Численные методы (6 семестр)

Скачать PDF Открыть на HackMD

tags: `year2015`

Ссылки

- Google Drive

Теормин

Физика

Текучая среда – среда, которая начинает двигаться под действием сколь угодно малого касательного напряжения. Если жидкость не движется (находится в состоянии равновесия), значит, нет касательного напряжения.

Закон Паскаля - при равновесии текучей среды давление на площадку не зависит от ее ориентации и тензор напряжений - шаровидный.

$grad\ p = \rho\vec{f}$ – **уравнение равновесия текучей среды** Эйлера.

Процесс **баротропен**, если плотность – функция только давления $\rho = \rho(p)$.

Три случая **баротропности**:

- Изотермический процесс
- Адиабатический процесс
- Несжимаемая среда

Баротропность возможна **только в потенциальном поле сил**.

Идеальная среда – среда, в которой при любом ее движении не возникает касательных напряжений, то есть в ней нет внутреннего трения.

Для идеальной среды **основное граничное условие** на омывание жидкостью твердой поверхности заключается в непроницаемости границ.

Альтернатива Фредгольма возникает для внутренней задачи второго рода.

Теорема Лагранжа – если идеальная среда движется баротропно под действием консервативной силы, то завихренность самопроизвольно не зарождается.

Если среда несжимаемая, то можно записать **скалярное или векторное уравнение Лапласа**.

Интеграл Лагранжа-Коши можно записать для идеальной среды с баротропным течением в потенциальном поле сил в которой нет начальной завихренности.

Если течение стационарно, то можно записать **интеграл Бернулли**.

Типовые течения сплошной среды:

1. однородный поток
2. линейный источник
3. точечный источник
4. дипольный источник
5. мультипольный источник

Парадокс Даламбера: при стационарном безвихревом обтекании тела потоком идеальной, несжимаемой жидкостью силовые воздействия на тело оказываются нулевыми.

Вязкая среда – среда, в которой касательные напряжения и градиент скорости линейно зависимы. (то есть для нее выполняются реологический и обобщенный законы Ньютона)

Проблемы системы для вязкой жидкости:

1. Нелинейность
2. Неустойчивость(турбулентность)
3. Неэволюционная структура (хз, что это о_О) (вроде, нет эволюционного уравнения для давления)

Систему можно решать без уравнения энергии.

Для вязкой среды **основное граничное условие** – условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке, т.е. отсутствует скорость скольжения среды по поверхности.

При обтекании твердых поверхностей вязкой жидкостью должно выполняться граничное условие равенства 0 скорости среды на неподвижной обтекаемой поверхности или совпадения скоростей частиц среды со скоростями точек движущейся твердой поверхности, с которыми эти частицы соприкасаются.

Система ур-й эллиптическая.

Точное решение мы находили для случая стационарного течения без объемных сил.(вроде?)

Течение Пуазейля имеет параболический профиль.

Число Струхала Sh=[r]/([v][t])
Число Рейнольдса Re=[r][v]/v
Число Эйлера Eu=-[p]/([v]2)
Число Фруда Fr=[v]^2/([f][r])
Число Пекле Pe=[r][v]/, где - коэффициент теплопроводимости.
Число Прандтля Pr=/
Число Шмидта Sci=/Di

Переписать:

Число Струхала $Sh = [r]/([v][t])$
Число Рейнольдса $Re = [r][v]/\nu$
Число Эйлера $Eu = -[p]/(\rho[v]^2)$
Число Фруда $Fr = [v]^2/([f][r])$
Число Пекле $Pe = [r][v]/\chi$, где χ - коэффициент теплопроводимости.
Число Прандтля $Pr = \nu/\chi$
Число Шмидта $Sci = \nu/Di$

Течение при малых числах Рейнольдса называются ползущими(-чими?)
При малых числах Рейнольдса имеем Уравнения Стокса(линейные).
Решаем:

1. разложение в ряды Фурье
2. методы ТФКП
3. вариационные методы
4. метод граничных интегральный уравнений

Для вязкой жидкости не выполняется парадокс Даламбера, так как там есть сила, выражение которой называют формулой Стокса.

Парадокс Стокса - если обтекать не сферу, а цилиндр, то решения уравнений Стокса не будет :(Аналогично не работает все на плоскости.
Там у Стокса что-то плохо при приближении на бесконечности. Решил Озин, он вывел более точное приближение.

Регулярное возмущение - решение “близко” к невозмущенному везде. Сингулярное - существует пограничный слой, в котором решение сильно отличается от невозмущенного, вне слоя - ок.

Автомодельное решение

много всего нужного

Математика

Зейдель
В процессе итерационных методов тип матрицы не меняется, поэтому круто для, например, разреженных матриц (прямые методы меняют 0 на не 0, поэтому разреженная матрица становится неразреженной).
Метод Зейделя - разбиваем на две диаг. матрицы и для нижней части подставляем уже подсчитанные значения.
Достаточное усл-е сходимости в нем $||c1|| + ||c2|| < 1$.
Для симм. пол. опр. матрицы метод сх-ся всегда со скоростью геом. прогрессии.
Метод посл. релаксации - дополнительный коэффициент omega, чтобы увел/умен. шаг.
Для симм. пол. опр. матрицы метод сходится при любом коэф. omega
Экспериментально можно поискать опт. коэф.

Методы спуска. Ищем минимумы фун-ий многих перем-х.
Необх. усл. минимума - первые частные пр-е равны 0.
Мы смотрим только ф-и квадратичные.
Метод спуска - на каждом шаге уменьшаем значение.
Послед-сть точек приближения - траектория спуска
Покоорд. спуск - аналог Зейделя.
Наиск. спуск - напр.спуска=антиградиент. Крут для сфер(кругов).
проблема для наиск. метода - если уровни “овражьи”, то есть вытянутые, овальные.

Метод Ньютона-Котеса удобнее Лагранжа тем, что в нем легко повысить степень полинома.

Билеты

> – готов
> – не готов
> – только формулировки
> – проходили, но в билеты не включено
> 割 – было у прошлых курсов
> – требует обновления/проверки

Часть 1. Механика сплошной среды.

1. Модель идеальной среды. Уравнения Эйлера динамики идеальной среды.

Модель:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V}) \\ \rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla\vec{P} + \rho\vec{f} \\ \rho\frac{dE}{dt} = \vec{P} : \vec{S} - \nabla\vec{q} + \rho Q \end{cases}$$

Где $\vec{P}, \vec{q}$ - потоки, а $\vec{f}, Q$ - источники

> **Идеальная среда** - среда, в которой отсуствуют касательные напряжения. Рассматриваются только нормальные напряжения, описываемые давлением.

Уравнение движения сплошной среды:

$$\rho[\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}] = -\nabla p + \rho\vec{f}$$

❎ 2. Уравнение переноса вихря в идеальной среде. Теорема Лагранжа.

Уравнение переноса вихря в идеальной среде:

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{V} - \vec{\Omega}(\nabla \cdot \vec{V})$$

> **Теорема Лагранжа:** при баротропном течении идеальной среды в потенциальном поле объёмных сил завихренность сама не зарождается

❎ 3. Постановка краевых задач для уравнений Эйлера, в т.ч. в терминах скалярного потенциала и функции тока.

Внутренняя краевая задача:

1. $\nabla^2\phi = 0 \Leftrightarrow \nabla^2\vec{A} = 0$
2. $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_s = V_n^0(\vec{r_s}) \Leftrightarrow (\nabla \times \vec{A})\vec{n}|_s = V_n^0(\vec{r_s})$

Внешняя краевая задача:

1. $\nabla^2\phi = 0 \Leftrightarrow \nabla^2\vec{A} = 0$
2. $V_n|_s = V_n^0(\vec{r_s}) \Leftrightarrow \nabla\phi\vec{n}|_s = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_s$
3. $\nabla\phi|_{|\vec{r}|\to\infty} \to \vec{V_\infty} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{A}|_{|\vec{r}|\to\infty} \to \vec{V_\infty}$

❎ 4. Разрешимость типовых краевых задач для уравнений Пуассона и Лапласа, альтернатива Фредгольма.

	W_{ex}	W_{in}
1род	$\nabla^2 U = Q(\vec{r}), U\|_s = q(\vec{r_s})$ *on* S	$\nabla^2 U = Q(\vec{r}), U\|_s = q(\vec{r_s})$ *on* S
2род	$\nabla^2 U = Q(\vec{r}), \frac{\partial U}{\partial n} = q(\vec{r_s})$ *on* S	$\nabla^2 U = Q(\vec{r}), \frac{\partial U}{\partial n} = q(\vec{r_s})$

Всё, кроме выделенного красным, разрешимо без проблем

Альтернатива Фредгольма:

1. Решение существует, и их может быть несколько ($\oint_S qdS = \int_W QdW$)
2. Решение НЕ существует

❎ 5. Интегралы Бернулли и Лагранжа-Коши.

Интеграл Лагранжа-Коши:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \vec{P}? + \Pi = const(\vec{r}) = f(t)$$

Необходимые условия:

1. Идеальная среда
2. Баротропное течение
3. Консервативная объёмная сила
4. Отсутствие начальной завихренности

Интегралл Бернулли:

$$\frac{V^2}{2} + \vec{P}? + \Pi = const(\vec{r})$$

Необходимые условия:
1-4. - те же
5. Стационарное течение

❎ 6. Простейшие течения идеальной несжимаемой среды. Течения, индуцированные линейным, точечным и дипольным источниками.

1. Однородный поток
   Поле скоростей - константа (как квазитвёрдное)

   $$\vec{V}(\vec{r}) = \overrightarrow{V_0} = const(\vec{r})$$
   $$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \nabla \times \vec{V} = 0$$
   $$\overrightarrow{V_0} = \nabla\phi, V_{0_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow \phi(\vec{n}) = \phi(x_1, x_2, x_3) = V_{0_1}x_1 + V_{0_2}x_2 + V_{0_3}x_3 + C$$

2. Линейный источник
   Трубка с дырками, из которой выходит воздух

   > **q** - объём жидкости, который вытекает из трубки на единицу длины называется **интенсивностью линейного источника**

   $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \alpha \\ z \end{pmatrix}$$
   $$V(\rho) = \frac{q}{2\pi\rho}$$
   $$\phi(\rho, \alpha, z) = \frac{q}{2\pi} ln(\rho) + C = const(\alpha, z)$$

3. Точечный источник
   Маленький (точечный) шарик с дырками

   > **Q** - интенсивность точечного источника

   $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
   $$\vec{V}(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} V_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\phi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi r} - C = const(\alpha, \beta)$$

4. Дипольный источник

   > D - дипольный момент $Qd\overrightarrow{r_1}$

$$\phi_{-2}(\vec{r}) = (\overrightarrow{n_1} \cdot \nabla)\phi_{-1}(\vec{r})dr_1 = \frac{\vec{D}\overrightarrow{e_r}}{r\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

❎ 7. Течения, индуцированные мультипольным источником. Понятие о сферических функциях.

Мультиполе:

$$\phi_{-(k+1)}(\vec{r}) = (\overrightarrow{n_k} \cdot \nabla)\dots(\overrightarrow{n_1} \cdot \nabla)\phi_{-1}(\vec{r})dr_1 \dots dr_k \sim \frac{1}{r^{k+1}}$$

Введём семейство мультипольных потенциалов:

$$\phi_{-1}(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{S_0(\alpha,\beta)}{r}$$
$$\phi_{-2}(\vec{r}) = \frac{S_1(\alpha,\beta)}{r^2}$$
$$\vdots$$
$$\phi_{-k}(\vec{r}) = \frac{S_k(\alpha,\beta)}{r^k}$$

Получаем $S_0(\alpha,\beta),\ S_1(\alpha,\beta),\ \dots S_k(\alpha,\beta)$ - сферические функции

❎ 8. Парадокс Даламбера.

> **Парадокс Даламбера:** при стационарном безвихренном обтекании неподвижного тела потоком идеальной несжимаемой среды, среда не оказывает никакого силового воздействия
>
> В жизни всё ОК, потому что ~~невозможно~~ тяжело сделать идеальную среду

❎ 9. Модель бесстолкновительной среды. Формальное решение задачи о переносе в бесстолкновительной среде в одномерном случае. Критические условия возникновения перехлеста в одномерном случае.

❎ 10. Формальное решение задачи о переносе в бесстолкновительной среде в трехмерном случае. Критические условия возникновения перехлеста в трехмерном случае.

❎ 11. Модель вязкой несжимаемой жидкости. Простой и обобщенный закон Ньютона для вязкой несжимаемой жидкости.

❎ 12. Уравнения Навье-Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости и их свойства.

❎ 13. Постановка краевых задач для уравнений Навье-Стокса.

❎ 14. Точные решения уравнений Навье-Стокса. Течение Пуазейля.

❎ 15. Безразмерная форма уравнений Навье-Стокса. Числа подобия. Понятие физического подобия.

Имеется система уравнений вязкой жидкости:

$$\begin{cases} \nabla\vec{V} = 0 \\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\vec{V}\cdot(\nabla\vec{V}) - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{f} \end{cases}$$

где t - время, ν - коэффициент кинематической вязкости, ρ - плотность, p - давление, $\vec{V}$ - векторное поле скорости, $\vec{f}$ - векторное поле массовых сил.

Введём обозначение:

$x = [x]\tilde{x}$, где x - реальная величина, $[x]$ - масштаб, $\tilde{x}$ - берзразмерная величина

Тогда все величины примут вид:

$$t = [t]\tilde{t} \quad p = [p]\tilde{\vec{p}} \quad T = [T]\widetilde{T}$$
$$\vec{r} = [r]\tilde{\vec{r}} \quad \vec{V} = [V]\widetilde{\vec{V}} \quad \vec{f} = [f]\widetilde{\vec{f}}$$

$\nabla = \frac{1}{[r]}\widetilde{\nabla} \Leftrightarrow (\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{[r]}\frac{\partial}{\partial \tilde{x_1}}, \ldots, \ldots) \Rightarrow \nabla\vec{V} = \frac{[V]}{[r]}\widetilde{\nabla}\widetilde{\vec{V}}$

Тогда уравнение Навье-Стокса примет вид:

$\frac{[V]}{[t]}\frac{\partial\widetilde{\vec{V}}}{\partial\tilde{t}} + \frac{[V]^2}{[r]}(\widetilde{\vec{V}} \cdot \widetilde{\nabla}) \cdot \widetilde{\vec{V}} = -\frac{1}{\rho}\frac{[\rho]}{[r]}\widetilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{\nu[V]}{[r]^2}\widetilde{\nabla}^2\widetilde{\vec{V}} + [f]\widetilde{\vec{f}}$

$(\frac{[r]}{[V][t]})_{(1)}\frac{\partial\widetilde{\vec{V}}}{\partial\tilde{t}} + (\widetilde{\vec{V}} \cdot \widetilde{\nabla})\widetilde{\vec{V}} = -(\frac{[p]}{\rho[V]^2})_{(2)}\widetilde{\nabla}\tilde{p} + (\frac{\nu}{[V][r]})_{(3)}\widetilde{\nabla}\widetilde{\vec{V}} + (\frac{[f][r]}{[V]^2})_{(4)}\widetilde{\vec{f}}$

❎ 16. Течения вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Уравнения Стокса и методы их решения.

❎ 17. Задача Стокса об обтекании сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Парадокс Стокса и его решение Озееном.

❎ 18. Течения вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Понятие об идеальном ядре потока и вязком пограничном слое. Связь с понятием сингулярного возмущения.

Часть 2. Численные методы.

❎ 1. Понятие о методах спуска решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы покоординатного и наискорейшего спуска. Методы сопряженных направлений.

Требуется решить систему вида $A\vec{x} = \vec{B}$, где A - симметричная, положительно определённая матрица (можно сделать такой).

Предлагается построить функцию, у которой минимум совпадает с решением исходной системы:

$F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$

НиД условие минимума:

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0, k = 1..n$

Сведём задачу к поиску минимума:

$\overrightarrow{x^0}$ - начальное приближение, p_0 - начальное направление спуска

1. Покоординатный спуск
   В качестве направления берём направление оси

Алгоритм:

```
function f: R^n -> R
vector   x: R^n (x1, x2, ..., xn)

while (true)
    for i = 1..n:
        R xi' = optimize (f, x, i) // Одномерная оптимизация
        vector x' = (x1, x2, ..., xi', ..., xn)

        if (good_enough (f, x, x')) // Проверка остонова
            return x
        else
            x = x'
```

Критерии остонова (*good_enough*):

1. $\|x^{[k+1]} - x^{[k]}\| < \epsilon$
2. $\|f(x^{[k+1]}) - f(x^{[k]})\| < \epsilon$

2. Наискорейший спуск
Направление - антиградиент

$$\overrightarrow{p_k} = -g_k$$

$$\alpha_k = \frac{(\overrightarrow{g_k}, \overrightarrow{g_k})}{(A\overrightarrow{g_k}, \overrightarrow{g_k})}$$

(Не лучший метод в плане сходимости)

3. Метод сопряжённых направлений (градиентов)
Семейство векторов, сопряжённых относительно матрицы

1. $\overrightarrow{p^0} = -\overrightarrow{g^0}$
2. $\overrightarrow{p^k} = -\overrightarrow{g^k} + \beta^{k-1}\overrightarrow{p^{k-1}}$
3. $\beta^{k-1} = \frac{(A\overrightarrow{p^{k-1}}, \overrightarrow{g^k})}{(A\overrightarrow{p^{k-1}}, \overrightarrow{p^{k-1}})}$

Спускаться по таким векторам до выполнения условия остонова:

1. $\|\overrightarrow{x^k} - \overrightarrow{x^{k-1}}\| \leq \epsilon$
2. $\|A\overrightarrow{x^k} - \vec{B}\| = \|\overrightarrow{g^k}\| \leq \epsilon$

❎ 2. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений (обзор).

1. Метод простых итераций

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{x})$$

Получаем последовательность:

$$\overrightarrow{x^0}$$
$$\overrightarrow{x^1} = \vec{\phi}(\overrightarrow{x^0})$$
$$\overrightarrow{x^2} = \vec{\phi}(\overrightarrow{x^1})$$
$$\vdots$$

$\overrightarrow{x^{k+1}} = \vec{\phi}(\overrightarrow{x^k})$

$\vdots$

Теорема о сходимости:

Если $\| \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{x}} \| \le q < 1$ в ϵ окрестности решения $\bar{\vec{x}}$, и $\overrightarrow{x^0}$ в той же окрестности, то метод сходится.

Оценки:

1. $\|\overrightarrow{x^k} - \bar{\vec{x}}\| \le q^k \|\overrightarrow{x^0} - \bar{\vec{x}}\|$ - априорная оценка
2. $\|\overrightarrow{x^k} - \overrightarrow{x^{k-1}}\| \le \epsilon \frac{1-q}{q}$ - апостриорная оценка

2. Поправка Зейделя:

$\overrightarrow{x^{k+1}} = \vec{\phi}(\overrightarrow{x^k})$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \phi_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \phi_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \phi_n(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k) \end{cases}$$

3. Метод последовательных релаксаций

$\bar{\vec{x}} = \phi(\overrightarrow{x^k})$

$\overrightarrow{x^{k+1}} = \omega \overrightarrow{\bar{x}^{k+1}} + (1-\omega)\overrightarrow{x^k} = \overrightarrow{x^k} + \omega(\overrightarrow{\bar{x}^{k+1}} - \overrightarrow{x^k}) = \overrightarrow{x^k} + \omega \Delta \overrightarrow{x^{k+1}}$

4. Метод Ньютона

$\vec{f}(\bar{\vec{x}}) = 0$

$\vec{f}[\overrightarrow{x^0} + (\bar{\vec{x}} - \overrightarrow{x^0})] = 0$

Ряд Тейлора: $\vec{f}(\overrightarrow{x^0}) + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_{\overrightarrow{x^0}} \cdot (\bar{\vec{x}} - \overrightarrow{x^0}) + \xcancel{\ldots} = 0$

❎ **3. Интерполяция функций одной переменной. Интерполяционный полином в формах Лагранжа и Ньютона-Котеса.**

❎ **4. Понятие о стратегии интерполяции. Теоремы Фабера и Чебышева о стратегии интерполяции. Универсальная стратегия интерполяции Чебышева.**

❎ **5. Интерполяция сплайнами. Степень гладкости и дефект сплайна. Типовые сплайны третьего порядка.**

❎ **6. Аппроксимация функций одной переменной. Метод наименьших квадратов.**

❎ **7. Численное нахождение собственных чисел матриц. Метод Рэлея и метод QR-разложения.**

❎ **8. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Оценка погрешности.**

❎ **9. Способы вычисления кратных определенных интегралов. Метод Монте-Карло для вычисления определенных интегралов.**

❎ **10. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенного относительно производной. Явный и неявный методы Эйлера.**

❎ **11. Численная реализация неявных методов решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной (на примере неявного метода Эйлера).**

❎ **12. Одношаговые методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Методы Рунге-Кутты.**

❎ **13. Многошаговые методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Методы Адамса-Бэшфорта и Адамса-Моултона, метод «предиктор-корректор».**

❎ **14. Численное решение задачи Коши для систем ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производных, и для ОДУ высокого порядка, разрешенного относительно старшей производной.**

❎ **15. Понятие жестких дифференциальных уравнений и систем. Связь с понятием сингулярного возмущения и особенности численного решения. Алгоритмы Гира.**

❎ **16. Численное решение краевых задач для ОДУ. Сведение к задачам Коши.**

❎ **17. Конечно-разностный метод численного решения краевых задач для ОДУ. Разрешимость краевых задач для ОДУ, альтернатива**

Фредгольма.

❎ 18. Криволинейные координаты. Координатные линии и поверхности, локальный базис, ортогональные координаты. Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах.