Всякая невырожденная матрица $A = [a_i^j]$ размера $n \times n$ имеет единственную обратную матрицу $B = [b_i^j]$, причём, для $n \geq 2$
$$b_i^j = \frac{A_j^i}{D}, \tag{1.8}$$
где A_j^i — алгебраическое дополнение элемента a_j^i определителя $D = \det A$.

Матрицу $A^* = [A^{*j}{}_i]$, где $A^{*j}{}_i = A_j^i$, называют *присоединённой* для матрицы A.

Доказательство единственности матрицы A^{-1} опустим, проверим лишь справедливость формулы (1.8). Через c_p^q обозначим элементы матрицы $A \cdot B$. По определению произведения матриц (см. формулу (1.2)) находим
$$c_p^q = \sum_{i=1}^{n} a_i^q b_p^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^q A_i^p}{D} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} a_i^q A_i^p. \tag{1.9}$$

В формуле (1.9) записана сумма произведений элементов строки с номером q определителя $\det A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов строки с номером p. Если $p \neq q$, то по теореме 3 из п.1.2.6 эта сумма равна нулю, т.е. $c_p^q = 0$ при $p \neq q$. Если $p = q$, то по формуле (1.6) сумма (1.9) равна определителю $D = \det A$, следовательно, $c_p^p = 1$. Таким образом:
$$c_p^q = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q, \\ 1, & \text{если } p = q, \end{cases}$$

т.е. матрица $C = AB$ единичная. Поэтому матрица $B = [b_i^j]$ является обратной к A. Аналогично можно показать, что $BA = E$.

Пример 4. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Находим сначала определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Матрица A невырождена, а потому имеет обратную. Находим элементы присоединённой матрицы A^*:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 2, & A_1^2 = -12, & A_1^3 = 10, \\ A_2^1 = -2, & A_2^2 = 17, & A_2^3 = -14, \\ A_3^1 = 0, & A_3^2 = -2, & A_3^3 = 2. \end{array}$$

Используя формулу (1.8), записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & \dfrac{17}{2} & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности вычисления матрицы A^{-1} нужно перемножить матрицы A и A^{-1}. Если в результате получится единичная матрица, то обратная матрица найдена верно.

1.2.8. Решение матричных уравнений

Пусть матрица A невырожденная. Найдём матрицы X и Y из уравнений

$$AX = B; \tag{1.10}$$

$$YA = B. \tag{1.11}$$

Так как матрица A невырождена, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим слева обе части матричного равенства (1.10) на матрицу A^{-1}.

Получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B,$$
$$EX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B.$$

Аналогично из равенства (1.11) находим

$$Y = BA^{-1}.$$

Заметим, что в силу некоммутативности операции умножения матриц решения матричных уравнений (1.10) и (1.11) различны. Если матрица A невырождена, то каждое из этих уравнений имеет единственное решение.

Пример 5. Дано матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X.

Решение. Находим $\det A = 1 \neq 0$. Так как матрица A невырождена, то $X = A^{-1}B$.

Для отыскания A^{-1} находим элементы присоединённой матрицы:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 3, & A_1^2 = -4, & A_1^3 = -11, \\ A_2^1 = -2, & A_2^2 = 3, & A_2^3 = 9, \\ A_3^1 = 0, & A_3^2 = 0, & A_3^3 = 1. \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Предлагаем самостоятельно убедиться в правильности решения, найдя произведение матриц A и X. В результате должна получиться матрица B.

1.3. Линейные пространства и некоторые другие математические структуры

Из элементов множеств можно образовывать различные конструкции. Например, семейсва подмножеств с определёнными свойствами, одну или несколько операций над некоторым количеством элементов из множества. Множество с введённой на нём конструкцией из его элементов называется *математической структурой.* Мы познакомимся с некоторыми важнейшими структурами, часто встречающимися в различных разделах математики и её приложениях.

1.3.1. Определение линейного пространства

Определение. Множество R элементов произвольной природы, впредь называемых векторами и обозначаемых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, называется линейным пространством, если:

1) имеется правило (внутренняя операция), позволяющее любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R сопоставить третий элемент $\mathbf{z}$ из R, называемый суммой элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначаемый $\mathbf{x}+\mathbf{y}$;

2) имеется правило (внешняя операция), позволяющее найти для каждого действительного или комплексного числа α и любого элемента $\mathbf{x}$ из R другой элемент $\mathbf{y}$ из R, называемый произведением $\mathbf{x}$ на число α и обозначаемый $\alpha\mathbf{x}$.

При этом правила (операции) 1 и 2 должны удовлетворять следующим условиям (аксиомам):

1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R (закон коммутативности);

2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из R (закон ассоциативности);

3) существует в R элемент $\mathbf{0}$ (нуль-вектор) такой, что $\mathbf{x}+ +\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R;

4) для каждого $\mathbf{x}$ из R существует в R элемент $\mathbf{y}$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ (элемент $\mathbf{y}$ называется противоположным элементу $\mathbf{x}$);

5) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R;

6) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R и любых действительных чисел α и β;

7) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ для любых чисел α и β и любого $\mathbf{x}$ из R;

8) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любого числа α.

Исходя из определения линейного пространства, можно доказать, что:

1) во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент;

2) для каждого элемента $\mathbf{x}$ имеется единственный противоположный элемент $\mathbf{y}$, который можно представить в виде $\mathbf{y}=(-1)\mathbf{x}$;

3) для всякого $\mathbf{x}$ из R выполняется $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Докажем, например, утверждение 1). Предположим, что в R существует два нуль-вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Положив в третьей аксиоме определения линейного пространства $\mathbf{x} = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$, получим $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$. Если же положить $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_1$, то $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Но по первой аксиоме справедливо $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$, т.е. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

С одним из примеров линейных пространств вы уже знакомы. Это множество векторов, которое изучено в средней школе. Выполнимость аксиом 1 — 8 там установлена. Линейным пространством является множество всех действительных чисел с операциями сложения и умножения (заметим, что аксиомы 7 и 8 при этом совпадают). Линейное пространство образует также множество всех матриц одного и того же размера с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число, определёнными в пп. 1.1.3 и 1.1.4. Все аксиомы 1 — 8 при этом выполнены, так как они справедливы для чисел.

Наиболее часто применяются линейные пространства, элементами которых являются матрицы размера $[n \times 1]$ либо $[1 \times n]$. Эти линейные пространства называют *арифметическими* и обозначают R^n, либо R_n. В линейном арифметическом пространстве R^n матриц размера $[n \times 1]$ вектором является столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)^T,$$

а в арифметическом пространстве R_n матриц размера $[1 \times n]$

вектором является строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Над векторами-столбцами и векторами-строками вводят операции сложения и умножения на число как над соответствующими матрицами, т.е. если

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ обозначают $\mathbf{0}$ и называют нулевым.

Векторы-строки и векторы-столбцы, как мы увидим позднее, отличаются тем, что преобразуются по разным законам при переходе от одной системы координат к другой. В вопросах же, не связанных с преобразованием систем координат, мы их различать не будем и для краткости те и другие будем записывать в виде строки, опуская знак транспонирования, и обозначать R^n.

Пример 1. В арифметическом линейном пространстве R^3 дано три вектора $\mathbf{a} = (1; 2; -2)$, $\mathbf{b} = (0; -1; 3)$, $\mathbf{c} = (-2; 3; -4)$. Найти вектор $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем: $2\mathbf{a} = (2; 4; -4)$, $4\mathbf{b} = (0; -4; 12)$, $-3\mathbf{c} = (6; -9; 12)$, $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = (8; -9; 20)$.

1.3.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Определение. Вектор $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$. Возникает вопрос о справедливости обратного утверждения, то есть следует ли из равенства $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$ утверждение, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Оказывается, что для некоторых наборов векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ это справедливо, а для некоторых нет. В соответствии с этим системы (наборы) векторов линейного пространства подразделяются на два класса: линейно зависимых (ЛЗ) систем и линейно независимых (ЛНЗ) систем.

Определение. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{1.12}$$

Если же соотношение (1.12) выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, $n \geq 2$, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов был линейной комбинацией других.

Доказательство. Пусть система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима. Тогда имеет место соотношение (1.12), причём среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть не нули. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Из (1.12) находим $\mathbf{a}_1 = \left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_2 + \left(-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_3 + \ldots + \left(-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_n$, т.е. вектор $\mathbf{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ — линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$, т.е. $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ или $(-1)\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$. Так как среди чисел $-1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть ненулевой (-1), то система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима.

По доказанной теореме векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ примера 1 линейно зависимы, так как вектор $\mathbf{d}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Следующие теоремы предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Теорема 2. Система векторов, состоящая из одного вектора a, линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой $(a \neq 0)$.

Теорема 3. Система векторов, состоящая из одного вектора a, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой $(a = 0)$.

Теорема 4. Всякая система векторов, содержащая нульвектор, линейно зависима.

Теорема 5. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

1.3.3. Размерность линейных пространств. Базис и координаты

Определение. Линейное пространство называется n-мер-ным, если в нём существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов, линейно зависима.

Если в линейном пространстве существует бесконечная система линейно независимых векторов, то пространство называется *бесконечномерным.* Мы в данном разделе будем изучать лишь конечномерные линейные пространства размерности n и обозначать их R^n (либо R_n).

Определение. Любая линейно независимая система, состоящая из n векторов n-мерного линейного пространства R^n, называется *базисом* этого пространства, а входящие в него векторы называются *базисными.*

Теорема 4. Любой вектор линейного пространства R^n можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов фиксированного базиса.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — какой-либо базис R^n и $\mathbf{x}$ — произвольный вектор этого пространства. Система векторов $\mathbf{x}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, как система, состоящая из $(n+1)$ вектора n-мерного пространства, линейно зависима, а потому найдутся такие числа λ_0, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n, среди которых есть отличные от нуля, что имеет место равенство

$$\lambda_0 \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{f}_n = \mathbf{0}. \tag{1.13}$$

Число $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ были бы линейно зависимы, что невозможно, поскольку они образуют базис. Поэтому из (1.13) следует

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) \mathbf{f}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \mathbf{f}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right) \mathbf{f}_n, \tag{1.14}$$

т.е. вектор $\mathbf{x}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Докажем единственность линейной комбинации (1.14). Предположим, что $\mathbf{x}$ представлен двумя линейными комбинациями вида

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{f}_n,$$
$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{f}_1 + \beta_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{f}_n.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{f}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{f}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{f}_n = \mathbf{0}. \tag{1.15}$$

Так как векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ линейно независимы, то из (1.15) следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\ldots$, $\alpha_n = \beta_n$. Теорема доказана.

Определение. Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\mathbf{x}$ выражается через базисные векторы, называются координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно данного базиса.

Таким образом, если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — базис и $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + x_n \mathbf{f}_n$, то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса. Пишут $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из теоремы 4 следует, что координаты для любого вектора $\mathbf{x}$ относительно данного базиса существуют и определяются единственным образом.

Теорема 5. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число.

Теорему предлагается доказать самостоятельно.

Из этой теоремы следует, что после выбора базиса в R^n операции сложения и умножения вектора на число совершаются по тем же правилам, что и в арифметическом линейном пространстве.

1.3.4. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре и её следствия

Рассмотрим систему векторов $a^1, a^2, \ldots, a^m$ из арифметического пространства R_n и пусть нам известны координаты этих векторов относительно некоторого базиса, то есть мы можем записать $a^i = (a^i_1, a^i_2, \ldots, a^i_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Составим из этих координат матрицу A размера $(m \times n)$

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{bmatrix}.$$

Её строки являются векторами арифметического линейного пространства R_n. Заметим, что и столбцы этой матрицы можно интерпретировать как векторы арифметического пространства R^m.

Построенная матрица позволяет выяснить является ли данная система векторов линейно зависимой или нет. Делается это с помощью понятия ранга матрицы, к изучению которого мы и приступаем.

Выделим в этой матрице какие-либо k строк и k столбцов. Определитель матрицы, составленной из элементов, находящихся на их пересечении, называется минором k-го порядка данной матрицы.

Определение. Число r называется рангом матрицы A, если:

1) в матрице A имеется минор порядка r, отличный от нуля;

2) все миноры порядка $(r + 1)$ и выше, если они существуют, равны нулю.

Пишут $\mathrm{rang} A = r$, или $r_A = r$.

Другими словами, ранг матрицы — это наивысший порядок миноров матрицы, отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению полагается равным нулю.

Любой минор порядка r, отличный от нуля, матрицы ранга r называется *базисным*, а столбцы и строки, его составляющие, называются *базисными.* Матрица может иметь несколько базисных миноров. Говорить о базисных строках и столбцах можно лишь после выбора базисного минора.

Теорема 6 (о базисном миноре). Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией её базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пусть матрица A размера $(m \times n)$ имеет ранг, равный r, и её базисный минор расположен в верхнем левом углу. Если это не так, то путём перестановок столбцов и строк можно базисный минор переместить в левый верхний угол, не изменяя ранга матрицы, поскольку соответствующие миноры могут либо отличаться знаками, либо совпадать. Пусть p и q — любые числа, удовлетворяющие условиям $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$. Образуем определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_r^1 & a_q^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_r^2 & a_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^r & a_2^r & \dots & a_r^r & a_q^r \\ a_1^p & a_2^p & \dots & a_r^p & a_q^p \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю: при $p \le r$ как определитель, имеющий две одинаковые строки; при $q \le r$ как определитель с двумя одинаковыми столбцами, а при $p > r$ и $q > r$ как минор порядка $r+1$ матрицы ранга r. Разложим этот определитель по элементам последней строки. Получим

$$a_1^p A_1^p + a_2^p A_2^p + \dots + a_r^p A_r^p + a_q^p A_q^p = 0. \tag{1.16}$$

Число $A_q^p \neq 0$, так как A_q^p есть базисный минор матрицы. Числа A_i^p не зависят от выбора p, а число A_q^p не зависит от значений p и q. Обозначим $\lambda_q^i = -\dfrac{A_i^p}{A_q^p}$. Тогда из (1.16) находим $a_q^p = \lambda_q^1 a_1^p + \lambda_q^2 a_2^p + \dots + \lambda_q^r a_r^p$ для $p = 1, 2, \dots, m$. Последнее и означает, что столбец с номером q есть линейная комбинация базисных столбцов.

Аналогично, разлагая определитель D по элементам последнего столбца, можно доказать, что строка с номером p является линейной комбинацией базисных строк. Так как p и q произвольны, то теорема доказана.

Следствиями теоремы о базисном миноре и теоремы 1 являются следующие утверждения.

Следствие 1. Если ранг r матрицы меньше числа её строк (столбцов), то её строки (столбцы) линейно зависимы. Если же число r равно числу строк, то строки линейно независимы.

Следствие 2. Определитель $\det A$ равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы или, что то же, одна из её строк (столбцов) является линейной комбинацией других.

Доказательство. Пусть $\det A = 0$. Тогда ранг матрицы A меньше n, а потому по следствию 1 её строки (столбцы) линейно зависимы.

С другой стороны, пусть строки определителя линейно зависимы, т.е. одна из его строк является линейной комбинацией других, например, k-я строка является линейной комбинацией строк $j_1, j_2, \dots, j_s$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Вычитая из k-й строки строку j_1, умноженную на λ_1, строку j_2, умноженную на λ_2, $\ldots$, строку j_s, умноженную на λ_s, получим определитель, равный исходному, k-я строка которого состоит только из нулей, но такой определитель равен нулю.

Следствие 3. Если к строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число, то получим матрицу того же ранга.

Следствие 4. Если в матрице зачеркнуть строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, то получим матрицу того же ранга.

Следствие 5. Векторы $\mathbf{x}_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, арифметического линейного пространства R_n линейно зависимы, если $\operatorname{rang}[\alpha_i^j] < m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если же $\operatorname{rang}[\alpha_i^j] = m$, то векторы $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, линейно независимы.

Это перефразировка следствия 1.

Следствие 6. Арифметическое линейное пространство R_n является n-мерным.

Доказательство. Любая совокупность векторов

$$\mathbf{x}_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n),\ i = \overline{1, n+1},$$

по следствию 5 линейно зависима, так как очевидно, что $\operatorname{rang}[\alpha_i^j] < n + 1$.

Совокупность векторов

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{array} \tag{1.17}$$

линейно независима также по следствию 5, так как

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = n.$$

Таким образом, в арифметическом пространстве R_n имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система из $n + 1$ векторов линейно зависима, т.е. арифметическое пространство R^n n-мерно.

Совокупность векторов (1.17) образует базис в R^n. Этот базис называют *каноническим.*

Следствие 5 легко распространить на любые n-мерные линейные пространства.

Следствие 7. Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ линейного пространства R^n линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг r матрицы, в строках которой записаны координаты этих векторов относительно любого базиса, меньше m. Необходимым и достаточным условием их линейной независимости является равенство $r = m$.

Приведём несколько примеров практического отыскания ранга матрицы.

Пример 2. Найти ранг следующих матриц:

$$A = \left[\begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 2 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ \hline \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{c|cccc|} \cline{2-5} 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-5} \end{array}\right].$$

Решение. Ранг каждой из этих матриц не может быть больше четырёх, так как в этих матрицах по четыре строки, и не может быть меньше четырёх, так как обведённые миноры четвёртого порядка не равны нулю. Поэтому $r_A = r_B = 4$.

Применяя следствия 3 и 4, всегда можно преобразовать матрицу, не меняя её ранга так, чтобы легко было увидеть базисный минор и тем самым определить ранг матрицы.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Решение. Получим в первом столбце матрицы A нули, вычитая первую её строку, умноженную на соответствующие числа, из всех остальных: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

В матрице A_2 вторая и четвёртая строки пропорциональны, поэтому вычёркивание одной из них не изменит ранга матрицы. Вычеркнем четвёртую строку. Пятая строка лишь знаком отличается от суммы второй и третьей, а потому её также можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы.

Приходим к матрице вида

$$A_3 = \begin{bmatrix} \overline{|1} & \overline{-1} & \overline{2|} & 3 & 4 \\ |0 & 3 & -5| & -4 & -8 \\ \underline{|0} & \underline{1} & \underline{3|} & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Так как обведённый минор третьего порядка отличен от нуля, то $\operatorname{rang} A_3 = \operatorname{rang} A = 3$.

Пример 4. Докажите, что третья строка матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух строк. Найдите коэффициенты этой комбинации.

Решение. Ранг матрицы A не меньше двух, так как её минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$. Вычислим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -12 & -39 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -4 & -13 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы A равен двум и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ — её базисный минор. Третья строка по теореме о базисном миноре является линейной комбинацией первых двух. Обозначим коэффициенты этой комбинации через λ_1 и λ_2. Тогда $(17, 22, 29) = \lambda_1(1, 2, 4) + \lambda_2(5, 6, 7)$, следовательно:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 17, \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 22, \\ 4\lambda_1 + 7\lambda_2 = 29. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

1.3.5. Изоморфизм линейных пространств

Мы уже отмечали, что после выбора базиса в n-мерном линейном пространстве любой вектор можно задать в виде упорядоченной совокупности n чисел, т.е. как вектор арифметического n-мерного пространства. Таким образом, все линейные пространства одной размерности устроены одинаково. Этот факт лежит в основе понятия *изоморфизма* линейных пространств.

Определение. Если между векторами линейных пространств R и R' можно установить взаимно однозначное соответствие, такое, что из $\mathbf{x}_1 \in R \to \mathbf{y}_1 \in R'$, $\mathbf{x}_2 \in R \to \mathbf{y}_2 \in R'$ для любых α и β следует, что $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \to \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2$, то говорят, что пространства R и R' *изоморфны*, а само соответствие называется *изоморфизмом.*

Легко показать, что при изоморфизме нулевому вектору пространства R соответствует нулевой вектор из R'. Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ из R линейно независимы, то и соответствующие им векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$ в R' также линейно независимы и наоборот. Поэтому изоморфные пространства имеют одинаковую размерность. Обратно, любые два n-мерных линейных пространства R и R' изоморфны, причём изоморфизмом будет соответствие, сопоставляющее векторам из R векторы из R' с такими же координатами (относительно любых фиксированных базисов пространств R и R'). Таким образом, любое линейное пространство R^n изоморфно n - мерному арифметическому линейному пространству, т.е. из всех конечномерных линейных пространств достаточно изучить одно из них, например, арифметическое пространство.

1.3.6. Подпространства

Пусть некоторая совокупность $\mathcal{L}$ векторов линейного пространства R обладает свойством: любая линейная комбинация двух произвольных векторов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$. Тогда линейные операции (сложения и умножения на число) над векторами, определенные в R, не выводят за пределы $\mathcal{L}$. В этом случае говорят, что $\mathcal{L}$ замкнуто относительно линейных операций из R. Поэтому множество $\mathcal{L}$, рассматриваемое в качестве самостоятельного объекта, с линейными операциями, определенными так же как и в R, является линейным пространством, которое называют подпространством линейного пространства R.

Пусть имеем некоторую систему векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ $\ldots$из линейного пространства R. *Линейной оболочкой* этой системы векторов называется множество всех их линейных комбинаций (обозначается $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка образует подпространство в R.

Теорема 7 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ равна числу r, если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ имеется линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, а любая подсистема из $(r+1)$ векторов линейно зависима.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$, $(r \leq m)$ линейно независимы, а любая совокупность из $(r+1)$ векторов, взятых из $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, линейно зависима. Тогда векторы $\mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{x}_{r+2}, \ldots, \mathbf{x}_m$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Любой вектор $\mathbf{z}$ из $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, а потому и векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Докажем, что любые $(r+1)$ векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{r+1}$ из $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ линейно зависимы. Каждый вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Составим матрицу A, строки которой образуют коэффициенты этих линейных комбинаций. В матрице A имеется r столбцов и $(r+1)$ строк. Следовательно, её ранг не больше r. Поэтому её строки линейно зависимы по теореме о базисном миноре, что означает линейную зависимость векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{r+1}$.

Итак, в $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ есть линейно независимая система из r векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$, а любая система из $(r+1)$ векторов линейно зависима. По определению размерности пространство $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ r-мерно, а векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ образуют его базис. Теорема доказана.

Из этой теоремы и следствия 7 из теоремы о базисном миноре следует, что размерность линейной оболочки векторов из R_n равна рангу матрицы, составленной из координат этих векторов относительно любого базиса.

1.3.7. Аффинные пространства

При решении различного рода геометрических задач часто применяется математическая структура — *аффинное пространство*, с которым мы познакомимся в этом подразделе.

Пусть дано множество A элементов произвольной природы, которые мы будем называть точками, и линейное пространство R. Множество A предполагается таким, что каждой упорядоченной паре точек M, N из A можно сопоставить единственный вектор $\mathbf{x}$ из R. Упорядоченную пару точек (M, N) будем называть *вектором*, обозначать $\mathbf{MN}$, считать, что вектор $\mathbf{MN}$ соответствует вектору $\mathbf{x}$ и записывать $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$. При этом точка M называется *началом*, а точка N — *концом* вектора $\mathbf{MN}$. Векторы $\mathbf{MN}$ и $\mathbf{PQ}$, которым соответствует один и тот же вектор $\mathbf{x}$, будем считать равными, отождествляя их между собой, и обозначать $\mathbf{MN} = \mathbf{PQ}$.

Если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{MK} \to \alpha\mathbf{x}$, то полагаем $\mathbf{MK} = \alpha\mathbf{MN}$. Если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{PQ} \to \mathbf{y}$, $\mathbf{TB} \to (\mathbf{x}+\mathbf{y})$, то полагаем $\mathbf{TB} = \mathbf{MN} + \mathbf{PQ}$. Таким образом, операции сложения "новых"векторов и умножения вектора на число введены через соответствующие операции в пространстве R.

Закон соответствия пар точек из A и векторов из R предполагается удовлетворяющим следующим двум условиям:

1) для любой точки M из A и любого вектора $\mathbf{x}$ из R существует

точка N из A такая, что $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$;

2) для любых точек M, N и P из A имеет место равенство

$$\mathbf{MN} + \mathbf{NP} = \mathbf{MP}. \tag{1.18}$$

Построенная таким образом математическая структура, состоящая из множества точек с присоединённым к нему линейным пространством и соответствием, удовлетворяющим указанным двум свойствам, называется *аффинным пространством*.

Аффинное пространство A называется n-мерным и обозначается A_n, если пространство R n-мерно.

Очевидны следующие простые утверждения.

1. Для любой точки M из A вектору $\mathbf{MM}$ соответствует $\mathbf{0}$ из R.

Действительно, пусть $\mathbf{NM} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{MM} \to \mathbf{y}$ из R. Так как $\mathbf{NM} = \mathbf{NM} + \mathbf{MM} \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ из R.

2. Для любых точек M и N из A имеет место равенство $\mathbf{MN} = (-1)\mathbf{NM}$.

Действительно, если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{NM} \to \mathbf{y}$, то $\mathbf{MN} + \mathbf{NM} = \mathbf{MM} \to \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, т.е. $\mathbf{MN} \to (-1)\mathbf{y}$ и $\mathbf{MN} = (-1)\mathbf{NM}$. Пишут также $\mathbf{MN} = -\mathbf{NM}$.

Зафиксируем какую-нибудь точку O в A_n и построим векторы $\mathbf{OK}_i = \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1,n}$, соответствующие векторам базиса пространства R^n. Полученная конструкция называется *афинной системой координат*. Точку O называют её *началом*.

Пусть M — любая точка A_n. Вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Координатами точки M называются координаты её радиус-вектора, т.е. если $\mathbf{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$, то точка M имеет координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ относительно данной системы координат. Существование и единственность координат вектора $\mathbf{OM}$, а потому и координат точки относительно данной системы координат, вытекает из соответствующего утверждения для R^n. Пишут $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Решим следующую задачу. Зная координаты точек M и N относительно данной системы координат, найти координаты вектора $\mathbf{MN}$.

Решение. По формуле (1.18) находим $\mathbf{OM} + \mathbf{MN} = \mathbf{ON}$. Отсюда $\mathbf{MN} = \mathbf{ON} - \mathbf{OM}$, т.е. координаты вектора $\mathbf{MN}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

1.3.8. Евклидовы и нормированные линейные пространства

Определение. Говорят, что в линейном пространстве R введено понятие длины вектора или нормы, если каждому $\mathbf{x}$ из R поставлено в соответствие число, обозначаемое символом $||\mathbf{x}||$ (иногда $|\mathbf{x}|$) такое, что:

1) $||\mathbf{x}|| \geq 0$ для каждого $\mathbf{x}$ из R; из условия $||\mathbf{x}|| = 0$ следует $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$ для любых чисел α и любого вектора $\mathbf{x}$ из R;

3) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (неравенство Минковского).

Линейное пространство в этом случае называется *нормированным.*

Понятие нормы или модуля вектора можно ввести многими способами. Мы сделаем это с помощью понятия *скалярного произведения.*

Определение. Предположим, что имеется некоторое правило, позволяющее любой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из линейного пространства R сопоставить число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Это число называется скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если выполнены следующие условия:

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R;

б) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из R;

в) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любого числа λ и любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R;

г) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Линейное пространство R называется *евклидовым*, если в нём введено понятие скалярного произведения.

Через E_n будем обозначать n-мерное евклидово пространство.

Евклидово линейное пространство называют также *унитарным*, или *предгильбертовым.*

Пусть $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — два произвольных вектора из арифметического пространства R^n. Положим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \tag{1.19}$$

При этом условия а) — г), очевидно, выполнены. Тем самым арифметическое пространство превращено в евклидово.

Определение. Длиной вектора $\mathbf{x}$ (модулем, нормой) в евклидовом пространстве называется число

$$|\mathbf{x}| = ||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Если скалярное произведение введено соотношением (1.19), то $|\mathbf{x}| = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + \ldots + {\alpha_n}^2}$.

Теорема 8. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E_n справедливо неравенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{1.20}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}$, где λ — действительное число. При любом λ по свойству скалярного произведения $(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$. Отсюда

$$\lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0. \tag{1.21}$$

Квадратный трёхчлен в (1.21) не может иметь различных действительных корней, так как в противном случае он не сохранял бы знака для всех значений λ. Поэтому дискриминант трёхчлена не положителен, т.е. $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})\le 0$ или $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$. Извлекая квадратный корень, приходим к (1.20).

Соотношение (1.20) называют *неравенством Коши-Буняковского.* Из него следует, что $-1\le\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}\le 1$.

Это даёт основание ввести понятие угла φ между ненулевыми векторами соотношением $\cos\varphi=\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$.

Определение. Два ненулевых вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E_n называются ортогональными, если $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$.

Теорема 9. Всякая система ненулевых попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ линейно независима (такая система векторов называется ортогональной).

Доказательство. Предположим, что

$$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\ldots+c_m\mathbf{x}_m=\mathbf{0}. \tag{1.22}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{x}_j$. Получим $c_j(\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_j)=0$. Так как $(\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_j)>0$, то $c_j=0$. Полагая $j=1,2,\ldots,m$, получаем, что (1.22) возможно только в случае $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$, следовательно, векторы $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ линейно независимы.

Определение. Базис линейного пространства E_n называется ортогональным, если его векторы образуют ортогональную систему. Базис называется ортонормированным, если он ортогональный, а все его векторы имеют длину, равную единице.

Если скалярное произведение в E_n введено соотношением (1.19), то векторы

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0);\\
&\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}$$

образуют ортонормированный базис.

От произвольного базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейного пространства E_n легко перейти к ортогональному $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, применяя процесс ортогонализации, заключающийся в следующем. Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Вектор $\mathbf{b}_2$ выберем в виде $\mathbf{b}_2 = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$. Так как $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, а векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы, то $\mathbf{b}_2 \neq 0$ при любом α_1. Число α_1 подберём так, чтобы вектор $\mathbf{b}_2$ был ортогонален $\mathbf{b}_1$, т.е. чтобы было $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) = 0$. Это даёт $\alpha_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0$. Отсюда $\alpha_1 = -\dfrac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$.

Далее, положим $\mathbf{b}_3 = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$. Поскольку $\mathbf{b}_3$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, то $\mathbf{b}_3 \neq 0$ при любых β_1 и β_2. Числа β_1 и β_2 подберём так, чтобы вектор $\mathbf{b}_3$ был ортогонален векторам $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Требуя это, получим $\beta_1 = -\dfrac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, $\beta_2 = -\dfrac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}$.

Продолжая этот процесс, через n шагов получим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$.

Покажем, что евклидово пространство является нормированным. Условия 1) и 2) определения нормированного пространства, очевидно, выполнены. Проверим третье условие (неравенство Минковского): $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. Можем записать $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Из (1.20) следует, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) =\\
&= (\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})})^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и следует доказываемое неравенство.

Замечание. Пусть векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ заданы в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ в виде $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{e}_i$. Тогда неравенство Минковского можно записать в виде

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}. \tag{1.23}$$

1.3.9. Евклидовы точечно-векторные пространства

Пусть дано некоторое множество A, элементы которого будем называть точками. Присоединим к нему евклидово линейное пространство E таким же образом, как это делали при введении понятия аффинного пространства. Если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$ из E, где M и N — две любые точки из A, то расстоянием между точками M и N или модулем вектора $\mathbf{MN}$ (обозначают $|\mathbf{MN}|$) назовём число $\rho(M, N) = |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Если присоединённое линейное пространство E является n-мерным, то полученная при этом математическая структура называется *n-мерным евклидовым точечно-векторным пространством.*

Возьмём любую точку O n-мерного точечно-векторного пространства и присоединим к ней систему векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, образующих ортонормированный базис. Полученная конструкция $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ называется *декартовой системой координат* (частный случай аффинной).

В случае $n = 2$ декартову систему координат будем обозначать $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, а при $n = 3$ — $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Оси $O\mathbf{i}$, $O\mathbf{j}$, $O\mathbf{k}$ получили специальные названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат соответственно, или ось OX, OY, OZ.

Если поворот на кратчайший угол от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ происходит против часовой стрелки, то систему координат $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ называют *правой* и *левой* — в противном случае. Декартову систему координат $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ называют правой, если с конца вектора $\mathbf{k}$ поворот от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ на кратчайший угол виден совершающимся против часовой стрелки, и левой, если этот поворот происходит по часовой стрелке.

1.3.10. Метрические пространства

Все математические структуры, рассмотренные нами до сих пор, являются линейными пространствами. В этом подразделе познакомимся с математической структурой, которая в общем случае не является линейным пространством.

Определение. Множество M, элементы которого будем называть точками, называется *метрическим пространством*, если каждой паре точек x и y из M поставлено в соответствие число $\rho(x, y)$, называемое расстоянием между точками x и y, удовлетворяющее следующим трём условиям (аксиомам метрического пространства):

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причём из условия $\rho(x, y) = 0$ следует, что x и y совпадают;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x и y из M;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всех x, y, z из M (аксиома треугольника).

Приведём некоторые примеры метрических пространств.

1. Множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ является метрическим пространством. Аксиомы 1) и 2) очевидны, а аксиома 3) следует из соотношения $|x - y| = |x - z - y + z| \leq |x - z| + |z - y|$.

2. Множество R^n упорядоченных наборов n вещественных чисел можно различным образом превратить в метрическое пространство. Наиболее часто применяются следующие способы определения расстояния между точками
$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$:

а) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2}$;

б) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$;

в) $\rho(x, y) = \rho(y, x) = \max |\alpha_i - \beta_i|$, $1 \leq i \leq n$.

Во всех трёх случаях справедливость аксиом 1) и 2) определения метрического пространства очевидна. Требуется лишь проверить аксиому треугольника.

В случае а) она следует из неравенства Минковского (1.23), так как если $z = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, то

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i - \gamma_i) + (\gamma_i - \beta_i)]^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \gamma_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - \beta_i)^2} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Выполнимость этой аксиомы в случае б) и в) предлагается проверить самостоятельно.

1.3.11. Формулы перехода от одного базиса к другому. Преобразование систем координат

Пусть в линейном пространстве R_n дано два базиса: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, условно называемый старым, и $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$, называемый новым. Разложим векторы нового базиса по векторам старого:

$$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} c_j^i \mathbf{e}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.24}$$

Из чисел c_j^i можно построить матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{bmatrix}.$$

Матрица C называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Заметим, что в столбцах матрицы C записаны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса.

Соотношение (1.24) в матричной форме условно можно записать в виде

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)C. \tag{1.25}$$

Так как векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ линейно независимы, то матрица C невырождена, а потому существует обратная матрица C^{-1}. Умножая справа равенство (1.25) на матрицу C^{-1}, получим

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)C^{-1}.$$

Пусть дан вектор $\mathbf{x}$, причём

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{e}_i; \qquad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathbf{f}_j.$$

Координаты ξ^i будем называть старыми, а η^j — новыми. Установим связь между новыми и старыми координатами. Находим

$$\sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \sum_{i=1}^{n} c_j^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta^j c_j^i \right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{e}_i$$

(перестановка порядка суммирования возможна в силу конечности числа слагаемых). Отсюда следует, что

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} c_j^i \eta^j, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.26}$$

Соотношения (1.26) в матричной форме можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

Из (1.27) находим, что

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

Пусть в E_n дано два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$. Матрица Q перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному называется *ортогональной*. Сумма квадратов элементов каждого её столбца равна единице как скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_j$ на себя, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю как скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}_j$, $i \neq j$. Ортогональные матрицы обладают замечательным свойством: для них $Q^{-1} = Q^T$. Поэтому формулы (1.27) и (1.28) принимают вид

$$\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}. \tag{1.29}$$

Пример 6. Пусть вектор $\mathbf{x}$ пространства R_3 относительно канонического базиса имеет координаты $(2;3;4)$. Найти его координаты η^1, η^2, η^3 относительно базиса $\mathbf{f}_1 = \{1,2,3\}$, $\mathbf{f}_2 = \{2,3,7\}$, $\mathbf{f}_3 = \{1,3,1\}$.

Решение. В нашем случае матрица C имеет вид $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Вычисляя, находим $C^{-1} = \begin{bmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. По формуле (1.28) можно найти координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно нового базиса:

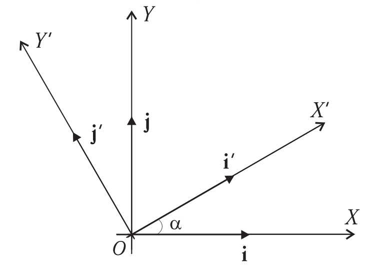
$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Мы нашли закон преобразования при переходе к новому базису координат векторов, являющихся матрицами размера $(n \times 1)$. Векторы рассмотренных линейных пространств являются векторами этого типа. Вопроса преобразования координат векторов, являющихся матрицами размера $(1 \times n)$, мы коснёмся в п.1.6.7.

Часто требуется переходить от одной декартовой системы координат евклидова точечно-векторного пространства к другой. Получим закон изменения координат точки при таком переходе, ограничиваясь случаем $n = 2$.

Пусть имеем две правые декартовы системы координат $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'$. Матрицу перехода от базиса $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ к базису $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ обозначим $Q = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_2^1 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{bmatrix}$, т.е. $\mathbf{i}' = q_1^1\mathbf{i} + q_1^2\mathbf{j}, \mathbf{j}' = q_2^1\mathbf{i} + q_2^2\mathbf{j}$.

Первую систему будем называть старой, а вторую — новой. Координаты точки относительно старой системы координат будем обозначать (x, y), а относительно новой — (x', y').



Рассмотрим сначала случай, когда точки O и O' совпадают.
Видим, что $\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$, $\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha$,

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

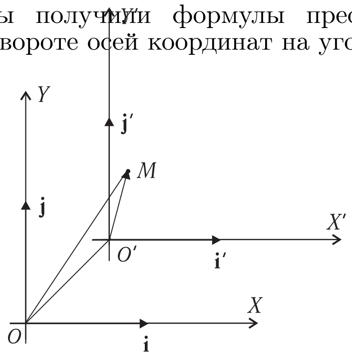
Связь между координатами (x, y) и (x', y') выражается формулами (1.29):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{array} \right. \tag{1.30}$$

Мы получили формулы преобразования координат точки при повороте осей координат на угол α.



Рассмотрим теперь параллельный перенос системы координат в новое начало, т.е. случай, когда $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, а точки O и O' различны. Пусть точка O' относительно системы координат XOY имеет координаты a и b, т.е. $\mathbf{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Находим, что $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{O'M} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$, но $\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}$, т.е. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x' + a)\mathbf{i} + (y' + b)\mathbf{j}$. Отсюда

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{array}\right. .$$

Мы получили формулы преобразования координат при параллельном переносе.

В общем случае, совершая сначала параллельный перенос, а затем поворот осей, получим

$$\left\{\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{array}\right.$$

Последние формулы устанавливают связь между новыми и старыми координатами точки при переходе от одной декартовой системы координат к другой. В векторной форме эти формулы можно записать в виде

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \tag{1.31}$$

где A — некоторая ортогональная матрица, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор точки M в старой системе координат, $\mathbf{r}' = (x', y')$ — радиус-вектор той же точки M в новой системе координат, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ — радиус-вектор нового начала в старой системе координат. Соотношение (1.31) справедливо для точечно-векторного евклидова пространства любой конечной размерности. В частности, при $n = 3$ на девять элементов матрицы A имеется шесть соотношений, следующих из условия ортонормированности нового базиса. Для полного описания расположения нового базиса относительно старого нужно задать дополнительно ещё три условия, например, значение углов Эйлера, часто применяемых в механике.

Пусть в евклидовом точечно-векторном пространстве выбрана декартова система координат. Тогда формулы (1.31) можно трактовать как некоторое преобразование пространства, переводящее точки $\mathbf{r}$ в точки $\mathbf{r}'$. Заметим, что преобразование (1.31) сохраняет расстояния между точками, т.е. если расстояние между точками M_1 и M_2 равно d, то и расстояние между их образами M_1' и M_2' также равно d. Такие преобразования называют *движениями*.

1.3.12. Группы, кольца, поля

Мы рассмотрели линейные пространства как множества, на которых определены две операции — внутренняя и внешняя. В различных разделах математики и её приложениях часто встречаются множества, на которых определена лишь одна внутренняя операция. Важнейшим типом структур с одной операцией является группа.

Пусть дано некоторое множество M.

Определение. Бинарной алгебраической операцией на множестве M называется закон, по которому любой упорядоченной паре элементов из M ставится в соответствие один и только один элемент из M.

Если паре (a, b) поставлен в соответствие элемент c, то пишут $c = a * b$.

Множество с определённой на нём бинарной операцией называется *группоидом.*

Примеры группоидов: множество натуральных чисел с операцией сложения, множество целых чисел с операцией вычитания, множество матриц одинакового размера с операцией сложения.

Определение. Бинарная операция называется *коммутативной*, а соответствующий группоид M называется *коммутативным*, если $a * b = b * a$ для любых a и b из M. Операция называется *ассоциативной*, а соответствующий группоид M *ассоциативным*, если для любых элементов a, b, c из M имеет место равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$. Например, операция сложения вещественных чисел коммутативна и ассоциативна, операция возведения в степень a^b на множестве положительных вещественных чисел не является ни коммутативной, ни ассоциативной.

Определение. Элемент e называется *нейтральным* элементом группоида M, если $a * e = e * a = a$ для любого элемента a из M.

Для операции сложения вещественных чисел им является ноль, для умножения — единица.

Определение. Пусть M — ассоциативный группоид. Элемент b называется обратным для a, если $a * b = b * a = e$.

Легко доказать, что группоид может иметь только один нейтральный элемент, каждый элемент может иметь не более одного обратного.

Определение. Группой называется непустое множество G, на котором определена ассоциативная бинарная алгебраическая операция (условимся называть её умножением и вместо $a * b$ писать ab), причём выполнены условия:

1) существует нейтральный элемент e (назовём его единицей группы);

2) для всякого элемента a из G существует обратный элемент a^{-1}, т.е. такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Если множество G конечно, то группа называется конечной, а число элементов в G называется *порядком группы*. В противном случае — бесконечная группа.

Если операция коммутативна, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*. В абелевой группе операцию обычно называют сложением (запись $a + b$), группу называют *аддитивной*, нейтральный элемент — *нулём*, обратный элемент — *противоположным*.

Примеры. Множество целых чисел с операцией сложения образуют *абелеву группу*. Множество поворотов плоскости вокруг фиксированной точки с операцией последовательного выполнения поворотов образует коммутативную группу. Множество невырожденных квадратных матриц порядка n с операцией умножения, определённой в п.1.1.5, также является группой, причём некоммутативной.

Первым нетривиальным примером группы, нашедшим важные приложения в теории алгебраических уравнений, явилась группа *подстановок*. Познакомимся с ней подробнее.

В п.1.2.1 определено понятие перестановки из чисел $1, 2, \ldots, n$. Пусть от перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ путём транспозиций перешли к перестановке $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Запишем эти перестановки в виде таблицы A: $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$. Таблицу A называют *подстановкой* n-й степени. При этом говорят, что число α_1 перешло в β_1, α_2 — в β_2 и т.д., число α_n — в β_n.

Пусть, как и прежде, перестановка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ путём транспозиций перешла в перестановку $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, а последняя — в перестановку $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Мы можем определить три подстановки: $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$.

Подстановку C называют произведением подстановок A и B, пишут $AB = C$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Действительно, из A следует, что 1 перешла в 4, а из B следует, что 4 перешла в 2. В результате последовательного применения переходов получим, что 1 перешла в 2 и т.д.

Итак, на множестве всех подстановок n-й степени мы определили бинарную операцию (умножение). Можно доказать, что множество подстановок с этой операцией удовлетворяет всем условиям определения группы. Группа подстановок n-й степени является конечной некоммутативной (при $n \geq 3$) группой порядка $n!$.

Роль единицы группы подстановок играет подстановка $E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Обратным элементом для

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$ будет $A^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Используя определение группы, легко доказать следующие утверждения:

1) в группе существует единственный нейтральный элемент (если e_1, e_2 — нейтральные элементы, то их совпадение следует из $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$);

2) каждый элемент имеет единственный обратный;

3) в группе уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = a^{-1}b$, а уравнение $ya = b$ — решение $y = ba^{-1}$, где a^{-1} — элемент, обратный a;

4) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Определение. Подмножество A группы G называется *подгруппой* этой группы, если A само является группой относительно операции, определённой в группе G.

Например, группа рациональных чисел относительно операции сложения имеет подгруппу всех целых чисел, которая в свою очередь имеет подгруппу из всех чётных чисел. Подмножество нечётных чисел не является подгруппой этой группы.

Если в группе поворотов плоскости вокруг точки O взять подмножество поворотов на угол, кратный $45°$, то получим подгруппу группы вращений.

Подмножество, состоящее лишь из нейтрального элемента, также образует подгруппу.

Примером подгрупп являются так называемые циклические подгруппы. Пусть дана группа G и её элемент a, отличный от единицы. Через a^n обозначим произведение n сомножителей, каждый из которых равен a. Отрицательные степени элемента a определим как обратные к положительным степеням. Под нулевой степенью a^0 элемента будем понимать единицу группы.

Легко показать, что подмножество, содержащее все целые степени элемента a группы G, является подгруппой, называемой *циклической* подгруппой, порождённой элементом a.

Группа G называется циклической группой, если она состоит из степеней одного из своих элементов, т.е. совпадает с одной из своих циклических подгрупп. Примером бесконечной циклической группы служит аддитивная группа целых чисел. Число 1 является её образующим элементом.

Пусть в группе G взяты подмножества M и N. Произведением MN этих подмножеств называется совокупность всех элементов группы G, представимых в виде произведения некоторого элемента из M на некоторый элемент из N.

Если $A \neq G$ — подгруппа группы G и x — любой элемент G, то множество xA называется *левым смежным* классом группы G по подгруппе A (аналогично Ax — правым).

Легко показать, что всякий левый смежный класс вполне определяется любым из своих элементов: если элемент y содержится в смежном классе xA, то $yA = xA$, т.е. два любых левых смежных класса или не имеют общих элементов или совпадают. Таким образом, группа G распадается на непересекающиеся левые смежные классы по подгруппе A. Это разложение называется разложением группы G по подгруппе A. Представление группы в виде объединения смежных классов называется разложением группы G по подгруппе A.

Теорема (Лагранжа). Порядок подгруппы конечной группы является делителем порядка самой группы.

Доказательство. Пусть A — подгруппа порядка k группы G порядка n, а m — число левых смежных классов G по A. Тогда $n = km$, так как каждый из непересекающихся левых смежных классов содержит ровно k элементов. Поэтому число k является делителем n.

Из этой теоремы следует, что всякая конечная группа простого порядка является циклической.

Определение. Подгруппа A группы G называется *нормальной подгруппой* группы G, если для любого элемента x из G имеет место равенство $xA = Ax$, т.е. для всякого элемента a из A можно подобрать в A такие элементы a' и a'', что $xa = a'x$, $ax = xa''$.

Два элемента a и b группы G называются сопряжёнными, если в G существует хотя бы один элемент x, такой, что $b = x^{-1}ax$. Можно доказать, что подгруппа A группы G тогда и только тогда будет нормальной подгруппой группы G, если вместе со всяким своим элементом a подгруппа A содержит и все элементы, сопряжённые с ним в G.

Для любой подгруппы A справедливо $AA = A$. Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Тогда $xA = Ax$ для любого x из G. Рассмотрим множество всех смежных классов группы G по нормальной подгруппе A. На этом множестве определим операцию умножения смежных классов, таким же образом, как и умножения подмножеств группы G. Произведения двух смежных классов даёт также смежный класс, так как $xA \cdot yA = xy \cdot AA = xyA$. Множество смежных классов G по нормальной подгруппе

A относительно операции умножения смежных классов образует группу, называемую *фактор-группой* группы G по нормальной подгруппе A. Обозначается фактор-группа G/A. Роль единицы в G/A играет A, так как $xAA = AxA = xA$ для любого смежного класса xA. Обратным для смежного класса xA будет класс $x^{-1}A$, так как $xA \cdot x^{-1}A = xx^{-1}AA = e \cdot A = A$.

Порядок любой фактор-группы конечной группы является делителем порядка самой группы, он равен $\dfrac{n}{k}$, где n — порядок группы G, а k — порядок нормальной подгруппы A.

В качестве примера рассмотрим группу G поворотов плоскости вокруг фиксированной точки на угол, кратный $30°$ с операцией последовательного выполнения поворотов, являющуюся коммутативной циклической группой 12-го порядка ($360 : 30 = 12$). Действительно, если a — поворот на $30°$, то $aa = a^2$ — поворот на $60°$, а в пятой — поворот на $150°$. Роль единицы группы играет a^{12}. Обратным элементом для a^k будет a^{12-k}. Очевидно, $a^{m+12} = a^m$. Эта группа имеет нормальные подгруппы второго порядка (состоит из a^6 и a^{12}), третьего порядка (состоит из a^4, a^8 и a^{12}), четвёртого порядка (a^3, a^6, a^9 и a^{12}), шестого порядка (a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10} и a^{12}).

Пусть A_4 — циклическая подгруппа четвёртого порядка этой группы G. Тогда $G = aA_4 + a^2A_4 + a^3A_4$ — разложение группы G по подгруппе A_4. Фактор-группа G/A_4 будет 3-го порядка, её элементы aA_4,a^2A_4,a^3A_4, роль единицы играет a^3A_4, обратным для aA_4 будет a^2A_4.

Абелева группа целых чисел с операцией сложения имеет нормальную подгруппу целых чисел, кратных натуральному числу k. В этом случае фактор-группа будет циклической группой порядка k.

В п.1.3.11 мы получили формулы преобразования координат точки при переходе от одной ортонормированной системы координат евклидова пространства к другой. Их можно трактовать как формулы преобразования пространства, переводящие точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точки $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Эти преобразования называют ортогональными. Рассмотрим множество G всех ортогональных преобразований $\mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ евклидова пространства, считая, что $\det A = 1$. Такие преобразования не только сохраняют расстояние между точками, т.е. являются движениями, но и сохраняют ориентацию пространства (правый векторный базис переходит в правый, а левый — в левый). Пусть ортогональное преобразование A_1 из G переводит точку M в точку M', а преобразование A_2 переводит точку M' в точку M''. Преобразование, переводящее точку M в M'', называется произведением преобразований A_2 и A_1 и обозначается A_2A_1. Нетрудно показать, что в этом случае множество G будет группой.

Роль единицы в ней играет тождественное преобразование, оставляющее все точки на месте. Преобразованием A_1^{-1} является то, которое переводит точку M' в точку M. Заметим, что если матрицы ортогональны, то их произведение также является матрицей ортогональной, обратная к ортогональной матрице — ортогональна.

Группа G задаётся конечным числом параметров. В случае $n = 2$ любой её элемент, как показано в п.1.3.11, можно задать в виде $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + {}$ ${}+a$, $y' = y\sin\varphi + y\cos\varphi + b$, и число параметров, задающих группу G, равно трём. Задание параметров φ, a, b определяет конкретный элемент группы. В случае $n = 3$ группа G задаётся шестью параметрами. Для n-мерного пространства E_n число параметров, задающих группу G равно $\dfrac{1}{2}\,n(n+1)$.

Совокупность всех движений (преобразований), состоящих из вращений вокруг оси, является коммутативной подгруппой группы G (для E_3 число параметров, задающих подгруппу вращений равно 3). Подмножество параллельных переносов также образует коммутативную подгруппу, являющуюся нормальной подгруппой группы G. Пересечение этих подгрупп — единичный элемент.

Абстрактная теория групп широко применяется в различных вопросах, например, в физике элементарных частиц, где она используется для классификации элементарных частиц. Исторически впервые понятие группы было применено в кристаллографии для классификации правильных пространственных систем точек.

Применяются и другие математические структуры. Дадим определение некоторым из них.

Определение. Кольцом называется множество K с определёнными на нём двумя операциями (сложение и умножение) при условии, что:

1) K является абелевой группой по сложению;

2) сложение и умножение связаны законами дистрибутивности $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + bc$.

Примером кольца является множество целых чисел с обычными операциями сложения и умножения. Множество всех невырожденных квадратных матриц порядка n с операциями сложения и умножения, определёнными в п.1.1.3 и 1.1.5, образует кольцо.

Определение. Кольцо называется *полем*, если все его элементы, кроме нуля, образуют коммутативную группу относительно операции умножения.

Примером могут служить поле вещественных чисел с обычным образом определёнными операциями сложения и умножения.

Кольцо целых чисел полем не является.

В п.1.3.1 мы в определении линейного пространства при введении внешней операции использовали поле вещественных или комплексных чисел, как говорят, определили линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Можно было использовать любое другое поле П и определить линейное пространство над произвольным полем П.

Пример. Рассмотрим множество $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ целых чисел. Пусть m — отличное от нуля целое число. Два целых числа a и b назовём сравнимыми по модулю m ($a \equiv b \pmod{m}$), если оба числа при делении на m дают один и тот же остаток. Нетрудно показать, что числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность $a - b$ нацело делится на m или тогда и только тогда, когда существует целое число t, такое, что $a = b + tm$. Заметим, что числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда эти числа сравнимы по модулю $-m$. $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{(-m)}$. Поэтому числа m берут положительными. Сравнимость по модулю m пример так называемого бинарного отношения на множестве Z целых чисел. Действительно, для любых двух целых чисел мы можем сказать, сравнимы они по модулю m или нет. Множество чисел сравнимых между собой по модулю m называются классом вычетов по модулю m. Выпишем для примера классы вычетов по модулю 3:

$$\dots - 6, -3, 0, 3, 6, \dots$$

$$\dots - 5, -2, 1, 4, \dots$$

$$\dots - 4, -1, 2, 5, \dots$$

Мы видим, что число классов вычетов по модулю 3 равно 3. Подобное обстоятельство имеет место для любого целого числа m, а именно количество классов вычетов по модулю m равно $|m|$. Класс вычетов, содержащий число a будем обозначать через $\bar{a}$. Любое число из класса $\bar{a}$ называется представителем этого класса. Наименьшее из неотрицательных представителей класса $\bar{a}$ будем называть кратко наименьшим или наименьшим неотрицательным представителем этого класса вычетов. Если из каждого класса вычетов по модулю m выбрать по одному представителю, то такой набор из чисел будет называться полной системой представителей классов вычетов по модулю m. Выбирая в каждом классе наименьший неотрицательный представитель, мы получим полную систему представителей, которую называют канонической. Отметим что если m_1, m_2, p — целые, отличные от нуля, числа и $m_2 = pm_1$, то есть m_2 — кратное числа m_1, то из сравнимости чисел по модулю m_2 следует сравнимость этих же чисел по модулю m_1 ($x \equiv y \pmod{m_2} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m_1}$). Можно показать, что классы вычетов по модулю m_2 являются объединениями p классов вычетов по модулю m_1. На классе вычетов по модулю m введём операции сложения и умножения следующим образом. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ два класса вычетов по модулю m и $x \in \bar{x}, y \in \bar{y}$ представители этих классов. Определим $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$ как класс чисел сравнимых с суммой $x+y$ по модулю m, а $\bar{x} \cdot \bar{y}=\overline{xy}$ как класс чисел сравнимых с произведением xy по модулю m. Покажем, что наше определение операций корректно, то есть не зависит от того, какие конкретные представители мы выбрали в классах $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Пусть $x_1 \in \bar{x}$, $y_1 \in \bar{y}$ два других представителя классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Тогда числа $x-x_1$ и $y-y_1$ делятся на m нацело. Поэтому

$$(x+y)-(x_1+y_1)=(x-x_1)+(y-y_1)$$

и

$$xy-x_1y_1=xy-xy_1+xy_1-x_1y_1=x(y-y_1)+y_1(x-x_1)$$

делятся на m нацело. Следовательно, суммы $x+y$ и x_1+y_1, а также произведения xy и x_1y_1 определяют одни и те же классы эквивалентности. Поэтому $\bar{x}+\bar{y}$ и $\bar{x} \cdot \bar{y}$ определяются однозначно независимо от выбора представителей классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Сложение классов вычетов по модулю mобладает следующими свойствами.

а) коммутативностью: $\forall \bar{x}, \bar{y} : \bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$;

б) ассоциативностью: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$;

в) существует нейтральный элемент θ такой, что для всякого $\bar{x}$ имеет место соотношение $\bar{x}+\theta=\bar{x}$;

г) для всякого $\bar{x}$ существует противоположный элемент, обозначаемый $-\bar{x}$, такой, что имеет место соотношение $\bar{x}+(-\bar{x})=\theta$;

Коммутативность и ассоциативность следуют из того, что этими свойствами обладает сложение целых чисел и определения операции сложения классов вычетов по модулю m. Роль нейтрального элемента играет класс $\bar{0}$, состоящий из чисел делящихся на m нацело. Если $\bar{x}$ класс чисел дающих при делении на m остаток p, то есть класс

$$\ldots-2m+p, -m+p, p, m+p, 2m+p, \ldots,$$

то противоположным элементом будет класс

$$\ldots-2m-p, -m-p, -p, m-p, 2m-p, \ldots.$$

Таким образом классы вычетов по модулю m с введённой выше операции сложения образуют абелеву группу. Обозначим её через Z_m. Умножение классов вычетов обладает следующими свойствами.

а) коммутативностью: $\forall \bar{x}, \bar{y} : \bar{x} \cdot \bar{y}=\bar{y} \cdot \bar{x}$;

б) ассоциативностью: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z}=\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z})$;

в) существует единичный элемент e такой, что для всякого $\bar{x}$ имеет место соотношение $\bar{x}e=\bar{x}$.

Кроме того, сложение и умножение классов вычетов связаны законом дистрибутивности: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : (\bar{x}+\bar{y}) \cdot \bar{z}=\bar{x} \cdot \bar{z}+\bar{y} \cdot \bar{z})$.

Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность следуют из того, что этими свойствами обладает умножение целых чисел и определения операции умножения классов вычетов по модулю m. Роль единичного элемента играет класс $\overline{1}$ состоящий из чисел, дающих при делении на m остаток 1. Таким образом, классы вычетов по модулю m с введёнными выше операциями сложения и умножения классов дают пример коммутативного кольца, которое обозначается через Z_m.

1.4. Системы линейных уравнений

1.4.1. Формы записи систем линейных уравнений. Классификация систем

Система m линейных уравнений с n неизвестными может быть записана в виде

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n & = & b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n & = & b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n & = & b^m, \end{array}\right. \tag{1.32}$$

где a_i^j — коэффициенты, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, x^i — неизвестные; b^j — свободные члены.

Коэффициенты системы a_i^j записаны с двумя индексами. Верхний индекс (j) означает номер уравнения, в котором находится этот коэффициент, а нижний индекс (i) означает номер неизвестного, при котором находится коэффициент.

Если использовать знак суммирования, то систему (1.32) можно записать короче:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.33}$$

А. Эйнштейн предложил в выражениях, подобных (1.33), когда имеется индекс сверху и снизу, по которому производится суммирование, знак суммы опускать и писать

$$a_i^j x^i = b^j, \quad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m},$$

имея в виду, что по i производится суммирование от 1 до n.

Введём матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (1.32) можно записать в матричной форме

$$AX = B. \tag{1.34}$$

Если обозначить $\mathbf{a}_j = (a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^m)^T$, $j = \overline{1,n}$ — векторы, являющиеся столбцами матрицы A, то систему (1.32) можно записать в векторной форме: $\mathbf{a}_1 x^1 + \mathbf{a}_2 x^2 + \ldots + \mathbf{a}_n x^n = \mathbf{b}$ или $\mathbf{a}_j x^j = \mathbf{b}$ ($j = \overline{1,n}$), где $\mathbf{b}$ — вектор, соответствующий столбцу свободных членов. В подробной форме это же записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} x^2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} x^n = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

Матрица A называется *основной* матрицей системы, а матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array} \right]$$

называется *расширенной*. Совокупность чисел $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ называется *решением системы*, если она обращает все уравнения системы в тождества:

$$a_i^j \alpha^i \equiv b^j, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,m}.$$

Система называется *совместной*, или *непротиворечивой*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если решений более одного.

Основные задачи теории систем линейных уравнений:

1) установить, система совместна или нет;

2) если система совместна, то выяснить, определённая она или нет;

3) если система определённая, то найти её единственное решение, а если неопределённая, то описать совокупность всех решений.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если любое решение первой из них является решением второй и наоборот.

В ходе решения систему приходится преобразовывать каким-либо способом. При этом нужно следить за тем, чтобы в ходе преобразования получались системы, эквивалентные данной.

1.4.2. Теорема Кронекера-Капелли (о совместности системы линейных уравнений)

Теорема 1. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство. Если $r_A = r_C$, то существует базисный минор, общий для матриц A и C, в который не входит столбец свободных членов. По теореме о базисном миноре этот столбец является линейной комбинацией остальных столбцов, т.е. существуют числа $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ такие, что $a_i^j \alpha^i = b^j$, следовательно, система совместна и $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ — её решение.

Обратно, если система совместна и $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ — её решение, то столбец из свободных членов системы является линейной комбинацией остальных столбцов ($b^j = a_i^j \alpha^i$), а потому его вычёркивание из расширенной матрицы не изменит ранг. А так как после такого вычёркивания получим основную матрицу A, то следует, что $\mathrm{rang} C = \mathrm{rang} A$.

1.4.3. Решение системы в случае $m = n$, $D = \det A \neq 0$

Укажем три способа решения системы.

Способ 1. Матричный метод.

Систему запишем в форме (1.34):

$$AX = B.$$

По условию задачи матрица A невырождена, а поэтому существует единственная обратная матрица A^{-1}. Матричное уравнение вида (1.34) мы уже решили (см. п. 1.2.8) и получили

$$X = A^{-1}B. \tag{1.35}$$

Пример 1. Систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ -\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{a}$$

решить матричным способом.

Решение. Записываем матрицу A системы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Находим её определитель:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 \left| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix} \right] = 1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то применима формула (1.35). Находим обратную матрицу A^{-1} способом, указанным в п. 1.2.7:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 3, & A_1^2 = -2, & A_1^3 = 2, \\ A_2^1 = -4, & A_2^2 = 3, & A_2^3 = -3, \\ A_3^1 = -11, & A_3^2 = 9, & A_3^3 = -8. \end{array}$$

Получаем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.35) находим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -4+3 \\ -11+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Мы нашли решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

Поскольку матрица A^{-1} единственна, то данная система имеет единственное решение, т.е. является определённой.

Способ 2. Применение формул Крамера. Матричное равенство (1.35) запишем в развёрнутом виде

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i^1 & A_i^2 & \dots & \dots & A_i^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & \dots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^i \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix},$$

где A_i^k есть алгебраическое дополнение элемента a_i^k определителя $\det A = D$. По правилу умножения матриц (см. п. 1.1.5), записывая покоординатно, находим

$$x^i = \frac{A_i^1 b^1 + A_i^2 b^2 + \ldots + A_i^n b^n}{D}.$$

В числителе стоит разложение определителя D_i по столбцу с номером i; определитель D_i получен из D заменой его i-го столбца столбцом свободных членов. Следовательно, $x^i = \dfrac{D_i}{D}$. Полагая $i = 1, 2, \ldots, n$, находим решение системы в виде

$$x^1 = \frac{D_1}{D}, \quad x^2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x^n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.36}$$

Формулы (1.36) называют формулами Крамера.

Пример 2. Решить систему (а), применяя формулы Крамера.

Решение. Находим

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $D = 1$, то $x^1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $x^2 = \dfrac{-1}{1} = -1$, $x^3 = \dfrac{-2}{1} = -2$.

Способ 3. Метод Гаусса (метод исключения).

Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему (а).

Решение. Записываем расширенную матрицу системы

$$C = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Действуя только со строками, приводим её к виду, чтобы ниже (или выше) главной диагонали стояли нули. Находим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ \quad\; - 8x_2 + 3x_3 = 2, \\ \qquad\qquad - x_3 = 2, \end{cases}$$

эквивалентная данной. Из последнего уравнения получаем $x_3 = -2$. Зная x_3, из второго уравнения находим $-8x_2 = 2 + 6 = 8$, $x_2 = -1$. Из первого уравнения теперь получаем $3x_1 = 1 + 2 = 3$, $x_1 = 1$. Мы нашли решение $(1, -1, -2)$.

1.4.4. Исследование и решение системы в общем случае

Процесс исследования системы и её решения разобьём на отдельные этапы.

Этап 1. Находим ранги основной и расширенной матриц системы. Если они не равны, то система несовместна, и на этом исследование заканчивается.

Этап 2. $r_A = r_C = r$. Система оказалась совместной. В матрице A выделяем базисный минор. Те уравнения, коэффициенты которых не попали в состав базисного минора, вычёркиваем из системы, так как они по теореме о базисном миноре являются линейными комбинациями уравнений, попавших в состав базисного минора.

Этап 3. Все неизвестные системы делим на два класса: те неизвестные, коэффициенты при которых попали в состав базисного минора, назовём зависимыми, а остальные неизвестные — свободными. Перепишем систему, оставив слева члены, содержащие зависимые переменные, а направо перенесём члены, содержащие свободные неизвестные. Объявляем правые части новыми свободными членами. В результате получаем систему, эквивалентную данной, состоящую из r уравнений с r неизвестными, определитель которой отличен от нуля.

Этап 4. Решаем полученную систему одним из способов, рассмотренных в п. 1.4.3. В итоге мы найдём соотношения, выражающие зависимые переменные через свободные. Такие соотношения называются общим решением системы. Всякое решение, которое получается из общего при фиксированных значениях свободных неизвестных, называется частным.

Заметим, что если $r_A = r_C = r < n$ (n — число неизвестных), то система неопределённа, если же $r_A = r_C = n$, то система определённа.

Обычно, в случае $m \neq n$, применяют метод Гаусса, позволяющий провести исследование системы и найти её общее решение. Всё сказанное проиллюстрируем на примере.

Пример 4. Найти общее и какое-нибудь частное решение системы
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = -5, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 3x_1 - 20x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 = -8. \end{cases}$$
Записываем расширенную матрицу системы и, действуя только со строками, приводим её к удобному для исследования виду
$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & -4 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -20 & -7 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{|rr|rrr|r} \overline{1} & \overline{-7} & -3 & 4 & 2 & -3 \\ \underline{0} & \underline{1} & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]. \quad (б)$$
Первую строку, умноженную на 2, вычли из второй, из третьей строки вычли первую, а из четвёртой вычли первую, умноженную на 3. Мы получили матрицу с тремя одинаковыми строками. В состав базисного минора может войти только одна из них, например, вторая. Третью и четвёртую строки можно вычеркнуть из матрицы, не меняя ее ранга. Видим, что ранг основной и расширенной матрицы равен двум. Система совместна.

В качестве базисного минора матрицы (б) можно взять обведённый минор. Соответствующий минор исходной матрицы расположен в левом верхнем углу. Третье и четвертое уравнения, коэффициенты которых не попали в состав выбранного базисного минора, можно вычеркнуть из системы. Т.к. мы работали только со строками, то исходная система эквивалентна системе, расширенной матрицей которой служит матрица (б). Согласно выбору базисного минора, неизвестные x_1 и x_2 приняты в качестве зависимых, а x_3, x_4, x_5 — оставлены свободными.

Матрице (б), после вычёркивания из неё двух последних строк, соответствует система
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$
Перенесём члены, содержащие свободные неизвестные, вправо:
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 = -3 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases}$$
Выражаем зависимые переменные через свободные. Получаем
$$\begin{cases} x_1 = 4 - 11x_3 + 17x_4 - 9x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases} \qquad (в)$$

Соотношение (в) является общим решением системы. Из (в) можно получить любое число частных решений, придав свободным неизвестным какие-либо значения. Например, положив $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = -1$, получим решение $(2, 0, 1, 0, -1)$.

1.4.5. Системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений

$$a_i^k x^i = 0, \quad i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,m}, \tag{1.37}$$

называется однородной.

Система (1.37) всегда совместна, так как всегда имеется решение $(0, 0, \ldots, 0)$. Это решение называется *тривиальным.* Важен вопрос, в каких случаях система имеет нетривиальные решения.

Теорема 2. Система (1.37) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг её матрицы меньше числа неизвестных.

Действительно, только в этом случае система имеет свободные неизвестные, которым можно придать любые, в частности, ненулевые значения.

Теорема 3. Система (1.37) в случае $n = m$ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель её матрицы равен нулю.

Теорема 3 является следствием теоремы 2 и теоремы о базисном миноре.

Теорема 4. Любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

Доказательство. Пусть $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ — любые два решения системы (1.37) и

$$(\lambda\alpha^1 + \mu\beta^1, \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2, \ldots, \lambda\alpha^n + \mu\beta^n),$$

где λ и μ — любые числа, их линейная комбинация. Имеем $a_i^k(\lambda\alpha^i + \mu\beta^i) = \lambda a_i^k\alpha^i + \mu a_i^k\beta^i$. Так как $a_i^k\alpha^i = 0$ и $a_i^k\beta^i = 0$, поскольку $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ решения системы (1.37), то $a_i^k(\lambda\alpha^i + \mu\beta^i) = 0$, т.е. $(\lambda\alpha^1 + \mu\beta^1, \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2, \ldots, \lambda\alpha^n + {}+\mu\beta^n)$ является решением этой системы.

Теорема 5. Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (1.37) образует подпространство $\mathcal{L}$ размерности $n - r$ арифметического линейного пространства R^n, где n — число неизвестных, r — ранг матрицы системы, $n > r$.

Доказательство. То, что множество всех решений системы (1.37) образует подпространство $\mathcal{L}$ пространства R^n, следует из теоремы 4 и определения подпространства. Найдём размерность $\mathcal{L}$. Пусть $x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots, x^n$ — свободные, а $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — зависимые неизвестные системы. Образуем $(n-r)$ частных решений следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_1^1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^r, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\ (\beta_2^1, \beta_2^2, \ldots, \beta_2^r, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\beta_{n-r}^1, \beta_{n-r}^2, \ldots, \beta_{n-r}^r, 0, 0, 0, \ldots, 1).\end{array}\right\} \qquad (1.38)$$

Решения (1.38) линейно независимы, так как ранг матрицы A, составленной из этих решений, равен $(n-r)$ (последние $(n-r)$ её столбцов, состоящие из единиц и нулей, образуют единичную матрицу порядка $(n-r)$) и совпадает с числом её строк. Покажем, что любые $(n-r+1)$ решений системы (1.37) линейно зависимы, для чего достаточно доказать, что любое решение системы является линейной комбинацией решений (1.38). Пусть

$$(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r, \alpha^{r+1}, \ldots, \alpha^n) \qquad (1.39)$$

любое решение системы. Умножим первое решение в (1.38) на α^{r+1}, второе — на α^{r+2}, …, $(n-r)$-е — на α^n и вычтем их после этого из решения (1.39). В результате получим

$$(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^r, 0, 0, \ldots, 0), \qquad (1.40)$$

где $\gamma^i = \alpha^i - \alpha^{k+r}\beta_k^i$, $i = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,n-r}$. Вектор (1.40) является решением системы (1.37) по теореме 4, причём это решение получено при нулевых значениях свободных неизвестных, а потому является тривиальным, т.е. $\gamma^i = 0$ или $\alpha^i = \alpha^{k+r}\beta_k^i$, $i = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,n-r}$. Это и означает, что решение (1.39) является линейной комбинацией решений (1.38) с коэффициентами α^{r+1}, α^{r+2}, …, α^n. Таким образом, в подпространстве $\mathcal{L}$ имеется совокупность $(n-r)$ линейно независимых решений, а любые $(n-r+1)$ решений линейно зависимы. Следовательно, это подпространство имеет размерность $(n-r)$. Теорема доказана.

Базис подпространства $\mathcal{L}$, состоящий из $n-r$ решений, называется *фундаментальной системой решений* системы однородных линейных уравнений. Любое другое решение можно представить в виде линейной комбинации решений, составляющих фундаментальную систему.

Решения (1.38) образуют фундаментальную систему. Эту систему иногда называют канонической. Можно получить фундаментальные системы и других видов.

Чтобы отыскать фундаментальную систему решений, достаточно найти общее решение системы и из него получить любые $(n-r)$ линейно независимых решений, для чего можно взять любой определитель порядка $(n-r)$, не равный нулю, и в качестве свободных неизвестных принять поочерёдно значения элементов каждой его строки. Полученные частные решения составят фундаментальную систему решений.

Пример 5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 17x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения. Найти общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

Будем решать задачу методом Гаусса. Записываем матрицу системы и, действуя только со строками, получаем нули ниже главной диагонали:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 17 & -4 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -55 & 11 & -77 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что ранг матрицы A равен двум, и что последние два уравнения можно вычеркнуть из системы. Примем неизвестные x_1 и x_2 в качестве зависимых, а x_3 и x_4 — в качестве свободных. Получаем систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = x_3 - 5x_4, \\ 5x_2 = x_3 - 7x_4. \end{cases}$$

Находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{4}{5}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_4. \end{cases}$$

Теперь найдём фундаментальную систему решений, положив $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 5$:

$$\begin{cases} (\ \ 2, & 1, & 5, & 0), \\ (-4, & -7, & 0, & 5). \end{cases}$$

Пусть дана система $a_i^k x^i = b^k$ ($k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$) неоднородных уравнений и соответствующая система однородных уравнений $a_i^k x^i = 0$, которые запишем в матричной форме в виде $AX = B$ и $AX = 0$. Между решениями этих систем имеется тесная связь, выражаемая следующими теоремами.

Теорема 6. Разность любых двух решений системы $AX = B$ является решением системы $AX = 0$.

Доказательство. Пусть $X_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)^T$ и $X_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)^T$ — некоторые решения системы $AX = B$, т.е.

$AX_1 = B$ и $AX_2 = B$. После вычитания получаем $A(X_1 - X_2) = 0$, т.е. $X_1 - X_2$ есть решение системы $AX = 0$.

Теорема 7. Сумма любого решения X_1 системы $AX = 0$ и любого решения X_2 системы $AX = B$ является решением системы $AX = B$.

Доказательство. Так как по условию теоремы $AX_1 = 0$, $AX_2 = B$, то $A(X_1 + X_2) = B$, т.е. $X_1 + X_2$ является решением системы $AX = B$.

Заметим, что теоремы 6 и 7 являются частыми случаями более общей следующей теоремы.

Теорема 8 (о наложении решений). Если $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ — решения системы уравнений $AX = B_1$, а $(\beta = \beta_1\beta_2, \ldots, \beta_n)$ — решение системы $AX = B_2$ с той же матрицей A и другой правой частью, то линейная комбинация $\lambda\alpha + \mu\beta$ решений α и β является решением системы уравнений $AX = \lambda B_1 + \mu B_2$. Доказательство аналогично доказательствам теорем 6 и 7. Предлагается доказать самостоятельно.

Теорема 9 (альтернативы Фредгольма). Для всякой системы $AX = B$ справедливо одно из двух утверждений: либо система $AX = B$ имеет решение при любой матрице $B = [b^1, b^2, \ldots, b^m]^T$ и тогда система $A^T Y = 0$ имеет лишь тривиальные решения; либо система $AX = B$ для некоторой матрицы B несовместна и тогда система $A^T Y = 0$ имеет нетривиальные решения.

Теорему 9 примем без доказательства.

1.5. Алгебра геометрических векторов

Далее мы рассмотрим объект, нашедший применение в аналитической геометрии и послуживший прототипом достаточно большого круга математических структур и понятий, часть из которых была изучена выше. Многие из них появились как обобщение соответствующих понятий введённых на этом объекте. Пусть дано трёхмерное точечное пространство с введённым в нём расстоянием между точками. Взяв за исходное понятие точки, мы построим ещё один пример линейного пространства, элементами которого являются упорядоченные пары точек или направленные отрезки. Полученное пространство обозначим в общем случае через V_n, в случае прямой V_1, плоскости V_2 и пространства V_3.

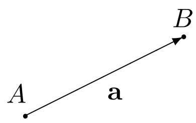
1.5.1. Линейные операции над векторами. Базисы и координаты

Определение. Вектором (геометрическим вектором) в данном точечном пространстве называется упорядоченная пара точек (A, B). Обозначают вектор $\mathbf{AB}$.

Точка A называется началом вектора $\mathbf{AB}$, а B — его концом. Вектор, начало которого совпадает с концом, называется нулевым и обозначается $\mathbf{0}$.

Упорядоченную пару точек (A, B) можно трактовать как направленный отрезок AB, за начало которого принята точка A.

На рисунке ненулевой вектор $\mathbf{AB}$ изображают в виде направленного отрезка, указывая направление от начала к концу стрелкой.



Расстояние между точками A и B называется модулем вектора $\mathbf{AB}$, обозначается $|\mathbf{AB}|$.

Как видим, чтобы задать вектор, нужно задать его направление и модуль.

Величины, которые характеризуются числом и направлением, называются *векторными.*

В физике — это сила, скорость, ускорение, различного рода моменты сил и т.д. Величины, характеризующиеся только числом, называют скалярными, например, температура, масса, площадь и т.д.

Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются коллинеарными (пишут $\mathbf{AB} \| \mathbf{MN}$).

Два коллинеарных вектора $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ могут быть одинаково ориентированными (записывают $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$) или противоположно ориентированными (пишут $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{MN}$).

Строгое определение этих понятий мы опускаем.

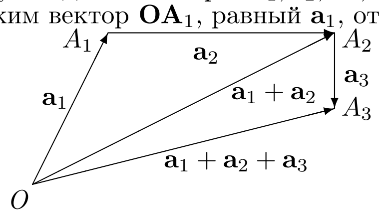
Определение. Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ называются равными, если: 1) $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$ и 2) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{MN}|$.

Как видим, векторы считаются равными независимо от положения их начала. Такие векторы называются свободными.

В дальнейшем будем обозначать векторы одной малой буквой: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т.д.

Отложить вектор $\mathbf{a}$ от точки A означает построить вектор $\mathbf{AB}$, равный $\mathbf{a}$. На множестве всех векторов определим две операции: внутреннюю — сложение векторов, и внешнюю — умножение вектора на число.

Пусть даны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. От произвольной точки O отложим вектор $\mathbf{OA}_1$, равный $\mathbf{a}_1$, от точки A_1 отложим



вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, равный $\mathbf{a}_2$ и т.д., от точки A_{n-1} отложим вектор $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_n$, равный $\mathbf{a}_n$. Вектор $\mathbf{OA}_n$ называется суммой векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и обозначается $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число α называется вектор $\mathbf{b}$, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ и определяемый условиями: а) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$; б) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$; в) $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$; г) $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Верно и обратное утверждение, т.е. если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то существует число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Действительно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ оба нулевые, то $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ при любом значении λ. Если же $\mathbf{b} \neq 0$, то условие $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ выполняется при $\lambda = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, и при $\lambda = -\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Легко показать, что для любых векторов и любых чисел справедливы утверждения:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4) для всякого вектора $\mathbf{x}$ найдётся вектор $\mathbf{y}$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (действительно, если $\mathbf{x} = \mathbf{AB}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{BA}$);
5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$; 6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;
7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$; 8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Таким образом, операции умножения вектора на число и сложения векторов удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, т.е. множество всех векторов является линейным пространством. Обозначим его V_3. Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и линейной независимости систем векторов определяются так же, как и для линейного n-мерного пространства.

Поскольку исходное точечное пространство принято трёхмерным, то и линейное пространство V_3, ему сопоставленное, также трёхмерно (это утверждение примем без доказательства), а потому его базис состоит из линейно независимой системы трёх векторов.

Подпространствами V_3 являются одномерные пространства V_1 и двумерные — V_2. Подпространство V_1 можно определить как множество всех векторов, параллельных некоторой фиксированной прямой, а V_2 — как множество векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Систему трёх и более векторов, параллельных одной плоскости, называют *компланарной*, если же такой плоскости не существует, то система векторов называется *некомпланарной*.

В качестве базиса в V_1 можно принять любой его ненулевой вектор, а в V_2 — любую пару непараллельных векторов этого подпространства.

Определение понятия координат вектора, доказательство их существования и единственности в V_3 (V_1, V_2) производятся так же, как и в линейных n-мерных пространствах. Напомним, что координатами вектора называются коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой данный вектор выражается через базисные. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число. Понятию линейной зависимости векторов в V_3 можно дать геометрическую характеристику, приведённую в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Система из двух векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны.

Доказательство. Пусть система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима, т.е. имеет место $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = 0$, причём среди чисел λ_1, λ_2 есть ненулевые, например, $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\mathbf{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2$. Из определения операции умножения вектора на число следует, что $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{a}_2$.

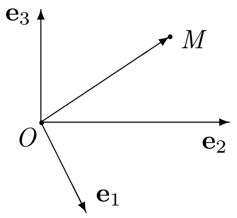
Пусть $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{a}_2$. Если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ оба нулевые, то такая система, очевидно, линейно зависима. Если же $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$, что показано ранее при определении операции умножения вектора на число.

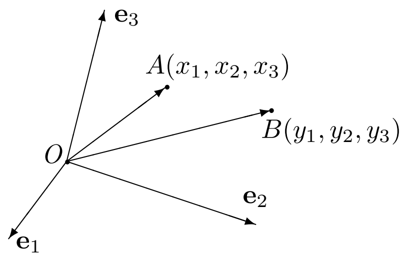
Теорема 2. Система из трёх векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда она компланарна.

Доказательство. Пусть система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима, причём среди векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ нет коллинеарных. Поскольку один из этих векторов является линейной комбинацией двух других (по теореме 1 из п.1.3.2), то он параллелен плоскости, определяемой ими, т.е. система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарна. Если же среди векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ есть коллинеарные, то эта система, очевидно, компланарна.

Обратно, если система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарна, то она принадлежит некоторому двумерному подпространству, а потому линейно зависима $(3 > 2)$.

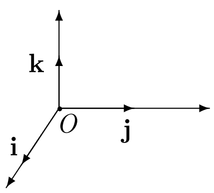
Аналогично тому, как это сделано в аффинном и точечно-векторном евклидовом пространстве в V_3, можно определить понятия аффинной и декартовой систем координат, радиуса-вектора точки и координат точки.





Конструкция, состоящая из точки O и приложенного к ней векторного базиса, называется *аффинной системой координат*. Вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. Координатами точки M называются координаты её радиуса-вектора.

Даны координаты точек $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$. Найдём координаты вектора $\mathbf{AB}$. Видим, что $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Чтобы найти координаты вектора $\mathbf{AB}$, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.



Векторный базис называют *декартовым*, если его векторы попарно ортогональны и единичны. Векторы декартового базиса обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Конструкция, состоящая из произвольной точки O и приложенного к ней декартова базиса, называется *декартовой системой координат.*

Пример 1. Дан вектор $\mathbf{AB} = (2, -5, 4)$. Известны координаты точки $B(-4, 4, 3)$. Найти координаты точки $A(x, y, z)$.

Решение. Имеем $\mathbf{AB} = (-4-x, 4-y, 3-z) = (2, -5, 4)$. $-4-x = 2$, $x = -6$, $4-y = -5$, $y = 9$, $3-z = 4$, $z = -1$. Таким образом, искомые координаты $(-6, 9, -1)$.

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A(4, 3, 5)$, $B(2, 7, 9)$, $C(6, 1, 1)$. Найти координаты вектора $\mathbf{CM}$, направленного по медиане треугольника.

Решение. Находим координаты точки

$M\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{3+7}{2}, \dfrac{5+9}{2}\right)$, т.е. $M(3,5,7)$. Координаты вектора $\mathbf{CM}$ находим, вычитая из координат точки M соответствующие координаты точки C: $\mathbf{CM} = (3-6, 5-1, 7-1)$, $\mathbf{CM} = (-3, 4, 6)$.

1.5.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны отрезок AB и точка M, лежащая на прямой AB. Говорят, что точка M делит отрезок AB в отношении λ ($\lambda \neq -1$), если $\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{MB}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M лежит внутри отрезка AB, если же $\lambda < 0$, то точка M лежит вне AB.

Выберем некоторую систему координат и пусть относительно этой системы даны координаты точек A и B: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдём координаты (x_0, y_0, z_0) точки M, делящей отрезок AB в отношении $\lambda (\lambda \neq -1)$. Так как $\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{MB}$ и $\mathbf{AM} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$, $\mathbf{MB} = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}$, то $x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0)$, $y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0)$, $z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0)$.

Следовательно:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.41}$$

Отсюда, в частности, следует известное из средней школы положение, уже использованное нами: координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов (в этом случае $\lambda = 1$).

Пример 3. Дан треугольник ABC координатами своих вершин $A(1,-3,-2)$, $B(3,5,7)$, $C(-1,5,-3)$. Найти координаты (x_0, y_0, z_0) точки D пересечения его медиан.

Решение. Как известно, точка D делит медиану AM в отношении $\lambda = 2$. Так как точка M имеет координаты $(1,5,2)$, то по формулам (1.41) находим

$$x_0 = \frac{1+2\cdot 1}{1+2} = 1, \quad y_0 = \frac{-3+2\cdot 5}{1+2} = \frac{7}{3}, \quad z_0 = \frac{-2+2\cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

1.5.3. Проекция вектора на ось

Прямая, с заданными на ней точкой и единичным базисным вектором $\mathbf{e}$, называется *осью.*

Ортогональной проекцией точки A на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A.

Проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось l называется координата вектора $\mathbf{A'B'}$ относительно единичного вектора $\mathbf{e}$ оси, где A' и B' — проекции точек A и B на ось l, т.е. если $\mathbf{A'B'} = \alpha\mathbf{e}$, то число α называется проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось l. Обозначают $\alpha = \text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{AB}$.

Из правила сложения и умножения на число векторов, заданных своими координатами, следует, что $\text{Пр}_{\mathbf{e}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} + \beta\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{b}$, где α и β — любые числа.

Легко показать, что $\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{a}$, отсчитанный по правилам тригонометрии: от вектора $\mathbf{e}$ против часовой стрелки до вектора $\mathbf{a}$.

1.5.4. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, обозначаемое $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi.$$

Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение полагается равным нулю.

Из определения скалярного произведения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны.

Легко доказать следующие свойства скалярного произведения:

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$;
3. $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Таким образом, скалярное произведение, введенное в этом подразделе, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, рассмотренного в п. 1.3.8.

Скалярное произведение двух векторов, заданных декартовыми координатами, равно сумме произведений одноимённых декартовых координат. Действительно:

$$(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

так как $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0$, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = (\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1$.

С помощью скалярного произведения можно находить:

1) длину вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

$$\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = |\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

2) расстояние d между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

3) проекцию одного вектора на направление другого:

$$\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|};$$

4) косинус угла между векторами: $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$;

5) косинусы углов α, β, γ между векторами и осями координат, называемые направляющими косинусами:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\cos(\gamma) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

6) координаты орта вектора $\mathbf{a}$, т.е. координаты вектора $\mathbf{a}_0$, направленного так же, как и $\mathbf{a}$, по длине равного единице.

Координаты орта вектора совпадают с его направляющими косинусами.

Пример 4. Найти $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45^\circ$.

Решение: $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (4\mathbf{p} + \mathbf{r}, 4\mathbf{p} + \mathbf{r}) = 16(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 8(\mathbf{p}, \mathbf{r}) +$
$+(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 16 + 8 + 2 = 26$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{26}$.

Пример 5. Дано три вектора: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. Найти $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Решение. Находим $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dfrac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|}$,

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{4, -2, -6\}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 12 + 8 - 72 = -52$;

$|\mathbf{c}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$; $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\dfrac{52}{13} = -4$.

1.5.5. Векторное произведение и его свойства

Пусть дана упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$, построенных из одной точки. Говорят, что эта тройка образует правую связку, если движение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ в кратчайшем направлении происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{c}$. В противном случае связка называется левой.

Определение. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ относительно данной системы координат называется третий вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, который:

1) ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

2) имеет длину, равную произведению длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на синус угла между ними, т.е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b})$.

3) тройка векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ образует правую связку, если система координат правая, и левую связку, если система координат левая.

Замечаем, что введенное понятие векторного произведения существенно зависит от ориентации системы координат. Если мы перейдем от одной системы координат к другой системе той же ориентации (от правой к правой либо от левой к левой), то $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ не изменится. При изменении ориентации системы координат вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ изменит лишь направление на противоположное. В дальнейшем мы будем использовать правую систему координат, а потому тройку векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ считать образующей правую связку.

Если векторы либо коллинеарны, либо хотя бы один из них нулевой, то полагаем $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Отметим свойства векторного произведения.

1. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, как на сторонах (следует из элементарной геометрии).

2. Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны. Действительно, из $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = 0$ следует $\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = 0$.

3. Векторное произведение антикоммутативно, т.е.
$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$.
Действительно, как следует из определения векторного произведения, векторы $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ будут иметь одинаковые длины и противоположные направления.

4. Скалярный множитель можно вынести за знак векторного произведения, т.е. $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.
Действительно, при $\lambda = 0$ и при $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ равенство очевидно.

При $\lambda > 0$, $\lambda\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, а потому $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и

$$[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}], \ \ |[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\lambda\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) =$$
$$= \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = \lambda\,|[\mathbf{ab}]|,$$

откуда и следует утверждение.
При $\lambda < 0$, $\lambda\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, поэтому $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\downarrow [\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Тогда

$$[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}], \ \ |[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\lambda\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) =$$
$$= |\lambda||\mathbf{a}| \sin\{\pi - \mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}\} = |\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = |\lambda|\,|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]|.$$

5. Имеет место распределительный закон операции векторного произведения относительно операции сложения векторов, т.е. $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$. Это свойство примем без доказательства.

Получим выражение векторного произведения через декартовы координаты перемножаемых векторов.
Пусть $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ — декартов базис, т.е. $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 0$, $(\mathbf{i},\mathbf{k}) = 0$, $(\mathbf{j},\mathbf{k}) = 0$. Если базис правый, то $[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{i},\mathbf{k}] = -\mathbf{j}$, $[\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}$, $[\mathbf{k},\mathbf{j}] = -\mathbf{i}$, $[\mathbf{j},\mathbf{i}] = -\mathbf{k}$.
По определению $[\mathbf{i},\mathbf{i}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{j},\mathbf{j}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{k},\mathbf{k}] = \mathbf{0}$.
Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$. Используя свойства 4 и 5, получим

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] = x_1x_2[\mathbf{i},\mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i},\mathbf{j}]+$$
$$+x_1z_2[\mathbf{i},\mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j},\mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] + y_1z_2[\mathbf{j},\mathbf{k}] + z_1x_2[\mathbf{k},\mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k},\mathbf{j}]+$$
$$+z_1z_2[\mathbf{k},\mathbf{k}] = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - x_2y_1\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Полученный результат можно записать в компактной форме: $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, так как предыдущее равенство совпадает с разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки, если бы вместо **i**, **j**, **k** были числа.

Векторное произведение можно применять при нахождении какого-либо вектора, ортогонального двум данным, при вычислении площадей параллелограмма и треугольника, при нахождении линейной скорости через угловую и радиус-вектор точки, при вычислении моментов силы относительно точки и решении других задач.

1.5.6. Смешанное произведение

Определение. Смешанным произведением трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий. Обозначается смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Таким образом, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны. Построим параллелепипед на этих векторах, как на рёбрах. Обозначим высоту параллелепипеда через H, а $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — через d. Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]||\mathbf{c}| \cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}).$$

Так как $|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}) = H$, если тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ правая, и $|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}) = -H$, если тройка левая, а величина $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$ равна площади основания параллелепипеда, то смешанное произведение имеет следующий геометрический смысл: абсолютная величина смешанного произведения трёх некомпланарных векторов равна объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах. Если тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — правая, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$, если левая, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

Три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Получим выражение смешанного произведения через декартовы координаты сомножителей.

Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$. Тогда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}$;

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (y_1z_2 - y_2z_1)x_3 - (x_1z_2 - x_2z_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в первой строке которого записаны координаты первого вектора, во второй — второго, в третьей — третьего вектора.

Из свойств определителя вытекает, что при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не изменяется, т.е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на обратный.

Смешанное произведение можно применять при вычислении объёмов параллелепипеда, пирамиды, длин их высот. Например, объём пирамиды ABCD: $V = \dfrac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$.

Замечание. Имея векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, можно рассматривать $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ как произведение вектора $\mathbf{c}$ на скаляр $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, а также двойное векторное произведение $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$.

Пример 6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$ и $\varphi = (\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45°$.

Решение.

$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[2\mathbf{p} + \mathbf{r}, \mathbf{p} + 3\mathbf{r}]| = |2[\mathbf{p}, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 6[\mathbf{p}, \mathbf{r}] +$

$+3[\mathbf{r}, \mathbf{r}]| = 5|[\mathbf{p}, \mathbf{r}]| = 5|\mathbf{p}||\mathbf{r}| \sin\varphi,$

так как $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$, а $[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = -[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$.

Таким образом, $S = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10.$

Пример 7. Дано: $A(0, -3, -2)$; $B(0, -2, -3)$; $C(-2, -5, -1)$; $D(-2, 1, 2)$. Найти:

а) площадь S параллелограмма, построенного на векторах

$\dfrac{1}{3}\mathbf{DA}$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{DC}$;

б) объём V пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{AB} + \mathbf{DB}$, $\mathbf{DA}$ и $\mathbf{DC}$.

Решение:

а) $S = \left|\dfrac{1}{6}[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}]\right|$; $\mathbf{DA} = (2, -4, -4)$; $\mathbf{DC} = (0, -6, -3)$.

$$[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

$S = \dfrac{1}{6}|6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = |(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$

б) $V = \dfrac{1}{6}|(\mathbf{AB} + \mathbf{DB}, \mathbf{DA}, \mathbf{DC})|$. Находим $\mathbf{AB} = (0, 1, -1)$; $\mathbf{DB} = (2, -3, -5)$; $\mathbf{AB} + \mathbf{DB} = (2, -2, -6)$.

Находим объём пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \bmod \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

1.6. Функции в линейных пространствах

В этом подразделе будут изучены наиболее важные частные классы функций — классы линейных и билинейных отображений одного линейного пространства в другое, а также во множество вещественных чисел.

1.6.1. Функции, отображения

Пусть даны два линейных пространства R и R' и некоторые множества $E \subset R$ и $F \subset R'$.

Соответствие, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ из E сопоставляет некоторый вектор $\mathbf{y}$ из F, называется *отображением* E в F.

Если E совпадает с R, а F с R', то имеем отображение R в R'. Отображение называют также *функцией*, или *оператором*, обозначают обычно буквой f и записывают $y = f(x)$, или $f : E \to F$, или $E \xrightarrow{f} F$. Говорят, что f есть функция переменного $\mathbf{x}$ со значениями в F. При этом элемент $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ называют образом элемента $\mathbf{x}$ при отображении f, а $\mathbf{x}$ — прообразом элемента $\mathbf{y}$.

Пусть $R = R^n$, $R' = R^m$. Если в пространстве R^n и R^m фиксировать базисы, то отображение $f : R^n \to R^m$ определит выражения координат $y^1, y^2, \ldots, y^m$ вектора $\mathbf{y}$ через координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ вектора $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{l} y^1 = f_1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ y^2 = f_2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^m = f_m(x^1, x^2, \ldots, x^n). \end{array} \tag{1.42}$$

Таким образом, задание отображения R^n в R^m при фиксированных базисах равносильно заданию m числовых функций n числовых аргументов.

Произвольные отображения изучаются в математическом анализе. В данном разделе будем изучать лишь линейные отображения конечномерных пространств, тот случай, когда все функции в (1.42) линейны, т.е. имеют вид $y^i = a^i_1 x^1 + a^i_2 x^2 + \ldots +$

$+a_n^i x^n$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, а коэффициенты a_k^i $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются некоторыми константами.

1.6.2. Линейные операторы

Определение. Пусть имеется два (не обязательно различных) линейных пространства R и R'. Линейным отображением пространства R в R' или линейным оператором, действующим из R в R', называется отображение A пространства R в R', обладающее следующим свойством:

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y},$$

для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любых действительных чисел α и β.

Это соотношение эквивалентно двум: $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$, $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$, получающимся из данного при $\alpha = \beta = 1$ и при $\beta = 0$.

Иногда в записи $A(\mathbf{x})$ будем скобки опускать и писать $A\mathbf{x}$.

Примеры.

1. Оператор, который каждому вектору из R сопоставляет нуль-вектор из R', называется нулевым. Этот оператор, очевидно, линеен.

2. Пусть оператор Π действует из арифметического линейного пространства R^3 в пространство R^2 по закону $\Pi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (\xi^1, \xi^2)$. Этот оператор называется *оператором проектирования.* Покажем, что он линеен. Если $\mathbf{x} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и $\mathbf{y} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ — два произвольных вектора из R^3, то $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha\xi^1 + \beta\eta^1, \alpha\xi^2 + \beta\eta^2, \alpha\xi^3 + \beta\eta^3)$, где α и β — любые числа. Находим $\Pi\mathbf{x} = (\xi^1, \xi^2)$, $\Pi\mathbf{y} = (\eta^1, \eta^2)$, $\Pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = (\alpha\xi^1 + \beta\eta^1, \alpha\xi^2 + \beta\eta^2) = \alpha\Pi\mathbf{x} + \beta\Pi\mathbf{y}$, т.е. оператор Π линеен.

Теорема 1. Пусть R^n — n-мерное линейное пространство и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — его базис. Какая бы ни была совокупность векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ из R', существует единственный линейный оператор $A : R^n \to R'$, удовлетворяющий условию $A\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$ $(i = \overline{1, n},$

Замечание. Говоря другими словами, линейный оператор полностью определяется своими значениями на базисных векторах.

Доказательство. Предположим, что линейный оператор A существует. Тогда для любого $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ из R^n выполняется условие $A\mathbf{x} = A(\xi^i\mathbf{e}_i) = \xi^i A\mathbf{e}_i = \xi^i\mathbf{f}_i$, откуда следует единственность оператора A. С другой стороны, для любого $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ положим по определению $A\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{f}_i$, а потому и $A\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$. Докажем, что таким образом построенный оператор A линеен. Действительно, если $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = \eta^i\mathbf{e}_i$ — два произвольных вектора из R_n, а α и β — произвольные числа, то $A\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{f}_i$, $A\mathbf{y} = \eta^i\mathbf{f}_i$,

$A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = A[(\alpha\xi^i+\beta\eta^i)\mathbf{e}_i] = (\alpha\xi^i+\beta\eta^i)\mathbf{f}_i = \alpha\xi^i\mathbf{f}_i+\beta\eta^i\mathbf{f}_i = = \alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y}$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $X \subset E$ и $A : X \to L$. Оператор $B : E \to L$ такой, что $Bx = Ax$ для всякого $x \in X$ называется продолжением опeратра A с множества X на множество E. Поэтому теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1а. Существует единственное линейное продолжение с базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ n-мерного линейного пространства E на всё линейное пространство E.

Заметим также, что среди операторов со свойством $A\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$ линейным является только один, а нелинейных много.

1.6.3. Матрица линейного оператора

Пусть A — линейный оператор, действующий из R^n в R^m, и $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — произвольный базис R^n, а $\{\mathbf{f}_j\} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$ — базис пространства R^m. Подействуем оператором A на каждый из базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. В результате получим n векторов $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n$ пространства R^m, которые можно разложить по векторам базиса $\mathbf{f}_j$ и записать

$$A\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{f}_j \quad (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}) \tag{1.43}$$

или в подробной записи

$$\begin{gathered}
A\mathbf{e}_1 = a_1^1\mathbf{f}_1 + a_1^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_1^m\mathbf{f}_m, \\
A\mathbf{e}_2 = a_2^1\mathbf{f}_1 + a_2^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_2^m\mathbf{f}_m, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A\mathbf{e}_n = a_n^1\mathbf{f}_1 + a_n^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_n^m\mathbf{f}_m.
\end{gathered}$$

Числа a_i^j определяют матрицу

$$A_{(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}$$

размера $(m \times n)$, называемую матрицей оператора A в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$. Заметим, что в s-м столбце матрицы A записаны координаты вектора $A\mathbf{e}_s$ относительно базиса $\{\mathbf{f}_j\}$.

Из теоремы 1 следует, что линейный оператор полностью определяется заданием его матрицы относительно данных базисов, так как она указывает образы базисных векторов. Это значит, что, зная матрицу A, можно найти результат действия линейного оператора на любой вектор. Покажем, как это сделать.

Пусть $\mathbf{x} = \xi^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \eta^j \mathbf{f}_j$. Требуется выразить координаты η^j вектора $A\mathbf{x}$ через числа ξ^i и a_i^j. Находим, используя формулы (1.43), $\eta^j \mathbf{f}_j = A\mathbf{x} = A(\xi^i \mathbf{e}_i) = \xi^i A\mathbf{e}_i = \xi^i a_i^j \mathbf{f}_j$. Отсюда следует, что

$$\eta^j = a_i^j \xi^i \ (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}), \tag{1.44}$$

или в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, s-я координата вектора $A\mathbf{x}$ есть линейная комбинация координат вектора $\mathbf{x}$. Коэффициенты этой линейной комбинации образуют s-ю строку матрицы A оператора.

Итак, после выбора базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$ пространств R^n и R^m каждому линейному оператору сопоставляется единственная матрица $[a_i^j]$. Если задана произвольная матрица $[a_i^j]$ размера $(m \times n)$, то её можно считать матрицей линейного оператора $A : R^n \to R^m$, полагая координатами векторов $A\mathbf{e}_i$ столбцы этой матрицы. Таким образом, между всеми матрицами размера $(m \times n)$ и всеми линейными операторами, действующими из R^n в R^m с фиксированными базисами, устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Например, нулевой оператор в любых базисах имеет нулевую матрицу.

Рассмотрим оператор $\Pi : R^3 \to R^2$ проектирования, где R^3 и R^2 — арифметические линейные пространства. Зафиксируем базисы $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ в R^3 и $\mathbf{f}_1 = (1,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1)$ в R^2. Тогда $\Pi\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\Pi\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\Pi\mathbf{e}_3 = (0,0)$. Матрица оператора Π в этих базисах имеет вид $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Матрица линейного оператора, действующего из R^n в R^1, будет состоять из одной строки, а действующего из R^1 в R^n — из одного столбца.

Часто рассматриваются операторы $A : R^n \to R^n$. В этом случае достаточно выбрать базис $\{\mathbf{e}_i\}$, а базис $\{\mathbf{f}_j\}$ считать совпавшим с $\{\mathbf{e}_i\}$. Формулы (1.43) принимают вид

$$A\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{e}_j,$$

причём матрица $[a_i^j]$ — квадратная порядка n. Соотношения (1.44) сохраняются при условии $m = n$.

Пример. Является ли линейным отображение $A\mathbf{x} = (2x_2, x_1 + x_3, -x_3)$? Если да, то записать матрицу отображения.

Решение. Проверим условия линейности. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

$A(x + y) = (2x_2 + 2y_2, x_1 + y_1 + x_3 + y_3, -x_3 - y_3) =$

$= (2x_2, x_1 + x_3, -x_3) + (2y_2, y_1 + y_3, -y_3) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ и

$A(\alpha x) = (2\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_3, -\alpha x_3) = \alpha(2x_1, x_1 + x_3, -x_3) =$
$= \alpha A\mathbf{x}$.

Отображение является линейным. Найдём его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. $A\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0)$, $A\mathbf{e}_2 = (2, 0, 0)$, $A\mathbf{e}_3 = (0, 1, -1)$.

Тогда $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Мы видели, что матрица линейного оператора зависит от выбора базиса. Найдём закон изменения матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Обозначим матрицу оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ через $A = [a_i^k]$, а в базисе $\{\mathbf{f}_j\}$ — через $B = [b_j^k]$. По формулам $\mathbf{f}_j = c_j^m \mathbf{e}_m$ (см. 1.24) перейдём от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{f}_j$. Тогда $A\mathbf{f}_j = b_j^m \mathbf{f}_m = \underline{b_j^m c_m^i \mathbf{e}_i} = A(c_j^m \mathbf{e}_m) = \underline{c_j^m a_m^i \mathbf{e}_i}$. Из подчёркнутого следует, что $b_j^m c_m^i = c_j^m a_m^i$. Если обозначим $C = [c_i^j]$, то в матричной форме это соотношение можем записать в виде $CB = AC$.

Действительно, $b_j^m c_m^i$ — это элемент матрицы CB, стоящий в i-й строке, j-м столбце, а $c_j^m a_m^i$ — это элемент матрицы AC, стоящий в i-й строке, j-м столбце. Размеры матрицы CB и AC одинаковы. Отсюда $B = C^{-1}AC$. Мы получили закон изменения матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Теорема 2. Определитель матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ не изменяется при изменении базиса.

Доказательство. По свойству 9 определителя (см. 1.2.5) имеем $|B| = |C^{-1}||A||C|$, но $|C^{-1}||C| = 1$, поэтому $|B| = |A|$.

Отсюда следует, что если матрица линейного оператора $A : R^n \to R^n$ невырождена в одном из базисов, то она невырождена и во всех остальных.

1.6.4. Область значений линейного оператора. Ранг линейного оператора

Пусть линейный оператор A действует из R^n в R^m. Множество $T(A)$ всех векторов $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in R^n$) называется *областью значений* оператора A.

Выберем в R^n базис $\{\mathbf{e}_i\}$, а в R^m — базис $\{\mathbf{f}_j\}$. Для любого вектора $\mathbf{x} = \xi^i \mathbf{e}_i$ из R^n можем записать $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \xi^i A\mathbf{e}_i$, т.е.

множество $T(A)$ есть линейная оболочка векторов

$$A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n, \tag{1.45}$$

являющаяся линейным подпространством пространства R^m. Размерность этого подпространства равна максимальному числу линейно независимых векторов в (1.45) (см. теорему 7 из п.1.3). Но в матрице A оператора A в столбцах записаны координаты вектора $A\mathbf{e}_i$ в базисе $\{\mathbf{f}_j\}$, поэтому это число совпадает с рангом r матрицы A. Так как подпространство $T(A)$ строится независимо от выбора базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$, то его размерность также не зависит от этих базисов. Это означает, что ранг r матрицы оператора A не зависит от выбора базисов, а зависит только от самого оператора. Мы доказали теорему 3.

Теорема 3. Область значений линейного оператора A, действующего из R^n в R^m, есть линейное подпространство размерности, равной рангу r матрицы оператора A, относительно любых базисов этих пространств.

Число r называют *рангом оператора* A.

Нуль-многообразием $N(A)$, или *ядром*, оператора A, действующего из R^n в R^m, называется множество всех тех векторов $\mathbf{x}$ из R^n, для которых $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Из (1.44) следует, что координаты векторов $\mathbf{x} = \xi^i \mathbf{e}_i$, принадлежащих нуль-многообразию $N(A)$, удовлетворяют системе однородных уравнений

$$\xi^i a_i^j = 0,$$

где $[a_i^j]$ — матрица линейного оператора A в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$. Из теоремы 5 п.1.4 следует, что множество $N(A)$ образует линейное подпространство размерности $n-r$, где r — ранг оператора $A : R^n \to R^m$.

1.6.5. Действия над линейными операторами

Пусть дано два линейных оператора A и B, отображающих пространство R^n с базисом $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ в линейное пространство R^m с базисом $\{\mathbf{f}_j\} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$. Матрицы этих операторов в выбранных базисах обозначим $A = [a_i^j]$, $B = [b_i^j]$.

1. *Равенство линейных операторов.* Два линейных оператора A и B, действующих из R^n в R^m, называют равными (пишут $A = B$), если для любого вектора $\mathbf{x} \in R^n$ выполняется условие $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$. Очевидно, что равные операторы имеют одинаковые матрицы в одних и тех же базисах.

2. *Сложение линейных операторов.* Суммой линейных операторов A и B называется оператор C, обозначаемый $A + B$, определяемый равенством $C\mathbf{x} = (A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$. Покажем, что оператор $C : R^n \to R^m$ линейный. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два произвольных вектора из R^n и α, β — произвольные числа. Тогда

$C(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)=A(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)+B(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)=$
$=\alpha A\mathbf{x}_1+\beta A\mathbf{x}_2+\alpha B\mathbf{x}_1+\beta B\mathbf{x}_2=$
$=\alpha(A\mathbf{x}_1+B\mathbf{x}_1)+\beta(A\mathbf{x}_2+B\mathbf{x}_2)=\alpha C\mathbf{x}_1+\beta C\mathbf{x}_2,$
т.е. оператор C — линейный.

Найдём матрицу $C=[c_i^j]$ оператора C в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$. Находим
$C\mathbf{e}_i=c_i^j\mathbf{f}_j=(A+B)\mathbf{e}_i=A\mathbf{e}_i+B\mathbf{e}_i=a_i^j\mathbf{f}_j+b_i^j\mathbf{f}_j=(a_i^j+b_i^j)\mathbf{f}_j$.
Отсюда $c_i^j=a_i^j+b_i^j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, т.е. $C=A+B$.
Как видим, при сложении линейных операторов их матрицы относительно одних и тех же базисов складываются.

3. *Умножение оператора на число.* Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор B (обозначается $B=\lambda A$), определяемый условием $B\mathbf{x}=(\lambda A)\mathbf{x}=\lambda A\mathbf{x}$. Предлагается самостоятельно доказать линейность оператора B и что матрица оператора B равна произведению матрицы оператора A на число λ.

4. *Композиция линейных операторов.* Пусть A — оператор, действующий из множества X в множество Y, а B — оператор, действующий из Y в Z. В результате возникает отображение C, обозначаемое $C=B\circ A$, множества X в Z, которое можно определить формулой $C\mathbf{x}=(B\circ A)\mathbf{x}=B(A\mathbf{x})$. Оператор C называется *композицией*, или *суперпозицией*, операторов A и B.

Теорема . Пусть A — линейный оператор, действующий из пространства R^n в R^m, а B — линейный оператор, действующий из R^m в R^s. Тогда суперпозиция $C=B\circ A$, операторов A и B есть оператор линейный и его матрица равна произведению матриц исходных операторов.

Доказательство. Покажем, что оператор C линеен. Находим $C(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)=B[A(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)]=$ $=B[\alpha A\mathbf{x}_1+\beta A\mathbf{x}_2]=\alpha B(A\mathbf{x}_1)+\beta B(A\mathbf{x}_2)=\alpha C\mathbf{x}_1+\beta C\mathbf{x}_2$, т.е. оператор C линеен.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — базис R^n,
$\{\mathbf{f}_k\}=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m)$ — базис R^m, $\{\mathbf{g}_r\}=(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_s)$ — базис R^s. Найдём матрицу $C=[c_i^r]$ линейного оператора $C:R^n\to R^s$ в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{g}_r\}$.

Используя определение матрицы линейного оператора (см. формулы (1.43)), находим $C\mathbf{e}_i=\underline{c_i^r\mathbf{g}_r}=B(A\mathbf{e}_i)=B(a_i^k\mathbf{f}_k)=$ $=a_i^kB\mathbf{f}_k=\underline{a_i^kb_k^r\mathbf{g}_r}$. Сравнивая подчёркнутые выражения, получаем

$$c_i^r=a_i^kb_k^r,\ i=\overline{1,n},k=\overline{1,m},r=\overline{1,s}. \tag{1.46}$$

Из соотношений (1.46) и определения произведения матриц (см. п.1.1.5) следует, что $C=B\cdot A$, т.е. матрица C композиции линейных операторов A и B является произведением матриц этих операторов.

Рассмотренные действия над линейными операторами обладают теми же свойствами, что и аналогичные операции над матрицами (см. соотношения (1.3)).

Докажем, например, что $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$, где A, B, C — линейные операторы, B и $C : R^n \to R^m$, $A : R^m \to R^s$.

Находим $[A \circ (B + C)]\mathbf{x} = A[(B + C)\mathbf{x}] = A[B\mathbf{x} + C\mathbf{x}] =$
$= A(B\mathbf{x}) + A(C\mathbf{x}) = A \circ B\mathbf{x} + A \circ C\mathbf{x} = (A \circ B + A \circ C)\mathbf{x}$, т.е. $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$. Если A, B, C — матрицы операторов A, B, C, то $A(B + C) = AB + AC$, что следует из того, что матрица суммы операторов равна сумме их матриц, а матрица композиции операторов равна произведению их матриц. Предлагается таким же образом доказать и все остальные равенства в соотношениях (1.3).

5. *Обратный оператор.* Пусть A — оператор, осуществляющий взаимно однозначное отображение множества X на множество Y. Тогда можно определить отображение B множества Y на множество X такое, что $B \circ A = E_x$ или, что тоже самое, $A \circ B = E_y$, где $E_x\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x}$ из X, $E_y\mathbf{y} = \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y}$ из Y — тождественные (единичные) операторы.

Теорема . Если A — взаимно однозначный линейный оператор действующий из R^n в R^n, то обратный к нему оператор линеен и его матрица является обратной к матрице исходного оператора.

Можно показать, что линейный оператор является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда он невырожденный (его матрица невырожденная).

Множество всех линейных операторов $A : R^n \to R^m$ образует абелеву группу, если в качестве операции примем операцию сложения.

Множество всех линейных операторов $A : R^n \to R^n$ с невырожденной матрицей A образует некоммутативную группу, если за групповую операцию принять композицию операторов.

Множество всех линейных операторов $A : R^n \to R^m$ образует линейное пространство, если в качестве внешней операции принять умножение оператора на число, а в качестве внутренней — сложение операторов. Предлагается доказать, что его размерность равна $n \cdot m$.

1.6.6. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть $A : R^n \to R^n$ — линейный оператор и A — его матрица относительно базиса $\mathbf{e}_i$.

Собственным вектором линейного оператора A (матрицы A) называется ненулевой вектор $\mathbf{x}$ такой, что

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1.47}$$

Число λ называется собственным числом, отвечающим собственному вектору $\mathbf{x}$.

Для единичной матрицы E любой вектор $\mathbf{x}$ является собственным, с собственным числом, равным 1, так как $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$, что следует из формул (1.44).

Получим правило отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы. Соотношение (1.47) можно переписать в виде $A\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x}$ или $A\mathbf{x} - \lambda E\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е.

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{1.48}$$

Соотношение (1.48) представляет собой матричную запись однородной системы n уравнений с n неизвестными, определитель которой равен $\det(A - \lambda E)$.

Для того чтобы система (1.48) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{1.49}$$

Равенство (1.49) представляет собой уравнение относительно λ. Это уравнение называется характеристическим.

В подробной записи уравнение (1.49) имеет вид

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив это уравнение, найдём собственные числа $\lambda = \lambda_i$ матрицы. Подставляя их поочерёдно в систему (1.48) и решая её после этого, найдём собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

Среди корней характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ могут быть и кратные. Напомним определение этого понятия, известного из средней школы.

Корень λ_i характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ называется m-кратным, если имеет место $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^m Q(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ — многочлен степени $(n - m)$ относительно λ, причём $Q(\lambda_i) \neq 0$.

Если $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$, то в координатной форме систему (1.48) можно записать в виде

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + (a_n^n - \lambda)x^n = 0. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства собственных векторов.

Теорема 4. Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

Доказательство. Если $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2$, $\dots$, $A\mathbf{x}_m = \lambda\mathbf{x}_m$, то при любых α_i имеет место

$$A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m) = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m A\mathbf{x}_m =$$

$$= \alpha_1\lambda\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\lambda\mathbf{x}_m = \lambda(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m).$$

Следствие. Все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному числу, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.

Это подпространство является линейной оболочкой собственных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$, отвечающих собственному числу λ.

Теорема 5. Если собственные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ линейно независима.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 6. Собственные числа линейного оператора $A : R^n \to R^n$ не изменяются при изменении базиса.

Доказательство. Пусть A и B — матрицы одного линейного оператора в двух разных базисах с матрицей C перехода от одного базиса к другому. Тогда, как показано в п. 1.6.3, имеет место $B = C^{-1}AC$. Находим

$$|B - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| =$$

$$= |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| = |A - \lambda E|.$$

Таким образом, матрицы A и B имеют общее характеристическое уравнение, а потому их собственные числа совпадают.

Пример. Докажите, что вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 1)^T$ является собственным для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$, и найдите соответствующее ему собственное число. Найдите другие собственные числа и отвечающие им собственные векторы.

Решение. Имеем

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-6+4 \\ 4-14+8 \\ 6-14+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}=$$

$$=(-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 1)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = -1$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель, получим $(\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Запишем систему для определения собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} -\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \quad 4x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0, \\ \quad 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Третье уравнение равно разности второго и первого, поэтому его можно вычеркнуть из системы. Мы получили систему

$$\begin{cases} -\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \quad 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве свободного неизвестного можно выбрать x_3 и выразить через него неизвестные x_1 и x_2. Получим

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3,\ x_2 = x_3.$$

Полагая $x_3 = 2$, найдём собственный вектор $(1, 2, 2)$. Проверка:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-6+8 \\ 4-14+16 \\ 6-14+14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

следовательно, вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 2)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = 3$. Собственными векторами, отвечающими числу $\lambda = 3$, будут и векторы $(1, 2, 2)^T t$, где $t \neq 0$. Если $\mathbf{x}$ — собственный вектор, то $t\mathbf{x}$ при $t \neq 0$ — тоже собственный.

Заметим, что собственному числу $\lambda = -1$ кратности 2 отвечает лишь один с точностью до числового множителя собственный вектор, т.к. в рассматриваемом примере $\text{rang}(A - \lambda E) = 2$ при $\lambda =$

-1. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

Если существует базис $\{\mathbf{e}_i\}$, состоящий из собственных векторов оператора $A : R^n \to R^n$, то в этом базисе его матрица имеет диагональный вид, поскольку $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$. При этом по диагонали расположены собственные числа оператора A. Но не всякий линейный оператор имеет такой базис, поскольку собственных линейно независимых векторов может быть менее n (см. пример выше). Рассмотрим частный класс линейных операторов, для которых такой базис всегда существует.

Линейный оператор $A : E^n \to E^n$, действующий в евклидовом пространстве E^n, называется *симметрическим*, или *самосопряженным*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E^n выполняется условие $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$.

Отметим некоторые свойства симметрического линейного оператора.

Свойство 1. Линейный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица A в любом ортонормированном базисе симметрична, т.е. совпадает с транспонированной матрицей A^T.

Предлагается справедливость свойства доказать самостоятельно.

Свойство 2. Собственные векторы симметрического линейного оператора A, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, ортогональны.

Действительно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ собственные векторы оператора A отвечают собственным числам λ_1 и λ_2, то $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, $A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$ и поэтому $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Так как оператор A симметрический, то $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$, т.е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Поскольку $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, следовательно, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны.

Свойство 3. Собственному числу кратности m симметрического линейного оператора соответствует линейно независимая система из m собственных векторов этого оператора.

Свойство 4. Для всякого симметрического линейного оператора (симметричной матрицы) существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

Справедливость свойств 3 и 4 примем без доказательства.

1.6.7. Линейные формы

Отображение $\mathcal{L}$ линейного пространства R во множество вещественных чисел называется *линейной формой*, или *линейным функционалом*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любых чисел α и β выполняется условие $\mathcal{L}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{L}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{L}(\mathbf{y})$.

Например, множество всех интегрируемых на (a, b) функций образует линейное пространство. Линейную форму на нём можно определить соотношением

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Пусть дано линейное пространство R^n с выбранным в нём базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n$ — любой вектор из R^n. Если $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ — произвольная линейная форма, заданная на R^n, то $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n) = x^1\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) + x^2\mathcal{L}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x^n\mathcal{L}(\mathbf{e}_n)$. Обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = a_1$, $\mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = a_2$, $\ldots$, $\mathcal{L}(\mathbf{e}_n) = a_n$. Числа a_i не зависят от выбора вектора $\mathbf{x}$, а зависят только от выбора базиса. Эти числа называются коэффициентами линейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Теперь можем записать $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ — общий вид линейной формы.

Если перейдём к новому базису $\mathbf{f}_j$ по формулам $\mathbf{f}_j = c_j^k\mathbf{e}_k$ и коэффициенты линейной формы $\mathcal{L}$ в новом базисе обозначим через b_j, то $b_j = \mathcal{L}(\mathbf{f}_j) = \mathcal{L}(c_j^k\mathbf{e}_k) = c_j^k\mathcal{L}(\mathbf{e}_k) = c_j^k a_k$, т.е. $b_j = c_j^k a_k$. Таким образом, коэффициенты линейной формы преобразуются по тому же закону, что и базисные векторы, т.е. $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)C$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому (см. (1.25), п. 1.3.11).

Над линейными формами в R^n можно ввести операции сложения и умножения на число следующим образом. Пусть относительно некоторого базиса даны две линейные формы: $\mathcal{L}_1(\mathbf{x}) = a_ix^i$ и $\mathcal{L}_2(\mathbf{x}) = b_ix^i$. Тогда их суммой называют линейную форму $\mathcal{L}_3(\mathbf{x})$, определённую равенством $\mathcal{L}_3(\mathbf{x}) = (a_i + b_i)x^i$, а произведением линейной формы $\mathcal{L}_1(\mathbf{x})$ на число λ называют линейную форму вида $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = (\lambda a_i)x^i$. Легко показать, что введённые операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Следовательно, множество всех линейных форм, заданных на R^n, образует линейное пространство, обозначаемое R_n. Его векторы, составленные из коэффициентов соответствующих линейных форм, являются примером векторов типа $(1 \times n)$, т.е. векторов-строк.

1.6.8. Билинейные и квадратичные формы

Говорят, что на линейном пространстве R^n задана билинейная форма B, если имеется правило, позволяющее любой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R^n сопоставить число $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, причём это правило удовлетворяет условиям:

$$\begin{array}{c} B(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \beta B(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \\ B(\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}_1 + \nu\mathbf{y}_2) = \mu B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \nu B(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \end{array} \tag{1.50}$$

где α, β, μ, ν — любые числа, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — любые векторы из R^n.

Из (1.50) следует, что билинейная форма есть линейная форма относительно первого аргумента при фиксированном втором и линейная форма относительно второго аргумента при фиксированном первом.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — произвольный базис R^n и $\mathbf{x} = \xi^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \eta^j \mathbf{e}_j$, — два произвольных вектора из R^n, тогда $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\xi^i \mathbf{e}_i, \eta^j \mathbf{e}_j) = \xi^i \eta^j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Обозначив $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b_{ij}$, получим

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi^i \eta^j b_{ij} - \tag{1.51}$$

общий вид билинейной формы. Запишем соотношение (1.51) при $n = 3$:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi^1\eta^1 b_{11} + \xi^1\eta^2 b_{12} + \xi^2\eta^1 b_{21} + \xi^1\eta^3 b_{13} + \xi^3\eta^1 b_{31} + $$
$$+\xi^2\eta^3 b_{23} + \xi^3\eta^2 b_{32} + \xi^2\eta^2 b_{22} + \xi^3\eta^3 b_{33}.$$

Числа b_{ij} называются коэффициентами билинейной формы.
Из этих чисел можно составить матрицу

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

называемую матрицей билинейной формы относительно базиса $\mathbf{e}_i$. Выясним, как изменяется матрица билинейной формы при изменении базиса. Пусть $\mathbf{f}_j = c^i_j \mathbf{e}_i$, $C = [c^i_j]$ — формулы перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{f}_j\}$. Коэффициенты билинейной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в новом базисе обозначим $\tilde{b}_{ij}$, а её матрицу через $\tilde{B}$. Находим $\tilde{b}_{ij} = B(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = B(c^k_i \mathbf{e}_k, c^m_j \mathbf{e}_m) = c^k_i c^m_j B(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = c^k_i c^m_j b_{km}$, т.е.

$$\tilde{b}_{ij} = c^k_i c^m_j b_{km}, \ i, j, k, m = \overline{1, n}. \tag{1.52}$$

Соотношения (1.52) эквивалентны матричному равенству

$$\tilde{B} = C^T B C. \tag{1.53}$$

Теорема 7. Ранг r матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Справедливость теоремы 7 следует из соотношения (1.53), теоремы 3 и определения композиции линейных операторов.

Теорема 8. Если матрица билинейной формы невырождена в одном базисе, то она невырождена и во всех остальных.

Действительно, из (1.53) получаем

$$|\tilde{B}| = |C^T| \cdot |B| \cdot |C| = |B| \cdot |C^2|. \tag{1.54}$$

Эта теорема является следствием теоремы 7.

Теорема 9. Знак определителя матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Это утверждение следует из (1.54).

Билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется *симметричной*, если $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R^n.

Если билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симметрична, то относительно любого базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ имеем $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = B(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)$, т.е. $b_{ik} = b_{ki}$, следовательно, $B = B^T$.

Функция $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ одного векторного аргумента $\mathbf{x}$, заданная на линейном пространстве R^n, получающаяся из симметричной билинейной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, называется квадратичной формой. Полагая в (1.51) $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\eta^j = \xi^j$, получаем общий вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \xi^i \xi^j b_{ij}. \tag{1.55}$$

Соотношение (1.55) можно принять за новое определение квадратичной формы. При $n = 3$ квадратичная форма в полной записи имеет вид

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = b_{11}(\xi^1)^2 + b_{22}(\xi^2)^2 + b_{33}(\xi^3)^2 + 2b_{12}\xi^1\xi^2 +$$
$$+ 2b_{13}\xi^1\xi^3 + 2b_{23}\xi^2\xi^3.$$

При этом учтено, что $b_{ik} = b_{ki}$, и приведены подобные члены.

Вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = b_{11}(\xi^1)^2 + b_{22}(\xi^2)^2 + \ldots + b_{nn}(\xi^n)^2$$

называется каноническим.

Теорема 10. Всякая квадратичная форма, заданная в R^n, путём перехода к новому базису может быть приведена к каноническому виду.

Теорему примем без доказательства.

Заметим, что квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами, при этом и сам канонический вид определяется неоднозначно. Однако имеет место следующее утверждение, называемое *законом инерции квадратичных форм.*

Теорема 11. Число m_1 отрицательных коэффициентов и число m_2 положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора преобразований, приводящих квадратичную форму к каноническому виду.

Теорему также примем без доказательства.

Число m_1 называется *отрицательным индексом инерции*, m_2 — *положительным индексом инерции*, а разность $m_2 - m_1$ — *сигнатурой квадратичной формы.*

Квадратичная форма называется *невырожденной*, если её матрица невырождена. Из (1.53) следует, если квадратичная форма невырождена в одном базисе, то она невырождена и во всех остальных.

Невырожденная квадратичная форма называется *положительно определённой*, если для любого $\mathbf{x} \neq 0$ из R^n выполняется $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, и *отрицательно определённой*, если $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$. Если же для одних векторов $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, а для других $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$, то квадратичная форма называется *неопределённой.*

Миноры $\Delta_1 = b_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \ldots,$

$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$, в которых $b_{ik} = b_{ki}$, называются главными.

Теорема 12 (критерий Сильвестра). Квадратичная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, заданная в R^n, положительно определённа тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, и отрицательно определённа, если все её главные миноры отличны от нуля, а их знаки чередуются, начиная с отрицательного.

Теорему примем без доказательства.

Широкое применение находят квадратичные формы, заданные в евклидовых линейных пространствах E^n. Квадратичную форму в евклидовых пространствах относительно ортогонального базиса можно определить равенством $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{x})$, где B — некоторый симметрический линейный оператор $B : E^n \to E^n$.

Возникает вопрос, можно ли квадратичную форму привести к каноническому виду путём перехода к другому ортонормированному базису. Положительный ответ содержится в теореме 13.

Теорема 13. В евклидовом линейном пространстве E^n существует ортонормированный базис $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Доказательство. Заметим, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому матрицы квадратичной формы и линейного оператора изменяются по одному закону, так как в этом случае $C^T = C^{-1}$, где C — матрица перехода. Следовательно, если матрицы линейного оператора и квадратичной формы совпадают в одном ортонормированном базисе, то они совпадают и во всех остальных.

Возьмём симметрический линейный оператор A, матрица которого в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ совпадает с матрицей B квадратичной формы. По свойству 4 симметрического линейного оператора (см. п.1.6.6) существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_j\}$, состоящий из собственных векторов этого оператора. В базисе $\{\mathbf{f}_j\}$ матрица оператора A имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа данного линейного оператора. Матрица квадратичной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в этом же базисе совпадает с

$\tilde{A}$, но тогда квадратичная форма примет канонический вид, причём её коэффициенты совпадут с числами λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n. Теорема доказана.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями квадратичной формы.* Опишем последовательность действий, которые нужно совершить, чтобы привести квадратичную форму к главным осям.

1. По квадратичной форме $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ составляем симметричную матрицу $B = [b_{ik}]$.

2. Находим собственные числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n матрицы B и записываем канонический вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \ldots + \lambda_n(\eta^n)^2.$$

3. Находим собственные векторы матрицы B. При этом если какое-нибудь собственное число λ_i имеет кратность m, то ему будет соответствовать система из m собственных линейно независимых векторов. Полученную систему из m векторов ортогонализируем методом, описанным в п.1.3.8. Проделав такую операцию с каждым собственным вектором, получим ортогональный базис. Пронормировав его, найдём искомый ортонормированный базис.

4. Записываем выражение новых координат $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n$ через старые $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ и наоборот (см. формулы 1.29).

Пример. Привести к главным осям квадратичную форму $Q(\mathbf{x}) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$.

Решение. Записываем матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ данной квадратичной формы и находим собственные числа этой матрицы, решая уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = \\ = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Имеем $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Записываем канонический вид квадратичной формы $Q(\mathbf{x}) = 4(y^1)^2 + (y^2)^2 - 2(y^3)^2$.

Находим единичные собственные векторы матрицы A:

$$\mathbf{f}_1 = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\},\ \mathbf{f}_2 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\},\ \mathbf{f}_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\},$$

образующие новый ортонормированный базис. По формулам (1.29) получаем

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

1.6.9. Тензоры

Мы уже отмечали, что в приложениях математики к решению задач естествознания и техники встречаются величины различной математической природы. Это различие, в частности, может проявляться в характере их изменения при переходе от одной системы координат к другой.

Простейшими с этой точки зрения являются величины, называемые скалярными, которые не изменяются при изменении систем координат, например, масса тела, объём и т.п. Каждая такая величина выражается одним числом и не зависит от выбора системы координат.

Более сложными являются векторные величины, например, скорость, ускорение, сила и т.п. Как мы уже отмечали, векторы в трёхмерном пространстве определяются их координатами — тройками чисел, являющимися коэффициентами линейной комбинации, с помощью которых они выражаются через базисные векторы. Координаты вектора при переходе от одного базиса к другому преобразуются по определённому закону (см. формулы (1.28) и (1.29)).

Следующими после векторов по сложности математической природы являются величины, называемые *тензорами* и возникаемые при изучении линейных, билинейных и полилинейных отображений линейных пространств. Например, величины a_i^j, определяющие матрицу линейного оператора, величины b_{ij}, определяющие матрицу билинейной формы и т.п. Нами уже изучены законы преобразования этих величин при изменении базиса. Дадим общее определение тензора.

Определение. Пусть в каждом базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ линейного пространства R^n задана система n^{p+q} чисел $A = A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, где индексы i_s, $s = \overline{1,p}$ и j_t, $t = \overline{1,q}$, независимо друг от друга принимают значения $1, 2, \ldots, n$. Система чисел A называется тензором $(p+q)$-го ранга p раз ковариантным и q раз контравариантным, если при переходе к любому другому базису $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ эти числа преобразуются по закону

$$A^{j'_1 j'_2 \ldots j'_q}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_p} = C^{i_1}_{i'_1} C^{i_2}_{i'_2} \ldots C^{i_p}_{i'_p} \cdot C^{j'_1}_{j_1} C^{j'_2}_{j_2} \ldots C^{j'_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где $[c^i_{i'}]$ — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, а матрица $[c^{j'}_j]$ — обратная к ней. Числа A при каждых фиксированных значениях индексов $j_1, j_2, \ldots, j_q$, $i_1, i_2, \ldots, i_p$ называют координатами тензора. Для общности рассуждений скалярные величины считают тензорами нулевого ранга, векторы — тензорами первого ранга. Будем координаты векторов относительно нового базиса $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ обозначать $(\xi^{i'})$, тогда формулы (1.28) можно переписать в виде $\xi^{i'} = c_i^{i'}\xi^i$, следовательно, векторы-столбцы, т.е. матрицы размера $(n \times 1)$, являются контравариантными тензорами первого ранга. Их иногда называют контравариантными векторами. Как отмечено в п.1.3.6, множество всех линейных форм, заданных на R^n, образуют n-мерное линейное пространство R_n. Его элементы являются векторами-строками, т.е. матрицами размера $(1 \times n)$. Если коэффициенты линейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ обозначим a_i, а в базисе $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ — через $a_{i'}$, то $a_{i'} = c_{i'}^i a_i$, что следует из правила преобразования коэффициентов линейной формы при переходе к новому базису. Таким образом, векторы размера $(1 \times n)$, которые можно трактовать как коэффициенты линейных форм, являются тензорами первого ранга один раз ковариантными. Их иногда называют ковариантными векторами.

Пусть имеем линейный оператор $A : R^n \to R^n$, матрицу которого в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ обозначим $[a_i^j]$, а в базисе $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ — $[a_{i'}^{j'}]$. Из правила преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису (см. п.1.6.3) следует, что $a_{i'}^{j'} = c_{i'}^i c_j^{j'} a_i^j$, поэтому множество чисел $[a_i^j]$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ образует тензор второго ранга один раз контравариантный и один раз ковариантный.

Пусть дана в R^n некоторая билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$, коэффициенты которой в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ обозначим через b_{ij}, а в базисе $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ — через $b_{i'j'}$. Тогда формулы (1.52) можно переписать в виде $b_{i'j'} = c_{i'}^i c_{j'}^j b_{ij}$, следовательно, множество чисел b_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ образует дважды ковариантный тензор второго ранга.

Рассмотренные билинейные формы определены в линейном пространстве R^n контравариантных векторов. Совершенно аналогично можно определить билинейную форму $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и на линейном пространстве R_n ковариантных векторов и получить, что $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b^{ij}\xi_i\eta_j$. Легко доказать, что в этом случае при переходе к новому базису числа b^{ij} изменяются по закону $b^{i'j'} = c_i^{i'} c_j^{j'} b^{ij}$, а это означает, что числа b^{ij} образуют тензор второго ранга дважды контравариантный.

Таким образом, существует три типа тензоров второго ранга: a_i^j, a_{ij}, a^{ji}. Все их можно представить в виде квадратных матриц, но изменяющихся по разным законам при изменении базиса.

Пусть дано евклидово пространство E^n и $\{\mathbf{e}_i\}$ — какой-либо базис (не обязательно ортонормированный). Если $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \eta^j\mathbf{e}_j$ — два произвольных вектора из E^n, то $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = = \xi^i\eta^j(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ или, обозначая $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = g_{ij}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \xi^i\eta^j g_{ij}$. Множество чисел g_{ij} образует дважды ковариантный тензор. Его называют метрическим ковариантным тензором. Так как $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$, то тензор g_{ij} симметричен, т.е. $g_{ij} = g_{ji}$. Элементы матрицы, обратной к $[g_{ij}]$, обозначим через g^{ij}. Множество чисел g^{ij} образует дважды контравариантный тензор, называемый метрическим контравариантным тензором.

Пусть дано линейное пространство R^n контравариантных векторов и линейное пространство R_n ковариантных векторов. Прямым произведением $(R^n \times R^n)$ называется множество всех пар векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \in R^n$. Аналогично определяются прямые произведения $(R_n \times R_n)$, $(R^n \times R_n)$ и $(R_n \times R^n)$. Во всех случаях пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ следует рассматривать как упорядоченные. Все три типа тензоров второго порядка возникают при изучении отображений $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ этих прямых произведений во множество вещественных чисел, линейных по каждому аргументу.

Тензоры третьего ранга вида a_{ijk}, a_{ij}^{k}, a_{k}^{ij}, a^{ijk} можно получить, изучая отображения прямых произведений $(R^n \times R^n \times \times R^n)$, $(R_n \times R_n \times R^n)$, $(R_n \times R^n \times R^n)$, $(R_n \times R_n \times R_n)$ во множество вещественных чисел, линейных по каждому аргументу. Различного типа тензоры n-го ранга возникают при построении отображений прямых произведений, содержащих n линейных пространств.

Тензорный аппарат широко применяется во многих физических задачах. В качестве примеров могут служить тензор проводимости анизотропного тела, тензоры деформаций, тензоры напряжений и др.

Над тензорами можно проводить различного рода операции: сложения, умножения, свертывание тензоров и подстановка индексов. Пусть даны два тензора одинакового строения, т.е. с одинаковым числом нижних и верхних индексов, например, a_{pqr}^{ij} и b_{pqr}^{ij}. Тогда их *суммой* называется тензор $c_{pqr}^{ij} = a_{pqr}^{ij} + b_{pqr}^{ij}$, т.е. чтобы сложить два тензора нужно сложить их соответствующие координаты.

Операция *умножения* определена для тензоров любого строения, но при этом учитывается порядок сомножителей. Правило умножения тензоров поясним на примере. Пусть требуется перемножить тензоры $A = a_{pq}^{i}$ и $B = b_{r}^{j}$. В каждой координатной системе каждую координату первого тензора A умножим на каждую координату второго тензора B и полученные произведения $a_{pq}^{i} \cdot b_{r}^{j}$ принимаем за координаты нового тензора C_{pqr}^{ij}, причём нумеруем эти координаты так. Внизу выписываем сначала нижние индексы первого сомножителя, а затем — нижние индексы второго, сохраняя в обоих случаях их прежний порядок, и аналогично поступаем с верхними индексами. Тензор C_{pqr}^{ij} называется *произведением* тензоров a_{pq}^{i}, b_{r}^{j}.

Операция *свёртывания* определена только для тензоров, имеющих хотя бы один индекс внизу и хотя бы один индекс наверху, например, $A = a_{pq}^{ijk}$. Выберем какой-нибудь индекс наверху, например первый, и какой-нибудь внизу, например второй. Отберём те координаты тензора A, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения $1, 2, \ldots, n$, и просуммируем их при фиксированных значениях остальных индексов:

$$a_{p1}^{1jk} + a_{p2}^{2jk} + \ldots + a_{pn}^{njk} = a_p^{jk}.$$

Можно доказать, что числа a_p^{jk} образуют тензор. Говорят, что этот тензор получен из тензора A свёртыванием по индексам первому сверху и второму индексу снизу. Например, в результате свёртывания тензора a_i^j получаем инвариант $a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n$, называемый *следом* матрицы $A = [a_i^j]$.

Рассмотрим операцию подстановки индексов. Пусть дан какой-либо тензор, например, $A = a_{pqr}^{ij}$. Из него можно получить ряд других тензоров, меняя порядок нумерации координат посредством индексов. Например, можно поставить прежний первый нижний индекс на второе место, второй — на третье и третий — на первое. В результате получим новый тензор b_{rpq}^{ij}. Говорят, что тензор b_{rpq}^{ij} получен из тензора a_{pqr}^{ij} подстановкой его индексов. Подстановку индексов часто сочетают с операцией сложения тензоров, возникают новые операции — *симметрирования* и *альтернации*.

Операцию симметрирования производят следующим образом. Из одноимённых (т.е. только нижних или только верхних) индексов выбирают любые N и над ними совершают всевозможные $N!$ перестановок и берут среднее арифметическое всех $N!$ полученных тензоров. Для обозначения симметрирования индексы, которые участвуют в симметрировании, заключают в круглые скобки, например:

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),\ a_{(ijk)} = \frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji}).$$

Тензор называют *симметричным* по любым двум одноимённым индексам, если он не изменяется при их перестановке. В результате симметрирования получается тензор, симметричный по всем индексам, участвующим в симметрировании.

Операция *альтернации* проводится подобно симметрированию, но при сложении $N!$ тензоров, те из них, которые соответствуют чётной перестановке, берут со своим знаком, а у результатов нечётных перестановок знак меняют на обратный. Результат альтернации обозначают, заключая индексы, участвующие в альтернации, в квадратные скобки, например:

$$a_{[i,j]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}),\ a_{[ijk]} = \frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{kji} - a_{ikj}).$$

Тензор называется *кососимметричным* по данным одноимённым индексам, если он умножается на (-1) при перестановке любых двух из этих индексов. В результате альтернации всегда получается кососимметричный тензор по тем индексам, которые участвовали в альтернации. То, что каждая из рассмотренных операций над тензорами приводит снова к тензору, примем без доказательства.

Более подробное изложение тензорного аппарата и его приложений можно найти в книгах [3] и [9].

2. Приложение линейной алгебры к задачам аналитической геометрии

2.1. Основные задачи аналитической геометрии. Понятие уравнения линии и поверхности

Возможность характеризовать положение точки на плоскости и в пространстве с помощью пары или тройки чисел позволяет применять для изучения кривых и поверхностей аппарат линейной алгебры и математического анализа.

Пусть на плоскости задана некоторая кривая $\mathcal{L}$ и выбрана декартова система координат $(0, x, y)$.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением кривой* $\mathcal{L}$ в выбранной системе координат, если координаты (x, y) любой точки кривой $\mathcal{L}$ удовлетворяют этому уравнению, и любое решение (x, y) уравнения $F(x, y) = 0$ определяет точку $M(x, y)$, принадлежащую $\mathcal{L}$.

Совершенно аналогично можно определить уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности S относительно декартовой системы координат: *уравнением поверхности* S относительно данной декартовой системы координат называется уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащие на этой поверхности, но не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

Кривую $\mathcal{L}$ в пространстве можно задать как линию пересечения двух поверхностей, т.е. в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

где уравнения $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ определяют некоторые поверхности, проходящие через кривую $\mathcal{L}$.

Задание кривой в виде системы двух уравнений не всегда удобно ввиду неоднозначности этой системы. Часто более удобным оказывается параметрическое задание кривой

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t_1 \le t \le t_2, \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

при котором положение точки на кривой характеризуется значением некоторого параметра t (в физике в качестве параметра t, как правило, принимается время).

Параметрические уравнения кривой можно записать в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \eta(t)\mathbf{k}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

Параметрически можно также задать и поверхность в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \eta(u, v), \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \eta(u, v)\mathbf{k},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ \eta(u, v) \end{bmatrix}.$$

При этом положение точки на поверхности определяется значением двух параметров u и v.

Задачи аналитической геометрии:

1) по известным геометрическим свойствам кривой $\mathcal{L}$ или поверхности S записать их уравнения;

2) исходя из известных уравнений кривых или поверхностей, изучить геометрические свойства этих кривых или поверхностей.

Рассмотрим примеры задания некоторых кривых и поверхностей уравнениями.

Окружность. Записать уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ радиуса R.

Как известно, *окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от некоторой фиксированной точки этой плоскости.

Точка $M(x,y)$ лежит на данной окружности тогда и только тогда, когда $|\mathbf{CM}| = R$, т.е.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ — \tag{2.1}$$

уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ радиуса R. Уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{2.2}$$

Параметрически окружность (2.1) можно задать в виде системы

$$\begin{cases} x = a + R\cos t, \\ y = b + R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Мы решили задачу 1): по известным свойствам кривой получили её уравнение.

Выясним, в каких случаях произвольное уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0, \tag{2.3}$$

где $a_{ik} = \mathrm{const}$, относительно декартовых координат точки определяет окружность, найдём её центр и радиус.

Сравнивая (2.2) и (2.3), видим, что уравнение (2.3) может определять окружность, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$. В этом случае уравнение (2.3) можно записать в виде

$$x^2 + y^2 + \frac{2a_{01}}{a_{11}}\,x + \frac{2a_{02}}{a_{11}}\,y + \frac{a_{00}}{a_{11}} = 0,$$

или, после выделения полных квадратов,

$$\left(x + \frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{02}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}{a_{11}^2}. \tag{2.4}$$

Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$, то уравнение (2.4) определяет окружность, радиус которой равен $\dfrac{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}$, а центр её имеет координаты $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, то уравнению (2.4) удовлетворяют координаты единственной точки $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если же $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} < 0$, то уравнению (2.4) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. Говорят, что в этом случае уравнение (2.4) определяет мнимую окружность. Таким образом, уравнение (2.3) является уравнением окружности только в случае, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$.

Частично мы решили задачу 2): зная уравнение (2.3), выяснили, при каких условиях оно определяет окружность. Полное решение этой задачи, т.е. исследование случаев, когда $a_{12} \neq 0$, $a_{11} \neq a_{22}$, будет проведено позднее, после изучения эллипса, гиперболы и параболы.

Пример 1. Найти центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0. \tag{а}$$

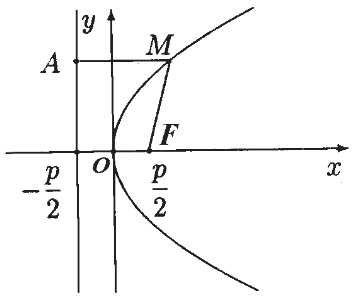
Решение. Выделяя полные квадраты, уравнение (а) можно записать в виде

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9. \tag{б}$$

Сравнивая (2.1) и (б), видим, что центр имеет координаты $(-1, 2)$, а радиус $R = 3$.

Парабола. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой этой же плоскости.

Данная точка F называется фокусом параболы, а данная прямая — директрисой параболы. Выберем декартову систему



координат следующим образом: ось OX проведём через фокус F перпендикулярно директрисе. Начало координат поместим в точку, равноудалённую от фокуса и директрисы. Обозначим расстояние между фокусом и директрисой через p. Величину p называют параметром параболы.

При таком выборе системы координат для всех точек директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$, а фокус F имеет координаты $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Тогда по определению параболы имеет место равенство **AM** = **MF**, где $A\left(-\dfrac{p}{2}, y\right)$ — точка директрисы. Следовательно, $\sqrt{\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$. Из равенства корней следует равенство подкоренных выражений, т.е. $\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$ или $x^2 + px + \dfrac{p^2}{4} = \dfrac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2$, т.е. $y^2 = 2px$. Это соотношение равносильно условию **AM** = **MF**, так как мы не совершали операций, которые могли бы привести к потере решений и к появлению других решений. Таким образом, мы получили искомое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

Легко доказать, что уравнение (2.3) может определять параболу, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Это следует из того, что определитель матрицы квадратичной формы не изменяется при изменении базиса, но для квадратичной формы $B(x, y) = y^2$ этот определитель равен нулю. При выполнении условия $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ кривая, определяемая уравнением (2.3), может распасться на пару параллельных или совпавших прямых.

Сфера. Записать уравнение сферы с центром в точке $C(a, b, c)$ радиуса R.

Как известно, *сферой* называется множество всех точек пространства, равноудалённых от данной фиксированной точки.

Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка сферы, то $|\mathbf{MC}| = R$, следовательно:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \ — \tag{2.5}$$

уравнение сферы.

Аналогично тому, как это сделано для окружности, можно доказать, что произвольное уравнение второго порядка

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

определяет сферу, если $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} > 0$, с центром в точке $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$ радиуса $R = \dfrac{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}$.

Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, то уравнению (2.6) удовлетворяют только координаты точки C. При $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} < 0$ уравнению (2.6) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства. Имеем так называемую мнимую сферу.

Цилиндрическая поверхность. Пусть даны некоторая кривая $\mathcal{L}$ и ненулевой вектор $\mathbf{l}$. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, параллельными вектору $\mathbf{l}$ и пересекающими кривую $\mathcal{L}$. При этом кривую $\mathcal{L}$ называют направляющей, а соответствующие прямые — образующими цилиндрической поверхности. Покажем, что уравнение $F(x, y) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси OZ, а направляющей является кривая в координатной плоскости OXY, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$. Действительно, если координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, то этому уравнению удовлетворяют координаты точки $M(x_0, y_0, z)$ при любом z, т.е. все точки прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, 0)$ параллельно оси OZ. Отсюда и следует, что поверхность $F(x,y) = 0$ есть цилиндрическая, с образующими параллельными оси OZ. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ в пространстве определяет круговой цилиндр, а уравнение $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр.

Аналогично, уравнение $F(y,z) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с направляющей $\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ и образующей, параллельной оси OX.

Чтобы получить уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной вектору $\mathbf{l}(m,n,p)$ и направляющей $\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \end{cases}$ надо исключить $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ \dfrac{x-\tilde{x}}{m} = \dfrac{y-\tilde{y}}{n} = \dfrac{z-\tilde{z}}{p}. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ — координаты точки на направляющей, а x,y,z — точки на цилиндрической поверхности.

Коническая поверхность. Пусть дана в пространстве некоторая кривая $\mathcal{L}$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Поверхность, образованная движением прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей кривую $\mathcal{L}$, называется конической поверхностью. Точка M_0 называется вершиной конической поверхности.

Пусть дано уравнение $F(x,y,z) = 0$. Функция $F(x,y,z)$ называется однородной степени m $(m > 0)$, если при любом t выполняется условие $F(tx,ty,tz) = t^m F(x,y,z)$. Соответствующее уравнение $F(x,y,z) = 0$ также называется однородным. Например, уравнение $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ однородное степени 2. Можно доказать, что однородное уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат. Доказать самостоятельно после изучения п.2.4.

Для получения уравнения конической поверхности с вершиной в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющей $\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0 \end{cases}$ надо исключить $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0, \\ \dfrac{x-x_0}{\tilde{x}-x_0} = \dfrac{y-y_0}{\tilde{y}-y_0} = \dfrac{z-z_0}{\tilde{z}-z_0}, \end{cases}$$

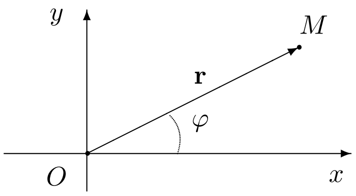
состоящей из уравнений направляющей и образующей (см. п.2.5).

Поверхности вращения. Пусть на плоскости XOY задана линия $F(x,y) = 0$. При вращении кривой вокруг оси OX мы получим поверхность, называемую поверхностью вращения. Если точка $M_0(x, y, 0)$ лежала на кривой $F(x, y) = 0$, то при вращении вокруг оси OX она опишет окружность с центром в точке $C(x, 0, 0)$, радиус которой равен $|y|$. Пусть $M(X, Y, Z)$ — точка поверхности. Тогда $x = X$, $y = \pm\sqrt{Y^2 + Z^2}$. Поэтому уравнение поверхности вращения будет иметь вид $F(X, \pm\sqrt{Y^2 + Z^2}) = 0$. Например, вращая параболу $y^2 = 2px$ вокруг оси OX, получим поверхность $y^2 + z^2 = 2px$, называемую эллиптическим параболоидом вращения.

2.2. Полярная система координат

Кроме декартовой системы координат в математике применяется и ряд других. В этом подразделе познакомимся с одной из них.

Полярная система координат состоит из точки, называемой полюсом, и проходящей через неё оси, называемой полярной осью.



Числа (r, φ) называются полярными координатами точки M, если $r = |\mathbf{OM}|$, а φ — угол между полярной осью и вектором $\mathbf{OM}$, отсчитанный по правилам тригонометрии. Будем считать, что $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Поместим начало декартовой системы в полюс O, а ось OX направим по полярной оси. Тогда можно выразить декартовы координаты через полярные формулами: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этом же случае соотношения $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

Многие кривые удобно изучать в полярной системе координат, задавая их уравнением $F(r, \varphi) = 0$. Отметим уравнения некоторых кривых:

$r = a$ — окружность радиуса a с центром в полюсе;

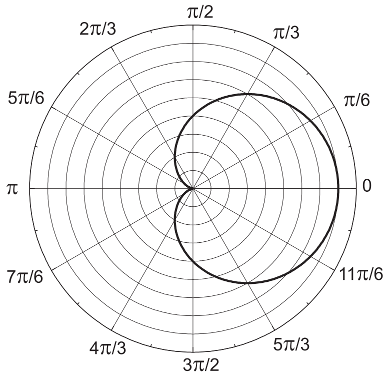
$r = 2a\cos\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(a, 0)$;

$r = 2a\sin\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(0, a)$;

$r = a\varphi$ — спираль Архимеда;

$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската Бернулли;

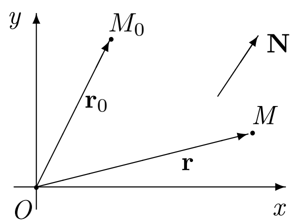
$r = a(1 + \cos\varphi)$ — кардиоида.



Построим кардиоиду. Полагая $\varphi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ и вычисляя r, построим соответствующие точки. Соединяя их гладкой кривой, получим дугу кардиоиды, лежащую выше полярной оси. В силу чётности косинуса, строим ей симметричную относительно полярной оси часть кардиоиды. Её вид объясняет название.

Предлагается самостоятельно построить остальные из указанных кривых.

2.3. Общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, канонические и параметрические уравнения прямой на плоскости



Задача 1. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A, B)$.

Произвольная точка M лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{M_0M} \perp \mathbf{N}$, т.е. когда $(\mathbf{M_0M}, \mathbf{N}) = 0$. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ радиус-векторы точек M и M_0, то $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0 \;-$$

векторная форма уравнения прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \;- \tag{2.7}$$

координатная форма уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно $\mathbf{N}$. Обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$. Тогда (2.7) приводится к виду

$$Ax + By + C = 0 \;- \tag{2.8}$$

общее уравнение прямой. Подчеркнём, что в общем уравнении прямой коэффициенты A, B определяют вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный данной прямой. Этот вектор называют вектором нормали прямой.

Пусть $B \neq 0$. Обозначая $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, уравнение (2.8) перепишем в виде $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом. Величина k равна тангенсу угла наклона прямой к оси OX, а величина b по модулю равна длине отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Задача 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно заданному вектору $\mathbf{l}(m, n)$. Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.

Произвольная точка $M(x, y)$ (её радиус-вектор обозначим $\mathbf{r}(x, y)$) лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, т.е. если $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{l}$ или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l} \ — \tag{2.9}$$

параметрическое уравнение прямой в векторной форме. В координатной форме уравнение (2.9) имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn \end{cases} \ — \tag{2.10}$$

параметрические уравнения прямой в координатной форме. Уравнения (2.10) можно переписать в виде

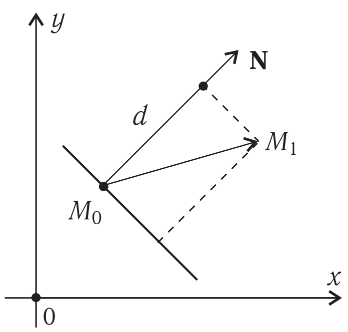
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \ — \tag{2.11}$$

каноническое уравнение прямой. В частности, если прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и уравнение (2.11) записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \ —$$

уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Задача 3. Дана прямая своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и на ней точка $M_0(x_0, y_0)$. Найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой.



Очевидно, $d = |\text{Пр}_{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1| = \\ = \dfrac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1)}{|\mathbf{N}|} = \\ = \dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{|\mathbf{N}|} = \\ = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Итак:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.12}$$

Пример 1. Найти расстояние от точки (2;3) до прямой $3x + 4y + 10 = 0$.

Решение. По формуле (2.12): $d = \dfrac{|6+12+10|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{28}{5}$.

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \mathbf{N}_1(A_1, B_1) \not\parallel \mathbf{N}_2(A_2, B_2)$, то прямые пересекаются, и их точку пересечения можно найти, решая систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны. Они различны, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, и совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Задача 5. Найти угол между прямыми. Пусть прямые пересекаются, т.е. $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. В качестве угла φ между прямыми примем угол между их нормалями. Поэтому

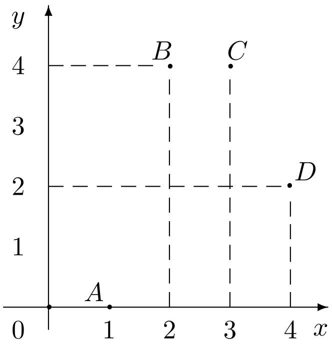
$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то тангенс одного из углов между прямыми можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Пример 2. На отрезке $[1, 4]$ задана функция, график которой приведён на рисунке. Записать аналитическое выражение этой функции.

Решение. Для решения задачи необходимо найти уравнения



прямых AB, BC и CD. Будем искать их в виде $y = k_1 x + b_1$. На прямой AB лежат точки $A(1,0)$ и $B(2,4)$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 0 &=& k_1 &+& b_1, \\ 4 &=& 2k_1 &+& b_1. \end{array}\right\}$$

Отсюда $k_1 = 4$, $b_1 = -4$. Уравнение AB имеет вид $y = 4x - 4$. Прямая BC имеет уравнение $y = 4$. Уравнение прямой CD также ищем в виде $y = k_2 x + b_2$.

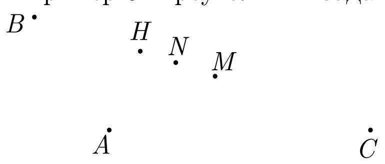
Из условия принадлежности этой прямой точек $C(3,4)$ и $D(4,2)$ получаем систему

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 4 &=& 3k_2 &+& b_2, \\ 2 &=& 4k_2 &+& b_2, \end{array}\right\},$$

из которой находим $k_2 = -2$, $b_2 = 10$. Следовательно, прямая CD имеет уравнение $y = -2x + 10$. Аналитически функцию $f(x)$ можно задать в виде

$$f(x) = \left\{\begin{array}{cll} 4x - 4, & \text{если} & 1 \le x \le 2; \\ 4, & \text{если} & 2 < x \le 3; \\ -2x + 10, & \text{если} & 3 < x \le 4. \end{array}\right.$$

Пример 3. Треугольник задан координатами своих вершин



$A(1,-1)$, $B(4,-5)$, $C(-5,-9)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат:

а) высота AH;
б) медиана AM;
в) биссектриса AN.

Решение. а) Так как прямая AH перпендикулярна BC, то в качестве вектора нормали к прямой AH можно взять любой параллельный BC вектор. $\mathbf{BC} = (-9,-4) \parallel (9,4)$. Уравнение прямой AH можно записать в виде $9x+4y+C=0$. Так как точка A лежит на прямой AH, то $9-4+C=0$, $C=-5$. Получаем уравнение прямой AH в виде $9x+4y-5=0$.

б) Середина M отрезка BC имеет координаты $\left(-\frac{1}{2},-7\right)$, а вектор $\mathbf{AM}$ имеет координаты $\left(-\frac{3}{2},-6\right)$. Очевидно, вектор $(1,4)$ коллинеарен вектору $\mathbf{AM}$. Уравнение прямой AM запишем в каноническом виде $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4}$ или $4x-y-5=0$.

в) Направляющий вектор прямой AN можно получить как сумму ортов векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$. Так как $\mathbf{AB} = (3,-4)$, а $\mathbf{AC} = (-6,-8)$, то их ортами являются векторы $\mathbf{a}_1 = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ и $\mathbf{a}_2 = \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$; $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 = \left(0,-\frac{8}{5}\right)$. Таким образом, прямая AN параллельна оси OY, а так как она проходит через точку $A(1,-1)$, то её уравнение $x=1$.

2.4. Уравнение плоскости

Задача 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A,B,C)$. (Вектор $\mathbf{N}$ называется вектором нормали плоскости.)

Как и при решении задачи 1 из подраздела 2.1, получаем

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{N}) = 0 \quad — \tag{2.13}$$

векторная форма уравнения плоскости, где $\mathbf{r} = (x,y,z)$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости. В координатной форме (2.13) можно записать в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$, или, обозначая $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$,

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad —$$

общее уравнение плоскости.

Задача 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\mathbf{l}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mathbf{l}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$.

В этом случае можно положить $\mathbf{N} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]$, из (2.13) получить искомое уравнение в векторной форме

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0 \qquad (2.14)$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.15)$$

В частности, если плоскость проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то можно в (2.8) и (2.15) положить $\mathbf{l}_1 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$, т.е. $m_1 = x_1 - x_0$, $n_1 = y_1 - y_0$, $p_1 = z_1 - z_0$; $m_2 = x_2 - x_0$, $n_2 = y_2 - y_0$, $p_2 = z_2 - z_0$.

Задача 3. Охарактеризовать взаимное расположение трёх различных плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z = D_i$, $i = 1, 2, 3$.

Три плоскости пересекаются в одной точке, если их векторы нормалей $\mathbf{N}_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, 3$, не компланарны, т.е. $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) \neq 0$. Если же $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) = 0$ и среди векторов $\mathbf{N}_i$ нет параллельных, то эти плоскости пересекаются либо по трём параллельным прямым, либо по одной прямой.

Предлагается самостоятельно охарактеризовать случай, когда среди векторов $\mathbf{N}_i$ есть параллельные.

Задача 4. Найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Совершенно аналогично, как и при выводе формулы (2.6),

получаем $\quad d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2.5. Параметрические, канонические и общие уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых

Задача 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно вектору $\mathbf{l}(m, n, p)$. (Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.) Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой. Тогда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, а поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l} \ —$$

параметрическое уравнение прямой в векторной форме. Выражая через координаты, получаем

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + tm, \\ y & = & y_0 + tn, \\ z & = & z_0 + tp \end{array} \right. —$$

параметрические уравнения прямой в координатной форме. Воспользовавшись условием параллельности двух векторов (их координаты пропорциональны), находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad -$$

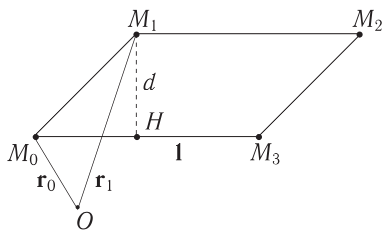
канонические уравнения прямой. Если прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, т.е. $m = x_1 - x_0$, $n = y_1 - y_0$, $p = z_1 - z_0$.

Прямую линию можно задать также как линию пересечения двух плоскостей

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.16}$$

если векторы $\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ непараллельны. Соотношения (2.16) называют общими уравнениями прямой.

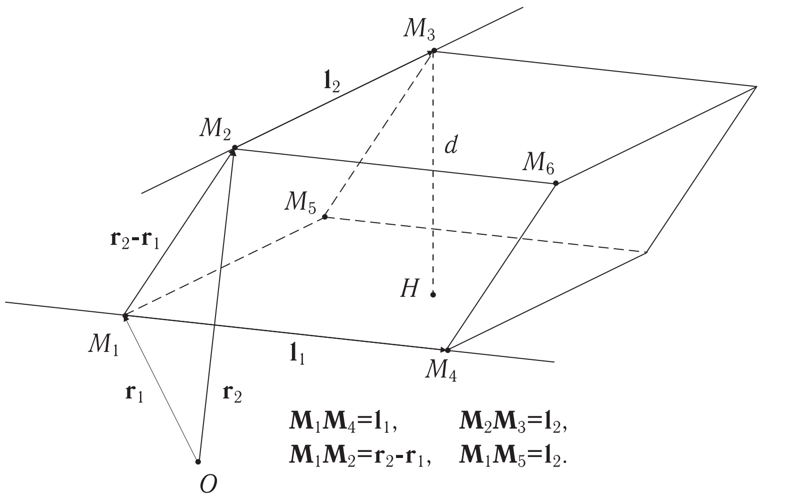
Чтобы перейти от общих уравнений прямой (2.16) к каноническим и параметрическим, нужно найти направляющий вектор и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой. В качестве $\mathbf{l}$ можно принять вектор параллельный $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, а точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ найти из системы (2.16), найдя её частное решение.



Задача 2. Найти расстояние d от точки M_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$.
Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_1H параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{l}$, а потому
$d = \dfrac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]|}{|\mathbf{l}|}$.

Задача 3. Найти расстояние d между двумя непараллельными прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$.

Приведём рисунок.



Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_3H параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, а потому

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)|}{|[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]|}. \tag{2.17}$$

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Если $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ параллельны, то прямые (2.18) либо параллельны, либо совпадают. Если прямые совпадают, то вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ параллелен общему направляющему вектору этих прямых. Если $\mathbf{l}_1 \not\parallel \mathbf{l}_2$, то прямые либо пересекаются, либо являются скрещивающимися. Если прямые пересекаются, то расстояние d между ними равно нулю. Из (2.11) получаем

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0, \quad \mathbf{l}_1 \not\parallel \mathbf{l}_2 \ -$$

условие пересечения прямых.

Если прямые скрещиваются, то $d \neq 0$, т.е.

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) \neq 0, -$$

условие того, что прямые (2.18) скрещиваются.

Как видим, прямые и плоскости задаются линейными уравнениями относительно декартовых координат. В последующих разделах изучим кривые, задаваемые уравнением второго порядка относительно декартовых координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0, \tag{2.19}$$

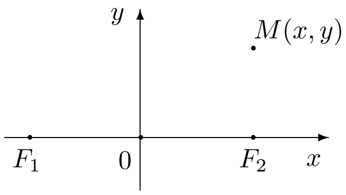
где a_{ik} — константы. Такие кривые называют кривыми второго порядка. К ним относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола. К изучению этих кривых мы и переходим. Заметим, что первые три слагаемые в (2.19) образуют квадратичную форму, а следующие два — линейную.

При некоторых соотношениях на коэффициенты a_{ik} уравнение (2.19) может не определять ни одной точки или определять только одну, левая часть этого уравнения может иногда разлагаться на два линейных сомножителя, в этом случае уравнение (2.19) определяет пару пересекающихся или параллельных прямых, которые могут и совпасть между собой.

2.6. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Задача. Получить уравнение эллипса.



Пусть F_1 и F_2 — фокусы. Положим $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. Декартову систему координат выберем следующим образом: ось OX направим по прямой F_1F_2, а начало поместим в середину отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| + |\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = 2a$ (величина a дана, причём $a > c$). Имеем $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. И, следовательно, уравнение эллипса имеет вид

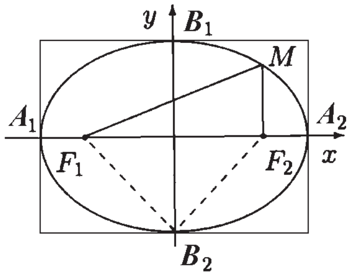
$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Числа r_1 и r_2 называют *фокальными радиусами* эллипса.

Упростим это уравнение. Так как $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, $r_1 + r_2 = 2a$, то $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$, т.е. $a \pm \frac{c}{a}x = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}$. Возведём обе части этого равенства в квадрат. Получим $\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$. Так как $a > c$, то можно обозначить $a^2 - c^2 = b^2$ и записать $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ — \qquad (2.20)$$

каноническое уравнение эллипса. Можно доказать, что при возведении в квадрат мы получили уравнение, эквивалентное исходному.



Оси OX и OY являются осями симметрии, а $O(0,0)$ — центром симметрии. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ называются вершинами эллипса. Так как $|x| \le a$, $|y| \le b$, то эллипс — кривая, расположенная внутри прямоугольника, стороны которого расположены на прямых $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Число a в уравнении (2.20) называют большой, а b — малой полуосью эллипса. Прямую, на которой расположены фокусы эллипса, называют фокальной осью.

Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса. Предлагается доказать, что $\dfrac{r_1}{d} = \varepsilon$, где d — расстояние от точки M эллипса до ближайшей от фокуса F_1 директрисы $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, и что $\dfrac{r_2}{d} = \varepsilon$, где d — расстояние от точки M эллипса до директрисы $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, а $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, — фокальные радиусы точки M. Если $c = 0$, то $a^2 = b^2$, и эллипс превращается в окружность, при этом $\varepsilon = 0$.

Пример. Доказать, что уравнение $x^2 + 4x + 4y^2 - 16y - 4 = 0$ определяет эллипс. Найти координаты его центра симметрии и эксцентриситет.

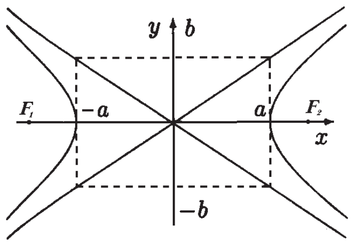
Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты: $(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4 + 4 + 16 = 24$. Введём новые переменные $x_1 = x+2$, $y_1 = y-2$. Тогда $x_1^2 + 4y_1^2 = 24$ или $\dfrac{x_1^2}{24} + \dfrac{y_1^2}{6} = 1$. Последнее уравнение определяет эллипс, причём $a^2 = 24$, $b^2 = 6$. Центр его находится в точке $(-2,2)$. Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то в нашем случае $c = \sqrt{24-6} = \sqrt{18}$, а потому $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.7. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы.

Задача. Получить уравнение гиперболы.



Положим $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. Систему координат выберем так же, как и в случае эллипса. Тогда $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Если $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы, то

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a,$$

$a = \text{const}$, $c > a$. Последнее уравнение и определяет гиперболу. Проведя упрощение этого уравнения, как и в случае эллипса, обозначив $b^2 = c^2 - a^2$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола — кривая, симметричная относительно осей координат и начала координат. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ называются вершинами гиперболы. Так как $|x| \geq a$, то гипербола находится вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$. Ось OY называют мнимой осью гиперболы, а ось OX — действительной. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Число a называют действительной полуосью гиперболы, а число b — мнимой полуосью.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы, $\varepsilon > 1$, а прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — её директрисами. Они обладают тем же свойством, что и для эллипса.

Пример. Доказать, что уравнение $4x^2 - 24x - 9y^2 + 36y = 36$ определяет гиперболу. Найти её центр симметрии и асимптоты.

Решение. Выделяя полные квадраты, данное уравнение можно записать в виде $4(x-3)^2 - 9(y-2)^2 = 36$ или $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. Положим $x_1 = x - 3$, $y_1 = y - 2$. Тогда $\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{4} = 1$. Данная кривая — гипербола с центром в точке

$x_1 = x - 3 = 0$, $y_1 = y - 2 = 0$, т.е. в точке $(3,2)$. Уравнение асимптот гиперболы имеет вид $y - 2 = \pm\dfrac{2}{3}(x-3)$ или $2x - 3y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Итак, мы рассмотрели кривые второго порядка: эллипс, эксцентриситет которого меньше 1, гиперболу, эксцентриситет которого больше 1. Кривая второго порядка, эксцентриситет которой равен 1, является параболой (рассмотрена в п.2.1).

2.8. Приведение уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Если кривая задана уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0, \tag{2.21}$$

то это уравнение можно привести к каноническому виду путём перехода к новой системе координат. Этот процесс можно разбить на два этапа.

1. Отыскание главных осей квадратичной формы
$$B = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

Для этого находим её собственные числа λ_1 и λ_2 и собственные векторы. Если окажется, что $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то кривая эллиптического типа, если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то гиперболического типа. При $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ имеем кривую параболического типа. Приняв в качестве новых базисных векторов декартовой системы главные оси квадратичной формы, уравнение (2.21) приведём к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0,$$

причём $(a;b) = (a_{01};a_{02})Q$, где Q — матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому.

2. Отыскание нового начала системы координат O_1, преобразование параллельного переноса начала O в точку O_1.

Как это делать практически, покажем на примере. Предполагаем, что все системы координат имеют правую ориентацию.

Пример 1. Построить кривую

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y = -2. \tag{a}$$

Приводим квадратичную форму $B = x^2 + y^2 + xy$ к главным осям (как в п.1.6.8). Её матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$.

Записываем характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)^2 - 0{,}25 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 1{,}5$ являются собственными числами. Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то кривая (а) — эллипс. Координаты собственного вектора, отвечающего числу $\lambda_1 = 0{,}5$, удовлетворяют соотношению $\xi^1 + \xi^2 = 0$. В качестве нового базисного вектора примем вектор $\mathbf{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Другой базисный вектор $\mathbf{j}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Записываем матрицу Q перехода от базиса $0, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ к $0, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.29) выражаем новые координаты x_1 и y_1 через старые

$$x_1 = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{x + y}{\sqrt{2}}. \tag{б}$$

Уравнение (а) в новой системе координат принимает вид

$$0{,}5x_1^2 + 1{,}5y_1^2 + \frac{-3 \cdot 1 + (-3)(-1)}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{-3 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{\sqrt{2}} y_1 = -2$$

или $0{,}5x_1^2 + 1{,}5y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{2}} y_1 = -2$. После выделения полных квадратов получаем

$$0{,}5x_1^2 + 1{,}5\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2 + 3 = 1. \tag{в}$$

Перейдём к новой системе координат $0_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ по формулам

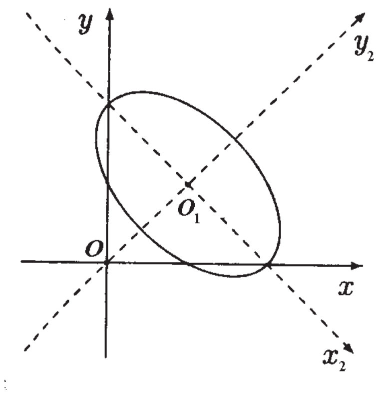
$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Теперь уравнение (в) приводится к виду

$$0{,}5x_2^2 + 1{,}5y_2^2 = 1, \quad \frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{2/3} = 1, \tag{г}$$

причём, как это следует из (б), $\quad x_2 = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}}$.

Решая систему $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, найдём координаты (1;1)



нового начала O_1 в старой системе координат. Строим кривую (а). Для этого сначала в старой системе координат строим новую систему координат. Новые оси направлены по прямым $x - y = 0$ (ось O_1Y_2) и $x+y-2 = 0$ (ось O_1X_2). В системе (O_1, X_2, Y_2) строим эллипс (г). Зная уравнение (г), можно дать полную геометрическую характеристику эллипса (а). Например, его большая полуось равна $\sqrt{2}$, а малая — $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Расстояние между фокусами равно $2\sqrt{2-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2.9. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, которая в декартовой системе координат описывается следующим уравнением:

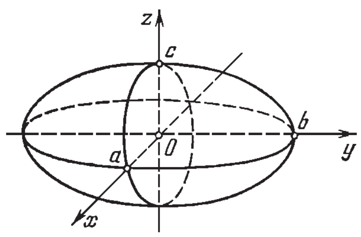
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ +2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0, \qquad (2.22)$$

где a_{ik} — константы. Заметим, что первые шесть слагаемых в (2.22) образуют квадратичную форму, а следующие три — линейную. Отметим следующие поверхности второго порядка:

1. Сфера с центром в точке (a, b, c) радиуса R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(рассмотрена в п.2.1).



2. Эллипсоид.

Поверхность, определяемая относительно какой-либо декартовой системы координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

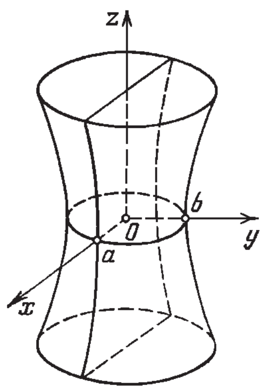
называется эллипсоидом, а величины a, b, c — его полуосями.

Исследуем эту поверхность с помощью сечений. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ будет эллипс (при $|h| < c$)

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left[a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\,\right]^2} + \dfrac{y^2}{\left[b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\,\right]^2} = 1. \end{cases}$$

Полуоси этого эллипса $a_1 = a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$ будут наибольшими при $h = 0$. Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным, также являются эллипсами.

Если две полуоси эллипсоида равны, то это эллипсоид вращения. При $a = b = c$ имеем сферу.



3. Однополостный гиперболоид.

Если гиперболу $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ плоскости ZOY вращать вокруг оси OZ, то мы получим поверхность

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

называемую однополостным гиперболоидом вращения. Поверхность, определяемая уравнением

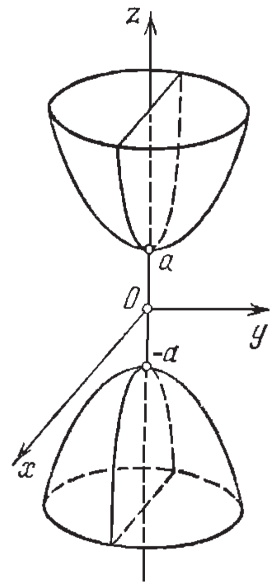
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

называется однополостным гиперболоидом.

В сечениях этой поверхности плоскостями $z = h$ получим эллипсы

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

с полуосями $a_1 = a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$. В сечениях плоскостями $x = h$ или $y = h$ получим гиперболы.



4. Двуполостный гиперболоид.

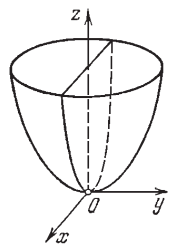
Вращая гиперболу $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскости YOZ вокруг оси OZ, получим поверхность $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Поверхность, определяемая уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1,$ называется двуполостным гиперболоидом.
Сечениями этой поверхности плоскостями $z = h$ будут эллипсы

$$\begin{cases} z = h \quad (|h| > c), \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

В сечении плоскостью $x = 0$ получим гиперболу

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

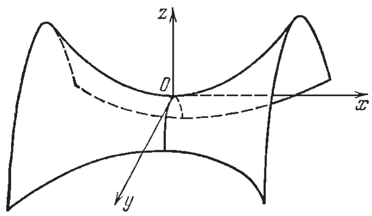


5. Эллиптический параболоид.
При вращении параболы $y^2 = 2pz$ плоскости YOZ вокруг оси OZ получим поверхность $x^2 + y^2 = 2pz$. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \ (p > 0),$$

называется эллиптическим параболоидом. При пересечении эллиптического параболоида плоскостями $z = h > 0$ получим эллипсы, а плоскостями, параллельными координатным плоскостям XOZ и YOZ, параболы.

6. Гиперболический параболоид.

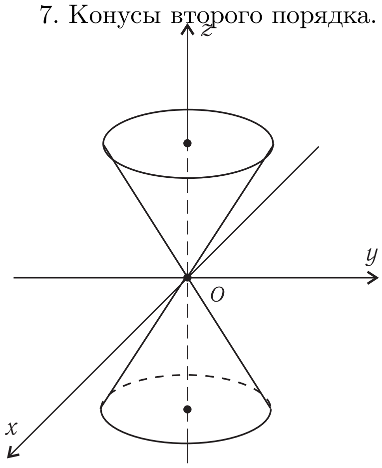


Поверхность, определяемая уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ ($p > 0$), называется гиперболическим параболоидом. Его сечения $\begin{cases} z = h \neq 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2ph \end{cases}$ — гиперболы;

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} + 2pz \end{cases} \quad \text{— параболы;}$$

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{b^2} = -2pz + \dfrac{y^2}{a^2} \end{cases} \quad \text{— параболы.}$$

7. Конусы второго порядка.



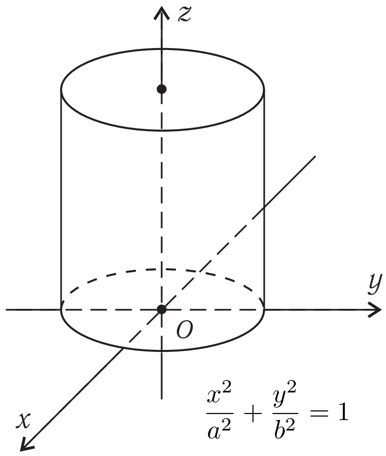
Поверхность, задаваемая уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, называется конусом второго порядка. Это уравнение является однородным второй степени. В сечении плоскостями $z = h$ получим эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

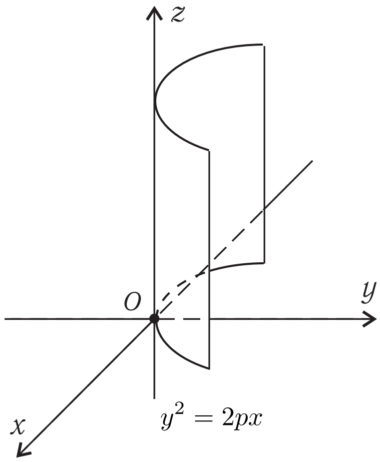
В сечении плоскостью $x = 0$ получим две пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{y}{b} = \pm\dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

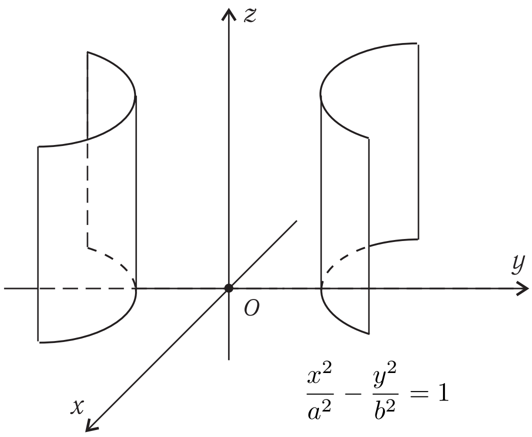
8. Цилиндры второго порядка.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$y^2=2px$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2=2px$$

на плоскости XOY определяют эллипс, гиперболу и параболу, а в пространстве соответственно эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры, образующие которых параллельны оси аппликат, а направляющими служат названные кривые.

Если уравнение второй степени распадается на два уравнения первой степени, то уравнение будет определять пару либо пересекающихся, либо параллельных, либо слившихся плоскостей.

Уравнение (2.22) можно привести к каноническому виду по той же схеме, как и в случае кривых второго порядка: сначала перейти к новому ортонормированному базису из собственных векторов входящей в него квадратичной формы, а затем совершить параллельный перенос системы координат в новое начало.

2.10. Гиперплоскости, m-мерные плоскости и прямые в E^n

Мы рассмотрели некоторые геометрические образы в трёхмерном пространстве. Кратко остановимся на геометрии в пространствах размерности более трёх.

Пусть дано точечно-векторное евклидово пространство E^n с выбранной декартовой системой координат $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Зафиксируем какую-либо точку M_0 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ и вектор $\mathbf{N} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тогда множество всех точек $M(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ пространства E^n, удовлетворяющих уравнению

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0, \tag{2.23}$$

называется *гиперплоскостью* пространства E^n. В координатной форме уравнение (2.23) можно переписать в виде

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \ldots + A_n(x^n - x_0^n) = 0, \tag{2.24}$$

или, если обозначить $-A_1x_0^1 - A_2x_0^2 - \ldots - A_nx_0^n = B$, в виде

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + B = 0. \tag{2.25}$$

Соотношение (2.25) называют общим уравнением гиперплоскости. Так как любое уравнение вида (2.25) может быть приведено к виду (2.23), то любое уравнение, линейное относительно декартовых координат, определяет в E^n гиперплоскость.

Если $\mathbf{N}_1 \neq \lambda \mathbf{N}_2$, т.е. если $\mathbf{N}_1 \nparallel \mathbf{N}_2$, то система

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1) = 0,$$
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{N}_2) = 0$$

совместна и определит в E^n некоторое множество точек, называемое плоскостью размерности $n-2$. Можно определить понятие $n-m$-мерной плоскости как общую часть m $(m < n)$ гиперплоскостей $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{N}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если векторы $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_m$ линейно независимы.

Пусть в E^n задан вектор $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ и точка $M_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$. Множество всех точек $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ из E^n, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{MM}_0 = t\mathbf{l}, \tag{2.26}$$

где t — числовой параметр, называется прямой линией, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\mathbf{l}$. Соотношение (2.26) эквивалентно системе равенств

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l_1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l_2} = \ldots = \frac{x^n - x_0^n}{l_n}, \tag{2.27}$$

называемых каноническими уравнениями прямой (2.26). Прямая (2.27) может быть задана как общая часть некоторых $(n-1)$ гиперплоскостей.

Система линейных уравнений относительно координат точки определяет $(n-m)$-мерную плоскость тогда и только тогда, когда ранги её основной и расширенной матриц равны m. При $m = n-1$ система задаёт прямую вида (2.27).

Изучают в E^n и поверхности общего вида, определяемые уравнением $F(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$. Например, множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2 = R^2,$$

называют n-мерной сферой радиуса R с центром в точке $M(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$. Рассматривают также n-мерные поверхности второго порядка, уравнения которых содержат квадратичные и линейные формы.

2.11. Геометрическая характеристика решений систем линейных уравнений

Для системы двух уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n & = & b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n & = & b^2, \end{array} \right. \tag{2.28}$$

получаем похожую картину. Если векторы коэффициентов $N_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)$ и $N_2 = (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)$, то ранги основной и расширенной матриц равны двум, система определяет $n-2$ —мерную плоскость. Множество решений системы (2.28) есть множество точек этой плоскости. Если векторы коэффициентов $N_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)$ и $N_2 = (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)$ параллельны, то их координаты пропорциональны. Пусть $\lambda = \frac{a_i^1}{a_i^2}$ коэффициент этой пропорциональности. Тогда возможны два случая. Во-первых, может быть, что $\lambda = \frac{a_i^1}{a_i^2} = \frac{b^1}{b^2}$, тогда ранги основной и расширенной матриц равны одному, оба уравнения определяют одну и ту же гиперплоскость и множество решений системы уравнений (2.28) совпадает с множеством точек этой гиперплоскости. Во-вторых, может быть, что $\lambda = \frac{a_i^1}{a_i^2} \neq \frac{b^1}{b^2}$, тогда ранг основной матрицы равен одному, ранг расширенной матрицы равен двум и, по теореме Кронекера-Капелли, система не совместна. В этом случае уравнения в системе (2.28) определяют параллельные гиперплоскости. В общем случае, если ранги основной и расширенной матриц системы

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n & = & b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n & = & b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n & = & b^m, \end{array} \right. \tag{2.29}$$

равны r то система (2.29) определяет $n-r$— мерную плоскость в R^n. Если ранг основной матрицы системы равен r , ранг расширенной матрицы системы равен $r+1$, то система (2.29) не совместна и определяет не более $r+1$ параллельных плоскостей.

Контрольные работы

О самоконтроле при выполнении работ

Те студенты, которые имеют в своём распоряжении устройство СИМВОЛ, либо его компьютерный аналог, могут выполнять контрольные в режиме автоматизированного самоконтроля. Как осуществлять самоконтроль объяснено в инструкции, прилагаемой к устройству. В данных контрольных работах необходимо соблюдать следующие требования:

1) если ответом является матрица и нет никаких дополнительных указаний, то вводить её элементы по строкам, начиная с первой;

2) если ответом является неупорядоченная совокупность чисел, то вводить эти числа следует в порядке возрастания, начиная с наименьшего;

3) уравнения прямых или плоскостей вводить в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

приняв положительным первый коэффициент и все коэффициенты целыми и несократимыми. (Задачи подобраны таким образом, что это можно сделать);

4) если нет дополнительных указаний, то рациональные дроби вводить в виде обыкновенной дроби, не выделяя целой части;

5) в задачах 8 и 9 контрольной работы № 2 уравнения прямых, параллельных осям координат, записывать в виде $y = a$ или $x = b$, где числа a и b определяются условиями задачи.

Контрольная работа № 1

Вариант 1.1

1(РТ1.РП). Найти матрицу $D = (3A - 4B)C$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2(ДП1). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3(491.РП). Решить матричное уравнение
$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$.

4(Д51.РП). Найти такие значения параметров p и q, если они существуют, при которых ранг матрицы
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 0 & -5 & 6 & q \end{bmatrix}$ равен двум.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,-1,-1)$, $\mathbf{f}_2(1,1,-1)$, $\mathbf{f}_3(1,1,1)$, $\mathbf{x}(4,0,-2)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (9В5.Р7). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (3Т0). Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. (Р7П.Б7). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (729.БП). Найти частное решение, если $x_4 = -8$, $x_5 = -4$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(537). Вычислить $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45°$.

10(СК). Вычислить объём пирамиды, заданной координатами своих вершин: $A(-4, 2, 2)$; $B(2, -1, -1)$; $C(2, 0, -2)$; $D(0, -3, 0)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3, 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, 6x_1 - 9x_2 + 4x_3)$. (ТА1.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1, 1, 1)$ является собственным для матрицы A. (323). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (081). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.2

1(352.РП). Найти матрицу $D = C(3A - 4B)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(225). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3(Д82.РП). Решить матричное уравнение

$$X \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}.$$

4(962.РП). Докажите, что третья строка матрицы

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 16 & 13 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух.

Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(9,3,5)$, $\mathbf{f}_2(2,0,3)$, $\mathbf{f}_3(0,1,-1)$, $\mathbf{x}(-14,-7,-3)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (9АЛ.РП). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (245). Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера. (СП7.РП). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (ПД7.БП). Найти частное решение, если $x_4 = x_5 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(Д89). Найти $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 6\mathbf{p}+\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 135°$.

10(454). Вычислить длину высоты AH пирамиды $ABCD$, если $A(-3,3,3)$; $B(3,0,0)$; $C(3,1,-1)$; $D(1,-2,1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_2 + 2x_3, x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор из R_3. (492.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(2,2,1)$ является собственным для матрицы A. (278). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (С42.5П). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.3

1(5Т3.РП). Найти $D = (2AB + 3AC)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(0Б8). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -13 & 15 & 18 \\ 3 & -6 & 9 & 21 \end{vmatrix}$.

3(П79.РП). Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4(9Д3). Найдите то значение параметра p, если оно существует, при котором строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & p & 10 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(3, 2, -4)$, $\mathbf{f}_2(4, 1, -2)$, $\mathbf{f}_3(5, 2, -3)$, $\mathbf{x}(9, 5, -8)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (31К.РП). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 6x_1 - 13x_2 + 15x_3 + 18x_4 = 17, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 21x_4 = 21 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (2Т8). Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. (5С5.РП). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (919.Р7). Найти частное решение, если $x_2 = x_3 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 14x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 10x_1 & + & 3x_2 & + & 15x_3 & - & 7x_4 & & & = & 0. \end{array}\right.$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(350). Найти $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 60^\circ$.

10(858). Даны точки $A(-2,4,4)$; $B(4,1,1)$; $C(4,2,0)$; $D(2,-1,2)$. Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{AB}$, $2\mathbf{BC}$, $\mathbf{CD}$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 + 5x_2 - 7x_3, -2x_2 + 4x_3, 3x_2 + 2x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (Д13.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1,0,0)$ является собственным для матрицы A. (8Р8). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (243). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.4

1(АС3.РП). Найти матрицу $D = (2BA + 3CA)$, если

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2(203). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & -4 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$

3(082.РП). Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 11 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4(4Р4). При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 8 & p & -5 & 1 \end{bmatrix}$ равен трём?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(4,2,-1)$, $\mathbf{f}_2(5,3,-2)$, $\mathbf{f}_3(3,2,-1)$, $\mathbf{x}(4,3,-2)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (01М.Р7). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad - 6x_3 - 9x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 10, \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Д47). Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. (218.РЛ). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (242.БП). Найти частное решение, если $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(89П). Найти $|\mathbf{r}|^2$, если $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = 120°$.

10(9А2). Даны три вершины параллелограмма: $A(0,1,2)$; $B(3,5,2)$; $C(5,1,2)$. Найти длину высоты параллелограмма, опущенной на AB.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (2x_1 + 3x_3, 10x_1 - 3x_2 - 6x_3, -x_1 - 2x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (9С4.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1,8,-1)$ является собственным для матрицы A. (863). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (284.5П). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.5

1(Т85.РП). Найти матрицу $D = (AC - AB)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(3Т0). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

3(598.Р7). Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix} = 16 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4(4П5). При каком значении параметра p, если оно существует, последняя строка матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & p & 11 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых трёх строк?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,1,1)$, $\mathbf{f}_2(1,2,3)$, $\mathbf{f}_3(1,3,6)$, $\mathbf{x}(4,7,10)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (ТР0.РП). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (362). Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера. (0М1.РЛ). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (392.БЛ). Найти частное решение, если $x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(3СА). Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{r}$, если $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45°$.

10(78Т). Вычислить $\text{Пр}_{\mathbf{BD}}[\mathbf{BC}, \mathbf{CD}]$, если $B(6,3,3)$; $C(6,4,2)$; $D(4,1,4)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (-x_1 + 2x_2 + x_3, 5x_2, 3x_1 + 2x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (125.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1,0,3)$ является собственным для матрицы A. (Т56). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (Д25.РП). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.6

1(906.РП). Найти матрицу $D = (CA - BA)$, если

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2(696). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 16 \end{vmatrix}$.

3(567.РП). Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = 42 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4(7Т6). При каком значении параметра q, если оно существует, обведённый минор матрицы A является базисным? Матрица A имеет вид $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 7 & q & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(4,2,-1)$, $\mathbf{f}_2(5,3,-2)$, $\mathbf{f}_3(3,2,-1)$, $\mathbf{x}(12,7,-3)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (В10.БЛ). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -9 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (ДС7). Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера. (4Д8.РП). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (Т50.Б7). Найти частное решение, если $x_2 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(ДД8). Найти $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45°$.

10(09). Найти угол (в градусах), образованный вектором $[\mathbf{AB}, \mathbf{BD}]$ с осью OY, если $A(-5, 1, 1)$; $B(1, -2, -2)$; $D(-1, -4, -1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (3x_1, -x_1+x_3, 2x_1-4x_2+4x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (П66.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1, 3, 10)$ является собственным для матрицы A. (278). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (Т56). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.7

1(897.РП). Найти матрицу $D = A + 2AC$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(С17). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3(СД8.БП). Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4(0А7). Найти то значение параметра q, при котором ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & q & 5 & 4 \end{bmatrix}$ минимален.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1, -3, 4)$, $\mathbf{f}_2(2, 1, -5)$, $\mathbf{f}_3(-3, 5, 1)$, $\mathbf{x}(-1, 9, -4)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (0Р1.Р7). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ -2x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -2, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (25М). Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера. (999.РЛ). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (5П1.Р7). Найти частное решение, если $x_3 = 1$, $x_4 = -2$, $x_5 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(40Р). Найти $|\mathbf{a}|^2$, если $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = 2$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 60°$.

10(3ПП). Найти высоту треугольника ABD, опущенную из точки D, если $A(-2, 1, 1)$; $B(0, -3, -3)$; $D(-2, -5, -2)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3, -5x_1 + 7x_2 - 5x_3, 3x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (367.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(1, 1, 0)$ является собственным для матрицы A. (299). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (887.5П). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.8

1(ДС8.РП). Найти матрицу $D = A + 2CA$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести третью строку матрицы D.)

2(2Д3). Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3(ДД7.БЛ). Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4(858). При каком значении параметра p, если оно существует, строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & p & 8 & 0 \end{bmatrix}$ линейно зависимы?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(5,3,5)$, $\mathbf{f}_2(2,0,3)$, $\mathbf{f}_3(0,1,-1)$, $\mathbf{x}(-14,-7,-13)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (Н30.РП). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (0С9). Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. (520.РП). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (612.Р7). Найти частное решение, если $x_4 = x_5 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(301). Вычислить $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45°$.

10(3Т0). Вычислить высоту пирамиды, опущенную на ABD, если пирамида построена на векторах $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD}$, и $A(-1,2,1)$; $B(1,-2,-3)$; $C(1,-1,-4)$; $D(-1,-4,-2)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1, 2x_1+2x_3, -x_1+x_2+x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ — произвольный вектор. (А98.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(0,2,-1)$ является собственным для матрицы A. (0А8). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (648.5П). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.9

1(С0Р.РП). Найти матрицу $C = AB - BA$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2(204). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 3 & 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

3(246.РЛ). Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

4(299). При каком значении параметра p, если оно существует, строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & p & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,2,3)$, $\mathbf{f}_2(2,3,1)$, $\mathbf{f}_3(1,1,-3)$, $\mathbf{x}(2,4,1)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (35Н.БЛ). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 = 12, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (2ТМ). Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера. (499.РП). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -14. \end{cases}$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (А11.Р7). Найти частное решение, если $x_3 = x_4 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(5СС). Найти $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = 5\mathbf{p}+2\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p}-\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45^\circ$.

10(3ПП). Вычислить высоту треугольника ABD, опущенную из точки D, если $A(1, 2, 2)$; $B(3, -2, -2)$; $D(1, -4, -1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (3x_1, 2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (2Р0.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(0, 1, 2)$ является собственным для матрицы A. (Т97). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (280.5П). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Вариант 1.10

1(64А). Найдите сумму диагональных элементов матрицы $C = AB - BA$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2(08Б). Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

3(754.РП). Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & -16 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4(650.РП). Докажите,что третья строка матрицы $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(3,2,1)$, $\mathbf{f}_2(2,3,1)$, $\mathbf{f}_3(-1,-3,-1)$, $\mathbf{x}(2,1,1)$. Доказать, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (РС7.Б7). Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Доказать, что система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -2, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

имеет единственное решение. (С35). Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера. (386.Б7). Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 5, \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -5, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5. \end{array}\right.$$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. (П18.РП). Найти частное решение, если $x_3 = x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Доказать, что система имеет нетривиальное решение. Найти общее решение системы. Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(Т8Т). При каком значении α вектор $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{r} = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = 60^\circ$.

10(3Т0). Вычислить высоту CH пирамиды $ABCD$, если $A(-2,2,2)$; $B(0,-2,-2)$; $C(0,-1,-3)$; $D(-2,-4,-1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (-x_1, 3x_1 + 2x_2 - 2x_3, -2x_1 + 3x_2 - 3x_3)$. (А29.РП). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\mathbf{x}(0,2,3)$ является собственным для матрицы A. (245). Найти собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (099). Найти другие собственные числа, отличные от λ_0. Найти все собственные векторы матрицы A и сделать проверку.

Контрольная работа № 2

Вариант 2.1

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-1, 2)$ и $M_2(-3, -2)$. (141.РП). Найти значения параметров k и b для этой прямой.

2. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. (С71). Вычислить его площадь.

3(811.РП). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $P(-3, 2, 5)$ на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

4(Д82). Найти длину отрезка прямой, параллельной вектору $\mathbf{l} = (0, 3, 4)$, между точками пересечения её с плоскостями $2x + y - z - 6 = 0$ и $2x + y - z - 4 = 0$.

5(РР4.Р7). Найти те значения m и n, при которых прямая $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-2}{n} = \dfrac{z}{34}$ пересекает прямые

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0, \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - 3z - 4 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

6(ПАМ). Дано, что прямая, пересекающая ось аппликат в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 > 0$, параллельна плоскости $2x + 3y + 6z + 7 = 0$, отстоит от неё на расстоянии 7 и перпендикулярна оси ординат. Найти абсциссу точки пересечения этой прямой с координатной плоскостью $z = 0$.

7(АТ1.РП). Записать уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 17$ в точке $M(1, 2)$.

8. Дана кривая $9x^2 + 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
8.2(021.Б7). Найти координаты центра его симметрии.
8.3(631.Б7). Найти его большую и малую полуоси.
8.4(С91). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную кривую.

9. Дана кривая $x^2 - 10x + 2y + 25 = 0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(С11.Б7). Найти координаты её вершины.
9.3(221). Найти значение её параметра p.
9.4(СП1.Б7). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $15x^2 - 20xy - 70x + 20y + 135 = 0$.
10.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
10.2(ПР1.Б7). Найти координаты её центра симметрии.
10.3(6Р1.Б7). Найти действительную и мнимую полуоси.
10.4(АП1.Б7). Записать общее уравнение фокальной оси.

10.5. Построить данную гиперболу.

Вариант 2.2

1(РД2.РП). Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3)$ параллельно вектору $\mathbf{AB}$, если $A(4,5)$, $B(3,-7)$.

2(А82.Б7). Стороны треугольника ABC заданы уравнениями AB: $4x-y-7=0$; BC: $x+3y-31=0$; AC: $x+5y-7=0$. Записать общее уравнение высоты AH.

3(432.БЛ). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3,0,4)$ и $M_2(1,1,0)$ перпендикулярно плоскости $2x+y+4z-7=0$.

4(С35). Найти расстояние от точки $P(2,4,4)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x-y+z-2=0, \\ x+y-z-1=0. \end{cases}$$

5(435). Плоскость проходит через прямую $\begin{cases} x-y+1=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ параллельно вектору $\mathbf{AB}=(8,4,7)$. Найти длину отрезка, отсекаемого этой плоскостью от оси ординат.

6(СП5). Две прямые, пересекающиеся в точке $P(0,0,z_0)$, $z_0>0$ параллельны плоскости $2x+y+2z+6=0$ и отстоят от неё на расстоянии 4. Одна из прямых пересекает ось абсцисс, а вторая — ось ординат. Найти тангенс острого угла между ними.

7(942). Найдите радиус окружности с центром в точке $M(2,4)$, если известно, что прямая $3x+4y+8=0$ касается этой окружности.

8. Дана кривая $25x^2+16y^2-150x-32y-159=0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
8.2(922.РП). Найти координаты центра его симметрии.
8.3(С12.РП). Найти его большую и малую полуоси.
8.4(932). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную кривую.

9. Дана кривая $y^2-2y+4x+9=0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(7Т2.РП). Найти координаты её вершины.
9.3(342). Найти значение её параметра p.
9.4(312). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $x^2-7y^2-6xy+2x+26y+57=0$.
10.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.

10.2(9С2.Б7). Найти координаты её центра симметрии.
10.3(382.РП). Найти действительную и мнимую полуоси.
10.4(АМ2.БЛ). Записать уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную гиперболу.

Вариант 2.3

1(2С3.РП). Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,4)$ перпендикулярно прямой $x+2y+5=$ $=0$. (2Д3). Найти площадь треугольника, образованного данной прямой с осями координат.

2(Р43.РП). Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью $S=4{,}5$ кв. ед.

3(Т33.БЛ). Даны вершины треугольника $A(2,1,0)$, $B(3,-1,1)$ и $C(1,2,-4)$. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через сторону AB перпендикулярно плоскости треугольника ABC.

4(839). Найти расстояние от точки $P(1,2,0)$ до прямой $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{0}$.

5(925). Найти длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, которая проходит через точку $A(1,1,6)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{AB}$, где B — точка пересечения медиан треугольника, вершины которого совпадают с точками пересечения осей координат с плоскостью $12x+6y+z-24=0$.

6(512). Две прямые параллельны плоскости $4x+3y+6z=0$. Первая прямая проходит через точку $P(1,2,3)$ и пересекает ось абсцисс, а вторая — проходит через точку $Q(3,0,0)$ и пересекает ось ординат. Найти косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

7(С93.Б7). Найти координаты центра $C(x_0,y_0)$ окружности радиусом 5, касающейся прямой $3x+4y-6=0$ в точке $M(2,0)$, если известно, что точка C расположена в первой четверти.

8. Дана кривая $9x^2-4y^2-18x+56y-223=0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
8.2(223.РП). Найти координаты её центра симметрии.
8.3(9С3.Р7). Найти действительную и мнимую полуоси.
8.4(893.РП). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную гиперболу.

9. Дана кривая $x^2+2x-2y+5=0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(793.РП). Найти координаты её вершины.

9.3(323). Найти значение её параметра p.
9.4(753.Б7). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $8x^2 + 17y^2 + 12xy - 28x - 46y = 43$.
10.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
10.2(803.РП). Найти координаты центра его симметрии.
10.3(4Р3.РП). Найти его большую и малую полуоси.
10.4(433.БЛ). Записать общее уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную кривую.

Вариант 2.4

1(781.РП). Составить общее уравнение прямой, если точка $P(2,5)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

2(882.БЛ). Записать общее уравнение прямой, параллельной прямой $4x + 2y + 5 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью 9 кв. ед.

3(5А3.РП). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4,-1,3)$ параллельно оси OX и перпендикулярной к плоскости $x - 3y + 4z - 5 = 0$.

4(2Д2). Найти длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, содержащей прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+8}{4}$ и параллельной вектору $\mathbf{a} = (1,0,2)$.

5(576). Прямая, проходящая через точку $P(1,2,3)$ и пересекающая ось аппликат в точке $(0,0,z_0)$, параллельна плоскости $2x + y + z + 6 = 0$. Найти z_0.

6(712.РП). Найти координаты точки пересечения с плоскостью $x = 1$ прямой, перпендикулярной плоскости $4x + 2y + 4z + 5 = 0$ и пересекающей две заданные прямые $x + 1 = y = z$ и $2x = 2y = z + 4$.

7(8Д1). Найти радиус окружности, если известно, что она касается двух прямых $3x + 4y - 16 = 0$ и $3x + 4y + 24 = 0$.

8. Дана кривая $x^2 - 4x - 9y^2 + 72y - 149 = 0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
8.2(9С4.Б7). Найти координаты её центра симметрии.
8.3(385.РП). Найти действительную и мнимую полуоси.
8.4(9С6.БЛ). Записать общее уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную гиперболу.

9. Дана кривая $x^2 + 4y = 0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(9Т7.РП). Найти координаты её вершины.

9.3(258). Найти значение её параметра p.

9.4(АР9.РП). Записать уравнение её оси симметрии.

9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 24y = 0$.

10.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.

10.2(9А0.БЛ). Найти координаты центра его симметрии.

10.3(ПД1.РП). Найти его большую и малую полуоси.

10.4(С82.РП). Записать уравнение фокальной оси.

10.5. Построить данную кривую.

Вариант 2.5

1(Д01.РП). Составить общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,4)$ параллельно прямой $2x + 3y + 5 = 0$.

2(3А2.РП). Найти координаты проекции точки $M(3,6)$ на прямую $x + 2y - 10 = 0$.

3(103.БЛ). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(-6,1,-5)$, $M_2(7,-2,-1)$, $M_3(10,-7,1)$.

4(203). Известно, что прямая $\mathcal{L}$ параллельна вектору $\mathbf{l} = (0,9,12)$. Найти длину отрезка этой прямой между плоскостями $x + y + z - 3 = 0$ и $x + y + z - 24 = 0$,

5(3С2). Некоторая прямая проходит через точку $P(2,2,1)$, пересекает ось ординат в точке $Q(0,y_0,0)$ и пересекает прямую

$$\begin{cases} x - 3z + 2 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Найти y_0.

6(7АД). Плоскость содержит прямую $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{(z-6)}{-2}$ и параллельна прямой $x - 3 = y - 3 = -2(z - 6)$. Найти квадрат расстояния от второй прямой до плоскости.

7(С04.РП). Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$ определяет на плоскости XOY окружность. Найти её центр и радиус R. В ответе сначала указать x_0, y_0 — координаты центра, затем R.

8. Дана кривая $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
8.2(325.Б7). Найти координаты её центра симметрии.
8.3(Д06.РП). Найти действительную и мнимую полуоси.
8.4(267.БЛ). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную гиперболу.

9. Дана кривая $y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(058.РП). Найти координаты её вершины.
9.3(2П9). Найти значения её параметра p.
9.4(289.РП). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y = 16$.
10.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
10.2(822.РП). Найти координаты центра его симметрии.
10.3(470.Б7). Найти его большую и малую полуоси.
10.4(941.РП). Записать уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную кривую.

Вариант 2.6

1(ПД1.РП). Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 4)$ перпендикулярно прямой $3x + 4y + 5 = 0$.

2(342.РП). Составить уравнения прямых, проходящих через точку $P(3, 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7, 3)$ и $B(11, -15)$. В ответ ввести уравнение той прямой, которая отсекает от осей координат треугольник, расположенный в первой четверти.

3(ПР3.БЛ). Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4, 2, 1)$ и $M_2(3, 3, 2)$ параллельно вектору $\mathbf{AB} = (4, -3, -2)$.

4(ПР4.РП). Найти координаты проекции начала координат на прямую

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}.$$

5(2С5). При каком значении параметра C прямая

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 5 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

параллельна плоскости $x + 3y + Cz - 2 = 0$.

6(Р06). Две грани куба лежат на плоскостях $3x - 6y + 2z - 5 = 0$ и $3x - 6y + 2z + 30 = 0$. Вычислить объём куба.

7(977.РП). Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 35 = 0$$

определяет сферу. Найти координаты (x_0, y_0, z_0) её центра и радиус R. В ответе записать четвёрку чисел (x_0, y_0, z_0, R).

8. Дана кривая $25x^2 + 16y^2 - 350x + 825 = 0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
8.2(ТП8.РП). Найти координаты центра его симметрии.
8.3(АП9.БЛ). Найти его большую и малую полуоси.
8.4(3Т0.Б7). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную кривую.

9. Дана кривая $14y = (x - 8)^2$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(0Р1.РП). Найти координаты её вершины.
9.3(962). Найти значение её параметра p.
9.4(Д93.БЛ). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $x^2 + y^2 + 3xy + x + 4y = 0{,}5$.
10.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
10.2(0Д4.РП). Найти координаты её центра симметрии.
10.3(3Т5.РП). Найти квадраты её действительной и мнимой полуосей.

10.4(416.БЛ). Записать общее уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную гиперболу.

Вариант 2.7

1(П81.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(1,3)$, $B(2,8)$, $C(6,6)$. Записать общее уравнение прямой, на которой расположена медиана AM треугольника ABC.

2(6Б2.БЛ). Найти координаты точки B, симметричной точке $A(3,2)$ относительно прямой $x+2y-2=0$.

3(983.РП). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,1)$ перпендикулярно двум плоскостям: $x-2y+3z-2=0$ и $x+4y-2z+1=0$.

4(8С4). Найти то значение параметра p, при котором прямые
$$\begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t-2, \\ z=-4t+6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{p}=\frac{z+4}{1} \quad \text{пересекаются.}$$

5(С35). Найти длину отрезка, отсекаемого от оси абсцисс плоскостью, проходящей через прямую
$$\begin{cases} x-y+3z+1=0, \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$$
и точку $M(1,1,0)$.

6(Д06). Найти расстояние между плоскостями $x-2y+2z+$ $+11=0$ и $x-2y+2z-25=0$.

7(597). Найти радиус сферы $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\lambda=0$, если известно, что она касается плоскости $3x-2y+6z+23=0$.

8. Дана кривая $x^2+y^2-8x-2y=47$.
8.1. Доказать, что эта кривая — окружность.
8.2(671.Б7). Найти координаты её центра.
8.3(ПА2). Найти её радиус.

9. Дана кривая $25x^2-16y^2+32y-416=0$.
9.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
9.2(ПР8.РП). Найти координаты её центра симметрии.
9.3(А59.БЛ). Найти действительную и мнимую полуоси.
9.4(3Р0.РП). Записать уравнение фокальной оси.
9.5. Построить данную гиперболу.

10. Дана кривая $9x^2+16y^2+24xy-40x+30y=0$.
10.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
10.2(1Р3.РП). Найти координаты её вершины.
10.3(СТ4). Найти значение её параметра p.
10.4(П95.БЛ). Записать уравнение её оси симметрии.
10.5. Построить данную параболу.

Вариант 2.8

1(376.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(1,3)$, $B(2,8)$, $C(6,7)$. Записать общее уравнение его высоты AH.

2(345.Р7). В треугольнике ABC из вершины A проведены высота и медиана. Даны: вершина $B(6,5)$, уравнение высоты $x+y=2$ и уравнение медианы $2x-3y+1=0$. Найти координаты x_0, y_0 вершины C.

3(0С7.БЛ). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-2,4)$ и $M_2(2,-1,2)$ перпендикулярно плоскости $x+4y-5z+3=0$.

4(058.РП). Найти координаты проекции точки $M(3,-1,-3)$ на плоскость $2x+y-4z+4=0$.

5(878). Найти коэффициент A в уравнении плоскости $Ax+y+Cz+D=0$, проходящей через точки $P(1,1,8)$, $O(0,0,0)$ параллельно прямой $x-1=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{6}$.

6(П49.РП). При каких значениях параметров a и c прямая $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{c}$ пересекает две другие прямые:

$$\left\{\begin{array}{l} y-3z-3=0, \\ 3x-2y-3=0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x-y+1=0, \\ 3x-z-2=0. \end{array}\right.$$

7(350). Найти радиус сферы, если известно, что она касается двух плоскостей $x-2y+2z+22=0$ и $x-2y+2z+10=0$.

8. Дана кривая $9x^2+4y^2-36x-64y+256=0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
8.2(341.РП). Найти координаты центра его симметрии.
8.3(982.БЛ). Найти его большую и малую полуоси.
8.4(813.РП). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную кривую.

9. Дана кривая $x^2-4x+8y=36$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(9А4.РП). Найти координаты её вершины.
9.3(415). Найти значение её параметра p.
9.4(9А6.РП). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$.
10.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
10.2(Д87.РП). Найти координаты её центра симметрии.
10.3(ПД8.БЛ). Найти действительную и мнимую полуоси.
10.4(299.РП). Записать уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную гиперболу.

Вариант 2.9

1(940.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(3,4)$, $B(-1,2)$, $C(2,-1)$. Записать общее уравнение средней линии треугольника, параллельной BC.

2(1А1.БЛ). В прямоугольном треугольнике ABC известны: уравнение медианы $3x-4y+8=0$, проведённой из вершины $A(0,2)$ прямого угла, и вершина $B(2,1)$. Найти координаты (x_0,y_0) вершины C треугольника.

3(Т32.РП). Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7,2,-3)$ и $M_2(5,6,-4)$ параллельно оси OY.

4(9Д3). Найти коэффициент B в уравнении плоскости $x+By+CZ+D=0$, проходящей через точки $P(1,-1,1)$, $O(0,0,0)$ параллельно прямой $\left\{\begin{array}{l} x=0, \\ 4y+3z=0. \end{array}\right.$

5(1А6.РП). При каких значениях параметров A_1 и A_2 прямая

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x+3y-5z=0, \\ A_2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right.$$

параллельна прямой

$$\left\{\begin{array}{l} x-19z+19=0, \\ y+11z-11=0. \end{array}\right.$$

Ответ записать в виде пары чисел (A_1,A_2).

6(ДД3). Найти длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат, плоскостью, содержащей прямую $x+3=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-6}{4}$ и отсекающей на осях абсцисс и ординат одинаковой длины отрезки.

7(8Т3.РП). Найдите уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2-8x+6y+4z-12=0$ в точке $M_0(1,1,2)$.

8. Дана кривая $4x^2-32x-y^2+6y+51=0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
8.2(С54.БЛ). Найти координаты её центра симметрии.
8.3(225.РП). Найти действительную и мнимую полуоси.
8.4(346.РП). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную гиперболу.

9. Дана кривая $4x+6y-y^2=21$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(1Д7.РП). Найти координаты её вершины.
9.3(258). Найти значение её параметра p.
9.4(С59.БЛ). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$.
10.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
10.2(8Д0.РП). Найти координаты центра его симметрии.
10.3(П01.БЛ). Найти его большую и малую полуоси.
10.4(162.РП). Записать уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную кривую.

Вариант 2.10

1(С83.РП). В прямоугольном треугольнике даны: вершина острого угла $A(7, -2)$ и уравнение $3x - 5y + 15 = 0$ одного из катетов. Записать общее уравнение другого катета.

2(П64.РП). Высота, проведённая из вершины $A(4, 4)$ треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке $D(1, 1)$. $x + 2y + 1 = 0$ — уравнение высоты, опущенной из вершины B. Определить координаты x_0, y_0 вершины C.

3(ПА5.БЛ). Записать общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1, 2, 3)$ и ось OY.

4(3А2). Найти значение параметра m в уравнении прямой $\begin{cases} x = 0, \\ my + 18z = 0 \end{cases}$, если известно, что эта прямая параллельна плоскости $x + 4y + 3z + 5 = 0$.

5(983). Найти длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат плоскостью, проходящей через точки $P_1(2, 1, 0)$, $P_2(1, 0, 4)$ и пересекающей оси ординат и абсцисс в точках $A_1(0, a, 0)$, $A_2(a, 0, 0)$.

6(Б62.БП). Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x}{3} = \frac{y}{12} = z$ с плоскостью, содержащей прямые
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}, \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

7(5Т6). Найти радиус сферы с центром в точке $C(-1, -2, 3)$, если она касается плоскости $2x - 2y + z + 10 = 0$.

8. Дана кривая $4x^2 + 9y^2 - 32x - 18y + 37 = 0$.
8.1. Доказать, что эта кривая — эллипс.
8.2(А57.БЛ). Найти координаты центра его симметрии.
8.3(П08.РП). Найти его большую и малую полуоси.
8.4(СР9.БЛ). Записать уравнение фокальной оси.
8.5. Построить данную кривую.

9. Дана кривая $y^2 - 4y + 10x + 14 = 0$.
9.1. Доказать, что данная кривая — парабола.
9.2(430.БЛ). Найти координаты её вершины.
9.3(821). Найти значение её параметра p.

9.4(3П2.РП). Записать уравнение её оси симметрии.
9.5. Построить данную параболу.

10. Дана кривая $7y^2 + 24xy + 24x + 62y + 199 = 0$.
10.1. Доказать, что эта кривая — гипербола.
10.2(2Р3.БЛ). Найти координаты её центра симметрии.
10.3(С54.РП). Найти действительную и мнимую полуоси.
10.4(А65.БЛ). Записать уравнение фокальной оси.
10.5. Построить данную гиперболу.

Литература

1. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). - М.: Наука, 1969. - 432 с.

2. Пизо Ш., Заманский М. Алгебра и анализ. - М.: Наука, 1971. - 656 с.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974. - 296 с.

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1971. — 328 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980. — 176 с.

3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1965. — 608 с.

4. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. — М.: АЙРИС, 1996. — 288 с.

5. Головина М.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1980. — 320 с.

7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 432 с.

8. Магазинников Л.И., Горбанёв Н.Н. Линейная алгебра. — Томск: Томская академия систем управления и радиоэлектроники, 1993. — 182 с.

9. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964. — 664 с.