11. Теорема об отображении спектра полиномом

Пусть X - нормированное пр-во,

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \text{ - полином}$$

$A \in \mathcal{L}(X)$ - непрерывный линейный оператор из X в X

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n \text{ - полиномиальный оператор}$$

$\sigma(A)$ - спектр A

Теорема: для спектра полиномиального оператора выполняется равенства

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$$

Док-во: понадобится следующее простое соображение:

1) Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X)$, $AB = BA$, $C = AB$, C - непрерывно обратим. (C^{-1} непрерывен).

Тогда A и B тоже непрерывно обратимы

Док-во: рассмотрим AC^{-1} и $C^{-1}A$. Тогда

$B(AC^{-1}) = (AB)C^{-1} = C \cdot C^{-1} = I$, то есть

AC^{-1} - правый обратный для B. Далее,

$(C^{-1}A)B = C^{-1}(AB) = C^{-1}C = I$, то есть

$C^{-1}A$ - левый обратный для B. Значит B - непрерывно обратим. Аналогично проверим обратимость A.

2) Пусть $\mu \in P(\sigma(A))$, значит $\mu = P(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(A)$.
Имеем $P(t) - \mu = P(t) - P(\lambda) = (t-\lambda)\, q(t)$, где q - полином. Значит, $P(A) - \mu I = (A - \lambda I)\, q(A)$.
Если $\mu \notin \sigma(P(A))$, то $P(A) - \mu I$ - непрерывно обратим. Тогда по установленному выше, $A - \lambda I$ непрерывно обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(A)$!!!
что противоречит исходному включению λ в $\sigma(A)$.
Поэтому, $P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A))$.

3) Пусть $\mu \in \sigma(P(A))$, но $\mu \notin P(\sigma(A))$. Тогда любой из корней λ_j уравнения $P(t) = \mu$ не принадлежит $\sigma(A)$. Поэтому операторы $A - \lambda_j I$ непрерывна обратимы. Но $P(t) - \mu = a(\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$.
Тогда $P(A) - \mu I = a(A - \lambda_1 I)^{r_1} \dots (A - \lambda_m I)^{r_m}$.
Здесь все операторы в правой части обратимы, поэтому $P(A) - \mu I$ — обратим, и $\mu \in \rho(P(A))$, что противоречит $\mu \in \sigma(P(A))$. Таким образом,
$\sigma(P(A)) \subset P(\sigma(A))$

4)
$$\left.\begin{array}{l} P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A)) \\ \sigma(P(A)) \subset P(\sigma(A)) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$$

12. Элементарные свойства линейных компактных операторов.

Утверждение 1. Пусть A - компактный оператор, B - ограниченный. Тогда AB и BA - компактные.

Док-во. Пусть M - ограниченное множество. Тогда по ограниченности B множества $B(M)$ ограничено и по компактности A множества $A(B(M))$ относительно компактно. Таким образом, AB — компактный оператор.

По компактности A множества $A(M)$ относительно компактно $\Leftrightarrow$ $A(M)$ вполне ограничено, то есть $\forall \varepsilon > 0$ у него существует конечная ε-сеть $y_1 \dots y_n$. Положим $z_j = B(y_j)$. Пусть $x \in M$, для Ax $\exists y_{j_0}$:

$\|Ax - y_{j_0}\| \leq \varepsilon$. Тогда $\|B(Ax) - z_{j_0}\| =$
$= \|B(Ax) - B(y_j)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax - y_j\| \leq \|B\| \cdot \varepsilon$.

Поэтому $z_1 \dots z_n$ — это конечная $\|B\| \cdot \varepsilon$ - сеть для $B(A(M))$. Значит, $B(A(M))$ вполне ограничено $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ относительно компактно, то есть BA — компактный оператор.

Утверждение 2. Пусть A_n - компактные операторы и $\|A_n - A\| \to 0$. Тогда A - компактный оператор.

Док-во: По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \|A_{n_0} - A\| \leq \varepsilon$. Пусть M - ограниченное множество. По компактности A_{n_0} для $A_{n_0}(M)$ существует конечная ε-сеть $y_1 \dots y_p$. Значит, для $x \in M$ существует y_{j_0}: $\|A_{n_0}x - y_{j_0}\| \leq \varepsilon$. Тогда будем $\|Ax - y_{j_0}\| \leq$
$\leq \|Ax - A_{n_0}x\| + \|A_{n_0}x - y_{j_0}\| \leq \|A - A_{n_0}\| \cdot \|x\| + \varepsilon \leq$
$\leq \varepsilon \cdot \|x\| + \varepsilon$. Но по ограниченности M, $\|x\| \leq a$ - const.
Таким образом, $y_1 \dots y_p$ - конечная $(a+1)\cdot\varepsilon$ -сеть для $A(M)$ и A - компактный оператор.

14. Базис Шаудера. Координатное пространство.

Пусть в B-пространстве X существует система точек $e_1 \dots e_n \dots$ такая, что $\forall x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum_1^\infty d_n e_n$. В этом случае $e_1 \dots e_n \dots$ называется базисом Шаудера.

Ясно, что точки базиса линейно независимы. Следует помнить, что не у любого B-пространства есть базис, но большинство, например, $C[a,b]$, его имеет.

Наличие базиса приводит к линейному отображению $x \mapsto d = (d_1 \dots d_n \dots)$ — координаты x. Это, в свою очередь, индуцирует так называемое координатное пространство F, состоящее из числовых последовательностей $d = (d_1 \dots d_n \dots)$: $\sum_1^\infty d_n e_n$ сходятся и норма $\|d\| = \sup_n \|\sum_1^n d_k e_k\|$

Теорема: Координатное пространство F является B-пространством.

Док-во: Пусть $d^{(m)}$ сходится в себе в F (то есть, фундаментальная и сходится к элементу F). Из определения нормы в F имеем: $\|d_p e_p\| = \|\sum_1^p d_k e_k - \sum_1^{p-1} d_k e_k\| \le 2\|d\|$

Поэтому из $\|d^{(m)}-d^{(n)}\| \to 0$ вытекает, что $\forall p \ |d_p^{(m)}-d_p^{(n)}| \to 0$. Значит, существуют пределы $d_p = \lim\limits_{m\to} d_p^{(m)}$. Проверим, что $d=(d_1 \dots d_p \dots) \in F$ и $d = \lim\limits_{m\to\infty} d^{(m)}$, тем самым, теорема будет доказана.

По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n, m \geq N \ \|d^{(m)}-d^{(n)}\| \leq \varepsilon$.

Тогда по определению нормы в F $\forall p \ \|\sum\limits_1^p (d_k^{(m)}-d_k^{(n)})e_k\| \leq \varepsilon$

Устремляя здесь $m\to\infty$ получаем $\|\sum\limits_1^p (d_k-d_k^{(n)})e_k\| \leq \varepsilon$.

Поэтому $d-d^{(n)} \in F$ и $\|d-d^{(n)}\| \leq \varepsilon$.

Так как $d = (d-d^{(n)})+d^{(n)}$, то $d\in F$ и $d = \lim d^{(n)}$, ч.т.д.

15. Почти конечномерность компактного оператора в пространстве с базисом Шаудера

В базисе Шаудера $\{e_n\}$ имеем $x = \sum_1^\infty d_k e_k = \sum_1^n d_k e_k + \sum_{n+1}^\infty d_k e_k = S_n(x) + R_n(x)$.

Рассмотрим линейный оператор $T: F \to X$ по формуле $T(d) = x = \sum_1^\infty d_k e_k$. Так как $S_n(x) \to x$, то $\|x\| \le \sup_n \|S_n(x)\| = \|d\|$. Таким образом, оператор T ограничен. Но T – биекция F на X. Поэтому по т. Банаха об обратном операторе $T^{-1}: X \to F$ ограничен. Значит, $\|d\| \le C \|x\|$, где $C = Const$. С другой стороны, $\|S_n(x)\| \le \|d\| \le C \cdot \|x\|$, то есть S_n – ограниченный оператор. Из равенства $I = S_n + R_n$ будет $\|R_n\| \le \|I\| + \|S_n\| \le 1 + C$

Оператор A называется конечномерным, если $R(A)$ лежит в конечномерном пространстве.

Теорема: Пусть X – B-пространство с базисом Шаудера, $A: X \to X$ – компактный оператор. Тогда в X существует последовательность конечномерных операторов B_n: $\|B_n - A\| \to 0$

Док-во: Имеем $I = S_n + R_n$, отсюда $A = S_n A + R_n A$.

Операторы $B_n = S_n A$ очевидно конечномерны.

Убедимся, что $\|B_n - A\| \to 0$. Пусть $\overline{V} = \{\|x\| \le 1\}$

По компактности A множество $A(\overline{V})$ относительно компактно. Значит, для $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $y_1 \dots y_p$. Имеем $\forall x \in \overline{V}$

(*) $$\|Ax - B_n x\| = \|R_n(Ax)\| \le \|R_n(Ax - y_j)\| + \|R_n y_j\| \le$$
$$\le (1+C)\|Ax - y_j\| + \|R_n y_j\|$$

Так как $y_j = S_n(y_j) + R_n(y_j)$ и $S_n(y_j) \to y_j$, то $\max\{\|R_n y_1\|, \dots \|R_n y_p\|\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, для $\forall n \ge N$ и всех $y_1 \dots y_p$ будет $\|R_n y_j\| \le \varepsilon$.

Поэтому для таких n из (*) получается

$$\|Ax - B_n x\| \le (1+C)\|Ax - y_j\| + \varepsilon.$$

Так как $y_1 \dots y_p$ — ε-сеть для $A(\overline{V})$, то для j_0 будет $\|Ax - y_{j_0}\| \le \varepsilon$. Значит,

$\forall x \in \overline{V}$ и $\forall n \ge N$ будет $\|Ax - B_n x\| \le (2+C)\cdot\varepsilon$

Поэтому $\|A - B_n\| \to 0$, ч.т.д.