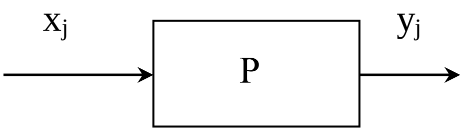
Завдання з курсу «Математичне моделювання»

Лабораторна робота №2

Побудова лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів.

Будемо вважати, що на вхід системи перетворення, математична модель якої невідома, поступають послідовно дані у вигляді $m-1$ вимірних векторів $\mathbf{x}_j$. На виході системи спостерігається сигнал у вигляді вектора $\mathbf{y}_j$ розмірності p.



<u>*Постановка задачі:*</u> Для послідовності вхідних сигналів $\mathbf{x}_j$, $j=1,2,\dots,n$ та вихідних сигналів $\mathbf{y}_j$, $j=1,2,\dots,n$ знайти оператор P перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Будемо шукати математичну модель оператора об'єкту в класі лінійних операторів

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_j\\ 1\end{pmatrix}=\mathbf{y}_j,\ j=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

Невідома матриця $\mathbf{A}$ математичної моделі об'єкту розмірності $p\times n$. Систему (1) запишемо у матричній формі

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_n),$$

або

$$\mathbf{AX}=\mathbf{Y}, \tag{2}$$

де $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ – матриця вхідних сигналів розмірності $m\times n$, $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_n)$ – матриця вихідних сигналів розмірності $p\times n$.

Матрицю $\mathbf{X}$ будемо інтерпретувати як двовимірне вхідне зображення, а матрицю $\mathbf{Y}$ вихідне зображення.

Тоді

$$\mathbf{A}=\mathbf{YX}^{+}+\mathbf{VZ}^{T}(\mathbf{X}^{T}),$$

де матриця

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_{(1)}^{T}\\ \mathbf{v}_{(2)}^{T}\\ \vdots\\ \mathbf{v}_{(p)}^{T}\end{pmatrix},$$

розмірності $p\times m$, $\mathbf{Z}(\mathbf{X}^{T})=\mathbf{I}_m-\mathbf{XX}^{+}$.

Формула Гревіля для псевдообернення матриці:

Якщо для матриці A відома псевдообернена (обернена) матриця A^+, то для розширеної матриці $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$ справедлива формула

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left(A^+ - \dfrac{Z(A)aa^T A^+}{a^T Z(A)a} \vdots \dfrac{Z(A)a}{a^T Z(A)a} \right), if\ a^T Z(A)a > 0 \\ \left(A^+ - \dfrac{R(A)aa^T A^+}{1 + a^T R(A)a} \vdots \dfrac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a} \right), if\ a^T Z(A)a = 0 \end{cases},$$

де $Z(A) = E - A^+ A,\ R(A) = A^+ \left(A^+\right)^T$.

Для першого кроку алгоритму $\left(a_1^T\right)^+ = \dfrac{a_1}{a_1^T a_1}$, де $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$.

Формула Мура - Пенроуза для знаходження оберненої (псевдооберненої) матриці:

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ \left(A^T A + \delta^2 E_n \right)^{-1} A^T \right\} = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ A^T \left(AA^T + \delta^2 E_m \right)^{-1} \right\},$$

матриця A розмірності $m \times n$.

Варіанти вхідних на вихідних сигналів, для яких потрібно побудувати лінійний оператор перетворення вхідного сигналу у вихідний:

1) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y1.bmp
2) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
3) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y3.bmp
4) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp
5) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
6) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y6.bmp
7) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y7.bmp
8) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y8.bmp
9) Вхідний сигнал – x1.bmp, вихідний сигнал – y9.bmp
10) Вхідний сигнал – x2.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
11) Вхідний сигнал – x2.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
12) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y3.bmp
13) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y6.bmp
14) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y8.bmp
15) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y1.bmp
16) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y2.bmp
17) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp
18) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y10.bmp
19) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y5.bmp
20) Вхідний сигнал – x3.bmp, вихідний сигнал – y4.bmp