Функциональный анализ (6 семестр)

Скачать PDF | Открыть на HackMD

Ссылки

Конспект + теормин от Артёма Жолуса:

- Линейные операторы в банаховых пространствах
  - Сопряженный оператор
  - Ортогональное дополнение в банаховых пространствах
- Элементы спектральной теории линейных операторов
  - Определение спектра и резольвенты оператора
  - Альтернатива Фредгольма-Шаудера
- Теорема Гильберта-Шмидта

Конспекты: Дина, Аня, Рома

Гуглодоки: 5 семестр + 6 семестр

Викиконспекты: Функциональный анализ + теормин + ещё конспект

Полезное: лекции МГУ, ВШЭ

Напоминания

Векторное (или линейное) пространство — набор векторов, для которых определены операции сложения и умножения на скаляр + 8 аксиом.

Метрическое пространство — множество с метрикой $(X,\ \rho : X \times X \to \mathbb{R})$.

Полное метрическое пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность ($\{x_n\} : \rho(x_i, x_j) \to 0$) сходится к элементу этого же пространства.

Нормированное пространство — векторное пространство с нормой.

Банахово пространство — нормированное векторное пространство $B = (X, \|\cdot\|)$, полное по метрике, порождённой нормой.

Евклидово/Унитарное пространство — векторное пространство над $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ с определенным скалярным произведением.

Сепарабельное пространство — пространство (X, T), в котором есть счетное всюду плотное подпространство $E : Cl(E) = X$.

Гильбертово пространство — унитарное пространство H, полное по метрике, порожденной нормой.

Компактное пространство — топологическое пространство, в любом покрытии которого открытыми множествами найдётся конечное подпокрытие.

Множество **относительно компактно**, если его замыкание компактно.

Пусть X — метрическое пространство, A, B — множества, $\varepsilon > 0$. Тогда A называется **ε-сетью** для B, если $\forall b \in B \ \ \exists a \in A : \rho(a, b) < \varepsilon$

Метрическое пространство X **вполне ограничено**, если для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.

Пусть X — полное метрическое пространство, $E \subset X$. Тогда E – вполне ограничено $\Leftrightarrow$ E – относительно компактно.

Линейный оператор — отображение $A : X \to Y$, такое что $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$

Множество значений оператора — $R(A) := \{Ax \mid x \in X\}$

$L(X, Y)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов из X в Y, где **норма линейного оператора** — это $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Линейный оператор $A : X \to Y$ в нормированном пространстве называется **ограниченным**, если существует такое число $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$

Оператор A^{-1} называется **обратным** к оператору A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где $I : Ix = x$ — единичный оператор. Если выполняется только соотношение $A^{-1}A = I$ или только $AA^{-1} = I$, то оператор A^{-1} называется **левым обратным** или **правым обратным** соответственно. Если оператор A имеет левый обратный и правый обратный и они равны между собой, то оператор A является **обратимым**.

$X^* := L(X, \mathbb{R}) = \{f : X \xrightarrow[\text{непр}]{\text{лин}} \mathbb{R}\}$ – **сопряженное пространство** к X (над $\mathbb{R}$). Сопряжённое пространство всегда является банаховым пространством.

Равномерная сходимость — $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Пусть L — линейное пространство. **Собственным вектором** линейного преобразования $A : L \to L$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого $\lambda \in K$ выполняется равенство $Ax = \lambda x$.

Ортогональный (ортонормированный) базис — ортогональная (ортонормированная) система элементов линейного пространства со скалярным произведением, обладающая свойством полноты.

Лемма Рисса
Пусть Y — нормированное пространство, X — его собственное подпространство ($X \subsetneq Y$). Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует точка $z_\varepsilon : \|z_\varepsilon\| = 1,\ p(z_\varepsilon, X) \geq 1 - \varepsilon$

Теорема Банаха о гомеоморфизме
Пусть $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, причем осуществляющий биекцию, тогда A^{-1} — ограниченный линейный оператор.

Полунорма — норма, которая может быть равна нулю на ненулевых точках.

Теорема Хана-Банаха и следствия
Пусть X, Y - линейные многообразия над полем $\mathbb{R}$ такие, что $X \subset Y$, $p(y)$ – полунорма на Y, $f : X \to \mathbb{R}$ – линейный функционал, $|f(x)| \leq p(x)$ на X. Тогда существует линейный функционал $g : Y \to \mathbb{R}$, такой что:

1. $g|_X = f$ (сужение линейного функционала g на X равно f)
2. $|g(y)| \leq p(y)$ на Y

Билеты

> – готов
> – не готов
> – только формулировки
> – проходили, но в билеты не включено
> – было у прошлых курсов
> – требует обновления/проверки

Если не оговорено иного, считаем, что мы находимся в B-пространствах.

1. Норма сопряженного оператора

Введём на X^* норму как **норму линейного функционала**: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Пусть X, Y - нормированные пространства, $A \in L(X, Y)$ - линейный ограниченный оператор: $X \to Y$, $\varphi \in Y^*$.
Рассмотрим $f(x) = \varphi(Ax)$, $|f(x)| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|$, $f \in X^*$.
Тогда **сопряженный оператор** к A это $A^*(\varphi) := \varphi \circ A$, где $A^* : Y^* \to X^*$.

Утверждение: Если A непрерывный, то A^* тоже непрерывный.

Теорема: $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 1.2
- Дина: 1 стр.

1.5. Общий вид линейных функционалов в пространстве Гильберта

Теорема (Рисс)
Пусть H – гильбертово пространство. Тогда $\forall f \in H^*$, f можно представить как $f(x) = \langle x, y \rangle$, где $y \in H$ – единственна, $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 1.3
- Дина: 3 стр.
- МГУ: 6 стр.

2. Ортогональные дополнения X и X^*

Пусть $S \subset X$. **Ортогональное дополнение** в B-пространстве это $S^\perp := \{f \mid f \in X^*, \forall x \in S \Rightarrow f(x) = 0\}$

Пусть $S \subset X^*$. **Ортогональное дополнение** в сопряженном пространстве это
$S^\perp := \{x \mid x \in X, \forall f \in S \Rightarrow f(x) = 0\}$

Теорема: $X^\perp = X^{*\perp} = \{0\}$

Доказательство:

- **Жолус**: Утверждение 1.4
- Дина: 5 стр.

3. Ортогональное дополнение $Ker(A^*)$

Пусть $A \in L(X, Y)$.
$Ker\ A = \{x : Ax = 0\}$ – **ядро оператора** A
$R(A) := \{Ax \mid x \in X\}$ – **множество значений оператора** A.

Теорема: $Cl\ R(A) = (Ker\ A^*)^\perp$

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 1.5
- Дина: 6 стр.

✔ 4. Ортогональное дополнение $Ker(A)$

Теорема: $R(A^*) = (Ker\ A)^{\perp}$, если $R(A)$ замкнуто.

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 1.6
- Дина: 7-8 стр.

✔ 5. Априорная оценка решения $y = Ax$и замкнутость $R(A)$

Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор и $\exists \alpha = const : \|x\| \le \alpha * \|y\|$, где $y = Ax$.

Коэффициент α называется **априорной оценкой** решения операторного уравнения.

Теорема: Если A – линейный оператор, такой что для уравнения $y = Ax$ существует априорная оценка, то $R(A)$ – замкнуто.

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 1.7
- Дина: 8 стр.

✔ 6. Определение спектра и резольвенты, замкнутость спектра

$I : Ix = x$ — **тождественный оператор**

Регулярная точка оператора A — это такая $\lambda \in \mathbb{C}$, что оператор $\lambda I - A$ непрерывно обратим (то есть $(\lambda I - A)^{-1}$ непрерывен).

Резольвента — $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\text{– регулярная точка } A\}$

Резольветный оператор — $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$

Спектр оператора — $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

Утверждение: $\rho(A)$ является открытым в $\mathbb{C}$.
Следствие: $\sigma(A)$ является замкнутым в $\mathbb{C}$.

Доказательство:

- **Жолус**: Утверждение 2.1 и Следствие 2.2
- Викиконспекты (скриншот)
- Дина: 10 стр.

✔ 7. Спектральный радиус и его вычисление

Спектральный радиус: $r_\sigma(A) := \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$

Эквивалентное определение: $r_\sigma(A) := \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{(\|A^n\|)}$

Теорема: $r_\sigma(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{(\|A^n\|)}$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
- Жолус: Утверждение 2.4
- Дина: 11-12 стр.
- Рома: 5-7 стр.

- Аня: 9-11 стр.

✔ 8. Оценка протяженности спектра через спектральный радиус

Утверждение: $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq r_\sigma(A)\}$

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 2.5
- Викиконспекты (скриншот)

✔ 9. Аналитичность резольвенты

Тождество Гильберта (+ доказательство): $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) * R_\lambda(A) * R_\mu(A)$

Утверждение: $R_\lambda(A)$, как функция из комплексного числа в ограниченный оператор, аналитична в $\rho(A)$ и в бесконечно удаленной точке комплексной плоскости.

Доказательство:
Примечание: в доказательстве рассматривается **аналитичность по Вейерштрассу** (в окрестности точки λ функция раскладывается в степенной ряд).

- **Викиконспекты** (скриншот)
- Аня: 9-10 стр.

✔ 10. Непустота спектра ограниченного линейного оператора

Теорема: Если оператор A ограничен, то $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
- Дина: 11 стр. (нет доказательства)

✔ 11. Теорема об отображении спектра полиномом

Лемма: $P(A)$ - непрерывно обратим $\Leftrightarrow 0 \notin P(\sigma(A))$

Теорема: $P(\sigma(A)) = \sigma(P(A))$ для произвольного полинома P.
Примечание: под действием полинома на множество понимается поточечное применение:
$P(S) = \{P(x) \mid x \in S\}$

Доказательство:

- **Додонов**: 1-2 стр.
- **Жолус**: Теорема 2.6
- Дина: 13 стр.

✔ 12. Элементарные свойства линейных компактных операторов (произведение ограниченного и компактного операторов, равномерный предел последовательности компактных операторов)

Оператор $A : X \to Y$ называется **компактным** (или вполне непрерывным), если он каждое ограниченное множество переводит в относительно компактное (т.е. $\forall M$ – ограниченного множества, $Cl\ A(M)$ – компактно).

Утверждение: Пусть A – компактный оператор, B – ограниченный оператор. Тогда AB и BA - компактные операторы.

Доказательство:

- **Додонов**: 3-4 стр.

- Жолус: Утверждение 2.8
- Дина: 16 стр.
- Рома: 7-8 стр.
- Аня: 16-17 стр.

Утверждение: A_n – компактные, $A_n \xrightarrow{\text{равн}} A$ в $L(X,Y) \Rightarrow A$ – компактный.

Доказательство:

- **Додонов**: 3-4 стр.

13. Компактность оператора, сопряженного с компактным оператором

Утверждение: A – компактный, тогда A^* – тоже компактный.

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
- Рома: 9 стр.
- Аня: 27 стр.

14. Базис Шаудера, координатное пространство

X - бесконечномерное B-пространство, $e_1, e_2 \ldots e_n, \ldots$ - линейно-независимые точки, такие, что любой $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, тогда $\{e_i\}$ — **базис Шаудера**.

Следует помнить, что не у любого B-пространства есть базис, но большинство типов пространств, например, $C[a,b]$, его имеет.

Определим F, как $\{\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots) \mid \exists x \in X : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \to x\}$— это линейное пространство.

Так как ряд сходится, можно определить **координатное пространство** F, состоящее из числовых последовательностей $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots)$, определив норму как $\|\alpha\| = \sup\limits_n \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|$.

Теорема: Координатное пространство F — банахово.

Доказательство:

- **Додонов**: 5-6 стр.
- Викиконспекты (не полное)
- Дина: 16-17 стр.
- Аня: 18 стр.

15. Почти конечномерность компактного оператора в пространстве с базисом Шаудера

Оператор A **конечномерный**, если $R(A)$ лежит в конечномерном пространстве.

Пусть X банахово и имеет базис Шаудера, $A : X \to X$ компактный, тогда в X существует последовательность конечномерных операторов B_n таких, что $\|B_n - A\| \to 0$

Доказательство:

- **Додонов**: 7-8 стр.
- Викиконспекты
- Дина: 17 стр.

✔ 16. Размерность $Ker(I - A)$ где A – компактный оператор

Теорема: A - компактный, $T = I - A$. Тогда $dim(Ker\ T) < +\infty$

Доказательство:

- **Жолус**: Утверждение 2.12

Примечание: последний переход в доказательстве осуществляется за счет применения леммы Рисса, что если X - бесконечномерное НП, то любой шар в нем – не компакт.

✔ 17. Замкнутость $R(I - A)$ где A – компактный оператор

Теорема: A - компактный, $T = I - A$, тогда $R(T)$ замкнуто, т.е $Cl\ R(T) = R(T)$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
- Жолус: Теорема 2.13 (не дописанное доказательство)

✔ 18. Существование N, начиная с которого $Ker(I - A)^n = Ker(I - A)^{n+1}$ где A – компактный оператор

Утверждение: Пусть $M_n = Ker((I - A)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, A – компактный оператор. Тогда $\exists n_0 : M_{n_0} = M_{n_0+1}$.

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)

✔ 19. Критерий равенства $R(I - A) = X$ где A – компактный оператор

Утверждение: Пусть A – компактный оператор на банаховом X, $T = I - A$. Тогда $R(T) = X \Leftrightarrow Ker(T) = \{0\}$.

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
  Примечание: предыдущее утверждение из доказательства – это утверждение из 18 билета.

✔ 20. Альтернатива Фредгольма-Шаудера

Теорема: Пусть $A : X \to X$ — компактный оператор и $T = \lambda I - A$. Тогда возможно только две ситуации:

1. $Ker\ T = \{0\}$, тогда $y = Tx$ разрешимо для любого y
2. $Ker\ T \neq \{0\}$, тогда $y = Tx$ разрешимо только для $y \in (Ker\ T^*)^{\perp}$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
  Примечание: первая теорема из параграфа в доказательстве это теорема из 17 билета. Общие теоремы о сопряженном операторе это 3 и 4 билеты.

✔ 21. Теорема о спектре компактного оператора

Теорема: A – компактный, тогда $\sigma(A)$ не более чем счётен и его предельной точкой может быть только 0.

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 2.14
- Викиконспекты

✔ 22. Вещественность спектра самосопряженного оператора

Оператор A в H называется самосопряжённым $(A = A^*)$, если $\forall x, y : \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Теорема: Спектр самосопряженного оператора в H – вещественный.

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)

✔ 23. Критерий включения в резольвенту самосопряженного оператора

Теорема: Пусть $A = A^*$ – самосопряжённый оператор. Тогда:
$\lambda \in \rho(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H : \|(\lambda I - \mathrm{A})x\| \geq m\|x\|$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)

✔ 24. Критерий включения в спектр самосопряженного оператора

Теорема: Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists x_n : \|x_n\| = 1,\ \|(\lambda I - A)x_n\| \to 0$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)

✔ 25. Оценка протяженности спектра самосопряженного оператора через его границы m_- и m^+

$m^+ = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ – верхняя граница
$m_- = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ – нижняя граница

Теорема: Для самосопряженного оператора A верно, что:

1. $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$
2. $m_-, m_+ \in \sigma(A)$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
  Примечание: критерий принадлежности спектру берется из 24 билета.

✔ 26. Теорема о спектральном радиусе самосопряженного оператора

Теорема: $r_\sigma(A) = \max\{|m_-|, |m_+|\}$ и $r_\sigma(A) = \|A\|$

Доказательство:

- **Викиконспекты** (скриншот)
  Примечание: первое равенство – тривиальное следствие билета 25 и $r_\sigma(A) := \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$

✔ 27. Теорема Гильберта-Шмидта о базисе из собственных векторов компактного самосопряженного оператора

Теорема: Пусть H – сепарабельное ГП, A – самосопряженный компактный оператор $H \to H$. Тогда из собственных векторов этого оператора можно построить ортонормированный базис.

Доказательство:

- **Жолус**: Теорема 3.10
- Викиконспекты

28. Следствие теоремы Гильберта-Шмидта о разложении компактного самосопряженного оператора и его резольвенты

Следствие: Пусть A - самосопряженный компактный оператор, тогда (из теоремы) для любого $x \in H$ можно построить:

$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n * \langle x, e_n \rangle * e_n$, а значит

$R_\lambda(A)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle / (\lambda - \lambda_n) * e_n$, где $e_1, e_2, \ldots$ — собственные вектора.

Доказательство:

- **Викиконспекты**

29. Теорема о положительности произведения положительных самосопряженных операторов

Пусть A - самосопряжённый оператор.

$A \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in H : \langle Ax, x \rangle \geq 0$
$B \geq A \Leftrightarrow B - A \geq 0$ (частичный порядок)

Пример: $A^2 \geq 0$, т.к. $\langle A^2 x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$

По теореме о спектральном радиусе самосопряжённого оператора получаем $0 \leq A \leq B \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$

Пусть $A, B \geq 0$ – самосопряженные, $AB = BA$. Тогда $AB \geq 0$.

Схема доказательства: Додонов

30. Существование сильного предела у монотонной, ограниченной последовательности самосопряженных операторов

Пусть $\exists M = const : A_n \leq A_{n+1} \leq M$. Тогда существует самосопряжённый A такой, что:

1. $\forall x \in H \Rightarrow Ax = \lim\limits_{n \to \infty} A_n x$
2. $A_n B = B A_n \Rightarrow AB = BA$

Схема доказательства: Додонов

31. Проекторы в гильбертовом пространстве – критерий

По основной теореме гильбертовых пространств, если H_1 – подпространство H, то $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Значит любой $x \in H$ представим в виде $x = x_1 + x_1^\perp$, где $x_1 \in H_1$ – единственный. Тогда $P_{H_1}(x) = P(x) = x_1$ — **проектор** H на H_1.

Теорема: Пусть $P : H \to H$ – ограниченный линейный оператор.
P – проектор на $H \Leftrightarrow P$ – самосопряженный и $P^2 = P$.

Схема доказательства: Додонов

32. Критерий разложения проектора в сумму проекторов

Проекторы P_1 и P_2 **ортогональны** ($P_1 \perp P_2$), если $P_1 \circ P_2 = 0$.

Утверждение: Пусть P_1, P_2 - проекторы. Тогда $P_1 + P_2$ - тоже проектор, если $P_1 \perp P_2$.

33. Критерий положительности разности двух проекторов

$P_2 \geq P_1 \Leftrightarrow P_2 - P_1 \geq 0$

Утверждение: Пусть P_1, P_2 - проекторы на H_1, H_2. Тогда $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_2 \circ P_1 = P_1 \Leftrightarrow H_1 \subset H_2$

34. Положительность $p(L)$ где p – положительный полином на $[m_{-}, m^{+}]$

Лемма: Пусть L – ограниченный самосопряженный оператор, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ – полином с вещественными коэффициентами. Если $p(t) \geq 0$ при $t \in [m_{-}, m^{+}]$, то $p(L) \geq 0$.

35. Определение и существование $f(L)$для непрерывной на $[m_{-}, m^{+}]$ функции f

Пусть A – самосопряжённый ограниченный оператор, m_{-}, m^{+} – его границы, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывна на $[m_{-}, m+]$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность полиномов $p_n : p_n \xrightarrow{\text{равн}} f$, которые аппроксимируют f.

Определим $f(L)$ как предел последовательности операторов: $f(L) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(L)$.

Теорема: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(L)$ всегда существует.

36. Свойства $f \to f(L)$(сохранение знака, нормы и арифметика)

1. $\forall x \in [m_{-}, m_{+}]\ f(x) \geq 0 \Rightarrow f(L) \geq 0$(сохранение знака)
2. $(f+g)(L) = f(L) + g(L)$
3. $(f \cdot g)(L) = f(L)g(L)$
4. $\|f(A)\| \leq \sup\limits_{\lambda \in [m_{-}, m+]} |f(\lambda)|$ (сохранение нормы)

37. Определение и существование $f(L)$для полунепрерывной сверху функции

Пусть L - самосопряжённый ограниченный оператор. f называется **полунепрерывной сверху** в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Из матана известно, что любая полунепрерывная сверху функция f является поточечным пределом убывающей последовательности непрерывных функций f_n.

Определим $f(L)$ как поточечный предел: $f(L)x = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(L)x$

Теорема: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(L)x$ всегда существует.

38. Определение спектральной функции самосопряженного оператора и ее основные свойства (сильная непрерывность справа, коммутируемость, монотонность)

Пусть A – самосопряжённый ограниченный оператор. Введём функции $P_\lambda(t)$:

$$P_\lambda(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \lambda \\ 0, & t > \lambda \end{cases}$$

Они являются полунепрерывными, поэтому их можно применить к оператору A. Можно показать, что получившиеся операторы будут проекторами.
Множество операторов $\{P_\lambda(A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ назовём **спектральным семейством** оператора A. Функцию, сопоставляющую λ оператор $P_\lambda(A)$, назовём **спектральной функцией** оператора A.

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow P_{\lambda_1} \leq P_{\lambda_2}$ (монотонность)

2. $\forall x\ P_\lambda x \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0+0]{} P_{\lambda_0}x$ (непрерывна справа)
3. $\lambda < m_- \Rightarrow P_\lambda = 0$
   $\lambda \geq m^+ \Rightarrow P_\lambda = I$
4. Проекторы $P_\lambda(A)$ коммутируют друг с другом и с любым B, который коммутирует с A.

39. Разложение самосопряженного оператора посредством спектральной функции

Пусть A – ограниченный самосопряжённый оператор и $f : R \to R$ непрерывна на $[m_-, m^+]$. Тогда $f(A, ?) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_\lambda$ (???), интеграл в смысле Римана-Стильтьеса, $f(A, ?) : H \to H$

40. Теорема о спектральном исчислении

Используя определение $f(L)$ для непрерывных функций f и тот простой факт, что при $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ будет $P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1} \perp P_{\lambda_4} - P_{\lambda_3}$, легко получаем следующую теорему.

Теорема: Пусть L – самосопряжённый оператор, P_λ – его спектральная функция, f – (???). Тогда:

1. $f(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP_\lambda$
2. $f(A)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP_\lambda(x)$
3. $\langle f(L)x, y\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle P_\lambda x, y\rangle$

Билеты ниже – то, что было у предыдущих курсов

XX. Локальная сходимость метода последовательных приближений

Пусть V – замкнутый шар в B-пространстве, x* из V, x*=T(x*), T ‘(x*)=0, где T’ – производная Фрише, тогда метод простых итераций, x_(n+1) = T(x_n) сходится к x*.

XX. Локальная сходимость метода Ньютона

Пусть X* : F(X*) = 0, и в некотором шаре с центром в X* это отоб. непрер. дифф-тся. Тогда в x0 ≈ x*: x_n+1 = x_n - F(x_n)/F’(x_n) - метод Ньютона будет сх. к x*. x_0 должна быть в окресности.

XX. Равномерный предел последовательности непрерывных,компактных операторов

T_n -> (равномерно) T на G, T_n(G) - относит. компакт. => T(G) - относит. компакт.

XX. Проекторы Шаудера

Пусть дано некоторое множество M из B-пространства. M – замкнуто, выпукло и ограничено.
Пусть T: M->M – компактный оператор(вполне непрерывный), Convex(T(M)) тоже относительный компакт. Возьмём eps-конечную сеть для Convex(T(M)), состоящую из y_j, где j = 1…p.
eps-проектор Шаудера: P_eps (y) = sum_{j=1}^p (гамма_j) (y) y_j, где
(alpha)_j (y) = eps - ||y - y_j||, if ||y - y_j|| < eps, 0 otherwise
gamma_j = alpha_j / (sum alpha_k)

XX. Теорема Шаудера о неподвижной точке

Пусть D - огр. замк., выпуклое множество, T - непр. комп. оператор заданный на D и непереводящий его в себя. Тогда у T на D сущ. хотя бы одна неподвижная точка.


That's all Folks!