Содержание

Линейные операторы

Линейные операторы и их матричная запись

1
1
B
L

Date: 9 February 2016
[Tuesday]

§ 18 Линейные операторы и их матричная запись.

Опр-ние: Линейный оператор (отображение)

одним и тем же полем

Пусть X, Y – л. п. над F. Отображение $A: X \to Y$ назыв. **линейным отображением** (или **линейным оператором**) если
1. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;
2. $A(\underbrace{\lambda x_1}_{\in X}) = \lambda \cdot \underbrace{A(x_1)}_{\in Y}$;

$\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall \lambda \in F$.

$A(x) = y$

$x \in X$; $y \in Y$ // вектор-значная ф-я

NB: можно обозначать $A(x) \leftrightarrow Ax$

Опр-ние: Автоморфизм

Если $A: X \to X$, то A назыв. **автоморфизмом**.

F.e.: 1. $A: X \to X$ по ф-ле $A(x) = x$; // NB: Обозначение $A = J$ назыв. **тождественным оператором** (единичный)

$Jx = x$ $(\forall x \in X)$

Линейность

2. **Нулевой оператор**

$$O: X \to Y \text{ по ф-ле } O(x) = 0_y;$$

3. **Проекторы**

$\exists\, X = L_1 + L_2$; $\triangleleft\, P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$ $\left(\text{но: } P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to L_1\right)$

4. **Оператор дифференцирования**

$X = \underset{(\text{над } \mathbb{R})}{P_n} = \{p(t) : \deg p \le n\}$; $\triangleleft\, D: X \to X$ по ф-ле $D(p(t)) = \frac{dp(t)}{dt} = \dot{p}(t) \in P_n$

Было: $D: P_n \to P_n$

Можно: $D: P_n \to P_{n-1}$

5.

$\exists\, X = C(-1; 1)$

$K(x, y)$ - непр-ная ф-я по обеим переменным.

$\triangleleft\, K: X \to X$ по ф-ле $K(f(x)) = \underbrace{\int_{-1}^{1} K(x,y) \cdot f(y)\, dy}_{\in X}$

1

Матрица линейного оператора

Пусть $A: X \longrightarrow Y$

$X: \dim X = n \qquad Y: \dim Y = m$

$\beta_X = \{e_i\}_{i=1}^{n} \qquad \beta_Y = \{h_k\}_{k=1}^{m}$

$$\Delta \quad \underbrace{A \underbrace{e_i}_{\in X}}_{\in Y} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_i^k h_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

Опр-ние: Матрица линейного оператора

Матрица $A = \| \alpha_i^k \|$ созданная по правилу (*) назыв. матр. лин. опер-ра в паре базисов B_X и B_Y.

F.e: 1. $\mathcal{I}: X \longrightarrow X$;

$$\longleftrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A = \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}_{[m \times n]}$$

$$\begin{array}{cccc} \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ Ae_1 & Ae_2 & & Ae_m \end{array}$$

2. $\mathcal{O}: X \to Y$ по ф-ле $\mathcal{O}_X = 0_Y$
$\dim X = n$; $\dim Y = m$;

$$\mathcal{O} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow m$$

в $\forall$ паре базисов β_X и β_Y

3. $X = L_1 + L_2$; $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$

$\beta_{L_1} = \{e_i\}_{i=1}^{k}$; $\beta_{L_2} = \{e_i\}_{i=k+1}^{n}$

$\dim L_1 = k$; $\dim L_2 = n - k$;

$\dim X = n$;

$$P_{L_1}^{\parallel L_2} = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_n \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 & & \dots & 0 \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} Pe_1 & Pe_2 & Pe_k & Pe_{k+1} \end{array}$$

$$P_{L_1}^{\parallel L_2} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & \mathcal{O}_{k, n-k} \\ \hline \mathcal{O}_{n-k, k} & \mathcal{O}_{n-k, n-k} \end{array} \right)$$

4.

$D: \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n \quad (X = \mathcal{P}_n)$

$D(p(t)) = p'(t)$

$B_{\mathcal{P}_n} = \{1, t, t^2, \dots t^n\}$

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{n-2} \\ t^{n-1} \\ t^n \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} D1 & Dt & \qquad Dt^n \\ & & \qquad n \cdot t^{n-1} \end{array}$$

$Rg\, \mathcal{D} = n - 1$;

1
3
B
b

Теорема:

Пусть $X: \mathcal{B}_X = \{e_i\}_{i=1}^n$

$Y: \mathcal{B}_Y = \{h_k\}_{k=1}^n$

$A: X \to Y$ - лин. опер.

$A_{[m\times n]} = \|\alpha_i^k\|$ - матр. лин. опер. A в паре базисов.

Задание линейного оператора эквивалентно заданию его матрицы в паре фиксированных базисов X и Y.

Δ

1. $\Rightarrow$ // Очевидно.
2. $\Leftarrow$ // есть $x \in X \Rightarrow$ Как найти $y = Ax$?

$$x \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \ ; \quad y = \sum_{i=1}^m \eta^k \cdot h_k ;$$

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \overset{\text{лин-ть 1.}}{=} \sum_{i=1}^n A\left(\xi^i e_i\right) \overset{\text{лин-ть 2.}}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i A e_i \overset{\text{Опр-ие } A_n}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i \underbrace{\left(\sum_{k=1}^m \alpha_i^k h_k\right)}_{Ae_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \xi^i\right) h_k = \sum_{k=1}^m \eta^k \cdot h_k \ ; \quad \boxed{\eta^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \xi^i} \quad Y = A \cdot X$$

// произв. матриц.

$$y = A \cdot x.$$

$$Y = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} ;$$

$\blacktriangle$

Date: 16 February 2016
[Tuesday]

Опр-ние: Прямое произведение пространств

Пусть $X \times Y = \{$все линейные операторы $A: X \to Y$ (X, Y над полем F)$\}$

Тогда $X \times Y$ назыв. прямым произведением пространств X и Y

Опре-ние: Сумма лин. опер. / Произведение лин. опер. на элем. поля.

$\exists\, A, B \in X \times Y$ Тогда 1. отображение $C = A + B : X \to Y$ назыв. суммой линейных операторов, если $\forall x \in X$ $Cx = Ax + Bx$

2. отображение $D = \lambda \cdot A$ ($\lambda \in F$) назыв. произведением λ на линейный оператор A, если $\forall x \in X$ $Dx = \lambda Ax$

Лемма: Отображения C и D - линейные операторы

1. $C(x_1 + x_2) \overset{def}{=} A(x_1+x_2) + B(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 + Bx_1 + Bx_2 = Cx_1 + Cx_2$;

2. $D(x_1+x_2) \overset{def}{=} \lambda A(x_1+x_2) = \lambda Ax_1 + \lambda Ax_2 = Dx_1 + Dx_2$

Теорема: $X \times Y$ - лин. пр-во над полем F;

Δ По опр-нию $\blacktriangle$

Базис и размерность $X \times Y$

$\exists\, X \leftrightarrow \dim X = n$; $B_X = \{e_i\}_{i=1}^{n}$

$\exists\, Y \leftrightarrow \dim Y = m$; $B_Y = \{h_k\}_{k=1}^{m}$

$\sphericalangle$ $\xi_k^i : X \to Y$ по ф-ле $\xi_k^i x = \xi^i h_k$,
где $x \doteq \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$;

$\sphericalangle$ $\xi_k^i(e_j) = (e_j)^i \cdot h_k = \delta_j^i h_k$, $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$;

$$E_k^i = \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \\ \vdots \\ h_m \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \xi_k^i.$$
$$\hphantom{E_k^i = h_m (0 \cdots} i$$

Лемма: $X \times Y$ и F_n^m ($\mathbb{R}_n^m$ или $\mathbb{C}_n^m$) - изоморфны;

Δ

$\forall A \xleftrightarrow{\{e_i\}\{h_k\}} A_{[m \times n]}$

$\sphericalangle$ $A + B \leftrightarrow \underset{матр.}{A+B}$; $\lambda A \leftrightarrow \underset{матр.}{\lambda \cdot A}$

$\Big\}$ $\dim X \times Y = \dim F_n^m = m \cdot n$;

$\blacktriangle$

2
2
B
L

Теорема: $\{\mathcal{E}^i_k\}$ $i = 1, \dots, n$ $k = 1, \dots, m$ — базис $X \times Y$ // отображение базиса → базис

Теорема:

$\exists\ A = \|\alpha^k_i\|$ — матрица A в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{h_k\}_{k=1}^n$ пространств X и Y

$$(A : X \longrightarrow Y)$$

Тогда:

1. $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha^k_i \cdot E^i_k;$
2. $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha^k_i\, \mathcal{E}^i_k;$

§19 Алгебра операторов и матриц;

Опр-ние: Произведение линейных операторов

Пусть $X:\ \dim X = n;\ \mathcal{B}_X = \{e_i\}_{i=1}^n$ $\qquad A : X \to Y$

$Y:\ \dim Y = m;\ \mathcal{B}_Y = \{h_k\}_{k=1}^m$ $\qquad B : Y \to Z$

$Z:\ \dim Z = p;\ \mathcal{B}_Z = \{l_j\}_{j=1}^p$ $\qquad C : X \to Z$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & Y \arrow[r, "B"] & Z \end{tikzcd}$$

Произведением линейных операторов B и A назов. отображение C, обозначаемое $C = A \times B : X \to Z$, если для $\forall x \in X$ $C(x) = B(Ax)$;

Лемма: $C : X \to Z$ — линейный оператор

Δ

1. $C(x_1 + x_2) = B(A(x_1 + x_2)) \overset{\text{линейность } A}{=} B(Ax_1 + Ax_2) \overset{\text{лин.-сть } B}{=} B(Ax_1) + B(Ax_2) \overset{\text{def } C}{=} Cx_1 + Cx_2$
2. $C(\lambda x_1) = B(A(\lambda x_1)) = B(\lambda Ax) = \lambda \cdot B(Ax_1) = \lambda\, Cx_1;$

▲

$A \longleftrightarrow A_{[m\times n]} = \|\alpha^i_k\|;$

$B \longleftrightarrow B_{[n\times p]} = \|\beta^i_k\|;$

$C \longleftrightarrow C_{[m\times p]} = \|\gamma^i_k\|;$

$\gamma^k_i = (Ce_i)^k \quad \left[(Cx)^i = \sum \gamma^k_i \xi^i \right];$

$\Delta\ Ce_i = \underset{\uparrow\ \text{def } A}{B(Ae_i)} = B\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha^k_i h_k\right) \overset{\text{лин.-сть } B}{=} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha^k_i \cdot Bh_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha^k_i \sum\limits_{j=1}^{p} \beta^j_k l_j = \sum\limits_{j=1}^{p} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\beta^j_k \alpha^k_i\right) \cdot l_j$

$$\boxed{Ce_i = \sum_{j=1}^{p} \gamma^j_i \cdot l_j} \qquad \text{Итого: } \boxed{\gamma^j_i = \sum_{k=1}^{m} \beta^j_k \alpha^k_i}$$

т. е. $\underset{[m\times n]}{B} \cdot \underset{[n\times p]}{A} = \underset{[m\times p]}{C}$

Теорема:

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$ // лин. опер.-ры. Тогда $C = A\cdot B$; // матр.

Опр-ние: Алгебра

$\exists$ X - лин. пр-во над полем F. X назыв. **алгеброй**, если X наделено 2-ой внутренней бинарной операцией, называемой умножением „$\cdot$"

со свойствами: $\forall x, y, z \in X$

1. $(x\cdot y)\cdot z = x(y\cdot z)$ ассоциативность
2. $(x+y)z = x\cdot z + y\cdot z$;
   $z(x+y) = zx + zy$;
3. $\forall \lambda \in F \quad (\lambda x)\cdot y = x(\lambda y) = \lambda(x\cdot y)$;

F.e:

1. $\mathbb{C}$ $\quad z_1 + z_2$, $z_1\cdot z_2$

	1	i
1	1	i
i	i	-1

// Таблица Кэли

$z = x + iy$;

2. Кватернионы

$\mathbb{R}^4 \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

$x = 1\cdot x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$;

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Опр-ние: Абелева (коммутативная) алгебра

Алгебра X назыв. **коммутативной** (абелевой) если для $\forall x, y \in X$ $x\cdot y = y\cdot x$;

F.e:

3. $\mathcal{P}_n = (p(t) \mid \deg p(t) \le n)$ над $\mathbb{R}$, Но! $\mathcal{P}_\infty = (p(t) \mid \deg p(t)\ \forall)$ алгебра

4. Некоммутативные алгебры

$\mathbb{R}^n_n$, $\mathbb{C}^n_n$

5. $X\times X = \{A: X \to X\}$ $\dim X = n$ (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Лемма: $X\times X$ - алгебра

Обратная матрица. Обратный оператор

Теорема: F_n^n изоморфно $X \times X$ ($\dim X = n$)

Опр-ние: Изоморфные Алгебры

$\exists X$ и Y - алгебры над одним и тем же полем ($\dim X = \dim Y = n$)

Алгебры X и Y изоморфны, если они сохраняют линейную и мультипликативную структуру т.е.

$\forall x_1 \leftrightarrow y_1 \quad \forall x_2 \leftrightarrow y_2 \; ; \; \forall \lambda \in F$

1. $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$
2. $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1$
3. $x_1 \cdot x_2 \leftrightarrow y_1 \cdot y_2$

Теорема:

Алгебра матриц F_n^n изоморфна алгебре $X \times X$ (пр-во лин. опр. $A: X \to X$);

§20 Обратная матрица. Обратный оператор.

I. Некоторые сведения из теории алгебры.

Опр-ние: Единица алгебры

Единицей алгебры X назыв. элемент $e \in X: \forall x \in X \quad ex = x \cdot e = x$

F.e.:
1. $\mathbb{C}$ $(1;0)$
2. Кват-оны $(1;0;0;0)$;
3. F_n^n : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $X \times X \leftrightarrow \mathcal{I}$ $(\mathcal{I}x = x)$;

Опр-ние: Левый / Правый обратный эл-т.

Пусть $x, y \in X$, $x \cdot y = e$. Тогда y назыв. правым обратным к x, а x назыв. левым обратн. к y.

Опр-ние: Обратный эл-т.

$z \in X$. Левый обратный эл-т к z, являющийся одновременно и правым обратным к z, обозначается z^{-1} и назыв. обратным к z

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = e.$$

Теорема:

$\exists z \in X$, z имеет 1. лев. обр-ный x $\quad x \cdot z = e$; 2. прав. обр-ный y $\quad z \cdot y = e$; Тогда z обратим, и у него $\exists z^{-1} = x = y$, при этом z^{-1} единственен

Δ Существование:

1. $$x \cdot z \cdot y \begin{cases} = (x \cdot z) y = e \cdot y = y \\ = x(z \cdot y) = x \cdot e = x \end{cases} \exists z^{-1} = x = y, \; z \text{ - обратим};$$

Единственность:

2. Δ $z^{-1}, \tilde{z}^{-1}$

$$z^{-1} \cdot z \cdot \tilde{z}^{-1} \begin{cases} = (z^{-1} \cdot z) \tilde{z}^{-1} = e \cdot \tilde{z}^{-1} = \tilde{z}^{-1} \\ = z^{-1} (z \cdot \tilde{z}^{-1}) = z^{-1} \cdot e = z^{-1} \end{cases}$$

$\blacktriangle$

II. Обратная матрица. Существование и вычисление.

Опр-ние: Обратная матрица

F^n_n – алгебра A^{-1}: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, A^{-1} – обратная к A. ; $A_{[n\times n]} \in F^n_n$

Опр-ние: Невырожденная матрица

$\underline{A}$ назыв. невырожденной, если $\det A \neq 0$.

Теорема: Для $\exists A^{-1}$ необх. и дост., чтобы $\det A \neq 0$.

Δ $\boxed{\Leftarrow}$

$\exists C$ – прав. обр. к A

1. $AC = E$

$A = \| \alpha^i_k \|$

$B = \| \beta^i_k \| \quad E = \| \delta^i_k \|$

$C = \| \gamma^i_k \|$

$$\sum_{j=1}^n \alpha^i_j \gamma^j_k = \delta^i_k$$

// Фиксируем k

$\left.\det\limits_{n\times n} A = \det \| \alpha^i_j \| \neq 0 \right\}$ по теор. Крамера $\exists$ и ед-ие $(\gamma^1_k, \gamma^2_k, \dots, \gamma^n_k)$

$$\begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} \gamma^1_k \\ \gamma^2_k \\ \vdots \\ \gamma^n_k \end{pmatrix} \end{array} = \| \gamma^i_k \| = C;$$

// ед-ным обр-ом

// Перебираем k от 1 до n;

$\exists B$ – лев. обр. к A

2. $BA = E$;

$$\sum_{j=1}^n \beta^i_j \alpha^j_k = \delta^i_k$$

$\det A = \det A^T \neq 0$

// Фиксируем i.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists A^{-1} \Rightarrow \exists$ прав. обр. $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^n \alpha^i_j \gamma^j_k = \delta^i_k$ – имеет решение $\Rightarrow$ Крамер.

▲

Вычисление A^{-1}

1-ый способ (по Гауссу)

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^1_1 \gamma^1_{(k)} + \alpha^1_2 \gamma^2_{(k)} + \dots + \alpha^1_n \gamma^n_{(k)} = \\ \alpha^2_1 \gamma^1_{(k)} + \alpha^2_2 \gamma^2_{(k)} + \dots + \alpha^2_n \gamma^n_{(k)} = \\ \dots \\ \alpha^n_1 \gamma^1_{(k)} + \alpha^n_2 \gamma^2_{(k)} + \dots + \alpha^n_n \gamma^n_{(k)} = \end{array}\right. \left(\begin{array}{c|cccc} & k=1 & k=2 & & k=n \\ \delta^1_{(k)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta^2_{(k)} & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta^n_{(k)} & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right); \quad C = \begin{pmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^1_2 & \dots & \gamma^1_n \\ \gamma^2_1 & \gamma^2_2 & \dots & \gamma^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma^n_1 & \gamma^n_2 & \dots & \gamma^n_n \end{pmatrix};$$

т.е. $\boxed{(A|E) \sim \dots \sim (E|C)}$; $C = A^{-1}$;

Обратный оператор

2 → 3
6
B
L

2-ой вариант (Крамер.)

$$\gamma^j_k = \frac{\det\left(a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_j \to \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}_k\right)}{\underbrace{\det(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\overset{\parallel}{\det A}}};$$

$$A^j_k = (-1)^{j+1} \underbrace{\left| \begin{array}{c} k \\ \vdots \\ \cdots \; j \end{array} \right|}_{M^j_k}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(\check{A})^T}{\det A}};$$

$\check{A}$ – алгебр. доп.-л., союзная (присоединённая) матрица

$$\check{A} = \| A^i_k \|;$$

NB: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{[2\times2]}$; $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$;

- -

Date: 1 March [Tuesday]

§ 21 Обратный оператор

$\triangleleft$ $X \times X = \{$все $\mathcal{A}: X \to X$ – лин.$\}$, $\dim X = n$

$\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{I}$

Теорема:

Пусть $\mathcal{A}: X \to X$ – лин. оп. Для того, чтобы $\exists \mathcal{A}^{-1}$, необх. и дост., чтобы в каком-либо базисе X $\{e_i\}_{i=1}^n$: $A \leftrightarrow \mathcal{A}$: $\exists A^{-1}$

Δ По изоморфизму

$\blacktriangle$

Опр-ние: Ядро линейного отображения (Аннулятор $\mathcal{A}$)

Ядром лин. отобр. $\mathcal{A}: X \to Y$ (над F) назыв $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{x \in X : \mathcal{A}x = 0\}$;

Опр-ние: Образ линейного отображения (Мн-во значений $\mathcal{A}$)

Образом лин отобр. $\mathcal{A}: X \to Y$ (над F) назыв. $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{y \in Y : y = \mathcal{A}x\}$

Лемма: $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – под пр-во соотв-го лин. пр-ва X и Y.

Δ (1) $\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \\ \forall \lambda \in F \end{array}\right] \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} 1.\ x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \\ 2.\ \lambda x_1 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \end{cases}$

1. $\mathcal{A}(x_1 + x_2) \overset{\text{лин. оп}}{=} \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 = 0_Y + 0_Y = 0_Y \Rightarrow$ $\underline{\text{O.K.}}$ $x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda\cdot\mathcal{A}(x_1) = \lambda\cdot 0_Y = 0_Y \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

(2)

$\blacktriangle$

3
1
B
L

Теорема: "О размерности ядра и образа"

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim X = n} \quad (\text{для } A: X \to X)$$

Δ

(1) т.к. $\operatorname{Ker} A$ - под. пр-во X $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dim \operatorname{Ker} A = k; \leq n \\ \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \underbrace{\{e_1, e_2, \dots, e_k\}}_{\text{т.к. базис} \to \text{Л.Н.З и можно дополнить до базиса } X} \end{array}\right] \Rightarrow$ Доп.-ем до баз. X.

$$\mathcal{B}_X = \{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{k}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{n-k}\}$$

(2) Δ лин. обол. $\{Ae_{k+1}, \dots, Ae_n\} \overset{?}{=} \operatorname{Im} A$

$\forall x \in X: x \overset{!}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$. $\underset{\operatorname{Im} A}{\overset{\ni}{A x}} = \{ A\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \xi^i e_i\right) + A\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \xi^i e_i\right) =$

по линейности опер-ра A

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \xi^i \underbrace{Ae_i}_{" 0_x \in \operatorname{Ker} A}}_{0_x} + \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i Ae_i \longrightarrow \text{лин. об. } \{Ae_{k+1}, \dots, Ae_n\}.$$

(3) $\{Ae_{k+1}, \dots, Ae_n\} \overset{?}{=} \mathcal{B}_{\operatorname{Im} A}$

От противного:

$\exists\ \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ (не все $= 0$) : $\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n \cdot Ae_n = 0_x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(\underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n}_{\underset{\operatorname{Ker} A}{\cap}}) = 0_x$

$z :=$

$$z = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \\ \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i \end{cases} \text{ — противоречие}$$

вектор разложен по базису двумя разл-ми способами;

$$\left.\begin{array}{l} \dim \text{лин. об. } \{e_1, \dots, e_k\} = k = \dim \operatorname{Ker} A \\ \dim \text{лин. об. } \{Ae_{k+1}, \dots, Ae_n\} = n - k = \dim \operatorname{Im} A \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A =$$

$= \cancel{k} + n - \cancel{k} = n = \dim X$, ч.т.д.

$\blacktriangle$

NB:
1. $\operatorname{Im} A = 0_x \Rightarrow \dim \operatorname{Im} A = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = \dim X = n \Rightarrow \operatorname{Ker} A = X$
2. $\operatorname{Ker} A = 0_x \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} = n = \dim X \Rightarrow \operatorname{Im} A = X$

Следствие: Для $\exists A^{-1}$ необх. и дост. $\operatorname{Ker} A = 0_x$ или $\operatorname{Im} A = X$;

Тензорная алгебра

Замена координат и матрицы линейного оператора при замене базиса.

3
2
B
L

Функции от операторов

$A: X \to X$

$A^2 \doteq A\cdot A$

$A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}$

$P_n(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_n \cdot A^n$

Если у A существ. A^{-1}

$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\ldots\cdot A^{-1}}_{n}$

$\underbrace{P_{n,m}(A) = \sum_{i=-m}^{n} \alpha_i A^{i};}_{\text{Квазиполиномы (степени + и −)}}$

§22 Замена координат и матрицы лин. опер-ра при замене базиса.

$\{e_i\}_{i=1}^n = \mathcal{B}_X \qquad \{\tilde e_k\}_{k=1}^n = \beta_X \quad , \dim X = n$

/* См табличку X } { X^* */

$\tilde e_k \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} \tau_k^i e_i; \qquad T = \|\tau_k^i\|_{[n\times n]}$

$\tilde e_k \in X \quad k\in\{1,\ldots,n\};$

$$T = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 & \ldots & \tau_n^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \tau_1^n & \tau_2^n & \ldots & \tau_n^n \end{pmatrix}$$
$\qquad\qquad\tilde e_1 \quad \tilde e_2$

Опр-ние: Матрица перехода T — от старого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к новому $\{\tilde e_k\}_{k=1}^n$

$\{e_i\}_{i=1}^n \overset{T}{\rightleftarrows} \{\tilde e_k\}_{k=1}^n;$

$(\tilde e_1, \tilde e_2, \ldots, \tilde e_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\cdot T; \qquad (\tilde e_1, \tilde e_2, \ldots, \tilde e_n)\cdot T^{-1} = (e_1, e_2, \ldots, e_n);$

NB: Обозначение $T^{-1} = S = \|\sigma_k^i\|$

Лемма: $\det T \neq 0$, т.е. $\exists T^{-1}$

$\Delta \quad \det\{\underbrace{\tilde e_1, \tilde e_2, \ldots, \tilde e_n}_{\text{ЛНЗ т.к. баз.-с}}\} = \det T \neq 0.$

▲

X		X^*
$\{e_i\}_{i=1}^n$	$(f^k, e_i) = \delta_i^k$	$\{f^k\}_{k=1}^n$
$\{\tilde e_i\}_{i=1}^n$	$(\tilde f^k; \tilde e_i) = \delta_i^k$	$\{\tilde f^k\}_{k=1}^n$

Теорема: $X^*: \{f^i\}_{i=1}^n \underset{T}{\overset{T^{-1}}{\rightleftarrows}} \{\tilde f^k\}_{k=1}^n$

$\Delta \quad \triangleleft\ (\tilde f^k, \tilde e_i) \underset{X^*\text{- лин.пр.}}{=} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^k f^j; \sum_{s=1}^n \tau_i^s e_s\right) =$

$= \begin{bmatrix} X^*\text{- лин. пр.} \\ f^j\text{- лин. функц.} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \sigma_j^k \cdot \tau_i^s \underbrace{(f^j \cdot e_s)}_{\delta_s^j \Rightarrow j=s} = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \tau_i^j = \delta_i^k;$ для $k, i = 1, 2, \ldots, n;$

$S\cdot T = E \Rightarrow \boxed{S = T^{-1}}$

Итого: $\tilde f^k = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k f^j$, где $\|\sigma_j^k\| = S = T^{-1};$
$$\begin{pmatrix} \tilde f^1 \\ \tilde f^2 \\ \vdots \\ \tilde f^{(n)} \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$$

▲

Теорема: При замене базиса $\{e_i\}_{i=1}^n \to \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ в X:
Координаты x преобразуются по правилу $\boxed{\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}^n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}}$; (3)

$X: \ x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ | $X^*: \ y = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i$

$x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k$ | $y = \sum_{k=1}^n \tilde{\eta}_i \tilde{f}^i$

Δ

$\xi^i = (f^i, x);$

$\tilde{\xi}^i = (\tilde{f}^i, x) = \left(\sum_{s=1}^n \sigma_s^i f^s ; \sum_{k=1}^n \xi^k e_k \right) = \left[\begin{matrix} X^* \text{- лин. пр.} \\ f^s \text{- лин. форм} \end{matrix} \right] = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_s^i \cdot \xi^k \underbrace{(f^s ; e_k)}_{\delta_k^s} =$

$= \sum_{k=1}^n \sigma_k^i \xi^k ;$ $\Rightarrow \underline{s = k}$

$$\boxed{\tilde{\xi}^i = \sum_{k=1}^n \sigma_k^i \xi^k} \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

▲

Теорема: При изменении базиса в X $\{f^i\}_{i=1}^n$ на $\{\tilde{f}^k\}_{k=1}^n$, лин. пр. X^*
Координаты вектора (лин. форма y) преобразуются по ф-ле:

$$\boxed{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \cdot T} \ (4)$$

y

$\Delta \quad \tilde{\eta}_k = (y, \tilde{e}_k) = \left(\sum_{s=1}^n \eta_s f^s ; \sum_{i=1}^n \tau_k^i e_i \right) = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n \eta_s \tau_k^i \underbrace{(f^s, e_i)}_{\delta_i^s} =$

$= \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_k^i ;$ $\quad \boxed{\tilde{\eta}_k = \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_k^i} \ k = 1, 2, \dots, n;$

▲

Итого: $\xi^i \xrightarrow{T^{-1}} \tilde{\xi}^i$ (в X)

$\eta_k \xrightarrow{T} \tilde{\eta}_k$ (в X^*)

3
4
B
Ь

Опр-ние: Ковариантные величины / Контравариантные величины.
X и X^*

□ Величины при замене базиса, которые изменяются при помощи матрицы T назыв. ==ковариантными== и снабжаются нижними индексами.

□ Величины преобразующиеся при замене базиса, с помощью матрицы T^{-1} назыв. ==контравариантными== и снабжаются верхними индексами.

Теорема: $\exists A: X \to X$, $\{e_i\} \to \{\tilde{e}_k\}$; $\{f^i\} \to \{\tilde{f}^k\}$ $[T;\ T^{-1} = S]$

Тогда в новом базисе $\tilde{A} = T^{-1} \cdot \underbrace{A}_{= \|\alpha^i_k\|} \cdot T$;

Δ $\boxed{\alpha^i_k = (Ae_i)^i}$, т.е. $A \cdot e_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i_k e_i$;

$$\tilde{\alpha}^i_k = (\underbrace{A\tilde{e}_k}_{\in X})^i = (\tilde{f}^i; A\tilde{e}_k) = \left(\sum_{s=1}^{n} \sigma^i_s f^s; A\left(\sum_{j=1}^{n} \tau^j_k e_j\right)\right) = \left[\text{лин. опер. } A\right] =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n} \sigma^i_s f^s; \sum_{j=1}^{n} \tau^j_k Ae_j\right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma^i_s \left(f^s \cdot \tau^j_k \cdot \left(\sum_{t=1}^{n} \alpha^t_j e_t\right)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \sigma^i_s \cdot \tau^j_k \cdot \alpha^t_j \underbrace{(f^s, e_t)}_{= \delta^s_t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \sigma^i_t \tau^j_k \alpha^t_j;$$

Итого: $\tilde{\alpha}^i_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{t=1}^{n} \sigma^i_t \alpha^t_j \cdot \tau^j_k$; $k = 1, 2, \dots, n$;

$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

▲

Опр-ние: Преобразование подобия матрицы

$\exists\ \forall A_{[n \times n]}$; $T_{[n \times n]}$, $\det T \neq 0$. Тогда $\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$ назыв. ==преобразованием подобия== матрицы A с коэффициентом подобия T;

$A = \|\alpha^i_k\|$;

Тензор. Ковариантность. Независимость от ПЛФ. Определение тензора.

§ 23 Тензоры. Ковариантность. Независимость от П.Л.В опр-ние тензора. $4 \Leftarrow 3\ 5\ B\ L$

$$W \in \Omega_q^p; \longleftrightarrow \omega_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} = W\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, \dots, f^{j_q}\}$$

Теорема: $\{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_i\}$

$\{f^k\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^k\}$

$(f^j, e_k) = \delta^j_k;$

$(\tilde{f}, \tilde{e}_k) = \delta^j_k;$

Тогда $\boxed{\tilde{\omega}_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} = \tau_{i_1}^{s_1}\cdot\tau_{i_2}^{s_2}\cdot\ldots\cdot\tau_{i_p}^{s_p}\cdot\sigma_{t_1}^{j_1}\cdot\sigma_{t_2}^{j_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_{t_q}^{j_q}\cdot\omega_{s_1,s_2,\dots,s_p}^{t_1,\dots,t_q}}$ (1)

Δ $$\tilde{\omega}_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = W(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \dots, \tilde{e}_{i_p}; \tilde{f}^{j_1}, \tilde{f}^{j_2}, \dots, \tilde{f}^{j_q})$$

$$\tilde{e}_{i} = \sum_{s=1}^{n} \tau_i^s\, e_s \quad \text{и. т.д.} \quad (\text{Упр})$$

▲

NB: 1. Ранг тензора $p+q$; (p,q); $(q;p)$

2. Ранг $= = (0+0=0) \Rightarrow$ скаляр ω (число!) инвариант

Date: 12 March 2016
[Saturday]

Опр-ние: Тензор (ранга $p+q$;)

$\exists \{e_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow$ набор n^{p+q} чисел $\omega_{\vec{i_p}}^{\vec{j_q}}$

$\omega_{\vec{i_p}}^{\vec{j_q}}$ при замене базиса изменяется по ф-ле (1)

Тогда $\omega_{\vec{i_p}}^{\vec{j_q}}$ назыв. тензором ранга $\underset{\text{ковари.}}{p} + \underset{\text{контр.}}{q}$

Теорема: Тензоры одного ранга $p+q$ образуют лин. пр.

Свёртка и транспонирование тензоров

§ 24 Свёртка и транспонирование тензоров.

I Свёртка П.Л.Ф. и тензора

$\boxed{\text{Опр-ние:}}$ Свёртка П.Л.Ф. (по аргументам $\times$)

$\exists\, U \in \Omega^p_q$; т.е. $U(\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_p}, \underbrace{y^1, y^2, \dots, y^q})$. Свёрткой ПЛФ по
(вал. (p,q)) $\quad X^+$

аргументам $\boxed{x_s; y^t}$ назыв. ПЛФ $W \in \Omega^{p-1}_{q-1}$;

$$W(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_p; y^1, \dots, y^{t-1}, y^{t+1}, \dots, y^q) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} U(x_1, \dots, x_{s-1}, \underset{\text{по } i\text{-немое } \Sigma}{e_i}, x_{s+1}, \dots x_p; y^1, \dots, y^{t-1}, f^i, y^{t+1}, \dots, y^q),$$ где $\{e_i\}$, $\{f^i\}$ — сопр-ные базисы; $(f^i, e_k) = \delta^i_k$

$\boxed{\text{Теорема:}}$ Свёртка ПЛФ не зависит от выбора базиса.

Δ $\measuredangle$ $U(x_1, \dots, \underset{\text{"s"}}{\tilde{e}_i}, \dots, x_p; y^1, \dots, \underset{\text{"t"}}{\tilde{f}^i}, \dots, y^q) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_i = \tau^k_i e_k; \\ \tilde{f}^i = \sigma^i_\ell f^\ell \end{array} \right\} \overset{\text{ПЛФ}}{=}$

$$\overset{\text{ПЛФ}}{=} \underbrace{\tau^k_i \sigma^i_\ell}_{\delta^k_\ell} \cdot U(x_1, \dots, e_k, \dots, x_p, y^1, \dots, f^\ell, \dots, y^q) = U(x_1, \dots, e_k, \dots, x_p, y^1, \dots, f^k, \dots, y^q)$$

ч.т.д.

▲

NB: Обозначение свёртки $W = \overset{s \wedge t}{U} = \overset{x_s \wedge y^t}{U}$;

$\boxed{\text{Теорема:}}$

$\exists\, U \longleftrightarrow \mathcal{H}^{j_1, j_2, \dots, j_q}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$;

$W \longleftrightarrow \omega^{\vec{j}_{q-1}}_{\vec{i}_{p-1}}$;

Тогда $\mathcal{H}^{j_1, \dots, j_{t-1}, k, j_{t+1}, \dots j_q}_{i_1, \dots, i_{s-1}, k, i_{s+1}, \dots i_p} = \omega^{j_1, \dots, j_{t-1}, j_{t+1}, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_{s-1}, i_{s+1}, \dots, i_p}$ (1)

(по k немое Σ)

Упр.

Опр-ние: WTF?!

В случае задания тензора независимым от ПЛФ образом (1) определяет свёртку тензора $\mathcal{H}$ с верхним инд-м s и нижним t.

$$\omega^{\vec{jq-1}}_{\vec{ip-1}} = \mathcal{H}^{\overset{t \wedge s}{\vec{jq}}}_{\vec{ip}} = \mathcal{H}^{\overset{j_t \wedge i_s}{\vec{jq}}}_{\vec{ip}}$$

$$\Omega^{p-1}_{q-1}$$

Теорема:

$\exists$ тензор ω^i_k ранга 1+1. Тогда свёртка $\omega^i_i = \omega$ - скаляр.

Δ $\underbrace{\tilde{\omega}^i_k}_{} = \tau^s_k \, \sigma^i_t \, \omega_s{}^t$; $\underbrace{\tilde{\omega}^i_i}_{} = \underbrace{\tau^s_i \, \sigma^i_t}_{\delta^s_t} \omega_s{}^t = \omega^s_s = \omega$

$k = i$.

$\Longleftrightarrow$

$\blacktriangle$

F.e: $A : X \to X$

$A \xleftrightarrow{\{e_i\}} A = \|\alpha^i_k\|$

α^i_k - тензор ранга 1+1

Следствие: $\underset{\text{след}}{TrA} = SpA = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i_i = const.$

?

Теорема:

$$\underbrace{\mathcal{H}^{\overset{k \wedge l}{\overset{t \wedge s}{\vec{jq}}}}_{\vec{ip}}}_{} = \underbrace{\mathcal{H}^{\overset{t \wedge s}{\overset{k \wedge l}{\vec{jq}}}}_{\vec{ip}}}_{} \in \Omega^{p-2}_{q-2}$$

$q, p \geq 2$;

/* При повторной свёртке (двукратной) результат не зависит от порядка свёртки.
// т.е. не важно в какой последовательности сворачивать. */

NB:

1. тензор $\mathcal{H}^{\vec{jq}}_{\vec{ip}}$ Повторно можно свёртывать $\min(p, q)$ раз.
2. нельзя сворачивать П.Л.Ф. и тензор по двум верхним и двум нижним Упр

4
3
В
Ь

Опр-ние: Полная свёртка

$\exists\ \mathcal{H}^{\vec{j}p}_{\vec{i}p}$, p-раз свёрнутый назыв. полной его свёрткой. [скаляр]

Лемма: Всего может быть $p!$ различных полных свёрток.

II Транспонирование тензора.

$\triangle\ \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \in \Omega^p_0$

Опр-ние: Двумерный слой.

Двумерным слоем, соответствующим индексам i_s, i_t $(1 \leq s;\ t \leq p)$ назыв. матрица полученная из исходной p-мерной матрицы $\alpha_{\vec{i}p}$ путем фиксирования всех индексов, кроме i_s, i_t;

(Если $i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n \implies \alpha_{\vec{i}p}$ p-мерной матрицы n)

F.e:

$$\alpha_{i,j,k} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{array} \right\| \\ \quad k=1 \qquad\qquad k=2 \end{array}$$ — трёхмерная матрица 2-го порядка.

Опр-ние: Транспонированный тензор.

Тензором $\alpha^{T\,(i_s, i_t)}_{\vec{i}p}$, получающимся в результате транспонирования исходного тензора $\alpha_{\vec{i}p}$, называется тензор полученный из исходного таким образом, что все двумерные слои $\underset{\text{фикс.-ые}}{i_s, i_t}$ транспонируются обычным образом.

F.e: $$\alpha^{T\,(i,j)}_{ijk} = \beta_{ijk} \longleftrightarrow \left\| \beta_{ijk} \right\| = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{211} & \alpha_{112} & \alpha_{212} \\ \alpha_{121} & \alpha_{221} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \end{array} \right\| \\ k=1 \qquad\quad k=2. \end{array}$$

Теорема: /* транспонирование не меняет природу тензора. */

$\exists\ \omega^{\vec{i}p}_{\vec{j}q}$ — тензор ранга $p+q \longleftrightarrow \{e_i\}$

$\mathcal{H}^{\vec{i}p}_{\vec{j}q}$ — набор n^{p+q} чисел $\longleftrightarrow \{e_i\}$ со свойством:

$$\mathcal{H}^{\boxed{i_1, i_2}, i_3, \ldots, i_p}_{j_1, j_2, \ldots, j_q} = \underbrace{\omega^{\boxed{i_2\, i_1}, i_3, \ldots, i_p}_{j_1, j_2 \ldots j_q}}_{\text{транспонировали}}.$$ Тогда $\mathcal{H}^{\vec{i}p}_{\vec{j}q}$ — тензор того же ранга $p+q$;

Δ $$\tilde{\mathcal{H}}^{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\omega}^{i_2, i_1, i_3, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} = \tau^{s_1}_{j_1} \ldots \tau^{s_q}_{j_q} \underbrace{\sigma^{i_2}_{t_1} \sigma^{i_1}_{t_2}} \sigma^{i_3}_{t_3} \ldots \sigma^{i_p}_{t_p}\, \omega^{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_p}_{s_1, \ldots, s_q} =$$

$$= \tau^{s_1}_{j_1} \ldots \tau^{s_q}_{j_q} \cdot \sigma^{i_1}_{t_1} \sigma^{i_2}_{t_2} \sigma^{i_3} \ldots \sigma^{i_p}_{t_p} \underbrace{\omega^{t_2, t_1, t_3, \ldots t_p}_{s_1, \ldots s_p}} = \mathcal{H}^{t_1 t_2 t_3, \ldots t_p}_{s_1, \ldots s_q}, \text{ ч.т.д.}$$

$t_1 \to t_2$
$t_2 \to t_1$

▲

Определитель линейного оператора. Внешняя степень л. оператора. Теорема об умножении определителей

• NB: Нельзя транспонировать 1 верхн., 1 нижн. индексы.

Date: 15 March 2016

[Tuesday]

§ 25 Определитель линейного оператора. Внешняя степень линейного оператора. Теорема об умножении определителей.

I Иной подход к опр-нию det → NB: было $\det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = F^{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \dots \wedge f_n (x_1, x_2, \dots, x_n)$ где $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

$\Delta\ \{y^1, y^2, \dots, y^n\} \subset X^*$

$\rceil\ F^{1,2,\dots,n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots f^n$ – единств. баз-ая форма в Λ^n $(n = \dim X)$ – простр-во Asym П.Л.Ф.

"внешнее произведение"

$U \wedge V = \frac{p+r}{p!\,r!} \operatorname{Asym}(U \cdot V)$

$\{e_i\}_{i=1}^n = \beta_x \qquad \{f^j\}_{j=1}^n = \beta_{x^*}$

$f^i \wedge f^j = -f^j \wedge f^i$

$(f^j, e_i) = \delta_i^j$

$(U \wedge V) = (-1)^{pq} V \wedge U$

$f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_2} \dots \wedge f^{i_p} = 0$

Опр-ние: Детерминант набора форм. (из X^*)

Детерминантом набора форм $y^1, y^2, \dots, y^n$ назыв. число $\det[y^1, y^2, \dots, y^n]$, определяемое $y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = \det[y^1, y^2, \dots, y^n]\, f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$

Теорема 1. $\rceil\ y^{s_i} = \sum\limits_{j_i=1}^{n} \eta^{s_i}_{j_i} f^{j_i} \quad (s_i = 1, \dots, n)$

Тогда $\det[y^1 \wedge y^2, \dots, \wedge y^n] = \sum\limits_{(j^1, j^2, \dots, j^n)} (-1)^{[j^1, j^2, \dots, j^n]} \eta^1_{j_1} \cdot \eta^2_{j_2} \cdot \dots \eta^n_{j_n}$

Δ

$y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = \eta^1_{j_1} f^{j_1} \wedge \eta^2_{j_2} f^{j_2} \dots \eta^n_{j_n} f^{j_n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{идея док-ва} \\ \det F^n = C^n_{(n,0)} = 1;\ y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = \underbrace{\alpha}_{\det[y_1, y_2 \dots y_n]} F^{1,2,\dots,n} \end{array} \right\}$

$= \left\{ n \text{ сумм; } n^n \text{ слагаемых} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{удалим все нулевые,} \\ \text{т.е. не будет повторяющихся} \\ j_1, \dots, j_n \end{array} \right\} = \eta^1_{j_1} f^{j_1} \wedge \eta^2_{j_2} f^{j_2} \dots \eta^n_{j_n} f^{j_n} =$

$\{ n! \text{ перестановок } (j_1, j_2, \dots j_n)\ j_i \neq j_k \}$

$= \left\{ \text{т.к. } f^{j_1} \wedge f^{j_2} \dots \wedge f^{j_p} = (-1)^{[j_1, j_2, \dots, j_p]} f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^p \right\} = \underbrace{\left(\sum\limits_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} \eta^1_{i_1} \cdot \eta^2_{i_2} \dots \eta^n_{i_n} \right)}_{\alpha} f^1 \wedge f^2 \dots \wedge f^n$

ч.т.д.

▲

5
2
B
Ч

$\measuredangle\ \Lambda^p;\quad B_{\Lambda^p} = \{F^{i_1, i_2, \dots, i_p},\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots \le i_p\};\quad \dim \Lambda^p = C_n^p$

— Λ^1-простр-ва Asym П.Л.Ф.

$[\Lambda^p \subset \Omega_0^p$ — П.Л.Ф $(p;0)]$

$[\Lambda^p \subset \Omega_p^0$ — $(0,p)]$

$$X^{**} \leftrightarrow X$$
$$\hat{e}_i \leftrightarrow e_i$$
$$\hat{e}_i \in X^{**},\quad e_i \in X$$
$$(\hat{e}_i, f) = (f; e_i)\quad \forall f \in X^*$$

$\underset{(0,p)}{\Omega_p^0} \longrightarrow \Lambda_p$ — Asym формы (поливекторы) „$\wedge$"

$B_{\Lambda_p} = \{F_{i_1, i_2, \dots, i_p *} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p};\ 1 \le i_1 < i_2 \dots \le i_p \le n\};\quad \dim \Lambda_p = C_n^p$

$\boxed{\text{Опр-ние:}}$ Детерминант набора форм из X (или X^{**})

$\exists\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$; $\det[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — число; $\underbrace{x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n}_{\in \Lambda_n} = \det[x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

$\dim X = n$

($e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = F_{1,2,\dots,n}$ — единств. базисн. форма Λ_n)

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ $\exists\ x_i = \sum\limits_{j=1}^n \xi_i^j e_j$; $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X == X^{**}$

Тогда $\det[x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum\limits_{(\vec{j})} (-1)^{[\vec{j}]} \xi_{j_1}^1 \cdot \xi_{j_2}^2 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_n}^n$

Δ Упр.

▲

$\boxed{\text{Опр-ние:}}$ Детерминант линейного оператора

$\exists\ A: X \to X$ — автоморфизм. ; $\{e_i\}_{i=1}^n = \beta_X$

Тогда $\det A$ назыв. число : $\det A = \det[Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n]$

$\boxed{\text{Лемма 1:}}$ $Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \dots Ae_n = \det A\ e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

$\boxed{\text{Лемма 2:}}$ $\exists\ A = \|\alpha_k^i\| \xleftrightarrow{\{e_i\}}$ матр. A.

Тогда $\det A = \det A = \sum\limits_{(\vec{j})} (-1)^{[\vec{j}]} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \dots \alpha_{j_n}^n$

5
3
B
L

Опр-ние: Внешняя степень линейного оператора

$\exists\ \Lambda_p$ - пр-во поливекторов порядка p.
(Asym форм валентности $(0,p)$)

Внешняя степень лин. оператора $A: X \to X$ - это $\overset{\text{лин. оператор}}{A^{\Lambda_p}}: \Lambda_p \to \Lambda_p$, (автоморфизм)

определяется так:

1. На базисных век-рах: $A^{\Lambda_p}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \overset{def}{=} Ae_{i_1} \wedge Ae_{i_2} \wedge \dots \wedge Ae_{i_p}$
2. На остальных поливекторах распространяется по линейности:

$$A^{\Lambda_p}(\alpha \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \dots \wedge e_p) \overset{def}{=} \alpha \cdot A^{\Lambda_p}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p});$$

Теорема: 3 $A^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots x_p) = Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \dots \wedge Ax_p$

Δ

1. $\exists\ x_1 = \sum_{i_1=1}^{n} \xi_1^{i_1} e_{i_1}$

$\measuredangle\ A^{\Lambda_p}(x_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = A^{\Lambda_p}\left(\sum_{i_1=1}^{n} \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\right) = \left[\det A^{\Lambda_p}\right] =$

За счёт линейности внешнего произведения $\wedge$

$= \left(\sum_{i_1=1}^{n} \xi_1^{i_1} Ae_{i_1}\right) \wedge Ae_{i_2} \wedge \dots \wedge Ae_{i_p} \overset{\text{л.о.}A}{=} A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_1^{i} e_{i}\right) \wedge Ae_{i_2} \wedge \dots \wedge Ae_{i_p} =$ Упр.

$= Ax_1 \wedge Ae_{i_2} \wedge \dots \wedge Ae_{i_p}$; Далее по индукции;

▲

Теорема 4:

$\measuredangle\ \Lambda_n$ ($\dim \Lambda_n = C_n^n = 1$) ; $\beta_{\Lambda_n} = F_{1,2,\dots,n} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

Тогда $\forall z \in \Lambda_n$ $\boxed{A^{\Lambda_n} z = \det A \cdot z}$

Δ

1. На базисном векторе $\to$ правда

$A^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{\text{По опр. внешн. степ.}}{=} Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_n \overset{\text{Лемма 1.}}{=} \det A\,(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$

2. На $\forall z$

$z = \alpha(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$ {1-но мерное пр-во} $\Rightarrow \alpha \cdot A^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots e_n =$

$= \det A \cdot \alpha\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$;

▲

Следствие: $\det A$ не зависит от выбора базиса $\{e_i\}_{i=1}^{n}$

Теорема 5: "Об умножении определителей"

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to X$ — автоморфизмы. Тогда $\boxed{\det(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \det\mathcal{A}\cdot\det\mathcal{B}}$

△ $\det(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\underbrace{e_1\wedge e_2\wedge\dots e_n}_{\Lambda_n} \overset{\text{теор.4}}{=} (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^{\wedge p}(e_1\wedge e_2\dots\wedge e_n) \overset{\text{внешн. степ}}{=} (\mathcal{A}\mathcal{B})e_1\wedge(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})e_2\dots\wedge(\mathcal{A}\mathcal{B})e_n =$

$\overset{\det\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}{=} \mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{B}e_1}_{x_1})\wedge\mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{B}e_2}_{x_2})\dots\wedge\mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{B}e_n}_{x_n}) \overset{\text{теор.3}}{=} \mathcal{A}^{\wedge_n}(\underbrace{\mathcal{B}e_1\wedge\mathcal{B}e_2\wedge\dots\mathcal{B}e_n}_{z\in\Lambda_n}) \overset{\text{теор.4}}{=} \det\mathcal{A}\;\mathcal{B}e_1\wedge\mathcal{B}e_2\wedge\dots\wedge\mathcal{B}e_n =$

$\overset{\text{внешн. произв.}}{=} \det\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}^{\wedge_n}(e_1\wedge e_2\dots\wedge e_n) \overset{\text{теор.4}}{=} \det\mathcal{A}\cdot\det\mathcal{B}\cdot e_1\wedge e_2\dots\wedge e_n;$

т.к. $\dim\Lambda_n = 1$. $\Rightarrow$ $\det(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot e_1\wedge e_2\dots\wedge e_n = \det\mathcal{A}\cdot\det\mathcal{B}\cdot e_1\wedge e_2\wedge\dots e_n$;

=

▲

Следствие:

1. Пусть $\mathcal{B}_X = \{e_i\}_{i=1}^n$; $\mathcal{A} \xleftrightarrow{\{e_i\}} A = \|\alpha_k^i\|$, $\mathcal{B} \xleftrightarrow{\{e_i\}} B = \|\beta_k^i\|$; $A, B \in F_n^n$; $\dim X = n$;

   Тогда $\boxed{\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.;}$

2. Формула верна для $\forall A, B \in \mathbb{F}_n^n$;

3. Пусть $A \in \mathbb{F}_n^n$, $\det A \neq 0$; $\exists A^{-1}$.

   Тогда $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;

△ $\det(A\cdot A^{-1}) = \det E = \det\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = 1.$

$\det A\cdot\det A^{-1} = 1. \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;

▲

4. det матрицы лин. опер. не зависит от выбора базиса $\mathcal{B}_X$

   т.е. $\det A$ — <u>инвариант</u>

△ $\{e_i\} \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \tilde{e}_i$ $\tilde{A} = T^{-1}\cdot A\cdot T$; $\det\tilde{A} = \det(T^{-1}\cdot A\cdot T) = \det T^{-1}\cdot\det A\cdot\det T^{-1} = \underline{\det A}.$

▲

Спектральная теория линейных операторов.

Функции от $A: X \to X$

1. $P_n(A) = \alpha_0 \cdot J + \alpha_1 \cdot A + \dots + \alpha_n A^n$
2. $\exists A^{-1}$: $P_n^m = \sum_{s=-m}^{n} \alpha_s A^s \quad (A^0 = J)$
3. $\frac{df}{dt} = Af$, где f - операторнозначная ф-я.

Модель: $A = \underbrace{\varkappa}_{\text{число} \in F} J$ - оператор гомотетии;

$f(A) = f(\varkappa) J$;

$\sin A = \sin \varkappa J$;

Спектральный анализ:

1. Инвариантное подпр-во A {не выходит из него.} Обозначаем: L_i
2. $X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i$
3. Внутри L_i $\measuredangle$ $A_i = A\big|_{L_i}$ - сужение
   выбор базиса в L_i попроще, чтобы действие в A_i было проще. $(A_i = \lambda_i J)$
4. Функциональное исчисление
   $$\sin A_i = \begin{pmatrix} \sin \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \lambda_i \end{pmatrix} ; \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix};$$

Инвариант матрицы л.о. Инвариантность подпр-ва

5
6
B
L

§ 26 Инварианты матрицы линейного оператора. Инвариантные под. пр-ва.

Опр-ние: Инвариант лин. опер. A.

Пусть $A : X \to X$ — гомоморфизм, числовая ф-ция $f(A) : X \times X \to \mathbb{F}$, не зависящая от выбора базиса $\beta_F = \{e_i\}_{i=1}^n$; ($X \times X = \{$все лин. опер. $A : X \to X\}$), назыв. инвариантным лин. опер. A.

F.e: $\mathcal{A} \xleftrightarrow{\{e_i\}} A = \|\alpha^i_k\|$ 1. $\operatorname{Tr} A = \sum\limits_{i=1}^n \alpha^i_i$

2. $\det \mathcal{A}$; $\det A$

Опр-ние: Характеристический полином оператора A (/матрицы A)

Пусть $\lambda \in F$ $\quad \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ назыв. характ. полин. $\mathcal{A}$;

NB: ($\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характ. полином. матр. лин. опер. $\mathcal{A}$)

Лемма: $\mathcal{X}_A(\lambda)$ — инвариант $\mathcal{A}$.

Лемма: Два полинома тождественно равны если равны их коэфф-фициенты при соответствующих степенях.

Следствие: Все коэфф-ты характ. полинома лин. опер. — суть инварианты лин. опер.

$$\triangleleft \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = \det(A - \lambda E) = \det \|\alpha^i_k - \lambda \delta^i_k\| =$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{[j_1, j_2, \dots, j_n]} (\alpha^1_{j_1} - \lambda \delta^1_{j_1})(\alpha^2_{j_2} - \lambda \delta^2_{j_2}) \dots (\alpha^n_{j_n} - \lambda \delta^n_{j_n}) = [\text{полином } n\text{-ой степени}]$$

$$= \underbrace{(-1)^n \lambda^n}_{(j_1, j_2, \dots, j_n) = (1, 2, \dots, n)} + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha^i_i}_{\operatorname{Tr} A} + \left\{ \begin{array}{l} \text{берём основную перестановку} \\ \text{т.к. } \delta^i_k \text{ при } i \neq k \text{ обращается} \\ \text{в ноль, и степень полинома падает} \\ \text{на } 2; \end{array} \right\} \dots +$$

$$+ (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} \cdot \underbrace{Z_{n-k}}_{\text{коэффициент}} + \dots + \det A \cdot \lambda^0$$

Опр-ние: Главный минор матрицы

Главными минорами матрицы A назыв. минор типа $M^{i_1, i_2, \dots i_k}_{i_1, i_2, \dots i_k}$ ($\sim n-k$; вычеркиванием)

Собственные векторы и собств значения(собств числа) л.о.

Теорема:

Коэффициент Z_{n-k} при λ^{n-k} в $\chi_A(\lambda)$ равен Σ всех главных миноров $\underline{A}$ порядка $\underline{K}$;

Инвариантные под. пр-ва лин. опер. A:

Опр-ние: Инвариантное под. пр-во линейного отображения.

Подпр-во L лин. пр.-ва X назыв. инвариантным под. пр-вом лин. отобр. $A: X \to X$, если $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$

F.e:

1. $$\left.\begin{matrix} O: X \to X \\ J: X \to X \\ \mathcal{H}J: X \to X \end{matrix}\right\| \forall L \to \text{инв. подпр-во}$$

2. $\exists\ X = L_1 + L_2$

$\Delta\ P_{L_1}^{\parallel L_2}$ $\quad L_1 = \{x \mid P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x\}$

$L_2 = \{y \mid P_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0\}$

3. $$A \xleftrightarrow{\{e_i\}} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}_{\lambda_i \neq \lambda_k}$$ Тогда $\underline{n}$ шт одномерных инв-ых подпр-в $L_i =$ лин. о. $\{e_i\}$

4. $$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \boxed{A_2} & \\ O & & \ddots \ \boxed{A_n} \end{pmatrix};$$
$\updownarrow$
A

Date: 22 March 2016
[Tuesday]

§ 27 Собственные вектора и собственные значения (собств-ые числа) линейного оператора

Опр-ние 1: Собственный вектор лин-ого оператора

$\exists\ A: X \to X$
L - инв-ое подпр-во A, $\dim L = 1$
$x \in L \quad (Ax \in L)$
$x \neq 0$

Тогда x назыв. собственным вектором оператора A

6
1
B
L

Опр-ние: 2. Собственный вектор линейного оператора (2-ой способ)

$\exists A: X \to X$ (X над полем F)

$x: \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in F \end{cases} \quad Ax = \lambda x;$

Тогда x назыв. собственным вектором линейного оператора $A \longleftrightarrow$ собственное значение λ.

Лемма 1. Опр-ние 1 $\Rightarrow$ Опр-ние 2.

$\Delta \quad \exists x \in L \; (\dim L = 1)$

$Ax = y \in L, \quad \exists \{e_1\} = \beta_L \; : \; x = \alpha e_1 \quad y = \beta e_1$

$A(\alpha e_1) \overset{\text{л.о.}A}{=} \alpha (Ae_1) = y = \beta e_1 \Rightarrow Ae_1 = \frac{\beta}{\alpha} e_1$ т.е. $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$ т.к. $x \neq 0$, $e_1 \neq 0$)

▲

Лемма: 2 Опр-ние 2 $\Rightarrow$ Опр-ние 1.

Δ

$\exists \begin{cases} Ax = \overset{\text{фикс. число;}}{\lambda} x \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\forall$ собств. в-ра $x \Rightarrow$ $\triangle$ л. о $\{x\} = L \Rightarrow L$ - инв. под пр-во. $\dim L = 1!$

$A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2) \in L$

$A(\alpha x_1) = \alpha \lambda x_1 \in L$

▲

F.e: 1. $\mathcal{O}, \mathcal{I}: X \to X$; 1) $\mathcal{O}x = 0_x = 0_x \cdot x \Rightarrow \forall x$ - собств. вект. $\longleftrightarrow$ собств. знач. $\lambda_1 = 0$

2) $\mathcal{I}x = 1 \cdot x \Rightarrow \forall x$ - собств. вект. $\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$.;

Опр-ние: Спектр линейного оператора

Спектром σ_A или $\sigma(A)$ назыв. мн-во всех его собств. знач. т.е. $\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

$A: X \to X$

F.e: 2. $X = L_1 \dotplus L_2$, L_1, L_2 - подпр-ва X

$\triangle \; P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$

1. $\forall x \in L_1 \; P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x = 1 \cdot x \longleftrightarrow \lambda_1 = 1$
2. $y \in L_2 \; P_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0_x = 0 \cdot x \longleftrightarrow \lambda_1 = 0$

Итого: $\sigma_P = \{0; 1\}$

6
2
B
4

Теорема:

Собственные в-ры, отвечающие различным собств. знач. Л.Н.З., т.е.

$\exists\, x_i$ - собств. вект $A \longleftrightarrow \lambda_i \ (i = 1, 2, \dots, k)$ Тогда $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ – Л.Н.З

$\lambda_i \neq \lambda_j$ для $\forall i, j \in 1, \dots, k.$

$\updownarrow \ \updownarrow \ \updownarrow$

$\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_k$

NB: $k \leq n = \dim X$;

$Ax_i = \lambda_i \cdot x_i, \ x_i \neq 0$

Δ

По индукции:

1. База: $m = 1. \Rightarrow \{x_1\}$ – Л.Н.З. $(x_1 \neq 0)$
2. $\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ – Л.Н.З $\overset{?}{\Rightarrow} \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m\}$ – ЛНЗ ; $m \leq n$

(0) т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot x_{m-1} + \alpha_m \cdot x_m = 0_x$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$
(по опр-нию Л.Н.З.)

// Подействуем лин. опер. A. на (0)

(1) $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \cdot \lambda_m x_m = 0_x$

// Умножим (0) на λ_m

(2) $\alpha_1 \lambda_m x_1 + \dots + \alpha_m \cdot \lambda_m x_m = 0_x$

// Вычтем из (1) (2)

$\alpha_1 (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_m}_{\neq 0}) \underbrace{x_1}_{\neq 0_x \text{ (т.к. опр-ние } \lambda)} + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_m) x_2 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} + 0_x = 0_x$

$\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ – Л.Н.З. (индукц. предп.) $\Rightarrow \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{m-1} x_{n-1} = 0_x$ только при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{m-1} = 0.$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$ в (0)

$0_x + 0_x + \dots + 0_x + \alpha_m \cdot x_m = 0_x \Rightarrow \alpha_m = 0$ ч.т.д.

$\blacktriangle$

Следствие: Автоморфизм в конечномерном лин. пр-ве X не может иметь собств. векторов больше, чем $\underline{n}$ штук, где $n = \dim X$

Лемма:

Мн-во всех собств. вект. $\longleftrightarrow \lambda_i$ (собств. знач) - под. пр-во L_i лин. пр-ва X

Δ

$A(x_1 + x_2) \overset{\text{л.о}}{=} Ax_1 + Ax_2 \overset{\text{собств. вкр.}}{=} \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda (x_1 + x_2)$

$\blacktriangle$

NB: Противоречие $\overset{\text{должен}}{0_x} \in \forall$ подпр-ву в том числе L_i

Но по def 0_x - не собств. вектор.

$\Rightarrow$ будем ~~мож~~ говорить, что 0_x входит в L_i

6
3
B
L

Опр-ние: Собственное под.пр-во лин.-го оператора.

Под.пр-во L_i (описанное в лемме) назыв. собственным под.пр-вом лин. оператора $A \leftrightarrow$ собств. знач. λ_i

Утв: Собств. под.пр-во L_i = лин. обол. {всех собств. вект $x_i \leftrightarrow \lambda_i$}

Вычисление собственного вектора, собственного значения

$\measuredangle$ $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda I x = 0$

(1) $\boxed{(A - \lambda \cdot I)x = 0}$ – уравнение на собственные вектора

$A : X \to X$; $B_x = \{e_i\}_{i=1}^n$ $\quad A \xleftrightarrow{\{e_i\}} A = \|\alpha_k^i\|$

т.е. $\alpha_k^i = (Ae_k)^i$

$I\ x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad x \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$

Тогда

$$(2)\ \begin{cases} (\alpha_1^1 - \lambda)\xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \ldots + \alpha_n^1 \xi^n = 0 \quad (1) \\ \alpha_1^2 \xi^1 + (\alpha_2^2 - \lambda)\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2 \xi^n = 0 \quad (2) \\ \ldots \\ \alpha_1^n \xi^1 + \alpha_2^n \xi^2 + \ldots + (\alpha_n^n - \lambda)\xi^n = 0 \quad (n) \end{cases}$$ – система на собственный вектор

т.к. $\underline{x} \neq 0 \iff$ нетривиальные решения у (1) и (2)

1. $\det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda) \neq 0 \Rightarrow$ Крамер единственное решение – плохо
2. $\boxed{\det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda) = 0}$ – ур-ние на собственные значения (характеристическое уравнение) (3)

Алгоритм:
1. Решаем $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) \to \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ $k \leq n$;
2. Берём $\lambda := \lambda_1$ и подставляем в (1) или (2) $\to x_1 \leftrightarrow \lambda_1$ (таких $\underline{x}$ может быть несколько т.к. если x - собств. в. то αx - собств. вект.) $\alpha \neq 0$

Аналогично с остальными

Существование собственных векторов:

Теорема:

$\exists A: X \to X$, X над $\mathbb{C}$ ($\dim X = n < \infty$). Тогда у A существует по крайней мере 1 собственный вектор и 1 собственное значение

Δ

$\triangleleft$ $\chi_A(\lambda) = 0 \longleftrightarrow$ по основной теореме алгебры $\exists$ по крайней мере 1-н корень // доказал её Гаус.

$\exists \lambda_1 : \chi_A(\lambda_1) = 0$

$\triangleleft$ $(A - \lambda_1 E) = 0$ - имеет нетривиальное решение $\Longleftrightarrow X_1^{(1)} \Longleftrightarrow \lambda_1$, ч.т.д.

$\blacktriangle$

NB: Лемма: Уравнение (3) - необх. и дост. условие $\exists$ нетр.-го реш (1)

Опр-ние: Характеристические числа

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ характеристического ур-ния $\chi_A(\lambda) = 0$ назыв. характеристическими числами

$\triangleleft$ $A: X \to X$ (X над $\mathbb{R}$)

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

$\uparrow$

многоч. с вещ. коэф. — вещ корни α_s

— пары комп. сопр. корней $\beta_t \pm i \cdot \gamma_t$

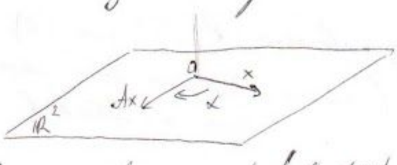
(1) $\Leftrightarrow$ $A \cdot X = \lambda X$

вещ вещ комп. вещ

бред

F.e: Оператор не имеющ. собств. знач.

$X = \mathbb{R}^2$



$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - поворот на α ($\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)

7
1
B
L

Date: 29 March 2016
Tuesday.

§ 28 Спектральный анализ оператора с простым спектром

Опр-ние: Скалярный оператор

Оператором скалярного типа (скалярным опе-ром) назыв. $A : X \to X$:

$\exists \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – полный набор
– собств. вектор $Ax_1 = \lambda_1 x_1$

NB: так же скалярным оператором можно назвать такой из собственных векторов которого можно получить базис

Опр-ние: Простое собственное число (значение)

Собственное число λ_i лин. опер. A назыв. простым, если λ_i – простой корень $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ т.е. $\dfrac{\chi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \underset{\text{полином}}{Q(\lambda)} \not\vdots (\lambda - \lambda_1)$

Опр-ние: Оператор с простым спектром

Лин. опер. у кот-го все собственные числа простые назыв. оператором с простым спектром.

Лемма 1:

Пусть A – лин. опер. с простым спектром. $A : X \to X$ (над $\mathbb{C}$)

Тогда 1) $\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ n = \dim X)$

2) $\chi_A(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$

Теорема: 1

Линейный оператор с простым спектром – скалярный.

Δ

$$\sigma_A = \{\underset{x_1}{\lambda_1}, \underset{x_2}{\lambda_2}, \dots, \underset{x_n}{\lambda_n}\} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j)$$

$$Ax_i = \lambda_i \cdot x_i \quad (i = 1 \dots n)$$

Тогда $B_X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, т.к. $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ – ЛНЗ // по лемме ...

$\blacktriangle$

Лемма 2:

Матрица A с простым спектром σ_A в $B_x = \{x_i\}_{i=1}^n$ (собств. вект.) имеет диагон.-ый вид.

Δ

$$\{e_i\}_{i=1}^n \xrightarrow{T} \underset{\text{собств. в.}}{\{\underline{x_i}\}_{i=1}^n} \qquad \tilde{A} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A \longrightarrow \tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T \qquad \begin{array}{cc} Ax_1 & Ax_2 \\ \parallel & \parallel \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \end{array}$$

$\blacktriangle$

NB: Как строить T?

$B'_x = \{e_i\}_{i=1}^n \Rightarrow$ собств. вект., собств. знач.

Δ 1. $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

2. $(A - \lambda_i E)\, x = 0 \longrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$;

$$x_i = \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \xi_i^2 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix}, \quad T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Лемма 3:

Все собственные под.пр-ва лин. опер. с простым спектром — одномерны т.о. Δ L_i - собств. под пр-во $\leftrightarrow \lambda_i$; $L_i = \{$все x_i, собств. $\leftrightarrow \lambda_i\}$

Тогда $\dim L_i = 1$. $(i = 1, \dots, n)$

Δ

$\blacktriangle$

Спектральный анализ лин. опер. с простым спектром σ_A:

1. $L_i =$ лин. обол. $\underset{\text{собств. в.}}{\{\underline{x_i}\}}$ - собств. под. пр-во A, $\dim L_i = 1$.

$\forall x \in L_i \longrightarrow Ax_i = \lambda x_i = \lambda_i x_i \in L_i$ (L_i - инвариант. отн. A)

2. **Теорема 2:** $X = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \dots \dotplus L_n = \dotplus \sum_{i=1}^n L_i$

Δ 1) $\dim X = n = \sum_{i=1}^n \dim L_i = \sum_{i=1}^n 1 = n$;

2) $L_i \cap L_j = \{0_x\}$ по опр. L_i

$\blacktriangle$

3. В L_i действие A - наипростейшее $Ax_i = \lambda_i x_i$

7
3
Б
Ь

4. Функциональное исчисление оператора A. Спектральная теорема.

— Спектральные проекторы

Опр-ние: Проектор на собственное подпр-во

Спектральный проектор $\longleftrightarrow$ собств. знач. λ_i назыв. проектором на собственное подпр-во $L_i \;\; \| \dot{+} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} L_j$ (// будем сокращенно писать $\sum\limits_j$)

т.е. $\mathcal{P}_{L_i}^{\| \dot{+} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} L_j} = \mathcal{P}_{L_i}^{\sum\limits_j}$

Теорема: 3

$\exists\, A: X \longrightarrow X$ — лин. опр. с простым σ_A

$\beta_{X^*} = \{y^j\}_{j=1}^{n}$ — сопр.-ный базис к β_X т.е. $(y^j, x_i) = \delta_i^j$

$\beta_X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ — базис из собств. вект. A.

Тогда $\mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum\limits_j} * = (y^i, *)\, x_i$; // $*$ — что-то надо подставить.

т.е. $\forall x \in X \;\; \mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum\limits_j} = (y^i, x)\, x_i \in L_i$

Δ // док-во на базисных векторах

1. $\sphericalangle\; x_i \in L_i \longrightarrow \mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum_j} x_i = \underbrace{(y^i, x_i)}_{\delta_i^i = 1.} x_i = x_i$;

2. $\sphericalangle\; x_j \notin L_i$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ $\;\Big|\; \longrightarrow \mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum_j} x_j = \underbrace{(y^i, x_j)}_{\delta_j^i = 0.\, (i\neq j)} x_i = 0$

$\forall$ баз. x_j $(j \neq i)$, т.е. $\forall$ баз-ный вектор $\sum\limits_j = \dot{+} \sum\limits_{j=1}^{n} L_j$

$\blacktriangle$

NB: $\left(\mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum\limits_j}\right)^2 = \mathcal{P}_{L_i}^{\| \sum\limits_j}$

$P^2 = P$ — идемпотентный лин. опер.

Теорема 4: Спектральная теорема

$\forall$ лин. опер. A с простым σ_A допускает следующее представление:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i}, \quad \text{где } \mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{P}_{L_i}^{\parallel \Sigma_j}$$ - спектральный проектор $\leftrightarrow$ собств. знач. λ_i

Δ

$\vartriangleleft \forall x \in X$

$$x \overset{!}{=} \underset{\underset{L_1}{\cap}}{\tilde{x}_1} + \underset{\underset{L_2}{\cap}}{\tilde{x}_2} + \ldots + \underset{\underset{L_n}{\cap}}{\tilde{x}_n} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda_i} \cdot \tilde{x}}_{x_i \in L_i}$$ (разложение по базису $\beta_X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ собств. в.)

$\tilde{x}_j = \alpha_j x_j$

$L_1 \dotplus L_2 \dotplus \ldots \dotplus L_n$

$$\vartriangleleft A(\ldots): \; Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{\lambda_i} \cdot x\right) \overset{\text{л.о.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{A(\mathcal{P}_{\lambda_i}, x)}_{\text{собств. в. } L_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} \cdot x$$

$\blacktriangle$

— Полиномиальное исчисление

$$\vartriangleleft A^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_j}\right) \overset{n<\infty}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \mathcal{P}_{\lambda_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

т.к. $i = j \quad \mathcal{P}_{\lambda_i}^2 = \mathcal{P}_{\lambda_i}$

$i \neq j \quad \mathcal{P}_{\lambda_i} \cdot \mathcal{P}_{\lambda_j} = \mathcal{O}$

$$p_m(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \lambda^n$$

$$p_m(A) = \alpha_0 \mathcal{I} + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_m \cdot A^n$$

т.е. $$\boxed{p_m(A) = \sum_{i=1}^{n} p_m(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}}$$

F.e.: $$e^A = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i} \overset{\text{в собств. в.}}{\longleftrightarrow} e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix};$$

$$\sin A = \sum_{i=1}^{n} \sin(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

7
5
B
L

§ 29 Спектральный анализ оператора скалярного типа.

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\},\ k < n$; т.е. $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda^i)^{n_i}$

Опр-ние:
Полная кратность собственного значения $- n_i$

λ_1
$\underbrace{x_1^{(1)}\ x_1^{(2)}\ \dots\ x_1^{(r_1)}}_{\text{(max.) ЛНЗ}}$
$L_1 = \text{л.о.}\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(r_1)}\}$
$\dim L_1 = r_1$
Аналогично для λ_k

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \longrightarrow = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{n_1} & & & \\ & \underbrace{}_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det(\tilde{A} - \lambda_i E)$$

$\longleftarrow n \longrightarrow$

Опр-ние: Спектральная кратность собств. знач.
Спектральной кратностью собственного значения λ_i назыв. $\dim$ собств.-го под. пр-ва L_i

Теорема 1 $r_i = n_i$

Δ $X = \dotplus \sum_{i=1}^{k} L_i$ $\qquad B_X = \{B_{L_1} \cup B_{L_2} \cup \dots \cup B_{L_k}\}$;

$B_{L_i} = \{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r_i)}\}$;

$A x_i^{(j)} = \lambda_i \cdot x_i^{(j)}$

▲

Спектральный проектор $\mathcal{P}_{\lambda_i} \leftrightarrow \lambda_i$; $\mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{P}_{L_i}^{\parallel \dotplus \sum_{j=1, j\neq i}^{k} L_j}$

$\boxed{\mathcal{P}_{\lambda_i^*} = \sum_{j=1}^{r_i} (f^i_{(j)}; *)\, x_i^{(j)}}$ $\qquad \boxed{B_{L_i^*} = \{f^i_{(j)}\}_{j=1}^{r_i}}$

$\Updownarrow$
собств. под пр-во L_i

Функциональное исчисление одинаково с мин. опр. с простым спектром σ_A.

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

– Гомоморфизм алгебр полиномов (скалярных) и алгебр операторов.

Опр-ние:

$\exists$ X и Y – алгебры над полем F.
Гомоморфизмом алгебр X и Y назыв. отображение $S: X \to Y$, сохраняющее линейную и мультипликативную структуру этих алгебр.

Теорема:

$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P} = \{ p(\lambda) \ (\lambda \in \mathbb{C}) \mid \deg p(\lambda) - \forall \}$ // это коммутативн. алгебра.

$X \times X$ – алгебра операторов: $X \times X = \{$ все лин. опер. $A: X \to X \}$.

$\underline{X \times X}$ – гомоморфизм алгебр $\mathcal{P}$ и $X \times X$,

Тогда $S_A: \mathcal{P} \to \underline{X \times X}$ ~~– гомоморфизм алгебр (A – скал-ный оператор) где~~ $\cancel{p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}}$

S_A действ. по ф-ле $S(p(\lambda)) = p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i}$

Δ

1. $\mathcal{P}$:
$$(p_1 + p_2)(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda)$$
$$(\alpha p_1)(\lambda) = \alpha p_1(\lambda)$$
$$(p_1 \cdot p_2)(\lambda) = p_1(\lambda_1) \cdot p_2(\lambda)$$
– коммутативная алгебра

NB: $(p_1 \cdot p_2)(\lambda) = (p_2 \cdot p_1)(\lambda)$

2. $X \times X$
$$(A + B)x = Ax + Bx$$
$$(\alpha \cdot A)x = \alpha \cdot Ax$$
$$(A \cdot B)x = A(Bx)$$
– не коммут-ная алгебра.

3.
$$p + q \xrightarrow{S(A)} p(A) + q(A) = \sum_{i=1}^{k} (p+q)\lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} q(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = p(A) + q(A)$$

$p = p(\lambda)$, $q = q(\lambda)$

$$\alpha p \xrightarrow{S_A} \alpha \cdot p(A)$$
$$p \cdot q \xrightarrow{S_A} p(A) \cdot q(A)$$

▲

Теорема: 3.

Гомоморфизм $S_A : \mathcal{P} \to X \times X$ — не биекция;

Лемма 1: Тождество Кэли

◁ $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Тогда $\chi_A(A) = \mathcal{O}$;

т.е. $\chi_A(\lambda) \xrightarrow{S_A} \mathcal{O}$

Δ

$$\chi_A(A) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\chi_A(\lambda_i)}_{\overset{\shortparallel}{0}, \text{ т.к. } \lambda_i - \text{корни } \chi_A(\lambda)} \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{O}$$

▲

Δ // теорема 3.

◁ $p(\lambda) + q(\lambda) \cdot \chi_A(\lambda) \xrightarrow{S_A} p(A)$, т.к. $S_A\left(p(\lambda) + q(\lambda) \cdot \chi_A(\lambda)\right) = p(A) + \underbrace{q(A) \cdot \chi_A(A)}_{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}} \text{ по лемме}} = p(A)$

▲

NB: Из соображений размерности.

$\dim \mathcal{P} = \infty$; $\dim X \times X = n^2 < \infty$;

— Полная система инвариантов скалярного оператора.

Опр-ние: Инвариант лин. опер.

Инвариант лин. опер. A — ф-ция $f(A) \in F$ $(f : A \to F)$, не зависящая от базиса X

F.e: 1. $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
2. $\det A$
3. $\mathrm{Tr}\, A$
4. все коэффициенты $\chi_A(\lambda)$

Теорема:

Коэффициенты $\chi_A(\lambda)$ образуют полную систему инвариантов лин. опер.

Δ $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$; $n_i = r_i$; $\{r_i, \lambda_i\} \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \ddots & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$ в Ж.баз.

$\forall\, \tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T \xleftrightarrow{\{x_i^{(j)}\}} A$

$A = T \tilde{A} T^{-1} \xleftrightarrow{\{e_i\}} A$

▲

Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида

Ультраинвариантные подпр-ва л.о.

Спектральный анализ операторов общего вида (не скалярных)

[т.е. из собст. вект. A не построить $\boxed{B}x$]

$A \xleftrightarrow{\{e_i\}} A$ – матр, кот. не привести к диагон.-ой.

1. Построение инвариантных подпр-в $\mathcal{L}_i$ (не собств.) $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \boxed{A_2} & \\ O & & \ddots \; \boxed{\;} \end{pmatrix}$ $\mathcal{L}_i$
2. $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$ ($k < n = \dim X$)
3. Поведение A в $\mathcal{L}_i$: $\measuredangle$ $A_i = A\big|_{\mathcal{L}_i}$

A_i – спектральная компонента : $A_i = \lambda_i I_i + \tau_i$ (τ_i – не нильдемпотентная добавка)

Опр-ние:

τ назыв. нильдемпотентным, порядка m, если $\tau^{m-1} \neq O$, $\tau^m = O$, $m \in \mathbb{N}$; $\tau' = O (m=0)$

2) Изменить поведение τ_i через Жорданов базис

$\tau_i = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{\;} \end{pmatrix}$ $\quad A_i = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{\;} \end{pmatrix}$;

4. Функциональное исчисление.

$A = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i I_i + \tau_i) \underline{P_i}$ – спектральный проектор

§ 30 Ультраинвариантные подпр-ва линейного оператора.

Опр-ние: Инвариантное подпр-во

$\exists A: X \to X$ – оператор общего вида.

Подпр-во L назыв. инвариантным подпр-вом лин. опер. A, если $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$, т.е. $AL \subset L$;

Опр-ние: Ультраинвариантное подпр-во

Инвариантное подпр-во L лин. опер. A назыв. ультраинвариантным, если $\exists$ дополнение L' подпр-во L до X, тоже инвариантное

т.е. $X = L \dot{+} L'$; L-инвар. и $\exists L'$-инв.

NB: дополнение L' – тоже ультраинвариантное подпр-ва

8
1
B
L

Date: 12 April
Tuesday

Лемма: Если L - ультра инв. подпр-во, то L' тоже.

Опр-ние: Ультра проектор

Если L' - ультра инв. подпр-во, то $P_L^{\parallel L'}$ - назыв ультра проектором.

Опр-ние: Компонента (часть) A в L

Пусть L - ультра инв. п.п. A : $A_L = A\big|_L$ по ф-ле $A_L : L \to L$

$A_L x = Ax$ назыв. частью $\underline{A}$ в L

Лемма:

Пусть A_L - компонента $\underline{A}$ в L

$A_{L'}$ - компонента $\underline{A}$ в L' (L и L' - дополнительные ультра инв. п.п.)

Тогда $A = A P_L^{\parallel L'} + A P_{L'}^{\parallel L}$ (*)

Δ $Ax = A_L x + A_{L'} x$, а $x \overset{!}{=} \underset{L}{\underset{\cap}{x_1}} + \underset{L'}{\underset{\cap}{x_2}}$ тогда $A = A_L \dotplus A_{L'}$

▲

NB: 1. При этом говорят, что $A = A_L \dotplus A_L$;

2. $X = L \dotplus L'$; $\begin{matrix} A_L : L \to L \\ A_{L'} : L' \to L' \end{matrix}$, то (*) $A = A_L \dotplus A_{L'}$

Опр-ние: Тривиальное ультра инвариантное под пр-во

Пусть $A : X \to X$. Тогда X и $\{0_x\}$ назыв. тривиальными ультра инв. п.п.

NB: $X + \{0_x\} = X$;

Опр-ние: Минимальное ультраинв.-ное под пр-во

Ультра инв. п.п. L лин. опер $A : X \to X$ назыв. минимальным, если

1. оно не является тривиальным
2. не содержит ультра инв. п.п. "<" размерности

Идеалы алгебры скалярных полиномов

Содержание:

Теорема:

Кол-во дизъюнктных ($L_i \cap L_j = 0$) минимальных ультра инв.п.п. для $A: X \to X$ ($\dim X < \infty$) конечно

§ 31 Идеалы алгебры скалярных полиномов

// Работаем в $\mathbb{C}$

$\measuredangle \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{лин. пр-во}} = \{ p(\lambda) \mid \deg p(\lambda) - \forall \}$, $\dim \mathcal{P} = \infty$; $\quad p(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \alpha_s \lambda^s$

Алгебра (коммутативная)

1. $(p_1 + p_2)(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda)$
2. $(\alpha \cdot p_1)(\lambda) = \alpha \cdot p_1(\lambda) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$
3. $(p_1 \cdot p_2)(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$;
4. $p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) = p_2(\lambda) \cdot p_1(\lambda)$;

Опр-ние: Идеал алгебры

Идеалом $\mathcal{I}$ алгебры скал. полиномов $\mathcal{P}$ назыв. её подпр-во:
$\forall\, r \in \mathcal{I};\ \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow r \cdot p \in \mathcal{I}$

F.e.: 1. $\measuredangle\ p_\alpha(\lambda)$: $p(\lambda) = 0 \quad \alpha \in \mathbb{C}$ - фикс. const.

тогда $\mathcal{I}_\alpha = \{ \text{все } p_\alpha(\lambda) \}$ - идеал

т.к. $(\underset{\mathcal{I}_\alpha}{\underset{\cap}{p_\alpha}} \cdot \underset{\mathcal{P}}{\underset{\cap}{p}})(0) = 0 \cdot p(0) = 0 \Rightarrow p_\alpha \cdot p \in \mathcal{I}_\alpha$;

2.

$\exists\, p(\lambda) \in \mathcal{P}$ - фиксир.

$\measuredangle\ \mathcal{I}_p = p \cdot \mathcal{P} = \{ \tilde{p}(\lambda) \mid \tilde{p}(\lambda) = p(\lambda) \cdot r(\lambda);\ r(\lambda) - \forall \in \mathcal{P} \}$

Опр-ние: Порождающий полином

В $\mathcal{I}_p = p \cdot \mathcal{P}$ фиксированный полином p назыв. порождающим полиномом $\mathcal{I}_p$

8
3
B
4

Опр-ние: Тривиальный идеал

$\mathcal{P}$ и $\{0(\lambda)=0\}$ назыв. тривиальными идеалами.

Лемма 1:

Если полином $\mathbb{1}(\lambda)=1 \in \mathcal{J}$ то $\mathcal{J}$ - тривиальный и $\mathcal{J}=\mathcal{P}$

Δ

$\forall p \in \mathcal{P} \quad p = \mathbb{1}\cdot p$; $\mathbb{1}$ - порождающий полином $\mathcal{P}$

$\blacktriangle$

Лемма 2:

$\exists$ $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ - идеалы. Тогда $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ - идеал (1)

$\mathcal{J}' = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ - идеал; (2)

Δ (1)

$\exists \quad z \in \mathcal{J}_1 \quad z\cdot p \in \mathcal{J}_1 \quad \forall p \in \mathcal{P}$

$z \in \mathcal{J}_2 \quad z\cdot p \in \mathcal{J}_2$

Тогда $\tilde{p} \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ $\Rightarrow z \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$

$\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1 \quad z\cdot\tilde{p} \in \mathcal{J}_1$

$\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_2 \quad z\cdot\tilde{p} \in \mathcal{J}_2$

$\blacktriangle$

Опр-ние: Минимальный полином.

$\mathcal{J}_p$ - идеал; p назыв минимальным полиномом $\mathcal{J}_p$, если

1. $\mathcal{J}_p$ - нетривиальный (т.е. $\neq X \quad \neq 0(\lambda)$)
2. $\deg p(\lambda)$ - минимальный

NB: У тривиальных его нет.

Теорема 1: "О минимальном полиноме идеала"

$\mathcal{J}_p$ - идеал
$p(\lambda)$ - его мин. полином

Тогда $\forall \tilde{p} \in \mathcal{J}_p \quad \tilde{p} \vdots p$

Δ От противного $\exists \tilde{p} \not\vdots p$

$\measuredangle \ \dfrac{\tilde{p}}{p} = q + \dfrac{r}{p}$; $\deg r < \deg p$

$\tilde{p} = q\cdot p + r \implies r = \underset{\mathcal{J}_p}{\underset{\cap}{\tilde{p}}} - \underset{\mathcal{J}_p \text{ - по опр. } \mathcal{J}_p}{\underset{\cap}{\underbrace{p\cdot q}}}$

1. $r \in \mathcal{J}_p$ т.к это $\mathcal{J}_p$ под пр-во
2. $\deg r < \deg p$ противоречит p - $\underline{min}$

ч.т.д.

$\blacktriangle$

8
4
B
L

Следствие: Пусть p_1 и p_2 - два min полинома $\mathcal{I}_p$ тогда они отличаются лишь числовым множителем.

т.к. $\begin{matrix} p_1 \vdots p_2 \\ p_2 \vdots p_1 \end{matrix}$ $\deg p_1 = \deg p_2$ - min.

Теорема 2: Минимальный полином совпадает с порождающим.

Δ

$\exists \mathcal{I}_p$ Докажем, что $\mathcal{I}_p = p \cdot \mathcal{P}$

p - мин. полином

$$\left.\begin{matrix} 1.\ \mathcal{I}_p \subseteq p\cdot\mathcal{D} \\ 2.\ \underline{p\cdot\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{I}_p \end{matrix}\right\} \mathcal{I}_p = p\cdot\mathcal{P};$$

$\forall \tilde{p} = p \cdot \underset{\mathcal{D}}{\underset{\Pi}{q}} \subset \mathcal{I}_p$ по опр. идеала

▲

Теорема 3: "О вложении идеалов"

$\begin{matrix} \mathcal{I}_1 \longleftrightarrow p_1 \\ \mathcal{I}_2 \longleftrightarrow p_2 \end{matrix}$ (p_1, p_2 - мин. пол.) $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ тогда $p_1 \vdots p_2$

Δ

$p_1 \in \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \Rightarrow p_1 \in \mathcal{I}_2 \Rightarrow p_1 \vdots p_2$ ч.т.д.

▲

NB: Чем больше идеал тем меньше степень

Теорема 4: "О минимальном полиноме $\cap$"

$\exists \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ - идеалы ; $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ тогда $\mathcal{I} \Leftrightarrow p = \text{Н.О.К}\{p_1, p_2\}$;

$\mathcal{I}_1 \Leftrightarrow p_1$

$\mathcal{I}_2 \Leftrightarrow p_2$

Δ

$$\text{Н.О.К} \left.\begin{matrix} p \vdots p_1 \Leftrightarrow p \in \mathcal{I}_1 \\ p \vdots p_2 \Leftrightarrow p \in \mathcal{I}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$$

$\exists q$ - кратное $\begin{matrix} q \in \mathcal{I}_1 \\ q \in \mathcal{I}_2 \end{matrix}$ $\forall$кратн. $q \vdots p \Rightarrow p$ - Н.О.К.

▲

8
5
B
2

Теорема 5: "О минимальном полиноме "+" идеалов"

$J_1 \leftrightarrow p_1$
$J_2 \leftrightarrow p_2$ тогда $J_1 + J_2 \leftrightarrow$ Н.О.Д $\{p_1, p_2\}$

Теорема 6: "О разложении $\mathbb{1}$" // $\mathbb{1}(\lambda) \equiv 1$.

Пусть Н.О.Д $\{p_1, p_2\} = 1$, т.е. p_1 и p_2 – взаимно простые

Тогда $\exists\, q_1, q_2 \in \mathcal{P}$: $\boxed{p_1 q_1 + p_2 q_2 = \mathbb{1}}$

Δ

Пусть $J_1 = p_1 \mathcal{P}$, $J_2 = p_2 \mathcal{P}$

$J = J_1 + J_2$ – идеал

$J \leftrightarrow p =$ Н.О.Д $\{p_1, p_2\} = \mathbb{1} \Rightarrow p = 1 \in J \Rightarrow J = \mathcal{P}$ –

$\exists\, q_1$ и q_2 : $\underset{J_1}{\underset{\cap}{p_1 q_1}} + \underset{J_2}{\underset{\cap}{p_2 q_2}} = \underset{\mathcal{P}}{\underset{\cap}{\mathbb{1}}}$, ч.т.д.

$\blacktriangle$

Следствие: Н.О.Д. $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \mathbb{1}$, тогда $\exists\, q_1, q_2, \dots, q_k$:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i q_i = \mathbb{1}$$

Теорема 7:

Пусть $p = p_1 p_2 \dots p_k$ (p_i – попарно взаимно простые $\forall i,j = 1,\dots,k$; Н.О.Д $\{p_i, p_j\} = 1$) ; пусть $\grave{p}_i = \frac{p}{p_i}$;

Тогда $\exists\, q_i$ $(i = 1,\dots,k)$: $\sum_{i=1}^{k} \grave{p}_i \cdot q_i = \mathbb{1}$;

Алгебра операторных полиномов. Идеал. Минимальный полином оператора

§ 32 Алгебра операторных полиномов. Идеал. Минимальный полином оператора.

$$\mathcal{P}(A) = \{ \text{Все } p(A) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \cdot A^s \} \quad \text{т.е.} \quad \underbrace{p(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \lambda^s}_{\hat{\mathcal{P}}} \longrightarrow p(A) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s A^s \quad (4)$$

$(J = A^0)$

опр-ет отображение $S_A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_A$

$p_1 \cdot p_2 \xrightarrow{S_A} p_1(A) \cdot p_2(A)$ мультипликативна

$p_1 + p_2 \longrightarrow p_1(A) + p_2(A)$, $\lambda p_1 \longrightarrow \lambda p_1(A)$ } линейн. структура

под алгебра автоморфизмов

$X \times X = \{ \text{все } B : X \to X \}$;

Теорема 1: $\mathcal{P}(A)$ — линейное пр-во.

Δ $p_1(A)x + p_2(A)x = p_2(A)x + p_1(A)x$

$A : X \to X$; $\forall x \in X$;

и т.д.

$\blacktriangle$

Теорема 2: $\mathcal{P}(A)$ — коммутативная алгебра.

Δ $(p_1 \cdot p_2)(A) = p_1(A) \cdot p_2(A)$

$A^{n+m} = A^{m+n} \Leftrightarrow A^n \cdot A^m = A^m \cdot A^n$

и т.д.

$\blacktriangle$

Лемма 1:

$\underbrace{p_1, p_2}_{\in \hat{\mathcal{P}}}$ — взаимно простые, тогда $\exists \underbrace{q_1, q_2}_{\in \hat{\mathcal{P}}}$: $p_1(A) \cdot q_1(A) + p_2(A) q_2(A) = J$

Δ Аналогично "Разложение 1" $\blacktriangle$

Теорема 3:

$p = p_1 \cdot p_2$

$\underbrace{p_1, p_2}_{\in \hat{\mathcal{P}}}$ — взаимно простые

Тогда $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Ker} p_1(A) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(A)$;

Δ 1. $\underbrace{\operatorname{Ker} p_1(A)}_{\ni x_1} + \underbrace{\operatorname{Ker} p_2(A)}_{\ni x_2} \subseteq \operatorname{Ker} p(A)$

$p(A)x_1 = p_2(A) \underbrace{(p_1(A) x_1)}_{0} = 0$

$p(A)x_2 = p_1(A) \underbrace{(p_2(A) x_2)}_{0} = 0$

$p(A)(x_1 + x_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker} p(A)$

$\operatorname{Ker}(p_1(A)) + \operatorname{Ker} p_2(A) \subseteq \operatorname{Ker} p(A)$

8
7
B
L

2. $\mathrm{Ker}\,p(A) \overset{?}{\subseteq} \mathrm{Ker}\,p_1(A) + \mathrm{Ker}\,p_2(A)$

$\forall\ x = x_1 + x_2$, где $x \in \mathrm{Ker}\,p(A)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}\,p_1(A)$, $x_2 \in \mathrm{Ker}\,p_2(A)$

$$x = Jx = \underbrace{p_1(A)q_1(A)x}_{x_2} + \underbrace{p_2(A)q_2(A)}_{x_1}$$

$$\measuredangle\ p_2(A)x_2 = \underbrace{p_2(A)\cdot p_1(A)}_{p(A)}\cdot q_1(A)\cdot x_2 =$$

$$= q_1(A)\cdot[\underbrace{p_1(A)\cdot p_2(A)\cdot x}_{p(A)\cdot x\, =\, 0}] = 0 \quad (x \in \mathrm{Ker}\,p(A))$$

$\Rightarrow x_2 \in \mathrm{Ker}\,p_2(A)$

$p_1(A)x_1 = \ldots = 0 \Rightarrow \underline{x_1 \in \mathrm{Ker}\,p_1(A)}$.

$$\underset{\mathrm{Ker}\,p(A)}{x} = \underset{\mathrm{Ker}\,p_1(A)}{x_1} + \underset{\mathrm{Ker}\,p_2(A)}{x_2} \longrightarrow \underline{OK}.$$

3.

NB: $L_1 \dotplus L_2 \iff L_1 \cap L_2 = \{0_x\}$ // Напоминание

$\mathrm{Ker}\,p_1(A) \cap \mathrm{Ker}\,p_2(A) \overset{?}{=} \{0_x\}$

$\measuredangle\ z \in \mathrm{Ker}\,p_1(A) \cap \mathrm{Ker}\,p_2(A)$

$$z = Jz = \underbrace{p_2(A)q_2(A)\cdot z}_{z_1} + \underbrace{p_1(A)\cdot q_1(A)z}_{z_2}$$

$p_1(A)z_1 = 0$
$p_2(A)z_2 = 0$ | $z = 0 + 0 = 0$;

▲

Следствие: Пусть $p = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$ (скалярный полином; p_i - попарно простые)
Тогда $\mathrm{Ker}\,p(A) = \dotplus\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}\,p_i(A)$

Опр-ние: Аннулирующий полином

<u>Аннулирующим полиномом</u> $p(\lambda)$ (скалярным) оператора $A: X \to X$ назыв. такой не тривиальный $p(\lambda) \in \mathcal{P}$, что $p(A) = \mathbb{O}$.

<u>NB</u>: $p(A) = \mathbb{O} \iff \forall x \in X: p(A)x = 0_x \iff \mathrm{Ker}\,p(A) = X \iff \mathrm{Im}\,p(A) = \{0_x\}$;

Теорема 4: Аннулирующие полиномы A образуют идеал в $\mathcal{P}(A)$
// Обозначение J_A.

Δ

Пусть $p(A)$ - аннул. пол.

$$\underset{J_A}{p(A)}\cdot\underset{\mathcal{P}_A}{q(A)} = \mathbb{O} \Rightarrow \in J_A.$$

▲

$9 \leftarrow 8$
$1 \quad 8$
$B \quad B$
$L \quad L$

Теорема 5: "О существовании анн. полинома"

Для $\forall$ лин. опер. $A: X \to X$ $\exists$ анн. полином $p(\lambda)$;

Δ

$\triangleleft$ $p(A) \subset X \times X = \{$все $B: X \to X\}$ $\dim p(A) < X \times X = n^2$ (комплексн.) $< \infty$

$\underbrace{\{I, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}}_{n^2+1 \text{ шт} > \dim X \times X}$ $\Rightarrow$ Л.З. $\Rightarrow \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2} : \sum_{s=0}^{n^2} \alpha_s A^s = \Theta \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow p(\lambda) = \sum_{s=0}^{n^2} \alpha_s \lambda^s$ (не все $\alpha_s = 0$ по опр ЛЗ)

$\Rightarrow \exists$.

$\blacktriangle$

Опр-ние: Идеал аннулирующих полиномов

$\mathcal{I}_A$ назыв идеалом анн. полиномов лин. опер. A.

$\mathcal{I}_A \longleftrightarrow p_A(\lambda)$ - мин. полином $\mathcal{I}_A$

Опр-ние: Минимальный полином оператора

$p_A(\lambda)$ - мин. полином $\mathcal{I}_A$ назыв минимальным полиномом оператора A.

Date: 19 April 2016
Tuesday

Сравнение алгебр $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(A)$:

$\dim \mathcal{P} = \infty$ $\qquad$ $\dim \mathcal{P}(A) < \infty$

Лемма:

Для того, чтобы $p(A) = q(A)$ необх. и дост., чтобы

$$\rightarrow p(\lambda) = q(\lambda) + p_A(\lambda)\, r(\lambda) \qquad (\forall r(\lambda));$$

$$\underbrace{p_A(A) = \mathcal{O}}_{\mathcal{O}} \quad ; \quad p(A) = q(A) + \mathcal{O} = q_A(A) + p_A(A)\cdot r(A)$$

Лемма:

Пусть $r(\lambda)$ - остаток от деления $p(\lambda)$ на $p_A(\lambda)$. Тогда $r(A) = p(A)$

$$\frac{p(\lambda)}{p_A(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{p_A(\lambda)};$$

Теорема: "О разложе X в $\dot{+}\sum$ ядер"

Пусть $p_A(\lambda)$ - min полином $\mathcal{J}_A$; $\operatorname{Ker} p_A(A) = \operatorname{Ker} \mathcal{O} = X$;

$p_A(\lambda) = p_1(\lambda)\cdot p_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot p_k(\lambda)$, где $p_i(\lambda)$ - попарно попарно простые делители

Тогда: $$\underset{\operatorname{Ker} p_A(A) = \operatorname{Ker}\mathcal{O}}{X} = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(A) = \underbrace{\operatorname{Ker} p_1(A)}_{\neq O_x} \dot{+} \underbrace{\operatorname{Ker} p_2(A)}_{\neq O_x} \dot{+} \ldots \dot{+} \underbrace{\operatorname{Ker} p_k(A)}_{\neq O_x}$$

NB: Обозначение: $\operatorname{Ker} p_i(A) = \mathcal{L}_i$ - спектр подпр-ва;

Теорема: ("2-ая теорема о ядре и образе")

p_A - min полином A (т.е. min аннул. пол $\mathcal{J}_A$)

$p_A = \underset{(скалярно)}{p_1 \cdot p_2}$, p_1, p_2 - взаимно простые

Тогда $\operatorname{Ker} p_1(A) = \operatorname{Im} p_2(A)$;

Δ $p_A(A) = \mathcal{O}$; $\quad \underbrace{p_A(A)\cdot X}_{\{O_x\}} = p_1(A)\,\underbrace{p_2(A)\,X}_{\operatorname{Im} p_2(A)} = \{O_x\} \Rightarrow \boxed{\underset{подпр\text{-}во\ X}{\operatorname{Im} p_2(A)} \subseteq \underset{подпр\text{-}во\ X}{\operatorname{Ker} p_1(A)}}$

$\Rightarrow$ ч.т.д.

1. $X = \operatorname{Ker} p_1(A) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(A) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$
$\dim X = \dim \operatorname{Ker} p_1(A) + \dim \operatorname{Ker} p_2(A)$ (1)
2. $\dim X = \dim \operatorname{Im} p_2(A) + \dim \operatorname{Ker}_2(A)$ (2)

$\Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im} p_2(A) = \dim \operatorname{Ker} p_1(A)}$

Теорема: "О спектральных под.пр-вах и спектральных проекторах"

$\exists A: X \to X$, J_A - идеал анн. полиномов; p_A - min полином A

$p_A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ (p_i - попарно взаимно простые) т.е. $p_A(\lambda) = \prod_{s=1}^{k} (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$

$\measuredangle$ $\grave{p}_i = \frac{p_A}{p_i}$, Н.О.Д $\{\grave{p}_1, \grave{p}_2, \ldots, \grave{p}_k\} = \mathbb{1}$ $\Rightarrow \exists q_i : \sum_{i=1}^{k} \grave{p}_i \cdot q_i = 1$ (I)

$S_A(\mathrm{I})$: $\sum_{i=1}^{k} \grave{p}_i(A) \cdot q_i(A) = \mathcal{I}$; [NB: $p_A = p_i \cdot \grave{p}_i$ $\Rightarrow$ применимо $p_A(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{Ker} p_1(A) = \operatorname{Im} p_2(A)$]

$X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(A)$. Тогда: $\forall x \in X$ $\underset{}{x \overset{!}{=} \underset{\mathcal{L}_1}{x_1} + \underset{\mathcal{L}_2}{x_2} + \ldots + \underset{\mathcal{L}_k}{x_k}}$,

осуществляется
1. $x_i = \grave{p}_i(A) \cdot q_i(A) x$
2. $\grave{p}_i(A) \cdot q_i(A) = \underbrace{\mathcal{P}_i}_{\text{спектральный проектор}} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_i}^{\parallel \text{ п.о. Ker ост. } \mathcal{L}_i}$

Δ

1. $\measuredangle$ $x_i = \underbrace{\grave{p}_i(A) \cdot \underbrace{q_i(A)x}_{y \in X}}_{\cap\ \operatorname{Im} \grave{p}_i(A)} \in \mathcal{L}_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$ т.к. NB

2. $X = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_k$
$x \overset{!}{=} x_1 + x_2 + \ldots +$

Спектральная теорема для оператора общего вида

Date: 26 April 2016

§ 33 Спектральная теорема для оператора общего вида

I. Вводные леммы "Об инвариантных подпр-вах"

Лемма 1:

$\exists\, A: X \to X$, Тогда $\forall\ \mathrm{Ker}\, p(A)$ – инв. подпр-во лин. опер. A (может быть тривиал. X и $\{0_X\}$)

Δ

Напоминание: L – инв. п.п. A, если $A(L) \subset L$, т.е. $\forall x \in L: Ax \in L$

$\mathrm{Ker}\, p(A)$; $A(\mathrm{Ker}\, p(A)) \subset \mathrm{Ker}\, p(A)$ $\forall x \in \mathrm{Ker}\, p(A)$; Ax

$p(A) \cdot A = A \cdot p(A)$

$\triangleleft\ p(A)x = 0$; $A(\underbrace{p(A)x}_{0}) = p(A)(Ax) = 0$

$x \in \mathrm{Ker}\, p(A)$

Надо: $\forall x \in \mathrm{Ker}\, p(A) \overset{?}{\Rightarrow} Ax \in \mathrm{Ker}\, p(A)$

$\triangleleft\ Ax$

$x \in \mathrm{Ker}\, p(A) \Rightarrow \underline{p(A)x} = 0$

$\triangleleft\ Ax$

коммут. $p(A)$ и A

$p(A)(Ax) = A(\underbrace{p(A)x}) = A(0) = 0$

$\blacktriangle$

Лемма 2:

$\exists\, A: X \to X$ (общего вида) ; $J_A \leftrightarrow p_A(\lambda)$ – min полином

$p_A = p_1 \cdot p_2$ взаимно простые делители, $\deg p_1, \deg p_2 \geq 1$

Тогда $\mathrm{Ker}\, p_A(A) = \underbrace{\mathrm{Ker}\, p_1(A)}_{\mathcal{L}_1} \dot{+} \underbrace{\mathrm{Ker}\, p_2(A)}_{\mathcal{L}_2} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – не тривиал. подпр-ва.

Δ От противного:

1. $\mathrm{Ker}\, p_1(A) = \{0_X\} \to$ бред т.к. $\Rightarrow \underline{\deg p_1(A) < \deg p_A(A)}$ – бред.

2. $\dim X = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2$

$\exists \dim \mathcal{L}_1 = 0 \Rightarrow \dim \mathcal{L}_2 = n = \dim X \Rightarrow \mathcal{L}_2 = X$ – бред.

$\blacktriangle$

10
2
B
4

Лемма 3:

$$\exists\, X = \operatorname{Ker} p_A(A) = \underbrace{\overbrace{\operatorname{Ker} p_1(A)}^{\neq \{0_X\};\,X}}_{\text{инв. пп. (Лем 1)}} \dotplus \underbrace{\overbrace{\operatorname{Ker} p_2(A)}^{\neq}}_{\text{инв. п.п. (Лем 1)}} \quad (\text{нетривиальн.})$$

Тогда X – ультраинвариантное подпр-во. (по опр-нию)

Следствие: $\exists\, p_A = \prod_{i=1}^{k} p_i$ (нетр., взаимн. прост. p_i) тогда $X = \dotplus\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i = \dotplus\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(A)$;

II Заготовки для Спектральной теоремы.

$\exists\, p_A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$; $\exists\, p^i = \frac{p_A}{p_i}$; q_i – тот, же смысл, что и в §32.

$$\sum_{i=1}^{k} p^i \cdot q_i = 1 \ ; \qquad \sum_{i=1}^{k} p^i(A)\, q_i(A) = \mathcal{I}.$$

$\boxed{1.}$ Обозначим $\mathcal{L}_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$ (p_i – взаимн. простые нетривиальные делители p_A,)

Тогда $\boxed{2.}$ $X = \dotplus\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i = \dotplus\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(A)$

$\boxed{3.}$ $\mathcal{P}_i$ – проектор (ультраинв.) на $\mathcal{L}_i$ ($\parallel$ лин. об. $\{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{i-1}, \mathcal{L}_{i+1}, \ldots \mathcal{L}_k\}$)

$\boxed{4}$ $\measuredangle\ A_i = A\big|_{\mathcal{L}}$, т.е. $\begin{cases} A_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_i \\ A_i x = Ax \end{cases}$

$\boxed{5}$ $A = A_1 \mathcal{P}_1 + A_2 \cdot \mathcal{P}_2 + \ldots + A_k \cdot \mathcal{P}_k = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_k = \sum_{i=1}^{k} A_i =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{A_i}_{\text{спектр. компонент}} \cdot \underbrace{\mathcal{P}_i}_{\text{спектральный проектор.}}$$

$p_i(\lambda)$ – min полином компоненты A_i

10
З
В
Ш

Теорема 1: "Спектральная теорема"

$\exists\ p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ $\left\{\begin{array}{l} m_i \text{ - алгебр. кратность } \lambda_i \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ - корни } p_A(\lambda) \end{array}\right.$ | NB: $p_A = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow p_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

Тогда
1. $L_i = \mathrm{Ker}\, p_i(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I)^{m_i}$ - ультра инв. п.п. лин. опер. A.
2. $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_i = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i}$
3. P_i - спектральные ультрапроекторы на L_i; $P_{\lambda_i} = \hat{p}_i(A) \cdot q(A)$;
4. $A_i = A|_{L_i}$ - спектральные компоненты лин. о. A: $\left\{\begin{array}{l} A_i : L_i \to L_i \\ A_i x = Ax \end{array}\right.$;
5. $A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_i$
6. $p_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ - min полином A_i

Следствие: $\exists\ B_x = \bigcup_{i=1}^{k} B_{L_i}$; Тогда $A \xleftrightarrow{B_x} \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$;

$A_i \xleftrightarrow{B_i} A_i$

Опр-ние: Нильпотентный оператор

$\exists\ T : X \to X$ такой, что $\exists\, m \in \mathbb{N}$, что $T^m = \mathcal{O}$, $T^{m-1} \neq \mathcal{O}$

NB: $m = 0$ $T^0 = I$ - нехорошо
$m = 1$ $T^1 = \mathcal{O}$ - тривиально.

Иной вид оператора общего вида:

$\mathrm{Ker}\,(A_i - \lambda_i I)^{m_i}$ $\quad \Delta\ T_i = A_i - \lambda_i I$

$T_i^{m_i} = (A - \lambda_i I)^{m_i} = 0$

NB: 1. m_i назыв. порядком нильпотентности T
2. $T_i^{m_i - 1} = (A - \lambda_i I)^{m_i - 1} \neq \mathcal{O}$
т.к. $(\lambda - \lambda_i)^{m_i - 1}$ — не min полином для соотв. лин. опер.

Итог: $A_i = \lambda_i \cdot I_i + T_i$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i I_i + T_i) P_i}$$

$A \xleftrightarrow{B} A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_1 + T_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda_2 I_2 + T_2} & \\ 0 & & \ddots \quad \boxed{}_k \end{pmatrix}$

Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана(обзор)

§ 34 Структура нильпотентного оператора
Базис Жордана (обзор)

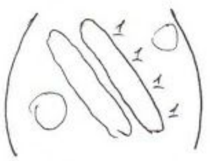
1. $\measuredangle$ $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

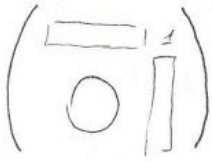
$\tau e_1 = 0$
$\tau e_2 = e_1$
$\tau e_3 = e_2$
$\tau e_m = e_{m-1}$

NB: $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ — e_1 собственный, $e_2, \dots, e_m$ присоединённые

$\{e_i\}_{i=1}^m \updownarrow$

(*) τ — Жорданова клетка.

$\measuredangle$ $T^2 =$ 

$T^{m-1} =$ 

$T^m = 0$;

Опр-ние:

(*) τ — одноклеточный нильпотентный лин. оп.

$$\chi_\tau(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^m = 0$$

$\sigma_\tau = \{\lambda_1 = 0\} \longleftrightarrow$ собств. вект. e_1

$p_\tau(\lambda) = \lambda^m$ — аннул.

$p_\tau(\lambda) = \pm \chi_\tau(\lambda) = (-\lambda)^m$

$p_\tau(\tau) = T^m = \Theta$

$L_1 = л.о.\{e_1\}$ $\qquad TL_1 = \{0_x\}$

$L_2 = л.о.\{e_1, e_2\}$ $\qquad TL_2 = L_1$

$\dots$

$L_m = л.о.\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ $\qquad TL_m = L_{m-1}$

— инвар., но не ультраинвар.

Теорема 1:

Прямая сумма одноклеточных нильпотентных операторов есть нильпотентный оператор.

$\triangle$ По индукции:

$$\tau = \tau_m \dotplus \tau_k \dotplus \tau_l; \qquad T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & & O \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ O & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\beta = \beta_m \cup \beta_k \cup \beta_l;$$

Порядок нильпотентности $= \max\{m, l, k\}$

$\blacktriangle$

Теорема 2:

$\forall\ \tau$ - нильпотентный лин.о. может быть выбором базиса $\beta_\tau = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_k$, представлен в виде $\tau = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$, где τ_i - однокл. нильпот. опер.

Два слоя спектральной теоремы: $\quad A = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i I_i + \tau_i) P_i$

$$\beta_X = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i \quad (\beta_i \text{ - базис } A_i)$$

$$\updownarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_1 + \tau_1} & & \\ & \boxed{\lambda_2 I_2 + \tau_2} & \\ & & \ddots \ \boxed{} \end{pmatrix}$$

<u>Устройство нильпотентной добавки</u>

$$A_i \overset{\beta_i}{\longleftrightarrow} A_i = \lambda_i \cdot I_i + T_i = \begin{pmatrix} \overset{m_i}{\boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & O \\ & \lambda_i & 1 \\ O & & \lambda_i \end{matrix}}} & & \\ & \boxed{} & \\ & & \ddots \ \boxed{} \end{pmatrix};$$

m_i - порядок нильпот. T_i

"О кратностях собств. знач"

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ λ_i – корни и $p_A(\lambda)$ и $\chi_A(\lambda)$

$\boxed{1}$ m_i – алгебр. кратность: 1. Кратность корня λ_i у $p_A(\lambda)$

2. Порядок нильпот. добавки τ_i $(\tau_i^m = \Theta)$

3. Поголовье жордановых блоков в Жордановой форме матр. лин. оп. A.

$\boxed{2}$ n_i – полная кратность:

1. Кратность корня λ_i $\chi_A(\lambda)$

2. $n_i = \dim A_i$

$\boxed{3}$ τ_i – спектральная (геометрическая)

1. $\tau_i = \dim L_i$ (собств. п.п. $\leftrightarrow \lambda_i$)

2. Кол-во блоков в ~~гр.~~ компоненте A_i

"Соотношение кратностей"

1. $n_i \geq m_i$; $n_i \geq \tau_i$

2. $\chi_A(\lambda) \vdots p_A(\lambda) \Rightarrow \chi_A \in J_A$

Крайние случаи:

1. $n_i = \tau_i$ $\Rightarrow$ опер. спектр. типа
$m_i = 1$
$i = 1, \dots, k$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ O & & & \lambda_4 \end{pmatrix};$$

лин. опер. скал. типа

2. $n_i = m_i$
$\tau_i = 1.$

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$, каждая A_i – жорданов блок

Евклидово пространство

Метрические, нормированные, вещественные евклидовы пространства

10 → 11
7 1
8 8
6 6

Теорема 3: "Гамильтона – Кэли"

1. Характеристический полином явл. аннул.-им полиномом A, но не обязательно минимальным. $\chi_A(\lambda) \vdots p_A(\lambda)$
2. Если для всех λ_i $(\lambda_i \in \sigma_A)$ $n_i = r_i$, то A – л.о. скалярного типа (или $m_i = 1$)

Date: 3 May 2016

Евклидово пространство

NB: Обозначение E;

§1. Метрические, нормированные, вещественные евклидовы пространства

Опр-ние: Метрическое пространство

Метрическое пр-во – мн-во $M = \{a, b, c, \dots\}$ со свойствами:

1. На M задана ф-я $\rho: M \times M \to \mathbb{R}^+$ (т.е. $\xrightarrow{0}$), такая что
   1) $\rho(a;b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ аксиома тождества
   2) $\rho(a,b) = \rho(b;a)$ – симметрия
   3) $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$ – неравенство треугольника

$\rho(x,y)$ назыв. расстоянием. (NB: иногда назыв. метрикой)

F.e: 1. Дискретная метрика

а) $\begin{cases} \rho = 0 & \text{при } x = y \\ \rho = 1 & \text{при } x \neq y \end{cases}$

б) $\mathbb{R}^n$: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

в) $\rho(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$

г) Равномерная метрика

$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

$X \subset \mathbb{R}$

д) Интегральная метрика

$\rho(f,g) = \int_X |f(x) - g(x)|\, dx$

Опр-ние: Нормированное пространство

<u>Нормированным пр-вом</u> X назыв лин. пр. X со св-вами:

$\exists$ функции $\| \ \| : X \to \mathbb{R}^+$, причём:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = O_x$ невырожденность
2. $\lambda \in F$ (X над F, $x \in X$) Тогда $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

F.e: 1. $\mathbb{R}^n$ $\rceil x \in \mathbb{R}^n$, то $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}$;

$$x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

2. Функциональная норма

$\Psi(x)$ - непр-ная; $\|\Psi\| = \sup \{ |\Psi(x)| ; \|x\| \leq 1 \}$

3. $\|A\| = \sup \{ \|Ax\| ; \|x\| \leq 1 \}$

Норма линейного оператора.

Теорема: Всякое нормированное пр-во явл. метрическим. Обратное неверно.

Δ

1. $\rho(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$
2. M - мн-во и не обладает св-вами (// линейность, +, -)

▲

Опр-ние: Вещественное евклидово пространство

<u>Вещ. Евклидовым пространством</u> E назыв. лин. пр-во $X^{\text{над } \mathbb{R}}$ со свойствами:

X наделено дополнительной структурой (скалярное произведение):

1. Скалярное произв. - <u>билинейная форма</u> $\langle x, y \rangle_G$:

$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2; y \rangle_G = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle_G + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle_G$ (по обоим аргум.)

2. <u>Симметричность</u>

$\langle x; y \rangle_G = \langle y; x \rangle_G$

3. <u>Положительная определённость</u>

$\langle x; x \rangle_G \geq 0$ $\langle x; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = O_x$;

F.e: $\langle x, x \rangle = \sum_{i}^{n} \xi_i^2$ $x \in \mathbb{R}^n$

11
3
B
L

Теорема: $\forall$ вещ. евклидово пространство является нормированным ($\Rightarrow$ метрическим)

Δ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

1. $\|x\| \geqslant 0$ $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0_X$
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|$
3. Неравенство треугольника — будет в будущем.

NB: $\langle\, ,\, \rangle_G$ – метрика;

F.e: $X = \mathbb{R}^n$; $x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ $\quad \langle\, ;\, \rangle \longleftrightarrow g_{ik}$ // 2-раза контр. вариантный тензор (метрический)

$$\langle x, y\rangle_G = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, \xi^i \eta^k$$

$$y = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \dots \\ \eta^n \end{pmatrix}$$

1. Билин. форма
2. Симметричный тензор. $g_{ik} = g_{ki}$
3. Положит. опр-нность. Надо, чтобы $\|g_{ik}\|$
   1) $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, \xi^i \eta^k \geqslant 0$
   2) $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, \xi^i \xi^k = 0_X \iff \xi^1 = \xi^2 = \dots = \xi^n = 0_F$

Опр-ние: Вещественное псевдоевклидово пространство.

$\exists\, M(x,y)$ – метрическая форма

1. $M: X \times X \to \mathbb{R}$ (X над $\mathbb{R}$)
2. Билинейная
3. Невырожденная
   $M(x,y) = 0$ $\forall y \in X$ $\Rightarrow$ $x = 0$
4. $M(x,y) = M(y,x)$

Линейное пространство X, наделённое метрической формой M назыв. вещественным псевдоевклидовым пр-вом.

F.e: Пространство Минковского $\mathbb{R}^4$

$x = (\underbrace{x^0}_{\text{время}}, \underbrace{x^1, x^2, x^3}_{\text{пространств.}})$ $\quad \langle x, y\rangle = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$;

Опр-ние:

x назыв. ортогональным ($\perp$) y если $\langle x, y\rangle_G = 0$

Опр-ние:

x назыв нулевым вектором в смысле $\langle\, ;\, \rangle_G$
если $\langle x, x\rangle_G = 0 \iff x = 0_X$;

NB: 1. В вещ. евкл. пр-ве такой x один.
2. В псевдоевкл. нет.
$x = \left(1; -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad M(x,x) = 1^2 - 3\cdot\frac{1}{3} = 0 \neq 0_X$

Date: 10 May 2016.

§ 2 (36) Геометрия евклидова пространства [$\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$]
Основные неравенства.

Геометрия Евклидова пространства:

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
2. $\underset{\text{расстояние между векторами}}{\text{dist}}(x, y) = \|x-y\|$ NB: $\text{dist}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ // будет доказано / в будущем.

3. $\mathbb{R}^3$: $\langle x, y\rangle = |x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi$

Опр-ние: Косинус угла между векторами:

$$\cos\angle(x,y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|};$$

$\cos \in [-1; 1]$; $\cos(\ ) = \pm 1$ если $x \parallel y$
// будет в будущем;

Опр-ние: Угол между вектором и под.пр-вом

$\exists x \in X$, L - под.пр-во X $\quad \angle(x, L) = \sup\limits_{y\in L}(\angle(x,y))$

Опр-ние: Угол между под.пр-вами

L, M - под.пр-во X $\quad \angle(L, M) = \sup\limits_{\substack{x\in L\\ y\in M}}(\angle(x,y))$

Комплексное евклидово пространство

Опр-ние:

Комплексным евклидовым пр-вом E назыв. линейное пр-во X над $\mathbb{C}$, наделённое метрической формой:

1. $\langle x, y\rangle = \langle \bar{y}, \bar{x}\rangle$
2. Линейность по 1-ому арг.
$\langle \alpha x + \beta y; z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
3. Положительная опр-нность
$\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = O_x$.

NB: 1. $\langle ix, ix\rangle = \underbrace{i\cdot\bar{i}}_{1}\langle x, x\rangle \geqslant 0$

2. $\langle x; \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$ т.к.

$\overset{\text{def.}}{\parallel}$

$\langle \alpha y; x\rangle = \bar{\alpha}\langle y, x\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$

12
2
6
4

F.e: 1. $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \overline{\eta^i} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \overline{\xi^i} = \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ = 0 \iff \text{все } \xi^i = 0 \end{matrix}$$

2. $X = \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y\rangle_G = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \xi^i \overline{\eta^k} \qquad g_{ik} = \overline{g_{ki}}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \xi^i \overline{\xi_k} \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ = 0 \iff x = 0 \end{matrix}$$

Теорема: Неравенство Шварца (Коши - Буняковского)

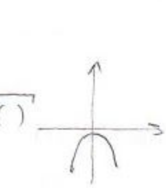
$\forall x, y \in E$ (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) верно: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\qquad$ // $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

Δ

$$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\text{⊲}} \quad \underbrace{\langle \lambda x - y ; \lambda x - y\rangle}_{= \|\lambda x - y\|^2 \geq 0} = \left[\begin{array}{ll} \mathbb{R}: & \lambda^2\|x\|^2 - \lambda\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ \mathbb{C}: & \lambda^2\|x\|^2 - \lambda\langle x, y\rangle - \underbrace{\lambda\langle y ; x\rangle}_{\lambda\langle \overline{x ; y}\rangle} + \|y\|^2 \end{array} \right. =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0 \\ \lambda^2\|x\|^2 - 2\overset{\lambda}{}\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0 \end{array} \right.$$

1. $\mathbb{R}$: $\quad \frac{D}{4} = (\langle x, y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \quad \Big\} \sqrt{(\,)}$



$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

2. $\mathbb{C}$: $\quad \frac{D}{4} = (\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \quad \Big\} \sqrt{(\,)}$

$$\underbrace{|\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle|}_{\leq |\langle x, y\rangle|} \leq \|x\|\,\|y\|$$

⊲ $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \cdot e^{i\varphi} \quad (\varphi = \arg\langle x, y\rangle)$

$y \longrightarrow y \cdot e^{i\varphi}$

$$|\mathrm{Re}\, e^{i\varphi}|\langle x ; y\rangle|\,| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$|\mathrm{Re}\, e^{i\varphi}|\langle x ; e^{i\varphi} y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|e^{i\varphi} y\|$$

$$|\mathrm{Re}\, \cancel{e^{i\varphi}} \cdot \cancel{e^{-i\varphi}}\,|\langle x ; y\rangle|\,| \leq \|x\|\,\|e^{i\varphi}\| \cdot \|y\|$$

$$\mathrm{Re}\,|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

$$\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

▲

57

NB: // Док. о $\underline{\cos}$ :: $\mathbb{R}$

$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$ 1. $\|\cos\varphi\| \le 1 \iff \cos\varphi \in [-1; 1]$

2. $\cos\varphi = \pm 1$, если $\underline{x}$ и y коллинеарны.

Теорема: "Неравенство треугольника"
$(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Δ $\underbrace{\|x+y\|^2}_{\ge 0} = \langle x+y; x+y\rangle = \begin{cases} \underline{\mathbb{R}}: & \|x\|^2 + 2\langle x; y\rangle + \|y\|^2 \quad (1) \\ \underline{\mathbb{C}}: & \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad (2) \end{cases}$

(1): $\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\underbrace{|\langle x, y\rangle|}_{\le \|x\| \cdot \|y\|} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 =$
Коши-Буняковский

$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ NB: $\|x+y\| \ge \|x\| - \|y\|$

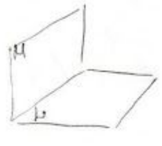
(2): $\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ $\} \sqrt{()}$
$/\ 2|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \cdot 2.$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|;$

$\blacktriangle$

Опр-ние: Ортогональность в $\mathbb{C}$
$x \perp y$ в X над $\underline{\mathbb{C}}$, если $\langle x, y\rangle = 0$.

Лемма:
$\{y_i\}_{i=1}^m$: $x \perp y_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Тогда $x \perp \forall$ лин. комб. $\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$

Опр-ние:
L - под. пр-во X. Множество $M = L^\perp$ назыв. ортогональным дополнением L в X если $\forall\, y \in M$: $y \perp L$



Опр-ние:
x назыв. $\perp$ под. пр-ву L лин. пр-ва X, если $x \perp \forall y \in L$

Ортогональный наборы векторов Процесс ортогонализации Грана-Шмидта

12
4
Б
Ь

Лемма:

$M = L^{\perp}$ – так же под пр-во X.

Теорема:

$\{x_i\}_{i=1}^m \quad x_i \perp x_j \ (i\neq j)$ Тогда $\{x_i\}_{i=1}^m$ – Л.Н.З.

все $x_i \neq 0_x$

Δ

$\triangleleft \ \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m}_{} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$

$\langle \ \cdot \ ; x_3\rangle \quad \left\langle \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j ; x_i \right\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{\langle x_j ; x_i\rangle}_{=0 \ i\neq j} = \alpha_i \langle x_i, x_i\rangle = \alpha_i \|x_i\|^2 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i=1,\ldots,m$

$\blacktriangle$

Следствие: В конечномерном л.пр-ве X не может быть набора $\{x_i\}_{i=1}^m$ попарно ортогональных при $\underline{m} > n$

Теорема: Пифагора

$\{x_i\}_{i=1}^m$ – набор $x_i \in X : x_i \perp x_j \ (i\neq j)$; $\langle x_i ; x_j\rangle = 0$ Тогда $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_m\|^2$

$m \leq n$

$\Delta \triangleleft \quad \|x_1 + x_2 + \ldots x_m\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i ; \sum_{j=1}^m x_j \right\rangle \overset{\text{по лин-ти}}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \underbrace{\langle x_i ; x_j\rangle}_{0 \ (i\neq j)} = \sum_{i=1}^m \langle x_i ; x_i\rangle =$

$= \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$

$\blacktriangle$

§ 3 (37) Ортогональные наборы векторов [базисы]. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта.

Опр-ние: Ортонормированный базис

базис $\{e_i\}_{i=1}^n \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ назыв. ортонормированным

NB: "орто" $\leftrightarrow e_i \perp e_j \ (i\neq j)$

"норму" $\leftrightarrow \langle e_i ; e_i\rangle = 1$ // нормировка на 1.

Теорема:

Если для $\forall\, x,y \in E$ $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \bar{\eta}^i \quad \left(x,y \in \mathbb{C};\ x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \right)$,
то базис в котором записаны x и y — ортонормированный

Δ

$$\langle e_i, e_j \rangle = \Big\langle \begin{array}{c} \\ \text{"}i\text{"} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{"}j\text{"} \end{array} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

$\blacktriangle$

Теорема:

В ортонорм-ном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ E $\langle\, ;\, \rangle$ имеет простейший вид.

Δ

$$\left.\begin{array}{l} \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \bar{\eta}^i \\ \langle e_i; e_j\rangle = g_{ij} = \delta_{ij} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, \xi^i \bar{\eta}^k = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \bar{\eta}^i$$

$\blacktriangle$

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Д-но: $\quad x_1, x_2, \dots, x_m\ x_{m+1} \longrightarrow$ ортогонализовать $\quad$ // NB: не забудь нормировать (разделить на что-то)

Алгоритм:

1. $e_1 = x_1$

2. $e_2 = x_2 + \alpha_1 e_1$ $\quad$ [надо $e_1 \perp e_2$; $\langle e_1, e_2\rangle = 0$]

$$\langle (2); e_1\rangle :\ \underbrace{\langle e_2; e_1\rangle}_{= 0} = \langle x_2; e_1\rangle + \alpha_1 \langle e_1; e_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\langle x_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$$

...

m] Есть $[e_1, e_2, \dots, e_{m-1}]$

Хотим $\quad e_m = x_m + \overset{1}{\beta_1} e_1 + \overset{\alpha_1}{\beta_2} e_2 + \overset{(+\beta_k e_k)}{\dots} + \beta_{m-1} e_{m-1} \qquad e_i \perp e_j \ (i \neq j;\ i,j = 1,\dots,m-1)$

$$\langle \overbrace{(m); e_k}^{=0\ (\text{хотим})} \rangle :\ \langle e_m; e_k\rangle = \langle x_m; e_k\rangle + \beta_1 \underbrace{\langle e_1; e_k\rangle}_{=0} + \beta_2 \underbrace{\langle e_2; e_k\rangle}_{=0} + \dots +$$

$k = 1, \dots, m-1;$

$$+ \dots\ \beta_k \underbrace{\langle e_k, e_k\rangle}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow 0 = \langle x_m; e_k\rangle + \beta_k \langle e_k; e_k\rangle$$

$$\Rightarrow \beta_k = -\frac{\langle x_m; e_k\rangle}{\langle e_k; e_k\rangle} \quad (k < m)$$

12
6
B
Ь

NB: 1. Почему в процессе не оборвёмся, т.е. не возникнет: $e_s = 0$?

$$\left.\begin{aligned} e_m &= x_m + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots + \beta_k e_k + \dots + \underbrace{\beta_{m-1} e_{m-1}}_{\text{лин. комб.} \{x_1, \dots, x_{m-1}\}} \\ e_2 &= x_2 + \alpha_1 e_1 = \text{лин. комб.}\ x_2, x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_m = \gamma x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_{m-1} \cdot x_{m-1} = 0$$

т.к. $\{x_i\}_{i=1}^{m-1}$ – Л.Н.З

// как поднабор Л.Н.З.

2. $\left.\begin{aligned} &\{x_1, x_2, \dots x_{m-1}\} - \text{Л.Н.З.} \\ &\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m\} - \text{Л.З.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_m = 0.$

Теорема:

В $\forall$ евклид. пр-ве E ($\dim E = n < \infty$) $\exists$ ортогональный базис (и так же ортонормированный)

Δ $\{x_i\}_{i=1}^n$ - базис $E \xrightarrow{\text{Г-Ш}} \{e_i\}_{i=1}^n$ - ортогон. ($e_i \perp e_j \quad i \neq j$) $\longrightarrow$

$\longrightarrow \left\{ e_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|} \right\}_{i=1}^n$ - ортонормированный базис.

▲

Теорема:

Процесс ортогонализации лишь уменьшает норму вектора.

Δ $\quad e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$

$|\langle e_k; e_k \rangle| = |\langle x; e_k \rangle| + \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \dots + \beta_{k-1} \cdot 0$

$\|e_k\|^2 = |\langle x, e_k \rangle| \leq \|x\| \cdot \|e_k\| \quad \Rightarrow \quad \|e_k\| \leq \|x\|;$

▲

Теорема:

E – евклидово пр-во. L - подпр-во; $M = L^{\perp}$ - ортог. дополнение L в E

Тогда $E = L \dotplus M$.;

Δ
$\measuredangle$ L ($\dim L = k$, базис ортонорм. в L: $\{e_i\}_{i=1}^k$)

$\beta_x = \{ \underbrace{\overbrace{e_1, e_2, \dots, e_k}^{\text{Л.Н.З}}}_{\beta_L}, \underbrace{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n}_{n-k \text{ штук}} \} \xrightarrow[\text{+ ортонорм}]{\text{Г-Ш}} \beta_E \Rightarrow \tilde{\beta}_E = \{ \underbrace{e_1, e_2, \dots e_k}_{L}, \underbrace{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots e_n}_{M} \}$

$\tilde{\beta}_E$: $\forall x \in E \quad x \overset{!}{=} \underset{\cap\, L}{\sum^{k} \alpha_i e_i} + \underset{\cap\, M}{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i}$, т.е. $\forall x \overset{!}{=} \underset{\cap\, L}{x_1} + \underset{\cap\, M}{x_2}$

 ▲

Ортогональный проектор. Задача о перпендикулярах

Date: 19 May 2016.

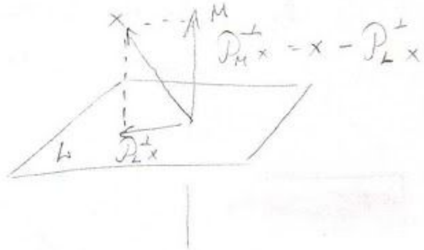
13 1 B 4

§ (38) Ортогональный проектор. Задача о перпендикуляре.

Опр-ние: Ортогональный проектор на подпр-во

Если $E = L \dotplus M$, где $M = L^\perp$. Тогда пусть $\mathcal{P}_L^\perp = \mathcal{P}_L^{\parallel M}$ — ортогональный проектор на подпр-во L.

NB: $x \overset{!}{=} x_L + x_M = \underbrace{\mathcal{P}_L^\perp x}_{\text{ортогон. проекция } x \text{ на } L} + \underbrace{\mathcal{P}_M^\perp x}_{\text{ортогон. (сост) } x \text{ к } L \text{ составляющая}}$



Опр-ние: Задача о перпендикуляре.

Задачей о перпендикуляре назыв. задача нахождения орт. проекции, орт. составляющей x. $x_L = \mathcal{P}_L^\perp x$ $x_M = \mathcal{P}_M^\perp x$;

Лемма:

Явный вид $\mathcal{P}_L^\perp$ в ортонорм. базисе.

Пусть L — подпр-во E $\{e_i\}_{i=1}^k$ — ортонорм. базис L, $k = \dim L$

$(\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij})$

Тогда $\boxed{\mathcal{P}_L^\perp * = \sum_{i=1}^k \langle *, e_i \rangle e_i}$

Δ Дополним $\{e_i\}_{i=1}^k$ до ортонорм. базиса E: $\{e_i\}_{i=1}^n$, где ортонорм. базис M — $\{e_i\}_{i=k+1}^n$

1. Пусть $e_j \in L$ $\mathcal{P}_L^\perp e_j = \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\delta_{ji} = \delta_{ij} = 1} e_i = e_j$

2. Пусть $e_s \in M = L^\perp$: $\mathcal{P}_L^\perp e_s = \underbrace{\langle e_s, e_i \rangle}_{\delta_{si} = 0} e_i = 0$

$\blacktriangle$

NB: Решение задачи о перпенд. $\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$ $\mathcal{P}_M^\perp x = x - \mathcal{P}_L^\perp x$

I-ый способ

13
2
B
b

II-ой способ

$$x \dot{=} \mathcal{P}_L^{\perp} x + \mathcal{P}_M^{\perp} x = x_L + x_M \qquad \{a_i\}_{i=1}^{k} \text{ - базис } L \text{ (не ортонорм.)}$$

$$L = M^{\perp} \qquad +\, 0 = \langle a_i; \mathcal{P}_M^{\perp} x \rangle$$

$$\alpha,\ x_L = \alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots + \alpha^k a_k$$

$$
\begin{array}{ll}
\langle a_1; (1)\rangle : & \overline{\alpha_1}\langle a_1, a_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle a_1; a_2\rangle + \dots + \overline{\alpha_k}\langle a_1, a_k\rangle \; [1] = \langle x, a_1\rangle \\
\langle a_2; (1)\rangle : & \overline{\alpha_1}\langle a_2; a_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle a_2; a_2\rangle + \dots + \overline{\alpha_k}\langle a_2; a_k\rangle \; [2] = \langle x, a_2\rangle \\
\dots\dots & \dots\dots \\
\langle a_k; (1)\rangle : & \overline{\alpha_1}\langle a_k; a_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle a_k; a_2\rangle + \dots + \overline{\alpha_k}\langle a_k; a_k\rangle \; [k] = \langle x; a_k\rangle
\end{array}
$$

$$(1)\ \boxed{x = x_L + x_M}$$

$$\mathcal{P}_M^{L} x$$

$x_M \perp x_L \qquad \langle x_L, x_M\rangle = 0;$

Матрица $k \times k$ $\longrightarrow$ Крамер. $\longrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \longrightarrow$

$$\longrightarrow \mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i a_i \ ; \quad x_M = \underline{\qquad}$$

Опр-ние: Матрица Грама

$$G(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{Vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \dots & \langle a_1, a_k\rangle \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \langle a_k; a_1\rangle & \dots & \langle a_k; a_k\rangle \end{Vmatrix}$$

называется матрицей Грама системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$

NB: Крамер:
$$\overline{\alpha_i} = \frac{\det \begin{array}{c} \\ \begin{Vmatrix} \vdots & \overbrace{\langle x; a_1\rangle}^{i\text{-ый}} & \vdots \\ \vdots & \langle x; a_2\rangle & \vdots \\ & \dots\dots & \\ & \langle x; a_k\rangle & \end{Vmatrix} \end{array}}{\det G(a_1, a_2, \dots, a_k)}; \qquad \det G \neq 0.$$

/* в G заменяем i-ый столбец на $\langle x, a_i\rangle$, далее делим det измененной матрицы на det исходной. */

NB: $\|x\| = \|\mathcal{P}_L^{\perp} x\| + \|\mathcal{P}_M^{\perp} x\|$ - т. Пифагора.

Следствия:
1. $\|\mathcal{P}_L^{\perp}\| \leq \|x\|$
2. $\|\mathcal{P}_M^{\perp}\| \leq \|x\|$

$$\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\| = \|x\| \iff x \in L$$

13
3
B
L

Опр-ние: Коэффициент Фурье.

$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ - ортонорм. система

$\langle x; e_i\rangle = \underline{\varphi_i}$ - коэффициент Фурье $\underline{x}$ относительно ортонорм. сист. $\{e_i\}_{i=1}^k$

$\forall x \in E$

Лемма: Равенство Парсеваля.

$L = $ л.о $\underbrace{\{e_1, e_2, \dots, e_k\}}_{\text{ортонорм. баз.}}$ Тогда $\boxed{\|P_L^\perp x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x; e_i\rangle|^2}$

Δ $\quad \langle P_L^\perp x; P_L^\perp x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k}\langle x; e_i\rangle e_i; \sum_{j=1}^{k}\langle x; e_j\rangle e_j\rangle =$

$= \sum_{i,j=1}^{k}\langle x; e_i\rangle \cdot \overline{\langle x; e_j\rangle}\underbrace{\langle e_i; e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{k}\langle x; e_i\rangle\overline{\langle x; e_j\rangle} = /^* z\cdot\bar z = |z|^2 \ ^*/$

$= \sum_{i=1}^{k}|\langle x; e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k}|\varphi_i|^2;$

$\blacktriangle$

NB: **Неравенство Бесселя**

$\|x\| \geq \|P_L^\perp x\|$. Тогда $\boxed{\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k}|\langle x; e_i\rangle|^2}$

// Переходит в равенство если $x \in L$

Теорема:

Для того, чтобы ортонорм. набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ был полным в Евклидовом пространстве E необходимо и достаточно, чтобы для $\forall x:\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\varphi_i|^2$, где $\varphi_i = \langle x; e_i\rangle$

Естественный изоморфизм E и E*

13 → 14
4 1
B B
Ь Ь

§ (39) Естественный изоморфизм E и E^*

// Напоминание: Изоморфизм. X и Y

1. Биекция X и Y
2. Сохранение линейной структуры X и Y
3. Сама биекция осуществляется без применения понятия базиса.

~~**Теорема:** E и E^* - естественно изоморфны.~~

~~Δ $\exists\, x \in E \longleftrightarrow y \in E^*$ по ф-ле $\boxed{(f; x) = (y; f)}$ для~~

Date: 24 May 2016

Теорема:

Естественный изоморфизм E и E^* задаётся формулой

$$\underset{E}{\overset{}{x}} \overset{a}{\longleftrightarrow} \underset{E^*}{f} : \text{, где } \langle x, y\rangle = (f; y) \quad \forall y \in E$$

($x \in E$, $f \in E^*$)

Δ

1. $x \overset{?}{\longleftrightarrow} f$ $\quad \exists\, x \to f_1,\ x \to f_2 \Rightarrow \forall y \in E \quad \langle x, y\rangle = (f_1, y),\ \langle x, y\rangle = (f_2, y)$

$$0 = (f_1 - f_2; y) = 0 \iff f_1 = f_2 \ (\text{в } E^*) \quad \forall y \in E$$

$$f \to x_1 \quad \langle x_1, y\rangle = (f, y)$$
$$f \to x_2 \quad \langle x_2, y\rangle = (f, y)$$

$$\forall y \in E \quad \langle x_1 - x_2; y\rangle = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E;\ x_1 = x_2$$

2. $\exists$ $\left.\begin{array}{l} x_1 \longleftrightarrow f_1 \\ x_2 \longleftrightarrow f_2 \\ \lambda \in F \ (E \text{ над } F) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ x_1 + x_2 \longleftrightarrow f_1 + f_2 \\ 2.\ \lambda x_1 \longleftrightarrow \lambda f_1 \end{array}\right.$

Упр

3. $x \longrightarrow f$ ($x \in E$, $f \in E^*$), А как быть $f \longrightarrow x$

Упр // используйте ядра.

Следствие: Формула G, опр-ёмая изоморф. (естеств-ным) E и E^*, определяет линейный обратимый оператор G
$$G: E \to E^*, \quad G^{-1}: E^* \to E \quad \text{по ф-лам } Gx = f; \quad G^{-1}f = x$$
(по изоморфизму $x \overset{G}{\longleftrightarrow} f$)

— Пересадка формы из E^* в E. Биортогональные базисы (взаимные)

$\exists\ f \in E^* \quad \measuredangle\ x = G^{-1} f \in E$

$\beta_e = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис E сопряженные $(f^k; e_i) = \delta_i^k$
$\beta_f = \{f^k\}_{i=1}^n$ - базис E^*

$\measuredangle\ \{f^1, f^2, ..., f^k\} \qquad \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ - базис E.
$e^k = G^{-1} \cdot f^k \in E \qquad n = \dim E = \dim E^*$

$\measuredangle\ \langle e_i; y\rangle = (e^k; y)$, т.к. $e^k \leftrightarrow f^k$
Но: $\underset{\delta_i^k}{\langle e_i; y\rangle} = (f^k; y) = \langle e^k; y\rangle = \delta_i^k$

Итого: $\langle e_i; e^k\rangle = \delta_i^k$
$\langle e^k; e_i\rangle = \delta_i^k$ // в силу симметрии

Опр-ние: Биортогональные базисы (взаимные)
Построенные таким образом базисы $\{e_i\}_{i=1}^n = \beta_E$ и $\{e^k\}_{k=1}^n = \hat{\beta}_E$ назыв. <u>биортогональными базисами</u>

— Связь e^k и e_i

Теорема:
$\exists\ g_{ik} = \langle e_i; e^k\rangle$ - метрический тензор $\langle\ \rangle_G$
$\|g_{ik}\|$ - его матрица. $(n \times n)$ $\|g^{ik}\| = \|g_{ik}\|^{-1}$

Тогда $e_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot e^k \quad (1)$
$$e^i = \sum_{k=1}^n g^{ik} \cdot e_k \quad (2)$$

$\triangle$ $\quad \underbrace{e_i}_{} \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, e^k;$

$\langle \cdot ; e_k \rangle = \langle e_i, e_k \rangle = g_{ik} = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, e^k; e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \underbrace{\langle e^k; e_k \rangle}_{\delta^k_k = 1} =$

$= \alpha_{ik} = g_{ik};$

(2) - Аналогично.

▲

$\forall\ x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i \quad [\ \xi^i$ - контрвариантные координаты $x\ ]$

$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i \quad [\ \xi_i$ - ковариантные координаты $x\ ]$

NB: 1) $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - ортонорм. $\Rightarrow g_{ik} = \delta_{ik}$; $\|g_{ik}\| = E$

1. $e_i = e^i \ (i = 1, \dots, n)$

2. $\xi_i = \xi^i$

2) Счёт ξ^i и ξ_i $\quad$ т.к. $\langle x; y \rangle = (f; y)$

$\xi^i = (f^i; x) = \langle e^i; x \rangle$

Аналогично $\xi_i = \langle e_i; x \rangle$

$\boxed{\text{Теорема}}$: "О связи ξ^i и ξ_i" $\quad \mathbb{C}$ $\qquad$ // $g_{ik} = g_{ki}$: $\mathbb{R}$.

1. $\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ki} \cdot \xi_k \quad [\mathbb{R}: \xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \cdot \xi^k];$

2. $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ki} \cdot \xi^k \quad [\mathbb{R}: \xi^i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \cdot \xi^k];$

$\triangle$

$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(\sum_{i=1}^{n} g^{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underline{\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot g^{ik} \right)} e_i$

$= \sum_{i=1}^{n} \underline{\xi^i} e_i \qquad \xi^i = \sum_{i=1}^{n} \xi_k g^{ik};$

Эрмитовский сопряженный и эрмитов оператор???

— Явная формула для оператора G:

$G: E \to E^*$; $(f^i; e_k) = \delta^i_k$

$Gx = f$;

$$\boxed{Gx = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \cdot g_{ik} \cdot f^k}$$

$$Gx = G\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = G\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \cdot e^k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \cdot g_{ik} f^k \in E^*$$

— Операции подъёма и опускания индексов в тензорах:

$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \xi_k$ {1} • Операция перехода от ξ_k (ковар.) к ξ^i (контр.) назыв. операцией **подъёма индексов**

$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \xi^k$ {2} • Операция **опускания индексов**

NB: 1. E.g.: $\omega_{kl}^{i} = \omega_{k\cdot l}^{\cdot i \cdot}$

Хочу поднять k: $g^{kj} \cdot \omega_{j\cdot l}^{\cdot i \cdot} = \omega^{ki}_{\cdot\cdot l}$;

2. Всё это имеет место НЕ в ортонорм. базисах. т.е. $\|g_{ik}\| \neq E$ $g_{ik} \neq \delta_{ik}$.

§ (40) Эрмитовски сопряжённый и эрмитов оператор.

Опр-ние: Эрмитовски сопряжённый оператор.

$\exists A: X \to X$. Отображение $A^+: X \to X$, опр-еное равенством $\langle Ax; y\rangle = \langle x; A^+ y\rangle$ $\forall x, y \in E$.

A^+ назыв. оператором, эрмитовски сопряжённым с A

Теорема: 1 // Существование A^+

$\exists\, A \xrightarrow{B_E} A = \|\alpha^i_k\|$. Тогда 1. A^+ — лин. опер. $A^+ : X \to X$.

2. $\|\alpha^{+i}_{k}\| = \|\overline{\alpha^k_i}\|$

$B_E = \{e_i\}_{i=1}^n$

т.е. $A^+ = \overline{A}^T$

Δ $\langle Ax; y\rangle = \cancel{\langle A(\underbrace{\sum_{i=1}^n \xi^i e_i}_{x}); \underbrace{\sum_{j=1}^n \eta^j e_j}_{y}\rangle = \sum_{i=1}\sum_{j=1}\xi^i\,\overline{\eta^j}\,\langle Ae_i; e_j\rangle} =$

$$= \cancel{\sum_{i,j=1}^n \xi^i\cdot\overline{\eta^j}\,\langle \sum_{k=1}^n \alpha^k_i e_k; e_j\rangle} =$$

$$= \cancel{\sum_{i,j,k=1}^n \xi^i\,\overline{\eta^j}\,\alpha^k_i\,\underbrace{\langle e_k; e_j\rangle}_{\delta_{kj}}} =$$

$$= \cancel{\sum_{i,k=1}^n \xi^i\,\alpha^k_i\,\overline{\eta^k}}$$

NB: Далее если не оговорено
1. E над $\mathbb{C}$
2. B_E — ортонорм, т.е. $\langle e_i; e_k\rangle = \delta^i_k$

т.к. ортонорм. $\langle x; y\rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i\,\overline{\eta^i}$

$$\langle Ax; y\rangle = \sum_{i=1}^n \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha^i_k\,\xi^k}_{(Ax)^i}\Big)\cdot\overline{\eta^i} = \sum_{k=1}^n \xi^k\Big(\sum_{i=1}^n \alpha^i_k\,\overline{\eta^i}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \xi^k\,\overline{\Big(\sum_{i=1}^n \overline{\alpha}^{Tk}_{i}\,\eta^i\Big)} = \langle x; A^+y\rangle = \langle x; z\rangle; \quad \underline{A^+y = z.}$$

$\blacktriangle$

$(\;)^+$ — эрмитовское сопряжение:

<u>Свойства $(\;)^+$</u>:

1. $(A+B)^+ = A^+ + B^+$
2. $(\lambda\cdot A)^+ = \overline{\lambda}\cdot A^+$
3. $(A^+)^+ = A$
4. $(A\cdot B)^+ = B^+ A^+$

NB: Иногда обозначение A^+ заменяют на A^* (в Физике)

1. если E над $\mathbb{R}$, то A^+ назыв. сопряженным к A и A^*

14
6
Б
Ь

Опр-ние: Эрмитовый оператор

Если $A = A^+$ (т.е. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$) то A - эрмитовый оператор

NB: 1. В физике: Если E над $\mathbb{R}$, то при $A = A^*$; A^* - назыв. <u>самосопряженным</u>

$$\langle Ax; y\rangle = \langle x; Ay\rangle$$

2. $A = A^+$; $\overline{A^T} = A$ (ортонорм) $\langle Ax; y\rangle = \langle x; Ay\rangle$

Лемма 1.

$\exists\, A: E \to E$ - эрмитов. Тогда $\sigma_A \subset \mathbb{R}$ все $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ $\quad k \leq n = \dim E.$

Δ

собств. вект. $\underline{x}$ $\longleftrightarrow$ собств. знач. $\lambda \in \sigma_A$

$\langle Ax; x\rangle = \langle x; Ax\rangle \iff \langle \lambda x; x\rangle - \langle x; \lambda x\rangle = 0 \iff$

$\iff \lambda\langle x; x\rangle - \overline{\lambda}\langle x; x\rangle = 0$; $\underbrace{(\lambda - \overline{\lambda})}_{= 0}\underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0 \text{ т.к. св. } x \neq 0_E} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$

$\blacktriangle$

Лемма 2.

Собственные векторы эрмитового оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.

т.е. $\exists\, A$ - эрмитов, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_A$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(A_i x_i = \lambda_i x_i)$ Тогда $x_1 \perp x_2$, т.е. $\langle x_1, x_2\rangle = 0.$

$x_1 \longleftrightarrow \lambda_1$; $x_2 \longleftrightarrow \lambda_2$

Δ

$\measuredangle$ $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1; Ax_2\rangle$

$\langle \lambda_1 x_1; x_2\rangle = \langle x_1; \lambda_2 x_2\rangle$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle \\ &\overline{\lambda_2} = \lambda_2, \text{ т.к. } \sigma_A \subset \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\underbrace{\langle x_1, x_2\rangle}_{= 0} = 0$$

$\blacktriangle$

Опр-ние: Приводящее под. пр-во линейного оператора.

∃ E - евклид. пр-во. L - инв.-ное под. пр-во, ∃ $A: E \to E$ (т.е. $\forall x \in L: Ax \in L$ или $AL \subset L$)

L назыв. <u>приводящим под пр-вом</u> лин. о. A, если $M = L^{\perp}$ - тоже инв. под. пр-во A.

Теорема 2.

$\forall$ инв. пр-во L эрмит. лин. опер. A является его приводящим.

Δ

∃ $x \in L$, $Ax \in L$

$M = L^{\perp} = \{y \in E : y \perp L, \text{ т.е. } y \perp \forall x \in L\}$.

Надо: $y \in M \overset{?}{\Longrightarrow} Ay \in M$ (т.е. M - тоже инв. A)

$\triangleleft \ \langle \underbrace{Ax}_{\in L}; \underbrace{y}_{\in M = L^{\perp}} \rangle = \langle \underbrace{x}_{\in L}; \underbrace{Ay}_{?} \rangle = 0$

$= 0$ (по усл.)

$\left.\begin{array}{l} x \perp Ay \\ x - \forall \text{ из } L \end{array}\right\} Ay \perp \forall L \Rightarrow Ay \in M = L^{\perp} \Rightarrow M$ - инвар. $\Rightarrow L$ - приводящее.

▲

Теорема 3:

Эрмитов лин. опер. - лин. оператор скалярного типа.

т.е. ∃ $B_{с.в} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - базис E из собств. век.

Δ.

$\boxed{1.}$ $\triangleleft \ A: E \to E$ (E над $\mathbb{C}$) $\Rightarrow$ осн. теорем. алгебры $\chi_A(\lambda)$ ∃ λ_1 - корень, собств. знач.

$\lambda_1 \longleftrightarrow x_1$; L_1 = лин. обол. $\{x_1\}$ - собств. под. пр-во (инвариантное $Ax_1 = \lambda x_1 \in L_1$)

Итог. $L_1 \longleftrightarrow M_1 = L_1^{\perp}$ - инвар-ное.

приводящее.

$\triangleleft \ A_1 = A\big|_{M_1}$, т.е. $A_1: M_1 \to M_1$

$A_1 \cdot x = Ax \quad \forall x \in M_1$

$\boxed{2.}$ $L_1 \to M_1 =: L_2$, повторяю пункт $\boxed{1}$ $\longrightarrow$ λ_2 - корень $\longleftrightarrow x_2$

...

$B_{с.в.} = \{x\}_{i=1}^{n}$

▲

$15 \Leftarrow 14$
$1 \quad 8$
$Б \quad В$
$Ь \quad Ь$

Следствие: Для $\forall$ эрмитового опер. A можно построить ортонорм. базис.

$$B_{с.в.} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow B_{\substack{орт н \\ с.в.}} = \left\{ e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, e_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|}, \dots e_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$$

NB: $r_i = m \qquad n_i = r_i;\ m_i = 1.$

Date: 26 May 2016

Теорема:

$\exists A = A^*$ (для $\mathbb{R}$) Тогда
1. Он скалярного типа
2. $\exists$ ортонорм. базис из его собств. векг.

Δ

// Трюк: $\quad A = A^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Ортонорм. $\quad A^T = A$ ($\mathbb{R}e$), Но $\underbrace{\bar{A}^T = A}_{\text{эрмитова}}$, $\underset{\text{эрм}}{A} \longleftrightarrow \underset{\text{эрм.}}{A} \quad A^+ = A$, но уже в $\tilde{E}$ над $\mathbb{C}$

2. $A^+ : \sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$; $\det(A - \lambda E) = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow$ для A^+, A^* $\Big\|$ собств. вект. $(A - \lambda_i E) = 0$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - вект.

$$B_{\mathbb{C}^n} \overset{\shortparallel}{=} B_{\mathbb{R}^+}$$

$B = \{x_i\}_{i=1}^n$ - базис из собств. вект. $A = A^*$

$\blacktriangle$

Теорема: "Спектральная теорема для Эрмитового лин. опер."

$$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$
$$\quad\ \ \updownarrow \quad \updownarrow \qquad\quad \updownarrow$$
$$\quad\ \ x_1 \quad x_2 \qquad\ \ x_n$$

$\{x_i\}_{i=1}^n$ - базис $\xrightarrow{\text{ортонорм.}}$ $\{e_i\}_{i=1}^n$

$E = \dot{+} \sum\limits_{i=1}^n L_i$; L_i - лин. обол. $\{e_i\}$

$$x = \underset{\underset{L_1}{\cap}}{\tilde{x}_1} + \underset{\underset{L_2}{\cap}}{\tilde{x}_2} + \dots + \underset{\underset{L_n}{\cap}}{\tilde{x}_n} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}^{\perp}_{L_i} x$$

$$\boxed{Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}^{\perp}_{L_i} x}$$, где

$$\mathcal{P}^{\perp}_{L_i} * = \langle *; e_i \rangle e_i;$$

Унитарные и ортогональные операторы

15
2
b
4

§ (41) Унитарные (над $\mathbb{C}$) и ортогональные (над $\mathbb{R}$) операторы

Опр-ние: Унитарный оператор [3 - вариации опр-ния]

$U: E \to E$ (E - унитарное (комплексное евклидово пр-во))

$\underline{U}$ назыв. унитарным оператором, если $\langle Ux; Uy\rangle = \langle x; y\rangle \ \forall x, y \in E$

II-ой вариант $\|Ux\| = \|x\|$ (сохраняет норму)

III - вариант $U^{-1} = U^{+}$ (обратим)

т.е. $UU^{+} = U^{+}U = I$

Теорема:

Все три опр-ния унитарного оператора эквивалентны.

Δ $1 \Rightarrow 2$.

$$\left.\begin{aligned} &\langle Ux; Ux\rangle = \langle x; x\rangle \\ &\|Ux\|^2 = \|x\|^2 \end{aligned}\right| \ \|Ux\| = \|x\|$$

$2 \Rightarrow 1$

$$\underbrace{\langle x+y; x+y\rangle}_{\|x+y\|^2} = \langle x;x\rangle + \langle y;y\rangle + \langle x;y\rangle + \langle y;x\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x;y\rangle + \overline{\langle x;y\rangle} =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x;y\rangle$$

$\|$

$$\langle U(x+y); U(x+y)\rangle = \|Ux\|^2 + \|Uy\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ux; Uy\rangle$$

$$\mathrm{Re}\,\langle Ux; Uy\rangle \overset{?}{=} \mathrm{Re}\,\langle x; y\rangle$$

Упр.

Δ $\langle x+iy; x+iy\rangle$ Упр.

$\langle U(x+iy); U(x+iy)\rangle$

См. на обороте.

15
3
B
L

$1 \boxed{\Rightarrow} 3$

$$\langle Ux; Uy \rangle = \langle x; U^+ Uy \rangle \quad \forall x, y \in E$$

$$U^+ \cdot U = I$$
$$\det(U^+ \cdot U) = \det I = 1.$$
$$\left.\begin{array}{l} U^+ \cdot U = I \\ \text{Хочется: } U \cdot U^+ = I \end{array}\right\} \Rightarrow U^{-1} = U^+$$
$$\underset{0}{\underset{\times}{\det U}} \cdot \underset{0}{\underset{\times}{\det U^+}} = 1 \Rightarrow \exists U^{-1} \Rightarrow U^+ U = U U^+ = I$$

$1 \Rightarrow 3$

$$\langle x; y \rangle = \langle x; Iy \rangle = \langle x; U^+ Uy \rangle = \langle Ux; Uy \rangle = \langle x; y \rangle$$

▲

– Свойства унитарных операторов (параллельные св-ва ортогональных опер.)

Опр-ние: Ортогональный оператор

Ортогональным оператором назыв. унитарный оператор в вещественном пространстве

1] $U^{-1} = U^+$ $\left(U^{-1} = \bar{U}^T \text{ - ортогон} \right)$

$\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^+$ $[\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^T]$

2] $|\det U| = 1.$ $\quad \Delta \quad 1 = \det E = \det(U \cdot U^+) = \det U \cdot \det \bar{U}^+ =$
$= \det U \cdot \overline{\det U} = |\det U|^2$
$|\det U| = |\det U| = 1.$

▲

NB: Для $\mathcal{O}$: $\det \mathcal{O} = \pm 1.$

3] $\sigma_U \in$ единичной окружности $\mathbb{C} = \{ z = e^{i\varphi}; \varphi \in [0; 2\pi] \}$

$$\Delta \quad \left.\begin{array}{l} \langle Ux; Uy \rangle = \langle x; y \rangle \\ x = y; \ \exists\, Ux = \lambda x \\ \quad \text{с.в } x \leftrightarrow \text{с.з. } \lambda \end{array}\right\} \begin{array}{l} \langle Ux; Ux \rangle = \langle \lambda x; \lambda x \rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle x; x \rangle = \langle x; x \rangle \\ \Rightarrow \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1. \Rightarrow |\lambda| = 1. \end{array}$$

▲

15
4
B
4

Теорема:

$\exists\ \mathcal{U}$ - унитарный опер.

$\beta_E\ ; \quad \mathcal{U} \xleftrightarrow{\beta_E} U = \| \vartheta^i_k \|$

Тогда: 1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \vartheta^k_i \cdot \bar{\vartheta}^j_i = \delta^{kj}$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \vartheta^i_k \cdot \bar{\vartheta}^i_j = \delta_{kj}$

Δ

$$U \cdot U^+ = E = U^+ U$$

$\vartheta^k_i = \{\vartheta\}^k_i$ // так обозначим матрицу

1. $U \cdot U^+ = \sum\limits_{i=1}^{n} \{\vartheta\}^k_i \cdot \{\vartheta^+\}^i_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \{\vartheta\}^k_i \cdot \{\bar{\vartheta}^T\}^i_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \vartheta^k_i \cdot \bar{\vartheta}^j_i = \delta^{kj}$, ч.т.д.

2. Аналогично.

▲

Теорема:

Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным его собственным значениям ортогональны.

т.е. $\left.\begin{aligned} \mathcal{U}x_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \mathcal{U}x_2 &= \lambda_2 x_2 \\ \lambda_i &\neq \lambda_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \perp x_2$, т.е. $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

Δ

$$\langle \mathcal{U}x_1, \mathcal{U}x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\langle \lambda_1 x_1; \lambda_2 x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

$\lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \langle x_1; x_2 \rangle - \langle x_1; x_2 \rangle = 0$ т.к. $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$. // св-во 3.

$$\left(e^{i\varphi_1} \cdot \overline{e^{i\varphi_2}} - 1\right) \langle x_1; x_2 \rangle = 0$$

$$\underbrace{\left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1\right)}_{\neq 0} \underbrace{\langle x_1; x_2 \rangle}_{= 0} = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\varphi_1 \neq \varphi_2$

$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \neq 0$

▲

Теорема:

∀ инвар. под.пр-ва L унитарного оператора явл. его приводящим под. пр-вом. т.е. $H = L^{\perp}$ - тоже инв. под.пр-во унит. опер.

Δ

Упр.

▲

Теорема:

1. Унитарный оператор имеет скалярный тип.
2. Из собственных векторов унитарн. опер. можно сост. ортонорм. баз, E.

Теорема: "Спектральная теорема для унитарного оператора"

$$\sigma_U = \{\lambda_s\} = \{e^{i\varphi_s}\}$$

$$\boxed{U = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s P^{\perp}_{s=1} = \sum_{s=1}^{n} e^{i\varphi_s} P^{\perp}_{s=1}}$$

Теорема:

A - эрмитов. лин. опер. Матрица эрмитового оператора может быть приведена к диагональному виду унитарным преобразованием.

$$\underline{\tilde{A} = U^{-1} A \cdot U}$$

Δ

$$A \xleftrightarrow{B_x} A \text{ - эрм.}$$

1. Спектральный анализ A,

   $B_{\text{орт.}} \{x\}_{i=1}^{n}$ из собств. вект. A ; $Ax_i = \lambda_i x_i$

2. $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; ортонорм.

$$\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & \\ & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

▲

15
6
B
L

§ (42) Квадратичные формы

— Основные опр-ния и свойства

$\lhd$ $\Phi(x;y) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \eta^k$; $\mathbb{R}: \varphi_{ik} = \varphi_{ki}$

$\Phi(x;y) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \bar{\eta}^k$; $\mathbb{C}: \varphi_{ik} = \overline{\varphi_{ki}}$

Опр-ние: Квадратичная форма

$\mathbb{R}: \Phi(x;x) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \xi^k$

$\mathbb{C}: \Phi(x;x) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \bar{\xi}^k$

NB: $\beta_E \xrightarrow{T} \tilde{\beta}_E$; $\mathbb{R}: \tilde{\Phi} = T^T \Phi T$

$\Phi(x;y) \longleftrightarrow \Phi$; $\mathbb{C}: \tilde{\Phi} = T^T \Phi \bar{T}$

Опр-ние: Каноническая форма квадратичной формы.

Канонической формой квадратичной формы явл.

$$\Phi(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi^{i\,2} \quad (\mathbb{R}) \quad (1)$$

$$\Phi(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\xi^i|^2 \quad (\mathbb{C}) \quad (2)$$

Опр-ние:

Привести квадратичную форму к каноническому виду означает представить ее в виде суммы квадратов (1) или (2)

— Приведение к $\Sigma(\ )^2$ по Лагранжу. (выделение последовательных квадратов)

$$\Phi(x;x) = \underset{\pm x_2^2}{2x_1x_2 + x_1^2 - 3x_2^2} = 1\cdot(x_1+x_2)^2 - 4x_2^2 = 1\cdot\tilde{x}_1^2 - 4\tilde{x}_2^2$$

$\lambda_1 = 1.$ $\lambda_2 = -4.$

$x_1 + x_2 = \tilde{x}_1$

$x_2 = \tilde{x}_2$

— Приведение к $\Sigma(\ )^2$ унитарным преобразованием.

$\beta \xrightarrow{T} \tilde{\beta}$ $\quad \boxed{\tilde{\Phi} = T^T \cdot \Phi \cdot \bar{T}}$

Φ-квадр. форма ; T - унитарная $\quad T^{-1} = \bar{T}^T \Leftrightarrow T^T = \bar{T}^{-1} = (\bar{T})^{-1}$

$\mathbb{C}$

$$\tilde{\Phi} = \underbrace{(\bar{T})^{-1}}_{U^{-1}} \cdot \Phi \cdot \underbrace{\bar{T}}_{U}$$

$$\boxed{\tilde{\Phi} = U^{-1} \cdot \Phi \cdot U}$$

Практическая реализация
см на обороте

77

1. Спектральный анализ $\mathcal{A}$ - скалярный тип.
$\sigma_{\mathcal{A}} \subset$ ед. окружн. ортонорм. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = B_{\mathcal{A}}$

$$T = \{\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots \bar{x}_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = U^{-1} \mathcal{A} U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_s \in \sigma_{\mathcal{A}}, \quad \lambda_s = e^{i\theta_s}$$

$$U = T$$

$$\mathcal{A}(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\xi^i|^2;$$

— Закон инерции квадратичной формы.

Теорема:

$$\mathcal{A}(x;x) \begin{cases} = (\mathrm{I})_{\text{по Лагр.}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\xi^i|^2 \\ = (\mathrm{II})_{\text{по унитарн.}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\lambda}_k |\xi^k|^2 \end{cases}$$

В обоих случаях кол-во положительных, нулевых, и отрицательных λ совпадает.

Δ

$$\mathcal{A}(x;x) = \lambda_1|\xi^1|^2 + \dots + \lambda_p|\xi^p|^2 + \lambda_{p+1}|\xi^{p+1}|^2 + \lambda_{p+q}|\xi^{p+q}|^2 + \underbrace{0 + \dots + 0}_{\lambda = 0} \qquad \lambda_p, \lambda_{\tilde{p}} > 0$$

$$\mathcal{A}(x;x) = \lambda_1|\tilde{\xi}^1|^2 + \dots + \lambda_{\tilde{p}}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}}|^2 + \lambda_{\tilde{p}+1}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}+1}|^2 + \lambda_{\tilde{p}+\tilde{q}}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}+\tilde{q}}|^2 + 0 + \dots 0. \qquad \lambda_q, \lambda_{\tilde{q}} < 0.$$

От противного: $p > \tilde{p}$ $\quad$ л.п. $L_1 =$ л.о. $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$; $\dim L_1 = p$ $\quad L_2 = \{\tilde{e}_{\tilde{p}+1}, \tilde{e}_{\tilde{p}+2}, \dots, \tilde{e}_{\tilde{p}+\tilde{q}}, \tilde{e}_{\tilde{p}+\tilde{q}+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$; $\dim L_2 = n - \tilde{p}$;

$\measuredangle$ $L_1 + L_2$ - под.пр-во E

$$\dim L_1 + \dim L_2 = p + (n - \tilde{p}) = \underset{\dim E}{n} + \underbrace{(p-\tilde{p})}_{>0} > n \Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \{0_x\}$$

т.к. $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$

$z \in L_1$; $L_1 =$ л.о $\{e_1, \dots, e_p\}$ $\quad \mathcal{A}(z;z) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i |\xi^i|^2 \underline{> 0.}$
$z \neq 0$

Противоречие

$z \in L_2$: $z \neq 0$ $\quad \mathcal{A}(z;z) = \sum_{k=\tilde{p}+1}^{n} \lambda_k |\xi^k|^2 \underline{\leq 0}$

Остальные числа аналогично.

▲

<u>Обозначения</u>: 1. n_+ - полож.
n_0 - нулевой <u>индекс инерции.</u>
n_- - отриц.

2. (n_+, n_-, n_0) - <u>**сигнатура**</u> $\mathcal{A}(x;x)$
так же сигнатурой назыв. $\underline{N} = n_+ - n_-$

15
8
В
Ч

NB: Для того, чтобы $\Phi(x;x)$ имела положительную опр-ность, необходимо и достаточно $n_+ = \dim E$.

— Одновременное приведение квадратичных форм к $\Sigma(\ )^2$.

$\Phi \leftrightarrow \Phi(x;x)$ — кв. форма.

$\Psi \leftrightarrow \Psi(x;x)$ — полож. опр. $\Psi(x;x) \geq 0$ $\Psi(x;x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

1. Было: скалярное произв. $\langle x;y\rangle \longrightarrow \{e_i\}$ орт.
2. Новое: $\langle x;y\rangle_\Psi = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \Psi_{ik}\, \xi^i \xi^k$; $\Psi_{ik} = \Psi_{ki}$

Сделаем Грама-Шмидта для $\langle x;y\rangle_\Psi \longrightarrow \{e'_i\}$ орт. в смысле $\langle\,;\,\rangle_\Psi$

$\Phi(x;x) \longleftrightarrow \Phi'$

$\Psi(x;x) \longleftrightarrow \Psi'$

3. Спектральный анализ $\Phi' \longrightarrow$ орт. баз. (эрмит.)

$\langle x;y\rangle_\Psi$ $\{\tilde e_i\}_{i=1}^{n}$ - орт.

$\langle x;y\rangle_\Psi = \sum \xi^i \eta^i$ $\tilde\Psi = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $\tilde\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$;

$$\Phi(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde\xi^i)^2$$

$$\Psi(x;x) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (\tilde\xi^i)^2$$

$$\Phi - \lambda\Psi = \boxed{T' \cdot \tilde T\,[\tilde\Phi - \lambda\tilde\Psi]\,\tilde T^{-1} \cdot T'^T}$$

// и от этого всего det.

// нужно для быстрого вычисления λ.

$\det T', \det \tilde T, \det \tilde T^{-1}, \det T'^T \neq 0$

$\det(\Phi - \lambda\Psi) = 0 \longrightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = 0 = \det\{\tilde\Phi - \lambda\tilde\Psi\}$;