Е. Глушанков,
П. Певзнер

Переключательная игра Шеннона

Нельзя ли без полного перебора?

Стремительное развитие в XX веке производства, экономики и транспорта поставило перед математикой новые проблемы. Как управлять современным предприятием, как спланировать большой комплекс работ, как составить удобное расписание движения поездов — со всеми этими вопросами инженеры стали обращаться к математикам. Однако методы классической математики, предназначенные, в основном, для решения задач физики и механики, не могли дать ответа на такие вопросы. Это привело к появлению новых математических дисциплин — теории игр, теории графов, теории кодирования и многих других, объединяемых сейчас названием «дискретная математика».

Первая работа по дискретной математике (она принадлежит Леонарду Эйлеру), появившаяся еще в 1736 году, была посвящена известной головоломке о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку по Кенигсбергу (план города изображен на рисунке) таким образом, чтобы выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Долгое время дискретная математика занималась почти исключительно головоломками, и поэтому находилась у серьезных математиков на положении Золушки. Однако уже в XIX веке дискретные методы применялись при изучении электрических цепей и молекулярных схем в химии.

Настоящий расцвет дискретной математики наблюдается в последние два—три десятилетия. Физика, химия, программирование, экономика, генетика, социология, лингвистика, антропология — это лишь часть длинного списка наук, в которых применяются методы дискретной математики.

В последнее время всеобщее внимание привлекли некоторые классические задачи дискретной математики, которые вот уже более ста лет ждут своего решения. Все эти задачи характеризуются тем, что если дан «кандидат в ответы», то очень легко проверить, действительно ли он является ответом, но очень трудно такой ответ найти; фактически приходится перебирать по очереди все возможные варианты.

С одной такой задачей занимающиеся математикой сталкиваются едва ли не каждый день. Это задача поиска доказательства данной теоремы. В самом деле, если доказательство дано, то проверить его правильность в принципе не трудно. Нужно лишь убедиться в том, что каждый шаг сделан в соответствии с правилами логики, а промежуточные утверждения следуют из аксиом и известных теорем. Но как это доказательство найти? Неужели перебирать все возможные рассуждения, начиная с аксиом? Если бы кто-нибудь мог объяснить, как он «догадывается», решая задачи, может быть, это помогло бы математикам научить машину делать то же самое.

А вот более простой пример: *задача о разбиении*. Пусть $A=\{s_1, \ldots, s_N\}$ — конечное множество, содержащее натуральные числа. Требуется разбить множество A на два подмножества I и J ($I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = A$) так, чтобы сумма элементов из I равнялась сумме элементов из J. Как и в предыдущем примере, для данного разбиения множества A на множества I и J очень легко проверить, равны ли соответствующие суммы. Но как найти искомое разбиение? К сожалению, наука не может пока предложить ничего существенно лучшего, чем перебор всех 2^N вариантов. Но уже при $N=100$ современной вычислительной машине понадобятся миллиарды лет для проведения такого перебора.

В настоящее время распространено мнение, что для некоторых задач (например, задачи о разбиении) ничего существенно лучшего, чем полный перебор, предложить невозможно. Именно поэтому каждый пример эффективного алгоритма в той ситуации, где раньше приходилось довольствоваться перебором, представляет большой интерес для науки, даже если сама ситуация «игрушечная». Об одном таком примере и пойдет речь в этой статье.

В начале 50-х годов выдающийся американский математик и инженер, создатель теории информации Клод Шеннон предложил схему перебора вариантов для шахматной программы. Почти все современные шахматные программы являются, по существу, различными реализациями этой схемы. Однако число вариантов, перебираемых программами, играющими по алгоритму Шеннона, оказалось столь велико, что ни памяти, ни быстродействия современных ЭВМ недостаточно для их реализации.

Шеннон пытался применить свои методы к некоторым другим играм. Он рассмотрел игру на графах, которая называется теперь *переключательной игрой Шеннона* (сокращенно — ПИШ).

В настоящее время предложено несколько подходов к программированию игр. О методе, основанном на переборе с отсечением бесперспективных (с некоторой точки зрения) вариантов, «Квант» уже писал*. Другой метод (на его основе в середине 60-х годов А. Леман предложил «идеального игрока» в ПИШ), связанный с полным отказом от перебора вариантов, опирается на некоторые новые результаты дискретной математики.

О том, как можно играть в ПИШ, не перебирая вариантов, мы и расскажем ниже.

Бридж-ит

В конце 50-х годов американец Гейл придумал игру Бридж-ит. Стандартное поле для игры Бридж-ит показано на рисунке 1. Один игрок соединяет синим карандашом синие точки, другой — красным карандашом красные. «Ходят» (то есть проводят отрезки) игроки по очереди. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны своего цвета (на рисунке 2 партия закончилась победой красных).

---

*) Р. С. Гутер, М. В. Донской. *Машина играет в шахматы* («Квант», 1974, № 11).

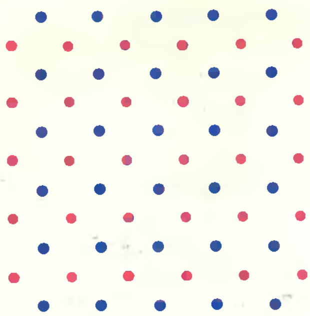

Рис. 1.

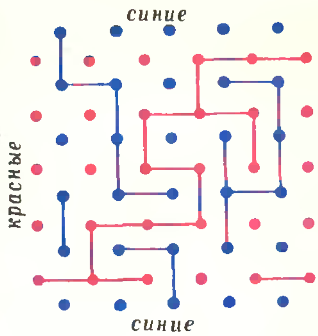

Рис. 2.

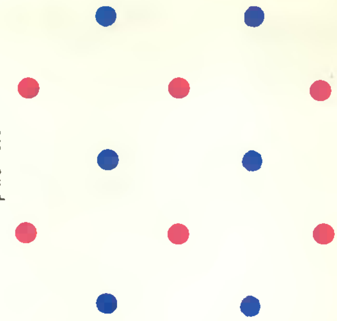

Рис. 3.

Попробуйте, поиграв в бридж-ит на маленьких полях (рис. 3), понять, у какого игрока — преимущество в этой игре, а затем попытайтесь разработать выигрышную стратегию для этого игрока.

Задача 1. Докажите, что в игре Бридж-ит «ничьих» не бывает.

Если в игре не бывает «ничьих», то один из игроков имеет выигрышную стратегию. Действительно, пусть, например, игрок A не имеет выигрышной стратегии, то есть на любой его ход у игрока B существует такой ответ, что игра не кончится победой A. Поскольку предположено, что в рассматриваемой игре нет «ничьих» партия кончится победой игрока B, то есть у B есть такая последовательность ходов, что, как бы ни играл A, все равно выиграет B. Таким образом, у игрока B существует выигрышная стратегия.

Только что приведенное рассуждение есть чистое доказательство существования: доказывается, что стратегия есть, но как ее найти — ни слова. А ведь это и есть самый интересный вопрос.

ПИШ

Чтобы описать выигрышную стратегию для игры Бридж-ит, перейдем от бридж-ит к ПИШ. Для этого изменим немного правила игры. На рисунке 4 все возможные ходы «синего» игрока отмечены синими отрезками, а «красного» игрока — красными. Мы будем называть такие рисунки «графами возможных ходов». Если вы уже поиграли в бридж-ит, то наверное поняли, что игрокам бессмысленно проводить отрезки, обозначенные на рисунке 4 пунктиром. Поэтому давайте вообще не будем их рассматривать и сделаем следующее: стянем все верхние точки в одну и то же самое сделаем с левыми, правыми и нижними точками (рис. 5). Теперь цель «синего» игрока — соединить путем из синих ребер вершины s и t, а цель «красного» — соединить красным путем вершины s' и t'.

Заметьте, что каждый красный отрезок пересекает ровно один синий. Поэтому, если «красный» игрок делает ход, то это, по существу, означает, что он делает невозможным один (и только один) ход «синего» игрока, то есть «красный» игрок своим ходом как бы в ы ч е р к и в а е т ребро синего графа. Но вместо того чтобы вычеркивать синее ребро, можно просто з а к р а с и т ь его красным цветом. Теперь мы можем вообще удалить красный граф из рисунка 5 и считать, что игра проходит так:

Два игрока по очереди красят ребра графа, у которого выделены вершины s и t: один — синим цветом, другой — красным (рис. 6). Цель «синего» игрока — соединить выделенные вершины путем*) из синих ребер, а цель «красного» игрока — помешать ему (что это значит, мы уточним позднее).

---

*) Напомним, что *графом* называется конечное множество точек (*вершин* графа) и соединяющих их отрезков (*ребер* графа). *Путь* — это линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Это и есть *переключательная игра Шеннона ПИШ)*. Только Шеннон предложил ее в более общей постановке: во-первых, играть можно на любом графе и, во-вторых, на данном графе можно выделить любую пару вершин.

Каждый граф с двумя выделенными вершинами задает некоторый *вариант* ПИШ. Первый ход в каждом варианте может делать любой игрок — как «синий», так и «красный». Поскольку «синий» игрок соединяет вершины, его уместно назвать *Соединяющим* или *С-игроком*. А красного игрока мы назовем *Режущим* или *Р-игроком*.

Совершенно очевидно, что «ничьих» в ПИШ не бывает — С либо соединит выделенные вершины, либо нет. Поэтому один из игроков в ПИШ имеет выигрышную стратегию. Но какой? Как найти эту стратегию?

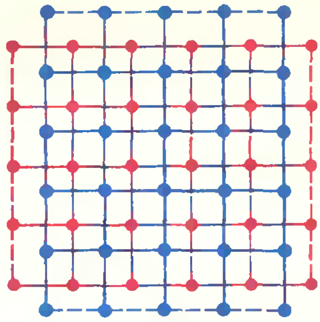

Рис. 4.

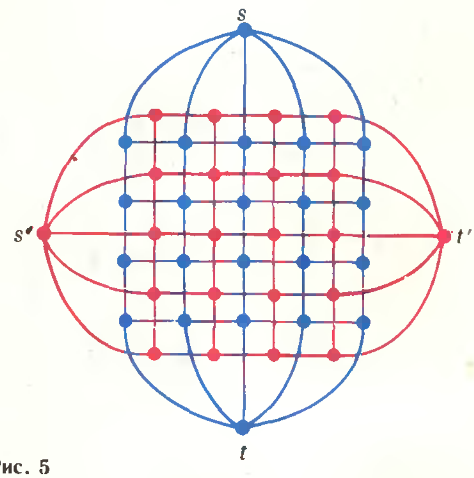

Рис. 5

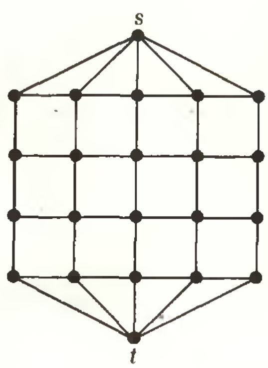

Рис. 6.

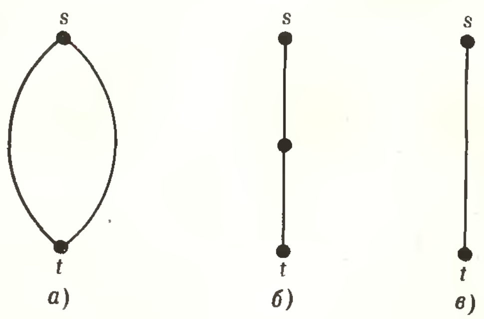

Рис. 7.

Классификация вариантов ПИШ

Заметим, что *если игрок, играющий вторым, имеет выигрышную стратегию, то он имеет ее и в том случае, когда играет первым.* Действительно, играя первым, он закрасит своим цветом любое ребро, а потом будет отвечать на ходы противника так, как он делал бы это, играя вторым. Если на каком-то шаге надо будет покрасить ребро, которое он покрасил раньше, то он покрасит произвольное ребро. Так он и будет играть, имея одно «лишнее» ребро своего цвета, которое, конечно же, не может помешать ему выиграть.

Таким образом, с точки зрения возможности выиграть для каждого варианта ПИШ возможен один и только один из следующих трех случаев:

1. соединяющий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;
2. режущий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;
3. выигрышную стратегию имеет игрок, делающий первый ход.

Варианты ПИШ первой группы мы назовем *С-играми*, второй —

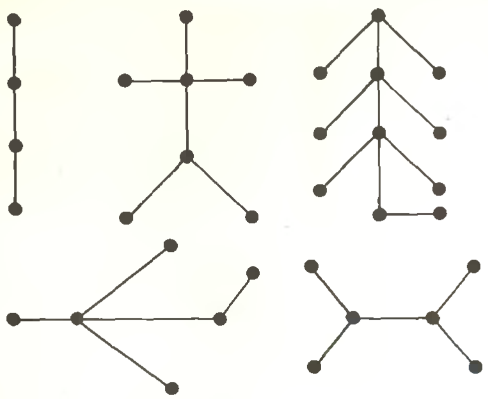

Рис. 8.

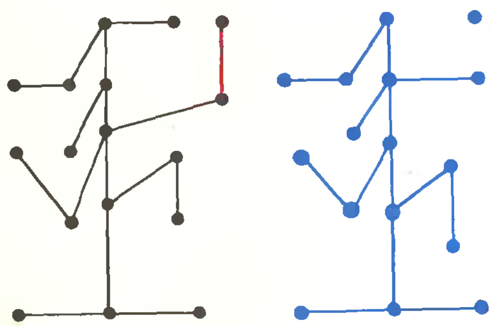

Рис. 9.

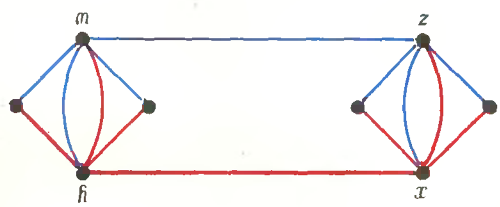

Рис. 10.

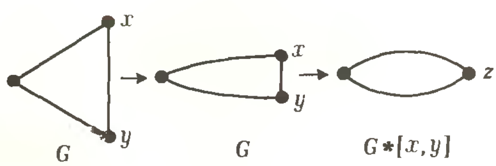

Рис. 11.

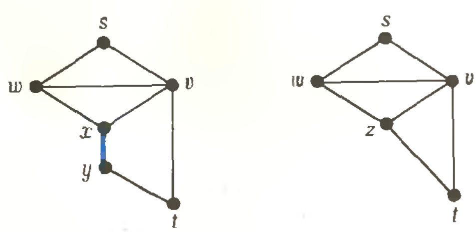

Рис. 12.

P-играми, третьей — *H-играми*. На рисунках 7, а) — в) изображены графы, дающие *C-игру*, *P-игру* и *H-игру* соответственно.

Задача 2. Докажите, что бридж-ит является *H*-игрой.

Немного теории

Давайте на некоторое время отвлечемся от игр и дадим несколько определений из теории графов, которые понадобятся в дальнейшем*.

Граф *G* называется *связным*, если в нем между любыми двумя вершинами существует путь. Несвязный граф представляет собой набор нескольких связных графов, каждый из которых называется его *компонентой*. Путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*. Если в связном графе есть цикл, то при удалении любого ребра из цикла граф остается связным. Связный граф без циклов называется *деревом*. Примеры деревьев приведены на рисунке 8.

Легко видеть, что удаление любого ребра из дерева приводит к графу ровно с двумя компонентами, причем концы удаленного ребра лежат в разных компонентах (рис. 9). Ребро графа с концами x и y будем обозначать $[x, y]$. Ту компоненту, которая образуется при выбрасывании ребра $[x, y]$ из дерева A и содержит вершину x, обозначим через $A(x)$, а ту, которая содержит вершину y, — через $A(y)$.

Лемма о двух деревьях. *Пусть A и B — два дерева на одном и том же множестве вершин и* $[x, y]$ *— ребро дерева A. Тогда в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в* $A(x)$, *а другой — в* $A(y)$ (рис. 10).

Новые правила игры

Чтобы научиться играть в ПИШ, мы опять немного изменим поле и правила игры. Для этого введем понятие стягивания графа.

---

*) Подробнее о графах рассказано, например, в книге Л. Ю. Березиной *«Графы и их применение»* (М., «Просвещение», 1979).

Давайте будем укорачивать ребро $[x, y]$ в графе G до тех пор, пока его концы не сольются в одну вершину z (рис. 11). Из вершины z выходят теперь все те ребра, которые раньше выходили из вершин x и y (кроме самого ребра $[x, y]$). Эта операция называется *стягиванием ребра $[x, y]$ в графе G*, а граф, получающийся в результате этой операции, называется *стягиванием графа G по ребру $[x, y]$* и обозначается $G * [x, y]$.

Понятно, что стягивание дерева по любому ребру — снова дерево.

Давайте теперь посмотрим на ПИШ как на преобразование графа.

Когда игрок P закрашивает какое-то ребро красным цветом, он, по существу, запрещает проведение синего пути через это ребро, то есть как бы у д а л я е т ребро. Поэтому мы будем считать, что P во время своего хода не красит ребро, а удаляет его из графа. (Граф, получающийся в результате удаления ребра a из G, мы будем обозначать $G \setminus a$.)

А что делает игрок C? Закрашивая ребро синим цветом, он, по существу, стягивает это ребро (рис. 12)*).

Итак, мы играем в ПИШ следующим образом: *игрок P удаляет ребра, а игрок C стягивает; при этом C выигрывает, если на некотором шаге вершины s и t сливаются в одну, а P выигрывает, если на некотором шаге граф становится несвязным и вершины s и t оказываются в разных компонентах.*

Граф в процессе игры все время изменяется: после того, как P удалит из G ребро a, а C стянет ребро b, игра будет вестись на графе $(G \setminus a) * b$.

Теорема Лемана

Леман доказал, что *вариант ПИШ является C-игрой тогда и только тогда, когда в исходном графе имеются два дерева на одном и том же множестве вершин**), содержащие вершины s и t и не имеющие общих ребер.*

Мы докажем здесь только «половину» теоремы Лемана: если в исходном графе имеются нужные деревья, то C-игрок имеет выигрышную стратегию. (Доказательство второй «половины» мы не приводим, так как оно весьма сложно.) Для доказательства нам понадобится следующая

Л е м м а. *Пусть в исходном графе G есть два дерева A и B, удовлетворяющие условию Лемана. Пусть игрок P удалил ребро $a \in A$. Тогда игрок C может стянуть некоторое ребро $b \in B$ так, что в новом графе $(G \setminus a) * b$ либо вершины s и t слились, либо вновь найдутся два дерева A^* и B^*, удовлетворяющие условию Лемана.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. После удаления ребра $a = [x, y] \in A$ дерево A разбивается на две компоненты: $A(x)$ и $A(y)$. По лемме о двух деревьях в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$. Поскольку деревья A и B не имеют общих ребер, $a \neq b$. Именно это ребро b и должен стянуть игрок C.

Пусть в графе $(G \setminus a) * b$ вершины s и t не слились, то есть $b \neq [s, t]$. Найдем тогда деревья A^* и B^*. Дерево B^* находится совсем просто — это $B * b$. Дерево A^* получается следующим образом: рассмотрим дерево, которое образуют компоненты $A(x)$, $A(y)$ и ребро b. Стянем это дерево по ребру b — это и будет дерево A^*.

Так как дерево A^* составлено из ребер дерева A, дерево B^* — из ребер дерева B, деревья A^* и B^*, так же как A и B, не имеют общих ребер. Очевидно, деревья A^* и B^* не пересекаются по ребрам и имеют одно и то же множество вершин, причем вершины s и t ему принадлежат.

Лемма доказана.

---

*) Для удобства обозначений будем считать, что если стягивается ребро, имеющее одним концом s (или t), то вершина, которая образуется в результате этого, снова будет называться s (соответственно t).

**) Это множество вершин в общем случае не совпадает с множеством вершин исходного графа.

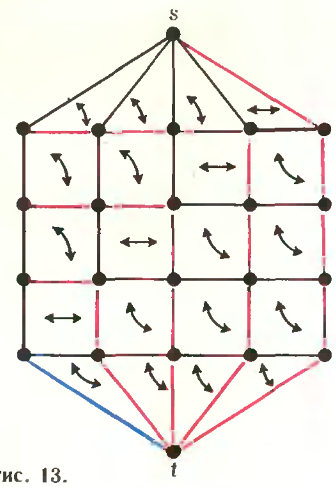

Рис. 13.

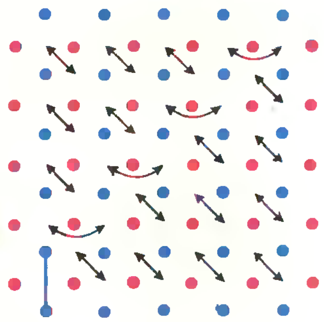

Рис. 14.

Эта лемма подсказывает стратегию для соединяющего игрока.

Цель игрока C — поддерживать в графе существование двух деревьев, удовлетворяющих условию Лемана (делая это, он обеспечивает существование двух путей между вершинами s и t, и игроку P никогда не удастся разъединить эти две вершины). И игрок C действительно может это сделать, если такие два дерева имелись в исходном графе. Если игрок P удаляет ребро a в одном из этих деревьев, то игрок C в ответ должен стянуть ребро из другого дерева, существующее по последней лемме. Если же игрок P удаляет ребро, которое не принадлежит ни одному из наших двух деревьев, то игрок C может стянуть ребро в одном из деревьев; ясно, что в новом графе по-прежнему найдутся два дерева Лемана (какие?).

После каждой пары ходов количество вершин в каждом из наших деревьев уменьшается на единицу, поэтому вершины s и t рано или поздно сольются и игрок C выиграет.

Мы научили вас играть в C-игру, используя два дерева Лемана. Но как находить эти деревья? Конечно, можно использовать полный перебор, однако это связано с огромными затратами времени даже на современных ЭВМ. Леману не удалось найти эффективного алгоритма для отыскания двух таких деревьев, поэтому некоторое время казалось, что теорема Лемана имеет лишь теоретический интерес. Только в начале 70-х годов Бруно и Вейнбергу удалось построить такой алгоритм.

На самом деле, Леман полностью решил переключательную игру Шеннона: он доказал также, что вариант ПИШ тогда и только тогда является P-игрой, когда в графе имеются два подграфа определенного вида. Если же вариант ПИШ является H-игрой, то после первого разумного хода мы получаем на новом графе вариант ПИШ, который является P-игрой или C-игрой — в зависимости от того, кто делал первый ход: P или C соответственно. Такой ход существует по определению H-игры. Найти этот ход в принципе можно перебором.

Стратегия для бридж-ит

Итак, мы рассказали, как играть в C-игры. Но ведь бридж-ит, согласно задаче 2, есть H-игра. Как же играть начинающему, чтобы выиграть?

Очевидно, что в игре бридж-ит начинающего можно считать C-игроком. Своим первым ходом он может стянуть, например, ребро, отмеченное на рисунке 13 зеленым цветом. В получающемся после этого хода графе имеются два дерева Лемана: они выделены на рисунке 13 красным и черным цветом. А затем игрок C может пользоваться описанной выше стратегией для C-игры. На рисунке 13 стрелочки расставлены таким образом, что если игрок P удаляет ребро, на которое указывает конец некоторой стрелочки, то игрок C в ответ должен стянуть ребро, на которое указывает другой конец этой же стрелочки (проверьте, что стрелочки расставлены в соответствии с доказанной леммой).

Задача 4. Укажите другие возможные «выигрышные» начальные ходы для игрока C.

Американский математик О. Гросс предложил ту же самую стратегию, что и на рисунке 13, задолго до Лемана, не сводя бридж-ит к ПИШ: По рецепту Гросса, для того чтобы выиграть, игрок C должен первым ходом провести отрезок, обозначенный на рисунке 14 синим цветом, а затем действовать так: если игрок P задевает своим ходом один конец некоторой стрелочки, то C ответным ходом должен задеть другой конец той же стрелочки.

А что дальше?

Научившись играть в ПИШ, Вы, возможно, уже задали себе вопрос: «А нельзя ли простые и эффективные дискретные методы, которые в случае с ПИШ привели к полному успеху, распространить на другие игры?» Попытки применить такие методы действительно были, однако они не дали результата даже для ближайшего «родственника» ПИШ — *вершинной переключательной игры Шеннона.* (Эта игра очень похожа на ПИШ, она также ведется на графе с двумя выделенными вершинами s и t, только красятся в ней не ребра, а вершины; при этом игрок C старается так покрасить вершины, чтобы от s к t можно было пройти путем, проходящим по вершинам своего цвета, а игрок P — помешать ему.) Более того, в 1976 году Ивен и Тарьян доказали, что найти выигрышную стратегию для вершинной переключательной игры Шеннона не менее просто, чем решить некоторые классические комбинаторные проблемы, для которых, как считают многие математики, вообще не существует эффективных алгоритмов решения. До окончательного решения подобных проблем еще далеко.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М581—М600 и Ф588—Ф602.

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М581, М582, М586—М590, М592.** Остальные задачи решили: *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **91**; *А. Авербах* (Донецк) **85а), 91, 94**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **91, 99**; *М. Агиштейн* (Москва) **96, 98, 00**; *Р. Ардан* (Львов) **84**; *Л. Арушанов* (Баку) **85а), б), 96, 98**; *Г. Баламетова* (Кусары) **91**; *А. Балинский* (Львов) **84, 85а), б), 91, 94, 96—99**; *А. Барг* (Николаев) **91**; *Г. Барздинь* (Рига) **85а), б)**; *Д. Батуров* (Орел) **96**; *А. Белозеров* (Одесса) **85а), б), 91**; *А. Белокопытов* (Киев) **85а), б)**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **85б), 95, 99**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **85а), б)**; *В. Бережной* (Киев) **91, 94—98, 00**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **93—98, 00**; *А. Бишичаев* (Алма-Ата) **98**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **91**; *А. Боровских* (Воронеж) **98**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **83, 85а), б), 91, 94, 95**; *Я. Брегман* (Киев) **85, 91, 94, 98—00**; *А. Бурин* (Москва) **83, 84, 85а), б), 91, 94, 95**; *Ю. Бушк* (Черемхово) **91**; *Э. Вайслеб* (Киев) **91**; *С. Василовский* (Ашхабад) **91, 95, 98—00**; *И. Владимиров* (Москва) **85, 91, 97—00**; *С. Волосивец* (Саратов) **91**; *А. Вольнов* (Киев) **91**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **85б), 91, 94**; *Д. Гешкенбейн* (Москва) **85**; *Л. Гитлин* (Витебск) **91, 94**; *Г. Гокадзе* (Кутаиси) **91**; *С. Горшков* (Москва) **98**; *Е. Горшкова* (Пермь) **96**; *А. Градинер* (Баку) **91, 94**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **98**; *Ш. Джафаров* (Кировабад) **91**; *Б. Добров* (Ангарск) **91**; *К. Дойнов* (НРБ) **96—99**; *И. Драголов* (НРБ) **91, 94**; *О. Драч* (Кривой Рог) **85б)**; *Д. Дуниев* (с. Аркиван АзССР) **91**; *И. Елишевич* (Чернигов) **91**; *Т. Енчев* (НРБ) **96—99**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **84, 85, 91, 93—96, 98—00**; *А. Жилинский* (г. п. Крупки Минской обл.) **85, 94, 95**; *Е. Жиляев* (Москва) **85а), б)**; *А. Золотых* (Курск) **96, 98, 00**; *Ю. Иванов* (Воронеж) **99, 00**; *Ю. Ильясов* (Сиазань) **91, 00**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **85а), б), 91, 93, 94**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **91, 95, 00**; *П. Калугин* (Москва) **84**; *Р. Камалян* (Ереван) **91**; *А. Каплан* (Сумгаит) **84, 91, 93—00**; *А. Квариани* (Кутаиси) **91**; *А. Келарев* (Свердловск) **85а), б), 91, 94, 95**; *И. Колпаков* (Сочи) **97, 99, 00**; *О. Крижановский* (Харьков) **85, 97, 98**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **91, 98**; *С. Курчатов* (Саратов) **91, 94**; *Б. Лапидус* (Москва) **84**; *Б. Лейтес* (Москва) **84, 85а), б)**; *А. Липин* (Ленинград) **85а), 91, 96, 98, 99**; *Д. Лихачев* (Владивосток) **95**; *А. Мамедов* (с. Саатло ГССР) **91**; *Г. Маримон* (Могилев-Подольский) **91**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **84, 85, 91, 94, 95**; *В. Мельник* (Гайсин) **91**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **85а), б), 91**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **84**; *С. Морейно* (Москва) **85а), б), 91, 95—00**; *Р. Набоков* (Саратов) **85**; *И. Нестеров* (Пскент) **85, 98**; *З. Нишниани* (Кутаиси) **91**; *С. Новаковский* (Саратов) **85, 91, 94, 96—00**; *В. Новохацкий* (Полтава) **91**; *П. Овчинников* (Вязники) **91, 00**; *М. Окроян* (Ереван) **91, 94**; *С. Осенний* (Киев) **84, 85а), б), 94**; *А. Павлычев* (Рига) **84, 91**; *Г. Перельман* (Ленинград) **85а), б), 91, 94, 96, 98—00**; *В. Пидстригач* (Львов) **84, 91, 93—96, 98—00**; *А. Поезд* (Москва)

(Продолжение см. на с. 33)