Экзамен по математическому анализу, 2 семестр

52 из 52 определений

42 - Виноградов или другой подробный источник

18 - скрины конспектов и ссылки, которые ведут на сторонние ресурсы из 60 теорем

Виноградов:

Том 1

Том 2

Полезные ссылки:

old school

old_school2

old_school3

https://github.com/volhovM/study-notes/blob/master/analysis/term2/analysis2.org

Математические символы:

Символы для заполнения дока

Символы для вставки: ℕ ℝ ℚ ℤ ℂ ∅

Определения (2 - 17 страницы)

Первообразная, неопределенный интеграл

Первообразная:

Функции F, f: <a,b> -> R

F называется первообразной для f (причем F - дифференцируема), если для любого x на <a,b> выполняется: F'(x) = f(x).

Неопределенный интеграл:

Функция F,f : <a,b> -> R, f непрерывна на <a,b>, F первообразная для f, то:

$\int f(x)dx = F(x) + C,$ где C = const.

Теорема о существовании первообразной

Если f(x) непрерывна на [a,b], то f имеет первообразную на [a,b], причем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt + C$$

Таблица первообразных

$$1)\ \int a\,dx = ax + c \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$2)\ \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

$$4)\ \int e^x\,dx = e^x + c.$$

$$5)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

$$6)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + c.$$

$$7)\ \int \cos x\,dx = \sin x + c.$$

$$8)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$$

$$9)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$10)\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0).$$

$$11)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \quad (a \neq 0).$$

$$12)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \quad (a > 0).$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Выпуклое множество

Множество, в котором все точки отрезка, образуемого любыми двумя точками данного множества, также принадлежат данному множеству (пример: круг - выпуклое множество, бумеранг - невыпуклое множество).

Выпуклая функция, строго выпуклая функция

Неформальное определение для того, чтобы понимать о чем речь:

Выпуклая функция — функция, у которой надграфик является выпуклым множеством.

Определения с точки зрения мат. анализа (через неравенство Йенсена):

Рассмотрим функцию $f: \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.

Определение 1.

1) Пусть для любых $a, b \in \langle A, B\rangle$ и $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Тогда f называется *выпуклой на* $\langle A, B\rangle$.

2) Пусть для любых $a, b \in \langle A, B\rangle$ $(a \neq b)$ и $\lambda \in (0,1)$ верно неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Тогда f называется *строго выпуклой на* $\langle A, B\rangle$.

Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Определение 1. Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок. Набор точек

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

называется *дроблением* или *разбиением* отрезка $[a, b]$. Отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ $(k \in [0 : n-1])$ называют *отрезками дробления*, через Δx_k обозначается длина k-го отрезка дробления: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Наибольшая из длин отрезков дробления, то есть величина

$$\lambda = \lambda_\tau = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta x_k,$$

называется *рангом* или *мелкостью* дробления τ. Набор точек $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$, таких что $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ при всех $k \in [0 : n-1]$, называется *оснащением* дробления. Дробление вместе с его оснащением, то есть пара (τ, ξ), называется *оснащенным дроблением*.

Риманова сумма

Определение. Пусть $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Суммы

$$\sigma = \sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

называются *интегральными суммами* или *суммами Римана* функции f, отвечающими оснащенному дроблению (τ, ξ).

Сумма Дарбу

Определение 5. Суммы Дарбу.
Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ — дробление $[a,b]$,

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \qquad k \in [0:n-1].$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются *верхней и нижней интегральными суммами* или *суммами Дарбу* функции f, отвечающими дроблению τ.

Интеграл Римана

Определение 4. Интеграл Римана. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$, равный числу I, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на $[a,b]$, а число I называется *интегралом* (*определенным интегралом, интегралом Римана*) от функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f$.

Верхний интеграл Дарбу

Определение 6. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Величины

$$I^* = \inf_\tau S_\tau, \quad \text{и} \quad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

называются *верхним и нижним интегралами Дарбу* функции f.

Критерии интегрируемости Дарбу и Риманаг

Замечание 4. Критерий Дарбу интегрируемости функции. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда f ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.*

Замечание 5. Критерий Римана интегрируемости функции. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau: \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Кусочно-непрерывная функция

Определение 8. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной* на $[a,b]$, если множество ее точек разрыва пусто или конечно, и все имеющиеся разрывы — первого рода.

Если в точке нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, то она называется точкой разрыва первого рода.

Колебание функции на промежутке

Определение 7. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y \in D} \left(f(x) - f(y)\right)$$

называется *колебанием* функции f на множестве D.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Теорема 5. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда f ограничена на $[a,b]$ и множество ее точек разрыва имеет нулевую меру.*

Определение 9. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет *нулевую меру*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более чем счетное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε. (Под суммой счетного семейства положительных чисел a_k понимается $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$;

Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — невырожденный промежуток, $f\colon E \to \mathbb{R}$, f интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E, $a \in E$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f, \quad x \in E$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Почти первообразная

Функции F, f: <a,b> -> R

F называется почти первообразной для f (причем F - дифференцируема и непрерывна), если для любого x на <a,b>\(исключая) Q (где Q - конечное множество точек) выполняется: F’(x) = f(x).

Площадь

Фигура - $\forall$ подпространство $\mathbb{R}^2$;

Обозначение - множество ограниченных фигур $M = 2^{\mathbb{R}^2}$.

Площадь - это функция $S\colon M \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $\forall\, A$ выполняется, что $S(A) \geq 0$, где $A \in M$
2. S - инвариантна относительно движения:
   т.е если $T(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ - движение, то $\forall\, A \in M$ справедливо $S(T(A)) = S(A)$
3. Конечная аддитивность:
   Если $A = \cap_{i=1}^{n} \quad A_i \quad (A_i \bigcap A_j = \emptyset)$, тогда $S(A) = \sum_{i=1}^{n} \quad S(A_i)$

4. S прямоугольника $a \times b = a * b$

Формула вычисления площади криволинейного сектора параметрически заданной кривой

x=x(t), y=y(t), α < t < β - параметрические уравнения кусочно-гладкой замкнутой кривой, пробегаемой в положительном направлении (то есть таким образом, что фигура, ограниченная заданным контуром остается слева), то площадь S этой фигуры равна:

$$S = \int_\alpha^\beta x(t)\, y'(t)\, dt = -\int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt$$

,где α и β - значения параметра, соответствующие началу и концу обхода контура фигуры в положительном направлении.

Интегральное среднее арифметическое и среднее геометрическое

Определение 1. Пусть $f \in C[a,b]$.

1. Величина

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

называется *интегральным средним арифметическим* функции f на $[a,b]$.

2. Если $f > 0$, то величина

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right)$$

называется *интегральным средним геометрическим* функции f на $[a,b]$.

Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

Далее E — невырожденный промежуток в $\mathbb{R}$, J_E — множество всех невырожденных отрезков, содержащихся в E.

Определение 1. Отображение $I\colon J_E \to \mathbb{R}$ называется *функцией отрезка*. Функция отрезка I называется *аддитивной*, если для любых a, b и c, таких что $a, b \in E$, $a < c < b$,

$$I\big([a,b]\big) = I\big([a,c]\big) + I\big([c,b]\big). \qquad (17)$$

Пояснение:

Интеграл $I\big([a,b]\big) = \int_a^b f$ является примером аддитивной функции отрезка. Здесь f кусочно-непрерывна на любом отрезке, содержащемся в E. В частности, если $f \equiv 1$, то I есть длина отрезка. Длину отрезка Δ мы будем обозначать через $|\Delta|$.

Плотность аддитивной функции промежутка

Определение 3. Пусть функция $I\colon J_E \to \mathbb{R}$ аддитивна, $x_0 \in E$. Предел $\lim\limits_{\Delta \to \{x_0\}} \frac{I(\Delta)}{|\Delta|}$ называется *плотностью* или *производной* функции I в точке x_0 и обозначается $I'(x_0)$.

Если $I'(x_0)$ существует в каждой точке $x_0 \in E$, то функция $x \mapsto I'(x)$ $(x \in E)$ называется *плотностью* или *производной* (*производной функцией*) функции I.

Путь, гладкий путь, вектор скорости

Определение 6. Путь. *Путем* в $\mathbb{R}^m$ называется непрерывное отображение отрезка в $\mathbb{R}^m$:

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m.$$

Точка $\gamma(a)$ называется *началом*, $\gamma(b)$ — *концом* пути. Множество

$$\gamma^* = \gamma\big([a, b]\big),$$

то есть образ отрезка $[a, b]$, называется *носителем пути* γ.

Если $\gamma_i \in C^r[a, b]$ при всех $i \in [1 : m]$ $\big(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\big)$, то путь γ называют *r раз непрерывно дифференцируемым* или *r-гладким* и пишут $\gamma \in C^r[a, b]$. Путь гладкости 1 называют просто *гладким*.

Если $\gamma(t)$ — некоторый путь, то его производная $\gamma'(t)$ называется скоростью пути.

Примечание: $y_1 = y_1(t)$, …, $y_m = y_m(t)$

Длина гладкого пути

4. Вычисление длин. Если $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — путь в $\mathbb{R}^m$, γ_i — дифференцируемые функции, то полагаем $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$. Напомним, что по определению евклидовой длины

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2}.$$

Теорема 2. Длина гладкого пути. *Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь. Тогда γ спрямляем и*

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|.$$

Локально интегрируемая функция

Определение 1. Функция f называется *локально интегрируемой* (по Риману) на промежутке E, если f интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, содержащемся в E. Множество функций, локально интегрируемых на E, обозначается через $R_{loc}(E)$.

Несобственный интеграл, сходимость, расходимость, примеры

Аналогично определяется несобственный интеграл в симметричной ситуации: для $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, $f \in R_{loc}(a,b]$ полагают

$$\int_{\to a}^{b} f = \lim_{B\to a+} \int_{B}^{b} f,$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, и называют интеграл сходящимся, если предел конечен.

Примеры:

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} \sin b,$$

предела не существует, значит интеграл **расходится**.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^0 e^x dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right) = \left(e^0 - \lim_{a\to-\infty} e^a\right) = e^0 = 1,$$

предел равен 1, интеграл **сходится**.

Критерий Больцано--Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема 1. Критерий Больцано – Коши сходимости интегралов. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}[a,b)$. *Тогда сходимость интеграла* $\int_a^b f$ *равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta \in (a,b): \ \ \forall A, B \in (\Delta, b) \ \ \left|\int_A^B f\right| < \varepsilon.$$

Абсолютно сходящийся интеграл

Определение 4. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in R_{loc}[a,b)$. Говорят, что интеграл $\int_a^b f$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^b |f|$.

Гамма функция Эйлера

Функция, которая расширяет понятие факториала на поле нецелых действительных и комплексных чисел.

Обычно обозначается Γ(z).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(z) > 0$$

Норма в линейном пространстве

Определение 1. *Нормой* или *евклидовой нормой* в $\mathbb{R}^n$ называется функция, которая каждому $x \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет величину

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Замечание 1. При $n = 1$ элементами $\mathbb{R}^n$ являются вещественные числа, а норма совпадает с модулем. Если n равно 2 или 3, то $\|x\|$ есть *длина вектора* x. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ норма является естественным обобщением длины.

Открытый, замкнутый шар, окрестность точки

Определение 2. Окрестности точек в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Пусть $\delta > 0$.

1) Если $a \in \mathbb{R}^n$, то множества

$$V_a(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\}, \quad \dot{V}_a(\delta) = V_a(\delta) \setminus \{a\}$$

называют соответственно *δ-окрестностью* и *проколотой δ-окрестностью* точки a.

2) Множество

$$V_\infty(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > \delta\}$$

называется *δ-окрестностью в $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точки.* Положим также $\dot{V}_\infty(\delta) = V_\infty(\delta)$. Это будет удобно для единообразия записи окрестностей точек $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Пример 3. Шары в $\mathbb{R}^n$. *Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Положим*

$$\overline{V_a(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant \delta\}.$$ Замкнутый шар

строгий знак -
открытый шар

Параллелепипед

Пример 5. Параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, причем $a_k \leqslant b_k$ при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Множества

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n), \quad [a, b] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

называются соответственно *открытым* и *замкнутым параллелепипедами* в $\mathbb{R}^n$. Аналогичным образом определяются параллелепипеды $(a, b]$ и $[a, b)$. Промежутки вида $\langle a_k, b_k \rangle$ называют *ребрами параллелепипеда* соответствующего вида. Если все ребра параллелепипеда имеют одинаковую длину, то его называют *кубом*.

Заметим, что если $a_k < b_k$ при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$, то $(a, b) \neq \varnothing$, а параллелепипед $[a, b]$ в этом случае называют *невырожденным*. Докажем утверждение, поясняющее термины "открытый" и "замкнутый" в определении параллелепипедов.

Скалярное произведение в линейном пространстве

Скалярным произведением называется отображение $L \times L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto < x, y >$ со свойствами:

1. Линейность по первому аргументу:

$$< \alpha x_1 + \beta x_2;\ y > = \ \alpha < x_1, y > \ + \beta < x_2, y >$$

2. Симметричность:

   $< x, y > = < y, x >$; NB: в $\mathbb{C}$: $< y, x > = \underline{< x, y >}$

3. $< x, x > \geq \ 0$ и $< x, x > = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Доп. информация:

1. L - пространство непрерывных функций на $[a, b]$, $< f, g > = \int_a^b \quad f(x) * g(x)\, dx$
2. $L = \mathbb{R}^m$, $\ x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$

$$< x, y > = \ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m = \sum_{i=1}^{m} \quad x_i y_i$$

Ограниченное множество в нормированном пространстве

Определение 2. Ограниченность в $\mathbb{R}^n$.

1) Пусть E — подмножество $\mathbb{R}^n$. Оно называется *ограниченным*, если существует такое $C > 0$, что $E \subset V_0(C)$ (то есть $\|x\| < C$ для любого $x \in E$).

Ограниченное отображение

2) Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Отображение f называется *ограниченным*, если множество его значений ограничено в $\mathbb{R}^m$.

Фундаментальная последовательность в R^m

Предельная точка множества

Теорема 5. Критерий Больцано – Коши. *Пусть* $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) *Последовательность* $\{x^k\}$ *сходится в* $\mathbb{R}^n$.

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k, m \in \mathbb{N}\colon\ k, m > N\quad \|x^k - x^m\| < \varepsilon$.

Замечание. Последовательность в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условию 2), называют *сходящейся в себе* или *фундаментальной.*

Определение 3. Предельная и изолированная точки множества. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *предельной* для E, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $E \cap \dot{V}_a(\varepsilon)$ непусто.

Внутренняя точка множества, изолированная точка

Внутренняя точка множества:

Пусть E ⊂ R^n. Точка A принадлежащая E называется внутренней для E, если у нее есть окрестность, содержащаяся в E.

Изолированная точка:

Это такая точка множества, что пересечение некоторой её окрестности с множеством состоит только из этой точки. (Пример: точка A = 0 изолированная для множества {0} U [1, 2]).

Открытое множество, замкнутое множество

Открытое множество:

Пусть E ⊂ R^n. Множество E называется открытым в R^n, если любая его точка является внутренней для E.

Замкнутое множество:

Пусть E ⊂ R^n. Множество E называется замкнутым в R^n, если его дополнение R^n \ E открыто в R^n.

Замыкание множества

Пусть E ⊂ R^n. Замыканием E (Cl(E)) называют замкнутое множество F ⊂ R^n, удовлетворяющее двум условиям:

1) F ⊃ E;
2) если A - другое замкнутое подмножество R^n, содержащее E, то A ⊃ F.

Обозначается, как Cl E.

Внутренность множества

Пусть E ⊂ R^n. Множество всех внутренних точек E называется внутренностью E и обозначается Int E.

Граница множества

Пусть E ⊂ R^n. Множество Cl E \ Int E называется границей E и обозначается ∂E.

Предел отображения (по Коши и по Гейне)

Определение 1. Предел отображения по Коши. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является предельной для E, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (или $f(x) \to A$ при $x \to a$) *в смысле Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E \;\; f(x) \in V_A(\varepsilon).$$

Определение 2. Предел отображения по Гейне. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является предельной для E, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *в смысле Гейне*, если для любой последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E \setminus \{a\}$, стремящейся к a, выполняется условие $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = A$.

Формулировка теоремы о пределе композиции

Теорема 3. Предел композиции. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и $b \in F$ — предельные точки E и F соответственно. Если $f\colon E \to F$, $g\colon F \to \mathbb{R}^s$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$, то*

$$\lim_{x\to a} \big(g \circ f\big)(x) = g(b).$$

Критерий Больцано--Коши для предела отображений

Теорема 4. Критерий Больцано – Коши для отображений. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, точка $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является предельной для E, $f\colon E \to \mathbb{R}^m$. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) *Отображение f имеет предел в $\mathbb{R}^m$.*

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists V_a \;\; \forall x, y \in \dot{V}_a \cap E \;\; \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Непрерывное отображение (на языке окрестностей, неравенств и по Гейне)

Определение 1. Непрерывность отображения в точке. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E$, $f: E \to \mathbb{R}^m$. Отображение f называется *непрерывным в точке* a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in V_a(\delta) \cap E \ \ f(x) \in V_{f(a)}(\varepsilon).$$

Это определение можно переписать и на языке неравенств:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E\colon \ \|x - a\| < \delta \ \ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Замечание 3. Непрерывность отображения f в точке a равносильна следующему утверждению: (по Гейне)

$$\text{если } \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset E, \ x^k \to a, \quad \text{то } f(x^k) \to f(a) \quad (k \to \infty).$$

o(h) при h->0

Пусть $\varphi: \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0$, если $\frac{\varphi(h)}{||h||}$ — бесконечно малая при $h \to 0$. (где ||h|| - евклидова норма)

Отображение, дифференцируемое в точке

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathrm{Int}\, D$ ($\mathrm{Int}\, D$ — внутренность множества D). Если существует такой линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ ($\mathcal{L}(X \to Y)$ — множество линейных ограниченных операторов из X в Y), что $f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), h \to \mathbb{O}_n$,

то отображение f называется дифференцируемым в точке x. При этом оператор A называется **производным оператором**, **производным отображением** или, короче, производной отображения f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Дифференциал, производный оператор

Дифференциал:

Величина $f'(x)h$ называется **дифференциалом** отображения f в точке x, соответствующим приращению h, и обозначается $df(x, h)$ или $d_x f(h)$.

Производный оператор:

Оператор A из определения выше называется производным оператором отображения f в точке x(см. определение “Отображение, дифференцируемое в точке”).

Матрица Якоби, градиент

Определение 5. Матрица Якоби, градиент. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E, отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a.

1) Матрица оператора $d_a f$ называется *матрицей Якоби f в точке a* и обозначается $f'(a)$.

2) Если $m = 1$, то матрица $f'(a)$ имеет размер $1 \times n$, то есть является вектором из $\mathbb{R}^n$. Этот вектор называют *градиентом f в точке a* и обозначают $\operatorname{grad} f(a)$ или $\nabla f(a)$ (вторая запись читается "набла эф от a"). Оператор ∇ называют *символом Гамильтона.*

Теорема 3. Описание матрицы Якоби. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E, отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке a. Тогда*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В частности, при $m = 1$ справедливо равенство

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right). \tag{10}$$

Таким образом, строками матрицы Якоби f являются градиенты координатных функций f.

Частные производные

Определение 4. Частные производные. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E, $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial e^k}(a)$ называется *частной производной f по k-й переменной в точке a* и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (а также $D_k f(a)$, $\partial_k f(a)$ или $f'_{x_k}(a)$).

Производная по вектору, по направлению

Определение 3. Производная по вектору. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E, $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1) Предел $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+te) - f(a)}{t}$ называется *производной f по вектору e в точке a* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial e}(a)$.

2) Если дополнительно предположить, что $\|e\| = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial e}(a)$ называется *производной f по направлению e* или *производной f в направлении e* в точке a.

Градиент

(см. определение “Матрица Якоби, градиент”)

Теоремы

Лемма о построении последовательности с более высокой скоростью сходимости

§ Правило Лопиталя

Лемма (об ускоренной сходимости)

$f, g: D \subset X \to \mathbb{R}$ a – пр. т. D

$\exists U(a): \forall x \in \dot{U}(a)$ $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \boxed{0}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \boxed{0}$

$\forall x_k \to a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ $\exists y_k \to a$, $y_k \in D$, $y_k \neq a$ $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$

$\lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

Док-во: Возьмем $h_k \to 0$ $(h_k \in \mathbb{R})$

Подбираем y_k: $\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < h_k$ $\left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < h_k$

выбирая подходящ. x_m с большим номером m.

$|f(y_k)| < h_k \cdot |g(x_k)| \neq 0$

$f(x_n) \to 0$, при $n \to +\infty$

$\exists N \ \forall n > N$ $|f(x_n)| < h_k |g(x_k)|$

$|g(x_n)| < h_k |g(x_k)|$

$y_k :=$ любой из x_n, удовлетвор. нер-вам

Замечание: Аналогичное утв. верно, если $\boxed{0}$ заменить на $+\infty$.

Правило Лопиталя

Теорема 1. "Правило Лопиталя".

Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, дифф-мы // $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$g' \neq 0$ на (a, b)

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a]{} L \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ – неопр-сть $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \right)$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Δ

Если $g' \neq 0$ на $(a, b) \Rightarrow g$ – строго монот.

g' – не меняет знак по т-ме Дарбу ("О пром. знач. произв.")

Тогда $g(x) \neq 0$ на (a, b);

Пусть $x_k \to a$ $\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)} \to L$?

Возьмём y_k из леммы 1. ; т-ма Коши:

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)};$$

ξ_k лежит между x_k и y_k

$$(f(x_k) - f(y_k))\, g'(\xi_k) = f'(\xi_k)(g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underbrace{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}}_{\substack{\to 0 \\ \text{(лемма)}}} + \underbrace{\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}}_{\to L} \Bigg(1 - \underbrace{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}_{\to 0}\Bigg)$$

$k \to +\infty$

$x_k \to a$ $\quad \xi_k \to a$

$y_k \to a$

$\blacktriangle$

Теорема Штольца

Формулировка:

$x_n, y_n \to 0, y_n$- монотонная

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to A \in \underline{R} \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

Доказательство:

1) A > 0

$\forall\varepsilon > 0\ (\varepsilon < A)\ \exists N_1 : \forall n > N > N_1$ $\quad A - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < A + \varepsilon$

$$A - \varepsilon < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < A + \varepsilon$$

$$\dots$$

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < A + \varepsilon \quad \to (n \to +\infty) \to \quad A - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < A + \varepsilon$$

(если $\alpha < \frac{a}{b} < \beta$, и $\alpha < \frac{c}{d} < \beta$, то $\alpha < \frac{a+c}{b+d} < \beta$)

2) A < 0

См. п.1, сменить знаки игреков.

3) A = +∞

Аналогично, с точностью до определения предела ($\forall E > 0\ \exists N_1 : \forall n > N > N_1$)

4) A = +0

$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \to +\infty$ См. п.3.

!!!на википедии (и в других источниках иначе)

Пример функции, не равной сумме своего ряда Тейлора

1 7 A Ь

F.e: ◁ $f(x) = \left[\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array}\right.$; → Пример неаналитической ф-ции

$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0$ $\qquad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0$ $\qquad \forall n \ f^{(n)}(0) \neq 0.$

Ясно, что $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, где P_n – некоторый мн-н.

$\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L \Rightarrow f'(a) = L$ (по следств. из теор. Лагр.)

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{t \to +\infty} t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{e^t} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}; \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}}}{e^t} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$t = \frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}}{e^t} = \left\{\frac{0}{\infty}\right\} = 0.$$

т.е. $\exists f'(0) = 0$;

$$\lim_{x \to 0+0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{?}{=} 0$$

$t = \frac{1}{x^2}$: $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{P_n(\sqrt{t})}{e^t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{a_k t^{\frac{k}{2}} + a_{k-1} t^{\frac{k-1}{2}} + \dots + a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_0}{e^t} = \left\{ \text{пр-ло Лопиталя } \left[\frac{k+1}{2}\right] \text{ раз} \right\} =$

// чтобы степени стали отриц.

// $P_n = a_k \cdot x^k + \dots + a_1 x + a_0$;

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\text{коэфф.} \cdot t^{0 \text{ или } -\frac{1}{2}} + \text{коэфф.} \cdot t^{-\frac{1}{2} \text{ или } -1} + \dots}{e^t} = 0.$$

// Все производные равны нулю в нуле. Не раскладывается в ряд Тейлора т.е. 0+0+0

Лемма о трех хордах

Лемма: Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$, $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle, x_1 < x_2 < x_3$. Тогда $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Доказательство:

По определению выпуклости: $f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3)$, где $t = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1},\ 1-t = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leq f(x_1) + (1-t)(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_1) + (x_2 - x_1)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно левому неравенству в лемме. С другой стороны,

$$f(x_2) \leq f(x_3) - t(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) - (x_3 - x_2)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x)1},$$

что равносильно правому неравенству в лемме.

Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

Теорема: Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ $\exists$ конечные $f'_-(x), f'_+(x) : f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Доказательство:

Возьмем $x \in (a, b)$ и положим: $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}, \ \xi \in \langle a, b\rangle \backslash \{x\}$.

По лемме о трех хордах *g* возрастает на $\langle a, b\rangle \backslash \{x\}$. Поэтому, если $a < \xi < x < \eta < b$, то $g(\xi) \le g(\eta)$, то есть: $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \le \frac{f(\eta)-f(x)}{(\eta - x}$.

Следовательно, *g* ограничена на $\langle a, x)$ сверху, а на $(x, b\rangle$ - снизу. По теореме о пределе монотонной функции существуют конечные пределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые по определению являются односторонними производными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η - справа, получаем, что $f'_-(x) \le f'_+(x)$.

Указание: теорема(о пределе монотонной функции): Если f(x) монотонна и ограничена при $x<x_0$ или при $x>x_0$, то существует соответственно ее левый предел или ее правый предел.

Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

Теорема: Если функция выпукла на $\langle a, b\rangle$, то она непрерывна на (a, b). Замечание: на концах промежутка выпуклая функция может испытывать разрыв.

Доказательство:
Непрерывность следует из существования конечных односторонних производных слева и справа в каждой точке $x \in (a, b)$.

Описание выпуклости с помощью касательных

Теорема: Пусть функция *f* дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда *f* выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график *f* лежит не ниже любой своей касательной, то есть $\forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Доказательство:

1. *Необходимость*. Пусть *f* выпукла вниз, $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если $x > x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \eta \in (x_0, x)$:

$\frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta - x_0} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$.

Устремляя η к x_0 справа, получаем неравенство $f'(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$, равносильное неравенству в теореме.

Если $x < x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \xi \in (x, x_0)$:

$\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0} \ge \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$.

Устремляя ξ к x_0 слева, получаем неравенство $f'(x_0) \ge \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$, равносильное неравенству в теореме.

2. *Достаточность*. Пусть $\forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство в теореме. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : x_1 < x_2, \ x \in (x_1, x_2)$. Применяя данное неравенство дважды: сначала к точкам x_1 и x, а затем - к x_2 и x, получаем:

$f(x_1) \ge f(x) + f'(x)(x_1 - x)$,

$f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x)$,

что равносильно $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. // разве это не пиздеж? в первом неравенстве другой знак получается

//нет, не пиздежь. домножь первое неравенство на -1

Крайние части и составляют неравенство, равносильное неравенству из определения выпуклости.

Дифференциальный критерий выпуклости

Теорема:

1. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$ в том и только том случае когда f' (строго) возрастает на .(a, b)
2. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$ в том и только том случае, когда $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Доказательство:

1. *Необходимость*. Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b): \ x_1 < x_2$. По теореме об односторонней дифференцируемости выпуклой функции:

$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$, что и означает возрастание f'.

Достаточность. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle: \ x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа
$\exists c_1 \in (x_1, x), \ c_2 \in (x, x_2): \ \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \ \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$.

Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, то есть
$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$,

что равносильно неравенству из определения выпуклости.

Если f строго выпукла вниз, то оба неравенства в доказательстве необходимости строгие. Обратно, если f' строго возрастает, то неравенство в доказательстве достаточности строгое, что влечет выпуклость f.

2. По пункту 1 выпуклость f равносильна возрастанию f', которое по критерию монотонности равносильно неотрицательности f''.

Свойства сумм Дарбу

Д1. $S_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$, $s_\tau(f) = \inf\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$ *(грани берутся по всевозможным оснащениям дробления τ).*

Доказательство. Для определенности докажем утверждение о верхних суммах. Очевидно, что $f(\xi_k) \leqslant M_k$ при всех $k \in [0:n-1]$. Умножая эти неравенства на Δx_k и суммируя по k, мы получаем неравенство $\sigma \leqslant S$, то есть S — верхняя граница для интегральных сумм Римана. Докажем, что эта верхняя граница точная.

Пусть f ограничена сверху на $[a,b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для каждого k по определению верхней грани подберем такую точку $\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$, что $f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = S - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, S — точная верхняя граница.

Пусть f не ограничена сверху на $[a,b]$. Тогда существует такое ν, что f не ограничена сверху на $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Возьмем $A > 0$ и выберем точки ξ_k^* при $k \neq \nu$ произвольно, а ξ_ν^* — так, чтобы

$$f(\xi_\nu^*) > \frac{1}{\Delta x_\nu}\left(A - \sum_{k\neq\nu} f(\xi_k^*)\Delta x_k\right).$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A.$$

Так как A произвольно, $\sup\limits_\xi \sigma = +\infty = S$. $\square$

Д2. *При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя — не уменьшится.*

Доказательство. Для определенности докажем утверждение о верхних суммах. В силу принципа математической индукции достаточно проверить, что верхняя сумма не увеличится при добавлении одной новой точки дробления. Пусть дробление T получено из дробления $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ добавлением точки $c \in (x_\nu, x_{\nu+1})$. Тогда

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k \Delta x_k + M_\nu \Delta x_\nu + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k \Delta x_k + M'(c - x_\nu) + M''(x_{\nu+1} - c) + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

где $M' = \sup\limits_{x \in [x_\nu, c]} f(x)$, $M'' = \sup\limits_{x \in [c, x_{\nu+1}]} f(x)$. Поскольку при сужении множества его супремум не увеличивается, $M' \leqslant M_\nu$ и $M'' \leqslant M_\nu$. Поэтому

$$S_\tau - S_T = M_\nu \Delta x_\nu - M'(c - x_\nu) - M''(x_{\nu+1} - c) \geqslant$$
$$\geqslant M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu - c + x_\nu + c - x_{\nu+1}) = 0. \quad \square$$

Д3. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней (даже отвечающей другому дроблению).*

Доказательство. Неравенство $s_\tau \leqslant S_\tau$ между суммами для одного и того же дробления τ тривиально. Пусть τ_1 и τ_2 — два дробления отрезка $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Положим $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда по свойству Д2

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \quad \square$$

Критерий интегрируемости функции. Следствия

Теорема 1. Критерий интегрируемости функции. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R[a,b]$ *в том и только том случае, когда* $S_\tau(f) - s_\tau(f) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$, *то есть*

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall\tau : \lambda_\tau < \delta \;\; S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \in R[a,b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. По $\varepsilon > 0$ подберем такое $\delta > 0$ из определения предела интегральных сумм, что для любого оснащенного дробления (τ, ξ), ранг которого меньше δ,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя к супремуму и инфимуму по ξ, в силу свойства Д1 мы получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $S_\tau - s_\tau \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$. Тогда все суммы S_τ и s_τ конечны. Для любого τ

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau,$$

поэтому

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Так как правая часть последнего неравенства принимает сколь угодно малые значения, $I_* = I^*$. Обозначим общее значение I_* и I^* через I и докажем, что $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$. Из неравенств

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, \qquad s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$$

следует, что

$$|\sigma_\tau - I| \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

По $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любого дробления τ, ранг которого меньше δ, будет $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, а тогда для любого оснащения ξ такого дробления $|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$. $\square$

Указание: свойство Д1 см. в “Свойства сумм Дарбу”

Замечание 1. В процессе доказательства теоремы 1 установлено, что если $f \in R[a,b]$, то для любого дробления τ

$$s_\tau \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau.$$

Замечание 2. Теорема 1 может быть переформулирована следующим образом. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R[a,b]$ *в том и только том случае, когда*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = 0.$$

Действительно,

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k.$$

Следствие 1. *Если* $f \in R[a,b]$, *то*

$$\lim_{\lambda\to 0} S_\tau(f) = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau(f) = \int_a^b f.$$

Доказательство вытекает из замечания 1, поскольку

$$0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

где $I = \int_a^b f$. $\square$

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 2. Интегрируемость непрерывной функции. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.* Другими словами, *справедливо включение* $C[a,b] \subset R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда по теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a,b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению равномерной непрерывности подберем такое $\delta > 0$, что для любых $t', t'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, верно неравенство $|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. По теореме Вейерштрасса функция f принимает на каждом отрезке наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках t' и t''. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно, для любого дробления τ, ранг которого меньше δ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \varepsilon,$$

то есть для функции f выполнено условие интегрируемости. $\square$

Интегрируемость монотонной функции

Теорема 3. Интегрируемость монотонной функции. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть для определенности f возрастает на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b)$, то f постоянна, и ее интегрируемость вытекает из теоремы 2. Пусть $f(a) < f(b)$. Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное дробление τ, такое что $\lambda_\tau < \delta$. В силу возрастания функции f верны равенства $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

(неравенство строгое ввиду того, что хотя бы одна из разностей $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ положительна). Это и означает, что для f выполнено условие интегрируемости. $\square$

Указание: **теорема 2** = это теорема об “интегрируемости непрерывной функции”

Теорема 2. Об интеграле с переменным верхним пределом. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — невырожденный промежуток, $f\colon E \to \mathbb{R}$, f интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f$ $(x \in E)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $\Phi \in C(E)$.

2. *Если, кроме того, f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ дифференцируема в точке x_0 и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Утверждение 2 часто называют *теоремой Барроу*.

Доказательство. 1. Возьмем $x_0 \in E$ и докажем непрерывность Φ в точке x_0. Выберем такое $\delta > 0$, что $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap E$ есть невырожденный отрезок $[A, B]$. Функция f ограничена на $[A, B]$ некоторым числом M. Пусть Δx таково, что $x_0 + \Delta x \in [A, B]$. Тогда по аддитивности интеграла

$$\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f,$$

и по свойствам И6 и И4

$$\bigl|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)\bigr| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\right| \leqslant M\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Это и доказывает непрерывность Φ в точке x_0.

2. Проверим, что

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f(x_0). \tag{2}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению непрерывности подберем такое $\delta > 0$, что при всех $t \in E$, удовлетворяющих условию $|t - x_0| < \delta$,

будет $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда для всех Δx, таких что $x_0 + \Delta x \in E$ и $0 < |\Delta x| < \delta$, по свойствам И6, И5 и замечаниям к ним

$$\left|\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \bigl(f(t) - f(x_0)\bigr)\,dt\right| <$$

$$< \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon|\Delta x| = \varepsilon,$$

откуда и следует (2). $\square$

Лемма об интегрируемости функции, измененной в конечном числе точек

Замечание 1. *Если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.*

Доказательство. Пусть $f \in R[a,b]$, а функция $\widetilde{f}$ отличается от f в точках $t_1, \ldots, t_m$. Тогда, поскольку $|f|$ ограничен некоторым числом A, $|\widetilde{f}|$ тоже ограничен некоторым числом $\widetilde{A}$ (например, можно положить $\widetilde{A} = \max\{A, |\widetilde{f}(t_1)|, \ldots, |\widetilde{f}(t_m)|\}$). В интегральных суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются не более $2m$ слагаемых, откуда

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)| \leqslant 2m(A + \widetilde{A})\lambda_\tau \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f,\xi)$. $\square$

Теорема об интегрируемости функции и ее сужения

Теорема 4. Интегрируемость функции и ее сужения.

1. *Если* $f \in R[a,b]$, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, *то* $f \in R[\alpha,\beta]$.

2. *Если* $a < c < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f *интегрируема на* $[a,c]$ *и на* $[c,b]$, *то* $f \in R[a,b]$.

Доказательство. 1. Проверим выполнение условия интегрируемости f на отрезке $[\alpha,\beta]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости f на $[a,b]$: если ранг дробления τ отрезка $[a,b]$ меньше δ, то $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Покажем, что это δ подходит и для критерия интегрируемости f на $[\alpha,\beta]$. Пусть τ_0 — дробление $[\alpha,\beta]$, $\lambda_{\tau_0} < \delta$. Возьмем какие-нибудь дробления отрезков $[a,\alpha]$ и $[\beta,b]$ (если эти отрезки невырожденные) ранга, меньшего δ, и объединим их с τ_0. Получим дробление $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$:

$$a = x_0 < \ldots < x_\mu = \alpha < x_{\mu+1} < \ldots < x_\nu = \beta < x_{\nu+1} < \ldots < x_n = b,$$

причем $\lambda_\tau < \delta$. Тогда

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=\mu}^{\nu-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon.$$

2. Проверим выполнение условия интегрируемости f на отрезке $[a,b]$. Не умаляя общности, можно считать, что f не постоянна, то есть что $\omega = \omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости подберем такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что для любых дроблений τ_1 отрезка $[a,c]$ и τ_2 отрезка $[c,b]$, удовлетворяющих условиям $\lambda_{\tau_1} < \delta_1$, $\lambda_{\tau_2} < \delta_2$, выполняются неравенства

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\right\}$. Пусть τ — дробление $[a,b]$, $\lambda_\tau < \delta$. Точка c не обязана принадлежать τ; пусть $c \in [x_\nu, x_{\nu+1})$. Обозначим

$$\tau' = \tau \cup \{c\}, \quad \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c,b].$$

Тогда по по выбору δ

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_2} + \omega_\nu(f)\delta < \varepsilon. \quad \square$$

Второе утверждение теоремы справедливо и тогда, когда отрезок $[a,b]$ разбит на несколько отрезков. Это проверяется по индукции.

Теорема об интегрируемости суммы, произведения, частного.

Теорема 6. Арифметические действия над интегрируемыми функциями. *Пусть* $f, g \in R[a,b]$. *Тогда*

1) $f + g \in R[a,b]$;
2) $fg \in R[a,b]$;
3) $\alpha f \in R[a,b]$ *(*$\alpha \in \mathbb{R}$*)*;
4) $|f| \in R[a,b]$;
5) *если* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, *то* $\frac{f}{g} \in R[a,b]$.

Доказательство. 1) Каковы бы ни были множество E и точки $x, y \in E$,

$$\big|(f+g)(x)-(f+g)(y)\big| \leqslant |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leqslant \omega(f)_E+\omega(g)_E.$$

Поэтому

$$\omega(f+g)_E \leqslant \omega(f)_E + \omega(g)_E.$$

В частности, для любого дробления $[a,b]$ точками x_k

$$\omega(f+g)_{[x_k,x_{k+1}]} \leqslant \omega(f)_{[x_k,x_{k+1}]} + \omega(g)_{[x_k,x_{k+1}]},$$

то есть

$$\omega_k(f+g) \leqslant \omega_k(f) + \omega_k(g).$$

Умножая эти неравенства на Δx_k, складывая их и пользуясь критерием интегрируемости для f и g, мы получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(g)\Delta x_k \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

то есть для $f+g$ выполнено условие интегрируемости.

2) Поскольку f и g интегрируемы, они ограничены на $[a,b]$. Пусть $|f|$ ограничен числом K, а $|g|$ — числом L. Тогда

$$\begin{aligned}\big|(fg)(x)-(fg)(y)\big| &= \big|f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)\big| \leqslant \\ &\leqslant \big|(f(x)-f(y))g(x)\big| + \big|f(y)(g(x)-g(y))\big| \leqslant \\ &\leqslant L|f(x)-f(y)| + K|g(x)-g(y)|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega_k(f+g) \leqslant L\omega_k(f) + K\omega_k(g).$$

Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично.

3) Утверждение для αf следует из доказанного утверждения для fg, если взять в качестве g функцию, тождественно равную α.

4) Утверждение для модуля доказывается тем же способом с помощью неравенства

$$\big||f(x)|-|f(y)|\big| \leqslant \big|f(x)-f(y)\big|.$$

5) Интегрируемость частного $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$ будет вытекать из утверждения для произведения, если доказать интегрируемость $\frac{1}{g}$. Обозначим $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)}\right| \leqslant \frac{|g(x)-g(y)|}{m^2}$$

и, следовательно,

$$\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{\omega_k(g)}{m^2}.$$

Доказательство завершается аналогично.

Свойства интеграла Римана: аддитивность, линейность, монотонность. Следствия

И1. Аддитивность интеграла по отрезку. *Если* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f \in R\big[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}\big]$, *то*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$, $f \in R[a,b]$. Тогда по теореме 4 § 2 $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$. Пусть $\left\{\left(\bar{\tau}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)}\right)\right\}$, $\left\{\left(\bar{\bar{\tau}}^{(n)}, \bar{\bar{\xi}}^{(n)}\right)\right\}$ — последовательности оснащенных дроблений отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ на n равных частей, $\tau^{(n)} = \bar{\tau}^{(n)} \cup \bar{\bar{\tau}}^{(n)}$, $\xi^{(n)} = \bar{\xi}^{(n)} \cup \bar{\bar{\xi}}^{(n)}$, $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\bar{\sigma}}_n$ и σ_n — соответствующие последовательности интегральных сумм. Тогда

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\bar{\sigma}}_n.$$

Остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

Если $a < b < c$, то по доказанному

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Если $a = b$, то

$$\int_a^b f = 0 = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$

Мы не различаем в обозначениях число K и функцию, тождественно равную K.

И2. *Если функция K постоянна на $[a,b]$, то $\int_a^b K = K(b-a)$.*

Доказательство. Поскольку все интегральные суммы равны $K(b-a)$, их предел также равен $K(b-a)$. $\square$

И3. Линейность интеграла. *Если* $f, g \in R[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Доказательство. Интегрируемость $\alpha f + \beta g$ следует из теоремы 6 § 2. Остается перейти к пределу в равенстве

$$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_\tau(f) + \beta \sigma_\tau(g). \quad \square$$

И4. Монотонность интеграла. *Если* $a < b$, $f, g \in R[a,b]$, $f \leqslant g$, *то*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Другими словами, *неравенства можно интегрировать.*

Для доказательства надо перейти к пределу в неравенстве

$$\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g).$$

Следствие 1. *Пусть* $a < b$, $f \in R[a,b]$. *Если* $M \in \mathbb{R}$, $f \leqslant M$, *то*

$$\int_a^b f \leqslant M(b-a),$$

а если $m \in \mathbb{R}$, $f \geqslant m$, *то*

$$\int_a^b f \geqslant m(b-a).$$

В частности, если $f \in R[a,b]$, $f \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

Теорема о среднем

Теорема 1. *Пусть* $f, g \in R[a,b]$, $g \geqslant 0$ *(или* $g \leqslant 0$*),* $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant f \leqslant M$. *Тогда существует такое* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g.$$

Доказательство. Для определенности будем полагать, что $a < b$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int_a^b g \geqslant 0$ и

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg.$$

Проинтегрируем это неравенство и вынесем постоянные множители за знаки интегралов:

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g.$$

Отсюда если $\int_a^b g = 0$, то и $\int_a^b fg = 0$, а тогда подходит любое μ. Если же $\int_a^b g > 0$, то следует положить

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Условия на μ, очевидно, выполнены. $\square$

Неравенство Чебышева

Теорема 8. Неравенство Чебышёва для интегралов. *Пусть f возрастает, а g убывает на $[a,b]$. Тогда*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b fg \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\cdot\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\right).$$

Другими словами, *среднее арифметическое от произведения разноименно монотонных функций не превосходит произведения средних.*

Замечание 1. Если читатель знаком с определением интеграла только от кусочно-непрерывных функций, то он может считать и здесь их кусочно-непрерывными.

Доказательство. Обозначим

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f, \qquad E = \{x \in [a,b] : f(x) \leqslant A\}.$$

Ясно, что $E \neq \varnothing$, так как в противном случае $f > A$ на $[a,b]$, что приводит к абсурдному неравенству $A > A$. Положим $c = \sup E$. Тогда $A - f \geqslant 0$, $g \geqslant g(c)$ на $[a,c)$ и $A - f \leqslant 0$, $g \leqslant g(c)$ на $(c,b]$. Поэтому

$$\int_a^b (A-f)g = \int_a^c (A-f)g + \int_c^b (A-f)g \geqslant$$
$$\geqslant g(c)\int_a^c (A-f) + g(c)\int_c^b (A-f) = g(c)\int_a^b (A-f) = 0,$$

что равносильно доказываемому. □

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом

Теорема: "Об интеграле с переменным верхним пределом."

$E = \langle c, d \rangle$, $a \in E$ f — инт-ема на всех отрезках в E.

$\Phi(x) = \int_a^x f : E \to \mathbb{R}$ — интеграл с перем-м верхн. пред.

Тогда 1. Φ — непрерывна на E.

2. f — непр-на в точке $x_0 \in E$
Тогда Φ — дифф-ема в x_0 $\Phi'(x_0) = f(x_0)$] Теорема Барроу;

Δ

1. $x \in E$, f-инт-ма на $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset E$;
Φ — непр-на в точке $\underline{x}$?, f — огр-на на $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ $|f(x)| \le M$.
$y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ $|\Phi(x) - \Phi(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_y^x f \right| \le M \cdot |x-y|$

$\Rightarrow \Phi$ — непр. в точке $\underline{x}$.;

2. $$\left| \frac{\Phi(x_0+t) - \Phi(x_0)}{t} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t} \int_{x_0}^{x_0+t} f - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{t} \int_{x_0}^{x_0+t} (f(x) - f(x_0))\, dx \right| = |f(c) - f(x_0)| \text{ где } c \in [x_0, x_0+t] \le \_\_\_$$

забавный факт

забыли

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ при $|t| < \delta$, $t \ne 0$ $\le \left| \frac{1}{t} \int_{x_0}^{x_0+t} \varepsilon\, dx \right| = \varepsilon$

Формула Ньютона-Лейбница. Следствие для почти первообразных

Теорема 3. Формула Ньютона – Лейбница. *Пусть $f \in R[a,b]$, F — первообразная f на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим $x_k = \frac{k(b-a)}{n}$. Тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(F(x_{k+1}) - F(x_k)\bigr).$$

По теореме Лагранжа для каждого $k \in [0 : n-1]$ найдется такая точка $\xi_k^{(n)} \in (x_k, x_{k+1})$, что

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k = f\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k.$$

В силу интегрируемости f

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\bigl(\xi_k^{(n)}\bigr)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\bigl(F(b) - F(a)\bigr) = F(b) - F(a). \quad \square$$

Замечание 3. *Пусть $f \in R[a,b]$, $F \in C[a,b]$, F — первообразная f на $[a,b]$ за вычетом конечного множества точек. Тогда*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1}$ — все точки интервала (a,b), в которых нарушается равенство $F' = f$; положим также $\alpha_0 = a$, $\alpha_m = b$. Пользуясь последовательно непрерывностью интеграла с переменными пределами интегрирования, формулой Ньютона – Лейбница и непрерывностью F, находим:

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigl(F(\alpha_{k+1}-\varepsilon) - F(\alpha_k+\varepsilon)\bigr) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k).$$

Остается воспользоваться аддитивностью интеграла:

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1}\bigl(F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)\bigr) = F(b) - F(a). \quad \square$$

Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле

Теорема 2. Интегрирование по частям в определенном интеграле. *Пусть* $f, g \in C^1[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = \int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b.$$

Остается перенести второе слагаемое из левой части в правую. $\square$

Теорема 3. Замена переменной в определенном интеграле. *Пусть* $\varphi \in C^1\big([\alpha,\beta] \to [A,B]\big)$, $f \in C[A,B]$. *Тогда*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Доказательство. Пусть F — первообразная f на $[A,B]$. Тогда по правилу дифференцирования композиции $F \circ \varphi$ — первообразная $(f \circ \varphi)\varphi'$ на $[A,B]$. Применяя к обоим интегралам формулу Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = F \circ \varphi\Big|_\alpha^\beta = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f. \quad \square$$

Иррациональность числа Пи

A SIMPLE PROOF THAT π IS IRRATIONAL

IVAN NIVEN

Let $\pi = a/b$, the quotient of positive integers. We define the polynomials

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer n being specified later. Since $n!f(x)$ has integral coefficients and terms in x of degree not less than n, $f(x)$ and its derivatives $f^{(j)}(x)$ have integral values for $x=0$; also for $x=\pi=a/b$, since $f(x)=f(a/b-x)$. By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

and

$$(1) \qquad \int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

Now $F(\pi)+F(0)$ is an *integer*, since $f^{(j)}(\pi)$ and $f^{(j)}(0)$ are integers. But for $0<x<\pi$,

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for n sufficiently large. Thus (1) is false, and so is our assumption that π is rational.

4

Теорема 2. Формула Валлиса.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Доказательство. При всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $0 < \sin x < 1$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

а тогда и

$$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}.$$

Применяя лемму 1, получаем двойное неравенство

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

что равносильно

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Обозначим $x_n = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$. Двойное неравенство можно преобразовать к виду

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi,$$

откуда $x_n \to \pi$. $\square$

Лемма 1. *Если* $m \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & m \text{ четно}, \\ 1, & m \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m t\,dt$. Легко проверить, что $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$. При $m - 1 \in \mathbb{N}$ проинтегрируем по частям:

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\, d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x\, \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \\ + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx = (m-1)(J_{m-2} - J_m)$$

(в последнем равенстве мы учли, что двойная подстановка обнулилась, и применили формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). Выражая J_m, получаем рекуррентное соотношение

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Остается применить его несколько раз и выразить J_m через J_0 или J_1 в зависимости от четности m. □

Формула Тейлора с интегральным остатком

Теорема 1. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{n+1}\langle A, B\rangle$, $a, x \in \langle A, B\rangle$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt.$$

Доказательство проведем по индукции. База индукции (случай $n = 0$) представляет собой формулу Ньютона – Лейбница:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$

Пусть утверждение верно для некоторого $n - 1 \in \mathbb{Z}_+$. Докажем его для номера n. Для этого проинтегрируем по частям в остаточном члене:

$$\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \int_a^x f^{(n)}(t)\, d\left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right) =$$
$$= -\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(t)(x-t)^n\right]_{t=a}^{x} + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt =$$
$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt.$$

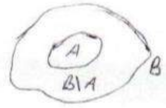
Первое слагаемое в правой части есть слагаемое с номером n в многочлене Тейлора, а второе — новый остаточный член:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt. \quad \square$$

Площадь и ее свойства

Повторяем определение площади и рассказываем про свойства:

1. Монотонность: $A \subset B$, $A, B \in M$ то $S(A) \leq S(B)$



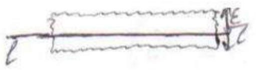
Δ т.к. $B = A \cup (B \setminus A)$

$$S(B) = S(A) + \underbrace{S(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq S(A)$$

$\blacktriangle$

2. Если B - отрезок, или его под мн-во то $S(B) = 0$.

Δ



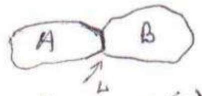
$B \subset$ прям-ку $\left(l \times \frac{\varepsilon}{l}\right)$

$$S(B) \leq S(\text{пр-ка}) = l \cdot \frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon$$

$\blacktriangle$

3. Если $A \cap B$ = отрезок или его части
тогда $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$;

Δ $A \cap B = L$



$$S(A) = S(A \setminus L) + S(L) = S(A \setminus L)$$

$$S(A \cup B) = S((A \setminus L) \cup B) = S(A \setminus L) + S(B) = S(A) + S(B);$$

$\blacktriangle$

Вычисление площадей подграфиков и криволинейных секторов

Определение 1. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. Множество

$$Q_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

называется *подграфиком* функции f. Если f непрерывна, то подграфик называют еще *криволинейной трапецией.*

Пусть $f \in R[a,b]$. Примем без доказательства, что подграфик f имеет площадь, и найдем ее. Для этого мы повторим рассуждения, которыми мотивировалась конструкция интеграла Римана. Возьмем дробление $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$, обозначим

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

и составим суммы

$$s_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Геометрически s_τ есть сумма площадей меньших, а S_τ — бóльших прямоугольников на рисунке 10, что по усиленной аддитивности совпадает с площадями объединений указанных прямоугольников. Поскольку Q_f содержит объединение меньших и содержится в объединении бóльших прямоугольников,

$$s_\tau \leqslant S(Q_f) \leqslant S_\tau. \tag{12}$$

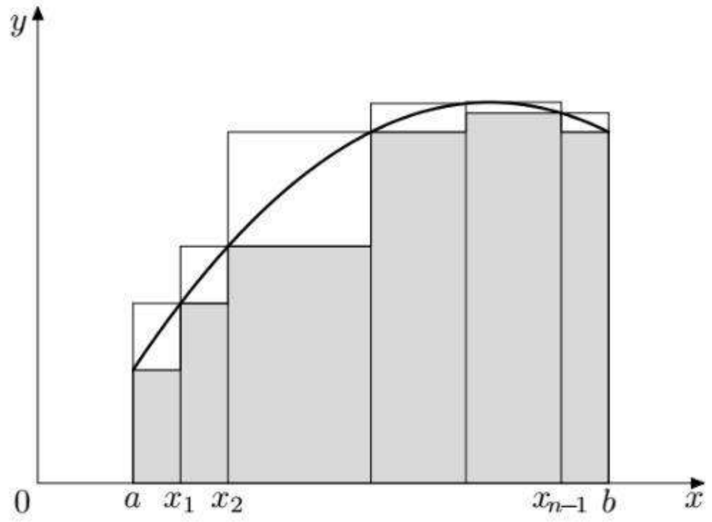


Рис. 10

С другой стороны, s_τ и S_τ — суммы Дарбу функции f. Так как f интегрируема,

$$\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = \int_a^b f,$$

то есть неравенству (12) одновременно для всех τ удовлетворяет только одно число, а именно $\int_a^b f$. Значит,

$$S(Q_f) = \int_a^b f.$$

(1)

Если f непрерывна, то множество $\widetilde{Q}_f$ называют *криволинейным сектором.*

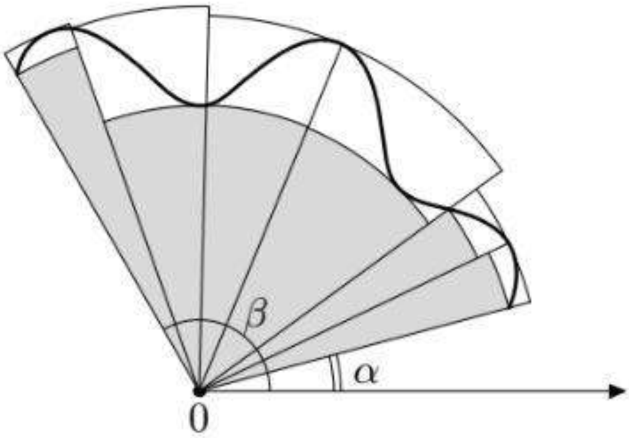


Рис. 13

Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$. Примем без доказательства, что $\widetilde{Q}_f$ имеет площадь, и найдем ее. Напомним, что площадь кругового сектора с радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Возьмем дробление $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[\alpha, \beta]$, обозначим

$$m_k = \inf_{\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi), \qquad M_k = \sup_{\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]} f(\varphi)$$

и составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\, \Delta\varphi_k, \qquad S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\, \Delta\varphi_k.$$

Геометрически s_τ есть сумма площадей меньших, а S_τ — бóльших круговых секторов на рисунке 13, что по усиленной аддитивности совпадает с площадями объединений указанных секторов. Поскольку $\widetilde{Q}_f$ содержит объединение меньших и содержится в объединении бóльших секторов,

$$s_\tau \leqslant S(\widetilde{Q}_f) \leqslant S_\tau. \tag{13}$$

С другой стороны, s_τ и S_τ — суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2$. Так как эта функция интегрируема,

$$\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2,$$

то есть неравенству (13) одновременно для всех τ удовлетворяет только одно число, а именно $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2$. Значит,

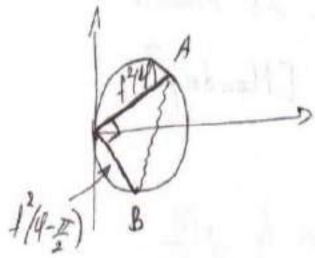
$$S(\widetilde{Q}_f) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2.$$

Изопериметрическое неравенство

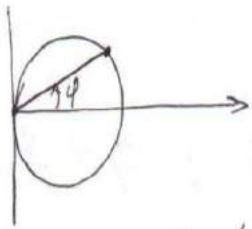
Целью изопериметрической задачи является поиск фигуры наибольшей возможной площади, граница которой имеет заданную длину.

Теорема: Изопериметрическое неравенство.

Если $F \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая, выпуклая фигура. $\operatorname{diam} F \le 1$. Тогда $S(F) \le \frac{\pi}{4}$;



Δ



$r = f(\varphi)$ — непр.

$$S(F) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f^2(\varphi)\,d\varphi = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\psi-\tfrac{\pi}{2})\,d\psi\right] =$$

$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\varphi)\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\varphi-\tfrac{\pi}{2})\,d\varphi\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{"}AB\text{"}^2(\varphi)\,d\varphi \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\varphi = \frac{\pi}{4};$$

diam = диаметр

Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера - Маклорена

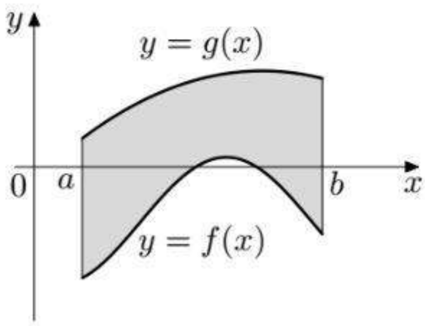


Рис. 11c

Если $f, g \in R[a,b]$, $f \leqslant g$, то площадь закрашенной фигуры на рисунке 11c (в случае непрерывных f и g эта фигура тоже называется *криволинейной трапецией*) равна $\int_a^b (g-f)$. Для доказательства следует перенести фигуру выше оси абсцисс (то есть добавить к f и g такую постоянную c, что $f+c \geqslant 0$) и представить ее в виде разности двух подграфиков. Получим:

$$S = \int_a^b \left((g+c)-(f+c)\right) = \int_a^b (g-f).$$

Теорема: Простейший случай ф-лы Эйлера - Маклорена.

$m, n \in \mathbb{Z}$, $f \in C^2[m,n]$ Тогда $\int_m^n f(x)\,dx = \sum_{i=m}^{n}{}^{(*)} f(i) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})\,dx$;

(*) - крайние слагаемые: $\frac{1}{2} f(m)$; $\frac{1}{2} f(n)$ | $\{\}$ - дробная часть числа

Δ

$a := m$; $b := n$; $\int_a^b f(x) - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}}_{f(i)} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=1} = -\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\,\psi(x)$;

$(x-(k-1))(k-1)$

$x \in [k-1; k]$

$\blacktriangle$

NB: $\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot f(1) + \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2}\int_1^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})\,dx$;

Вид ф-лы, в кот.-ом мы будем её использовать.

Асимптотика степенных сумм

F.e: (1.) $f(x) = x^p$, $p > -1$.

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\,dx =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\underbrace{\int_1^n x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\,dx}_{O(\max(1,n^{p-1}))};$$

$$\left[\int_1^n x^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^n\right]$$

$$0 \le \int_1^n x^{p-2}\underbrace{\{x\}(1-\{x\})}_{\le \frac{1}{4}} \le \frac{1}{4}\int_1^n x^{p-2} = \frac{1}{4}\frac{x^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \left|\frac{1}{4}\frac{n^{p-1}-1}{p-1}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4}\frac{n^{p-1}}{(p-1)} \le const;$$

Н-р: $p = -\frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\cdot\sqrt{n} + \underline{O}(1)$;

$p = 1$; $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 0$ к конс.

Асимптотика частичных сумм гармонического ряда. Постоянная Эйлера

(2) $p = -1$; $f(x) = \frac{1}{x}$;

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{x^3}\{x\}(1-\{x\})\,dx =$$

$$= \ln x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})\,dx}_{>0,\ \text{возрастающая посл-ть, ограниченная}}$$

$$0 \le \int_1^n \frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})\,dx \le \frac{1}{4}\int_1^n \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8}$$

т.е. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + \bar{o}(1)$, где $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$

γ – назыв. "Постоянная Эйлера" $\approx 0{,}5772\ldots$

Формула Стирлинга

$\underline{(3)}$ $f(x) = \ln x$;

$$\int_1^n \ln x \cdot dx = x\cdot \ln x - x \Big|_1^n = n\cdot \ln x - n + 1.$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = n\cdot \ln n - n + 1. + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})\,dx}_{\text{возр., ограниченная.} < \frac{1}{4}}$$

$$\underbrace{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n}_{\ln(n!)} = n\cdot\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + c + o(1)$$

$$n! = e^{n\cdot \ln n - n + \frac{1}{2}\ln x} \cdot e^{c+o(1)} = n^n \cdot e^{-n}\cdot\sqrt{n}\cdot e^{c+\bar{o}(1)};$$

т.е. $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\, C_1$;

См. след стр.

$\underline{\text{Ф-ла Валлиса}}$: $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$(2k)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2k) = 2^k(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots k) = 2^k\cdot k!$$

$$(2k-1)!!\cdot\frac{(2k)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{(2k)!!}$$

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{(2k)!!^2}{(2k)!\sqrt{2k}} = \frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!\sqrt{2k}} \sim \frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot k\cdot c_1^2}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c_1\sqrt{2k}} =$$

$$= \frac{c_1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

Тогда $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}}$ Ф-ла Стирлинга;

Неравенство Йенсена для сумм

Пусть f выпукла на <a, b>, числа q1, q2, …, qn таковы, что q1, q2, …, qn > 0 и q1 + q2 + … + qn = 1, тогда при любых x1, x2, …, xn ∈$< a, b >$ выполняется:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \le q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_nf(x_n)$$

или

$$f\left(\sum_{i=1}^n q_ix_i\right) \le \sum_{i=1}^n q_if(x_i)$$

http://bit.ly/28PoClV

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i).$$

Замечания:

- Если функция $f(x)$ вогнута (выпукла вверх), то знак в неравенстве меняется на противоположный.
- Сам Иоган Йенсен исходил из более частного соотношения, а именно $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, оно отвечает случаю $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$.

Доказательство

Доказательство проводится методом математической индукции.

- Для $n = 2$ неравенство следует из определения выпуклой функции.
- Допустим, что оно верно для какого-либо натурального числа n, докажем, что оно верно и для $n+1$, то есть $f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}) \le q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_nf(x_n) + q_{n+1}f(x_{n+1})$.

С этой целью, заменим слева сумму двух последних слагаемых $q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}$ одним слагаемым

$$(q_n + q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right);$$

это даст возможность воспользоваться неравенством для n и установить, что выражение выше не превосходит суммы

$$q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + (q_n+q_{n+1})f\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right).$$

Остается лишь применить к значению функции в последнем слагаемом неравенство для $n = 2$.

Неравенство Йенсена для интегралов

Теорема 4. Неравенство Иенсена для интегралов. *Пусть f выпукла и непрерывна на $\langle A,B\rangle$, $\varphi \in C([a,b] \to \langle A,B\rangle)$, $\lambda \in C([a,b] \to [0,+\infty))$, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда*

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda\cdot(f\circ\varphi).$$

Доказательство. Обозначим

$$c = \int_a^b \lambda\varphi, \qquad E = \{x \in [a,b] : \lambda(x) > 0\},$$

$$m = \inf_E \varphi, \qquad M = \sup_E \varphi$$

(m и M конечны по теореме Вейерштрасса). Если $m = M$, то есть φ постоянна на E, то $c = m$ и обе части неравенства Иенсена равны $f(m)$.

Пусть $m < M$. Тогда $c \in (m, M)$ и, следовательно, $c \in (A, B)$. Функция f имеет в точке c опорную прямую (см. § 8 главы 3); пусть она задается уравнением $y = \alpha x + \beta$. По определению опорной прямой $f(c) = \alpha c + \beta$ и $f(t) \geqslant \alpha t + \beta$ при всех $t \in \langle A, B\rangle$. Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha \int_a^b \lambda\varphi + \beta \int_a^b \lambda =$$
$$= \int_a^b \lambda \cdot (\alpha\varphi + \beta) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi). \quad \square$$

Определение. Опорная прямая.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклое множество. Тогда прямая l называется **опорной прямой**, если $l \cap A \neq \emptyset$.

Если A содержится в одной замкнутой полуплоскости, и $l \cap A$ - точка, то такая прямая называется **строго опорной прямой**.

Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

Теорема 1 (неравенство Коши-Буняковского)

Для любых чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Доказательство

При $n = 1$ неравенство $(a_1b_1)^2 \le a_1^2b_1^2$ верно. Допустим,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k)^2 \le (a_1^2 + \ldots + a_k^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2).$$

Докажем, что

$$(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1})^2 \le (a_1^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + ..b_k^2 + b_{k+1}^2).$$

Перепишем это неравенство, частично раскрыв скобки:

$$(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \le \le (a_1^2 + \ldots + a_k^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + + a_{k+1}^2(b_1^2 + \ldots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + \ldots + a_k^2).$$

Легко заметить, что для того, чтобы доказать это неравенство, достаточно доказать

$$2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k) \le a_{k+1}^2(b_1^2 + \ldots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + \ldots + a_k^2)$$

Перенеся все слагаемые в одну сторону, и сгруппировав их, получаем очевидное неравенство:

$$(a_{k+1}b_1 - a_1b_{k+1})^2 + (a_{k+1}b_2 - a_2b_{k+1})^2 + \ldots + (a_{k+1}b_k - a_kb_{k+1})^2 \ge 0.$$

А это и доказывает неравенство Коши-Буняковского.

Следствие. Неравенство Коши – Буняковского для интегралов. *Пусть* $f, g \in C[a,b]$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Для доказательства следствия надо положить в неравенстве Гёльдера $p = q = 2$.

Теорема 5. Неравенство Гёльдера для интегралов. *Пусть* $f, g \in C[a,b]$, p *и* q — *сопряженные показатели. Тогда*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ $(k \in [0 : n])$, $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{1/p}$, $b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{1/q}$ $(k \in [0 : n-1])$. Тогда $a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$ в силу равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Воспользуемся неравенством Гёльдера для сумм:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

которое принимает вид

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{1/q}.$$

В последнем неравенстве участвуют суммы Римана для непрерывных функций fg, $|f|^p$ и $|g|^q$. При $n \to \infty$ суммы стремятся к интегралам от этих функций. Остается сделать предельный переход в неравенстве и воспользоваться непрерывностью модуля и степенных функций. $\square$

(1)

Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

Лемма 1. *Пусть функция* $I\colon J_E \to \mathbb{R}$ *аддитивна,* $a \in E$, $\Phi(x) = I\big([a,x]\big)$ $(x \in E)$, $x_0 \in E$. *Тогда* $I'(x_0)$ *и* $\Phi'(x_0)$ *существуют или нет одновременно и, если существуют, то равны.*

Доказательство. 1. Пусть существует $I'(x_0) = \rho$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ из определения $I'(x_0)$. Тогда для любого $x \in E$, такого что $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - \rho\right| = \left|\frac{I\big([x_0, x]\big)}{x - x_0} - \rho\right| < \varepsilon.$$

Это и значит, что $\rho = \Phi'(x_0)$.

2. Пусть существует $\Phi'(x_0) = \rho$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению $\Phi'(x_0)$ подберем такое $\delta > 0$, что для любого $x \in E$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$\rho - \varepsilon < \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} < \rho + \varepsilon.$$

Пусть $[a,b] \subset E$, $x_0 \in [a,b]$, $0 < b - a < \delta$. Тогда

$$I\big([a,b]\big) = I\big([a,x_0]\big) + I\big([x_0,b]\big) = (\Phi(x_0) - \Phi(a)) + (\Phi(b) - \Phi(x_0)) <$$
$$< (\rho + \varepsilon)(x_0 - a) + (\rho + \varepsilon)(b - x_0) = (\rho + \varepsilon)(b - a),$$

и, аналогично,

$$I\big([a,b]\big) > (\rho - \varepsilon)(b - a).$$

Это и значит, что $\rho = I'(x_0)$. $\square$

Следствие. Восстановление аддитивной функции отрезка по ее плотности. *Пусть функция* $I\colon J_E \to \mathbb{R}$ *аддитивна,* $f \in C(E)$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. f *— плотность* I.
2. *Для любого* $[a,b] \in J_E$ *верно равенство* $I\big([a,b]\big) = \int_a^b f$.

Доказательство. Если $f = I'$, то по лемме 1 и формуле Ньютона – Лейбница для любого отрезка $[a,b] \subset E$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = I\big([a,b]\big).$$

Обратное верно по теореме Барроу. $\square$

(2)

Обобщенная теорема о плотности

10 ← 9
2 4
A H
L L

$\Delta \quad \Phi(\Delta) \qquad M_\Delta, m_\Delta, f$

1. $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
2. $m_\Delta \cdot |\Delta| \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot |\Delta|$
3. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}]{} 0$

$$\Phi[p,q] = \int_p^q f \cdot dx;$$

— плотность (2-ое опр-ние)
если напишешь три вещи
то $\underline{OK}$.
(обобщ. теор. о плотности)

$$M_\Delta^{(j)} = \max_{\Delta} |\gamma_j'(t)|;$$

$$m_\Delta^{(j)} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_j'(t)|;$$

$$\underline{M_\Delta}: = \sqrt{\left(M_\Delta^{(1)}\right)^2 + \left(M_\Delta^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(M^{(m)}\right)^2};$$

$$\underline{m_\Delta}: = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(m_\Delta^{(j)}\right)^2};$$

$$\underline{f(t)}: = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\gamma_j'\right)^2(t)};$$

$\underline{1.}$ $t \in [p,q] = \Delta;$

$$m_\Delta \le f(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (\gamma_j'(t))^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(M_\Delta^{(j)}\right)^2} = M_\Delta;$$

$\underline{2.}$ $\Delta = [p,q];$

$$\underline{\dots -p)}, \le l_\gamma \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \left(M_\Delta^{(j)}\right)^2}_{M_\Delta} \underbrace{(x_i - x_{i-1})^2}_{\text{не зависит от } j} } =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_\Delta \cdot (x_i - x_{i-1}) = \underline{M_\Delta (q-p)},$$

$$m_\Delta (p-q) \le l_\gamma [p,q] \le M_\Delta (q-p);$$

$\underline{3.}$

$$M_\Delta - m_\Delta = \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(M_\Delta^{(j)}\right)^2 - \left(m_\Delta^{(j)}\right)^2}{M_\Delta - m_\Delta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(M_\Delta^{(j)} - m_\Delta^{(j)}\right) \underbrace{\frac{M_\Delta^{(j)} + m_\Delta^{(j)}}{M_\Delta + m_\Delta}}_{\le 1} \le \sum_{j=1}^{m} \left(M_\Delta^{(j)} - m_\Delta^{(j)}\right) \xrightarrow[\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}]{} 0$$

$\sqrt{\sum_{\ell} \left(M_\Delta^{(\ell)} - m_\Delta^{(\ell)}\right)^2}$

т. Кантора о равн. Непр-сти $f: [p,q] \to \mathbb{R}$ - непр.
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta, \;\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde\delta > 0 : \; |\Delta| < \tilde\delta \quad \sum_{j=1}^{m} \left(M_\Delta^{(j)} - m_\Delta^{(j)}\right) \le \sum_{j=1}^{m} \varepsilon = m \cdot \varepsilon;$$

$$\tilde\delta := \min\left(\underbrace{\delta_{\gamma_1'}}_{\text{из т. Кант.}}, \delta_{\gamma_2'}, \dots, \delta_{\gamma_m'}\right)$$

▲

Объем фигур вращения

Объём тела вращения

Пусть T — тело вращения, образованное вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, расположенной в верхней полуплоскости и ограниченной осью абсцисс, прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиком непрерывной функции $y=f(x)$.

Докажем, что это *тело вращения кубируемо и его объем выражается формулой*

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx\,.$$

Сначала докажем, что это тело вращения регулярно, если в качестве Π выберем плоскость Oyz, перпендикулярную оси вращения. Отметим, что сечение, находящееся на расстоянии x от плоскости Oyz, является кругом радиуса $f(x)$ и его площадь $S(x)$ равна $\pi f^2(x)$ (рис. 46). Поэтому функция $S(x)$ непрерывна в силу непрерывности $f(x)$. Далее, если $S(x_1)\leqslant S(x_2)$, то это значит, что $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Но проекциями сечений на плоскость Oyz являются круги радиусов $f(x_1)$ и $f(x_2)$ с центром O, и из $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ вытекает, что круг радиуса $f(x_1)$ содержится в круге радиуса $f(x_2)$.

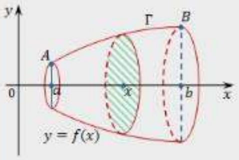


Рис. 46

Итак, тело вращения регулярно. Следовательно, оно кубируемо и его объем вычисляется по формуле

$$V=\pi\int\limits_a^b S(x)\,dx=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

Если бы криволинейная трапеция была ограничена и снизу и сверху кривыми $y_1=f_1(x),\ \ y_2=f_2(x)$, то

$$V=\pi\int\limits_a^b y_2^2\,dx-\pi\int\limits_a^b y_1^2\,dx=\pi\int\limits_a^b\Bigl(f_2^2(x)-f_1^2(x)\Bigr)dx\,.$$

Формулой (3) можно воспользоваться и для вычисления объема тела вращения в случае, когда граница вращающейся фигуры задана параметрическими уравнениями. В этом случае приходится пользоваться заменой переменной под знаком определенного интеграла.

В некоторых случаях оказывается удобным разлагать тела вращения не на прямые круговые цилиндры, а на фигуры иного вида.

Например, найдем ***объем тела, получаемого при вращении криволинейной трапеции вокруг оси ординат***. Сначала найдем объем, получаемый при вращении прямоугольника с высотой y#, в основании которого лежит отрезок $[x_k;x_{k+1}]$. Этот объем равен разности объемов двух прямых круговых цилиндров

$$\Delta V_k=\pi y_k x_{k+1}^2-\pi y_k x_k^2=\pi y_k\bigl(x_{k+1}+x_k\bigr)\bigl(x_{k+1}-x_k\bigr).$$

Но теперь ясно, что искомый объем оценивается сверху и снизу следующим образом:

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}m_k x_k\Delta x_k\leqslant V\leqslant 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}M_k x_k\Delta x_k\,.$$

Отсюда легко следует **формула объёма тела вращения вокруг оси ординат**:

$$V=2\pi\int\limits_a^b xy\,dx\,. \qquad (4)$$

Длина гладкого пути как аддитивная функция промежутка

Лемма:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ – путь, $c \in (a,b)$ | Тогда $l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$;

Δ 1. $\leq$

$\measuredangle$ $[a,c]$ τ_1 $[c;b]$ τ_2 $[a;b]$ $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$;

$$\underset{\wedge}{l(\gamma_{\tau_1})} + \underset{\wedge}{l(\gamma_{\tau_2})} = l(\gamma_\tau)$$

$$l(\gamma|_{[a,c]}) \quad l(\gamma|_{[c;b]})$$

$\sup\limits_{\tau_1, \tau_2}$

$\sup\limits_{\tau} l(\gamma) \geq \sup\limits_{\tau = \tau_1, \tau_2} l(\gamma_\tau)$;

2. $\geq$

$[a,b]$ τ $[a;c]$ τ_1 $[c,b]$ τ_2

добавим точку $\underline{c}$ и разобьём на два дробления

$$l(\gamma_\tau) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq$$

$$\leq \underline{l(\gamma_{\tau_1}) + l(\gamma_{\tau_2})};$$

в этой части вместо какого-то $\underline{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}$ берём $\|\gamma(t_i) - \gamma(c)\| + \|\gamma(c) - \gamma(t_{i-1})\|$;

$$l(\gamma_\tau) \leq l(\gamma_{\tau_1}) + l(\gamma_{\tau_2})$$

$\sup \tau \downarrow$

$l(\gamma) \leq \sup\left(l(\gamma_{\tau_1}) + l(\gamma_{\tau_2})\right) \leq$, где τ_1, τ_2 – получены из τ (добавлением точки)

$$\leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c;b]})$$

Вычисление длины гладкого пути

Теорема 2. Длина гладкого пути. *Пусть* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – *гладкий путь. Тогда* γ *спрямляем и*

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|.$$

Доказательство. Докажем, что функция $\|\gamma'\|$ — плотность s.

Пусть $\Delta \subset [a, b]$. Возьмем дробление $\eta = \{u_k\}_{k=0}^n$ отрезка Δ Тогда по определению евклидовой длины

$$\ell_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl\|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\bigr\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k)\bigr)^2}.$$

По формуле Лагранжа при каждых i и k найдется такая точка $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$, что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma_i'(c_{ik})\Delta u_k.$$

Поэтому

$$\ell_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2(c_{ik})} \cdot \Delta u_k.$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|, \qquad m_\Delta^{(i)} = \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|,$$
$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(M_\Delta^{(i)}\bigr)^2}, \qquad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bigl(m_\Delta^{(i)}\bigr)^2}$$

($M_\Delta^{(i)}$ и $m_\Delta^{(i)}$ существуют по теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях) и покажем, что m и M удовлетворяют условиям теоремы 1. Для любого дробления η отрезка Δ

$$m_\Delta |\Delta| \leqslant \ell_\eta \leqslant M_\Delta |\Delta|.$$

Переходя к супремуму по всем дроблениям, мы получим

$$m_\Delta |\Delta| \leqslant s(\Delta) \leqslant M_\Delta |\Delta|.$$

Тем самым проверено условие 1) теоремы 1.

В частности, при $\Delta = [a, b]$ отсюда следует, что путь γ спрямляем.

Условие 2) теоремы 1, очевидно, следует из определения m и M: при всех $t \in \Delta$

$$m_\Delta \leqslant \|\gamma'(t)\| \leqslant M_\Delta.$$

Простейшие свойства несобственного интеграла

Н1. Аддитивность несобственного интеграла по промежутку. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, то для любой точки $c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{8}$$
Обратно, если при некотором $c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

Доказательство. При всех $A \in (c,b)$ по свойству аддитивности интеграла
$$\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f. \tag{9}$$
При $A \to b-$ предел обеих частей равенства (9) существует или нет одновременно, то есть сходимость $\int_c^b f$ эквивалентна сходимости $\int_a^b f$. Равенство (8) получается переходом к пределу в (9). $\square$

Определение 3. Несобственный интеграл $\int_A^{\to b} f$ называется *остатком* интеграла $\int_a^{\to b} f$.

Свойство Н1 утверждает, что интеграл и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Н2. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, то $\int_A^b f \underset{A\to b-}{\longrightarrow} 0$.* Другими словами, *остаток сходящегося интеграла стремится к нулю.*

Действительно,
$$\int_A^b f = \int_a^b f - \int_a^A f \underset{A\to b-}{\longrightarrow} \int_a^b f - \int_a^b f = 0.$$

Н3. Линейность несобственного интеграла. *Если интегралы $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов
$$\int_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^A f + \beta \int_a^A g.$$

Замечание 1. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится.

В самом деле, если бы интеграл от $f+g$ сходился, то сходился бы и интеграл от $f = (f+g) - g$, что неверно.

Н4. Монотонность несобственного интеграла. *Если ин-*

Признак сравнения

Теорема 2. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов. *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$, $f, g \geqslant 0$,

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \textit{при} \;\; x \to b-.$$

1. *Если интеграл* $\int_a^b g$ *сходится, то и интеграл* $\int_a^b f$ *сходится.*

2. *Если интеграл* $\int_a^b f$ *расходится, то и интеграл* $\int_a^b g$ *расходится.*

Доказательство. 1. По определению символа O найдутся такие $\Delta \in (a, b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leqslant K \int_\Delta^b g < +\infty,$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходился, то по пункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^b f$, что неверно. $\square$

Исследование сходимости интеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x},$$

Пример 4. Исследуем сходимость интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В § 4 главы 3 было доказано, что $\ln x = o(x^q)$ при $x \to +\infty$, $q > 0$. Отсюда для любых $p \in \mathbb{R}$ и $q > 0$ верно соотношение $\ln^p x = o(x^q)$ при $x \to +\infty$. Действительно, при $p \leqslant 0$ это очевидно, а при $p > 0$

$$\frac{\ln^p x}{x^q} = \left(\frac{\ln x}{x^{q/p}}\right)^p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если $\alpha > 1$, то

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right), \quad x \to +\infty,$$

поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^{-\beta} x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0$. Так как $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ сходится, а тогда исходный интеграл сходится по признаку сравнения при любом β.

Если $\alpha < 1$, то аналогично

$$\frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\right), \quad x \to +\infty.$$

Так как $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ расходится, а тогда исходный интеграл расходится по признаку сравнения при любом β.

Если $\alpha = 1$, то сделаем замену $\ln x = t$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}.$$

Последний интеграл сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$.

Итак, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится ровно в двух случаях: при $\alpha > 1$ и произвольном β или при $\alpha = 1$ и $\beta > 1$.

Гамма-функция Эйлера. Простейшие свойства.

Тут сформулировать и доказать 3 свойства гаммы-функции:

1) **Сходимость функции в нуле**

1. Сходимость в нуле $\int\limits_0 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$

$t^{x-1} \cdot e^{-t} \le t^{x-1}$

$\int\limits_0 t^{x-1} \cdot dt$ - сходимость $\Rightarrow \int\limits_0 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ - сход.

2) Сходимость функции в +inf

Доказательство:

2. Сходимость в $+\infty$ $\int\limits^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$

$t^{x-1} \cdot e^{-t} = \left(t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot e^{-\frac{t}{2}} \le e^{-\frac{t}{2}}$ при больших t, $t \geq A_1$

$\left(t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

$\int\limits_{A_1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} = -2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \Big|_{A_1}^{+\infty}$ - конечн.

-

3) Г(z+1) = (z)*Г(z) (т.е Г(z+1) = z!)

Доказательство:

(3) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

$$\int\limits_0^{+\infty} \underbrace{t^x}_{f} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g'} \cdot dt = \begin{bmatrix} f = t^x & f' = x \cdot t^{x-1} \\ g' = e^{-t} & g = -e^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{-t^x \cdot e^{-t} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{x \cdot t^{x-1}}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{g} = x \cdot \Gamma(x)$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

$\Gamma(n+1) = n!$

Теорема об абсолютно сходящихся интегралах

Теорема: "Об абсолютной сходимости интеграла"

$\exists\, f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда эквивалентны:

1. $\int_a^b f$ - абсолютно сход.
2. $\int_a^b |f|$ - сходится;
3. $\int_a^b f_+$, $\int_a^b f_-$ - оба сходятся

Δ $1 \Rightarrow 2$ - тривиально (по опр-нию)

$2 \Rightarrow 3$ $f_+ \leq |f|$ $f_- \leq |f|$ сход. по признаку сравнения.

$1 \Leftarrow 3$ $f = f_+ - f_-$; по св-ву инт., сходится как сумма сход.-ся интегралов.

$|f| = f_+ + f_-$;

Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла

Теорема 3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. *Пусть $f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$, g монотонна.*

1. Признак Дирихле. *Если функция $F(A) = \int_a^A f$ ограничена, а $g(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.*

2. Признак Абеля. *Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.*

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg' = -\int_a^b Fg'.$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что последний сходится абсолютно, по признаку сравнения. Пусть K таково, что $|F(x)| \leqslant K$ при всех $x \geqslant a$. Поскольку g монотонна, g' не меняет знака на $[a, b)$. Следовательно,

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant K \int_a^b |g'| = K \left| \int_a^b g' \right| = K \left| [g]_a^b \right| = K|g(a)|.$$

2. Так как g монотонна и ограничена, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = \alpha$. Функции f и $g - \alpha$ удовлетворяют условиям признака Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g - \alpha)$ сходится, а тогда и интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g - \alpha) + \alpha \int_a^b f. \quad \square$$

Изучение интеграла $\int_1^{\infty} \blacksquare \frac{sinx\ dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

11 2 A L

F.e: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

$p \in \mathbb{R}$

Сходимость? Абсол.-ная сход?

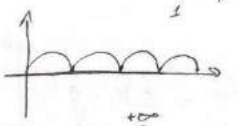
$p \in (0;1]$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \begin{bmatrix} g' = \sin x; & g = -\cos x \\ f = \frac{1}{x^p}; & f' = -p\frac{1}{x^{p+1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{-\cos x \cdot \frac{1}{x^p}\Bigg|_{x=1}^{x=+\infty}}_{0+\cos 1;} - \underbrace{p\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx}_{\text{абс. сход.}}$$

$\Rightarrow$ интеграл сходится.

Абсол. сход. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{10^{-6}}{x^p}$ − расход.



// мало где станов. 0.

Иначе: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x^p}}_{\text{расход. } +\infty} - \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{сходится}}$; // провер. интегр. по частям

$p > 1$: $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$;

$\measuredangle \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ − сход. $\xRightarrow{\text{по призн. срав.}} \int \frac{|\sin x|}{x^p}$ − сход

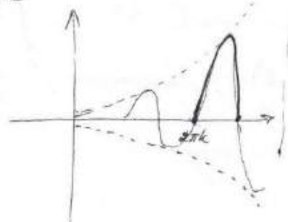
абсолютн. сход. (в том числе и сходится)

$p \leq 0$:

Критерий Б.-К. $\exists ?\ A_k, B_k \to +\infty$

$\int\limits_{A_k}^{B_k} f \not\to 0$ ($k \to \infty$) $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ − расход.

$\measuredangle$



$A_k = 2\pi k$; $B_k = 2\pi k + \pi$.

$\int\limits_{A_k}^{B_k} \frac{1}{x^p} \cdot \underbrace{\sin x}_{\geq 0}\,dx \geq$

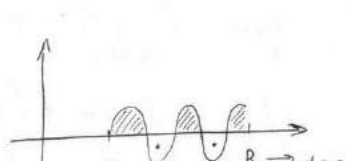
$\geq \min\limits_{[A_k, B_k]} \frac{1}{x^p} \int\limits_{A_k}^{B_k} \sin x\,dx \geq$

$\geq 1 \cdot 2$

$\Rightarrow$ не $\to 0$: $\int\limits_{A_k}^{B_k} \frac{\sin x}{x^p}$;

Опр-ние: Условная сходимость

$\int\limits_a^b f$ − сходится, но $\int\limits_a^b |f|$ − расходится



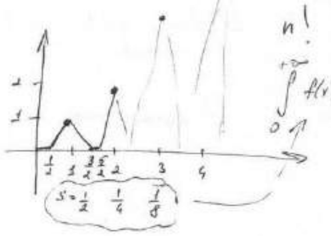
$S_{черн} = \int\limits_a^{+\infty} f_+$;

$S_{бел} = \int\limits_a^b f_-$;

F.e: $\int\limits_1^{+\infty} x^2 \cdot \sin(x^4)\,dx = \left[t = x^4\right] = \frac{1}{4}\int\limits_1 \frac{4x^3 \cdot \sin(x^4)}{x}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{4}}}\,dt$ − сходится.

NB: 1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ − сходится $\not\Rightarrow f \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2. $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ − сходится $\not\Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$



$n!$

$\int\limits_0^{+\infty} f(x) = 1$;

Теорема о покоординатной сходимости

Теорема 1. Сходимость и покоординатная сходимость. *Пусть* $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность в* $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* a.

2) *Для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *последовательность* $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* a_i.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. В силу (1) и замечания 1

$$|x_i^k - a_i| \leqslant \|x^k - a\| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = a_i$.

2) $\Rightarrow$ 1) Если $x_i^k \to a_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то

$$\|x^k - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - a_i\right)^2} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$. Мы воспользовались замечанием 1, теоремой об арифметических операциях над пределами и непрерывностью квадратного корня. $\square$

Указание:

(1) и **замечание 1** это:

Замечание 6. Непосредственно из определения 1 вытекает двусторонняя оценка нормы вектора: для любого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$|x_k| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \qquad (1)$$

Замечание 1. Определение предела последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно переписать на языке неравенств, а также свести его к пределу числовой последовательности. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\colon \ k > N \quad \left\|x^k - a\right\| < \varepsilon$$

или

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - a\right\| = 0.$$

2) Равенство $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \infty$ эквивалентно

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\colon \ k > N \quad \left\|x^k\right\| > \varepsilon$$

или

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k\right\| = +\infty.$$

Принцип выбора Больцано--Вейерштрасса в R^m

Теорема 4. Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса. *Пусть* $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если последовательность* $\{x^k\}$ *ограничена, то из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

2) *Если последовательность* $\{x^k\}$ *не ограничена, то у нее есть подпоследовательность* $\{x^{k_i}\}$, *стремящаяся к бесконечности.*

Доказательство. 1) Пусть последовательность $\{x^k\}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. В силу замечания 3 все ее координатные последовательности также ограничены, и для них можно воспользоваться одномерным принципом Больцано – Вейерштрасса. Выберем вначале из $\{x_1^k\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{r_i}\}$. Затем из последовательности $\{x_2^{r_i}\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{s_i}\}$. Заметим, что последовательность $\{x_1^{s_i}\}$ тоже сходится как подпоследовательность $\{x_1^{r_i}\}$. Продолжая эти рассуждения для других координатных последовательностей $\{x^k\}$, мы в конце концов получим подпоследовательность $\{x^{k_i}\}$, у которой все координатные последовательности сходятся. Тогда $\{x^{k_i}\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$ по теореме 1.

2) Так как числовая последовательность $\{\|x^k\|\}_{k=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, у нее есть подпоследовательность $\{\|x^{k_i}\|\}_{i=1}^{\infty}$, стремящаяся к $+\infty$ (см. § 2 главы 2). Тогда $\lim\limits_{i\to\infty} x^{k_i} = \infty$. □

Указание: теорема 1 = теорема о покоординатной сходимости, **замечание 3 = это**:

Замечание 3. ограниченность отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ эквивалентна ограниченности всех его координатных функций. В частности, последовательность $\{x^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ ограничена тогда и только тогда, когда все ее координатные последовательности ограничены.

Критерий Больцано--Коши для последовательностей

Теорема 5. Критерий Больцано – Коши. *Пусть* $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) *Последовательность* $\{x^k\}$ *сходится в* $\mathbb{R}^n$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k, m \in \mathbb{N}\colon k, m > N \quad \|x^k - x^m\| < \varepsilon$.

Замечание. Последовательность в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условию 2), называют *сходящейся в себе* или *фундаментальной*.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) По теореме 1 все координатные последовательности $\{x^k\}$ сходятся, и в силу одномерного критерия Больцано – Коши они фундаментальны. Тогда по $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$|x_i^k - x_i^m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{при всех } k, m > N.$$

Отсюда в силу (1) мы получим $\|x^k - x^m\| < \varepsilon$, что и дает 2).

2) $\Rightarrow$ 1) В силу (1) для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо неравенство

$$|x_i^k - x_i^m| \leqslant \|x^k - x^m\|.$$

Поэтому условие 2) влечет сходимость в себе координатных последовательностей $\{x^k\}$. По одномерному критерию Больцано – Коши все они сходятся в $\mathbb{R}$, а тогда по теореме 1 последовательность $\{x^k\}$ сходится в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Указание: теорема 1 = теорема о покоординатной сходимости, **(1)** = (см. указание к теореме о поокординатной сходимости)

Теорема о характеристике предельной точки

Теорема 6. Характеристика предельных точек. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) *Точка a является предельной для E.*

2) *Существует последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E \setminus \{a\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$.*

Доказательство проведем только для $a \in \mathbb{R}^n$, оставляя читателю случай $a = \infty$ в качестве упражнения.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть a — предельная точка E. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $x^k \in E \setminus \{a\}$, для которой $\|x^k - a\| < \frac{1}{k}$. Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - a\| = 0$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в $E \setminus \{a\}$, сходящаяся к a. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $\|x^k - a\| < \varepsilon$. Поэтому $x^k \in V_a(\varepsilon) \cap \big(E \setminus \{a\}\big)$, то есть $x^k \in \dot{V}_a(\varepsilon) \cap E$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ множество $\dot{V}_a(\varepsilon) \cap E$ непусто и, значит, точка a является предельной для E. $\square$

Теорема о характеристике замкнутых множеств

Теорема 1. Характеристика замкнутых множеств. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) *E замкнуто в $\mathbb{R}^n$.*

2) *E содержит все свои предельные точки в $\mathbb{R}^n$.*

3) *Если $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность в E, то $\lim\limits_{k\to\infty} x^k \in E$.*

Доказательство проведем по схеме 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в E, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Покажем, что $a \in E$. Если это не так, то $a \in \mathbb{R}^n \setminus E$, и в силу открытости $\mathbb{R}^n \setminus E$ найдется окрестность V_a точки a, лежащая в $\mathbb{R}^n \setminus E$. По определению предела при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $x^k \in V_a \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. С другой стороны, $x^k \in E$ для любых $k \in \mathbb{N}$, и мы получаем противоречие.

3) $\Rightarrow$ 2) Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — предельная точка E. По теореме 6 § 2 найдется последовательность $\{x^k\}$ в E, сходящаяся к a. Тогда в силу 3) $a \in E$.

2) $\Rightarrow$ 1) Докажем, что $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто. Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Проверим, что некоторая окрестность V_a точки a содержится в $\mathbb{R}^n \setminus E$. Если это не так, то для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $\dot{V}_a(\varepsilon)$ содержит точку множества E, то есть $\dot{V}_a(\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$. Тогда a является предельной точкой E, откуда в силу 2) $a \in E$, что невозможно. $\square$

Указание: теорема 6 = это теорема о характеристике предельных точек
Свойства открытых и замкнутых множеств

Теорема 2. *Пусть A — множество, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейства открытых и замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$ соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) $\bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ *открыто,* $\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ *замкнуто в* $\mathbb{R}^n$.

2) *Если множество индексов A конечно, то* $\bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ *открыто,* $\bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ *замкнуто в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. 1) Положим

$$E = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha, \quad F = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha.$$

Если $a \in E$, то существует такое $\alpha \in A$, что $a \in E_\alpha$. В силу открытости E_α у точки a есть окрестность $V_a \subset E_\alpha$. Тогда $V_a \subset E$, то есть E открыто. Для доказательства замкнутости F заметим, что в силу правила де Моргана (см. § 1 главы 1)

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} \bigl(\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha\bigr).$$

Так как множества $\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha$ открыты при всех $\alpha \in A$, из первой части утверждения 1) вытекает открытость $\mathbb{R}^n \setminus F$. Поэтому множество F замкнуто.

2) Пусть множество A конечно. Положим $E = \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$. Если $a \in E$, то $a \in E_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Тогда по любому $\alpha \in A$ найдется $\delta_\alpha > 0$, для которого $V_a\bigl(\delta_\alpha\bigr) \subset E_\alpha$. Положим

$$\delta = \min\{\delta_\alpha\colon \alpha \in A\}.$$

Поскольку множество A конечно, этот минимум существует и положителен. Заметим, что $V_a(\delta) \subset E_\alpha$ при всех $\alpha \in A$, то есть $V_a(\delta) \subset E$. Поэтому множество E открыто. Замкнутость $\bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ выводится из открытости E с помощью правила де Моргана так же, как в доказательстве первого утверждения. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно. $\square$

Следствие. *Пусть E открыто, а F замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Тогда $E \setminus F$ открыто, а $F \setminus E$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$.*

Действительно, так как $E \setminus F = E \cap \bigl(\mathbb{R}^n \setminus F\bigr)$, а $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто, то по теореме 2 $E \setminus F$ тоже открыто. Второе утверждение проверяется аналогично. $\square$

Лемма об описании замыкания

Теорема 3. Описание замыкания. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $a \in \operatorname{Cl} E$.
2) *Точка* a *лежит в* E *или является предельной для* E.
3) *В* E *существует последовательность, сходящаяся к* a.

Доказательство проведем по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) Если $a \notin E$ и a не является предельной точкой E, то найдется такое $\delta > 0$, что $V_a(\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. Перепишем это включение в виде $E \subset \mathbb{R}^n \setminus V_a(\delta)$. Отсюда в силу замкнутости $\mathbb{R}^n \setminus V_a(\delta)$ вытекает, что $\operatorname{Cl} E \subset \mathbb{R}^n \setminus V_a(\delta)$. Но это невозможно, поскольку $a \in \operatorname{Cl} E$.

2) $\Rightarrow$ 3) Если a является предельной точкой E, то искомая последовательность существует по теореме 6 § 2. В случае $a \in E$ нам подойдет постоянная последовательность, все члены которой равны a.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $\{x^k\}$ — последовательность в E, сходящаяся к a. Тогда $\{x^k\}$ лежит и в $\operatorname{Cl} E$, откуда по теореме 1 $a \in \operatorname{Cl} E$. $\square$

Указание: теорема 6 = это теорема о характеристике предельных точек, **теорема 1** = это теорема о характеристике замкнутых множеств

Эквивалентность двух определений предела

Теорема 1. Эквивалентность двух определений предела. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}^m$, *точка* $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ *является предельной для* E, $A \in \overline{\mathbb{R}^m}$. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *в смысле Коши.*

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *в смысле Гейне.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть A — предел f в смысле Коши. Возьмем последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E \setminus \{a\}$, стремящуюся к $\{a\}$. Нам нужно показать, что $f(x^k) \to A$ при $k \to \infty$. В силу 1) по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, для которого

$$f(x) \in V_A(\varepsilon) \quad \text{для всех} \ \ x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E.$$

Поскольку $x^k \to a$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $k > N$ справедливо включение $x^k \in V_a(\delta)$. Кроме того, $x^k \in E \setminus \{a\}$, откуда $x^k \in \dot{V}_a(\delta) \cap E$. Поэтому

$$f(x^k) \in V_A(\varepsilon) \quad \text{для любых} \ \ k > N.$$

Таким образом, $f(x^k) \to A$ при $k \to \infty$, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и в смысле Гейне.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть A — предел f по Гейне. Докажем, что предел f в смысле Коши также существует и равен A. Действительно, если это не так, то

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x \in \dot{V}_a(\delta) \cap E \ \ f(x) \notin V_A(\varepsilon). \tag{2}$$

Положим

$$F = \{x \in E \setminus \{a\}: \ f(x) \notin V_A(\varepsilon)\}.$$

Условие (2) означает, что $\dot{V}_a(\delta) \cap F \neq \varnothing$ при любом $\delta > 0$, то есть a является предельной точкой F. В силу теоремы 6 § 2 найдется последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в F (и, значит, в $E \setminus \{a\}$), стремящаяся к a. Тогда по определению 2 $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = A$, что невозможно, так как $f(x^k) \notin V_A(\varepsilon)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Единственность дифференциала

Следствие. Единственность дифференциала. *Если отображение f дифференцируемо в точке a, то его дифференциал $d_a f$ определен однозначно.*

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В силу единственности предела (см. § 4 главы 5) производная $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$ определена однозначно, и по формуле (4) значение $d_a f(e)$ также единственно. Осталось заметить, что $d_a f(0) = 0$. □

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e). \qquad (4)$$

Лемма о покоординатной дифференцируемости

Дифференцируемость отображения f в точке x равносильна одновременной дифференцируемости всех его координатных функций f_i в точке x.

Пусть f дифференцируемо в точке x. Запишем равенство из определения производного оператора покоординатно:

$f_i(x+h) = f_i(x) + A_i h + \alpha_i(h)|h|, i \in [1:m]$.

Координатные функции A_i линейного оператора A являются линейными, а непрерывность и равенство нулю в нуле отображения α равносильно такому же свойству его координатных функций α_i. Поэтому для f_i выполнено определение дифференцируемости.

Обратно, пусть f_i дифференцируемы в точке x. Тогда для каждого $i \in [1:m]$ существует линейная функция A_i и функция α_i, непрерывная и равная нулю в нуле, для которых выполняется равенство. Следовательно, для f выполняется равенство из определения производного оператора, где A — оператор с координатными функциями A_i.

Необходимое условие дифференцируемости

Теорема:

Если функция n переменных диффиренцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные производные по все переменным.

Доказательство:

Пусть $w = f(x_1, x_2, .., x_n)$ дифференцируема в точке $M_0({x_1}^0, {x_2}^0, .., {x_n}^0)$ из области $D \subset R^n$.По определению ее полное приращение $\triangle w = f({x_1}^0 + \triangle x_1, {x_2}^0 + \triangle x_2 \ldots) - f({x_1}^0, {x_2}^0 ..)$ можно представить как:

$\triangle w = \sum_{i=1}^{n} A_i \triangle x_i + \theta(p)$ (1)

Из этого следует:

1) Приращение $\triangle w \to 0$при всех $\triangle x_i \to 0, i = 1, 2..n$. Это ясно из того, что p- бесконечная малая при $\triangle x_i \to 0, i = 1, 2..n$,а поскольку A_i –некоторые числа, то и $\sum_{i=1}^{n} A_i \triangle x_i + \theta(p) \to 0$, при всех $\triangle x_i \to 0, i = 1, 2..n$.
2) Если положить $\triangle x_2 = \triangle x_3 = \ldots = 0$,то равенство (1) можно записать в виде $\triangle_{x_1} w =$

$A_1 \vartriangle x_1 + \theta(\vartriangle x_1)$ или $\frac{\Delta_{x_1} w}{\Delta x_1} = A_1 + \frac{\theta(\Delta x_1)}{\Delta x_1}$ и перейти к пределу при $\vartriangle x_1 \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta x_1} = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} A_1 + \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\theta(p)}{\Delta x_1} = A_1$, откуда следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta x_1} = \frac{\delta w}{\delta x}(M_0)$.Аналогично можно доказать существование конечных частных производных $\frac{\delta w}{\delta x_2}(M_0), \frac{\delta w}{\delta x_3}(M_0), \dots, \frac{\delta w}{\delta x_n}(M_0)$.

Следствие 1.

Из доказательства теоремы следует, что числа A_i в определении дифференцируемой функции равны значениям частных производных в точке дифференцируемости. Следовательно, полное приращение функции $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, дифференцируемой в точке M_0, можно представить в виде $\vartriangle w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta w}{\delta x_i}(M_0) \vartriangle x_i + \theta(p)$,где $\theta(p)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\vartriangle x_i)^2}$при всех $\vartriangle x_i \to 0$.

Следствие 2.

Если у функции $w = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ не существует конечная частная производная $\frac{\delta w}{\delta x_i}(M_0)$ хотя бы по одной переменной x_i, то в точке M_0 функция не является дифференцируемой.

http://nww13.narod.ru/vm1/6-2-2-0.html

Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 2. (Достаточное условие дифференцируемости).

Если функция $w = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$ и имеет в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0) \in D$ непрерывные частные производные по всем переменным x_i, то она в этой точке дифференцируема.

Доказательство.

При доказательстве ограничимся случаем функции двух переменных. Для функции большего числа переменных доказательство будет аналогичным.

Для функции $z = f(x, y)$ полное приращение в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Прибавим и вычтем в левой части этого соотношения значение функции $f(x_0 + \Delta x, y_0)$. Тогда Δz можно записать в следующем виде $\Delta z = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) +$
$+ (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_o, y_0))$.

Применяя **теорему Лагранжа** к разностям функций одной переменной, стоящих в скобках, получим

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) \cdot \Delta y + \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) \cdot \Delta x, \qquad (2),$$

где $y_0 < y_1 < y_0 + \Delta y$, $x_0 < x_1 < x_0 + \Delta x$. Ясно, что при $\Delta y \to 0$, $y_1 \to y_0$ и при $\Delta x \to 0$ $x_1 \to x_0$.

Поскольку частные производные непрерывны, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0),$$

откуда следует, что $\frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + \theta(\Delta x)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) + \theta(\Delta y)$, где $\theta(\Delta x)$ и $\theta(\Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Учитывая это, соотношение (2) можно переписать в следующем виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \theta(\Delta x) \cdot \Delta x + \theta(\Delta y) \cdot \Delta y .$$

Заметим, что выражение $\theta(\Delta x) \cdot \Delta x + \theta(\Delta y) \cdot \Delta y$ представляет собой бесконечно малую функцию при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, имеющую более высокий порядок, чем Δx и Δy. Если обозначить эту бесконечно малую функцию $\theta(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то полное приращение функции запишется в виде: $\Delta z = A_1 \cdot \Delta x + A_2 \cdot \Delta y + \theta(\rho)$, где A_1 и A_2 - вещественные числа, а $\theta(\rho)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Следовательно, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0.

Экстремальное свойство градиента

Теорема 4. Экстремальное свойство градиента. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка E, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, причем $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Тогда для любого вектора $e \in \mathbb{R}^n$ единичной нормы*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial e}(a)\right| \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|,$$

причем равенство реализуется только для $e = \pm\dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$.

Таким образом, вектор $\operatorname{grad} f(a)$ указывает *направление скорейшего изменения f в точке a*, а его длина равна модулю производной f по этому направлению в точке a.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$. Тогда по неравенству Коши в $\mathbb{R}^n$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial e}(a)\right| = \left|d_a f(e)\right| = \left|\operatorname{grad} f(a) \cdot e\right| \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|.$$

Равенство реализуется лишь в случае коллинеарности $\operatorname{grad} f(a)$ и e, то есть для $e = \pm\dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$. $\square$