Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.Я. Суханов

Исследование операций

Учебное пособие и курс лекций для студентов направления 09.03.01
Информатика и вычислительная техника

Томск 2023

Суханов А.Я.

Исследование операций: Учебное пособие и курс лекций для студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» – 103 с.

Учебное пособие содержит курс лекций используемых при ведении данной дисциплины.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавров очной формы обучения и содержит курс лекций по дисциплине «Исследование операций» для направления бакалавриата 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника». Данный курс включает в себя также элементы теории игр и теории массового обслуживания. Данная дисциплина формирует у студента навыки исследователя, применяющего системный подход к решению возникающих задач, объясняя необходимость математического моделирования практически во всех областях человеческой деятельности на простых примерах о производстве, а так же объясняя важность применения подобных подходов.

Целью дисциплины «Исследование операций» является овладение методикой операционного исследования, усвоение вопросов теории и практики построения и анализа операционных моделей в системах различного назначения.

Основными **задачами** изучения дисциплины является:

Обучение приемам и методам исследования операций, математическим методам оптимизации, а также методам математического моделирования операций теории игр.

Обучение основам и методам решения задач теории массового обслуживания.

Получение навыков решения задач линейного и динамического программирования, методам анализа принятого решения на устойчивость.

Дисциплина «Исследование операций» относится к числу дисциплин профессионального цикла. Успешное овладение дисциплиной предполагает предварительные знания, полученные в предыдущих дисциплинах: «Математика», «Дополнительные главы математики», «Информатика», «Программирование», «Теория вероятностей и математическая статистика»; знакомство с пакетами прикладных программ Mathcad, Matlab, языком программирования Python. Знания, полученные студентами по этой дисциплине, будут использоваться при выполнении учебно-исследовательской работы, при подготовке выпускной квалификационной работы.

Далее в таблице приведено содержание курса.

Таблица – Основное содержание курса и лекционных занятий

Наименование разделов	Содержание разделов	Трудоемкость (час.)
Введение	Цели и задачи курса, его взаимосвязь с другими дисциплинами специальности, значение курса в подготовке бакалавров направления Информатика и вычислительная техника. История предмета, основные понятия и	2

	определения. Рекомендуемая литература.	
Общая постановка задачи исследования операций	Математические модели операций. Принципы построения математических моделей и их классификации. Общая постановка задачи: детерминированный случай и оптимизация в условиях неопределенности. Оценка операций по нескольким показателям (понятие векторной оптимизации, мультикритериальные задачи). Способы свертки критериев. Оптимальность по Парето.	4
Задачи математического программирования	Постановка и классификация задач математического программирования. Линейное программирование. Симплекс метод. Анализ решения задачи линейного программирования на чувствительность к принятой модели. Пример анализа на чувствительность на основе графического решения задачи. Анализ на чувствительность задачи линейного программирования с помощью двойственной задачи. Задачи динамического программирования: общая постановка и схема решения. Смешанно-целочисленное программирование. Задачи стохастического программирования (задачи с неопределенными параметрами).	6
Нелинейная оптимизация с ограничениями	Необходимые условия оптимальности (Куна-Такера). Экономическая интерпретация множителей Куна-Такера. Достаточные условия оптимальности. Седловые точки и функции Лагранжа. Примеры задач нелинейного программирования.	4
Моделирование операций по схеме марковских случайных процессов	Марковские случайные процессы. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Предельные вероятности состояний. Процессы гибели и размножения.	4
Основы теории систем массового обслуживания	Основные определения и понятия. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Метод численного моделирования (метод Монте-Карло) Датчики случайных чисел в интервале (0,1). Моделирование событий, дискретных и непрерывных случайных величин. Оценка точности характеристик полученных методом численного моделирования. Моделирование систем массового обслуживания.	4
Основы теории игр	Основные понятия теории игр. Формы представления игр. Равновесие Нэша. Антагонистические игры: определение матричной игры, решение матричных игр в чистых и смешанных стратегиях, решение игр $m\times n$ сведением к задаче линейного программирования. Бесконечные антагонистические игры и их решение. Игры многих лиц: общие понятия, конечные бескоалиционные игры, кооперативные игры.	4

1 ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

Исследование операций (ИО) – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением математических и количественных методов для нахождения оптимальных решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности или дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности

Происхождение названия **"Исследование Операций"** объясняется историческими причинами. Впервые исследования в этой области были выполнены в Англии в период Второй Мировой войны и имели целью помочь командованию принять решения по руководству боевыми операциями. Успех работы привёл к тому, что после войны оформившиеся приёмы и методы исследования операций начали использовать в других областях, где было необходимо управление сложными техническими и экономическими человеко-машинными системами.

В годы Второй мировой войны исследование операций широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по исследованию операций работали в командовании бомбардировочной авиации США, дислоцированном в Великобритании. Ими исследовались многочисленные факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к четырёхкратному повышению эффективности бомбометания. Из-за дислокации в отделе оперативных действий (Operations) дисциплина и получила своё оригинальное название по имени адреса, на который высылалась почта для отдела: Operations/Research.

В начале войны боевое патрулирование самолетов союзников для обнаружения кораблей и подводных лодок противника носило неорганизованный характер. Привлечение к планированию специалистов по исследованию операций позволило установить такие маршруты патрулирования и такое расписание полетов, при которых вероятность оставить объект незамеченным была сведена до минимума. Полученные рекомендации были применены для организации патрулирования над Южной Атлантикой с целью перехвата немецких кораблей с военными материалами. Из пяти вражеских кораблей, прорвавших блокаду, три были перехвачены на пути из Японии в Германию, один был обнаружен и уничтожен в Бискайском заливе и лишь одному удалось скрыться благодаря тщательной маскировке.

Решение – выбор из ряда возможностей, имеющихся у организатора.

Чем сложнее и масштабнее планируемое мероприятие, тем менее допустимы в нем "волевые" решения и тем важнее становятся научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать наиболее удачные; установить, достаточно ли имеющейся информации для правильного выбора решения, и если нет-какую информацию нужно получить дополнительно. Слишком опасно в таких случаях опираться на свою интуицию, на "опыт и здравый смысл". В эпоху научно-технической революции техника и технология меняются настолько быстро, что "опыт" просто не успевает накапливаться. К тому же часто идет речь о мероприятиях уникальных, проводимых впервые. "Опыт" в этом случае молчит, а "здравый смысл" легко может обмануть, если не опирается на расчет. Такими расчетами, облегчающими людям принятие решений, и занимается исследование операций.

Особую актуальность приобретает улучшение работы координирующих и управляющих центров, которым предоставлено право принимать ответственные решения. В том числе при управлении какими то объектами, что представляет в общей совокупности автоматизированную систему управления – АСУ.

АСУ можно определить как систему организационно-технического управления, основанного на использовании достоверной и полной информации, современной вычислительной техники, научных методов для анализа возможных решений.

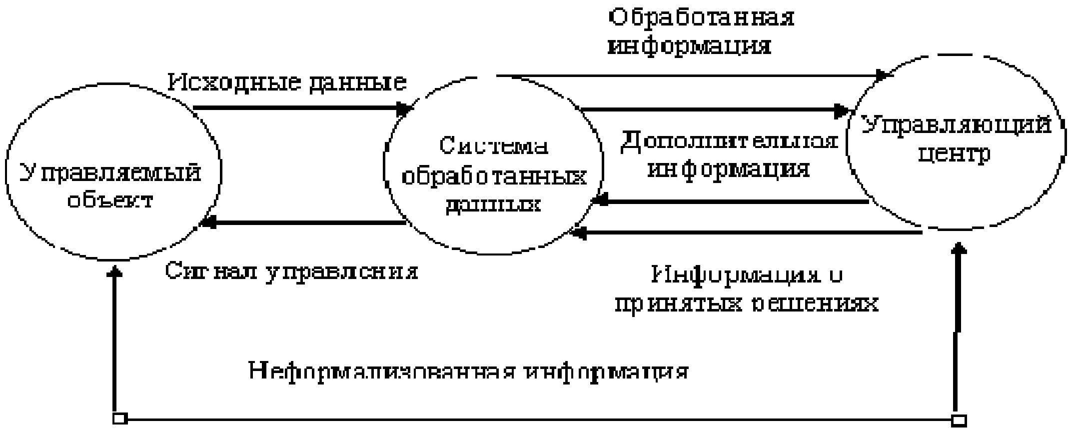


Рисунок 1.1 – Автоматизированная система управления

Как раз для выработки решений применяемых при управлении АСУ и применяются методы исследования операций. Хотя в настоящее время появляются не только автоматизированные или автоматические системы, напомним, что автоматизированная система предполагает наличие человека в схеме управления, в отличие от автоматической, но и интеллектуальные и интеллектуализированные. Данные системы позволяют вырабатывать новый алгоритм поведения в новых сложившихся условиях, такие системы, например интеллектуальные уже используют алгоритмы обучения с подкреплением.

Приведем классические задачи, которые решались с использованием методики Исследования операций и найдем в них общие закономерности, которые позволят нам дать определения для терминологии использующейся данной дисциплиной.

1. Продажа сезонных товаров

Для реализации сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется определить их число, размещение, запасы, количество персонала для получения максимальной прибыли.

2. Снегозащита дорог

В условиях Крайнего Севера метели, заносящие снегом дороги, представляют серьезную помеху движению. Любой перерыв движения приводит к экономическим потерям. Существует ряд возможных способов снегозащиты (профиль дороги, защитные щиты и т. д.), каждый из которых требует известных затрат на сооружение и эксплуатацию. Известны господствующие направления ветров, есть данные о частоте и интенсивности снегопадов. Требуется разработать наиболее эффективные экономически средства снегозащиты (какую из дорог, как и чем защищать?) с учетом потерь, связанных с заносами.

3. Выборочный контроль продукции

Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер контрольной партии, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль.

4. Медицинское обследование

Известно, что в каком-то районе обнаружены случаи опасного заболевания. С целью выявления заболевших (или носителей инфекции) организуется медицинское обследование жителей района.

5. Библиотечное обслуживание

Крупная библиотека обслуживает запросы, поступающие от абонентов. В фондах библиотеки имеются книги, пользующиеся повышенным спросом, книги, на которые требования поступают реже и, наконец, книги, почти никогда не запрашиваемые. Имеется ряд возможностей распределения книг по стеллажам и хранилищам, а также по диспетчеризации запросов с обращениями в другие библиотеки. Нужно разработать такую систему библиотечного обслуживания, при которой запросы абонентов удовлетворяются в максимальной мере.

6. План снабжения предприятий.

Имеются сырьевые базы и предприятия-потребители. Требуется разработать такой план снабжения сырьем каждого предприятия (с какой базы, в каком количестве, каким видом транспорта и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки. Здесь показатель эффективности – суммарные расходы на перевозки сырья в единицу времени ($R \rightarrow min$).

7. Постройка участка магистрали.

При постройке участка магистрали в распоряжении имеется определенные средства (трудовые и материальные ресурсы), требуется спланировать строительство (распределить ресурсы) так, чтобы строительство было завершено в минимальный срок. Здесь необходимо учитывать случайные факторы (метеоусловия, отказы техники), и тогда показатель эффективности – среднее ожидаемое время окончания строительства ($T \rightarrow min$).

8. Сеть торговых точек.

Требуется спланировать количество торговых точек, их размещение, товарные запасы, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи. Здесь показатель эффективности – средняя ожидаемая прибыль от реализации товаров ($П \rightarrow max$).

9. Задача о комплексном использовании сырья.

Исходное сырье или материал может перерабатываться различными технологическими способами. В каждом случае получается в различном сочетании несколько видов продукции. Требуется найти план переработки, при котором заданные объемы конечной продукции получались бы с наименьшими затратами исходных материалов. Одним из распространенных примеров применения этого типа задач является оптимальный раскрой материалов.

10. Противолодочный рейд.

Требуется рационально организовать боевую операцию по уничтожению подводной лодки группой самолетов (выбрать маршруты самолетов, высоту полета, способ атаки). Здесь показатель эффективности – вероятность того, что лодка будет уничтожена.

11. Распределение изделий между предприятиями

(оборудования между участками) – минимизация суммарных затрат на изготовление всех изделий с учетом времени производства;

12. Регулирование парка вагонов

(распределение вагонов разных типов под различные грузы) -минимизация суммарных затрат на погрузку;

13. Выбор рациональных пропорций производства и использования энергоресурсов

при минимуме затрат (объем добычи угля и план распределения различных сортов угля между энергетическими установками, обеспечивающий их потребности наиболее экономным путем).

14. Задача планирования добычи угля в априорных решающих правилах

В угольной промышленности технико-экономические показатели сильно зависят от природных факторов, которые не всегда могут быть предсказаны заранее. Это:

мощность и угол падения пластов, обводнённость участков,склонность к выбрасыванию газов, физико-механические свойства угля и пород, надежность оборудования, эксплуатационные расходы. Природные условия сказываются на надежности оборудования, эксплуатационных расходах и т. д. и, в конечном счете, на области определения допустимых решений. Поэтому выбор оптимального проекта плана (решения) – это задача стохастического программирования.

15. Задача о ранце

Из заданного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес», требуется отобрать некое число предметов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес.

16. Задача коммивояжёра

Задача, заключающаяся в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. В условиях задачи указываются критерий выгодности маршрута (кратчайший, самый дешёвый, совокупный критерий и тому подобное) и соответствующие матрицы расстояний, стоимости и тому подобного.

17. Транспортная задача

Математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

18. Задача об упаковке в контейнеры

Задача заключается в упаковке объектов предопределённой формы в конечное число контейнеров предопределённой формы таким способом, чтобы число использованных контейнеров было наименьшим или количество или объём объектов (которые упаковывают) были наибольшими.

В соответствии с общими чертами характеризующим данные задачи вырабатываются и общие приемы решения подобных задач, в совокупности составляющие методологическую схему и аппарат исследования операции. Из приведённых выше примеров следует, что не для всех из них на практике применяются математические методы обоснования решений; в некоторых случаях решения принимаются интуитивно. Однако с течением времени доля задач, где для выбора решения применяются математические методы, постоянно растет.

Рассмотрим основные понятия, выработанные данной дисциплиной.

Операция – всякое мероприятие или система действий, объединённые единым замыслом и направленные на достижение какой-то цели, существующее во времени, проходящее различные этапы(фазы) развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью.

Примеры

1. Разработка плана снабжения предприятий при минимальных затратах.

2. Организация продажи сезонных товаров при максимальной экономической эффективности.

3. Обеспечение требуемого качества продукции при минимальных расходах на контроль

4. Организация системы медицинского обслуживания для скорейшего прекращения распространения инфекции.

Оперирующие стороны – отдельные лица и коллективы, объединённые организационным руководством и активно стремящиеся к достижению поставленной цели.

Активные средства проведения операции – совокупность материальных, энергетических, денежных, трудовых и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых оперирующей стороной для обеспечения успешного хода ***операции*** и достижения её цели.

Стратегии оперирующей стороны в данной операции – допустимые (не выходящие за пределы технических, организационных, физических возможностей) способы расходования ею имеющихся ***активных средств***. Среди допустимых находятся и ***оптимальные стратегии***.

Действующие факторы операции – объективные условия и обстоятельства, определяющие её особенности и непосредственно влияющие на её исход. Различают ***факторы***:

- Определённые (точно известные)
- Неопределённые (имеющие вероятностную природу или проявляющиеся беспорядочно)

Все они разделяются на:

- Контролируемые ***оперирующей стороной***
- Неконтролируемые ***оперирующей стороной***

Пример определённого неконтролируемого фактора – сила притяжения Земли или количество минут в часах, максимальное время трудового рабочего дня с точки зрения работника и работодателя в отношении трудового законодательства.

Пример контролируемого фактора – количество войск в армии (известно количество человек в армии и это количество можно менять путем мобилизации), максимальное время трудового рабочего дня с точки зрения государственной законодательной власти.

Пример неопределённого неконтролируемого фактора – температура в этот день через год, время прихода маршрутки на остановку с точки зрения пассажира на остановке.

Критерий эффективности операции (целевая функция) – показатель требуемого, или ожидаемого, или достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью ***операции***. Важнейшая функция ***критерия*** – возможность сравнительной оценки различных ***стратегий*** до начала их реализации.

Правильный выбор показателя эффективности является необходимым условием полезности исследования, применяемого для обоснования решения. **Показатель эффективности часто называют целевой функцией.** Для иллюстрации принципов выбора показателя эффективности вернемся опять к нашим примерам. Выберем для каждого из них естественный показатель эффективности и укажем, требуется его максимизировать или минимизировать.

1. План снабжения предприятий.

Задача операции-обеспечить снабжение сырьем при минимальных расходах на перевозки. Показатель эффективности R-суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например, месяц (R=>max)

2. Продажа сезонных товаров.

В качестве показателя эффективности можно взять среднюю ожидаемую прибыль П от реализации товаров за сезон (П=>max)

3. Выборочный контроль продукции.

Естественный показатель эффективности, подсказанный формулировкой задачи, это средние ожидаемые расходы R на контроль в единицу времени, при условии, что система контроля обеспечивает заданный уровень качества например, средний процент брака не выше заданного (R=>max)

4. Медицинское обследование.

В качестве показателя эффективности можно выбрать средний процент (долю) Q больных и носителей инфекции, которых удалось выявить (Q=>max).

Состоянием операции в некоторый момент времени t называется совокупность ее характеристик (особенностей), проявляющихся в этот момент и отражающих объективно сложившееся положение дел.

Всякая операция представляет собой процесс, существующий во времени, проходящий различные этапы (фазы) развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью.

Математическая модель – формальные соотношения, устанавливающие связь принятого ***критерия эффективности*** с ***действующими факторами операции***. Она должна быть достаточно полной (т.е. учитывать все важные ***факторы***), но достаточно простой и исключать второстепенные ***факторы*** (чтобы можно было установить обозримые зависимости).

- Аналитические (детерминированные)
- Статистические и игровые

Требования к модели противоречивы. С одной стороны, она должна быть достаточно полной, т.е. в ней должны быть учтены все важные факторы, от которых существенно зависит исход операции. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было установить обозримые (желательно - аналитические) зависимости между входящими в нее параметрами. Модель не должна быть "засорена" множеством мелких, второстепенных факторов, их учет усложняет математический анализ и делает результаты исследования трудно обозримыми.

Типичный пример модели операции и задачи исследования операций, найти оптимум:

$$z = f(x_{1,}x_2..x_n) \longrightarrow max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g(x_{1,}x_2..x_n) \le b_i, i = 1,2..m \\ x_{1,}x_2..x_n \ge 0 \end{cases}$$

Второе выражение ограничений добавляет условие неотрицательности на переменные (контролируемые действующие факторы).

Типичный пример решения задачи в инженерной и научной практике сводится к процессу построению модели и постепенному ее уточнению (рисунок 1.2). Примером может служить уточнение Ньютоновской механики на случай скоростей близких к скоростям света.

Рисунок 1.2 – Схема показывающая сущность процесса моделирования

При отсутствии неконтролируемых неопределенных факторов, задача является детерминированной, в случае же наличия таких факторов задача является недетерминированной, во втором случае в модели кроме констант и переменных присутствуют и случайные величины.

Детерминированный случай:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots) \tag{1.1}$$

Когда все факторы заданы заранее: условия (α), они же определенные неконтролируемые факторы и решения (x), являющиеся контролируемыми факторами, которые мы ищем решая задачу оптимизации.

Недетерминированный случай:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, x_1, x_2, \ldots y_{1,} y_2 \ldots) \tag{1.2}$$

Здесь добавляются неизвестные случайные факторы или величины (y), они еж неопределенные неконтролируемые.

При наличии неопределенных неконтролируемых факторов задача поиска оптимального решения теряет определённость, т.к. нельзя максимизировать неизвестную величину. Это превращает её в ***задачу принятия решения в условиях неопределённости***.

Для того чтобы в этом случае решить задачу первый способ использует сведение задачи к детерминированной, путем замены случайных величин на их средние или наиболее вероятные значения. Например, температура на завтра хоть и является случайной величиной, но мы можем использовать прогноз погоды на завтра и взять среднюю температуру за день.

Другой способ это оптимизация в среднем:

$$\bar{W} = M[W] = \int\int \dots \int W(\alpha_1, \alpha_2 \dots, x_1, x_2 \dots y_1, y_2 \dots) f(y_1, y_2 \dots) dy_1 dy_2 \dots \quad (1.3)$$

В данном случае *f(y1,y2...)* – функция совместной плотности распределения случайных величин y, x – переменные – неопределённые контролируемые факторы, y – случайные величины (неопределенные неконтролируемые факторы), α – константы – определённые неконтролируемые факторы.

При этом функционал, который представляет собой математическое ожидание первого порядка оптимизируется по переменным x. Соответственно, в зависимости от критерия эффективности производится максимизация или минимизация среднего значения, предполагая, что операция производится множество раз и выбирается такое решение, которое приведет, например, к максимизации выигрыша в среднем. Можно привести примеры такой оптимизации в среднем, в задачах обучения с подкреплением или на примере стратегий поведения у живых организмов. Например, утки каждый раз на зиму улетают на Юг, а затем возвращаются, такая стратегия позволят выживать их виду. Обучение с подкреплением часто оптимизирует среднюю сумму получаемых выигрышей, например, в алгоритмах Actor critic (SAC, A2C).

Для решения подобных задач оптимизации разработаны хорошо известные методы оптимизации. Среди них используются методы градиентного спуска использующие первые и вторые производные и частные производные от функционала, так же используются методы случайного поиска и методы, использующие только значение самого функционала. Выделяют так же бионические методы, заимствующие природные механизмы для решения задач оптимизации. Например, генетические алгоритмы, дифференциальной эволюции, алгоритмы имитации иммунной системы, клональные алгоритмы, алгоритм роя частиц, муравьиный алгоритм, данные алгоритмы позволяют решать и NP - сложные задачи, используя соответствующие заимствованные природные эвристики, в отличие от градиентных алгоритмов более вероятно позволяют найти глобальный оптимум.

2 ВЕКТОРНАЯ ОПЕРАЦИЯ

Векторная операция представляет собой вектор частных критериев эффективности, каждый из которых зависит от действующих факторов операции. Здесь X представляют собой контролируемые факторы.

$$W(X) = (W_1(X), W_2(X), \ldots W_n(X)) \tag{2.1}$$

$X \in \Omega_x$ - область допустимых решений – когда допустимое множество всех возможных точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи.

$\Omega_X^c \in \Omega_X$ - область согласия – когда возможно улучшение качества одновременно всех критериев или, по крайней мере, не ухудшение одного при увеличении другого.

$\Omega_X^k \in \Omega_X$ - область компромиссов – когда существуют противоречия между некоторыми критериями.

Очевидно, что: $\Omega_x = \Omega_x^k \cup \Omega_x^c, \Omega_x^k \cap \Omega_x^c = \emptyset, \Omega_x^k = \Omega_x / \Omega_x^c$.

В область согласия входят решения, для любого из которых можно найти решение из области компромиссов, превосходящее или равное по соответствующим критериям.

Область же компромиссов часто еще называют областью оптимальных по Парето решений и в данной области все решения между собой несравнимы по Парето, при этом сравнивая два решения, по одним из критериев какое-то решение будет лучше, по другим хуже.

В области оптимальных по Парето всегда находятся лучшие решения, для области согласия всегда можно найти решение которое будет лучше.

Для векторной операции всегда существует ряд задач, которые необходимо решить.

Выделить область компромиссов, найти и выбрать одно какое-то решение в области компромиссов, провести нормализацию критериев.

Выделим общие проблемы ***векторной оптимизации***:

- Определение ***области компромисса***
- Выбор ***схемы компромисса***
- Нормализация ***критериев***
- Учёт приоритета ***критериев***

Для определения области компромиссов можно воспользоваться определением области компромиссов и области согласия, взять какую-то точку в области допустимых решений и проверить есть ли лучшая точка с учетом поставленной задачи оптимизации частных критериев. Если такая точка есть, то это предыдущая входит в область согласия, затем постепенно сдвигаясь в области допустимых решений выделить область, соответствующую области компромиссов. Пример поиска области компромиссов в случае задачи максимизации векторных критериев приведен на рисунке 2.1.

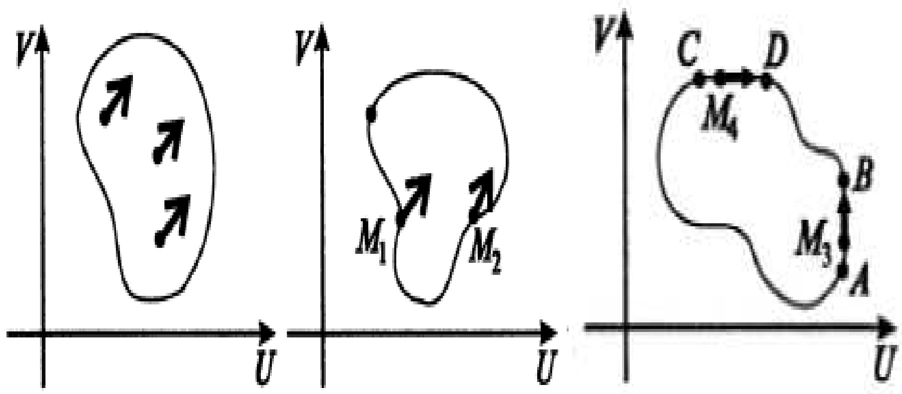


Рисунок 2.1 – Поиск области компромиссов

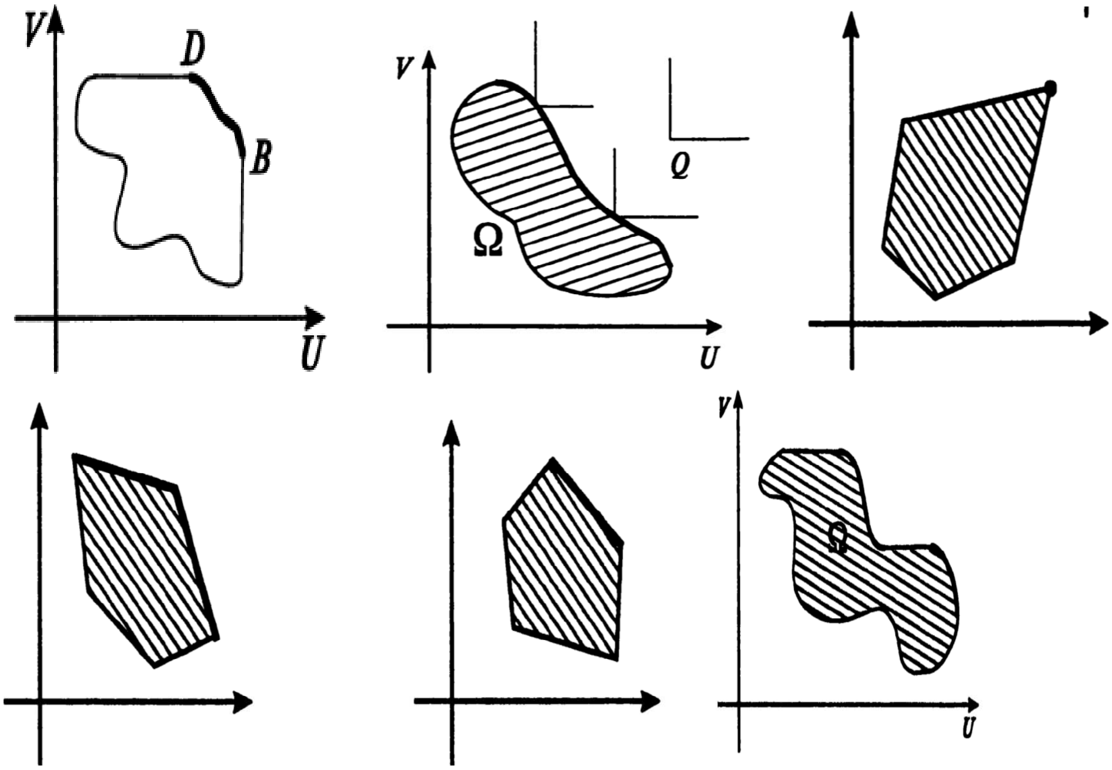


Рисунок 2.2 – Пример области компромиссов для случая максимизации критериев

На рисунке 2.2 приведен еще один способ определения области компромиссов, путем построения перпендикулярных векторов в виде осей координат в направлении оптимизации, при этом если эти вектора пересекают только в своем начале область допустимых решений, то это точка в области компромиссов.

Можно то же самое дать через сравнимость по Парето и с использованием операций над множествами.

Пусть дана векторная операция с минимизируемыми критериями, если это не так, то максимизацию всегда можно свести к задаче минимизации и наоборот, взяв отрицательно значение функционала, иногда так же прибегают к делению, но тогда функционал не должен принимать нулевое значение $\begin{cases}\Phi(x) \to \max \\ \Psi(x) \to \min\end{cases} \begin{cases}\Phi(x) \to \max \\ -\Psi(x) \to \max\end{cases} \begin{cases}-\Phi(x) \to \min \\ \Psi(x) \to \min\end{cases}$:

$$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x)\right)^T \tag{2.2}$$

$$min\{f(x): x \in X\} \tag{2.3}$$

Тогда для данной задачи выделим несколько множеств:

$f_i(x) < f_i(y), i \in L(x, y)$, множество частных критериев, для которых решение (стратегия) x лучше решения (стратегии) y.

$f_i(x) > f_i(y), i \in G(x, y)$, множество частных критериев, для которых, решение x хуже решения y.

$f_i(x) = f_i(y), i \in E(x, y)$, множество критериев, для которых стратегии x и y дают одинаковый результат, равнозначны.

Если множество G пустое $G(x, y) = \emptyset$, то стратегия x не хуже стратегии y.

Если множество G пустое $G(x, y) = \emptyset$ и множество L не пустое $L(x, y) \neq \emptyset$, то стратегия x лучше стратегии y по Парето.

Если множество G и L не пустое $G(x, y) \neq \emptyset$, $L(x, y) \neq \emptyset$, то стратегия x и стратегия y несравнимы по Парето.

Область оптимальных по Парето (она же компромиссов) определяется как множество, где нет других лучших по Парето решений.

Как можно легко убедиться в области согласия есть несравнимые по Парето, но также есть и лучшие по Парето, в области же компромиссов все решения несравнимые по Парето.

Рассмотрим пример:

$$min\left\{\begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1 \\ 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 \\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\}$$

$$f\begin{pmatrix}1 \\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \\ 5\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \\ 8\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 \\ 6\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}4 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 \\ 9\end{pmatrix}$$

Сравним первые два решения с точки зрения задачи минимизации, окажется, что первое решение лучше второго, так как по первому критерию соблюдается равенство, а по второму критерию у первого решения (стратегии) меньшее значение. При этом для первого решения все остальные являются несравнимыми по Парето. Также для третьего решения по сравнению с четвертым, оно оказывается лучше, но для него больше нет сравнимых. Таким образом, первое и третье решение оказываются в области оптимальных по Парето.

Далее рассмотрим методы связанные с поиском оптимального решения в области компромиссов, это методы уступок, сверток, метод ограничений, метод идеальной точки.

1. **Метод уступок** – один или несколько критериев снижаются, в зависимости от совокупности других критериев (постепенно ослабляют первоначальные требования, невыполнимые совместно).

2. **Метод идеальной точки** – в области допустимых значений неизвестных ищется такая их совокупность, которая способна обеспечить набор значений критериев, в том или ином смысле ближайших к наилучшему, но недосягаемому (точки утопии).

3. **Метод свёртывания** – сведение многокритериальной задачи к задаче с одним критерием.

4. **Метод ограничений** – множество допустимых значений неизвестных уменьшается путём осмысленного введения дополнительных ограничений.

5. **Метод анализа иерархий** – на основании суждений экспертов оценивается вклад в общую оценку каждого критерия.

2.1 Метод уступок

2.1.1 Метод равномерной уступки

Принцип равномерной уступки заключается в приравнивании между собой частных критериев (рисунок 2.3).

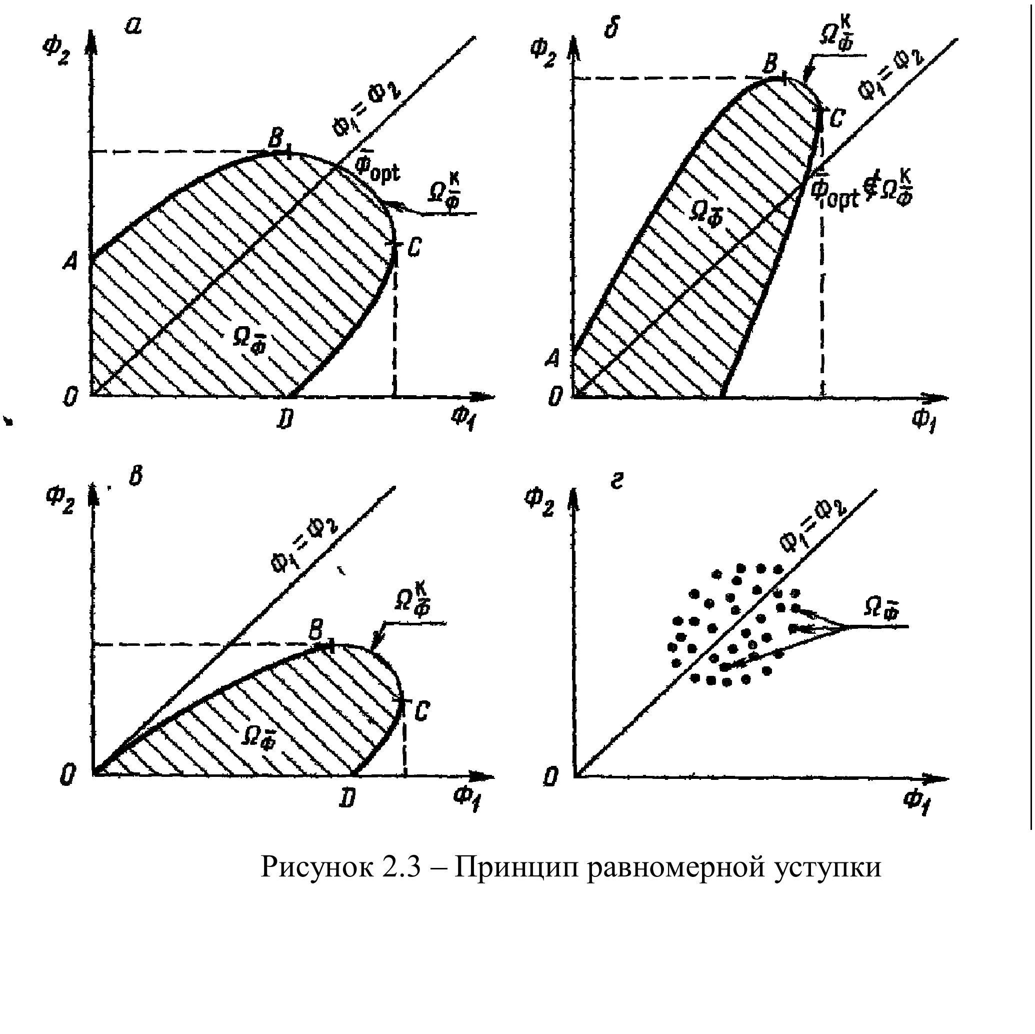


Рисунок 2.3 – Принцип равномерной уступки

Недостаток – при равномерных уступках найденное оптимальное решение может просто не попасть в область компромиссов или даже выйти за пределы области допустимых решений.

2.1.2 Принцип справедливой абсолютной уступки

Справедливым считается такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень снижения одного или нескольких критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня повышения других критериев.

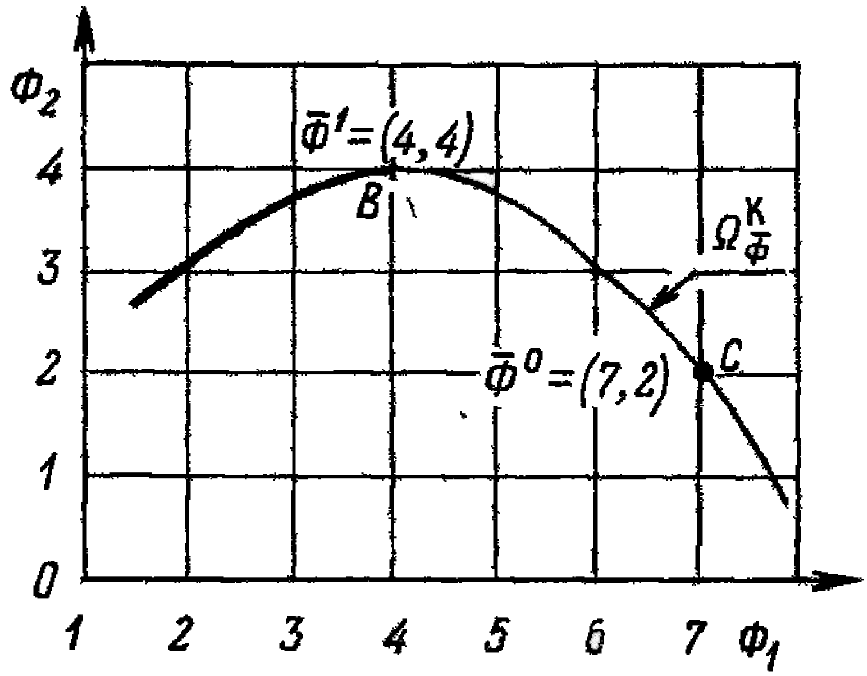


Рисунок 2.4 – Пример сравнения по принципу абсолютной справедливой уступки

Как легко показать метод сводится к максимизации или минимизации суммы частных критериев, и как мы увидим далее, это является частным случаем экономической свертки при коэффициентах свертки равным единицам.

Пусть первое решение лучше второго, в этом случае по принципу по абсолютной справедливой уступки должно наблюдаться превышение улучшения одного критерия по сравнению с ухудшением другого , то есть, например:

$$W_1^1 - W_1^0 \geq W_2^0 - W_2^1$$

Верхний индекс определяет номер решения, нижний номер критерия в векторной операции из двух критериев. Критерий 2 у первого решения ухудшился, но его ухудшение должно быть меньше улучшения первого критерия. Это мы и записали.

Перенесем все в левую часть неравенства.

$$W_1^1 - W_1^0 - W_2^0 + W_2^1 = W_1^1 + W_2^1 - (W_1^0 + W_2^0) \geq 0$$

Выполнение данного условия для всех возможных точек сравнения из области компромиссов может наблюдаться для решения только с максимальной суммой частных критериев:

$$opt\overline{W} = \max_{W \in \Omega_x^k} \sum_i^n W_i \quad (2.4)$$

2.1.3 Принцип относительной справедливой уступки

Справедливым является такой компромисс, при котором суммарный относительный уровень снижения одного или нескольких локальных критериев не превосходит суммарного относительного уровня повышения эффективности по остальным критериям. Важным преимуществом принципа является то, что он инвариантен к масштабу измерения критериев.

$$\sum_i^n \frac{W_i^1 - W_i^0}{W_i^0} \geq 0$$

Данное условие можно свети к максимизации произведения частных критериев.

$$opt\overline{W} = \max_{W \in \Omega_x^k} \prod_n^i W_i \quad (2.5)$$

Пример:

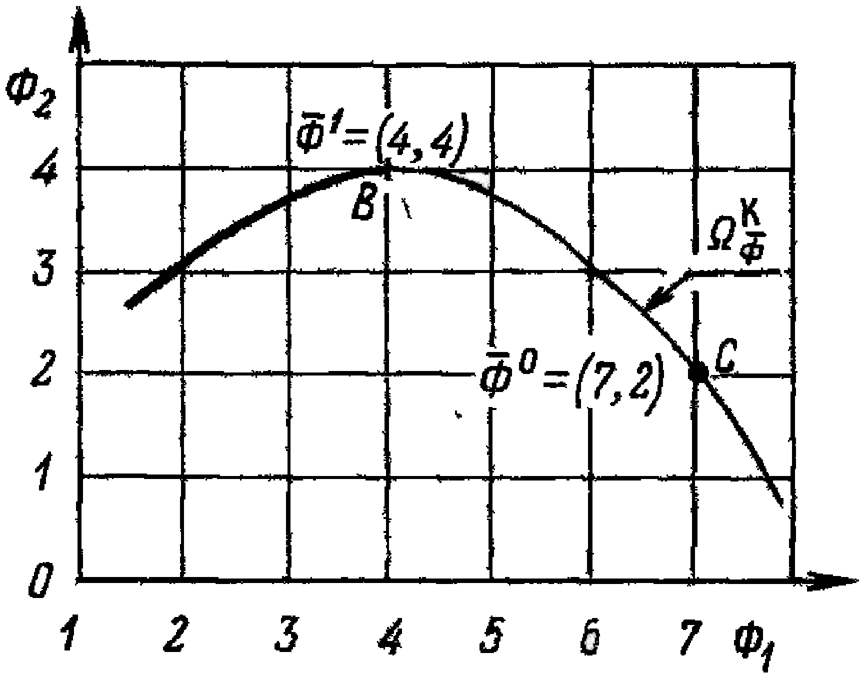


Рисунок 2.5 – Пример сравнения по принципу относительной справедливой уступки

Для примера представленного на рисунке 2.5 получается что решение (7,2) хуже:

$$\frac{7-4}{7} < \frac{4-2}{2}$$

Относительное увеличение меньше чем относительное уменьшение.

2.1.4 Принцип последовательных уступок

Метод состоит в том, что лицо, принимающее решения (ЛПР), работая в режиме диалога с аналитиком-специалистом, последовательно сужает множество точек на границе Парето и в конце концов соглашается остановиться на некоторой компромиссной паре значений критериев.

$$U = \Phi(x, y),\ V = \Psi(x, y),\ (x, y)\epsilon\omega.$$

$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset A_5B_4 \supset \cdots \quad (2.6)$$

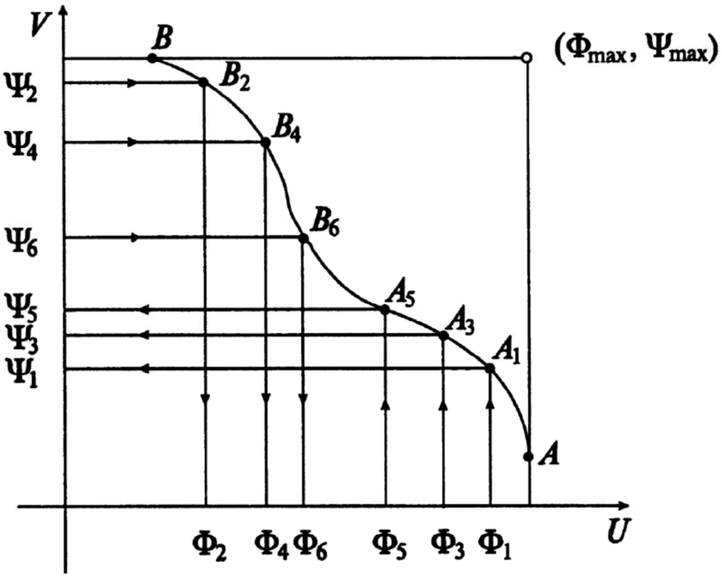


Рисунок 2.6 – Графическое представление метода последовательных уступок

Приведем пример, государство выдает акцизы на продажу табака и пополняет бюджет налоговыми поступления, при этом заинтересовано в здоровых людей и повышении продолжительности жизни, если рассматривать данный график, то видим, что чем больше здоровых людей, тем меньше доход. С другой стороны чем больше доход тем меньше здоровых людей, лицо принимающее решение может условно жертвовать в пользу дохода или здоровья людей, например, можно пожертвовать определенным уровнем дохода, тем самым сдвигаемся в большую сторону по доходам. Конечно, это утрированный пример, тем не менее, он примерно показывает смысл данного способа.

2.2 Метод идеальной точки.

Состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии. Точка утопии находится как точка пересечения оптимальных значений критериев полученных независимо друг от друга. Очевидно, что точка так называется в связи с тем, что данная точка недостижима и находится за пределами области допустимых решений, но при этом она является по всем критериям оптимальной.

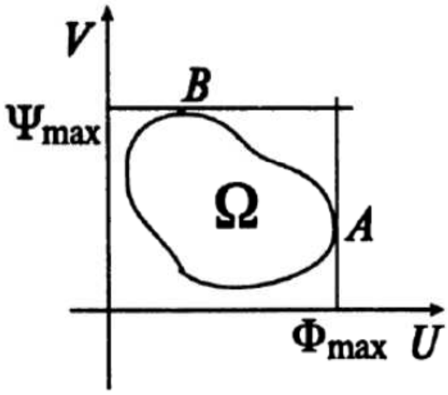


Рисунок 2.7 – Пример точки утопии для задачи максимизации критериев

Рассмотрим метод идеальной точки с точки зрения решения двумерной векторной операции. Предположим, что мы имеем выделенную область компромиссов в виде кусочно-заданной нелинейной функции:

$$V = f_i(U), i = 1..n, U \in (u_i, u_{i+1})$$

Обозначим точку утопии как $(U^*, V^*) = (max\Phi(x), max\Psi(y))$, где x применяемая стратегия дающая максимум первого критерия и y стратегия дающая максимум второго критерия.

Запишем задачу поиска идеальной точки как минимизацию расстояния между точкой утопии и идеальной точкой:

$$\min_{U \in U_i} \min_{U_i} \left\{ (U^* - U_i)^2 + \left(V^* - f_i(U_i)\right)^2 \right\}$$

Данную задачу можно решить, например, путем получения производной и приравнивания полученного выражения 0, и затем, применяя стандартные методы решения уравнений с одним неизвестным, так же можно использовать методы оптимизации. К сожалению если область задана кусочно, придется решать так же задачу перебора нескольких вариантов, в зависимости от количества кусочно-заданных частей, затем выбрать наименьшее расстояние.

2.3 Метод ограничений

Относятся к линейным многокритериальным задачам, когда у критериев есть свой вес, в зависимости от степени важности.

В методе уступок и методе идеальной точки, заданные критерии по степени важности неразличимы. Однако нередко приходится сталкиваться с ситуациями, в которых подобное равноправие критериев нарушено, и у каждого из них есть свой вес.

Метод свертывания и метод ограничений показывают, как можно решать многокритериальную задачу с критериями, разными по степени важности.

Общая постановки линейной многокритериальной задачи.

Задача. Предположим заданными область изменения допустимых значений переменных $x_1..x_n$ определяемую совокупностью линейных уравнений и неравенств, и набор критериев $Cr_1..Cr_m$, оценивающих качество искомого решения.

Будем считать, что каждый из этих критериев линейно связан с переменными $x_1..x_n$:

$$Cr_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k$$

где γ_{ik} известные константные значения.

В области ω требуется найти такой набор переменных $x_1..x_n$ при котором по всем критериям достигались бы максимальные значения.

$$Cr_1 \to max, Cr_2 \to max, \dots Cr_m \to max$$

Метод свертывания с использованием экономической свертки заключается в том, что лицо, принимающее решения, из некоторых, часто доступных только ему соображений назначает веса критериев $w_1, w_2 \dots w_m$.

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \dots w_m \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

что позволяет свернуть заданные критерии в один глобальный критерий,

$$Cr = \sum_{i=1}^{m} w_i Cr_i = w_1 Cr_1 + w_2 Cr_2 + \dots + w_m Cr_m$$

И свести исходную задачу к обычной задаче линейного программирования с одним критерием: найти в области ω такой набор переменных $x_1..x_n$, при котором глобальный критерий Cr достигает максимального значения.

Метод ограничений строится таким образом, что лицо, принимающее решения, определяет веса заданных критериев, опираясь только на количественную информацию о степени их важности, которую оно получает в ходе изучения поставленной задачи.

Специально подчеркнем, что в распоряжении лица, принимающего решения, никаких предварительных сведений о сравнительной важности критериев нет.

Общая схема решения

Для решения многокритериальной задачи методом ограничений требуется несколько шагов (но не больше m-1, где m число частных критериев).

1-й шаг, как и следующие за ним, разбивается на ряд этапов.

На первом этапе в области допустимых значений ω осуществляется оптимизация отдельно по каждому из критериев (решаются соответствующие задачи линейного программирования).

Затем для каждого найденного при этой однокритериальной оптимизации набора неизвестных $x_1..x_n$ вычисляются значения всех критериев.

Пусть, например, при оптимизации по критерию $Cr_i, i = 1..m$, мы получили набор $x_{1i}..x_{ni}$. Обозначим через $C_{pi}, p = 1..m, i = 1..m$ значения критериев для этого набора и составив таблицу

	Cr_1	…	Cr_i	…	Cr_m
Cr_1	C_{11}	…		…	C_{m1}
…	…	…		…	
Cr_j	C_{1j}	…	C_{ij}	…	C_{mj}
…		…		…	
Cr_m	C_{1m}		C_{im}		C_{mm}

В столбцах данной таблицы расположены значения всех различных критериев, которые получены для решения приносящего максимум критерию с данным номером столбца. Очевидно, что на диагонали данной матрицы расположены максимальные возможные значения критериев, или точка утопии. Например, берем первый столбец, находим решение, при котором критерий Cr_1 достигает максимума, записываем в первом столбце все значения критериев при данном решении. Берем второй столбец, находим решение, при котором достигается максимум второго критерия Cr_2, в строки второго столбца в соответствии с номером строки заносим значения критериев полученных при данном решении.

Затем проводится нормировка найденных значений критериев к значениям в промежутке [0, 1] путем деления на максимальное значение в каждом столбце, если все значения критериев положительны, либо с учетом минимального значения в столбце, таким образом, на диагонали мы получим единицы:

$$Cn_{pi} = \frac{C_{pi} - \min_p C_{pi}}{\max_p C_{pi} - \min_p C_{pi}}, p = 1..m$$

$$Cn_{pi} = \frac{C_{pi}}{\max_p C_{pi}} = \frac{C_{pi}}{C_{ii}}$$

	Cr_1	…	Cr_i	…	Cr_m
Cr_1	1	…		…	C_{m1}
…	…	1		…	
Cr_j	C_{1j}	…	1	…	C_{mj}
…		…		1	
Cr_m	C_{1m}		C_{im}		1

В столбцах данной матрицы содержится ценная информация, например, чем ближе значение к 1, тем меньше влияние критерия под номером столбца на данный критерий, чем меньше значение или ближе к 0, тем больше влияние данного критерия. Таким образом, возникает простая идея, назначить более влияющим критериям больший вес, а меньше влияющим критериям больший вес, таким образом, если в столбце все значения близки к 1, то данный критерий не оказывает влияния и можно его учитывать с меньшим весом. Можно тогда усреднить значения критериев по столбцу и отнять от 1, пронормировать и взять его в качестве коэффициента.

Таким образом, пусть a_i^0 среднее (арифметическое) значение, взятое по всем элементам i-го столбца, кроме диагонального элемента равного 1. Вес w_i^0 критерия определяется формулой:

$$w_i^0 = \frac{1 - a_i^0}{\sum_{p=1, p \neq i}^{m} 1 - a_p^0}$$

Найденный вес — это своеобразный коэффициент внимания, которое следует уделять i-му критерию при поиске решения. Предположим, к примеру, что все элементы 1-го столбца в таблице близки к 1. Тогда среднее значение a_i^0, также будет близко к 1, $1 - a_i^0$будет мало, малым будет и соответствующий вес w_i^0.

Это означает, что если при оптимизации по другим критериям значение данного критерия близко к наилучшему, то ему вряд ли стоит уделять внимание. Наоборот, критерию, сильно зависящему от изменения других критериев (a_i^0 мало), должны соответствовать бОльшие значения веса.

Введенные веса иногда называют техническими, для того чтобы подчеркнуть, что они вычисляются, а не назначаются, как, например, в методе свертывания.

Следующий этап — оптимизация по глобальному критерию

$$Cr_{gl}^{0} = \sum_{i=1}^{m} w_i Cr_i = w_1 Cr_1 + w_2 Cr_2 + \cdots + w_m Cr_m$$

Осуществляется поиск $x_1..x_n$, максимизирующие данный глобальный критерий, например, симплекс методом, вычисляются соответствующие этому решению частные значения критериев $Cr_1^0, Cr_2^0 \dots Cr_m^0$ и осуществляется предъявление этого вектора критериев руководителю.

Анализ лицом, принимающим решения, предъявленных результатов — следующий важнейший этап. Сначала, сравнивая компоненты вектора утопии

$z^0 = \{maxCr_1, maxCr_2 \dots maxCr_m\}$ с только что найденными значениями критериев $y^0 = \{Cr_1^0, Cr_2^0 \dots Cr_m^0\}$.

Лицо, принимающее решения, отвечает на вопрос: все ли компоненты вектора y^0 имеют удовлетворительные значения? Если да, то искомое решение получено. Если нет, то лицо, принимающее решения, выделяет (один) критерий с наименее удовлетворительным значением (пусть это будет критерий Cr_i) и просит назначить для критерия Cr_i пороговое значение l_i признавая тем самым, что приемлемо любое значение этого критерия, удовлетворяющее условию $Cr_i \geq l_i$.

Неравенство $Cr_i \geq l_i$ накладывает на область допустимых значении ω переменных $x_1..x_n$ дополнительное ограничение и сужает ее до $\omega 0$.

2-й шаг

Начинается с этана расчета для новой области допустимых значений.

При этом число критериев на единицу меньшее исходного. Завершается 2-й шаг выбором порогового значения для еще одного критерия.

Вследствие того что набор критериев конечен и на каждом шаге их число уменьшается на единицу, этот процесс рано или поздно подойдет к концу, и приемлемые значения будут получены по всем критериям.

2.4 Метод свертки векторной операции.

При формализации многокритериальных задач в теории исследования операций выделены некоторые часто использующиеся приемы. О них и пойдет речь ниже. Но подчеркнем, что выбор такого приема каждый раз должен определяться из содержательного анализа моделируемой операции, тем более, что приведенные ниже примеры далеко не исчерпывают всех возможностей.

Причины появления многокритериальности могут быть различными. Например, оперирующая сторона может представлять собой группу лиц, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои цели.

Часто многокритериальность появляется при рассмотрении динамических процессов. Например, если коммерческая фирма стремится к увеличению прибыли, и ее функционирование рассматривается на достаточно длинном временном интервале, то возникает целый ряд показателей, характеризующих прибыль в каждый из моментов времени.

Иногда удобно чисто формально рассматривать как многокритериальную задачу обычную модель операции, в которой имеется неопределенный фактор, рассматривая в качестве частных критериев значения общего критерия операции при конкретных значениях неопределенных факторов.

В ряде случаев задачу с неопределенными факторами преобразуют в двухкритериальную модель, формулируя задачу минимум и задачу максимум.

Очень часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда оперирующая сторона просто не может сформулировать свои предпочтения на вербальном уровне, как в приведенном выше примере.

Пример: диверсификация заявки на аукцион

Иногда происходит путаница, и в качестве критерия задаются ограничения, которые должны соблюдаться в данной задаче. Так, например, формулируя задачу на создание межпланетного космического корабля, С.П. Королев писал, что Марс должен быть достигнут а) за минимальное время и б) с минимальной затратой средств. Понятно, что если речь идет о пилотируемом полете, то его длительность должна быть не слишком большой (ограничение!). Но вряд ли кто то станет стремиться к сокращению этого времени на несколько минут, или даже часов, за счет ухудшения других характеристик полета.

Отметим, что критерий в любой модели операции должен выражаться через управления оперирующей стороны и, быть может неопределенные факторы. Например, стремление выйти замуж за миллионера может быть лишь благим пожеланием, а не целью, если у оперирующей стороны нет реальных возможностей встретить хотя бы одного миллионера. Точно так же лозунг «Наша цель – коммунизм» нельзя рассматривать как формулировку цели операции, поскольку совершенно не ясно, например, ведет ли к достижению этой цели выращивание кукурузы в приполярных районах, или нет.

Данные соображения приводят к следующим определениям.

Определение. Многокритериальной задачей называется набор $\langle U, g^1, g^2, ..., g^m \rangle$, где U – множество, а g^i – функции, отображающие U в множество действительных чисел.

Целью данной лекции будет рассмотрение способов построения на основе многокритериальной задачи $\langle U, g^1, g^2, ..., g^m \rangle$ модели операции вида $\langle U, g \rangle$.

Часто такую операцию строят, задавая функцию F, и полагая, что $g(u) = F\left(g^1(u), g^2(u), ..., g^m(u)\right)$. Функцию F в таком случае называют функцией свертки (или просто сверткой) критериев.

Примеры сверток

По техническим причинам удобно разделить цели операций на два класса: количественные и качественные. К первым относятся те, которые могут быть либо достигнуты, либо нет. Ко вторым – те, степень достижения которых может быть выражена числом.

Разумеется, качественная цель может быть описана количественным критерием, который, например, принимает значение 1, если цель достигнута, и значение 0 в противном случае.

Экономический способ свертки. Свертка частных критериев $g^1, \ldots, g^m$ представляет собой взвешенную сумму $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$.

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

- «Слон больше серый, чем ушастый, потому, что ушастый он только местами, а серый – везде»

Пример. Предприятие выпускает m видов продукции. Критерии $g^1, \ldots, g^m$ выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. Доходы предприятия от реализации продукции выражаются сверткой $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$. Коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

Пример. Рассмотрим деятельность фирмы за m лет. Критерии $g^1, \ldots, g^m$ выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. Свертка $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$ оценивает суммарную прибыль за весь период. Числа $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

Пример. В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов g^1 и время прохождения дистанции g^2. Результат спортсмена оценивается по линейной свертке $60 \frac{\text{секунд}}{\text{промах}} g^1 + 1 \cdot g^2$ (если время измерять в секундах).

Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Пусть имеется количественный критерий g и число γ. Свертка задает качественный критерий

$$h = \begin{cases} 1, \text{если } g \ge \gamma, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием g, принимающим значения от двух до пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается критерием $h = \begin{cases} 1, \text{если } g \ge 3, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Пример. При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение от работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала некоторый приемлемый уровень жизни. Например, не секрет, что в предперестроечные годы уровень реальных доходов работников торговли заметно превышал аналогичный показатель у врачей, учителей и инженеров, однако, заметного перетока кадров в торговлю не наблюдалось. Когда в годы реформ уровень жизни бюджетников заметно упал, многие из них занялись розничной торговлей, чтобы обеспечить себе тот самый приемлемый уровень жизни.

Пример. В одной из телевизионных программ 28.11.07 был сформулирован следующий тезис: «Женщина должна стремиться к тому, чтобы объем талии не превышал объема бедер». Здесь налицо замена двух количественных критериев (объем талии и объем бедер) одним качественным.

Лексикографическая свертка. Пусть даны критерии $g^1,\ldots,g^m$, ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия g^1, из них выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^2 и так далее. Наконец, из уже отобранных, выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^m. Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума.

Пример. При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Дизъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей описывается критерием $g = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - g^i)$.

Пример. Каждый правоверный мусульманин должен хотя бы раз в жизни совершить хадж. Если годы его жизни пронумерованы числами от 1 до m и критерии $g^1,\ldots,g^m$ описывают совершение хаджа в конкретном году, то их свертка $g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i)$ описывает выполнения этого обязательства перед Богом.

Конъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Цель, состоящая в достижении, сразу всех частных целей описывается критерием $g = \prod_{i=1}^{m} g^i$.

Пример. Если за сессию студенту предстоит сдать m экзаменов и каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ описывает сдачу одного из них, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием $g = \prod_{i=1}^{m} g^i$.

Отрицание. Пусть имеется качественный критерий g. Критерий $1–g$ описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

Пример. Если исходная цель g состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием $1–g$.

Обобщенная дизъюнкция. Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть m количественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Результирующий критерий образуется по правилу $g(u) = \max_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$.

Пример. Пусть в шоссейной велогонке принимают участие m спортсменов из одной команды и критерии $g^1,\ldots,g^m$ задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на одного лидера, то есть критерий команды есть $g(u) = \max_{1 \le i \le m} g^i(u)$.

Обобщенная конъюнкция. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u) = \min_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$.

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Пусть для производства изделия требуются комплектующие m видов и количества произведенных деталей описываются числами $g^1,\ldots,g^m$. Критерий $g(u) = \min_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$ описывает количество готовых изделий, которое из них можно собрать. Числа $\frac{1}{\lambda_i}$ имеют при этом смысл количества деталей i-го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

Пример. По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

Случайная свертка. В литературе встречается и такой способ свертки критериев. На множестве критериев задается вероятностная мера, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. Понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки, формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

Принцип наименьшего сожаления. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\dots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m}\left[\max\limits_{v\in U} g^i(v)-g^i(u)\right]$, который нужно минимизировать.

Принцип принятия решений в ЕЭС. По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. В этом случае можно считать, что имеется столько качественных критериев, сколько стран принимает участие в голосовании. Из них делается два количественных критерия, которые в свою очередь сворачиваются в один качественный.

Старый способ судейства в фигурном катании. Каждый из девяти судей выставлял две оценки от 0 до 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, у которого выше оценка за артистизм). Затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии с взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

Способ судейства в прыжках в длину. Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из них. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

Лексимин. Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи прежде всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои у каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Разумеется, не существует и не может существовать идеального способа свертки, пригодного на все случаи жизни. Если уж правилами предусмотрен такой способ подведения итогов, как в предыдущем примере, то в соответствующей модели надо пользоваться именно им. Но совсем глупо было бы использовать его в задаче о караване судов.

2.4.1 Теорема о свертке

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь два значения 0 и 1, а $F:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;
2. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;
3. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Доказательство. Пусть $y=(y_1,\ldots,y_m)$ – произвольный булев вектор размерности m (здесь y_i равны 0 или 1 при любом $i=1,\ldots,m$). Рассмотрим функцию F_y $:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$, определенную условием $F_y(x)=\prod_{i=1}^{m} z_i$, где $z_i=x_i$, если $y_i=1$, и $z_i=1-x_i$, если $y_i=0$. Непосредственно проверяется, что $F_y(y)=1$, и $F_y(x)=0$ для любого $x\neq y$.

Пример. На референдуме о сохранении Союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власти предлагали своим сторонникам ответить «да,да,нет,да». Таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия g^i (ответ на i-ый вопрос). Если общая цель g состоит в лояльности власти, то она выражается через частные с помощью свертки $g=g^1g^2(1-g^3)g^4$.

Для заданной нам функции F, обозначим $Y=\{y$: $F(y)=1\}$. Покажем, что интересующий нас критерий g представляется в виде

$$g(u)=1-\prod_{y\in Y}\left(1-F_y(g^1(u),...,g^m(u))\right). \qquad (3.1.6)$$

В самом деле, если $g(u)=1$, то по определению вектор $t=(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ принадлежит множеству Y. Значит, произведение в формуле (3.1.6) содержит множитель $(1-F_Y(g^1(u),\ldots,g^m(u)))$, равный нулю. Следовательно, и все произведение равно нулю, а вся правая часть формулы (3.1.6) равна 1.

Если же $g(u)=0$, то вектор $t=(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ не принадлежит множеству Y, и для всех $y\in Y$ имеем $F_y(g^1(u),\ldots,g^m(u))=0$. Значит, для этого u все сомножители в формуле (3.1.6) равны 1, а тогда и произведение в правой части равенства (3.1.6) равно 1, а сама правая часть равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что при построении функций F_y мы пользовались лишь операциями отрицания и конъюнкции, а в формуле (3.1.6) использовалась еще и дизъюнкция.

Замечание. Легко видеть, что сама операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то есть список «элементарных» операций может быть сокращен.

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь конечное число значений, а F – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка: $g^1,\ldots,g^m \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$;

2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные: $g^i \to \begin{cases} 1, \text{ если } g^i \geq \gamma^i, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$

3. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;

4. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;

5. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Доказательство. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{k_i}^i$. При сформулированных условиях критерий g может тоже принимать лишь конечное число значений. Обозначим их в порядке возрастания символами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$. Дальнейшие рассуждения разобьем на шесть шагов.

1. Для каждого $i=1,\ldots,m$ и каждого $\gamma \in \{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{k_i}^i\}$ с помощью элементарной операции второго типа образуем вспомогательный критерий $g_\gamma^i(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^i(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$.

Разумеется, критерий g_γ^i может быть выражен как функция критерия g^i.

2. Верно и обратное: критерий g^i может быть представлен как функция критериев g_γ^i. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$g^i(u) = \sum_{j=1}^{k_i} \left(\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i\right) g_{\gamma_j}^i(u), \tag{3.1.7}$$

где положено $\gamma_0^i=0$.

В самом деле, если $g^i(u) = \gamma_l^i$, то для всех $j>l$ справедливо равенство $g_{\gamma_j}^i(u) = 0$, а для всех $j \leq l$ будем иметь $g_{\gamma_j}^i(u) = 1$. Поэтому для такого u правая часть равенства (3.1.7) может быть переписана в виде $\sum_{j=1}^{l}\left(\gamma_j^i-\gamma_{j-1}^i\right)$. Эта сумма, очевидно, равна $\gamma_l^i-\gamma_l^0=\gamma_l^i$, то есть равенство (3.1.7) справедливо.

3. Рассмотрим вспомогательные критерии $g_\gamma(u)$, определенные условиями

$$g_\gamma(u)=\begin{cases}1, \text{ если } g(u)\ge\gamma,\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

(здесь $\gamma\in\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k\}$). Каждый из этих критериев является функцией критерия g.

4. Тогда по условию теоремы, тогда критерий g_γ^i может быть представлен, как функция критериев $g^1,\ldots,g^m$. Значит, в силу утверждения п. 2 он может быть представлен и как функция вспомогательных критериев g_γ^i.

5. Но каждый из критериев g_γ и g_γ^i принимает лишь значения 0 и 1, поэтому в силу предыдущей теоремы, каждый из критериев g_γ может быть выражен через критерии g_γ^i с использованием лишь элементарных операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

6. Аналогично формуле (3.1.7) доказывается равенство

$$g(u)=\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_j-\gamma_{j-1}\right)g_{\gamma_j}(u), \qquad (3.1.8)$$

где $\gamma_0=0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что критерии g_γ^i мы получили, пользуясь только сверткой типа 2, на шаге 4 для получения критериев g_γ использовались свертки типов 3,4,5, и, наконец, на шаге 6 использовалась свертка типа 1. Теорема доказана.

Рассмотрим одну задачу: цель операции заработать больше 200 тыс рублей за год, при этом за каждый месяц указывается заработок, сдать сессию на оценки выше 3 при известных критериях показывающих оценку за 5 экзаменов от 2 до 5, поехать на каникулы отдыхать.

Итак, введем критерии заработка в месяц:

$$z_i\in R, i=\{1..12\}$$

$$z^*=\begin{cases}1, & \sum_{1}^{12} z_i\ge 200000\\ & 0\end{cases}$$

Введем критерии сдачи сессии на хорошие оценки:

$$g_j\in\{2,3,4,5\}, j=\{1..5\}.$$

$$g_j^*=\begin{cases}1, & g_j\ge 4\\ & 0\end{cases}$$

Поехать отдыхать качественный критерий:

$$f \in \{0,1\}$$

Итоговый максимизируемый критерий будет выглядеть следующим образом:

$$h = f \cdot z^* \prod_{1}^{5} g_j^*$$

3 ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЮ И ОСНОВЫ АНАЛИЗА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ.

3.1. Основы анализа на чувствительность.

Анализ моделей на чувствительность проводится после получения оптимального решение задачи. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В задаче о производстве красок, например, может представить интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса или изменения запасов исходных продуктов. Можно проанализировать влияние на оптимальное решение изменения рыночных цен.

При таком анализе рассматривается некоторая совокупность оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую провести анализ влияния возможных изменений исходных условий на полученное оптимальное решение.

Динамические характеристики модели фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие анализа, позволяющего выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное статическое решение устареет еще до своей реализации.

Для проведения анализа модели на чувствительность будем использовать графический метод.

3.2 Первая задача анализа на чувствительность.

На сколько можно сократить или увеличить запасы ресурсов?

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Особенно важно проанализировать следующие два аспекта.

1. *На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции z?*

2. *На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?*

Так как величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части (ограничений).

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничения линейной модели **как связывающие (*активные*) и несвязывающие (*неактивные*)**

ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае соответствующее ограничение будет не связывающим. На рисунке 1 связывающими ограничениями являются только ограничения (1) и (2), которые лимитируют запасы исходных продуктов (ресурсов) А и В.

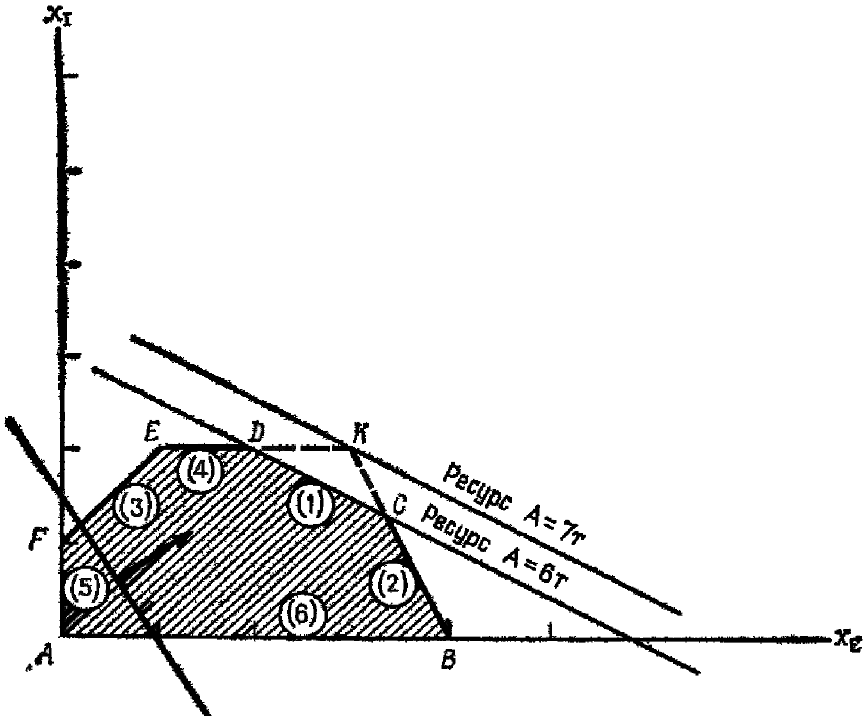
Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к **разряду дефицитных ресурсов**, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано *несвязывающее* ограничение, следует отнести к **разряду недефицитных ресурсов** (т. е. имеющихся в некотором избытке). Таким образом, при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

1. **предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение**

2. **предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции.**

Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна в тех ситуациях, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей. Отметим, что увеличение избыточного ресурса не скажется на оптимальном решении (избыточный ресурс станет еще более избыточным). Очевидно, что сокращение дефицитного ресурса не улучшит значения целевой функции.

Вернемся к примеру о производстве красок. В рассмотренном примере используемые продукты А и В (ограничения (1) и (2)) являются дефицитными ресурсами. Рассмотрим сначала ресурс А. Из рис. 2 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок CD) перемещается вверх параллельно самой себе, постепенно "стягивая" в точку треугольник CDK. (*Стороны СК и DK этого треугольника представляют собой продолжения прямых, соответствующих ограничениям (2) и (4)*).



C: $(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$; $z = 12\frac{1}{3}$; K: $(3,2)$; $z = 13$.

Рисунок 3.1 – Графическое решение задачи

В точке K ограничения (2) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка K, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник ABKEF. В точке K ограничение (1) (для ресурса A) *становится избыточным*, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса A не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку K. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Сначала нужно найти координаты точки K, в которой пересекаются прямые (2) и (4),

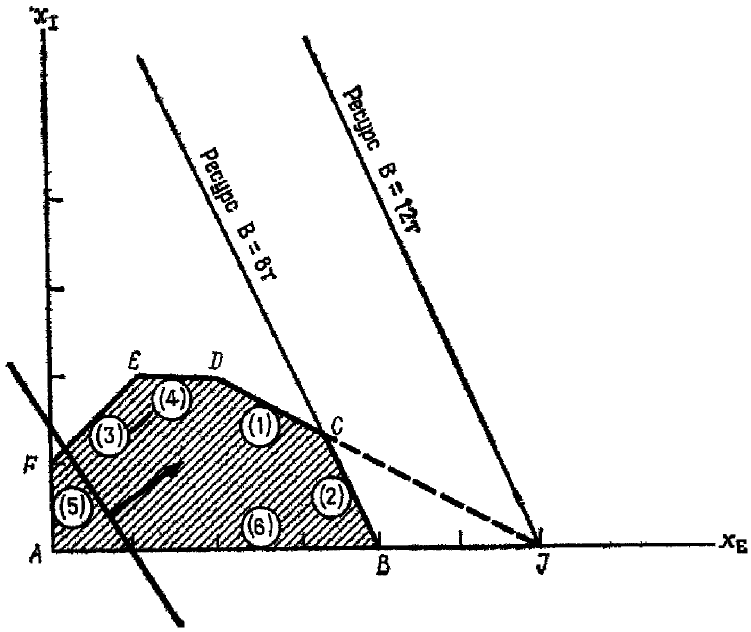


Рисунок 3.2 – Графическое решение задачи

$C:(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3});\ z=12\frac{1}{3};\ J:(6,0);\ z=18$ т. е. находится решение системы уравнений
$2x_E + x_I = 8$ (прямая (2)),
$x_I = 2$ (прямая (4)).

В результате получается xE=3 и xI=2. Затем путем подстановки координат точки K в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса A: $x_E + 2x_I = 3 + 2 \times 2 = 7$т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13m$.

Рисунок 3.2 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос о целесообразности увеличения запаса дефицитного ресурса (2) (исходного продукта B).

Новой оптимальной точкой становится точка J, где пересекаются прямые (6) и (1), т. е. xI=0 и $x_E + 2x_I = 6$. Отсюда следует, что xE=6, xI=0 причем запас продукта B можно увеличить до значения, равного $2x_E + x_I = 2 \times 6 + 1 \times 0 = 12$т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3 \times 6 + 2 \times 0 = 18m$

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части не связывающих ограничений. Ограничение (4), xI=2, фиксирует предельный уровень спроса на краску I. Из рис. 3.2 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую (4) (ED) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой C. точка C имеет координаты $x_E = 3\frac{1}{3}$ и $x_I = 1\frac{1}{3}$

уменьшение спроса, на краску I до величины $x_I = 1\frac{1}{3}$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (3), $-x_E + x_I \le 1$ которое представляет соотношение между спросом на краску I и спросом на краску E. И в этом случае правую часть ограничения можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) (EF) не достигнет точки C. При этом правая часть ограничения (3) станет равной

$$-x_E + x_I = (-3\tfrac{1}{3}) + 1\tfrac{1}{3} = -2,$$

что позволяет записать это ограничение в виде $-x_E + x_I \le -2$ или в эквивалентной форме: $x_E - x_I \ge 2$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на краску E превысит спрос на краску I не более чем на 2т.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Изменение запасов и доходов

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, т	Максимальное изменение дохода от реализации z, тыс. долл.
1	Дефицитный	7-6=+1	$13-12^2/_3=+^1/_3$
2	Дефицитный	12-8=+4	$18-12\tfrac{2}{3}=+5\tfrac{1}{3}$
3	Недефицитный	-2-1=-3	$12\tfrac{2}{3}-12\tfrac{2}{3}=0$
4	Недефицитный	$1^1/_3-2=-^1/_3$	$12\tfrac{2}{3}-12\tfrac{2}{3}=0$

3.3 Вторая задача анализа на чувствительность. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?

В первой задаче анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов (т. е., изменения связывающих ограничений). При ограничениях на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? С помощью методов линейного программирования удается ответить и на такой вопрос.

Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через yi Величина yi, определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } z}{\text{Максимально допустимый прирост объёма ресурса } i} \qquad (3.1)$$

Воспользовавшись данными указанной таблицы, для ограничения (1) (продукт A) получим

$$y_i = \frac{13 - 12\frac{2}{3}}{7-6} = \frac{1}{3}\ \text{тыс. долл./тонна А.} \quad (3.2)$$

Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице: Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице:

Таблица 3.2 – Изменение дохода в зависимости от изменения ресурса на 1 единицу

Ресурс	Тип ресурса	Значение y_i, тыс. долл./тонна
1	Дефицитный	$y_1 = \frac{1}{3}$
2	Дефицитный	$y_2 = \frac{4}{3}$
3	Недефицитный	$y_3 = 0$
4	Недефицитный	$y_4 = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса 2 (продукт В) и лишь затем-на увеличение ресурса 1 (продукт А). Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

3.4 Третья задача анализа на чувствительность.

В каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции?

Изменение коэффициентов целевой функции, которые определяются ценами на готовую продукцию, оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Очевидно, что идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит прежде всего от наклона этой прямой.

Это означает, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы.

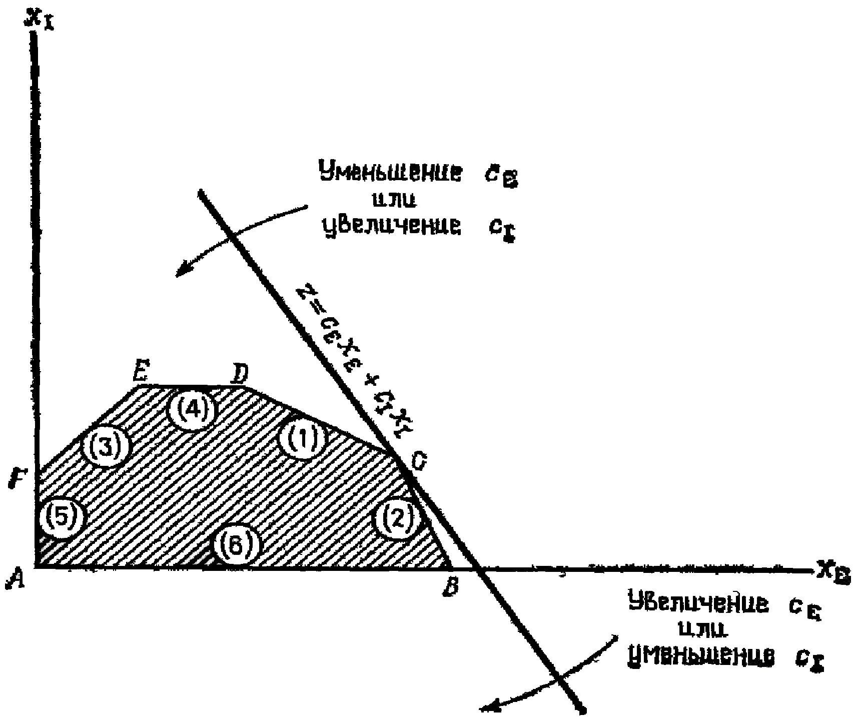


Рисунок 3.3 – Изменение коэффициентов целевой функции

Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Обсудим эти вопросы на нашем примере. Рассматривая первый вопрос, обозначим через cE и cI доходы фирмы от продажи 1 т краски E и 1 т краски I соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде: $z = c_E x_E + c_I x_I$. Из рисунка 4 видно, что при увеличении cE или уменьшении cI прямая, представляющая целевую функцию z, вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке.

Если же cE уменьшается или cI увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении - против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых, соответствующих ограничениям (1) и (2). Когда наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (1), получим две альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Аналогично, если наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки B и C. (Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение z может достигаться при различных значениях переменных. Как только наклон прямой z выйдет за пределы указанного выше интервала, получим некоторое новое оптимальное решение (точка B или точка D).

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения cE, при котором точка C остается оптимальной. Исходное значение коэффициента cI=2 оставим неизменным. Из рисунка 8 видно, что значение cE можно увеличивать до тех пор, пока прямая z не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая z не совпадет с прямой (1). Эти крайние значения коэффициента cE можно определить из равенства наклонов прямой z и прямой (2) (максимальное значение cE) и равенства наклонов прямой z и прямой (1) (минимальное значение cE). Так как тангенс угла наклона для прямой z равен cE/2,.а для прямых (1) и (2) соответственно 1/2 и 2/1, минимальное значение cE определяем из равенства $c_E/2 = \frac{1}{2}$, *откуда* $\min c_E = 1$, а максимальное значение cE находим из равенства $c_E/2 = \frac{2}{1}$, *откуда* $\max c_E = 4$.

Интервал изменения cE, в котором точка C по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством 1<CE.

3.5 Условия Куна-Таккера

Для задачи нелинейного программирования в общем виде:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \min \\ & g_i(x) \le 0, i = 1..m \\ & x \in R^n \end{aligned} \tag{3.3}$$

можно записать условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} & \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \nabla g(x) = 0, i = 1..m \\ & \lambda_i g_i(x) = 0 \end{aligned}, \tag{3.4}$$

Если решить данную задачу для задачи линейного программирования о производстве при известных значениях $x_1, x_2 .. x_n$, то найденные значения λ будут иметь смысл увеличения дохода при увеличении ресурса на 1 единицу, при равенстве 0 данных коэффициентов это укажет на недефицитные ресурсы, то есть фактически, таким образом, можно решить первую и вторые задачи анализа на чувствительность.

4 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ.

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический метод, заслуга создания и развития которого принадлежит, прежде всего, Беллману. Метод можно использовать для решения весьма широкого круга задач, включая задачи распределения ресурсов, замены и управления запасами, задачи о загрузке. Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Фундаментальным принципом, положенным в основу теории ДП и лежащим в основе решения всех задач динамического программирования, является принцип оптимальности: «Каково бы ни было состояние системы S перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным».

Динамическое программирование – это поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг. Управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

Основные термины и определения:

Отрасль - отрасль производства, в которое вкладываются исследуемые ресурсы.

Функция дохода показывает зависимость величины дохода, производимого отраслью, от количества вложенных средств. Общий вид функции дохода: $f(x) = 1 - e^{-Ax}$.

A – коэффициент функции дохода (задается для каждой отрасли отдельно)

Функция траты (амортизации) показывает, какое количество средств, вложенных в производство, расходуется. Общий вид функции траты: $\varphi(x) = \boldsymbol{K}x$

K – коэффициент функции траты (задается для каждой отрасли отдельно)

$\mathbf{Z_i(Q)}$ **-** условный оптимальный выигрыш, получаемый на всех последующих шагах, начиная с i-го и до конца

4.1 Алгоритм метода динамического программирования

При решении любой задачи динамического программирования удобно придерживаться раз и навсегда установленного, стандартного порядка действий. Этот порядок можно установить в следующей форме:

1. Выбрать способ описания процесса, т.е. параметры (фазовые координаты),

характеризующие состояние S управляемой системы перед каждым шагом.

2. Разбить операцию на этапы (шаги).

3. Выяснить набор шаговых управлений xi для каждого шага и налагаемые на них ограничения.

4. Определить какой выигрыш приносит на i-ом шаге управление xi, если перед этим система была в состоянии S, т.е. записать «функцию выигрыша»:

$$W_i = f_i(S, x_i) \tag{4.1}$$

5. Определить, как изменяется состояние системы S под влиянием управления xi на i-ом шаге: оно переходит в новое состояние:

$$S' = \varphi_i(S, x_i) \tag{4.2}$$

6. Записать основное функциональное уравнение динамического программирования, выражающее условный оптимальный выигрыш Wi(S) (начиная с i-го шага и до конца) через уже известную функцию Wi+1 (S):

$$W_i(S) = \max_{x_i}\{f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\} \tag{4.3}$$

Этому выигрышу соответствует условное оптимальное управление на i-м шаге xi (S) (причем в уже известную функцию Wi+1 (S): надо вместо S подставить измененное состояние $S' = \varphi_i(S, x_i)$)

Произвести условную оптимизацию последнего (m-го) шага, задаваясь гаммой состояний S, из которых можно за один шаг дойти до конечного состояния, вычисляя для каждого из них условный оптимальный выигрыш по формуле:

$$W_m(S) = \max_{x_m}\{f_m(S, x_m)\} \tag{4.4}$$

8. Произвести условную оптимизацию (m-1)-го, (m-2)-го и т.д. шагов по формуле (4.3), полагая в ней i = (m-1),(m-2),…, и для каждого из шагов указать условное оптимальное управление Xi(S), при котором максимум достигается.

Заметим, что если состояние системы в начальный момент известно (а это обычно бывает так), то необходимо найти оптимальный выигрыш по формуле:

$$W^* = W_1(S_0) \tag{4.5}$$

9. Далее найти безусловные оптимальные управления (и, если надо, конечное состояние S^*_m) по цепочке:

$$S_0 \to x_1(S_0) \to S^*_1 \to x_2(S^*_1) \to \ldots \to S^*_{m-1} \to x_m(S^*_{m-1}) \to S^*_m. \tag{4.6}$$

В дальнейшем при решении задач распределения ресурсов будем придерживаться вышеизложенной схемы: условные оптимальные управления находятся в обратном порядке, от последнего шага к первому, а безусловные – в прямом порядке, от первого шага к последнему.

4.2 Задача о распределении ресурсов

4.2.1 Распределение ресурсов по неоднородным этапам

Входные данные

$\boldsymbol{K_0}$ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n, где **n** – количество лет, в течение которых производится оптимизация.

$\boldsymbol{A1_i}$, $\boldsymbol{A2_i}$ – коэффициенты функций дохода на i-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$\boldsymbol{K1_i}$, $\boldsymbol{K2_i}$ – коэффициенты функций траты на i-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

Схема решения

Рассматривается **система** – две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y, выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед i-ым шагом характеризуется количеством средств K, сохранившихся после предыдущих i-1 шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на i-ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i, вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z=\sum_{i=1}^{n} z_i$ будет максимальным.

Управление на i-ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i, $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на i-ом шаге описывается уравнением:

$$z_i(K,X_i)=f_i(X_i)+g_i(K-X_i) \tag{4.7}$$

Под влиянием управления X_i на i-ом шаге система переходит в новое состояние:

$$K' = \varphi_i(X_i)+\psi_i(K-X_i) \tag{4.8}$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K)=\max_{0\le X_i\le K}\left\{f_i(X_i)+g_i(K-X_i)+Z_{i+1}(\varphi_i(X_i)+\psi_i(K-X_i))\right\} \tag{4.9}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем n-м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K)=\max_{0\le X_n\le K}\left\{z(K,X_n)\right\}=f_n(X_n)+g_n(K-X_n) \tag{4.10}$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n\text{-}1),(n\text{-}2),\ldots 1$ в соответствии с рекуррентной формулой 4.9.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле 4.8.

4.2.2 «Классическая» задача распределения ресурсов

Задача является частным случаем задачи распределения ресурсов по неоднородным этапам (функции дохода и траты одинаковы для всех этапов).

Входные данные

K$_0$ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

А1, А2 – коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

К1, К2 – коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

Схема решения

В нашем случае **система** – это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y, выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед i-ым шагом характеризуется количеством средств K, сохранившихся после предыдущих i-1 шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на i-ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i, вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z=\sum_{i=1}^{n} z_i$ будет максимальным.

Управление на i-ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i, $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на i-ом шаге описывается уравнением

$$z_i(K,X_i) = f(X_i) + g(K - X_i) \qquad (4.11)$$

Под влиянием управления X_i на i-ом шаге система переходит в новое состояние

$$K' = (X_i) + \psi(K - X_i)\,. \qquad (4.12)$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \le X_i \le K} \{ f(X_i) + g(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i)) \} \qquad (4.13)$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем m-м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \le X_n \le K} \{z(K, X_n)\} = f(X_n) + g(K - X_n) \qquad (4.14)$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n\text{-}1),(n\text{-}2),\ldots 1$ в соответствии с рекуррентной формулой 4.13.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле (4.12) настоящего документа.

4.2.3 Задача резервирования ресурсов

Задача с резервированием ресурсов заключается в следующем: требуется найти такой способ управления ресурсами, при котором максимизируется доход за m лет при резервировании части средств на каждом шаге.

Задача о резервировании ресурсов сводится к классической задаче, когда $g(Y)=0$, а $\psi(Y) = Y$. Т.е вводится некая фиктивная отрасль, которая при вложении в нее средств, не приносит дохода, но и не тратит их.

Входные данные

K₀ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

А1 – коэффициент функции дохода для первой отрасли. Коэффициент **А2** полагается равным 0.

К1 – коэффициент функции траты для первой отрасли. Коэффициент **К2** полагается равным 1.

Ограничения

По истечение года, оставшиеся от K_0 средства можно вкладывать не целиком, а часть их резервировать.

Новых средств извне не поступает.

Доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно.

Схема решения

Схема решения задачи резервирования идентична схеме решения «классической» задачи распределения ресурсов.

4.2.4 Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.

В данной задаче помимо заданных функций дохода и траты, дополнительно, вводятся «функции отчислений» $r_i(D) \le D, i = 1,\ldots,n$, показывающие, какая часть дохода D, полученного на i-м шаге, не вкладывается в производство на следующем (i+1)-м шаге, а отчисляется.

Входные данные

***K*0** – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n.

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация.

A*1*i*, *A*2*i – коэффициенты функций дохода на *i*-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

K*1*i*, *K*2*i – коэффициенты функций траты на *i*-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

***K*3*i* -** коэффициент функций отчислений на *i*-м шаге оптимизации

Схема решения

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление X_i на *i*-ом шаге - вложение средств X_i в отрасль I, а остальных средств – в отрасль II (Y_i = K - X_i). Выигрыш на *i*-ом шаге описывается уравнением $z_i(K,X_i) = r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

Под влиянием управления X_i на *i*-ом шаге система переходит в новое состояние $K' = \ _i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \le X_i \le K} \left\{ \begin{matrix} r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + \\ + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))) \end{matrix} \right\}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем *n*-м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \le X_n \le K} \{ f_n(X_n) + g_n(K - X_n) + \ _n(X_n) + \psi_n(K - X_n) \}$$

Произвести условную оптимизацию для *i* = *(n-1),(n-2),…1* в соответствии с рекуррентной формулой.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.1.2.5 настоящего документа.

4.2.5 Решение «классической» задачи распределения ресурсов

Планируется деятельность двух отраслей производства I и II сроком на 3 года (N=3).

Заданы функции дохода для первой и второй отраслей соответственно:

$f(x) = 1 - e^{-x}$

$g(x) = 1 - e^{-2x}$

Так же заданы функции траты:

$\varphi(x)$ = 0.75 x и

$\psi(y)$ = 0.3 y для первой и второй отраслей соответственно.

Требуется распределить имеющиеся средства в размере $\boldsymbol{Q}$ = 2 между отраслями, исходя из условия максимума дохода.

Задачу условной оптимизации на всех этапах будем решить численно.

Условный оптимальный выигрыш на последнем **3-ем** шаге равен:

$$Z_3(Q) = \max_{0 \le X_3 \le K} \{z(Q, X_3)\} = \max_{0 \le X_3 \le Q} \left\{ 2 - \left[e^{-X_3} + e^{-2(Q - X_3)} \right] \right\}$$

Здесь, $z(K, X_5)$ — выигрыш на 3-м шаге.

Выясним, в каких пределах может находиться Q, т.е. Q_{max} и Q_{min}.

Значение Q_{max} можно найти, считая, что на первых двух шагах все средства будут вложены в первую отрасль, в которой затраты минимальны. Тогда после двух лет получим: $Qmax = K_0 * (0.75)^2 \approx 1.12$.

Величину Q_{min} можно найти, если на первых четырех шагах все средства вкладывать во вторую отрасль $Qmin = K_0 * (0.3)^2 \approx 0.18$. То есть, Q принадлежит интервалу

[0.18; 1.12].

Возьмем опорные значения Q = 0.28; 0.38; …;1.08 и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $x_3(Q)$ и условный максимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$.Для этого построим зависимости $z(Q,X_3)$ от X_3 для всех значений Q (см. рис. 4.1).

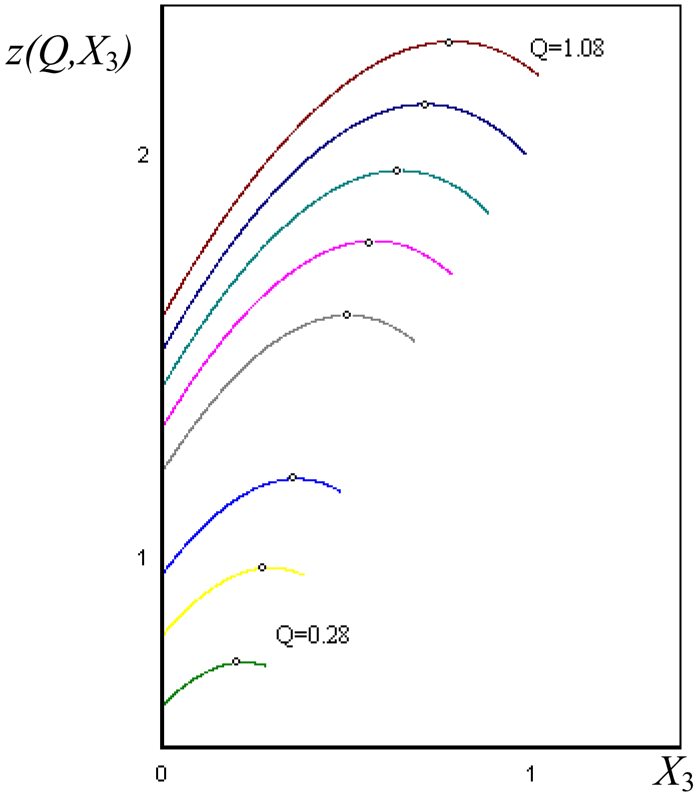


Рисунок 4.1 – Зависимость $z(Q,X_3)$ от X_3 для значений Q

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$ и соответствующее оптимальное управление X_3 (Q). Результаты вычисления координат максимального значения каждой кривой сведены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты вычисления

Q	$z(Q,X_3)$	X_3
0.18	0.302	0.000
0.28	0.429	0.000
0.38	0.533	0.022
0.48	0.628	0.089
0.58	0.716	0.156
0.68	0.799	0.222
0.78	0.876	0.289
0.88	0.949	0.356
0.98	1.017	0.422
1.08	1.080	0.489

С помощью полученных значений построим зависимости, показанные на рис. 3.2.2

Кривая $Z_3\,(Q)$ строится путем линейной интерполяции на сетке значений Q и $z(Q,X_3)$, представленных в Таблице 3.2.1. Кривая $X_3\,(Q)$ - Q и X_3.

Таким образом, оптимизация последнего шага завершена.

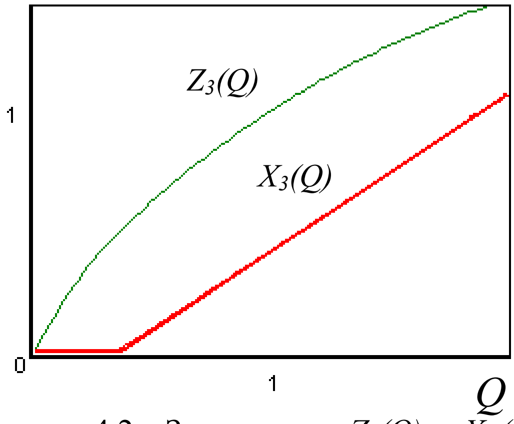


Рисунок 4.2 – Зависимости $Z_3(Q)$ и $X_3\,(Q)$

Рассмотрим 2-й шаг. Задачу условной оптимизации так же решается численно: $Z_2(Q,X_2) = \max\{\widetilde{Z}_2(Q,X_2)$, где условный полуоптимальный выигрыш равен

$$\widetilde{Z}_2(Q,X_2) = z_2(Q,X_2) + Z_3(0.75X_2 + 0.3(Q - X_2))$$

$z_2(Q,X_2) = 2 - \left[e^{-X_2} + e^{-2(Q-X_2)}\right]$ - выигрыш на 2-ом шаге. Аналогично третьему шагу выясним пределы Q: $Qmax = K_0 *(0.75)^1 \approx 1.5$, а $Qmin = K_0 *(0.3)^1 \approx 0.6$ То есть, Q принадлежит интервалу [0.6; 1.5].

Возьмем опорные значения Q = 0.6; 0.8; …;1.5 и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $X_2(Q)$ и условный максимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$.Для этого построим зависимости $\widetilde{Z}_2(Q,X_2)$ от X_2 для всех значений Q (см. рис. 4.3).

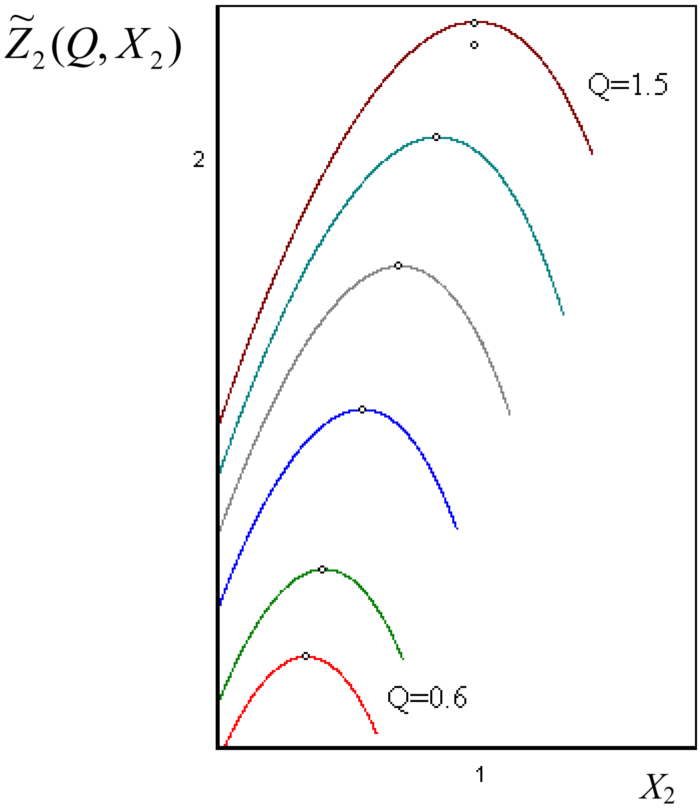


Рисунок 4.3 – Зависимость $\widetilde{Z}_2(Q,X_2)$ от X_2 для значений Q

При этом второе слагаемое в формуле для полуоптимального выигрыша определяется по рис. 4.2 для аргумента $0.75X_2 + 0.3(Q - X_2)$.

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$ и соответствующее оптимальное управление $X_2(Q)$. Сведем результаты в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Результаты вычислений на втором шаге.

Q	***z(Q,X₂)***	***X₂***
0.6	1.180	0.335
0.8	1.460	0.474
1.0	1.710	0.622
1.2	1.934	0.756
1.4	2.135	0.899
1.5	2.228	0.970

Аналогично третьему шагу, с помощью полученных значений строятся зависимости, показанные на рис. 4.4.

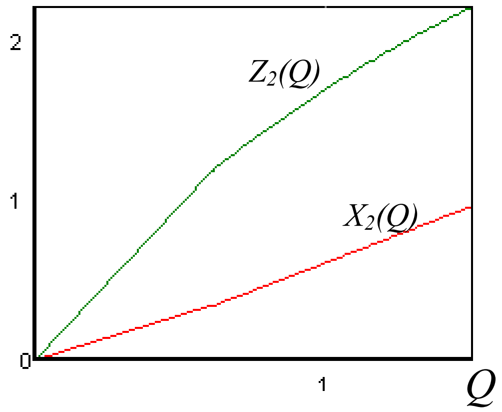


Рисунок 4.4 – Зависимости $Z_2(Q)$ и $X_2(Q)$

Теперь остается оптимизировать первый шаг.

Начальное состояние системы $Q_0 = 2$ и нужно построить зависимость $\widetilde{Z}_1(Q_0, X_1)$ от X_1:

$$\widetilde{Z}_1(Q_0, X_1) = z_1(Q_0, X_1) + Z_2(Q') = 2 - \left[e^{-X_1} + e^{-2(Q_0 - X_1)}\right] + Z_2(0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)).$$

Второе слагаемое определяется по рис. 4.4 для аргумента $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$. Определяя на единственной кривой (см. рис. 4.5) максимум, найдем окончательное (уже не условное) значение максимального дохода за весь период $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$ и соответствующее оптимальное управление на первом шаге $X_1 = 1.47$.

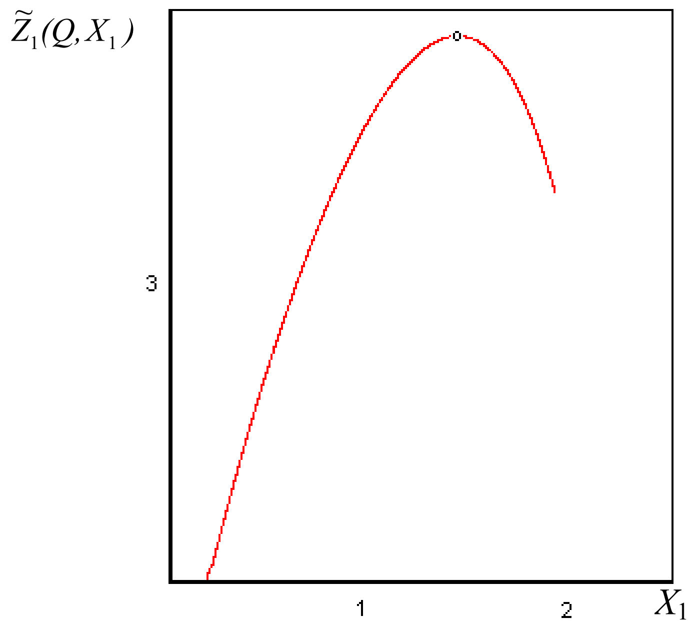


Рисунок 4.5 – Зависимость $\widetilde{Z}_1(Q, X_1)$ от X_1

Найдем безусловные оптимальные управления по схеме:

$$x_1 \to Q_2^* \to x_2 \to Q_3^* \to x_3 .$$

Остаток средств после первого определяется следующим образом:

$Q_2^* = 0.75x_1 + 0.3(Q_0 - x_1) = 1.26$.

По рис. 4.4 определяем $x_2 = 0.8$. Остаток средств после второго шага:

$Q_3^* = 0.75x_2 + 0.3(Q_2 - x_2) = 0.73$. По этому значению из рис. 4.2 определим $x_3 = 0.26$.

Полученные результаты сведены в таблице 4.3

Таблица 4.3

Отрасли	**Год**		
	1	**2**	**3**
I	1.469	0.801	0.261
II	0.531	0.460	0.477

Вид оптимальной кривой в фазовом пространстве показан на рис. 4.6.

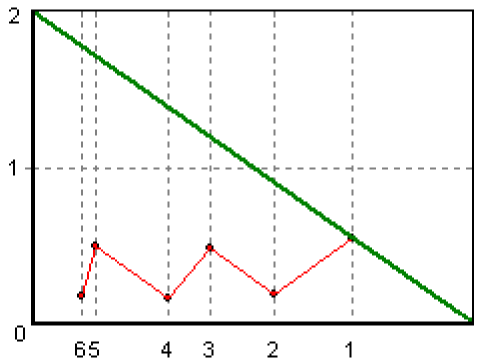


Рисунок 4.6 – Оптимальная кривая в фазовом пространстве

4.2.6 Связь различных типов задач распределения ресурсов

На рис. 4.7 показана зависимость между задачами распределения ресурсов.

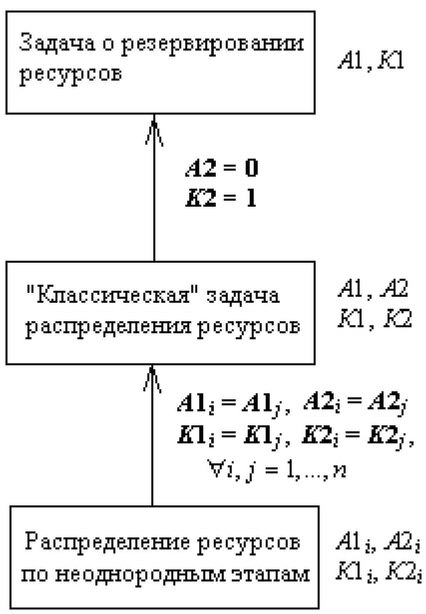


Рисунок 4.7 – Связь между различными типами задач распределения ресурсов

4.2.7 Пример задачи динамического программирования о распределении нескольких ресурсов

Задача распределения ресурсов решается по следующему алгоритму:

Входные данные

K_0 – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

A_1, A_2 – коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

K_1, K_2 – коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

Схема решения

В нашем случае система – это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется двумя параметрами X и Y, выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед i-ым шагом характеризуется количеством средств K, сохранившихся после предыдущих $i-1$ шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на i-ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i, вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$ будет максимальным.

Управление на i-ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме **X_i, $Y_i = K - X_i$.** Выигрыш на i-ом шаге описывается уравнением $z_i(K, X_i) = f_i(X_i) + g_i(K - X_i)$.

Под влиянием управления X_i на i-ом шаге система переходит в новое состояние

$K' = \varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i)$.

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \le X_i \le K} \{ f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i)) \}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем m-м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \le X_n \le K} \{ z(K, X_n) \} = f_n(X_n) + g_n(K - X_n)$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n-1),(n-2),\dots 1$ в соответствии с рекуррентной формулой**.**

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле.

Рассмотрим пример с 3-мя производствами и 2-мя ресурсами. Задача распределить ресурсы между производствами на n лет. Рассматривается система с 3 отраслями производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется ***2*** параметрами, выражающими количество средств в отраслях соответственно.

Таблица 4.4- функции трат

Производство		1	2	3
Ресурс	1	$\varphi_{11}(x,y)$	$\varphi_{12}(x,y)$	$\varphi_{13}(x,y)$
	2	$\varphi_{21}(x,y)$	$\varphi_{22}(x,y)$	$\varphi_{23}(x,y)$

Функция Беллмана на последнем ***(n)*** шаге в соответствии с формулой будет иметь вид:

$$Z_n(K_{1n}, K_{2n}) = \max \{ f_{1n}(x_{1n},y_{1n})+f_{2n}(x_{2n},y_{2n})+f_{3n}(K_{1n}-x_{1n}-x_{2n},K_{2n}-y_{1n}-y_{2n})\}$$

Функция Беллмана на предпоследнем ***(n-1)*** шаге будет иметь вид:

$$Z_{n-1}(K_{1n-1},K_{2n-1})=\max\{f_{1n-1}(x_{1n-1}, y_{1n-1})+f_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})+f_{3n-1}(K_{1n-1}-x_{1n-1}-x_{2n-1},K_{2n-1}-y_{1n-1}-y_{2n-1})+Z_n(K_{1n}, K_{2n})\}$$

Где $Z_n(K_{1n}, K_{2n})$ **-** Функция Беллмана на последнем шаге, полученная нами ранее, а K_{1n} и K_{2n} в соответствии с формулой равны:

$$K_{1n} = \varphi_{11}(x_{1n-1},y_{1n-1}) + \varphi_{12}(x_{2n-1},y_{2n-1}) +\varphi_{13}(K_{1n-1}-x_{1n-1}-x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1}-y_{2n-1});$$

$$K_{2n} = \varphi_{21}(x_{1n-1},y_{1n-1}) + \varphi_{22}(x_{2n-1},y_{2n-1}) +\varphi_{23}(K_{1n-1}-x_{1n-1}-x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1}-y_{2n-1});$$

где φ_{ij} – функции трат приведенные в таблице 4.4.

5 ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1 Метод численного моделирования (Метод Монте-Карло)

В последнее время область приложений метода численного моделирования или метода Монте-Карло существенно расширилась в связи с бурным развитием вычислительной техники. Особо следует отметить значительный прогресс, связанный с увеличением быстродействия вычислительных машин, что особенно важно при использовании метода Монте-Карло.

Определение. Методом Монте-Карло (ММК) называется численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Необходимо отметить, что ММК используется для решения любых математических задач, а не только задач вероятностного происхождения. Название «Монте-Карло» произошло от города Монте-Карло, известного своими казино, т. к. простейшим прибором для генерирования случайных чисел служит игральная рулетка. Возникновение метода Монте-Карло связывают с именами Дж. Неймана, С. Улама, Н. Метрополиса, Г. Канна и Э. Ферми, которые в 40-х годах работали в Лос-Аламосе. Официальной датой рождения ММК считают 1949 год, когда появилась статья под заглавием «Метод Монте-Карло» (Metropolis N., Ulam S.M. The Monte Carlo method. J. Amer. Statist. Assoc.,1949, 44, №247. P. 335−341).

Построение алгоритмов ММК основано на сведении задач к расчету математических ожиданий. Это означает, что для вычисления скалярной величины A нужно придумать такую случайную величину ξ, для которой ее математическое ожидание $m_1(\xi) = A$. Тогда, получив в численном эксперименте N независимых значений $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, можно найти, что

$$A \approx \frac{1}{N}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N).$$

Таким образом, в рамках данного курса мы рассматриваем так же и методы генерации случайных величин.

5.2 Моделирование случайных величин с равномерным распределением

5.2.1 Общие сведения о моделировании равномерного распределения

Плотность вероятности $f(\alpha)$ СВ α, равномерно распределенной в интервале [0; 1], равна

$$f(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha\in[0;1],\\ 0, & \alpha\notin[0;1].\end{cases} \tag{5.1}$$

Функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha} f(\alpha')d\alpha'=\begin{cases}0, & \alpha<0,\\ \alpha, & 0\le\alpha\le 1,\\ 1, & \alpha>1.\end{cases} \tag{5.2}$$

Математическое ожидание $m_\alpha=0{,}5$, а дисперсия $D(\alpha)=1/12$. Иногда в качестве стандартной используют дискретную СВ ε, ряд распределения вероятности *P* которой имеет вид

Таблица 5.1 – Равномерное распределение

ε	0	1	2	…	9
P	0,1	0,1	0,1	.	0,1

Будем называть α – случайным числом, а ε – случайной цифрой. Установим связь между α и ε. Представим число α в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_i\cdot 10^{-k} \tag{5.3}$$

Можно доказать следующую **теорему**: десятичные цифры $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k$ случайного числа α представляют собой независимые случайные цифры. Наоборот, если $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k$ независимые случайные цифры, то формула (5.3) определяет случайное число.

Замечание. В вычислениях всегда используют числа с конечным числом десятичных знаков, поэтому случайные числа α заменяют на случайные конечные дроби $\tilde{\alpha}=\varepsilon_1...\varepsilon_n$.

Таблица случайных чисел. Предположим, что осуществлено N независимых опытов, в результате которых получено N случайных цифр $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_N$. Записав эти цифры в порядке появления, получим таблицу случайных цифр. При проведении расчетов можно использовать как сами цифры, так и конструировать из них случайные числа $\alpha=0,\varepsilon_s\varepsilon_{s+1}...\varepsilon_{s+N}$.

Существуют физические датчики случайных чисел. Для их построения используют шумящие радиоэлектронные приборы. Они применяются довольно редко, т. к. являются неудобными для практического использования и требуют постоянного контроля качества случайных чисел. Кроме этого нет возможности повторно воспроизвести выборочную последовательность необходимую на стадии отладки программ и повторения расчетов.

5.2.2 Псевдослучайные числа

Пригодность случайных чисел определяется не процессом их получения, а тем, что они должны обладать интересующими нас свойствами независимых, равномерно распределенных СВ.

Определение. Последовательность чисел $\{\alpha_i\}$, которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении задач численным методом, называются **псевдослучайными числами**.

Из сказанного следует, что оказываются тождественными те свойства случайных и псевдослучайных чисел, которые требуются для решения широкого круга задач. По отношению к этим задачам разница между физически генерируемыми случайными числами и псевдослучайными практически отсутствует. К преимуществам псевдослучайных чисел можно отнести:

– небольшие затраты машинного времени для их получения;

– возможность многократного повторного воспроизведения одной и той же последовательности чисел при необходимости;

– большой период повторения;

- равномерность распределения, независимость, соответствие проверкам на d-размерность и k распределение.

– необходимость однократного тестирования алгоритмов вычисления псевдослучайных чисел.

Из последнего утверждения следует, что разрабатываемые датчики случайных чисел необходимо подвергать проверке с помощью специальных тестов, которые должны подтверждать их независимость и равномерность распределения. Важной характеристикой последовательности случайных чисел является ее периодичность. Это означает, что имеется некоторый достаточно большой номер L, начиная с которого случайные числа начинают повторяться. Очевидно, что использование при моделировании «большего» отрезка последовательности $\{\alpha_i\}$, чем период повторения, приведет к бессмысленному повторению испытаний в одних и тех же условиях.

Существуют различные алгоритмы для моделирования равномерного распределения, мы их рассмотрим на лабораторных работах.

5.3 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

5.3.1 Моделирование дискретных случайных величин

Рассмотрим дискретную СВ X с рядом распределения

$$\begin{pmatrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \qquad (5.4)$$

где $p_i = P(X = x_i)$. Для того чтобы моделировать эту величину, разделим интервал [0; 1] на интервалы $\{\Delta_i\}$ (рис. 5.1) такие, что длина Δ_i равна вероятности p_i. Можно доказать следующую теорему.

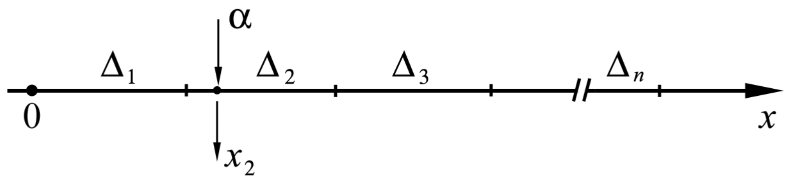


Рисунок 5.1 - Разбиение на интервалы диапазонов от 0 до 1

Теорема. Случайная величина X, определенная выражением $X = x_i$, если $\alpha \in \Delta_i$, имеет ряд распределения вероятностей (5.4). Схема моделирования: разыгрываем случайное число α и определяем интервала Δ_i, в который оно попало. В результате получим соответствующее значение СВ $X = x_i$ (для показанной на рис. 5.1 реализации $X = x_2$).

5.3.2 Моделирование случайных событий

Рассмотрим полную группу несовместных событий $\{A_i\}$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ $\left(\sum p_i = 1\right)$. Разделим интервал [0; 1] на n интервалов $\{\Delta_i\}$ таких, что длина интервала Δ_i равна вероятности p_i. В результате получаем рассмотренную выше схему моделирования дискретной случайной величины.

Замечание. Если есть одно случайное событие A с вероятностью $P(A) = p$, то до полной группы событий его дополняет $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

5.3.3 Моделирование непрерывной случайной величины

Рассмотрим непрерывную СВ X с плотностью вероятности $f(x)$ (функция распределения вероятностей $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x')dx'$). Можно доказать, что СВ X, удовлетворяющая уравнению $F(x) = \alpha$, имеет плотность вероятности $f(x)$. Таким образом, розыгрыш значения x непрерывной СВ X с заданной плотностью вероятности $f(x)$ сводится к процедуре разыгрыша случайного числа $\alpha \in [0;1]$. Значение x находится из уравнения (рис. 5.2)

$$x = F^{-1}(\alpha). \tag{5.5}$$

Здесь F^{-1} обозначает обратную функцию по отношению к F. Рассмотренный метод моделирования непрерывной СВ называется **методом обратных функций**.

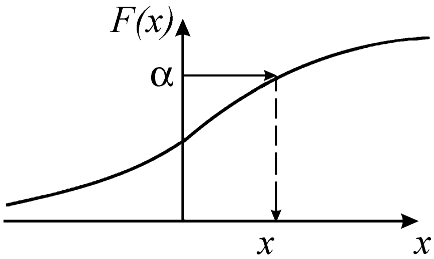


Рисунок 5.2 – Моделирование методом обратных функций

5.3.4 Моделирование экспоненциального распределения

Случайной величине X с экспоненциальной плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0, \\ 0, \ x \geq 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

где λ – параметр распределения, соответствует функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \ (x > 0) \tag{5.7}$$

На основании метода обратных функций найдем (см. рис. 5.2):

$$\alpha = 1 - e^{-\lambda x} \tag{5.8}$$

Решая относительно x, получим

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha) \tag{5.9}$$

Так как α – СВ с равномерным распределением в интервале [0; 1], то $(1-\alpha)$ также СВ с равномерным распределением в интервале [0; 1]. Окончательно получим

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha) \tag{5.10}$$

5.3.5 Пуассоновская случайная величина

Распределение вероятностей числа событий N на интервале времени Δt для пуассоновской СВ с параметром λ определяется выражением

$$P(N=n,\Delta t)=\frac{e^{-\lambda\Delta t}\left(\lambda\Delta t\right)^n}{n!}. \tag{5.11}$$

Пуассоновский поток событий является простейшим потоком, для которого интервалы времени τ между соседними событиями являются независимыми СВ с экспоненциальной плотностью вероятности (5.6). Моделирование выполняется по следующей схеме: последовательно разыгрываем значения $\tau_1, \tau_2, \tau_3...$ СВ с экспоненциальной плотностью вероятности до тех пор, пока не выйдем за пределы временного интервала Δt (рис. 5.3). Число точек на интервале Δt и есть значение пуассоновской случайной величины N. Для реализации, показанной на рис. 5.3, $N=3$.

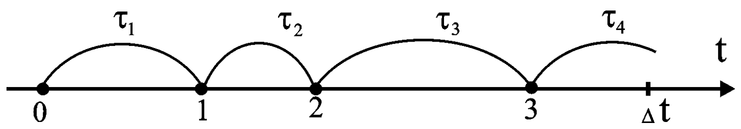


Рисунок 5.3 – Моделирование экспоненциального распределения

5.3.6 Гауссовская случайная величина

Гауссовская (нормальная) СВ X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{5.12}$$

Здесь m_x – среднее значение, σ_x^2 – дисперсия СВ X. Используя метод обратных функций, можно показать, что значение СВ X вычисляется по формуле

$$x=\sigma_x\Phi^{-1}\left(\alpha-0{,}5\right)+m_x,$$

где Φ^{-1} – обратная функция по отношению к функции Лапласа Φ.

Однако этот алгоритм на практике не применяют из-за больших затрат машинного времени. Это связано с тем, что при использовании ММК необходимо получать достаточно много значений СВ для вычисления результата с приемлемой точностью. Поэтому распространен другой алгоритм, позволяющий получать сразу два независимых значения гауссовской СВ x_1' и x_2' с нулевыми средними и $\sigma_x=1$:

$$x_1'=\omega_1\sqrt{-2\ln\alpha_1} \qquad\qquad x_2'=\omega_2\sqrt{-2\ln\alpha_1} \tag{5.13}$$

где ω_1, ω_2 – координаты изотропного вектора $\vec{\omega}$ на плоскости. Это означает, что точка $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$ имеет равномерное распределение на окружности с единичным радиусом. Моделирование ω_1, ω_2:

1) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_2, \quad \gamma_2 = 1 - 2\alpha_3, \quad d^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$

2) если $d^2 > 1$, то повторяем 1) и т. д., иначе

3) $\omega_1 = \gamma_1 / d, \quad \omega_2 = \gamma_2 / d$.

Заданные значения m_x и σ_x можно учесть с помощью линейного преобразования

$$x = \sigma_x x' + m_x . \tag{5.14}$$

Другой способ моделирования гауссовской СВ основан на центральной предельной теореме, согласно которой сумма большого числа независимых СВ имеет приближенно гауссовское распределение. Чем больше слагаемых, тем точнее аппроксимация распределения суммы гауссовской плотностью вероятности. Например, сумма

$$Z = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \tag{5.15}$$

уже при значении $K = 6$ с хорошей степенью точности может считаться гауссовской СВ, пригодной для решения многих прикладных задач. Так как $m_\alpha = 0{,}5$ и $D_\alpha = 1/12$, то СВ Z необходимо пронормировать

$$X' = \frac{Z - K \times 0{,}5}{\sqrt{K \times (1/12)}} . \tag{5.16}$$

В результате получим СВ X' с нулевым средним и единичной дисперсией. Далее необходимо выполнить линейное преобразование (5.14) для перехода к СВ X с заданными значениями среднего и дисперсии.

5.3.7 Случайная величина с логнормальным распределением

Плотность вероятности СВ X с логнормальным распределением имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2 \right\}. \tag{5.17}$$

Здесь параметры μ и σ^2 равны среднему и дисперсии $\ln X$. При этом математическое ожидание m_x и дисперсия D_x равны

$$m_x = e^{\mu + \sigma^2/2}, \; D_x = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Если Y имеет нормальное распределение с параметрами $m_y = 0$ и $\sigma_y = 1$, то СВ

$$X = \exp(\sigma Y + \mu)$$

имеет логнормальное распределение с параметрами (μ, σ^2), средним m_x и дисперсией D_x.

Таким образом, моделирование СВ X с логнормальным распределением можно свести к моделированию гауссовской СВ Y с $m_y = 0$, $\sigma_y = 1$ и последующему преобразованию

$X' = \exp(Y)$.

При этом $m_{x'} = e^{1/2}$, $D_{x'} = e(e-1)$. Если заданы среднее m_x и дисперсия D_x СВ X с логнормальным распределением, то ее значение можно найти с помощью линейного преобразования

$$X = \sqrt{D_x}\,\frac{\exp(Y) - e^{1/2}}{\sqrt{e(e-1)}} + m_x. \qquad (5.18)$$

5.4 Моделирование n-мерной случайной величины

Рассмотрим непрерывную n-мерную СВ $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ с совместной плотностью вероятности

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2 | x_1) f_2(x_3 | x_2, x_1) ... \qquad (5.19)$$

Для ее моделирования сначала разыгрывают значение x_1 СВ X_1. Это значение берется в качестве аргумента условной плотности вероятности $f(x_2|x_1)$, и разыгрывается значение x_2 СВ X_2. Значения x_1, x_2 берутся в качестве аргументов условной плотности вероятности $f_3(x_3 | x_1, x_2)$ и т. д.

6 ТЕОРИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)

При решении различных задач часто приходится сталкиваться с анализом эффективности работы систем массового обслуживания (СМО). Примеры СМО: телефонная станция, ремонтные мастерские, билетные кассы, автомобильные заправочные станции, железнодорожные сортировочные станции и т. п. Заявки поступают в СМО случайно, образуя поток заявок. Обслуживание заявок также выполняется в течение случайного времени. Это приводит к тому, что в некоторые моменты времени в СМО скапливается большое количество заявок, а в другие моменты заявок мало или они вообще отсутствуют. Обычно предполагается, что известен вероятностный закон, управляющий поступлением заявок. Впервые такая задача была решена датским математиком А.К. Эрлангом в начале XX века для анализа работы телефонной станции. В теории массового обслуживания понятие очереди является одним из основных.

Определение. Очередью называется линейная цепочка выстроившихся один за другим объектов, нуждающихся в обслуживании.

Все СМО характеризуются следующими основными элементами:

Входной поток – поток поступающих требований или заявок на обслуживание. Если поступление требований или заявок на обслуживание и процедура обслуживания выполняются строго по графику, то очереди можно избежать. На практике эти процессы носят случайный характер, и для построения их моделей следует привлекать методы теории вероятностей. Обычно требования в СМО поступают по одному. Такие системы называются системами с единичным поступлением. Однако бывают ситуации, когда требования поступают группами. Причем число требований в группе может быть фиксированным или случайным (число вагонов в железнодорожном составе, поступающих на сортировочную станцию). В этом случае речь идет о системе с *групповым поступлением требований*. Возможны ситуации, когда поступившие требования могут отказываться от обслуживания и покидать систему (система с потерями). Система, в которой обслуживаются все поступающие требования, называется СМО с ожиданием.

Механизм обслуживания. СМО различаются числом обслуживающих приборов, количеством обслуживаемых одновременно требований, продолжительностью обслуживания. Здесь также есть характеристики, которые носят случайный характер, например время обслуживания. Процесс обслуживания требований может состоять из нескольких этапов, выполняемых последовательно на различных обслуживающих устройствах. Такую систему называют многофазовой.

Дисциплина очереди или правила поведения в очереди,

в соответствии с которыми обслуживающий механизм принимает поступившую заявку на обслуживание. Различают следующие виды дисциплины очереди:

− «живая очередь» − первый пришел и первым обслуживаешься;

− пришел последним, а обслуживаешься первым. Такая дисциплина очереди может быть использована, например, при выходе из лифта, идущего вниз, или когда в очереди стоят не люди, а некоторые объекты: вагоны, автомобили (без водителей);

− обслуживание по степени срочности. Например, телеграф, междугородные переговоры. Причем требование с более высоким приоритетом в момент своего поступления могут прервать процесс обслуживания требований с более низким приоритетом. В этом случае говорят о *СМО с абсолютным приоритетом*. Если прерывание недопустимо, то это *СМО с относительным приоритетом*;

− обслуживание по приоритетам. Например, обслуживание ветеранов или ликвидация аварий;

− случайный порядок обслуживания, который используют, например, педагоги при опросе учащихся.

Выходящий поток – поток требований, покидающих СМО после обслуживания. Этот поток играет важную роль, так как может быть входным потоком для других СМО. Часто обслуженные требования возвращаются в эту же систему. В этом случае имеют место замкнутые СМО. Примером может быть организация ремонта станочного парка предприятия, когда отремонтированные станки возвращаются в систему, образуя входящий поток.

Предмет теории массового обслуживания связан с установлением зависимости между характеристиками потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО и эффективностью обслуживания.

Эффективность работы СМО определяется следующими параметрами:

– среднее число обслуживаемых заявок СМО в единицу времени;

– среднее число заявок в единицу времени, покидающих СМО необслуженными;

– среднее время ожидания в очереди и т. п.

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания приводит к тому, что в СМО протекает случайный процесс. Если случайный процесс марковский, то удается описать работу СМО с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и выразить характеристики обслуживания через параметры СМО и потоки заявок.

Для того чтобы протекающий в системе процесс был марковский, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, были пуассоновскими, или простейшими. Если потоки не пуассоновские, тогда для исследования основных характеристик такой системы используется метод Монте-Карло.

При изучении СМО можно выделить три класса рассматриваемых задач: задачи анализа систем, статические задачи и операционные задачи.

Задачи анализа поведения системы заключаются в том, чтобы на основе математических моделей, адекватно отражающих свойства СМО, выявить основные операционные характеристики, определяющие поведение этих систем в процессе их функционирования. К таким характеристикам относятся:

1) $Q(t)$ – число требований, находящихся в очереди в момент времени t;

2) $W(t)$ – продолжительность ожидания в очереди требования, поступившего в СМО в момент времени t;

3) I_n – продолжительность n-го периода простоя системы.

На практике часто используется показатель, который называется степенью загруженности обслуживающего прибора или коэффициентом нагрузки:

$$\rho = \frac{\text{итенсивность входного потока заявок}}{\text{интенсивность обслуживания}}. \tag{6.1}$$

Статистические задачи возникают при исследовании систем массового обслуживания и связаны с оценкой характеристик случайных процессов, протекающих в системе. При этом общая модель приводится в количественное соответствие с рассматриваемой СМО на основе статистического анализа эмпирических данных. Это позволяет оценить фигурирующие в модели характеристики потоков и их параметры.

Операционные задачи возникают при проектировании СМО, управлении системами и для оценки их эффективности. Некоторые из этих задач по своей природе относятся к разряду статистических.

При рассмотрении СМО часто используются обозначения, предложенные Кендаллом. Они позволяют описать систему с помощью следующих трех характеристик: вид входного потока, распределение продолжительности обслуживания, число обслуживающих приборов.

Используются следующие обозначения:

M – пуассоновское, или экспоненциальное распределение;

D – постоянная величина;

E_k – распределение Эрланга;

G – произвольное распределение;

GI – распределение в случае независимых событий.

Например, обозначение $M/D/s$ – означает, что имеется СМО с s приборами, обслуживающая поступающие требования за строго определенный интервал времени, входной поток – пуассоновский.

Замечание. Введенная классификация не учитывает правил формирования очереди, которые должны дополнять модель СМО.

Потоки событий

Основным понятием при рассмотрении случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем, к которым относятся СМО, является понятие **потока событий**.

Определение. Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (поток автобусов на данной остановке, поток отказов какой-то системы и т. п.). Поток событий можно изображать последовательностью точек на оси времени, как это показано на рис. 6.

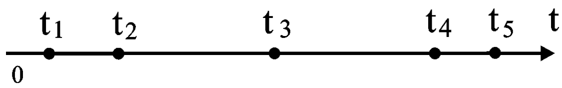


Рисунок 6.1 – Поток событий

Особое место занимают потоки событий, обладающие свойствами − стационарности, отсутствия последействия, ординарности:

- Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания n событий в интервале времени $(t, t+\tau)$ зависит от τ и не зависит от t. Это означает, что интенсивность потока событий не зависит от времени. Такие потоки событий часто встречаются на практике. Однако об их стационарности строго можно говорить только на ограниченном интервале времени. Распространение этого свойства на весь временной интервал является удобным приемом.
- Поток событий называется потоком без последействия, если события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.
- Поток событий называется ординарным, если вероятность осуществления на бесконечно малом интервале времени Δt двух и более событий $P(i,\Delta t)$ $(i=2,\ 3,\ ...)$ пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью одного события $P(1,\Delta t)$, т. е. выполняется условие

$$P(1,\Delta t) >> P(i,\Delta t), \quad i=2,\ 3,\ ...$$

Определение. Поток событий называется простейшим**,** если он стационарен, ординарен и не имеет последействия**.** Для такого потока вероятность появления на интервале времени Δt n событий определяется формулой Пуассона $P(N=n,\Delta t)=\dfrac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^n}{n!}$.

Для простейшего потока интервал τ между соседними событиями имеет экспоненциальное распределение $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x\geq 0,\end{cases}$. Если рассматривать бесконечно малый временной интервал Δt, то с учетом ординарности пуассоновского потока

$P(0,\Delta t)+P(1,\Delta t)\approx 1$.

Отсюда следует, что

$P(1,\Delta t)\approx \lambda\Delta t$.

Определение. Поток событий называется рекуррентным или потоком «Пальма», если он стационарен, ординарен, а интервалы времени $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n,...$ между соседними событиями представляют собой независимые случайные величины с одинаковым произвольным распределением. Из определения следует, что простейший поток – это частный случай рекуррентного. Интервалы времени $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n,...$ имеют одинаковое экспоненциальное распределение, а их независимость обусловлена тем, что простейший поток есть поток без последействия.

Важными для практики являются потоки Эрланга, которые образуются в результате «просеивания простейшего потока». Поток Эрланга *n*-го порядка получается, если в исходном простейшем потоке сохранить каждое *n*-е событие. На рис. 6.2 показан пример формирования потока Эрланга 4-го порядка.

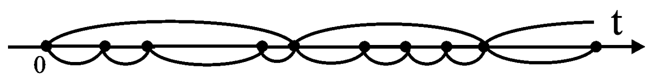


Рисунок 6.2 – Поток Эрланга

Простейший поток является потоком Эрланга первого порядка. Можно показать, что плотность вероятности интервала времени между соседними событиями в потоке Эрланга *k*-го порядка имеет вид:

$$f_k(\tau)=\frac{\lambda(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda\tau}\quad(\tau>0), \tag{6.2}$$

где λ – средняя интенсивность порождающего простейшего потока. При этом среднее и дисперсия СВ τ равны

$m_1^{(k)}(\tau)=k/\lambda$, $D^{(k)}(\tau)=k/\lambda^2$.

Многоканальная СМО с ожиданием

Структура многоканальной СМО показана на рис. 6.3.

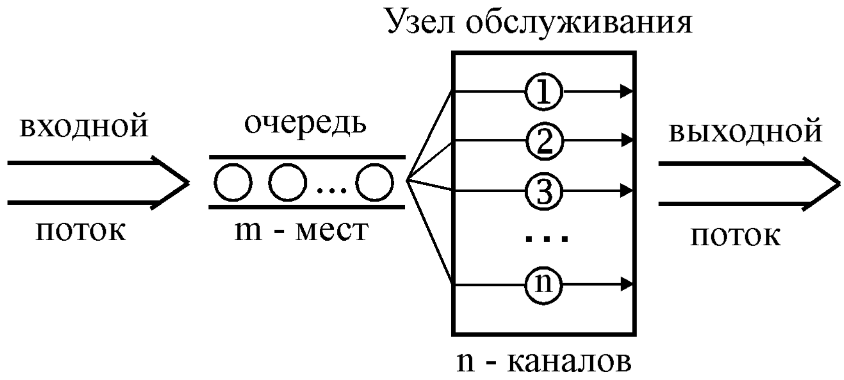


Рисунок 6.3 – Структура СМО

Число мест в очереди равно m, число обслуживающих устройств – n. Максимально в СМО одновременно может находиться $m+n$ требований. Если поступающее требование застает СМО полностью занятой, т. е. заняты все обслуживающие устройства и нет свободных мест в очереди, то это требование покидает систему. Если при поступлении требования свободно несколько обслуживающих устройств, то оно поступает на любое из них с равной вероятностью. Состояние системы будем нумеровать по числу находящихся в ней требований:

Q_0 – все каналы свободны;

Q_1 – занят один канал;

Q_n – заняты все каналы;

Q_{n+1} – одно требование стоит в очереди;

Q_{n+m} – все каналы заняты, все места в очереди заняты.

Граф состояний такой СМО показан на рис. 3.4.4 и представляет собой схему «гибели и размножения».

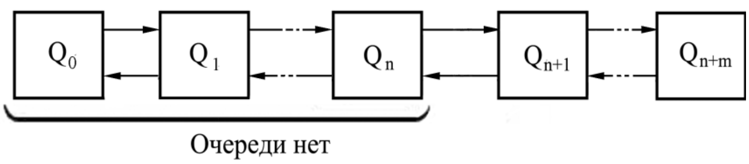


Рисунок 6.4 – Схема гибели и размножения

Пусть поток поступающих требований пуассоновский со средней интенсивностью λ, а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Можно показать, что в этом случае финальные вероятности состояний системы равны:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{(\rho/n)^{m+1} - \rho/n}{\rho/n - 1} \right]^{-1}, \tag{6.3}$$

$$p_k = \left(\frac{\rho^k}{k!}\right)p_0,\ k = \overline{1,n}, \tag{6.4}$$

$$p_k = \left(\frac{\rho^{n+i}}{n!n^i}\right)p_0,\ i = \overline{1,m}, \tag{6.5}$$

где параметр $\rho = \lambda / \mu$.

Основные характеристики СМО

Ниже перечислены основные характеристики СМО, определяемые при решении задач анализа. Аналитические результаты в виде формул приведены для случая пуассоновского потока заявок со средней интенсивностью λ и экспоненциального распределения времени обслуживания с параметром μ.

1. Вероятность того, что все обслуживающие устройства свободны, равна p_0.

2. Вероятность того, что занято k обслуживающих устройств, равна p_k.

3. Вероятность того, что все обслуживающие устройства заняты и l требований находятся в очереди ($l \le m$), находится из выражения:

$$p_{n+l} = \frac{\rho^{n+l}}{n^l n!}p_0,\quad 1 \le l < m; \tag{6.6}$$

вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0. \tag{6.7}$$

4. Среднее число устройств, занятых обслуживанием требований, определяется выражением:

$$N_{\text{зан}} = \sum_{k=1}^{n} kp_k + n\sum_{l=1}^{m} p_{n+l}. \tag{6.8}$$

Если поток заявок пуассоновский, то, выполняя суммирование, найдем:

$$N_{\text{зан}} = \rho\left[1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m}p_0\right]. \tag{6.9}$$

5. Среднее число простаивающих устройств

$$N_{\text{пр}} = n - N_{\text{зан}}. \tag{6.10}$$

6. Коэффициенты простоя и занятости

$$K_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{пр}}}{n},\quad K_{\text{зан}} = 1 - K_{\text{пр}}. \tag{6.11}$$

7. Относительная пропускная способность равна доли обслуженных требований от общего числа поступивших в систему:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0 . \tag{6.12}$$

8. Абсолютная пропускная способность A равна среднему числу требований, обслуживаемых в единицу времени:

$$A = \lambda q . \tag{6.13}$$

9. Среднее число требований, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{l=1}^{m} l p_{n+l} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \frac{1 - \left(\rho/n\right)^m (1 + m - m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2} p_0 . \tag{6.14}$$

10. Среднее число требований, находящихся в СМО:

$$L = L_{\text{оч}} + N_{\text{зан}} . \tag{6.15}$$

11. Среднее время ожидания в очереди (формула Литтла)

$$W = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \tag{6.16}$$

12. Среднее время пребывания заявки в СМО

$$< t_{\text{сис}} > = < t_{\text{ож}} > + < \tau >, \tag{6.17}$$

$t_{\text{ож}}$ – время ожидания в очереди,

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{если требование не попадает в СМО,} \\ t_{\text{обсл}}, & \text{если требование попадает в СМО,} \end{cases}$$

$t_{\text{обсл}}$ – время обслуживания. Можно показать, что для пуассоновского потока заявок

$$< t_{\text{ñèñ}} > = W + q/\mu . \tag{6.18}$$

Моделирование систем массового обслуживания

Рассмотрим пример, связанный с моделированием методом Монте-Карло системы массового обслуживания. Имеется одноканальная СМО $(n=1)$ с очередью, число мест в очереди $m=1$. Поток заявок – пальмовский, т. е. соседние интервалы времени между заявками представляют собой независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности $f(\tau)$. Время обслуживания одной заявки – случайная величина с плотностью вероятности $\varphi(\tau)$.

Требуется, моделируя работу СМО методом Монте Карло и располагая одной длинной реализацией событий входного потока продолжительностью T, найти оценки:

– P_0 и P_1, – вероятностей того, что канал не будет занят и канал будет занят;

– величины среднего времени ожидания в очереди $\hat{m}_1(t_{\text{îæ}})$ и дисперсии времени ожидания $\hat{D}(t_{\text{îæ}})$;

– вероятности отказа в обслуживании $P_{\text{отк}}$.

Решение. Граф состояний системы показан на рис. 6.5.

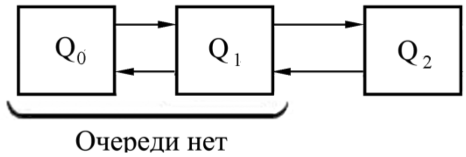


Рисунок 6.5

Будем считать, что в начальный момент времени система находится в состоянии Q_0. Разыграем моменты времени $t_1, t_2, t_3, ...$ прихода заявок. Для этого определим функцию распределения вероятностей интервалов времени между заявками

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} f(x)dx$$

и, используя метод обратной функции, последовательно разыграем интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...$, пример реализации которых показан на рис. 6.6.

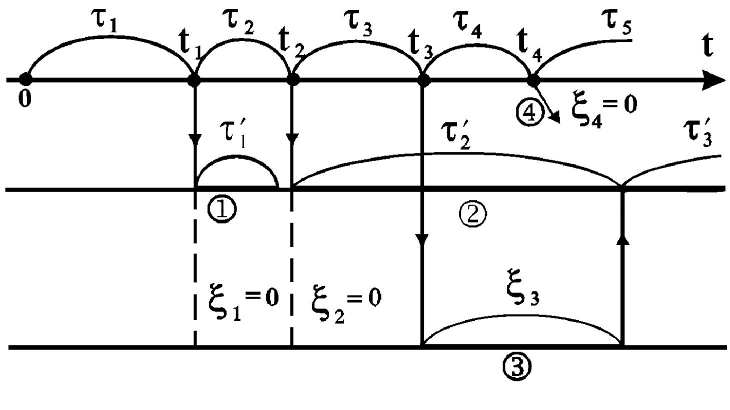


Рисунок 6.6 – Процесс моделирования

На второй оси (рис. 6.6) будем изображать состояние канала (жирная черта – «занято», тонкая – «свободно»). На третьей оси будем изображать состояние места в очереди. Заявка, пришедшая в момент времени t_1, занимает канал. Время ее обслуживания τ_1' разыгрывается с помощью метода обратных функций. Вторая заявка, пришедшая в момент t_2, также занимает канал после его освобождения первой заявкой. Третья заявка занимает место в очереди, а четвертая покидает СМО. Обозначим через T_0 – время, в течение которого канал свободен, $T_1 = \sum \tau_i'$ – суммарное время обслуживания (для четвертой заявки время обслуживания $\tau_4' = 0$). При достаточно большом значении T оценки вероятностей равны соответственно

$$\hat{P}_0 = \frac{T_0}{T} \text{ и } \hat{P}_1 = \frac{T_1}{T}.$$

Оценка среднего времени ожидания $t_{\text{ож}}$ в очереди

$$\hat{m}_1(t_{\text{î æ}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\zeta_i ,$$

где ξ_i – время ожидания в очереди i-й заявки (первая и вторая заявки сразу приняты к обслуживанию, а четвертая получила отказ, поэтому для этих заявок $\xi_i = 0$), N – общее число заявок. Дисперсия времени ожидания в очереди

$$D(t_{\text{î æ}}) \approx \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\xi_i - \hat{m}_1(t_{\text{î æ}})\right]^2 .$$

Оценка вероятности отказа $\hat{P}_{\text{î òê}} = \frac{N^*}{N}$, где N^* – число заявок, получивших отказ.

7 ТЕОРИЯ ИГР

Теория игр — это раздел математической экономики, изучающий решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий.

Конфликт может относиться к разным областям человеческого интереса: чаще всего это экономика, социология, политология, реже биология, кибернетика и даже военное дело.

Конфликтом является любая ситуация, в которой затронуты интересу двух и более участников, традиционно называемых игроками. Для каждого игрока существует определённый набор стратегий, которые он может применить. Пересекаясь, стратегии нескольких игроков создают определённую ситуацию, в которой каждый игрок получает определённый результат, называемый выигрышем, положительным или отрицательным. При выборе стратегии важно учитывать не только получение максимального профита для себя, но также возможные шаги противника, и их влияние на ситуацию в целом.

Конфликтная ситуация называется антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведёт к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и многочисленные. Участники множественной игры могут образовывать коалиции. Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

Стороны, участвующие в игре, называются игроками. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, оговаривается в процессе игры. Фактически, число стратегий совпадает с числом вариантов действий.

Игра называется конечной, если число стратегий игроков конечно и бесконечной, если хотя бы у одного из игроков число ситуаций является бесконечным.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника.

Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется ходом. Ходы бывают личные и случайные. Ход называется личным, если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (ход в шахматах, шашках). Ход называется случайным, если выбор производится не игроком, каким-либо механизмом случайной выборки (бросание монеты).

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечное множество стратегий, называются матричными.

Так как игра конечна, то множество стратегий X и Y конечны.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$
$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Если игрок I выбрал стратегию x_i, а игрок II – y_i, то выигрыш равен a_{ij}. Числа aij образуют матрицу А размером (m x n).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \to \\ x_2 \to \\ x_3 \to \\ \dots \\ x_m \to \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\| = A \end{array}$$

Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях.

7.1 Типы игр

7.1.1 Кооперативная и некооперативная игра

Кооперативной игрой является конфликт, в котором игроки могут общаться между собой и объединяться в группы для достижения наилучшего результата.

Примером кооперативной игры можно считать карточную игру Бридж, где очки каждого игрока считаются индивидуально, но выигрывает пара, набравшая наибольшую сумму.

Некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Не смотря на то, что эти два вида противоположны друг другу, вполне возможно объединение стратегий, которое может принести больше пользы, чем следование какой-либо одной.

7.1.2 С нулевой суммой и с ненулевой суммой

Игрой с нулевой суммой называют игру, в которой выигрыш одного игрока равняется проигрышу другого.

Например, банальный спор: если вы выиграли сумму N, то кто-то эту же сумму N проиграл.

В игре же с ненулевой суммой может изменяться общая цена игры, таким образом принося выгоду одному игроку, не отнимаю ее цену у другого. В играх с ненулевой суммой проигрыш одного из игроков не является обязательным условием, хотя такой исход и не исключается.

В качестве примера здесь отлично подойдут шахматы: превращая пешку в ферзя игрок А увеличивает общую сумму своих фигур, при этом не отнимая ничего у игрока Б.

7.1.3 Параллельные и последовательные

Параллельной является игра, в которой игроки делают ходы одновременно, либо ход одного игрока неизвестен другому, пока не завершится общий цикл. В последовательной игре каждый игрок владеет информацией о предыдущем ходе своего оппонента до того, как сделать свой выбор. И совсем не обязательно информации быть полной, что подводит нас к следующему типу.

7.1.4 С полной или неполной информацией

Эти типы являются подвидом последовательных игр, и названия их говорят сами за себя.

7.2 Решение матричной игры nxm по критерию Гурвица, Сэвиджа, Байеса и Вальда

7.2.1 Игры с природой

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком один. Игроку два (природа) не важен результат, либо он не способен к осмысленным решениям. Или, возможно, условия не зависят от действий игрока, а определяются внешними факторами: реакция рынка, который не будет вредить одному конкретному игроку, государственная политика, реальная природа.

Различают два вида задач в играх с природой:

- Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний;
- Задачи о принятии решений в условиях неопределённости, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы;

Пример:

Первого игрока, за которого мы будем принимать решения, будет представлять Samsung. Вторым игроком, играющим «природу», будет компания Apple.

Подходит время выпуска нового смартфона, прошла презентация, эксперты высказали свое мнение, и игрок один должен принять важное решение, когда выпустить продукт? Упростив ситуацию, у нас останется три стратегии: до конкурента (A_1), вместе с ним (A_2) или после (A_3). Естественно, пока не выйдет новый iPhone мы не узнаем, будет он намного лучше нашего (B_1), таким же (B_2) или сильно уступающим в качестве (B_3). Посчитав прибыль во всех случаях, в итоге получим матрицу:

	B1	B2	B3
A1	5	5	7
A2	3	4	6
A3	2	4	8

Теперь же, для принятия решения, у нас есть несколько критериев.

7.2.2 Критерий Вальда (максиминный).

Игрок рассчитывает, что природа пойдет по наихудшему для него пути, и следует выбрать вариант с максимальной прибылью при самом плохом исходе, поэтому данный критерий считается пессимистическим. Представить его можно в виде max (min i).

$$\begin{array}{cccc} & B1 & B2 & B3 \\ A1 & 5 & 5 & 7 \\ A2 & 3 & 4 & 6 \\ A3 & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

Для A_1 минимальной прибылью является 5 у природы B_1 и B_2

Для A_2 минимальной прибылью является 3 у природы B_1

Для A_3 минимальной прибылью является 2 у природы B_1

$\max\{5|3|2\} = 5$

Таким образом из 5, 3 и 2 максимум прибыли нам даст вариант A_1

7.2.3 Критерий максимума (максимаксный)

Является оптимистическим, т.е. мы надеемся на самый благоприятный для нас исход представляется как max (max i).

Для A_1 максимальной прибылью является 7 у природы B_3

Для A_2 максимальной прибылью является 6 у природы B_3

Для A_3 максимальной прибылью является 8 у природы B_3

$\max\{7|6|8\} = 8$

Таким образом из 7, 6 и 8 максимум прибыли нам даст вариант A_3

7.2.4 Критерий Гурвица

Рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max\left(A \cdot \max i + (1 - A) \cdot \min i\right)$$

где А — степень оптимизма и изменяется в пределах от 0 до 1.

Критерий выдает результат, учитывающий возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При А=1 данный критерий можно заменить критерием максимума, а при А=0 — критерием Вальда. Величина А зависит от степени ответственности игрока один: чем она выше, тем ближе А к единице. Для данного примера А=0,4.

Для A_1 прибыль равна 0,4·7 + 0,6·5 = 5,8

Для A_2 прибыль равна 0,4·6 + 0,6·3 = 4,2

Для A_3 прибыль равна 0,4·8 + 0,6·2 = 4,4

Из полученных ответов максимальную прибыль приносит действие A_1.

7.2.5 Критерий Сэвиджа (минимаксный).

Суть его заключается в выборе стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, в которой вычисляется максимальная прибыль при каждом варианте действия игрока, и среди результатов выбирается наименьший. Его формула выглядит как min (max i).

Для A_1 максимальной прибылью является 7 у природы B_3

Для A_2 максимальной прибылью является 6 у природы B_3

Для A_3 максимальной прибылью является 8 у природы B_3

Таким образом из 7, 6 и 8 минимум прибыли нам даст вариант A_2

7.2.6 Критерий Байеса

Предлагает придать равные вероятности всем рассматриваемым стратегиям, после чего принять ту из них, при которой ожидаемый выигрыш окажется наибольшим. Критерий имеет один недостаток: не всегда можно точно определить вероятность того или иного события со стороны природы. Формулой для него является max (Σ q·i). Где q -вероятность наступления каждого из событий природы.

Вероятности событий для природы равны 0,5; 0,4; 0,1; соответственно. Таким образом Для A_1 5·0,5 + 5·0,4 + 7·0,1 = 5,2

Для A_2 3·0,5 + 4·0,4 + 6·0,1 = 3,7

Для A_3 $2·0,5 + 4·0,4 + 8·0,1 = 3,4$

Очевидно, что максимальную прибыль мы получим от варианта A_1

Для выбора стратегий в условиях неопределённости можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера, принимающего решение (в частности, его склонности к риску).

Если решение принимается в условиях неопределённости, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учётом сильных и слабых сторон.

7.3 Чистые и смешанные стратегии

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком **A** и игроком **B** пара стратегий называются чистыми стратегиями.

В антагонистической игре пара стратегий (**A***I*, **B**J) называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки **A** и **B** располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустим, что хотя бы одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно.

Рассмотрим матричную игру **G** (3x4).

Таблиц 7.1 – Матричная игра 3x4

	B1	B2	B3	B4	AI
A1	5	7	10	8	5
A2	10	9	11	10	9
A3	8	6	7	4	4
BJ	10	9	11	10	

В этом примере нижняя цена игры равна верхней: a=b=9, т. е. игра имеет седловую точку.

Оказывается, что в этом случае максиминные стратегии **A**2 и **B**2 будут устойчивыми по отношению к информации о поведении противника.

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии - это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии **A***I* и **B***J* (в рассматриваемом примере **A**2, **B**2), при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность - решением игры. Про саму игру в этом случае говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Величина $\nu = \alpha = \beta$,

Называется ценой игры.

Если **N**>0, то игра выгодна для игрока А, если **N**<0 - для игрока В; при **N**=0 игра справедлива, т. е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Однако наличие седловой точки в игре - это далеко не правило, скорее - исключение. Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а, следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это - игры с полной информацией.

Теорема Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а, следовательно, решается в чистых стратегиях, т. е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный **N**.

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры. Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда - выигрышем черных, либо всегда - ничьей (только чем именно - мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу находится по принципу максимина.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку А выигрыш не менее **A**, игроку - проигрыш не больше b. Учитывая, что a<b, естественно для игрока А желание увеличить выигрыш, а для игрока В - уменьшить проигрыш. Поиск такого решения производит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его смешанной стратегией.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков **A** и **B** соответственно

SA=||p1, p2, ..., pm||,

SB=||q1, q2, ..., qn||,

Где pi - вероятность применения игроком **A** чистой стратегии **A**I;

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

Qj - вероятность применения игроком B чистой стратегии Bj;

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна - единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными PI и QJ.

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок **A** применяет смешанную стратегию SA=||p1, p2, ..., pm||, а игрок **B** смешанную стратегию SB=||q1, q2, ..., qn||, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока **A** определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока **B** равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш N.

7.4 Решение матричной игры (2x2)

Пусть матричная игра G (2x2) имеет платежную матрицу

	B1	B2
A1	A11	A12
A2	A21	A22

Предположим, что игра не имеет седловой точки. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: SA=||p1, p2|| и SB=||q1, q2||, где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{7.1}$$

$$q_1 + q_2 = 1 \tag{7.2}$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры **N**, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок **A** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **B** - свою чистую активную стратегию **B1**, то цена игры **N** равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu \tag{7.3}$$

А при использовании игроком **B** чистой активной стратегии **B**2, выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu \tag{7.4}$$

Уравнения (7.1), (7.3) и (7.4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным:

p1, p2 и n.

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.5}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.6}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.7}$$

Если игрок **B** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **A** - свою чистую активную стратегию **A1**, то цена игры **N** равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu \tag{7.8}$$

А при использовании игроком **A** чистой активной стратегии **A2**, выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu \tag{7.9}$$

Уравнения (7.2), (7.8) и (7.9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q1; q2 и n.

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.10}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.11}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{7.12}$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (7.7) и (7.12)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (7.5), (7.6), (7.7), (7.10), (7.11), (7.12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда 0<p1<1; 0<p2<1; 0<q1<1; 0<q2<1.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырёх выигрышей a11, a12, a21, a22 не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своём столбце.

Решения системы уравнений (7.5), (7.6), (7.7) и (7.10), (7.11), (7.12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис 7.1). Для нахождения вероятностей **P**1, **P**2 и цены игры ***V*** в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность **P**1Î [0,1], а по оси ординат - соответствующие этой вероятности - выигрыши игрока А.

При p1=0, игрок **A** применяет чистую стратегию **A**2. Если при этом игрок **B** применяет чистую стратегию **B**1, то выигрыш игрока **A** равен a21, а если игрок **B** применяет чистую стратегию **B**2, то выигрыш игрока **A** равен a22. При p1=1, игрок **A** применяет чистую стратегию **A**1.

При p1=0, игрок **A** применяет чистую стратегию **A**2. Если при этом игрок **B** применяет чистую стратегию **B**1, то выигрыш игрока **A** равен a21, а если игрок **B** применяет чистую стратегию **B**2, то выигрыш игрока **A** равен a22. При p1=1, игрок **A** применяет чистую стратегию **A**1.

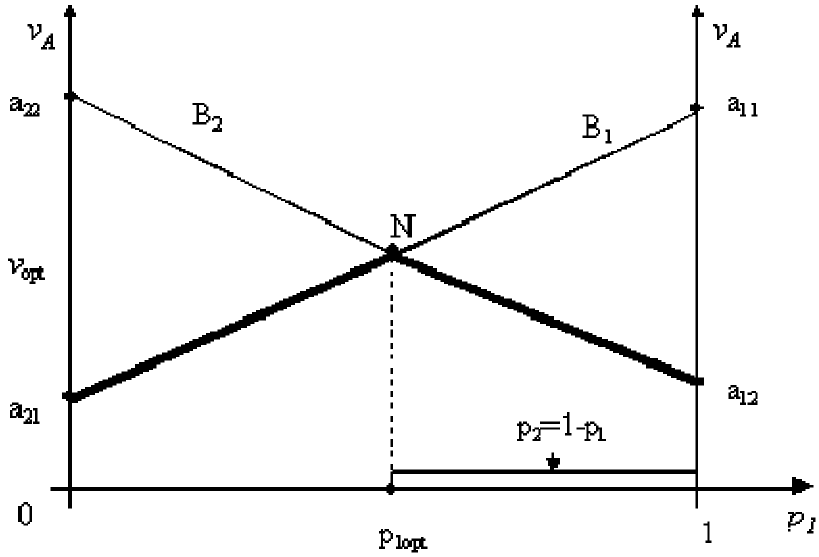


Рисунок 7.1 – Графический метод решения игры (игрок А)

Если при этом игрок **B** применяет чистую стратегию **B**1, то выигрыш игрока **A** равен a11, а при применении чистой стратегии B2 - a12. Так как значения p1 лежат в пределах [0,1], то соединяя крайние точки для стратегий B1 и B2 (строя графики функций ***VA***=(a11-a21) p1+a22 и ***VA***=(a12-a22)p1+a22), получаем значения выигрышей игрока **A** для всех промежуточных значений **P**1.

В соответствии с принципом максимина, игрок **A** должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка **N** пересечения отрезков прямых (рис. 7.1) и определяет как оптимальную цену игры ***V***Opt, так и оптимальные вероятности **P**1opt и **P**2opt=1-**P**1opt, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока А, т. е. даёт решения системы уравнений (7.1), (7.3), (7.4).

Для графического решения системы уравнений (7.2), (7.8), (7.9) отложим по оси абсцисс вероятность q1Î [0,1], а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока В:

VB=(a11-a12)q1+a12; (3.5.13)

VB=(a21-a22)q1+a22. (3.5.14)

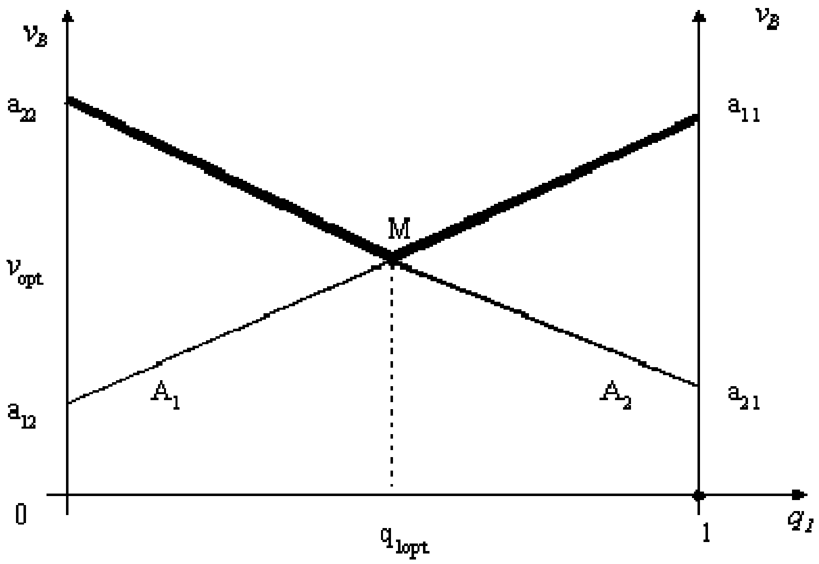


Рисунок 7.2 - Графический метод решения игры (игрок В)

Решением являются координат точки **М** (рис 7.2.) пересечения прямых, описываемых уравнений (7.13) и (7.14):

Q1opt;q2opt=1-q1opt и *V*Opt.

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок В должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры G(2x2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения быть представлена, например, следующим образом (рис. 7.3).

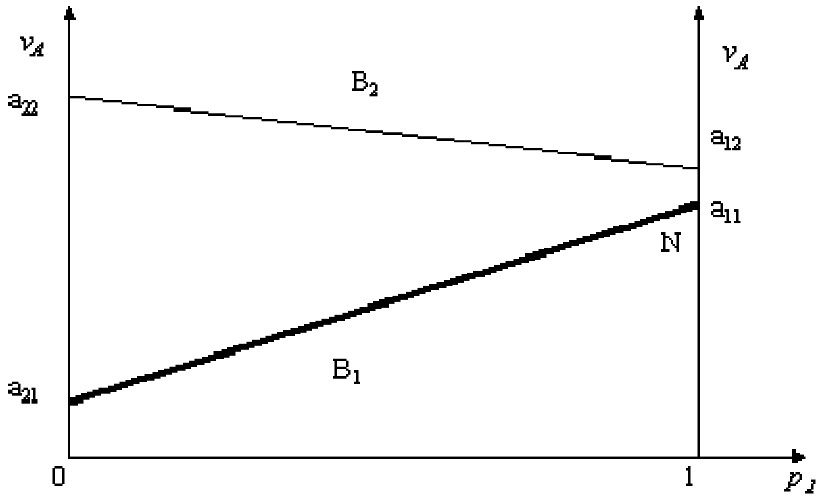


Рисунок 7.3 - Графический метод решения игры с седловой точкой

Стратегия **В**2 игрока **В** является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии **В**1. В данной игре **P1Opt=1; p2Opt=0;** ***V*****Opt=a11**, т. е. игра имеет седловую точку **N** и решается в чистых стратегиях. Игрок **A** должен применять стратегию **A**1, а игрок **B** - стратегию B1.

На рис. 7.4 показан случай, в котором решением игры для игрока **A** является чистая стратегия **A**2, а для игрока **B** - стратегия **B**1.

Игра имеет седловую точку N.

Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B1	B2	A*I*
A1	4	-2	-2
A2	1	3	1
B*J*	4	3	

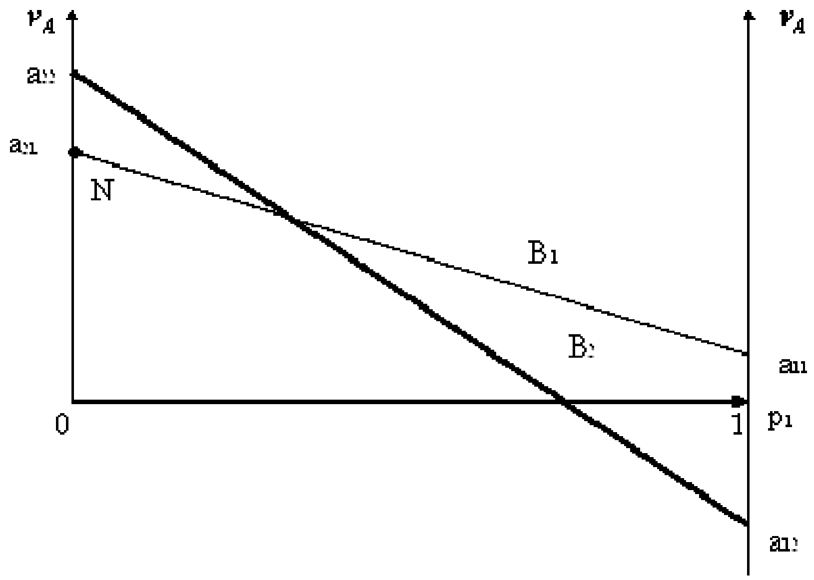


Рисунок 7.4 – Решение с чистыми стратегиями

В данной игре нижняя цена игры a=1 не равна верхней цены игры b=3, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока **A**, в соответствии с формулами (7.5) и (7.6), оптимальные вероятности применения стратегий **A1** и **A2** равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока **B**, в соответствии с формулами (7.10) и (7.11), оптимальные вероятности применения стратегий **B1** и **B2** равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков

$$S_A = \left\| \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{5}{8}; \frac{1}{8} \right\|,$$

а цена игры в соответствии с формулой (3.5.12) равна:

$$\nu = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так как N>0, то игра выгодна для игрока А.

Графическое изображение игры для игрока А показана на рис. 3.5.5.

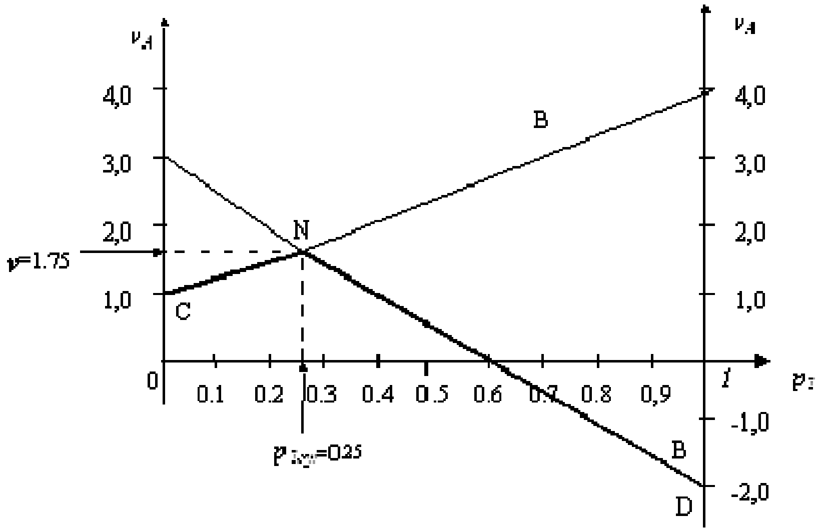


Рисунок 7.5 - Графическое изображение игры для игрока А

Нижняя граница выигрыша игрока А определяется ломаной CND. Оптимальное решение, определяется точкой N, естественно, дает тоже решение, что и алгебраический метод: $S_A = \|0.25; 0.75\|, \quad \nu = 1.75$.

Графическое изображение игры для игрока В показано на рис. 7.6.

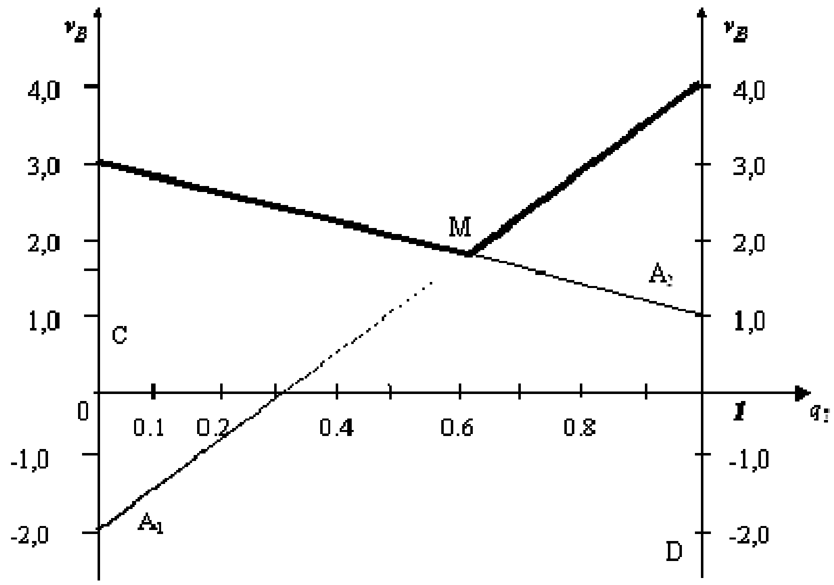


Рисунок 7.6 – Графическое изображение игры для игрока В

Оптимальное решение, определяемое точкой М, даёт решение $S_B = \|0.625; 0.375\|, \quad v = 1.75$.

7.5 Упрощение матричной игры

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платёжной матрицы. Поэтому для игр с платёжными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путём исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

Определение 1. Если в платёжной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Определение 2. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию АI игрока А, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия АI называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Определение 3. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию ВI Игрока В не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия ВI называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Решение матричной игры не изменится, если из платёжной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Упростить матричную игру, платёжная матрица которой имеет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	5	9	3	4	5
A2	4	7	7	9	10
A3	4	6	3	3	9
A4	4	8	3	4	5
A5	4	7	7	9	10

Из платёжной матрицы видно, что стратегия A2 дублирует стратегию A5, потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию A5). Сравнивая почленно стратегии A1 и A4, видим, что каждый элемент строки A4 не больше соответствующего элемента строки A1. Поэтому применение игроком A доминирующей над A4 стратегии A1 всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии A4. Следовательно, стратегию A4 можно отбросить. Таким образом, имеем упрощённую матричную игру с платёжной матрицей вида:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	5	9	3	4	5
A2	4	7	7	9	10
A3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока B доминируют над другими: B3 над B2, B4 и B5. Отбрасывая доминируемые стратегии B2, B4 и B5, получаем игру 3x2, имеющей платёжную матрицу вида:

	B1	B3
A1	5	3
A2	4	7
A3	4	3

В этой матрице стратегия A3 доминируется как стратегией A1, так и стратегией A2. Отбрасывая стратегию A3, окончательно получаем игру 2x2 с платёжной матрицей

	B1	B3
A1	5	3
A2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, ее надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придём к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой - это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платёжной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

Свойство 1. Если ко всем элементам платёжной матрицы прибавить (вычесть) одно и тоже число С, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число С.

Свойство 2. Если каждый элемент платёжной матрицы умножить на положительное число k, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на k.

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

Решить матричную игру 2x2 с платёжной матрицей вида:

	B1	B2
A1	0.5	-0.2
A2	0.1	0.3

Умножая все элементы платежной матрицы на 10, а затем прибавляя к ним число 2, получаем игру с платежной матрицей

	B1	B2
A1	7	0
A2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9};\ p_2 = \frac{7}{9};$$

$$q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9};\ q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7\cdot 5 - 0\cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2, исходная матричная игра имеет те же оптимальные смешанные стратегии: $S_A = \left\| \frac{2}{9} : \frac{7}{9} \right\|$ и $S_B = \left\| \frac{5}{9} : \frac{4}{9} \right\|$. А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким образом, получаем цену исходной игры: $\left(\frac{35}{9} - 2\right) : 10 = \frac{17}{90}$

7.6 Решение игр 2*n и m*2

У игры **2xn** или **mx2** всегда имеется решение содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(\min\ (2,n) = \min\ (m,2) = 2)$. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры **2xn** и **mx2** превращаются в игры **2x2**, методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры **2xn** осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры для игрока **A**;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры ***V***;

3) определяется пара стратегий игрока **B**, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока **B**.

Таким образом, игра **2xn** сведена к игре **2x2**, которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана любая пара из них.

Решение игры **mx2** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока **B** и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока **B)**, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Найти решение игры, платёжная матрица которой имеет вид:

	B1	B2	B3
A1	2	5	8
A2	7	4	3

Платежная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока **A** (рис.7)

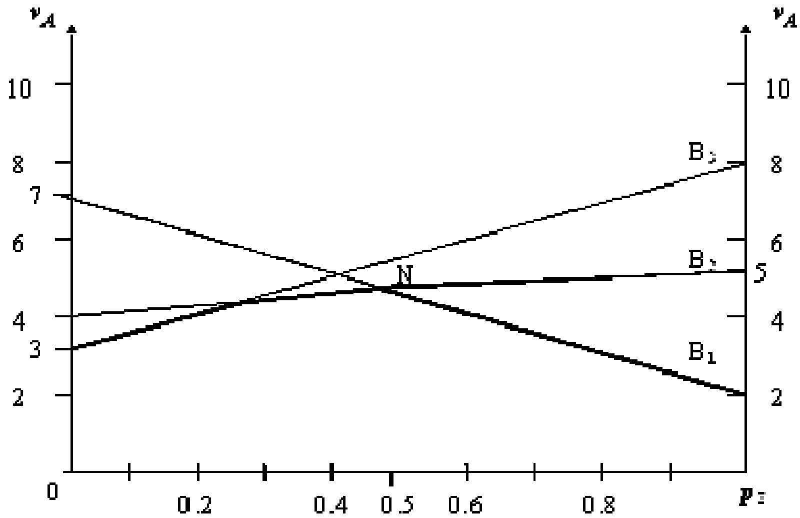


Рисунок 7.7 - Графическое изображение игры для игрока А

Точка **N** (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям **B1** и **B2** игрока **B**. Таким образом, исключая стратегию **B3**, получаем матричную игру **2x2** с платёжной матрицей вида

	B1	B2
A1	2	5
A2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2 + 4 - 7 - 5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\|; \; S_B = \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\|; \; v = \frac{27}{6}.$$

Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B1	B2
A1	0	1
A2	4	2
A3	-1	4
A4	1	-3
A5	6	-2
A6	1,5	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре **2x2** строим ее графическое изображение для игрока **B** (рис. 7.8).

Точка **M** (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A2, A6 и A3 игрока A. Таким образом, исключая стратегии A1, A4 и A5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A2 и A3 или A2 и A6), приходим к матричной игре **2x2**. Выбор стратегий A3 и A6 исключён, так как в этом случае точка M перестанет быть точкой минимакса.

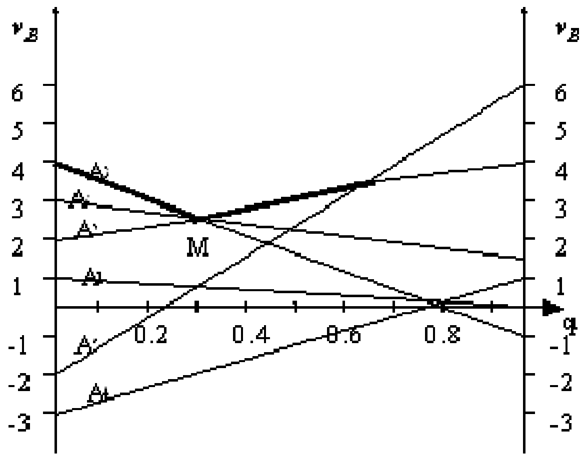


Рисунок 7.8 - Графическое изображение игры для игрока B

Пусть выбираются стратегии A2 и A3. Тогда игра **2x2** приобретает вид

	B1	B2
A2	4	2

A3	-1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а, следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7};\quad p_2 = \frac{2}{7};$$

$$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7};\quad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4\cdot 4 - 1\cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0,0,0 \right\|;\quad S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|;\quad v = \frac{18}{7}.$

Другой вариант игры **2x2** получается, если использовать стратегии A2 и A6. В этом случае платёжная матрица имеет вид

	B1	B2
A2	4	2
A6	1,5	3

Тогда

$$p_1 = \frac{3-1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{3}{7};\quad p_2 = \frac{4}{7};$$

$$q_1 = \frac{3-2}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{7};\quad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4\cdot 3 - 2\cdot 1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| 0, \frac{3}{7}, 0,0,0, \frac{4}{7} \right\|;\quad S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|;\quad v = \frac{18}{7}.$$

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр **2xn** и **mx2**:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры **A** не равна верхней цене игры **B**, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путём исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощённая игра имеет размерность не **2x2**, то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяется две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

7.7 Решение коалиционных игр, нахождение ядра и вектора Шепли

В экономике отдельные субъекты редко действуют поодиночке. Чаще всего они объединяются в союзы, коллективы, кооперации для достижения своих целей и принимают коллективные действия. Такие случаи изучаются в теории коалиционных игр. Коалиционной игрой называется игра с не противоположными интересами, в которой игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции) для объединения ресурсов. **Коалиция** – подмножество игроков, а **большая коалиция** – синоним для множества всех игроков. Коалиционная игра в характеристической форме это:

1. Множество игроков N.

2. Характеристическая функция, v, сопоставляющая каждой коалиции сумму денег, которую эта коалиция может заработать самостоятельно. Равна гарантированному математическому ожиданию выигрыша.

Характеристическая функция может принимать отрицательные значения (например, при дележе расходов). Мы считаем, что пустая коалиция (куда никто не входит), не может заработать денег и никому ничего не должна, т.е. v(Ǿ) = 0. Именно характеристическая функция полностью описывает игру.

Если несколько непересекающихся коалиций объединяются, то вместе как одна коалиция они заработают не меньше, чем по отдельности и это называется свойством супераддитивности.

Определение. Игра называется супераддитивной, если для любых непересекающихся коалиций SS1, S2, верно неравенство v(S1 ∪ S2) ≥ v(S1) + v(S2). В такой игре у игроков есть интерес в создании большой коалиции и дележе полученного v(N). Есть две концепции деления v(N): ядро и вектор Шепли. Несколько примеров таких игр:

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый.

Здесь N = {Лёня, Лева, Паша}, v(Лёня) = v(Лева) = v(Паша) = 0 (в одиночку никто не может получить 600 рублей); v(Лёня, Лева) = 0 (у них нет правого); для любой другой коалиции S, v(S) = 600, т.к. есть и правый и левый ботинки.

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков.

Здесь N = {Андрей, Борис}, v(Андрей) = 60, v(Борис) = 120, v(Андрей, Борис) = 240.

Решить коалиционную игру - значит назвать множество допустимых векторов выигрышей. **Вектор выигрышей игроков** – произвольный вектор, представляющий собой распределение полученного выигрыша. Представляется в виде: $x=(x_1, \ldots, x_n)$, где каждый x_i - это выигрыш, который получает i-й игрок. **Допустимый вектор выигрышей** такой, что сумма выигрышей не превышает выигрыш большой коалиции.

7.7.1 Ядро

Ядро – решения кооперативных игр, основанные на минимизации степени неудовлетворённости выигрышем коалиций. Предположим, что большая коалиция решила каким-то образом разделить v(N). С математической точки зрения, делёж - это вектор x = (x1, x2, ..., xn). Поскольку большая коалиция может заработать v(N), то любой делёж обязан удовлетворять бюджетному ограничению x1 +x2 +x3 +...+xn ≤ v(N). Будем назвать ядром C(v) такое множество векторов выигрышей, которое:

Эффективно т.е. всё должно быть распределено между всеми без остатка, Для этого неравенство x1 +x2 +x3 +...+xn ≤ v(N) должно быть выполнено как равенство;

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

$$\sum_{i \in S} x_i$$

Устойчиво т.е. не должно найтись такой коалиции, которой было бы выгодно отколоться от данной. Например, если отсоединившись, коалиция S получает v(S); а соглашаясь на делёж – получает, то для любой коалиции S должно соблюдаться условие

Находим ядро в наших примерах. Ядро можно найти решая систему из одного уравнения и нескольких неравенств.

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый. Считаем количество пар, а не стоимость: $x_1+x_2+x_r=1$, $x_1+x_r>=1$, $x_2+x_r>=1$.

Решение одно $x_1=0$ $x_2=0$ $x_r=1$, победитель получает все или все получает владелец редкого ресурса. Если $x_1+x_2+x_r = 600$, $x_1+x_r>=600$, $x_2+x_r>=600$ $x_1=0$ $x_2=0$ $x_r=600$

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. $x_1+x_2=240$, $x_1>=60$, $x_2>=120$.

Решение: любой делёж вида (x_1, 240- x_1), где x_1 принадлежит к [60;120].

Пример3. «Бизнес»: Виктор и Сергей ведут совместный бизнес, их доход - $1500 в месяц. Обязанности распределены таким образом, что если бы Виктор работал один, то получал бы $600 в месяц, а один Сергей не смог бы зарабатывать вовсе. Как должны распределиться между ними выигрыши, чтобы они вступили в коалицию?

Возможны четыре коалиции: пустая, две по одному человеку и большая. Платежи в них будут следующие:

v(пустое)=v({Сергей})=0;

v({Виктор})=600;

v({Виктор, Сергей})=1500;

Таким образом, Виктор должен получать не меньше 600, тогда как для Сергея допустима любая сумма.

У концепции Ядра есть недостатки:

- оно может быть не единственным;
- оно может быть пустым из-за того, что условие устойчивости слишком сильное;

Другими словами - оно может применяться не для всякой коалиционной игры.

7.7.2 Вектор Шепли

Вектор Шепли – принцип оптимальности распределения выигрыша между игроками, в котором выигрыш каждого игрока равен его среднему вкладу в благосостояние тотальной коалиции. Мы хотим получить вектор выигрышей, который:

- эффективен - сумма выигрышей всех игроков равна выигрышу большой коалиции;
- симметричен – игроки получают равные выигрыши, если при присоединении к коалиции внесли одинаковый взнос. А выигрыш не привнёсшего ничего игрока равен нулю;
- линейность – выигрыш любого игрока в игре, являющейся суммой двух коалиционных игр равен сумме выигрышей в каждой из этих двух игр по отдельности;

Вектор Шепли – это математическое ожидание вклада каждого игрока, если большая коалиция формируется в случайном порядке.

Допустим, игроки у нас занумерованы в некотором порядке π, где π-некая последовательность чисел от 1 до n. Будем добавлять игроков в коалицию в указанном порядке, формируя большую коалицию. Когда мы добавляем i-го игрока у нас уже сформирована некоторая коалиция S. Присоединяясь к этой коалиции S, игрок i увеличивает достижимый выигрыш на $\upsilon(S \cup \{i\}) - \upsilon(S)$. Назовём эту прибавку вкладом i-го игрока в большую коалицию, обозначим ее Add(i, π). Он зависит от порядка формирования большой коалиции π.

Если же формировать большую коалицию добавляя игроков по одному в случайном порядке π, то прибавка, вносимая i-м игроком, Add(i) – будет случайной величиной.

Вектор Шепли, это вектор (x_1, x_2, ..., x_n), где выигрыш i-го игрока x_i определяется по принципу x_i=E(Add(i)).

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - еще один такой же левый, а у Паши - правый. Если формировать большую коалицию в порядке Лёня, Лёва, Паша, то вклад Левы равен нулю. Если формировать большую коалицию в порядке Паша, Лёва, Лёня, то вклад Лёвы равен 600 руб.

Найдём E(Add(r)). Если Паша ходит первым, то его вклад равен нулю, иначе его вклад равен 600. Значит E(Add(r)) = (2/3) *600=400. Вклад Лени равен 600 только если первым вошёл Паша, а вторым – Лёня. Значит E(Add(l1)) = (1/6) *600=100. Аналогично для Лёвы. Значит вектор Шепли равен: (100, 100, 400).

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. Здесь N = {Андрей, Борис}, v(Андрей) = 60, v(Борис) = 120, v (Андрей, Борис) = 240.

Возможно два порядка формирования большой коалиции: Андрей-Борис и Борис-Андрей. В первом случае вклады игроков равны Add (a, ab)) =60, Add (b, ab)) =180, во втором - Add (b, ba)) =120, Add (a, ba)) =120. И вектор Шепли: x_a=90, x_b=150. Что соответствует интуитивному дележу в пропорции 3/5.

ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

1. Ржевский, Сергей Владимирович. Исследование операций [Электр.ресурс] : учебное1. пособие. - СПб. : Лань , 2021 on-line[Электронный ресурс]: — Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/169378/#1.

2. Горлач, Борис Алексеевич. Исследование операций. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов [Электр.ресурс] : учебное пособие для вузов. - СПб.: Лань, 2021 on-line[Электронный ресурс] : — Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/162371/#1.

б) дополнительная литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций (задачи, принципы, методология) М.: Наука. 1988. − 208 с. (19 экз. в библиотеке ТУСУР)

2. Давыдов Э.Г. Исследование операций: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1990. − 382 с. (19 экз. в библиотеке ТУСУР)

3. Северцев, Николай Алексеевич. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности [Электр.ресурс] : учебное пособие для вузов. - М. : Юрайт, 2020 on-line (экз.) [Электронный ресурс]: — Режим доступа: https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-principy-prinyatiya-resheniy-i-obespechenie-bezopasnosti-454393#page/1.

4. Исследование операций в экономике [Электр.ресурс] : учебник для вузов. - М.: Юрайт, 2020 on - line [Электронный ресурс]: — Режим доступа: https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-v-ekonomike-460143#page/1.