

Лекция 10

Магнитостатическое поле и векторный потенциал

Для компактной записи уравнений нерелятивистской магнитостатики оказывается весьма удобным использование оператора пространственного дифференцирования ∇ . При этом прослеживаются аналогии с соответствующими уравнениями электростатики. В качестве аналога скалярного потенциала электростатического поля выступает векторный потенциал.

10.1. Векторный потенциал

Между уравнениями классической электростатики и магнитостатики существует достаточно тесная аналогия, которая является отражением более глубокой симметрии между электрическими и магнитными взаимодействиями, возникающей на уровне релятивистского описания. Так, фундаментальные выражения для электрических магнитных полей, создаваемых точечными зарядами, отличаются друг от друга лишь операцией векторного умножения на «безразмерную скорость» (отношение скорости частицы \mathbf{u}_i к скорости света c):

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{R}) = \sum_i q_i \left[\frac{\mathbf{u}_i}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \right]. \quad (10.1)$$

Аналогичным (10.1) образом связаны между собой и выражения для электрических (\mathbf{F}_E) и магнитных (\mathbf{F}_B) сил, действующих на точечные заряды в соответствующих полях:

$$\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}, \quad \mathbf{F}_B = Q \left[\frac{\mathbf{u}_Q}{c}, \mathbf{B} \right].$$

Определенные аналогии существуют и для выражений, описывающих электрические и магнитные поля в дифференциальной форме.

Потенциальный характер электростатического поля сделал возможным введение *скалярного потенциала* φ как скалярной функции координат, позволяющей восстановить исходное векторное поле \mathbf{E} с помощью оператора дифференцирования ∇ , осуществляющего операцию вычисления градиента:

$$\exists \varphi(\mathbf{R}): \quad \mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\nabla\varphi(\mathbf{R}). \quad (10.2)$$

Как уже отмечалось, скалярный потенциал определяется неоднозначно: две функции $\varphi_1(\mathbf{R})$ и $\varphi_2(\mathbf{R})$, отличающиеся друг от друга на константу, соответствуют одному и тому же электростатическому полю:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{R}) = (\nabla, \varphi_2(\mathbf{R})) = (\nabla, \varphi_1(\mathbf{R}) + C) = (\nabla, \varphi_1(\mathbf{R})) = \mathbf{E}_1(\mathbf{R}).$$

Конкретный вид удовлетворяющей условию (10.2) функции для скалярного потенциала заданного распределения неподвижных точечных зарядов был установлен в электростатике и имеет вид

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}. \quad (10.3)$$

Поиск функции, восстанавливающей подобно (10.3) вектор \mathbf{B} с помощью оператора пространственного дифференцирования, в классе скалярных функций выглядит бесперспективным, поскольку являющийся простейшим источником магнитного поля движущийся точечный заряд не обладает сферической симметрией и, следовательно, не может характеризоваться скалярной функцией. В связи с этим в задачах магнитостатики оправданна попытка построения аналога скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{R})$ в виде векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{R})$, называемой *векторным потенциалом*. Единственной операцией, определенной для вектора и оператора пространственного дифференцирования, в результате которой получается вектор, является вычисление ротора. Представляется разумным строить потенциальную функцию так, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$\exists \mathbf{A}(\mathbf{R}): \quad \mathbf{B}(\mathbf{R}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{R})]. \quad (10.4)$$

Вводимый соотношением (10.4) векторный потенциал обладает гораздо большей неоднозначностью, чем потенциал скалярный, по-

скольку определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции:

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{R}) = [\nabla, \mathbf{A}_2(\mathbf{R})] = [\nabla, \mathbf{A}_1(\mathbf{R}) + \nabla\chi(\mathbf{R})] = [\nabla, \mathbf{A}_1(\mathbf{R})] = \mathbf{B}_1(\mathbf{R}).$$

Это означает, что **векторный потенциал определяется с точностью до градиентного преобразования**.

Указанная свобода выбора векторного потенциала позволяет использовать для него существенно различающиеся конкретные выражения (так называемые *калибровки*) в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи. Так, например, в задачах магнитостатики оказывается удобным использование *поперечной калибровки* для векторного потенциала, сводящейся к требованию

$$(\nabla, \mathbf{A}) = 0, \quad (10.5)$$

которое всегда может считаться выполненным. Действительно, если построенный каким-либо методом векторный потенциал \mathbf{A}_1 не удовлетворяет требованию (10.5), его дивергенция может оказаться не более чем скалярной функцией координат:

$$(\nabla, \mathbf{A}_1) = f(\mathbf{r}).$$

Знание этой функции позволяет по аналогии с решением уравнения Пуассона для скалярного потенциала найти градиентное преобразование, представляющее потенциал в поперечной калибровке:

$$0 = (\nabla, \mathbf{A}_1 + \nabla\chi) = f(\mathbf{r}) + \Delta\chi \Rightarrow \chi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int dV(\mathbf{r}) \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}.$$

Непосредственная подстановка в определение (10.4) векторного потенциала простейшей пробной векторной функции, построенной по аналогии с выражением для скалярного потенциала точечного заряда (т. е. получаемой в результате домножения выражения для $\phi(\mathbf{R})$ на «безразмерную скорость заряда-источника»)

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \quad (10.6)$$

приводит к результату, согласующемуся с общим выражением для магнитного поля системы движущихся точечных зарядов:

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{R}) = \left[\nabla, \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \right] = q_i \left[\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \frac{\mathbf{u}_i}{c} \right] \frac{\partial |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^{-1}}{\partial |\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} = q_i \left[\frac{\mathbf{u}_i}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \right].$$

Таким образом, существование векторной функции, обладающей свойствами (10.4), доказано методом ее непосредственного конструирования. В случае системы точечных зарядов векторный потенциал очевидно строится как векторная сумма слагаемых, имеющих вид (10.6):

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}. \quad (10.7)$$

При этом легко убедиться, что построенный в соответствии с (10.7) векторный потенциал удовлетворяет условию поперечности (10.5).

10.2. Макроскопическое магнитное поле

Для упрощения аналитических расчетов в электростатике осуществлялся переход от быстро изменяющихся в пространстве *микроскопических* электрических полей к сглаженным *макроскопическим*, создаваемым непрерывными распределениями зарядов. В магнитостатике оказывается удобным аналогичный переход:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \left[\frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]. \quad (10.8)$$

Полученное выражение удобно записать более кратко, используя определение плотности электрического тока (7.1):

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c}, \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \right]. \quad (10.9)$$

В важном частном случае протекания тока по участку $d\mathbf{l}$ проводника с поперечным сечением s (элемент длины проводника сонаправлен с плотностью тока) из (10.9) непосредственно следует соотношение, выражающее закон Био—Савара—Лапласа:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \int_L \frac{[d\mathbf{l}(\mathbf{r}), (\mathbf{R} - \mathbf{r})]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad I = |\mathbf{j}| s . . \quad (10.10)$$

Аналогично тому как были получены сглаженные уравнения для макроскопического магнитного поля (10.8), (10.9), из выражения (10.7) для векторного потенциала микроскопического распределения точечных движущихся зарядов легко получить соотношения, связывающие векторный потенциал с плотностью электрического тока:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int dV(\mathbf{r}) \frac{\rho(\mathbf{r}) \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \int dV(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \quad (10.11)$$

или его силой в случае протекания по цепи с сосредоточенными параметрами:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c} \int^s \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} .$$

В результате проектирования на оси декартовой системы координат векторного равенства (10.11) возникают соотношения, по математической форме полностью эквивалентные ранее найденному выражению для расчета скалярного потенциала по заданному распределению плотности заряда (2.10):

$$A_\xi(\mathbf{r}) = \int dV(\mathbf{r}) \frac{j_\xi(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad \xi = x, y, z .$$

Эта эквивалентность позволяет записать для каждой из декартовых компонент векторного потенциала дифференциальное уравнение, аналогичное *уравнению Пуассона* для скалярного потенциала:

$$\Delta A_\xi = -\frac{4\pi}{c} j_\xi, \quad \xi = x, y, z .$$

Полученная система из трех дифференциальных уравнений в частных производных обычно записывается в более компактном векторном виде:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (10.12)$$

где действие оператора Лапласа на вектор подразумевает вычисление суммы вторых производных от каждой из компонент этого вектора.

10.3. Дифференциальная форма записи уравнений магнитостатики вакуума

Уравнения магнитостатики вакуума могут быть записаны в весьма краткой и элегантной форме, использующей оператор дифференцирования ∇ , подобно тому как это делалось в электростатике. Соответствующие формулы легко выводятся исходя из определения векторного потенциала (10.4) и полученного выражения, связывающего его с плотностью токов (10.12).

Для получения аналога теоремы Гаусса для вектора \mathbf{B} достаточно использовать хорошо известный факт тождественного равенства нулю дивергенции от ротора произвольного векторного поля:

$$(\nabla, \mathbf{B}) = (\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]) = ([\nabla, \nabla], \mathbf{A}) = 0. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) часто рассматривают как утверждение о невозможности существования в природе магнитных зарядов \mathfrak{I} (магнитных монополей), т. е. частиц, создающих вокруг себя магнитное поле, подобное электрическому полю точечного заряда:

$$\exists \mathfrak{I}: \mathbf{B}_i(\mathbf{R}) = \frac{\mathfrak{I}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} (\mathbf{R} - \mathbf{r}_i).$$

Физический смысл такого утверждения требует некоторых пояснений. Приведенное математическое доказательство тождественного равенства нулю дивергенции вектора \mathbf{B} имеет силу только для магнитных полей, создаваемых движущимися электрическими зарядами. Очевидно, что оно не может гарантировать отсутствия в природе каких-либо новых элементарных частиц, создающих вокруг себя маг-

нитные поля с конфигурацией, аналогичной электростатическому полю точечного заряда.

Гипотеза о возможности существования магнитного монополя впервые была высказана П. Дираком в первой половине XX века. Экспериментальная регистрация элементарных частиц, обладающих магнитным зарядом, потребовала бы внесения существенных изменений в классические уравнения электромагнетизма, в результате чего последние приобрели бы более симметричную форму. В рамках квантовомеханического рассмотрения электромагнитных взаимодействий между электрическими магнитными монополями оказывается, что непротиворечивое уравнение движения может быть получено только при наличии следующей связи между величинами электрического и магнитного зарядов:

$$Q\Im = \frac{1}{2} \hbar c n, \quad n = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots,$$

где \hbar — постоянная Планка. Таким образом, проблемы существования магнитного монополя и интерпретации фундаментального свойства дискретности электрического заряда могут оказаться тесно связанными между собой. **До настоящего времени частицы, несущие магнитные заряды, экспериментально не обнаружены.**

Выражение для ротора магнитного поля с учетом условия попечности (10.5) и найденной связи между векторным потенциалом и плотностью тока (10.12) может быть записано в виде, полностью соответствующем уже неоднократно отмечавшейся симметрии между уравнениями магнитостатики и электростатики:

$$[\nabla, \mathbf{B}] = [\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c}. \quad (10.14)$$

Важно отметить, что сравнение дифференциальной формы уравнений электростатики и магнитостатики

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 4\pi\rho, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= 0, \quad [\nabla, \mathbf{B}] = 4\pi(\mathbf{j}/c) \end{aligned}$$

показывает существование между ними определенной симметрии, но не наличие тождественного сходства (разумеется, с точностью до буквенных переобозначений $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ и $\rho \rightarrow \mathbf{j}/c$). В этой связи в общем случае оказываются недопустимыми иногда встречающиеся попытки полу-

ния решений задач магнитостатики из решений сходных магнитостатических задач путем простых переобозначений.

10.4. Интегральная форма записи уравнений магнитостатики вакуума

В лекции 2 был продемонстрирован вывод дифференциальных соотношений для напряженности электростатического поля исходя из интегральных теорем о его потоке и циркуляции. В настоящем разделе представляется уместным продемонстрировать основные идеи, используемые при выводе интегральных соотношений для потока и циркуляции поля из их дифференциальных аналогов.

Умножение дифференциального уравнения для дивергенции векторного поля \mathbf{B} на бесконечно малый объем прямоугольного параллелепипеда $\delta V = \delta r_x \delta r_y \delta r_z$ приводит к возможности утверждения о равенстве нулю потока через ограничивающую рассматриваемый элементарный объем поверхность δS :

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow (B_\xi(r_\xi + \delta r_\xi) - B_\xi(r_\xi)) \delta r_{\xi+1} \delta r_{\xi+2} = 0 \Rightarrow \oint_{\delta S} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0.$$

Для доказательства равенства нулю потока через произвольную замкнутую поверхность Γ_2 достаточно разбить ограничивающий ее объем на небольшие ячейки и просуммировать потоки через все ограничивающие их поверхности (рис.10.1,*a*). При суммировании встречные потоки через общие грани смежных ячеек уничтожаются, и остается только поток через поверхность Γ_2 , ограничивающую рассматриваемый объем:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0. \quad (10.15)$$

Обладающие свойством (10.15) векторные поля носят название *вихревых*.

Для получения интегрального аналога соотношения (10.14), связывающего циркуляцию вектора \mathbf{B} с источниками магнитного поля — токами, пронизывающими контур, по которому вычисляется циркуляция, охватываемую замкнутым контуром Γ_1 поверхность удобно раз-

бить на систему небольших ячеек прямоугольной формы (рис.10.1,*б*). Для каждой из таких ячеек соотношение (10.14), записанное в декартовой системе координат, направления осей которой задаются ориентацией ячейки, может быть переписано в виде

$$(B_y(r_x + \delta r_x) - B_y(r_x))\delta r_y - (B_x(r_y + \delta r_y) - B_x(r_y))\delta r_x = \frac{4\pi}{c} j_z \delta r_x \delta r_y.$$

Это означает, что циркуляция вектора \mathbf{B} по ограничивающему такую элементарную ячейку $\delta S = \delta r_x \delta r_y$ контуру δl определяется силой электрического тока δI , пронизывающего эту ячейку:

$$\oint_{\delta l} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{\delta I}{c}.$$

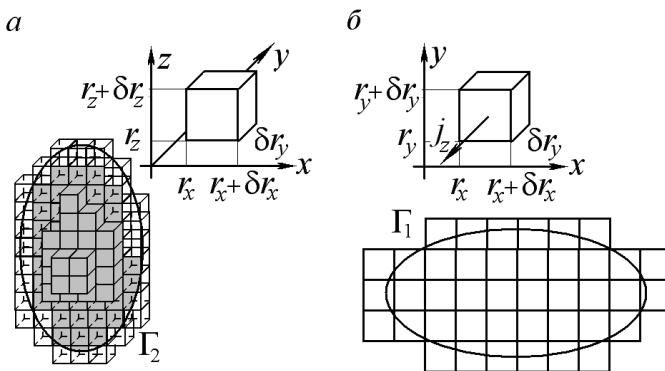


Рис. 10.1. К выводу интегральных уравнений для магнитного поля в вакууме:

- a* — вычисление потока через замкнутую поверхность Γ_2 ;
- б* — вычисление циркуляции векторного поля \mathbf{B} по замкнутому контуру Γ_1 .

При суммировании выражений для циркуляций по всем элементарным ячейкам, заполняющим ограниченную контуром Γ_1 поверхность, в правой части равенства возникает суммарная сила тока, пронизывающего рассматриваемый контур. Левая часть возникающего в резуль-

тате суммирования равенства содержит контурные интегралы по всем ячейкам, лежащим внутри контура. Лежащие внутри контура общие стороны соседних элементарных ячеек при интегрировании проходятся дважды в противоположных направлениях и не дают вклада в суммарную циркуляцию. Сохраняются только слагаемые, дающие циркуляцию по внешнему контуру Γ_1 (*теорема Стокса*):

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_\Sigma}{c}. \quad (10.16)$$

Полученные интегральные соотношения (10.15) и (10.16) для магнитостатических полей сохраняются отмеченные ранее свойства частичной симметрии относительно аналогичных уравнений электростатики:

$$\begin{array}{ll} \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0, & \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_\Sigma, \\ \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_\Sigma}{c}, & \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0. \end{array}$$

Пример. Магнитное поле бесконечного цилиндрического провода с током, протекающим по его поверхности

Найти величину и направление вектора \mathbf{B} магнитного поля, создаваемого постоянным током I_1 , протекающим вдоль бесконечного цилиндрического провода радиусом R и равномерно распределенным по его поверхности. Определить силу, действующую со стороны этого цилиндра на единицу длины бесконечного прямого провода с током I_2 , расположенного параллельно оси цилиндра на расстоянии $r > R$ от него.

Решение. Соображения симметрии требуют неизменности магнитного поля при преобразованиях, сохраняющих конфигурацию источников поля: вращении рассматриваемой системы вокруг оси ци-

линдра и ее сдвиге вдоль этой оси на произвольное расстояние. Сформулированным требованиям симметрии удовлетворяют три конфигурации магнитного поля, изображенные на рис. 10.2.

Первая конфигурация (рис. 10.2,*a*) не соответствует вихревому характеру магнитного поля (10.15), поскольку поток вектора \mathbf{B} через любую соосную с проводником цилиндрическую поверхность с радиусом больше R оказывается отличным от нуля.

Приведенная на рис. 10.2,*b* конфигурация согласуется с теоремой о циркуляции (10.16) по изображенному на нем контуру лишь при условии постоянства величины магнитного поля во всех точках пространства, лежащих вне цилиндра. Существование такого постоянного во всем пространстве поля (не только магнитного, но и электрического) в принципе допускается уравнениями классической электродинамики, но традиционно исключается из рассмотрения как экспериментально не наблюдаемое.

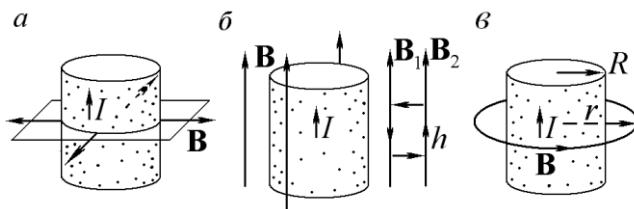


Рис. 10.2. Магнитное поле бесконечного цилиндра с током, равномерно распределенным по его поверхности:

- a* — допустимая симметрией задачи конфигурация магнитного поля, противоречащая теореме о потоке вектора \mathbf{B} ;
- б* — допустимая симметрией задачи конфигурация магнитного поля, противоречащая теореме о циркуляции вектора \mathbf{B} ;
- в* — реальная конфигурация магнитного поля.

Для вычисления величины вектора \mathbf{B} в соответствующей реальности конфигурации (рис. 10.2,*в*) достаточно воспользоваться интегральной теоремой о циркуляции (10.16), что непосредственно приводит к хорошо известному результату

$$r > R \Rightarrow 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B(r) = \frac{2I}{rc},$$

$$r < R \Rightarrow 2\pi r B(r) = 0 \Rightarrow B(r) = 0,$$

согласующемуся с решением электростатической задачи об электрическом поле равномерно заряженного по поверхности цилиндра.

Для вычисления силы, действующей на отрезок провода с током I_0 единичной длины, расположенного параллельно оси цилиндра, достаточно воспользоваться выведенным ранее выражением для силы Ампера (9.8):

$$\frac{dF}{dl} = I_0 \frac{2I}{rc^2}.$$

Полученное выражение справедливо и для силы, действующей на участки единичной длины двух проводов с током, расположенных параллельно друг другу. Именно это соотношение (с точностью до постоянного коэффициента) используется для определения единицы силы тока в системе единиц СИ, на основе которой, в свою очередь, вводится единица электрического заряда.

10.5. Связь между задачами электростатики и магнитостатики

Как уже отмечалось, симметрия между уравнениями для электростатических и магнитостатических полей в вакууме оказывается недостаточной для непосредственного использования решений задач электростатики для расчета магнитного поля. Гораздо более тесные аналогии между электростатикой и магнитостатикой возникают на уровне уравнений для потенциалов:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta A_\xi = -4\pi \frac{j_\xi}{c}.$$

Приведенные уравнения оказываются эквивалентными друг другу с точностью до переобозначений: $\varphi \leftrightarrow A_\xi$, $\rho \leftrightarrow j_\xi c^{-1}$. Эта аналогия позволяет сводить задачу расчета магнитных полей, создаваемых заданными распределениями токов, к трем электростатическим задачам расчета скалярных потенциалов от пространственных распределений зарядов, подобных распределениям проекций плотностей токов на оси декартовой системы координат, и последующему вычислению ротора найденного векторного потенциала.

В последующих лекциях курса будет продемонстрирована еще более тесная связь между скалярным и векторным потенциалами: совокупность четырех величин (φ, A_x, A_y, A_z) составляет *четырехвектор*,

компоненты которого преобразуются в соответствии с правилами Лоренца. Необходимость введения в теорию векторного потенциала не ограничивается удобством его использования в уравнениях релятивистской физики.

Фундаментальные уравнения квантовой механики, описывающие электромагнитные взаимодействия в микросистемах, включают в себя потенциалы, а не напряженности электромагнитных полей. С этой точки зрения описание электрических и магнитных полей на языке потенциалов является более предпочтительным.

Пример. Магнитное поле петли с током

Рассчитать векторный потенциал и магнитное поле прямоугольной петли с током I , имеющей размеры $a \times b$, в точке пространства, удаленной от петли на расстояние, существенно превосходящее ее размеры.

Решение. Для упрощения конкретных расчетов удобно ввести систему координат, изображенную на рис. 10.3, а.

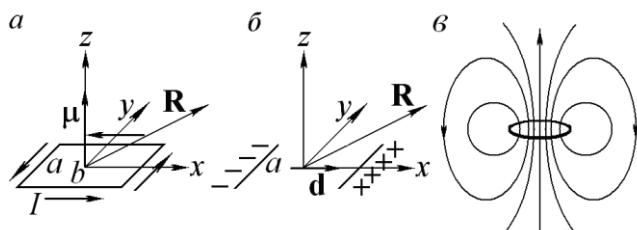


Рис. 10.3. Векторный потенциал и магнитное поле петли с током:

- а — к решению задачи о расчете магнитного поля небольшой петли с током;
- б — вспомогательная задача для нахождения A_x ;
- в — поле магнитного диполя.

Для расчета векторного потенциала удобно воспользоваться известной аналогией с электростатической задачей нахождения скалярного потенциала. Поскольку у протекающих по контуру токов отсутствуют составляющие, направленные вдоль вертикальной оси z , соответствующая компонента векторного потенциала оказывается равной нулю: $A_z = 0$.

Проектирование распределения токов на направление y приводит к скалярному распределению, аналогичному распределению плотности зарядов электрического диполя, с направленным вдоль оси x моментом (рис. 10.3, δ)

$$d_x = qb = \rho(as)b = \rho s S,$$

где S — площадь, охватываемая петлей с током, а s — площадь попечного сечения проводника, образующего петлю. В точке наблюдения, задаваемой радиус-вектором \mathbf{R} , электрический диполь создает скалярный потенциал

$$\varphi = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3} = \frac{\rho s S R_x}{(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}}.$$

Выражение для соответствующей составляющей векторного потенциала получается в результате формальной замены плотности заряда отнесенной к скорости света x -составляющей плотности тока:

$$A_y = \frac{js S R_x}{c(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}} = \frac{ISR_x}{cR^3}.$$

Совершенно аналогично вычисляется x -составляющая векторного потенциала, которая оказывается равной

$$A_x = -\frac{js S R_y}{c(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}} = -\frac{ISR_x}{cR^3}.$$

Магнитное поле \mathbf{B} в точке наблюдения рассчитывается как ротор векторного потенциала и аналогично электростатическому полю, создаваемому электрическим диполем:

$$\mathbf{B} = \frac{IS}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial R_x} & \frac{\partial}{\partial R_y} & \frac{\partial}{\partial R_z} \\ \frac{-R_y}{R^3} & \frac{R_x}{R^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{IS}{c} \begin{pmatrix} \frac{R_x R_z}{R^5} \\ \frac{R_y R_z}{R^5} \\ 3 \frac{R_z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \end{pmatrix}.$$

Аналогия с электростатической задачей становится еще более очевидной, если воспользоваться определением (9.10) магнитного дипольного момента. Оно позволяет записать выражение для векторного потенциала магнитного диполя в более компактной форме

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (10.17)$$

имеющей определенное сходство с выражением для скалярного потенциала электрического диполя (1.17). Вычисление же ротора векторного потенциала (10.17) приводит к не зависящему от выбора системы координат выражению для поля небольшого витка с током

$$\mathbf{B} = 3 \frac{\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R})}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3}, \quad (10.18)$$

совпадающему (с точностью до замены векторов \mathbf{d} и $\boldsymbol{\mu}$) с ранее полученной формулой для напряженности поля электрического диполя. На основании сходства конфигураций магнитного поля витка с током и электростатического поля электрического диполя рассматриваемая магнитостатическая система была названа *магнитным диполем*.

Сходство электрического и магнитных полей, создаваемых соответствующими диполями (рис. 10.3,*в*), сохраняется только на расстояниях, намного больших размеров этих систем. В непосредственной близости от источников конфигурации электрического и магнитного полей существенно различаются: силовые линии электрического поля начинаются и обрываются на зарядах, в то время как линии поля \mathbf{B} представляют собой непрерывные и замкнутые кривые (рис. 10.4).

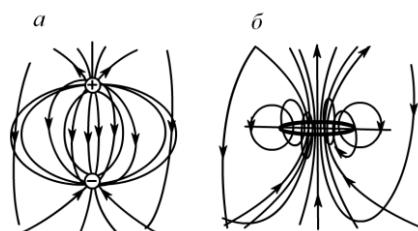


Рис. 10.4. Электрическое и магнитное поля на малых расстояниях от электрического и магнитного диполей соответственно (результаты компьютерного моделирования):
а — поле электрического диполя;
б — поле магнитного диполя.

Соотношения, которые полезно помнить

$\exists \mathbf{A}(\mathbf{R}): \quad \mathbf{B}(\mathbf{R}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{R})]$	Определение векторного потенциала
$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{\mathbf{u}_i}{c} \frac{q_i}{ \mathbf{R} - \mathbf{r}_i },$ $\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \oint_V dV(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c \mathbf{R} - \mathbf{r} }$	Векторные потенциалы, создаваемые системой движущихся точечных зарядов и заданным распределением токов
$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \frac{\mathbf{j}}{c}$	Уравнение Пуассона для векторного потенциала
$(\nabla, \mathbf{B}) = 0,$ $[\nabla, \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$	Дифференциальная форма уравнений магнитостатики вакуума
$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0,$ $\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I}{c}$	Интегральная форма записи уравнений магнитостатики вакуума

Задачи для самостоятельного решения

- 10.1. Исходя из определения векторного потенциала получить явное выражение для вектора \mathbf{A} в случае однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z . Применяя хорошо известную из векторной алгебры формулу для двойного векторного произведения $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ для вычисления ротора от векторного произведения, рассчитать магнитное поле, соответствующее

векторному потенциалу $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{R}]/2$, где \mathbf{B} — постоянный вектор, направленный вдоль оси z .

Указание. Если результат расчета получился отличным от значения \mathbf{B} , есть основания полагать, что Вы слишком смело пользуетесь аналогиями между векторами и операторами: ∇ является не только вектором, но и командой выполнить операцию дифференцирования!

- 10.2. Рассчитать векторный потенциал в произвольной точке пространства и соответствующее ему магнитное поле в случае, когда его источником является ток силой I , протекающий: а) по объему; б) по поверхности вдоль оси бесконечного цилиндра заданного радиуса.

Указание. Воспользоваться сходством между дифференциальными уравнениями, связывающими скалярный потенциал с плотностью электрического заряда и векторный потенциал с плотностью тока.

- 10.3. Бесконечный цилиндр радиусом R , равномерно заряженный по поверхности зарядом плотностью σ , равномерно вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Определить векторный потенциал и магнитное поле, создаваемое описанной системой в произвольной точке пространства.
- 10.4. Равномерно заряженный по поверхности электрическим зарядом Q шар с известным радиусом равномерно вращается с угловой скоростью ω . Определить магнитное поле, создаваемое таким шаром.
- 10.5. Равномерно заряженная поверхностью зарядом σ сферическая оболочка радиусом R расширяется во все стороны с постоянной скоростью u . Определить магнитное поле и векторный потенциал в произвольной точке внутри оболочки.
- 10.6. Найти магнитное поле в произвольной точке внутри бесконечного соленоида, по виткам которого течет постоянный ток I . Линейная плотность числа витков соленоида равна n .

Указание. Во многих учебных пособиях эта задача решается с помощью теоремы о циркуляции при допущении, что магнитное поле на бесконечном расстоянии от бесконечного соленоида равно нулю... Желательно, чтобы корректное решение либо содержало обоснование последнего утверждения, либо опиралось на какие-либо иные обоснованные соображения...

10.7. На каком расстоянии от оси полубесконечного соленоида проходит линия вектора \mathbf{B} в точках, существенно удаленных от его торца, если известно, что она пересекает боковую поверхность этого соленоида в точке его обрыва? Найти полный поток вектора \mathbf{B} через боковую поверхность такого соленоида.

Указание. Если к полубесконечному соленоиду добавить еще один, развернутый на угол 180° , то получится бесконечный соленоид.

10.8. Сердечник, представляющий собой кольцо с прямоугольным сечением (все размеры заданы), имеет обмотку из N витков провода, по которому течет постоянный ток I . Определить магнитное поле в произвольной точке пространства.

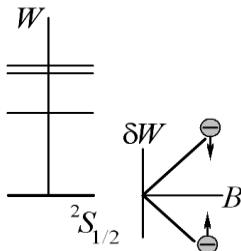
10.9. Электрический ток I втекает по полубесконечному проводу в перпендикулярную ему металлическую плоскость и равномерно растекается во все стороны. Найти магнитное поле в произвольной точке пространства.

10.K1. Используя пакеты программ численного моделирования, попытайтесь освоить технику расчетов магнитных полей и соответствующих им векторных потенциалов, создаваемых непрерывными распределениями токов. Смоделируйте магнитные поля и потенциалы, создаваемые:

- длинным цилиндром с равномерно распределенным по его сечению электрическим током;
- длинным цилиндром, заряженным по объему и равномерно вращающимся вокруг своей оси;
- равномерно заряженным по объему шаром, вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.
- шарообразным облаком из заряженных частиц, разлетающихся от центра со скоростями, пропорциональными расстояниям до него ($\mathbf{u}_k \sim \mathbf{r}_k$).

10.K2. Используя готовые пакеты программ или самостоятельные разработки, освойте технику моделирования магнитных полей, создаваемых отрезками прямых тонких проводников и круговыми витками с током. Смоделируйте магнитные поля соленоида, торoidalной катушки и других распределений источников, допускающих расчеты вектора \mathbf{B} с помощью теоремы о циркуляции. Проследите за тем, как получаемые в процессе численного моделирования результаты приближаются к результатам идеализированных расчетов при увеличении линейной плотности витков с током.

Лекция 11



АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Аналогии между электростатикой и магнитостатикой прослеживаются и при описании магнитного поля в веществе. Имеется сходство между магнитостатическими свойствами сверхпроводников и электростатическим свойствам проводников. Диамагнетики в некотором смысле аналогичны диэлектрикам с электронной поляризумостью, парамагнетики — диэлектрикам с полярными молекулами, ферромагнетики сходны с сегнетоэлектриками и проводниками. Для построения макроскопической теории магнитных полей в веществе необходима информация о поведении в магнитном поле отдельного атома или молекулы. На указанном микроскопическом уровне между электростатикой и магнитостатикой возникают весьма значительные различия, обусловленные существенно неклассическим характером поведения микрочастиц в магнитном поле.

11.1. Сверхпроводники в магнитном поле

Сверхпроводниками называются вещества с нулевым удельным сопротивлением. Некоторые металлы при низких температурах (порядка нескольких кельвинов) переходят в сверхпроводящее состояние (впервые наблюдалось в 1911 г. Х. Камерлинг-ОНнесом при охлаждении ртути). Сверхпроводимость — существенно квантовомеханическое явление, основы теории которого были заложены в работах В. Л. Гинзбурга, Л. Д. Ландау и Л. Купера. Исчерпывающего теоретического описания механизма возникновения сверхпроводимости до настоящего времени не существует. На языке классической физики может быть дано только весьма приближенное описание явлений, связанных со сверхпроводимостью.

В лекции 14, посвященной явлению электромагнитной индукции, будет показано, что при внесении в магнитное поле проводников в объеме последних возникают *индукционные токи*, создающие вторичные магнитные поля. Направление вторичных полей таково, что они

стремятся скомпенсировать возрастание суммарного поля в проводнике. Из-за наличия электрического сопротивления эта компенсация оказывается неполной, а сами индуцированные токи вскоре затухают после окончания перемещения проводника. В случае обладающих нулевым сопротивлением сверхпроводников индукционные токи создают поля, полностью компенсирующие исходное магнитное поле, и, возникнув, способны существовать без внешних источников сколь угодно долго. В результате при внесении сверхпроводника в магнитное поле на его поверхности наводятся индукционные токи, возрастающие до тех пор, пока в сверхпроводящем объеме суммарное магнитное поле не обратится в нуль. При перемещении сверхпроводящего образца в обратном направлении в нем возникают встречные индукционные токи, компенсирующие возникшие при его помещении в поле. Таким образом, подобно тому как проводники в электростатике оказываются объектами, в объеме которых всегда отсутствует электрическое поле, **в объемах сверхпроводников невозможно существование магнитостатического поля**. Это важнейшее свойство сохраняется и в том случае, когда образец помещается в магнитное поле в несверхпроводящем состоянии и лишь после этого охлаждается: в момент исчезновения сопротивления вещества магнитное поле выталкивается из его объема (эффект *В. Мейснера*, 1933 г.).

Вывод граничных условий для вектора \mathbf{B} на поверхности сверхпроводника (рис. 11.1,*a,b*) аналогичен сходной процедуре для электростатического поля вблизи поверхности проводников и опирается на соответствующие интегральные теоремы для магнитного поля.

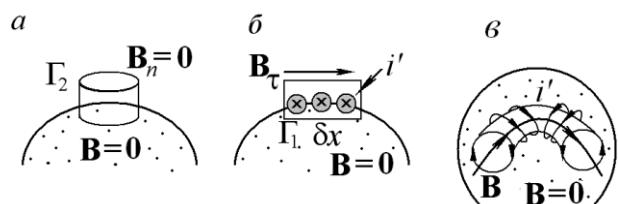


Рис. 11.1. Магнитное поле вблизи поверхности сверхпроводника:
а — к доказательству равенства нулю нормальной компоненты
 вектора \mathbf{B} на поверхности сверхпроводника;
б — к вычислению тангенциальной компоненты вектора \mathbf{B} на
 поверхности сверхпроводника;
в — магнитное поле в пустой многосвязной полости в объеме
 сверхпроводника.

Применение теоремы о равенстве нулю потока вектора \mathbf{B} (10.15) к гауссовой поверхности в виде пересекающего поверхность сверхпроводника цилиндра малой высоты (рис.11.1,*а*) приводит к выводу о равенстве нулю нормальной (т. е. направленной перпендикулярно к поверхности сверхпроводника) составляющей магнитного поля:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \Rightarrow B_n = 0. \quad (11.1)$$

Выражение для *тангенциальной составляющей* следует из теоремы для циркуляции (10.16), применяемой к контуру в виде бесконечно узкой прямоугольной петли, пересекающей границу сверхпроводника (рис. 11.1,*б*).

Полученные таким способом граничные условия для вектора \mathbf{B}

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 0 \Rightarrow \frac{4\pi I'}{c} \Rightarrow B_t = \frac{4\pi}{c} \frac{dI'}{dx} \equiv 4\pi \frac{i'}{c} \quad (11.2)$$

обнаруживают «стандартное» соответствие с граничными условиями (3.3) и (3.4) для электростатического поля вблизи поверхности проводников. Если в случае электрического поля около поверхности проводника отсутствует тангенциальная составляющая напряженности, то магнитное поле у поверхности сверхпроводника не может иметь нормальной составляющей вектора \mathbf{B} . Связь же между ненулевыми компонентами полей и поверхностными плотностями источников поля (зарядами и токами) задается соотношениями, переходящими друг в друга при «обычной» замене объемной плотности заряда отнесенной к скорости света плотностью тока. В соответствии с этим правилом вместо поверхностной плотности заряда, присутствующей в граничных условиях для электрического поля у поверхности проводников, в граничные условия (11.2) вошла *линейная плотность электрического тока* i' , определяемая как отношение протекающего по участку поверхности сверхпроводника тока к ширине этого участка.

В отличие от электростатики проводников утверждение о безусловном равенстве нулю магнитостатического поля в свободной от токов замкнутой полости внутри сверхпроводника оказывается неверным. В случае многосвязных полостей токи, протекающие по их

сверхпроводящим границам, могут поддерживать ненулевое магнитное поле (рис.11.1,*b*).

Для расчета магнитного поля при наличии сверхпроводников, как и в электростатике, в ряде случаев может оказаться полезным *метод изображений*. Токи-изображения следует подбирать так, чтобы на границе сверхпроводника линии магнитного поля оказывались направленными вдоль его поверхности. При этом оказывается, что реальные источники (свободные токи) отталкиваются от их изображений. В результате оказывается возможным «парение» витка с током над сверхпроводящей поверхностью. Указанное свойство содержащих сверхпроводящие объемы магнитостатических систем существенно отличает их от электростатических, где заряды-источники притягиваются к своим изображениям.

Пример. Сверхпроводящий цилиндр в однородном магнитном поле

Рассчитать поверхностное распределение токов, возникающих на сверхпроводящем цилиндре, помещенном в однородное магнитное поле с индукцией B_0 так, чтобы его ось была перпендикулярна линиям поля.

Решение. Задача может быть решена методом изображений. Для выбора пробного распределения токов-изображений разумно воспользоваться аналогией с решением подобной задачи электростатики проводников. Электростатическая задача о проводящем шаре в однородном электрическом поле (лекция 3) решалась размещением в центре шара электрического диполя с моментом, определяемым соотношением (3.11). В этой связи имеет смысл попытаться заменить вторичное магнитное поле распределенных по поверхности цилиндра индуцированных токов полем системы-изображения, представляющей собой два близко расположенных прямых бесконечных встречных тока, параллельных оси цилиндра. По аналогии с электростатикой, где подобная система разноименно заряженных нитей-изображений использовалась при решении задачи о проводящем цилиндре в однородном электрическом поле (см. задачу 3.6) и вводилось понятие «двумерного электрического диполя», рассматриваемую систему токов-изображений логично назвать «двумерным магнитным диполем» (рис. 11.2,*a*).

Расчет магнитного поля двух близко расположенных нитей с текущими навстречу друг другу токами целесообразно начинать с решения

задачи о векторном потенциале. Электростатическим аналогом двумерного магнитного диполя является система из двух близко расположенных параллельных разноименно заряженных нитей (рис.11.2.б), скалярный потенциал которой задается выражением

$$\varphi = \lambda \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{R})}{R^2} = \lambda \frac{l R_x}{R^2} = \rho s \frac{l R_x}{R^2}.$$

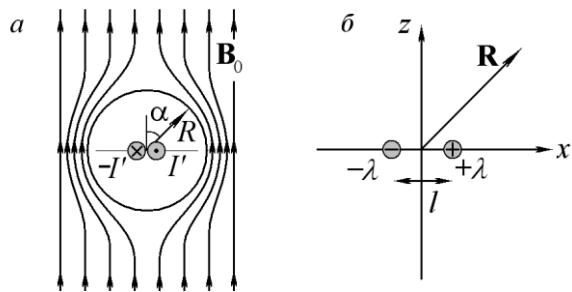


Рис. 11.2. Сверхпроводящий цилиндр в однородном магнитном поле:
а — примерный вид линий вектора \mathbf{B} и двумерный магнитный диполь-изображение;
б — вспомогательная электростатическая задача для расчета векторного потенциала.

Переход от вспомогательной задачи расчета электрического потенциала к исходной задаче магнитостатики осуществляется по сформулированным в лекции 10 правилам соответствия

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = \frac{I}{c} \frac{l R_x}{R^2}. \quad (11.3)$$

Отвечающее векторному потенциальному (11.3) магнитное поле индуцированных на сверхпроводнике поверхностных токов \mathbf{B}' восстанавливается с помощью операции вычисления ротора в соответствии с соотношением (10.4) и имеет вид

$$\mathbf{B}' = [\nabla, \mathbf{A}] = -\mathbf{e}_x \frac{\partial A_y}{\partial R_z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_y}{\partial R_x} = \frac{Il}{cR^4} \begin{pmatrix} 2R_x R_z \\ 0 \\ R_z^2 - R_x^2 \end{pmatrix}.$$

Параметры «двумерного диполя-изображения» (сила тока I и расстояние между токоведущими проводниками l) легко определяются с учетом требования обращения в нуль суммарного магнитного поля во всех точках, где цилиндрическая поверхность сверхпроводника перпендикулярна исходному полю \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \Big|_{\substack{x=0 \\ z=\pm R}} = 0 \Rightarrow \frac{I}{c} l = -B_0 R^2.$$

При выполнении этого условия нетрудно убедиться, что суммарное магнитное поле

$$\mathbf{B}_\Sigma = \frac{B_0}{R^2} \begin{pmatrix} -2xz \\ 0 \\ x^2 - z^2 + R^2 \end{pmatrix} = 2B_0 \cos \alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

действительно направлено по касательной к поверхности цилиндра, что соответствует граничному условию (10.1) на поверхности сверхпроводника. Поверхностная плотность индуцированных токов

$$i'(\alpha) = \frac{c}{4\pi} B_\tau = -\frac{c}{2\pi} B_0 \cos \alpha$$

определяется исходя из величины тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности сверхпроводника в соответствии с граничным условием (11.2).

11.2. Магнитный диполь в неоднородном магнитном поле

Помещенный над сверхпроводящей поверхностью виток с током (магнитный диполь) испытывает действие «подъемной» силы со стороны токов, наводимых им на этой поверхности. Достаточно очевидно (и легко доказуемо), что создаваемое индуцированными на сверхпроводящей поверхности токами магнитное поле вблизи исходного витка эквивалентно полю, создаваемому симметрично расположенным относительно плоскости витком с противоположным направлением тока (рис. 11.3,*a*).

В результате взаимодействия протекающего по витку тока с вертикально направленной составляющей магнитного поля (рис. 11.3,*b*) возникают взаимно компенсирующиеся силы, стремящиеся равномер-

но сжать кольцо. Действующая же на виток радиусом R подъемная сила определяется горизонтальной составляющей магнитного поля:

$$F_{\Sigma} = \sum_i \delta Q_i \frac{u_i}{c} B_{\perp} = 2\pi R \frac{I}{c} B_{\perp}. \quad (11.4)$$

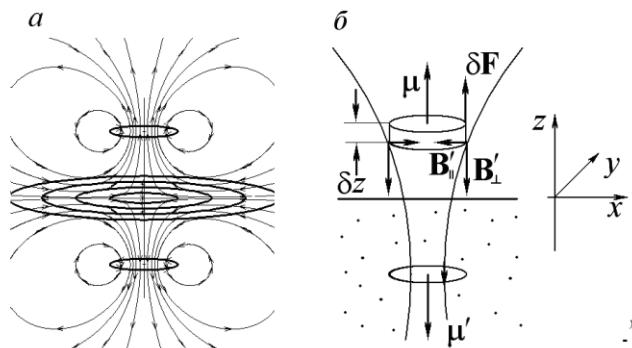


Рис. 11.3. Магнитный диполь над плоской границей полупространства, заполненного сверхпроводником:

a — результат компьютерного моделирования магнитного поля, создаваемого двумя симметрично расположенными диполями;

б — к вычислению силы, действующей на магнитный диполь, находящийся в магнитном поле симметричного диполя-изображения.

Для нахождения этой составляющей поля удобно воспользоваться условием равенства нулю потока вектора \mathbf{B} через произвольную поверхность. В качестве гауссовой поверхности удобно выбрать цилиндр бесконечно малой высоты δz , основанием которого является рассматриваемый виток с током. Поток через боковую поверхность цилиндра определяется, с одной стороны, искомым полем и разностью потоков через его верхнюю и нижнюю крышки — с другой:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 = (B_z(z + \delta z) - B_z(z))\pi R^2 + B_{\perp} \cdot 2\pi R \delta z.$$

Полученная связь между составляющими вектора \mathbf{B}

$$|\mathbf{B}_\perp| = \frac{R}{2} \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|$$

с помощью ранее полученного результата (11.4) позволяет выразить действующую на диполь со стороны сверхпроводника силу через скорость изменения вертикальной составляющей вторичного поля:

$$|F_z| = \left| \frac{\pi R^2 I}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right| = \left| \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|. \quad (11.5)$$

Результат (11.5) естественным образом обобщается на случай расчета силы, действующей на произвольно ориентированный диполь с магнитным моментом μ в пространственно неоднородном магнитном поле \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = (\mu, \nabla) \mathbf{B}. \quad (11.6)$$

Обоснование соотношения (11.6) будет удобно дать позже, после вычисления энергии магнитного диполя во внешнем поле.

Возвращаясь к вопросу о «парении» магнитного диполя над поверхностью сверхпроводника, следует отметить, что при постановке реальных экспериментов в качестве диполей обычно используются небольшие постоянные магниты. В образцах из материалов с ферромагнитными свойствами молекулярные токи циркулируют по микроскопическим контурам, одинаково ориентированным в пространстве. В результате внутри объема из однородно намагниченного вещества суммарный макроскопический ток оказывается равным нулю вследствие взаимной компенсации молекулярных токов. Не скомпенсированными остаются лишь молекулярные токи на боковой поверхности образца. Они формируют круговой макроскопический ток, определяющий магнитный момент диполя.

В результате оказывается, что небольшой магнит должен «парить» над поверхностью сверхпроводника, отталкиваясь от магнитного поля, создаваемого его изображением. Эффект «парения» над сверхпроводящей поверхностью (носящий таинственное название «гроб Магомета») очевидно не является сколько-нибудь неожиданным физическим явлением: он не более необычен, чем широко известное расталкивание постоянных магнитов, обращенных друг к другу одноименными полюсами.

11.3. Гиромагнитное отношение

Подобно тому как в зависимости от механизма отклика на внешнее электрическое поле диэлектрики были разделены на три группы, вещества по магнитным свойствам делятся на *диамагнетики*, *парамагнетики* и *ферромагнетики*. При помещении во внешнее магнитное поле образца из магнетика любого из трех типов в его молекулах возникают дополнительные движения электрических зарядов, что приводит к появлению вторичных магнитных полей, искажающих исходное. В результате магнитное поле в объеме диамагнетиков ослабевает (сверхпроводники в этом смысле могут рассматриваться как предельный случай диамагнетиков, в объеме которых магнитное поле уменьшается до нуля), в парамагнетиках — незначительно усиливается, в ферромагнетиках — возрастает в тысячи раз.

Для анализа механизмов возникновения перечисленных явлений необходимо рассмотреть процессы, возникающие в отдельном атоме (или молекуле) при помещении его в магнитное поле. В отличие от диэлектриков, адекватное описание поведения молекул которого во внешнем электрическом поле могло быть дано на языке классической физики, аналогичный анализ поведения частиц в магнитном поле требует квантовомеханического подхода. В связи с этим при кратком изложении указанного круга вопросов будут использованы сведения, детальное обсуждение которых оказывается возможным лишь после изучения курса квантовой механики.

Введенное в лекции 9 понятие *магнитного дипольного момента* (9.10) играет в физике магнитных явлений весьма существенную роль, более важную, чем аналогичная характеристика в электростатике. Это связано с тем, что в связи с отсутствием в природе магнитных зарядов простейшей компактной системой, способной создавать магнитное поле, оказывается магнитный диполь. Ненулевым магнитным моментом обладают многие атомы, что выглядит вполне естественно с точки зрения планетарной модели Резерфорда, предполагающей вращение электронов по орбитам вокруг неподвижного массивного ядра.

В рамках планетарной модели легко вычислить *гиромагнитное отношение*, т. е. отношение величин магнитного ($\mu^{(l)}$) и механического (I) моментов, обусловленных орбитальным движением электрона:

$$\Gamma_l \equiv \frac{|\boldsymbol{\mu}^{(l)}|}{|\mathbf{l}|} = \frac{IS}{c} \frac{1}{m_e ur} = \frac{q_e}{T} \frac{\pi r^2}{c} \frac{1}{m_e ur} = \frac{q_e}{2m_e c}. \quad (11.7)$$

Результат (11.7) представляет собой комбинацию фундаментальных физических констант (элементарного заряда q_e , массы электрона m_e и скорости света c) и в простейшем случае одноэлектронного атома согласуется с данными эксперимента с очень высокой точностью.

Более неожиданным, с точки зрения классической физики, выглядит наличие у элементарных частиц собственного (спинового) момента импульса (\mathbf{s}) и связанного с ним магнитного момента ($\boldsymbol{\mu}^{(s)}$). Попытки дать объяснение этому явлению на языке классической физики в рамках предположения о вращении заряженных частиц вокруг своей оси не привели к удовлетворительным результатам. Например, «наиболее естественная» классическая модель электрона, допускающая равномерное распределение заряда и массы по его объему, приводит к величине гиromагнитного отношения, отличающейся от измеряемого значения

$$\Gamma_s \equiv \frac{|\boldsymbol{\mu}^{(s)}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{q_e}{m_e c} \quad (11.8)$$

ровно в два раза.

Досадное расхождение между результатом классических расчетов и измеряемым значением (11.8) является одним из свидетельств бесперспективности попыток применения классических подходов к описанию рассматриваемого круга явлений на микроскопическом уровне.

11.4. Опыт Штерна—Герлаха

Другой, не имеющей классического аналога особенностью как спинового, так и орбитального движений является **существование лишь дискретного набора возможных значений спиновых и орбитальных моментов**. Первый прямой эксперимент, продемонстрировавший наличие у атомов магнитного момента, проекции которого на направление магнитного поля принимают лишь определенные (квантованные) значения, был проведен О. Штерном и В. Герлахом в 1922 г. Идея опыта состояла в пропускании пучка атомов через пространственно неоднородное магнитное поле и наблюдении отклонения движения частиц от прямолинейных траекторий (рис. 11.4,*a*).

Поскольку источник создавал пучок атомов, случайным образом ориентированных в пространстве, при наличии у них магнитных моментов согласно соотношению (11.6) следовало ожидать, что в неоднородном магнитном поле каждая частица будет испытывать действие

вертикальной силы, величина которой изменяется случайным образом. В этом случае пучок должен размыться в непрерывную полосу. Результат, регистрируемый на детекторе, должен иметь вид, изображенный на рис. 11.4,б.

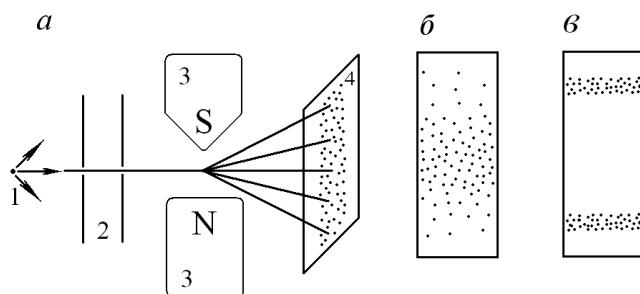


Рис. 11.4. Опыт Штерна—Герлаха:
 а — идея опыта (1 — источник атомов; 2 — диафрагмы; 3 — создающий неоднородное поле магнит; 4 — детектор атомов);
 б — результат, ожидаемый в соответствии с представлениями классической физики;
 в — результат, полученный для пучка атомов первой группы (с одним валентным электроном в s -состоянии).

Пучки невозбужденных щелочных атомов вопреки классическим представлениям в приборе Штерна—Герлаха расщеплялись на две компоненты (рис. 11.4,в). Наиболее естественной интерпретацией полученного результата было предположение о существовании у атомов щелочных металлов ненулевого магнитного момента, проекция которого на направление градиента магнитного поля может принимать лишь одно из двух дискретных значений.

Оказалось, что магнитный момент невозбужденных атомов первой группы обусловлен спином валентного электрона: орбитальные и спиновые моменты входящих в заселенные оболочки электронов полностью компенсируются, орбитальный момент единственного s -электрона вне заполненных оболочек равен нулю.

Попытки интерпретации результатов опыта Штерна—Герлаха в рамках классической физики приводят к весьма странной модели электрона. Его приходится представлять в виде заряженного шарика, не только обладающего аномальным гиromагнитным отношением, но

и способного вращаться по часовой стрелке или против нее вокруг оси, обязательно ориентированной вдоль градиента магнитного поля.

Для пучков атомов с большим числом валентных электронов наблюдаемая картина расщепления в неоднородном поле оказывается существенно более сложной.

Таким образом, адекватное описание поведения атома (или молекулы) во внешнем магнитном поле может быть дано только на языке квантовой механики. Согласно современным представлениям **величины орбитального и спинового моментов электрона в атоме могут принимать лишь дискретный набор значений:**

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad |\mathbf{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 1/2.$$

Принято говорить, что указанные величины квантованы. В зависимости от значения квантового числа $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ электроны атома относятся к группам s, p, d, \dots . Так же **квантованными оказываются и проекции орбитального и спинового моментов на любое выделенное в пространстве направление (ось z)**:

$$l_z = m\hbar, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l, \quad s_z = \pm\hbar/2,$$

где квантовое число l , задающее кратный постоянной Планка $\hbar = h/(2\pi)$ орбитальный момент \mathbf{J} , принимает целочисленные значения ($l = 0$ для электронов в s -состоянии, $l = 1$ для p -электронов и т. д.)

Проекции на выделенную ось z обусловленных орбитальным движением электрона и его спином магнитных моментов ($\mu^{(l)}$ и $\mu^{(s)}$ соответственно) также оказываются квантованными и связаны с соответствующими проекциями механических моментов посредством гиромагнитных отношений:

$$\mu_z^{(l)} = -\Gamma_l l_z, \quad \mu_z^{(s)} = -\Gamma_s s_z.$$

Полный механический момент атома или молекулы \mathbf{J} складывается из орбитальных и спиновых моментов всех его электронов и также квантован:

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar, \quad \min \left| \sum_n (\pm l_n \pm s_n) \right| \leq j \leq \sum_n (l_n + s_n),$$

где индекс суммирования n нумерует электроны атома.

Проекция полного механического момента на выделенную ось может принимать как целочисленные, так и полуцелые (в единицах \hbar) значения, полное число которых равно $2j+1$:

$$J_z = m\hbar, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

Проекция суммарного магнитного момента $\mu^{(\Sigma)}$ на ось квантования вновь оказывается пропорциональной соответствующей проекции механического момента

$$\mu_z^{(\Sigma)} = -\Gamma_\Sigma J_z. \quad (11.9)$$

Обеспечивающий связь (11.9) между z -проекциями суммарных магнитного и механического моментов атома коэффициент пропорциональности Γ_Σ носит название *множителя Ланде*. Его вычисление в каждом конкретном случае представляет собой весьма характерную для квантовой механики задачу.

В рассмотренном опыте Штерна—Герлаха полный магнитный момент атома определялся спином его единственного валентного электрона:

$$\mathbf{J} = \mathbf{s}, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2} \hbar}, \quad J_z = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

Соответствующие проекции магнитного момента принимали значения

$$\mu_z^{(\Sigma)} = -\Gamma_s J_z = \mp \frac{q\hbar}{2mc},$$

в результате чего атомы пучка в неоднородном магнитном поле испытывали воздействие направленной вдоль градиента силы, принимающей только одно из двух возможных значений:

$$F_z = \pm \Gamma_s \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial r_z} \right).$$

11.5. Магнитная поляризуемость атомов парамагнетиков

Идея расчета среднего магнитного момента атомов газообразного *парамагнетика* (вещества, молекулы которого изначально обладают ненулевым магнитным моментом) во внешнем магнитном поле в общих чертах сходна с применяемой при расчете среднего дипольного

момента полярных молекул во внешнем электрическом поле. Для использования статистики Больцмана при вычислении вероятности обнаружения атома с дипольным моментом заданной ориентации вычисляют энергию магнитного диполя во внешнем магнитном поле. Результат полностью аналогичен ранее полученному результату (4.8) для энергии электрического диполя во внешнем электрическом поле

$$W = -\langle \mu^{(\Sigma)}, \mathbf{B} \rangle. \quad (11.10)$$

В связи с рассмотренными особенностями поведения магнитных моментов атомов во внешнем поле расчет их среднего магнитного момента несколько отличается от решения аналогичной задачи о поведении полярных молекул в электрическом поле (см. лекцию 4). Вследствие того, что проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля может принимать только дискретный набор значений, дополнительная энергия, обусловленная взаимодействием его магнитного момента с полем \mathbf{B} , вдоль которого направляется ось квантования z , также оказывается квантованной (т. е. может принимать лишь дискретный набор значений):

$$W_m = -\mu_z^{(\Sigma)} B_z = \Gamma_\Sigma J_z B_z = \Gamma_\Sigma m \hbar B, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

При вычислении среднего дипольного момента вместо выполнявшегося в электростатике интегрирования по всевозможным углам (4.11) приходится выполнять суммирование по допустимым правилами квантования дискретным ориентациям магнитного момента:

$$\langle \mu_z^{(\Sigma)} \rangle = \sum_{m=-j}^j (-\Gamma_\Sigma m \hbar) C \exp\left(\frac{-W_m}{kT}\right),$$

где нормировочная константа C по-прежнему определяется с учетом требования равенства единице суммы вероятностей всех допустимых правилами квантования проекций магнитного момента.

В результате выполнения по описанной схеме расчетов оказывается, что, как и в случае ориентационной поляризуемости в электрическом поле, при малых величинах магнитного поля средний магнитный момент атомов оказывается линейной функцией вектора \mathbf{B} . Соответствующий коэффициент пропорциональности по аналогии с теорией

диэлектриков следовало бы назвать *магнитной поляризумостью* молекулы (атома):

$$\langle \mu \rangle \equiv \tilde{\alpha}_m \mathbf{B}.$$

По причинам, которые будут обсуждаться в следующей лекции, магнитной поляризумостью атома была названа другая величина.

Пример. Парамагнитные свойства газов из атомов щелочных металлов

Рассчитать средний магнитный момент помещенного во внешнее магнитное поле \mathbf{B} газа из атомов щелочного металла, механический и магнитный момент которых обусловлен только нескомпенсированным спином внешнего валентного электрона.

Решение. Атомы щелочных металлов имеют только один электрон вне заполненных оболочек, суммарные орбитальные и спиновые моменты которых скомпенсированы. Орбитальный момент внешнего электрона в основном состоянии (*s*-состояние) равен нулю. Таким образом, момент атома определяется спином электрона, проекция которого на направление магнитного поля может принимать только два значения. В зависимости от ориентации спина возможны два значения добавочной энергии магнитного взаимодействия атома с полем (рис. 11.5,*a*):

$$\delta W_{\pm} = \mp \frac{q\hbar}{2mc} B \equiv \mp \mu_0 B,$$

где μ_0 — константа, называемая *магнетоном Бора*.

В соответствии со статистикой Больцмана концентрации атомов с магнитными моментами электронов, ориентированными вдоль и против поля, различны:

$$N_{\pm} = NC \exp\left(\pm \frac{\mu_0 B}{kT}\right). \quad (11.11)$$

Входящая в выражение для концентрации (11.11) нормировочная константа C вычисляется стандартным образом:

$$N = N_+ + N_- = CN \left[\exp\left(\frac{\mu_0 B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_0 B}{kT}\right) \right] \Rightarrow C = 2ch^{-1}\left(\frac{\mu_0 B}{kT}\right).$$

Средний магнитный момент вычисляется как отнесенная к полному числу атомов разность их суммарных магнитных моментов, ориентированных вдоль и против исходного поля:

$$\langle \mu_z^{(s)} \rangle = \frac{1}{N} (\mu_0 N_+ - \mu_0 N_-) = \mu_0 \text{th} \left(\frac{\mu_0 B}{kT} \right). \quad (11.12)$$

Зависимость среднего магнитного момента от величины внешнего поля имеет характерный вид кривой с насыщением в области больших полей (рис. 11.5, б). На начальном участке зависимость (11.12) может считаться линейной, тангенс угла наклона графика определяет значение константы, которую по аналогии с введенной в электростатике диэлектриков константой ориентационной поляризуемости молекулы следовало бы назвать *магнитной поляризуемостью* атома натрия:

$$\tilde{\alpha}_m = \frac{\mu_0^2}{2kT}.$$

По причинам, которые будут рассмотрены в лекции 12, в магнитостатике используется иная система определений.

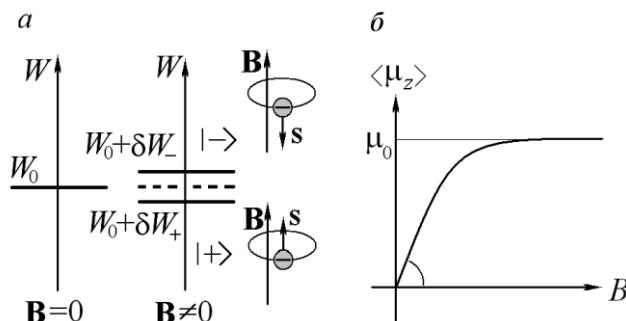


Рис. 11.5. К анализу магнитных свойств газа из атомов щелочных металлов:

- a* — расщепление энергетического уровня атома вследствие взаимодействия спинового магнитного момента с внешним магнитным полем;
- б* — зависимость среднего магнитного момента атомов газа от величины внешнего магнитного поля.

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \nabla) \mathbf{B}$	Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле
$\Gamma_l = \frac{q_e}{2m_e c}, \quad \Gamma_s = \frac{q_e}{m_e c}$	Гиромагнитные отношения для орбитальных и спиновых моментов электрона
$ \mathbf{l} = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots,$ $l_z = m\hbar, \quad m = -l, -l+1, \dots, l,$ $ \mathbf{s} = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 1/2,$ $s_z = \pm\hbar/2$	Правила квантования для орбитального и спинового моментов электрона и их проекций на выделенную ось

Задачи для самостоятельного решения

- 11.1. На частном примере прямоугольной рамки с током показать, что механическая энергия (т. е. энергия, «не учитывающая» затрат на поддержание постоянного тока в контуре) магнитного диполя во внешнем магнитном поле задается выражением $W = -(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B})$. Исходя из приведенного соотношения получить выражение для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.
- 11.2. Рассчитать распределение индуцированных токов на плоской поверхности полубесконечного сверхпроводника, параллельно которой на высоте h протекает свободный ток I_0 .
- 11.3. Очень длинная цилиндрическая труба радиусом R из сверхпроводника разделена внутри на четыре равных сектора двумя взаимно перпендикулярными сверхпроводящими плоскостями, линия пересечения которых совпадает с осью трубы. В одной из образовавшихся секций на расстоянии $r < R$ параллельно оси цилиндра натянут провод, по которому течет ток I . Рассчитать силу, действующую на единицу длины провода.
- 11.4. Сверхпроводящий шар заданного радиуса помещен в однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 . Рассчитать распределение индуцированных токов на поверхности шара.

11.5. На какой высоте над плоской поверхностью полубесконечного сверхпроводника будет «парить» постоянный магнит, представляющий собой однородно намагниченный цилиндр высотой h с основанием радиусом r ? Считать, что основания цилиндра параллельны поверхности сверхпроводника, вектор намагченности \mathbf{M} (магнитный момент единицы объема вещества) направлен параллельно оси цилиндра, плотность материала ферромагнетика равна ρ .

Указание. Для расчета магнитного поля, создаваемого поверхностью токами, индуцированными в сверхпроводнике, удобно воспользоваться методом изображений: суммарное магнитное поле вблизи сверхпроводника не должно иметь нормальной к его поверхности составляющей.

11.6. Пучок обладающих скоростью u возбужденных атомов гелия (один электрон находится в s -, а другой в p -состоянии, спины электронов скомпенсированы) влетает в неоднородное магнитное поле, созданное на участке длиной l , перпендикулярно его градиенту (величина градиента задана). На расстоянии L от магнита (рис. 11.4) перпендикулярно исходному направлению пучка расположен детектор, фиксирующий долетевшие до него атомы. В какие точки детектора будут попадать атомы?

11.7. Попытайтесь решить задачу 11.6 в случае опыта Штерна—Герлаха с атомами алюминия, находящимися в невозбужденном состоянии.

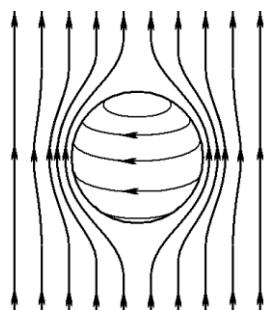
Указание. Невозбужденный атом алюминия имеет три валентных электрона ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$). Спины всех электронов, кроме находящегося в $3p$ -состоянии, скомпенсированы.

11.8. Найти связь между вектором \mathbf{B} и средним магнитным моментом газа из атомов, полный механический момент которых определяется заданным квантовым числом J .

11.9. Рассчитайте гиромагнитное отношение для вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр, шара массой M , равномерно распределенной по его объему. Заряд шара Q также равномерно распределен по его объему. Каким будет ответ в случае заряда, распределенного по поверхности шара?

11.K1. Приобретите опыт численного моделирования магнитных полей в магнитостатических системах, содержащих токи и сверхпроводники. Как и в случае электростатики (задача 3.K2), оцените

результаты, сравнивая их с данными, получаемыми методом изображений.



Лекция 12

Магнитное поле в веществе

Теория макроскопического магнитного поля в линейных магнетиках могла быть построена по аналогии с теорией макроскопического поля в диэлектриках. Однако по ряду причин система определений для физических величин, предназначенных для описания магнитного поля в веществе, была построена по несколько отличному от действующего в электростатике принципу. В результате возникли и до сих пор сохранились досадные логические несоответствия в методах описания электрических и магнитных полей в веществе.

12.1. Магнитное поле в линейных магнетиках

Макроскопическое описание магнитного поля в веществе сходно с аналогичным описанием электростатического поля. Однако это сходство носит, скорее, идеальный, чем математический характер. Не до конца ясное понимание этого аспекта в период становления классической теории магнетизма привело к тому, что при формулировке определений физических величин, используемых для описания полей в материальных средах, была допущена досадная нелогичность, к сожалению, сохранившаяся в теории по настоящий день. В связи с этим представляется целесообразной следующая схема изложения материала: сначала по аналогии с электростатикой будет построена «логически стройная» теория магнетиков, на основе которой будут объяснены причины, по которым для описания магнитного поля был выбран несколько отличный путь. После этого будут сформулированы общепринятые сегодня определения и получены следствия в форме, используемой в современной литературе.

Подобно тому как источники электрического поля в веществе подразделялись на совместно входящие в выражение для дивергенции

поля обычно задаваемые в условиях задач свободные заряды и трудно учитываемые при расчете связанные заряды

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 4\pi(\rho_0 + \rho'), \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= 0, \end{aligned}$$

среди источников магнитного поля выделяют *свободные токи* (протекающие по проводам и обычно известные из условия задачи) и трудно учитываемые *молекулярные токи*, обусловленные внутримолекулярным движением зарядов, а также эффективные токи, соответствующие спиновым магнитным моментам электронов и частиц, составляющих атомное ядро. Токи обоих типов входят в уравнения для ротора магнитного поля

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{B}] &= 4\pi/c(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'). \end{aligned} \tag{12.1}$$

Практическое использование уравнений (12.1) осложнено тем, что в подавляющем большинстве случаев априорная информация о характере распределений наведенных макроскопических токов в веществе отсутствует. При расчете электрических полей в диэлектриках возникла сходная проблема учета наводимых при поляризации вещества связанных зарядов. Для исключения явного присутствия связанных зарядов из уравнений электрического поля в веществе в электростатике вводился вектор поляризации. Аналогичную роль в магнитостатике играет *вектор намагниченности*.

12.2. Вектор намагниченности

По аналогии с электростатикой диэлектриков, в рамках которой оказалось удобным ввести вектор поляризации (средний дипольный момент единицы объема вещества), при построении макроскопической теории магнитного поля в веществе вводится *вектор намагниченности*, определяемый как средний магнитный момент единицы объема:

$$\mathbf{M} \equiv n \langle \boldsymbol{\mu} \rangle.$$

Линейный характер связей между средними дипольными электрическими

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \alpha_E \mathbf{E}$$

и магнитными

$$\langle \mathbf{\mu} \rangle = \tilde{\alpha}_B \mathbf{B} \quad (12.2)$$

моментами и соответствующими наводящими их статическими полями приводит к линейной зависимости от этих полей макроскопических характеристик отклика вещества на поле: поляризации

$$\mathbf{P} \equiv n \langle \mathbf{d} \rangle = n \alpha_E \mathbf{E} \equiv \chi_E \mathbf{E}$$

и аналогичного ему вектора намагниченности:

$$\mathbf{M} \equiv n \langle \mathbf{\mu} \rangle = n \tilde{\alpha}_B \mathbf{B} \equiv \tilde{\chi}_B \mathbf{B}. \quad (12.3)$$

Входящие в соотношения (12.2) и (12.3) коэффициенты пропорциональности по аналогии с электростатикой следовало бы назвать соответственно *магнитной поляризуемостью молекулы*, а результат ее умножения на концентрацию молекул — *магнитной поляризуемостью вещества*, или *магнитной восприимчивостью*.

Магнитостатическим аналогом теоремы о потоке вектора \mathbf{P}

$$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho'$$

является соотношение между ротором намагниченности и плотностью молекулярных токов

$$[\nabla, \mathbf{M}] = \frac{\mathbf{j}'}{c} \quad (12.4)$$

(обратите внимание на различие знаков в рассматриваемых формулах!).

Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть молекулярные токи, протекающие по поверхностям элементарных объемов неоднородно намагниченного вещества. Величина молекулярного тока для каждого элементарного объема определяется магнитным моментом последнего $\delta \mu$, т. е. в конечном итоге его намагниченностью \mathbf{M} :

$$\frac{\mathbf{j}'}{c} = \frac{\delta \mu}{\delta S} = M \frac{\delta V}{\delta S}.$$

Суммарная y -компоненты этого тока в заданной точке пространства может быть найдена как отнесенная к единице площади разность обусловленных намагнченностью молекулярных токов, циркулирующих по поверхностям соседних элементарных объемов вещества.

Для каждого выделенного направления (x , y или z) существует две пары таких элементарных объемов, определяющих соответствующую компоненту плотности молекулярных токов (рис. 12.1).

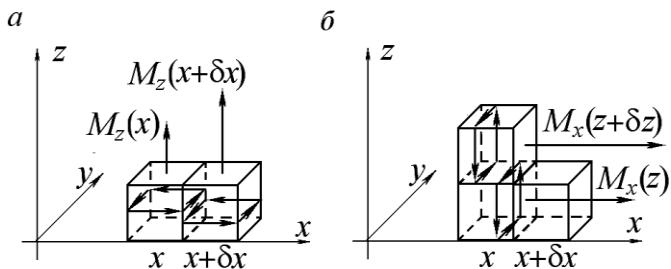


Рис. 12.1. К выводу связи между намагнченностью и плотностью

молекулярных токов:

- a* — вклад в y -составляющую тока от z -составляющей вектора \mathbf{M} ;
- b* — вклад в y -составляющую тока от x -составляющей вектора \mathbf{M} .

В результате суммарное выражение для каждой из декартовых компонент нормированной на скорость света плотности тока оказывается равным соответствующей компоненте ротора вектора \mathbf{M} .

Например, y -составляющая плотности тока определяется молекулярными токами, обусловленными неоднородной намагнченностью образца в двух направлениях: вдоль координатной оси z (рис. 12.1,*a*) и вдоль оси x (рис. 12.1, *b*):

$$\frac{j'_y(x)}{c} = \frac{\delta V}{\delta x \delta z} \frac{M_z(x) - M_z(x + \delta x)}{\delta x \delta y},$$

$$\frac{j'_y(z)}{c} = \frac{\delta V}{\delta x \delta z} \frac{M_x(z + \delta z) - M_x(z)}{\delta x \delta y}.$$

В результате сложения двух полученных равенств оказывается, что суммарная плотность молекулярных токов, протекающих в направлении координатной оси y , определяется одноименной компонентой ротора намагниченности вещества

$$\frac{j'_y}{c} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = [\nabla, \mathbf{M}]_y,$$

что и доказывает справедливость соотношения (12.4).

12.3. Напряженность магнитного поля

По аналогии с тем как в электростатике диэлектриков исключалась трудно вычисляемая плотность связанных зарядов

$$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho' \Rightarrow (\nabla, \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_0,$$

соотношение (12.4) позволяет исключить из выражения для ротора магнитного поля плотность молекулярных токов:

$$[\nabla, \mathbf{M}] = -\frac{\mathbf{j}'}{c} \Rightarrow [\nabla, \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}.$$

Аналогично введению вспомогательного вектора \mathbf{D} (электрическая индукция) в электростатике диэлектриков

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \Rightarrow (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0,$$

в теории магнетиков вводится вспомогательный вектор \mathbf{H} , называемый, однако, не магнитной индукцией (это название было присвоено вектору \mathbf{B}), а *напряженностью магнитного поля*:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \Rightarrow [\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}. \quad (12.5)$$

В случае линейной связи между намагниченностью вещества \mathbf{M} и вектором \mathbf{B} определяемый соотношением (12.5) вспомогательный вектор \mathbf{H} также оказывается линейным по \mathbf{B} .

Аналогично тому, как в электростатике диэлектриков вводилась диэлектрическая проницаемость вещества

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\chi_E \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_E,$$

было бы логично ввести *магнитную проницаемость вещества* μ как коэффициент пропорциональности между векторами \mathbf{H} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\tilde{\chi}_B \mathbf{B} \equiv \tilde{\mu} \mathbf{B}, \quad (12.6)$$

$$\tilde{\mu} = 1 - 4\pi\tilde{\chi}_H. \quad (12.7)$$

Как уже неоднократно отмечалось, в современной электродинамике принятая система определений, несколько отличающаяся от построенной по аналогии с принятой в электростатике. Досадная нелогичность возникла в результате стремления ликвидировать совершенно несущественное с точки зрения логики построения теории различие в знаках в выражениях для диэлектрической и магнитной проницаемости. С этой целью в качестве магнитной проницаемости была выбрана величина, обратная определенной соотношением (12.7):

$$\mu \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}}. \quad (12.8)$$

В соотношениях (12.6)–(12.8) и далее все величины, определения которых удовлетворяют логике построения курса, но отличаются от общепринятых, помечены знаком «~».

В соответствии с определением (12.8) изменилась связь (12.6) между векторами \mathbf{H} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (12.9)$$

что послужило причиной неоправданного выбора названий для этих векторов. По аналогии со сходным с (12.9) соотношением электростатики

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

вектор \mathbf{H} был назван *напряженностью*, а вектор \mathbf{B} — *индукцией магнитного поля*. Выбранное для вектора \mathbf{H} неудачное название потребовало определения *магнитной поляризуемости молекулы* как коэффициента пропорциональности между средним магнитным моментом и вектором \mathbf{H} , а не \mathbf{B} (такое определение, разумеется, возможно, поскольку указанные векторы пропорциональны друг другу):

$$\langle \mu \rangle \equiv \alpha_H \mathbf{H}.$$

По той же причине *магнитной восприимчивостью вещества* называют коэффициент пропорциональности между намагниченностью и ошибочно называемым напряженностью вектором \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} \equiv \chi_H \mathbf{H}. \quad (12.10)$$

Между введенными таким образом поляризумостью и магнитной проницаемостью существует связь, полностью сходная (даже с учетом знака!) с аналогичным соотношением в электростатике:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_H.$$

В более общем случае анизотропных веществ, как и в случае электрических полей, связь между напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией является тензорной.

Окончательная система уравнений магнитостатики в веществе в дифференциальной форме имеет вид

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{H}] &= 4\pi \frac{\mathbf{j}_0}{c}, \\ \mathbf{H} &= \hat{\mu} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Уравнения для магнитостатического поля в веществе (12.11), как и их аналоги для вакуума, имеют определенное сходство с аналогами из электростатики, но не тождественны им.

Интегральный аналог входящих в систему (12.11) уравнений очевидно представляет собой теоремы о потоке и циркуляции векторных полей \mathbf{B} и \mathbf{H} :

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0, \quad (12.12)$$

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c}, \quad (12.13)$$

где I_0 — суммарный свободный ток, пронизывающий контур интегрирования Γ_1 .

Интегральный аналог соотношения (12.5) связывает циркуляцию намагниченности вещества с полным молекулярным током, пронизывающим контур, по которому вычисляется циркуляция:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{M}, d\mathbf{l}) = \frac{I'}{c}. \quad (12.14)$$

Строгий вывод интегральных соотношений (12.12)–(12.14) из их дифференциальных аналогов, как и раньше, основан на использовании теорем векторного анализа (*теоремы Гаусса—Остроградского и Стокса*).

Рассмотренные две возможные логики построения уравнений для магнитного поля в веществе и соответствующие системы определений могут быть проиллюстрированы с помощью таблицы, приведенной в конце лекции.

Пример. Провод с током над плоской поверхностью полубесконечного магнетика

Рассчитать конфигурацию магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводом с током I , расположенным на высоте h над плоской границей полупространства, заполненного однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ .

Решение. Аналогично тому, как это делалось в электростатике диэлектриков, можно показать, что в случае однородного магнетика, в объеме которого отсутствуют свободные токи ($\mathbf{j}_0 = 0$), макроскопическая плотность молекулярных токов индуцируется только на поверхности:

$$\frac{\mathbf{j}'}{c} = [\nabla, \mathbf{M}] = \left[\nabla, \frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{4\pi} \right] = \left[\nabla, \frac{1 - \tilde{\mu}}{4\pi} \mathbf{B} \right] = (1 - \tilde{\mu}) \frac{\mathbf{j}_0}{c} + \frac{[\nabla(1 - \tilde{\mu}), \mathbf{B}]}{4\pi} = 0.$$

В случае отсутствия протекающих через объем вещества свободных токов макроскопическая плотность молекулярных токов оказывается отличной от нуля только в тех точках, где градиент магнитной проницаемости вещества отличен от нуля, т. е. на поверхности магнетика.

Для нахождения поверхностного распределения молекулярных токов можно использовать *метод изображений*, аналогичный развитому для задач электростатики диэлектриков. Критерием правильности выбора величины силы тока-изображения и его положения является выполнение граничных условий для векторов **B** и **H** в каждой точке поверхности магнетика:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = 4\pi \frac{i'}{c}, \quad (12.15)$$

которые могут быть легко найдены из теорем о потоке (12.12) и циркуляции (12.13). Получите соотношения (12.15) самостоятельно!

Представляется полезным продемонстрировать другой способ решения сформулированной задачи, основанный на связи между намагниченностью и суммарным магнитным полем в веществе. С этой целью удобно рассмотреть точку на границе магнетика, удаленную на расстояние x от проекции провода с током на поверхность магнетиков (рис. 12.2,*a*). Вектор намагниченности (и его тангенциальная составляющая) в этой точке определяется суммарным магнитным полем от свободного тока I_0 и плотностью токов, индуцированных на плоской поверхности магнетика:

$$M_\tau = \tilde{\chi}_B (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}')_\tau = \tilde{\chi}_B \left(\frac{2I_0 x}{c(x^2 + h^2)} + (B')_\tau \right). \quad (12.16)$$

Входящие в соотношение (12.16) тангенциальные составляющие векторных полей **M** и **B'**, создаваемых индуцированными на поверхности магнетика молекулярными токами, легко выражаются через поверхностную плотность этих токов:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{M}, d\mathbf{l}) = \frac{I'}{c} \Rightarrow M_\tau = \frac{i'}{c}, \quad (12.17)$$

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I'}{c} \Rightarrow B'_\tau = 2\pi \frac{i'}{c}. \quad (12.18)$$

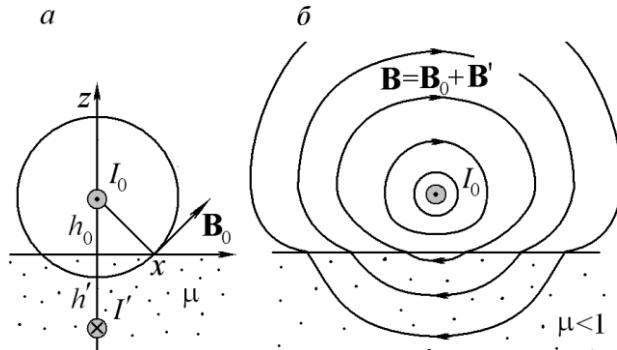


Рис. 12.2. Магнитное поле, создаваемое бесконечным проводом с током, расположенным над плоской поверхностью полупространства, заполненного диамагнетиком:

a — к решению задачи о проводе с током над границей магнетика методом изображений;

б — результат компьютерного моделирования рассматриваемой системы в случае диамагнитного вещества ($0 < \mu < 1$).

После подстановки результатов (12.17) и (12.18) в уравнение (12.16) получаем уравнение для поверхностной плотности индуцированных токов, решение которого

$$\frac{i'}{c} = \frac{\tilde{\chi}_B}{1 - 2\pi\tilde{\chi}_B} \frac{2I_0 x}{x^2 + h^2} = \frac{I_0}{\pi c} \frac{1 - \tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} \frac{x}{x^2 + h^2} = \frac{I_0}{\pi c} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{x}{x^2 + h^2}$$

в предельном случае сверхпроводника ($\mu = 0$) дает вполне ожидаемое решение в виде распределения, соответствующего току-изображению величиной I_0 , протекающему внутри вещества, на расстоянии h от поверхности

$$\frac{i'}{c} = \frac{I_0}{\pi c} \frac{x}{x^2 + h^2}.$$

В случае полубесконечного магнетика с плоской границей и произвольным значением магнитной проницаемости суммарное магнитное поле над ним является суперпозицией поля от свободного тока и симметрично расположенного тока-изображения

$$I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I_0.$$

Магнитное же поле внутри магнетика определяется протекающим над ним на высоте h эффективным током, величина которого является алгебраической суммой свободного тока и тока-изображения:

$$I'' = I_0 + I' = \frac{2\mu}{\mu+2} I_0.$$

На рис. 12.2,б приведен примерный вид магнитного поля рассмотренной системы для случая $\mu = 1/2$.

В зависимости от величины магнитной проницаемости различают следующие основные типы магнетиков: $\mu = 0$ — сверхпроводники, $0 < \mu < 1$ — диамагнетики, $\mu > 1$ — парамагнетики, $\mu \gg 1$ — ферромагнетики. Для магнетиков с $\mu < 1$ магнитное поле «выталкивается» из объема вещества, в случае $\mu > 1$ — затягивается в него.

12.4. Связь задач магнитостатики и электростатики при отсутствии свободных источников

Существует класс задач, при решении которых принятая сегодня система определения магнитостатических величин не только оправданна, но и весьма удобна с практической точки зрения. В случае отсутствия свободных источников электрического и магнитного полей (свободных зарядов и токов) уравнения магнитостатики (12.11) – (12.13) могут быть получены из электростатических простой заменой векторных полей по правилу

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \hat{\epsilon} \rightarrow \hat{\mu}. \quad (12.19)$$

В справедливости утверждения (12.19) легко убедиться, непосредственно сравнив соответствующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_0 = 0 \Rightarrow (\nabla, \mathbf{D}) = 0, [\nabla, \mathbf{E}] = 0, \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}, \\ \mathbf{j}_0 = 0 \Rightarrow (\nabla, \mathbf{B}) = 0, [\nabla, \mathbf{H}] = 0, \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mu\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Это означает, что в отсутствие свободных токов решение магнитостатической задачи может быть получено из решения соответствующей задачи электростатики просто в результате указанных переопределений.

Следует помнить, что решение задач «методом переопределений» для содержащих свободные источники (заряды и токи) систем не может быть обосновано и обычно приводит к ошибочным результатам.

12.5. Элементы теории ферромагнетизма

Ферромагнетики в отличие от веществ с парамагнитными свойствами обладают очень большой магнитной проницаемостью ($\mu \approx 1000$), нелинейным характером зависимости намагниченности от поля \mathbf{B} (или \mathbf{H}) и явлением *гистерезиса*, т. е. сохранением остаточной намагниченности в образце после выключения намагничивающих свободных токов. Перечисленные свойства ферромагнетиков на качественном уровне объясняются наличием у них *доменной структуры* (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1935 г.) — макроскопических областей, в которых суммарные магнитные моменты атомов сонаправлены (рис. 12.3,*a*).

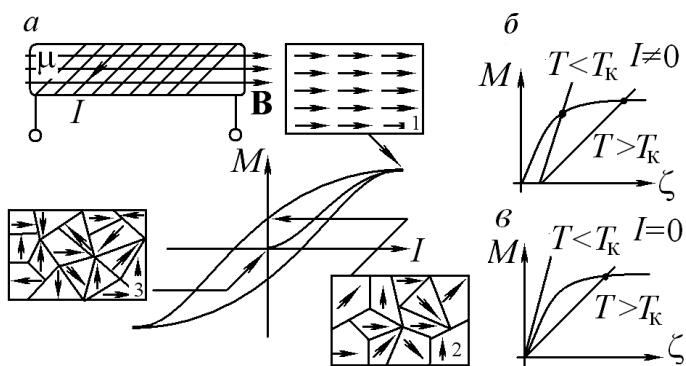


Рис. 12.3. Ферромагнетик в однородном магнитном поле:

- a* — кривая зависимости намагниченности сердечника от силы тока в цепи соленоида, имеющая характерный вид петли гистерезиса, и примерный вид доменной структуры сердечника в различных точках этой кривой (*1* — размагниченный образец; *2* — насыщение намагниченности; *3* — остаточная намагниченность);
- б* — графическое решение уравнения (2.17) для определения намагниченности сердечника в случае протекания по катушке электрического тока (отличная от нуля намагниченность существует при любых температурах);
- в* — графическое решение уравнения (2.17) для определения намагниченности сердечника после выключения тока в катушке (отличная от нуля остаточная намагниченность сохраняется лишь в случае температур меньше T_K).

Качественная картина поведения ферромагнетика во внешнем магнитном поле в общих чертах состоит в следующем. При помещении ненамагниченного образца во внешнее магнитное поле те домены, магнитные моменты которых составляют с ним малые углы, начинают возрастать. Это связано с тем, что в соответствии с формулой (11.10) потенциальная энергия атома понижается при уменьшении угла между его дипольным моментом и полем. В результате находящиеся на границе доменов атомы имеют два возможных преимущественных направления ориентации, задаваемых полями в доменах. Внешнее магнитное поле «способствует выбору пограничным атомом» направления ориентации того домена, магнитный момент которого составляется с данным полем меньший угол. В результате размеры указанного домена увеличиваются. Это приводит к существенному возрастанию магнитного поля в сердечнике. После того как все магнитные моменты окажутся выстроеными по полю, дальнейшее увеличение тока в катушке перестает приводить к значительному возрастанию намагниченности (явление *насыщения намагниченности*). После выключения намагничивающего тока в катушке преимущественная ориентация доменов сохраняется, что приводит к сохранению остаточной намагниченности образца (явление *гистерезиса*).

Очевидно, что рассмотренная качественная картина не может считаться удовлетворительной без указания механизма, обеспечивающего выстраивание магнитных моментов атомов внутри домена. Весьма привлекательной выглядит идея объяснить это выстраивание магнитным взаимодействием диполей, подобно тому как это делалось в простейшей электростатической теории сегнетоэлектриков. Используя правило соответствия для соотношений электростатики и магнитостатики в случае отсутствия свободных источников поля (12.19) и выражение для электростатического поля внутри сферической полости однородно поляризованного вещества (5.20), легко получить выражение для микроскопического магнитного поля, ориентирующего отдельный атом:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{B}_m = \mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{M}.$$

Поскольку на сравнимых с размером молекулы расстояниях вещество должно рассматриваться как совокупность отдельных молекул в пустоте, при вычислении микроскопического поля \mathbf{B}_m учитывалось,

что это поле существует в окружающем молекулу вакууме и, следовательно, совпадает с полем \mathbf{H}_m .

Подстановка последнего соотношения в записанную по аналогии с полученной для щелочных атомов формулу (11.12) для среднего магнитного момента

$$M = n\langle \mu_z \rangle = n(\mu_0 g) \operatorname{th} \left(\frac{g\mu_0 B_m}{kT} \right) = n(\mu_0 g) \operatorname{th} \left(\frac{g\mu_0}{kT} \left(H + \frac{4\pi}{3} M \right) \right)$$

(множитель Ланде g введен дополнительно для обеспечения большей общности результата) приводит к трансцендентному уравнению для намагниченности вещества:

$$\xi \equiv \frac{g\mu_0}{kT} \left(H + \frac{4}{3}\pi M \right) \Rightarrow M = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{kT}{g\mu_0} \xi - H \right) = ng\mu_0 \operatorname{th} \xi .$$

Входящая в уравнение величина вектора \mathbf{H} может быть в принципе вычислена, если известны распределение вызывающих первичное магнитное поле свободных токов и геометрия установки. Например, в случае соленоида с ферромагнитным сердечником это значение легко определить по теореме о циркуляции:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi \frac{I_0}{c} \Rightarrow H = 4\pi \frac{I_0}{c} \frac{N}{l} .$$

Анализ решения окончательно полученного трансцендентного уравнения

$$\frac{3kT}{4\pi g\mu_0} \xi - \frac{3N}{cl} I = ng\mu_0 \operatorname{th} \xi$$

удобно произвести графически. Решению уравнения соответствует точка пересечения графиков функций, описывающих его правую и левую части. Как видно из рис. 12.3,*b*, в случае присутствия намагничающих токов некоторая намагниченность образца возможна при любых температурах. При отсутствии же токов в катушке ненулевая намагниченность возникает только при достаточно низких температурах, при которых графики имеют общую точку вне начала координат (рис. 12.3,*a*). Предельная температура, при которой еще возможно та-

кое пересечение графиков, называется *точкой Кюри*. При более высоких температурах спонтанная намагниченность оказывается невозможной из-за интенсивного теплового движения. В этих условиях ферромагнетик проявляет обычные парамагнитные свойства.

Рассмотренная простейшая теория ферромагнетизма дает правильное качественное описание зависимости магнитных свойств ферромагнетиков от температуры. Количественные же результаты оказываются совершенно неудовлетворительными. Теоретическое значение температуры Кюри составляет всего несколько кельвинов, в то время как ферромагнитные свойства вещества наблюдаются даже при комнатных температурах. Такое колossalное несоответствие между теорией и экспериментом объясняется, по-видимому, тем, что взаимная ориентация атомов в ферромагнетиках обусловлена не магнитостатическими, а иными, более сильными взаимодействиями. В настоящее время принято считать, что наиболее подходящими на их роль претендентами являются специфические квантовомеханические взаимодействия, связанные с принципом Паули. Следует отметить, что законченной количественной квантовомеханической теории ферромагнетизма до сих пор не существует.

Задачи для самостоятельного решения

- 12.1. Соленоид длиной l , содержащий N витков с током I , помещен в обладающий парамагнитными свойствами газ, атомы которого обладают полным моментом импульса, определяемым квантовым числом J . Рассчитать магнитное поле внутри соленоида. Множитель Ланде g считать известным.

Указание. z -проекция магнитного момента описанных в условии атомов может принимать дискретный набор значений $\mu_0 g J_z$, где J_z пробегает набор значений от $-J$ до $+J$ через единицу.

- 12.2. Вывести граничные условия для векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} на тонкой границе двух магнетиков.
- 12.3. Используя граничные условия, решить задачу о проводе с током, расположенным над плоской границей полубесконечного магнетика, методом изображений. Начертить примерный ход линий векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} в случаях $\mu = 0$, $0 < \mu < 1$, $\mu > 1$ и $\mu \gg 1$.
- 12.4. Решить задачу о расчете электрического поля, создаваемого равномерно заряженным проводом, расположенным параллельно границе однородного диэлектрика с заданными свойствами, ме-

тодом, аналогичным использованному при расчете магнитного поля в примере 12.3.

Лекция 13



Не учитывая квантовомеханических эффектов описание движения заряженных частиц в заданных электромагнитных полях осуществляется на языке систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Исчерпывающий математический алгоритм решения таких систем существует лишь в случае, когда входящие в них уравнения являются линейными и имеют постоянные коэффициенты. Этому соответствует нерелятивистское движение частиц в пространственно однородных электрических и постоянных во времени однородных магнитных полях.

13.1. Уравнение движения

В случаях когда квантовомеханические эффекты несущественны, описание движения заряженных частиц в электромагнитных полях может строиться на основе второго закона Ньютона в импульсной форме, применимого не только в классическом приближении, но и в релятивистском случае:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \mathbf{F}_\Sigma . \quad (13.1)$$

В качестве сил, действующих на частицу, следует рассматривать электрические, магнитные и диссипативные силы (\mathbf{f}), вводимые для описания потерь механической энергии движущимся зарядом:

$$\mathbf{F}_\Sigma = q\mathbf{E} + q\left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right] + \mathbf{f}.$$

Последние обычно принимаются пропорциональными скорости движения частиц (как и в случае медленного движения тел в вязкой жидкости). В задачах движения заряженных частиц в электромагнит-

ных полях выбор линейной зависимости от скорости величины диссипативной скорости силы обусловлен двумя причинами. Первая состоит в том, что при решении дифференциальных уравнений наличие в них линейных слагаемых всегда предпочтительно. Вторая причина имеет более глубокий физический смысл: потери механической энергии частицами, движущимися с ускорением, обусловлены излучением ими электромагнитных волн. Приближенное выражение для соответствующей силы радиационного трения может быть получено в рамках последовательной релятивистской теории и оказывается пропорциональным производной по времени от ускорения:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2q}{3mc^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}.$$

В часто встречающихся на практике случаях гармонических колебаний и при движении по окружности (последнее сводится к двум взаимно перпендикулярным гармоническим колебаниям) вторая производная от скорости оказывается пропорциональной самой скорости, что в некоторой степени и оправдывает выбор линейной зависимости диссипативной силы от скорости:

$$r(t) \sim \cos(\omega t) \Rightarrow F_{\text{rad}} \sim -\omega^2 \sin(\omega t) \equiv -\eta \frac{dr}{dt}.$$

Следует учитывать, что эффект радиационного трения имеет релятивистскую природу, и попытки его классического толкования могут приводить к противоречиям. Например, встает проблема выбора второго тела, взаимодействие с которым приводит к появлению сил радиационного трения. Другим примером возникающих трудностей является получающийся при подстановке в классическое уравнение движения одной только силы радиационного трения явно абсурдный результат, соответствующий саморазгону заряженной частицы в пустом пространстве. Последний означает, что учет этой силы оправдан только в тех случаях, когда она проявляется на фоне других, более эффективных сил.

В приближении малых скоростей уравнение движения заряда в постоянном магнитном и пространственно однородном электрическом полях при наличии сил вязкого трения с позиций математики представляет собой систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно декартовых компонент век-

тора скорости. Поскольку подобные системы уравнений весьма часто встречаются в физике, представляется целесообразным на частных примерах движения частиц в электромагнитных полях познакомиться с общими методами их решения. При решении уравнения движения полезно иметь в виду *теорему о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения* порядка N , для которого поставлено N начальных условий.

Пример. Движение релятивистской заряженной частицы в электростатическом поле

Найти зависимость от времени скорости релятивистской частицы, влетающей в однородное электрическое поле перпендикулярно его силовым линиям.

Решение. Сохраняя в выражении для \mathbf{F}_Σ уравнения движения (13.1) только одно слагаемое, отвечающее кулоновским силам, легко получить, что при движении в однородном электростатическом поле импульс частицы является линейной функцией времени:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t \Rightarrow \begin{cases} p_x(t) = p_0 = \text{const}, \\ p_y(t) = qEt. \end{cases}$$

В нерелятивистском приближении ($u \ll c$) полученный результат означал бы, что ориентированная вдоль поля составляющая скорости \mathbf{u} частицы линейно возрастает во времени, а перпендикулярная составляющая остается неизменной:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \ll c \Rightarrow \begin{cases} u_x(t) = u_0 = \text{const}, \\ u_y(t) = \frac{q}{m} Et. \end{cases}$$

В случае же движения с релятивистскими скоростями зависимость $u(t)$ легко определяется в результате решения системы уравнений, связывающих декартовы составляющие скоростей и импульсов частиц:

$$p_\xi = \frac{m_0 u_\xi}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \Rightarrow u_\xi = \frac{p_\xi}{\sqrt{m_0^2 + (p/c)^2}}, \quad \xi = x, y, z.$$

При этом оказывается, что направленная вдоль электрического поля составляющая скорости асимптотически приближается к предельному значению c , а поперечная компонента скорости уменьшается до нуля:

$$u_x(t) = p_0 \left(m_0^2 + \frac{p_0^2 + (qEt)^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$u_y(t) = qEt \left(m_0^2 + \frac{p_0^2 + (qEt)^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Полученный результат (рис.13.1) не является неожиданным, поскольку скорость частицы не может превышать скорости света в пустоте.

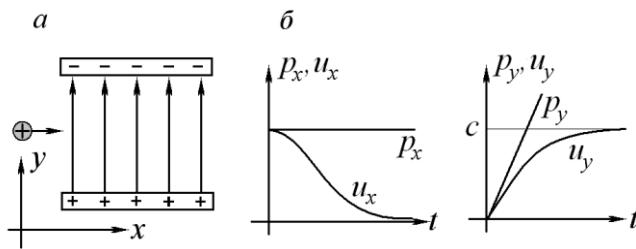


Рис. 13.1. Релятивистская заряженная частица в однородном электростатическом поле:
а — постановка задачи;
б — графики зависимости от времени вертикальных и горизонтальных составляющих импульса и скорости частицы с единичной массой покоя.

Учет эффектов радиационного трения при движении в постоянном электрическом поле в классическом приближении заведомо не приводит ни к каким дополнительным эффектам, поскольку при равноускоренном движении третья производная от координаты равна нулю и излучения не возникает. Что же касается движения с релятивистскими скоростями, то небольшие отклонения от линейности временных зависимостей скоростей частиц не приводят к существенным потерям энергии из-за излучения. В последнем можно сравнительно легко убедиться путем численного интегрирования уравнения движения с уч-

том действия сил радиационного трения. Малость радиационных потерь при ускорении зарядов, движущихся по прямолинейным траекториям, объясняет повышенный интерес к линейным ускорителям заряженных частиц: практически вся энергия, подводимая к таким ускорителям, расходуется на разгон частиц, а не на излучение.

13.2. Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле

Нерелятивистская заряженная частица, влетающая в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям, испытывает действие силы Лоренца, ориентированной перпендикулярно направлению ее скорости, а значит, и траектории. Совершаемая этой силой работа очевидно тождественно равна нулю, что в свою очередь означает неизменность кинетической энергии и, следовательно, модуля скорости частицы. Из последнего вытекают постоянство величины силы Лоренца и создаваемого ею перпендикулярно направленного к траектории ускорения. Таким образом, в описанной ситуации заряженная частица будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна линиям вектора **B**. Важной особенностью движения нерелятивистских заряженных частиц в постоянном магнитном поле является пропорциональность радиуса кривизны траектории скорости частицы, что непосредственно следует из классического уравнения движения

$$m_0 \frac{u^2}{R} = q \frac{u}{c} B \Rightarrow R = \frac{m_0 c}{qB} u, \quad T = \frac{2\pi R}{u} = 2\pi \frac{m_0 c}{qB} \neq f(u). \quad (13.2)$$

Очевидным следствием этой пропорциональности является независимость периода вращения в магнитном поле от скорости. Данное свойство широко используется в ускорителях нерелятивистских частиц — *циклотронах*.

Учет релятивистских эффектов приводит к увеличению радиуса кривизны траектории и периода вращения по сравнению с результатами классических расчетов (13.2). При этом оказывается, что соотношения (13.2) остаются работоспособными, если вместо массы покоя m_0 используется выражение

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}},$$

иногда называемое *релятивистской массой*. При проектировании современных ускорителей заряженных частиц (*синхрофазотронов*) необходим учет релятивистских эффектов, поскольку интересы современной физики элементарных частиц лежат в основном в области высоких энергий и ультрарелятивистских скоростей.

Наличие зависимости радиуса кривизны траектории движущейся в магнитном поле частицы от ее скорости и удельного заряда лежит в основе принципа действия многочисленных устройств, осуществляющих «сортировку» частиц по скоростям, энергиям, массам или зарядам.

Движение заряженных частиц, влетающих в постоянное магнитное поле под углом к его линиям, может рассматриваться как суперпозиция равномерного прямолинейного движения вдоль вектора \mathbf{B} и равномерного вращения по окружности в перпендикулярной полю плоскости. Траекторией в этом случае будет винтовая линия с постоянными шагом и радиусом кривизны (рис. 13.2). Шаг винтовой линии оказывается не зависящим от величины поперечной полю компоненты скорости частицы. Это свойство движения в магнитном поле находит применение при фокусировке пучков заряженных частиц: фокусирующее магнитное поле направляют вдоль оси пучка, частицы «навиваются» на его линии и, двигаясь по винтовым траекториям, периодически собираются в расположенных на оси пучка точках.

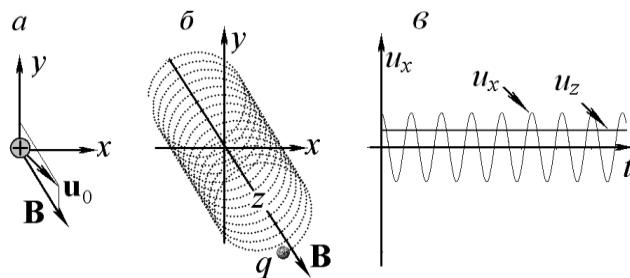


Рис. 13.2. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле:

- a* — постановка задачи;
- б* — результат численного решения уравнения движения без учета радиационных потерь.
- в* — зависимость от времени параллельной (u_z) и перпендикулярной (u_x) составляющих скорости частицы.

Обоснование перечисленных фактов можно получить, непосредственно решая систему дифференциальных уравнений для декартовых компонент скорости частицы. Наличие векторного произведения в выражении для силы Лоренца приводит к тому, что скалярные уравнения движения оказываются «сцепленными» друг с другом. Стандартным приемом, позволяющим их «расцепить», является проектирование содержащего векторное произведение равенства на *круговые* (или *циркулярные*) орты:

$$\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_{\pm 1} \equiv \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}. \quad (13.3)$$

Удобство их использования при работе с содержащими векторные произведения соотношениями обусловлено правилами перемножения циркулярных ортов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta) &= \delta_{\xi\eta}, \quad \xi, \eta = -1, 0, +1, \\ [\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_0] &= i\xi \mathbf{e}_\xi, \quad \xi = \pm 1. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Легко, например, убедиться, что проектирование содержащего векторное произведение дифференциального уравнения движения частицы в магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right]$$

на циркулярные орты приводит к системе из не зависящих друг от друга дифференциальных уравнений для проекций импульса и скорости на циркулярные орты.

Пример. Движение нерелятивистской частицы в однородном магнитном поле

Рассчитать движение заряженной частицы, влетающей с известной начальной скоростью в заданное постоянное магнитное поле. Релятивистскими эффектами и эффектами, связанными с радиационным торможением, пренебречь.

Решение. В правой части уравнения движения (13.1) в нерелятивистском приближении ($u \ll c$) сохраняется только сила Лоренца

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right]. \quad (13.5)$$

Рассматриваемое уравнение обычно записывают в более краткой форме, вводя вектор частоты прецессии заряженной частицы в магнитном поле Ω :

$$\Omega \equiv \frac{q\mathbf{B}}{m_0 c} \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dt} = [\mathbf{u}, \Omega].$$

В декартовой системе координат (рис. 13.2,*a*), введенной так, что магнитное поле направлено вдоль оси z , а вектор начальной скорости лежит в плоскости (zOy),

$$\begin{aligned} u_x(0) &= 0, \\ u_y(0) &= u_0 \cos \alpha \equiv u_{\perp}, \\ u_z(0) &= u_0 \sin \alpha \equiv u_{\parallel}, \end{aligned}$$

векторное уравнение (13.5) превращается в систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент скорости частицы, два из которых «сцеплены» друг с другом:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} - \Omega u_y &= 0, \\ \frac{du_y}{dt} + \Omega u_x &= 0, \\ \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Проектирование же уравнения движения (13.5) на круговые орты (13.3) с учетом свойств циркулярных ортов (13.4) приводит к системе независимых скалярных уравнений

$$\frac{du_{\xi}}{dt} - i\xi \Omega u_{\xi} = 0, \quad \xi = -1, 0, +1,$$

нахождение решения которой не представляет трудностей:

$$u_{\xi}(t) = C_{\xi} \exp(i\xi \Omega t), \quad \xi = -1, 0, +1.$$

Входящие в общее решение произвольные константы C_ξ определяются из начальных условий.

Обратный переход от проекций на круговые орты к проекциям на декартовы осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u_{-1} + u_{+1}}{\sqrt{2}} = \frac{C_{-1}e^{-i\Omega t} + C_{+1}e^{+i\Omega t}}{\sqrt{2}}, \\ u_y &= \frac{-u_{-1} + u_{+1}}{\sqrt{2}i} = \frac{-C_{-1}e^{-i\Omega t} + C_{+1}e^{+i\Omega t}}{\sqrt{2}i}, \\ u_z &= u_0 = C_0. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Учет начальных условий приводит к алгебраической системе уравнений для произвольных констант C , решение которой

$$C_{+1} = \frac{u_\perp}{2i}, \quad C_{-1} = -C_{+1} = -\frac{u_\perp}{2i}$$

при подстановке в систему (13.6) позволяет получить окончательный результат для компонент скоростей:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= u_\perp \sin(\Omega t), \\ u_y(t) &= u_\perp \cos(\Omega t), \\ u_z(t) &= u_0. \end{aligned}$$

Зависимость координат от времени получается простым интегрированием найденных компонент скорости. На рис.13.2,б приведены результаты численного моделирования на компьютере рассмотренной в задаче физической ситуации.

Рассмотренный вариант решения систем линейных дифференциальных уравнений, обычно называемый *методом проектированием на циркулярные орты*, безусловно, удобен в тех случаях, когда система уравнений возникает из векторных равенств, содержащих векторное произведение.

13.3. Учет потерь энергии при движении частиц в магнитном поле

Простейший учет диссипации энергии при движении зарядов в магнитном поле может быть осуществлен путем добавления в уравнение

ние движения линейной по скорости силы вязкого трения. В нерелятивистском приближении уравнение движения приобретает вид

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] - \eta \mathbf{u}. \quad (13.7)$$

Введение в уравнение движения (13.7) линейного по скорости слагаемого, описывающего потери энергии в результате действия диссипативных сил, наиболее оправданно в случае движения макроскопических тел в вязкой среде. При классическом описании движения заряженных микрочастиц во внешних полях линейное по скорости слагаемое обычно вводится для приближенного учета потерь энергии, обусловленных излучением электромагнитных волн ускоренно движущимся электрическим зарядом (радиационное трение).

В случае учета сил вязкого трения в уравнении движения частицы в магнитном поле все компоненты ее скорости (соответствующие как поступательному, так и вращательному движению) уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону (рис. 13.3, а).

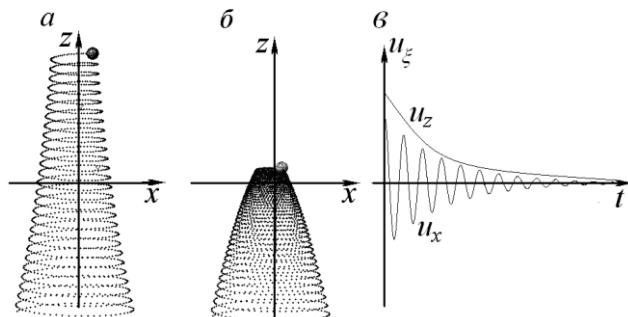


Рис. 13.3. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле при наличии диссипативных сил (результаты численного моделирования):

- а — результаты моделирования движения заряженной частицы в магнитном поле с учетом радиационных потерь;
- б — результаты моделирования движения заряженной частицы в магнитном поле при наличии сил вязкого трения;
- в — результаты аналитического решения задачи о движении заряженной частицы в однородном магнитном поле при наличии сил вязкого трения.

В случае же движения под действием сил радиационного трения поступательное движение частицы в направлении линий магнитного поля остается равномерным (рис. 13.3,*б*): торможение поступательного движения частицы в вакууме невозможно, поскольку означало бы существование выделенной инерциальной системы отсчета.

Аналитическое решение уравнения движения (13.7) может быть получено проектированием на циркулярные орты, однако представляется уместным продемонстрировать идею более универсального *метода подстановки*. Последний применим для решения произвольной однородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

В более кратком и одновременно более общем символическом виде однородная система дифференциальных уравнений (13.7) может быть записана как результат действия линейного дифференциального оператора на вектор-столбец (не обязательно состоящий из трех пространственных компонент) искомых функций:

$$\hat{\mathfrak{R}} \circ \vec{X}(t) = 0. \quad (13.8)$$

Здесь и далее для обозначения упорядоченных наборов величин, не являющихся компонентами используемых в классической физике векторов в трехмерном пространстве, вводятся прописные буквы со стрелками; буквами «со шляпками», как и ранее, обозначаются матрицы. В отличие от ранее использованных матриц, элементами которых были числа, рассматриваемая матрица линейного дифференциального оператора $\hat{\mathfrak{R}}$ помимо чисел содержит операторы дифференцирования.

Решение уравнения (13.7), записанного в формализованном виде (13.8), удобно искать в виде произведения постоянного вектора на скалярную функцию, зависящую от времени по экспоненциальному закону:

$$\vec{X}_\lambda(t) = \vec{C}_\lambda \exp(\lambda t). \quad (13.9)$$

Подстановка пробного решения (13.9) в однородную систему линейных дифференциальных уравнений (13.8) превращает ее в однородную систему алгебраических уравнений для компонент постоянного вектора:

$$\hat{\mathfrak{R}}'(\lambda) \circ \vec{C}_\lambda = 0, \quad (13.10)$$

где матрица $\hat{\mathfrak{R}}'$ получается из матрицы $\hat{\mathfrak{R}}$ в результате замены операторов вычисления производных порядка n на λ^n .

Для того чтобы однородная алгебраическая система имела решение, ее определитель должен равняться нулю. Последнее условие дает алгебраическое уравнение для показателя степени λ , которое принято называть *характеристическим*. В случае существования нескольких корней характеристического уравнения *общее решение* системы дифференциальных уравнений (13.8) представляет собой линейную комбинацию решений (13.9):

$$\vec{X}(t) = \sum_{\zeta} \vec{C}_{\zeta} \exp(\lambda_{\zeta} t). \quad (13.11)$$

Составляющие постоянных векторов линейной комбинации (13.11) определяются из начальных условий и оставшихся линейно независимыми после приравнивания к нулю определителя алгебраической системы уравнений (13.10). При этом оказывается, что для однозначного решения задачи число начальных условий, задаваемых векторными равенствами вида

$$\left. \frac{d^p \vec{X}}{dt^p} \right|_{t=t_0} = \vec{\chi}_p, \quad p = 0, 1, \dots, n-1,$$

должно равняться порядку дифференциального уравнения.

Пример. Движение заряженной частицы в постоянном магнитном поле при наличии вязкого трения

Найти зависимость от времени скорости нерелятивистской заряженной частицы, влетающей в заданное однородное магнитное поле с заданной начальной скоростью и испытывающей действие силы вязкого трения.

Решение. Оси декартовой системы координат удобно направить так, чтобы вектор \mathbf{B} имел только z -составляющую, а вектор начальной скорости частицы лежал в плоскости (zOy). Уравнение движения частицы (13.7) после проектирования на оси декартовой системы координат с учетом стандартных обозначений

$$\Omega \equiv \frac{qB}{m_0 c}, \quad \beta \equiv \frac{k}{m}$$

превращается в систему из трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} - \Omega u_y + \beta u_x &= 0, \\ \frac{du_y}{dt} + \Omega u_x + \beta u_y &= 0, \\ \frac{du_z}{dt} + \beta u_z &= 0.\end{aligned}\tag{13.12}$$

Определенные соотношениями (13.8) и (13.10) операторы $\hat{\mathfrak{R}}$ и $\hat{\mathfrak{R}}'$, действующие на векторы $\mathbf{u}(t)$ и \mathbf{C} , представимы матрицами вида

$$\hat{\mathfrak{R}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + \beta & -\Omega & 0 \\ \Omega & \frac{d}{dt} + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} + \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathfrak{R}}'(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \beta & -\Omega & 0 \\ \Omega & \lambda + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \beta \end{pmatrix}.$$

Соответствующее задаче (13.12) характеристическое уравнение оказывается кубическим, а его корни — комплексными и невырожденными:

$$0 = \det \hat{\mathfrak{R}} = (\lambda + \beta)[(\lambda + \beta)^2 + \Omega^2] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -\beta, \\ \lambda_{\pm} = -\beta \pm i\Omega. \end{cases}\tag{13.13}$$

Общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений (13.12) является суперпозицией трех линейно независимых решений и содержит девять подлежащих определению констант — компонент трех постоянных векторов \mathbf{C}_ζ , соответствующих трем корням характеристического уравнения (13.13):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\zeta} C_{\zeta} \exp(\lambda_{\zeta} t) = \sum_{\zeta} \exp(-\beta t + i\zeta\Omega t).$$

Для определения девяти констант, составляющих векторы \mathbf{C}_ζ , должны использоваться три уравнения, выражающие начальные усло-

вия, и еще шесть линейно независимых уравнений, получающихся при подстановке найденных корней характеристического уравнения (13.13) в однородную алгебраическую систему уравнений (13.10):

$$\begin{aligned} u_x(0) = 0 &\Rightarrow C_{-1,x} + C_{0,x} + C_{+1,x} = 0, \\ u_y(0) = u_\perp &\Rightarrow C_{-1,y} + C_{0,y} + C_{+1,y} = u_\perp, \\ u_z(0) = u_\parallel &\Rightarrow C_{-1,z} + C_{0,z} + C_{+1,z} = u_\parallel, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(\lambda) \circ \mathbf{C}_0 = 0 &\Rightarrow -\Omega C_{0,y} = 0, \\ \lambda = -\beta &\Rightarrow \Omega C_{0,x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(\lambda) \circ \mathbf{C}_{+1} = 0 &\Rightarrow i\Omega C_{+1,z} = 0, \\ \lambda = -\beta + i\Omega &\Rightarrow i\Omega C_{+1,x} - \Omega C_{+1,y} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(\lambda) \circ \mathbf{C}_{-1} = 0 &\Rightarrow -i\Omega C_{-1,z} = 0, \\ \lambda = -\beta - i\Omega &\Rightarrow i\Omega C_{-1,x} - \Omega C_{-1,y} = 0. \end{aligned}$$

Окончательное решение поставленной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_x(t) &= u_\perp e^{-\beta t} \sin(\Omega t), \\ u_y(t) &= u_\perp e^{-\beta t} \cos(\Omega t), \\ u_z(t) &= u_\parallel e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Сравнение найденного решения с результатами (13.6), полученными для случая отсутствия диссипативных сил, показывает, что при движении заряда в однородном магнитном поле добавление сил вязкого трения приводит только к появлению одинакового для всех составляющих скорости экспоненциальному затуханию во времени.

Полученный при анализе движения под действием сил вязкого трения результат иногда используется для аппроксимации эффекта торможения при излучении. Однако даже на качественном уровне рассмотрения он обладает существенными недостатками. Как видно из графиков (рис. 13.3,б), все составляющие скорости частицы экспоненциально уменьшаются до нуля, т. е. частица останавливается.

При наличии вязкой среды факт полной остановки частицы выглядит вполне разумным, поскольку существует выделенная система от-

счета (связанная с вязкой средой), относительно которой конечная скорость и принимает нулевое значение. При движении же в пустом пространстве невозможно указать какую-либо выделенную систему отсчета, относительно которой частица останавливается. Таким образом, из относительного характера равномерного движения следует, что радиационное трение способно приводить к потерям энергии только тех форм механического движения, которые происходят с ускорением, носящим абсолютный характер. На рис. 13.3,*a,b* приведены результаты компьютерного моделирования движения заряженной частицы под действием сил радиационного и вязкого трения. Для большей наглядности сила радиационного трения завышена на пять порядков. Коэффициент вязкого трения подобран так, чтобы затухание вращательного движения было максимально близким к торможению при излучении.

13.4. Движение заряженных частиц в постоянных электрических и магнитных полях

Добавление к нерелятивистскому уравнению движения заряда в магнитном поле (13.7) еще одного слагаемого, описывающего действие электрической силы, превращает рассмотренную систему линейных дифференциальных уравнений в неоднородную:

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{q} \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] - \eta \mathbf{u} + q\mathbf{E}(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dt} - [\mathbf{u}, \mathbf{\Omega}] + \beta \mathbf{u} = \mathbf{K}(t), \quad (13.14)$$

где для краткости введено обозначение $\mathbf{K} = q\mathbf{E}(t)/m_0$. Стандартный метод решения подобных систем состоит в следующем.

Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\hat{\mathfrak{R}} \circ \vec{X}(t) = \vec{K}(t) \quad (13.15)$$

может быть построено как сумма общего (т. е. зависящего от определяемых из начальных условий констант) решения соответствующей однородной системы (O) и любого частного решения неоднородной (H). Действительно, в силу линейности определяющего дифференциальное уравнение оператора указанная сумма превращает неоднородную систему (13.15) в набор тождеств, число же произвольных кон-

стант, входящих в общее решение однородной системы, оказывается ровно таким, чтобы удовлетворить всем начальным условиям:

$$\begin{aligned}\vec{X}_O(t) : \hat{\mathfrak{R}} \circ \vec{X}_O(t) &= 0 \\ \vec{X}_H(t) : \hat{\mathfrak{R}} \circ \vec{X}_H(t) &= \vec{K}(t)\end{aligned}\Rightarrow \hat{\mathfrak{R}} \circ (\vec{X}_O + \vec{X}_H) = \hat{\mathfrak{R}} \circ \vec{X}_H(t) = \vec{K}(t).$$

Поскольку методы построения общего решения однородной системы были проанализированы в предыдущих разделах лекции, оказывается необходимым лишь рассмотрение способов нахождения частных решений системы (13.15). В случае не зависящей от времени правой части системы в качестве частного решения неоднородной системы удобно использовать, например, постоянное во времени решение:

$$\vec{X}_H = (\hat{\mathfrak{R}}'(\lambda = 0))^{-1} \circ \vec{K}.$$

В конкретном случае движения частицы в постоянных и однородных электрическом и магнитном полях при наличии вязкого трения решение однородного уравнения экспоненциально затухает во времени. Таким образом, на достаточно больших временах (в *установившемся режиме*) движение частицы будет представлять собой дрейф с постоянной скоростью, не зависящей от начальных условий.

Движение системы на начальном интервале времени $t \sim 1/\beta$ описывается суперпозицией затухающего во времени общего и частного решений и соответствует *переходному процессу*. Характер переходного процесса определяется значениями констант, входящих в решение однородного уравнения, т. е. начальными условиями.

Определенный интерес представляет движение во взаимно перпендикулярных постоянных электрическом и магнитном полях при отсутствии трения. Такое движение описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - [\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega}] = \mathbf{K}, \quad (13.16)$$

решение которого очевидно может быть найдено с помощью рассмотренных общих методов. Решение соответствующего (13.16) однородного уравнения было получено ранее:

$$\mathbf{u}(t) = \sum \mathbf{C}_\xi \exp(i\xi\Omega t)$$

§

и представляет собой суперпозицию вращательного движения в перпендикулярной вектору \mathbf{B} плоскости и равномерного движения вдоль линий магнитного поля. В качестве простейшего частного решения неоднородного уравнения подходит равномерное движение с постоянной («дрейфовой») скоростью

$$\mathbf{w} \equiv \frac{[\mathbf{K}, \Omega]}{\Omega^2}$$

в направлении, перпендикулярном полям \mathbf{E} и \mathbf{B} . Подстановка \mathbf{w} в уравнение движения (13.16) обращает его в тождество:

$$\frac{d^2 \mathbf{w}}{dt^2} - [\mathbf{w}, \Omega] = - \left[\frac{[\mathbf{K}, \Omega]}{\Omega^2}, \Omega \right] = \frac{1}{\Omega^2} [\Omega, [\mathbf{K}, \Omega]] = \mathbf{K}.$$

Таким образом, движение нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных полях представляет собой суперпозицию вращательного движения вокруг линий магнитного поля и дрейфа с постоянной во времени скоростью.

Существует иной, более изящный метод рассмотрения движения зарядов в скрещенных полях, состоящий в переходе к системе отсчета, движущейся с дрейфовой скоростью. В этой системе отсчета дифференциальное уравнение движения (13.16) превращается в ранее исследованное уравнение для вращения заряда в постоянном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' &\equiv \mathbf{u} - \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} c \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}'}{dt} &= q\mathbf{E} + q \left[\frac{\mathbf{u}'}{c} + \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}, \mathbf{B} \right] = q \left[\frac{\mathbf{u}'}{c}, \mathbf{B} \right]. \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени частица находилась в состоянии покоя, ее траекторией является *циклоид* — кривая, описываемая точкой, расположенной на ободе колеса, катящегося по плоской поверхности без проскальзывания в перпендикулярном магнитному полю направлении. При наличии начальной скорости, направленной перпендикулярно магнитному полю, циклоида превращается в кривую более общего вида — *трехоиду*, которая соответствует траектории движения точки на ободе колеса, катящегося с проскальзыванием.

Направленная же по магнитному полю составляющая начальной скорости сохраняется во времени (электрическая и магнитная силы в этом направлении не действуют). Если же начальная скорость частицы совпадает со скоростью дрейфа, ее движение оказывается равномерным и прямолинейным (в соответствии с начальными условиями вращательная составляющая результирующего движения отсутствует).

Случай произвольной взаимной ориентации постоянных полей \mathbf{E} и \mathbf{B} может быть проанализирован так же легко. Напряженность электрического поля удобно разложить на две составляющие: сонаправленную с магнитным полем и перпендикулярную ему. Движение в перпендикулярной магнитному полю плоскости при наличии двух полей (\mathbf{E}_\perp и \mathbf{B}), как отмечалось, происходит по трохоиде. В направлении же магнитного поля из-за наличия сонаправленной с ним составляющей постоянной электрической силы движение частицы оказывается равноускоренным. Таким образом, в общем случае траектория движения заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях представляет собой трохоиду, изогнутую в параболу, ветви которой располагаются симметрично относительно направления магнитного поля (рис. 13.4).

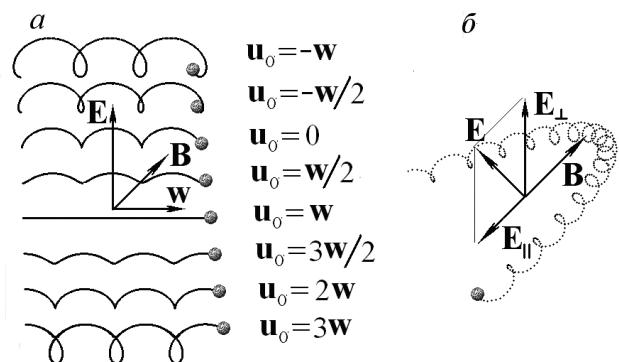


Рис. 13.4. Результаты компьютерного моделирования движения нерелятивистской заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях:
a — траектории движения заряда во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях при разных значениях начальной скорости, направленной вдоль скорости дрейфа;
б — наиболее общий вид траектории движения нерелятивистской частицы в постоянных электрическом и магнитном по-

лях, ориентированных под произвольным углом друг к другу.

Учет релятивистских эффектов приводит к существенному изменению характера движения частиц в скрещенных полях. В случае $E \ll B$ траектория частицы представляет собой циклоиду, вдоль которой частица движется с дрейфовой скоростью $w = cE/B$. По мере увеличения напряженности электрического поля средняя величина кинетической энергии частицы возрастает, что приводит к увеличению ее эффективной массы. В результате постепенно увеличивается шаг периодической в пространстве траектории. После того как величина напряженности электрического поля превысит критическое значение: $E = B$, траектория частицы претерпевает качественные изменения, чего можно было ожидать хотя бы из самых общих соображений: дрейфовая скорость не должна превосходить скорости света.

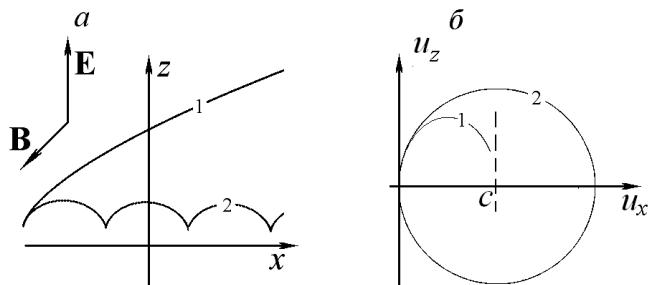


Рис. 13.5. Разгон в скрещенных полях заряженной частицы, первоначально находившейся в состоянии покоя, до релятивистских скоростей (1 — расчет с учетом релятивистских эффектов; 2 — расчет в классическом приближении):
а — траектория частицы;
б — годограф скорости (вертикальная пунктирная линия соответствует максимально возможному значению скорости частицы $u_x = c$).

На рис. 13.5 представлены результаты численных расчетов траектории заряженной частицы, первоначально находившейся в состоянии покоя, в скрещенных полях, обеспечивающих ее разгон до релятивистских скоростей. Для сравнения там же приведена траектория, рассчитанная в рамках классического приближения, заведомо неприменимого в рассматриваемой ситуации.

Пример. Монокинетизация пучка заряженных частиц

При каких значениях начальной скорости нерелятивистский электрон, влетающий в скрещенные постоянные электрическое и магнитное поля, будет продолжать двигаться равномерно и прямолинейно?

Решение. Электрон движется равномерно и прямолинейно в случае, если равнодействующая приложенных к нему сил равна нулю. Поскольку электрическая сила не зависит от скорости, последнюю следует подобрать так, чтобы зависящая от нее сила Лоренца компенсировала электрическую:

$$q\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] = 0. \quad (13.17)$$

Подстановка искомого вектора скорости в виде суммы двух составляющих (направленных соответственно по магнитному полю и перпендикулярно ему) в условие (13.17) позволяет найти поперечную магнитному полю составляющую скорости (продольная компонента может принимать произвольные значения):

$$u_{\perp} = c \frac{E}{B} = w \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{w} + u_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} + u_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Рассмотренный случай движения в скрещенных полях широко используется для получения пучков заряженных частиц, обладающих одинаковыми скоростями (так называемые *монокинетические пучки*). Ускоренные каким-либо устройством заряженные частицы пропускаются через скрещенные электрическое и магнитное поля так, чтобы начальная скорость была перпендикулярна линиям обоих полей (т. е. $u_{\parallel} = 0$). Все частицы со скоростями, отличными от удовлетворяющей найденному условию (13.17), отклонятся в сторону от перпендикулярного скрещенным полям направления и, следовательно, могут быть отсеяны с помощью диафрагмы.

13.5. Ускорители заряженных частиц

В общем случае практически произвольной (в рамках представляющего интерес для классической физики класса задач) зависимости от времени стоящей в правой части неоднородной системы дифференциальных уравнений (13.15) функции $\mathbf{K}(t)$, последнюю можно представить в виде суперпозиции функций, изменяющихся во времени по гармоническому закону (теорема Фурье):

$$\mathbf{K}(t) = \operatorname{Re} \sum d\omega \mathbf{K}_\omega \exp\{-i(\omega t + \varphi_\omega)\}. \quad (13.18)$$

В этом случае частное решение исходной линейной неоднородной системы следует искать в виде суперпозиции решений аналогичных систем, правую часть которых составляет каждое слагаемое разложения (13.18) в отдельности.

Частные решения неоднородной системы (13.14) с гармоническими функциями в правой части следует искать в виде гармонических функций с соответствующими правым частям уравнений частотами:

$$\bar{X}_H(\omega, t) = \bar{A}_\omega \operatorname{Re} \exp\{-i(\omega t + \psi_\omega)\}. \quad (13.19)$$

Амплитуды A_ω и фазы ψ_ω пробного решения (13.19) определяются путем их подстановки в исходное уравнение. В результате такой подстановки неоднородная система дифференциальных уравнений преобразуется в неоднородную алгебраическую систему, решение которой не представляет технических трудностей.

В большинстве современных ускорителей заряженных частиц используется движение зарядов в скрещенных электрическом и магнитном полях. Не совершающее работы магнитное поле служит для изменения направления движения заряженных частиц. Непосредственный разгон зарядов (т. е. увеличение из кинетической энергии) происходит благодаря электрическому полю. Поскольку направление скорости частиц при вращении в магнитном поле непрерывно изменяется, для монотонного увеличения энергии частиц необходимо изменяющееся во времени электрическое поле.

И с точки зрения простоты технического осуществления, и с точки зрения теоретического анализа движения частиц наиболее удобным оказывается электрическое поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону. Соответствующие устройства называют *циклотронными ускорителями*. В этом случае уравнение движения нерелятивистской частицы приобретает вид

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] - \eta \mathbf{u} + q \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dt} - [\mathbf{u}, \Omega] + \beta \mathbf{u} = \mathbf{K}_0 \cos(\omega t).$$

Для нахождения частного решения неоднородной системы, в правой части которой стоит вектор, изменяющийся во времени по гармоническому закону, удобно перейти к экспоненциальной форме записи. Линейность оператора выделения вещественной части комплексного числа позволяет решать систему уравнений в комплексной области

$$\frac{d\mathbf{u}_\omega}{dt} - [\mathbf{u}_\omega, \Omega] + k \mathbf{u}_\omega = \mathbf{K}_\omega \exp(-i\omega t)$$

с последующим отбрасыванием мнимой части результата. Разумеется, пробное решение следует искать в виде произведения постоянного вектора на экспоненциальную функцию, зависящую от времени также, как и правая часть уравнения:

$$\mathbf{u}_\omega(t) = \mathbf{v}_\omega \exp(-i\omega t).$$

Подстановка такого пробного решения в систему дифференциальных уравнений превращает ее в неоднородную алгебраическую систему линейных уравнений для амплитуд

$$i\omega \mathbf{v}_\omega - [\mathbf{v}_\omega, \Omega] + \beta \mathbf{v}_\omega = \mathbf{K}_\omega,$$

решение которой не представляет принципиальных трудностей.

На основании решения рассматриваемой системы могут быть получены следующие основные результаты, которые удобно проиллюстрировать на компьютерной модели (рис.13.6).

При наличии вязкого (или радиационного) трения общее решение однородной системы экспоненциально затухает во времени. В результате средняя за период обращения скорость заряда асимптотически приближается к значению, соответствующему частному решению неоднородной системы дифференциальных уравнений. В стационарном режиме средняя мощность, получаемая частицей от электрического поля, оказывается равной мощности радиационных потерь. Величина скорости при стационарном движении частицы в циклотронном ускорителе существенным образом зависит от соотношения частот электрического поля и свободного вращения заряда в постоянном магнитном поле. Эта зависимость носит четко выраженный резонансный ха-

рактер и имеет весьма острый максимум при совпадении указанных частот.

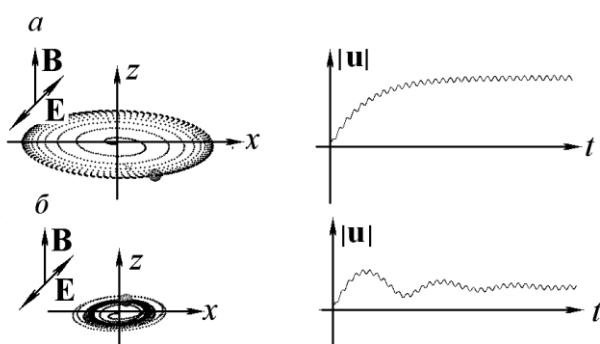


Рис. 13.6. Результаты компьютерного моделирования разгона заряженной нерелятивистской частицы во взаимно перпендикулярных постоянном магнитном и переменном электрическом полях при наличии радиационных потерь. Приведены траектории частицы и графики зависимостей от времени величины ее скорости в разных случаях:
 а — точный резонанс (совпадение частоты изменения переменного электрического поля с частотой свободного вращения частицы в магнитном поле);
 б — нарушение условия точного резонанса (переходный процесс сопровождается биениями).

Качественное поведение разгоняющейся частицы при существовании переходных процессов зависит от частоты изменения разгоняющего электрического поля. В случае резонанса решения однородной и неоднородной систем изменяются во времени с одинаковой частотой Ω , в результате чего средняя скорость частицы монотонно возрастает, стремясь к стационарному значению. При отстройке частоты электрического поля от резонансной общее решение неоднородной системы представляет собой суперпозицию затухающих колебаний, происходящих на разных частотах. В результате они периодически то усиливают, то ослабляют друг друга, что приводит к затухающим во времени *биениям*, нарушающим монотонный характер стремления средней скорости к стационарному значению.

Наличие релятивистских эффектов, обусловливающих появление зависимости периода вращения частицы в магнитном поле от ее скo-

рости, приводит к нарушению резонанса с переменным электрическим полем при достижении ускоряемыми частицами скоростей, сравнимых со скоростью света. Для компенсации этого эффекта по мере разгона частиц приходится уменьшать частоту изменения электрического поля. Кроме того, эффект увеличения эффективной релятивистской массы разгоняемых частиц в области высоких энергий приводит к существенному увеличению радиусов их круговых траекторий в магнитном поле по сравнению с результатами расчетов в рамках классической механики. Указанные эффекты делают невозможным создание мощных ускорителей без использования релятивистской механики и электродинамики. Ускорители заряженных частиц, при работе которых учитываются релятивистские эффекты, носят название *синхрофазотронов*.

Пример. Движение заряженной частицы в скрещенных магнитном и вращающемся электрическом полях

Какую начальную скорость необходимо сообщить электрону для того, чтобы в заданных постоянном магнитном и перпендикулярном к нему вращающемуся электрическом полях его траекторией была бы стационарная окружность? Найти радиус этой окружности как функцию частоты электрического поля и направления его вращения. Ограничиться нерелятивистским приближением. Радиационными потерями пренебречь.

Решение. Соответствующему условию примера движению частицы отвечает частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (13.14), правая часть которого содержит электрическое поле, равномерно вращающееся в пространстве с угловой скоростью ω :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} u_y \\ -u_x \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \pm \sin \omega t \end{pmatrix}. \quad (13.20)$$

При отсутствии потерь решение однородного уравнения, описывающее вращение с угловой скоростью Ω , не затухает с течением времени. Для обеспечения стационарной траектории движения начальная скорость частицы должна быть подобрана так, чтобы входящие в об-

щее решение однородного уравнения константы оказались равными нулю. В противном случае движение будет представлять собой суперпозицию двух вращений на частотах Ω и ω , что неизбежно приведет к возникновению биений.

Переход к комплексной форме записи стоящих в правой части системы функций приводит (13.20) к системе вида, удобного для подстановки пробного решения в экспоненциальной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} u_y \\ -u_x \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \exp(-i\omega t),$$

Указанная подстановка приводит к алгебраической системе уравнений для амплитуд вынужденных гармонических колебаний

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \exp(-i\omega t) \Rightarrow \begin{cases} -i\omega c_x - \Omega c_y = K_0, \\ \Omega c_x - i\omega c_y = \pm iK_0. \end{cases} \quad (13.21)$$

В отсутствие резонанса (частота вращения электрического поля отличается от частоты свободного вращения заряда в магнитном поле) определитель системы (13.21) отличен от нуля, и ее решение для неизвестных амплитуд составляющих скорости может отыскиваться стандартным способом.

Соответствующие составляющие скорости частицы вычисляются как вещественные части произведений найденных констант на экспоненциальный множитель и оказываются равными

$$\begin{aligned} u_x &= \operatorname{Re} c_x \exp(-i\omega t) = K_0 \frac{\omega \mp \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t, \\ u_y &= \operatorname{Re} c_y \exp(-i\omega t) = \mp K_0 \frac{\omega \mp \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Отвечающее стационарному вращению на частоте ω решение получается при начальной скорости, соответствующей найденному решению (13.22) в начальный момент времени $t = 0$:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp K_0 \frac{\omega \mp \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \end{pmatrix}.$$

В этом случае общее решение неоднородной системы уравнений не содержит вклада от изменяющегося во времени с частотой свободного вращения в магнитном поле Ω решения однородной системы.

Зависимость координат от времени получается в результате интегрирования найденных выражений для проекций скоростей

$$\mathbf{R}(t) = \frac{G}{\omega} \frac{\omega \mp \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \mp \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Найденная зависимость радиуса кривизны траектории от частоты вращения электрического поля имеет четко выраженный резонансный характер и в рассматриваемом идеальном случае движения частиц без потерь энергии неограниченно возрастает при приближении частоты вращения электрического поля к частоте свободного вращения зарядов в магнитном поле:

$$R = \frac{qE}{m\omega} \left| \frac{\omega \mp \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right|.$$

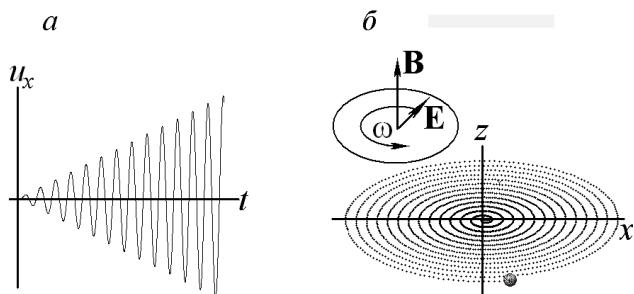


Рис. 13.7. Разгон частиц в скрещенных постоянном магнитном и вращающемся электрическом полях при условии отсутствия потерь на излучение:
 а — зависимость от времени \$x\$-проекции скорости частицы, разгоняемой вращающимся резонансным электрическим полем;
 б — траектория заряженной частицы, ускоряемой вращающимся электрическим полем, в случае резонанса.

Полученный результат неприменим в случае точного выполнения условия резонанса $\omega = \Omega$ и совпадения направлений вращения электрического поля и свободного движения заряда под действием магнитных сил (рис. 13.7,*a*). В этой ситуации в качестве пробного решения системы уравнений (13.18) следует использовать так называемое *присоединенное решение*

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_0 t \exp(-i\omega t),$$

соответствующее не стационарному движению, а равномерному, неограниченному разгону частицы. Траектория в этом случае принципиально не может быть стационарной и имеет вид «раскручивающейся спирали» (рис.13.7,*b*).

Представляется необходимым подчеркнуть, что к рассмотренному примеру следует относиться прежде всего как к демонстрации методов решений системы линейных дифференциальных уравнений. Полученный результат весьма приближенно описывает возникающую при резонансе реальную ситуацию, поскольку не учитывает релятивистских эффектов и торможения заряда в результате излучения им электромагнитных волн.

Соотношения, которые полезно помнить

$R = \frac{mc}{qB} u$	Радиус кривизны траектории нерелятивистской частицы, движущейся в однородном магнитном поле
$T = \frac{2\pi R}{u} = 2\pi \frac{mc}{qB}$	Период обращения нерелятивистской заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле

Задачи для самостоятельного решения

- 13.1. Используя рассмотренные в разделе 13.3 общие методы решения линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решить задачу о нахождении траектории нерелятивистской заряженной частицы, стартующей из начала системы координат со скоростью u_0 , все три декартовы проекции которой

заданы. Магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси y , электрическое поле отсутствует, радиационным трением пренебречь.

- 13.2. Используя рассмотренный в разделе 13.2 метод проектирования на циркулярные орты, решить задачу о движении заряженной частицы в магнитном поле при наличии сил вязкого трения.
- 13.3. Найти радиус орбиты и период обращения релятивистской частицы, влетающей в заданное магнитное поле с заданной начальной скоростью, направленной перпендикулярно линиям вектора \mathbf{B} .
- 13.4. Построить траекторию частицы, первоначально находившейся в начале координат, если одновременно были включены скрещенные (взаимно перпендикулярные) постоянные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} в случае $E \ll B$, соответствующем движению частицы с нерелятивистской скоростью.
- 13.5. Как будут изменяться во времени проекции на оси декартовой системы координат скорости нерелятивистской частицы, движущейся в скрещенных постоянных заданных электрическом и магнитном полях? В начальный момент частица находилась в состоянии покоя.
- 13.6. В начальный момент частица находилась в состоянии покоя в начале координат. Найти зависимость от времени для координат и проекций скорости частицы, если было включено переменное электрическое поле $\mathbf{E}(t) = E \mathbf{e}_x \cos(\omega t)$. Рассмотреть случаи движения частицы при наличии сил вязкого трения и в их отсутствие.
- 13.7. Определить характер движения нерелятивистской частицы, влетающей с заданной скоростью в сонаправленные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} .
- 13.8. Получить явные аналитические выражения для зависимости от времени величины скорости движения нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных постоянном магнитном и переменном электрическом полях от частоты колебаний напряженности электрического поля. Считать, что частица испытывает действие силы вязкого трения.
- 13.9. Найти зависимость от времени скорости первоначально находившейся в состоянии покоя частицы, испытывающей действие постоянного магнитного поля и перпендикулярного ему электрического поля, совершающего гармонические колебания на частоте точного резонанса.
- 13.10. Нагреваемый катод представляет собой длинный полый цилиндр радиусом r , заряженный по поверхности постоянной ли-

нейной плотностью заряда $\lambda < 0$. По оси катода проложен провод, по которому течет ток I . Рассчитать максимальное удаление электронов от оси провода, если известно, что поверхность катода они покидают практически с нулевой начальной скоростью.

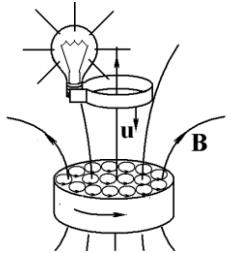
Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии и формулировкой второго закона Ньютона в импульсной форме.

- 13.K1. Дополните разработанную ранее программу моделирования движения нерелятивистских заряженных частиц в электрическом поле (задача 1.K1) возможностью моделировать их движение в магнитных полях произвольной пространственной конфигурации, изменяющихся во времени по произвольному (определенному пользователем) закону. Протестируйте Вашу программу на простейшем примере движения зарядов в однородном и не изменяющемся во времени магнитном поле. Изучите возможные формы движения зарядов в наложенных друг на друга постоянных (в пространстве и времени) электрическом и магнитном полях. Используйте программу для моделирования движения частиц в системе, описанной в условии задачи 13.10.
- 13.K2. Дополните разработанную программу моделирования движения частиц в электромагнитных полях (задача 13.K1) возможностью учета релятивистских эффектов (в том числе торможения радиационным трением). Сравните результаты моделирования движения частиц в постоянных электрическом и магнитном полях в случаях использования классического приближения и расчета по формулам теории относительности.
- 13.K3. Используйте разработанную Вами программу (задача 13.K1) для моделирования движения заряженных частиц в циклотроне (заряды движутся во взаимно перпендикулярных постоянном магнитном и переменном электрическом полях). Смоделируйте движение в настроенном в резонанс и выведенном из резонанса циклотроне. Как изменятся решения при введении сил вязкого трения?
- 13.K4. Используйте разработанную Вами программу (задача 13.K1) для моделирования движения заряженных частиц во взаимно перпендикулярных постоянном магнитном и равномерно вращающемся электрическом полях. Создайте модели, аналогичные описанным в задаче 13.K3. Изменится ли характер движе-

ния частиц в моделируемом ускорителе, если направление вращения вектора **E** заменить на противоположное?

- 13.K5. Используйте разработанную Вами программу (задача 13.K2) для моделирования движения заряженных частиц в циклотроне (частота изменения электрического поля остается постоянной) в случае, когда становятся существенными релятивистские эффекты. Создайте модель движения заряженных частиц в ускорителе, частота изменения электрического поля которого совпадает с частотой свободного вращения нерелятивистских частиц в удерживающем магнитном поле. Усложните модель, включив в рассмотрение эффекты радиационного трения.
- 13.K6. «Усовершенствуйте» описанный в задаче 13.K5 ускоритель релятивистских частиц, введя такой закон изменения во времени удерживающего магнитного поля, чтобы в процессе разгона заряженные частицы не выходили из резонанса с ускоряющим электрическим полем. Проверьте работоспособность разработанного Вами «виртуального» синхрофазотрона, поставив соответствующий численный эксперимент. Уточните компьютерную модель ускорителя, введя в рассмотрение эффекты радиационного трения.
- 13.K7. Известно, что в циклотронных ускорителях нерелятивистских частиц возникает эффект группировки: первоначально обладавшие различными скоростями частицы, разгоняясь, собираются в группу, вращающуюся синхронно с изменениями ускоряющего частицы поля. Разработайте компьютерную модель, иллюстрирующую этот эффект. Сохраняется ли эффект группировки в случае ускорителя релятивистских частиц?

Лекция 14



Закон электромагнитной индукции Фарадея

Анализ на основе принципа относительности эффектов, обусловленных силами Лоренца, возникающими при движении проводящего контура в магнитном поле, неизбежно приводит к выводу о существовании вихревого электрического поля, порожденного переменным магнитным. Открытие этого электрического поля нового типа, сделанное Фарадеем, во многом предопределило направление всего технического прогресса человечества в первой половине XX века.

14.1. ЭДС индукции в деформируемом контуре

При деформации помещенного в магнитное поле проводящего контура в нем возникает электрический ток. Его происхождение легко объясняется как результат действия силы Лоренца (сторонней силы) на имеющиеся в проводнике свободные заряды, движущиеся вместе с частями деформируемого контура:

$$\mathbf{F} = q \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] = \frac{q}{\delta t} \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \delta t, \mathbf{B} \right]. \quad (14.1)$$

Величину соответствующей ЭДС (E) легко вычислить как работу силы Лоренца по перемещению единичного заряда вдоль рассматриваемого замкнутого контура (отнесенный к единице перемещаемого заряда интеграл от силы Лоренца):

$$E \frac{1}{q} = \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \frac{1}{\delta t} \oint_{\Gamma_1} \left(\left[\frac{\mathbf{u}}{c} \delta t, \mathbf{B} \right], d\mathbf{l} \right) = - \frac{1}{c \delta t} \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, [\mathbf{u} \delta t, d\mathbf{l}]). \quad (14.2)$$

Возникающее в подынтегральном выражении соотношения (14.2) после циклической перестановки сомножителей векторное произведение представляет собой элемент приращения охватываемой контуром Γ_1 площади, т. е. площади, ограниченной его старым и новым положениями. Содержащее же этот элемент скалярное произведение представляет собой в соответствии с общим определением (2.1) не что иное, как элементарный поток вектора \mathbf{B} через небольшой участок кольца (рис. 14.1,*a*). Взятый по длине кольца интеграл очевидно имеет смысл приращения потока магнитной индукции $\delta\Phi$ через зачерчиваемую деформируемым контуром Γ_1 за время δt площадь:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, [\mathbf{u}\delta t, d\mathbf{l}]) = \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, [\delta\mathbf{h}, d\mathbf{l}]) = \varepsilon \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \delta\Phi. \quad (14.3)$$

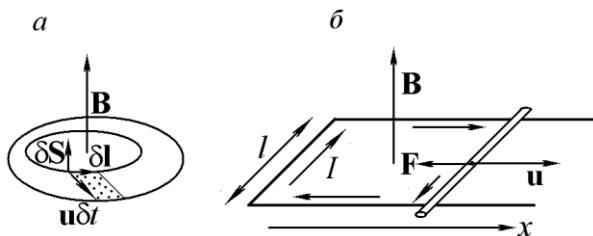


Рис. 14.1. ЭДС индукции, возникающая при деформации контура в магнитном поле:
а — к вычислению приращения магнитного потока через охватываемую деформируемым контуром площадь;
б — к вычислению силы торможения индукционными токами.

Появление отрицательного знака в выражении (14.2) для возникающей ЭДС формально обусловлено перестановкой сомножителей в векторном произведении, обеспечившей совпадение ориентации вектора \mathbf{B} и вектора приращения охватываемой контуром площади $\delta\mathbf{S}$. Выбор последнего однозначно определяется сформулированным в лекции 2 правилом соответствия (рис. 2.1,*a*) между заданным направлением в пространстве (в данном случае вектором \mathbf{B}) и направлением обхода контура Γ_1 (определяет выбор направления вектора $d\mathbf{l}$). «Автоматическое появление минуса» в рассматриваемом соотношении име-

ет весьма важные физические следствия. Как будет показано далее, этот знак, по сути, выражает *правило Ленца*, тесно связанное с законом сохранения энергии в системах, где действуют электромагнитные силы.

Подстановка результата (14.3) в выражение (14.2) приводит к весьма компактному выражению для ЭДС:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (14.4)$$

Таким образом, при изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур, в последнем возникает ЭДС, величина которой пропорциональна скорости изменения этого потока.

Область применимости сформулированного утверждения, выведенного при анализе процессов, происходящих в помещенном в стационарное магнитное поле деформируемом контуре, не ограничивается теми случаями, в которых ЭДС обусловлена действием сил Лоренца. Соотношение (14.4) оказывается **справедливым независимо от причин, приведших к изменению пронизывающего контур потока**. Этот, на первый взгляд, несколько неожиданный факт был экспериментально установлен М. Фарадеем в 1831 г. и носит название **закона электромагнитной индукции**. Высказанное в середине XIX века самим Фарадеем утверждение об отсутствии какой-либо практической значимости его открытия сегодня звучит весьма курьезно, поскольку практически вся электроэнергия ныне производится в устройствах, принцип работы которых основан на использовании именно явления электромагнитной индукции.

Пример. Торможение индукционными токами

Замкнутый контур образован П-образным проводом (рис.14.1,б), по которому скользит без трения проводящий стержень массой m , электрическое сопротивление которого равно R . Расстояние между проводами равно l . Стержню сообщена начальная скорость u_0 . Определить характер изменения скорости стержня во времени, если контур пронизывается постоянным магнитным полем \mathbf{B} , линии которого перпендикулярны его площади. Сопротивление проводов мало.

Решение. Движение стержня приводит к возникновению в контуре ЭДС, обусловленной изменением магнитного потока через изменя-

ящуюся площадь и, следовательно, пропорциональной скорости движения стержня:

$$|E| = \frac{1}{c} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{B}{c} \left| \frac{dS}{dt} \right| = \frac{Bl}{c} |u|.$$

В результате в замкнутой цепи, образованной П-образным проводом и стержнем, возникает электрический ток, силу которого легко определить из закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{Bl}{cR} u_x = \frac{Bl}{cR} \frac{dx}{dt}.$$

Существует несколько способов определения направления индукционного тока. В первую очередь его направление должно совпадать с направлением действия силы Лоренца на положительные заряды движущегося в магнитном поле стержня. Другим способом определения направления тока является непосредственное использование соотношения (14.4). Наличие в нем знака «минус» перед положительной производной по времени от возрастающего магнитного потока требует выбора направления обхода контура, противоположного задаваемому по правилу правого винта. Это направление соответствует положительному работе действующих на положительные заряды сторонних сил и, следовательно, задает направление тока в цепи. Наконец, на поставленный вопрос можно ответить исходя из энергетических соображений. Поскольку кинетическая энергия стержня должна уменьшаться из-за ее постепенного перехода в теплоту, неизбежно выделяющуюся при протекании тока, его направление должно быть таким, чтобы возникала сила, направленная против скорости движения стержня.

Очевидно, что в рассматриваемой системе торможение стержня вызвано силой Ампера (9.8):

$$F_x = -\frac{I}{c} Bl = -\frac{B^2 l^2}{c^2 R} u_x.$$

Ее подстановка в классическое уравнение движения приводит к хорошо известной задаче о движении тела под действием линейных по скорости тормозящих сил, подобных силам вязкого трения:

$$m \frac{du_x}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{c^2 R} u_x \Rightarrow u_x(t) = u_0 \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mc^2 R} t\right).$$

Рассмотренный пример объясняет часто демонстрируемый на эксперименте эффект торможения металлического маятника в магнитном поле. При входении проводника в область пространства, заполненную полем, в нем наводятся индукционные токи, генерируемые до тех пор, пока весь проводник не окажется в поле. Аналогичный эффект возникает и при выходе маятника из зазора между полюсами постоянного магнита. В результате кинетическая энергия маятника частично переходит в тепловую.

Проанализированные примеры позволяют дать частную формулировку правила Ленца, весьма удобную для определения направления индукционных токов: **направление индукционных токов всегда должно быть таким, чтобы препятствовать порождающему их механическому движению**. Очевидно, что нарушение сформулированного правила привело бы к явному нарушению закона сохранения энергии, поскольку означало бы возможность увеличения кинетической энергии системы при одновременном выделении в ней теплоты.

14.2. Вихревое электрическое поле

Как уже отмечалось, область применимости уравнения (14.4) оказывается значительно шире, чем можно было предполагать, исходя из рассмотренного в разделе 14.1 вывода. Опыт показывает, что ЭДС индукции в контуре возникает не только в случае сопровождающегося появлением сил Лоренца перемещения этого контура относительно источника магнитного поля (рис. 14.2,*a*), но и в случае перемещения источника поля относительно неподвижного контура (рис. 14.2,*b*).

С точки зрения рассмотренных законов магнитостатики, второй из приведенных экспериментальных фактов может показаться несколько неожиданным, поскольку в случае неподвижного вторичного контура приложенных к его электрическим зарядам сил Лоренца не возникает. Вместе с тем результат опыта с перемещением источника магнитного поля весьма очевиден с позиции принципа относительности. Если во вторичный контур включить, например, лампу накаливания, которая будет светить при приближении (или удалении) этого контура к источнику поля (с точки зрения неподвижного относительно него наблюдателя), практически невозможно усомниться в том, что ее свет будет зарегистрирован также и наблюдателем, движущимся вместе с контуром. В результате неподвижный относительно вторичного кон-

тура наблюдатель будет вынужден признать факт протекания токов и, следовательно, существование в контуре ЭДС.

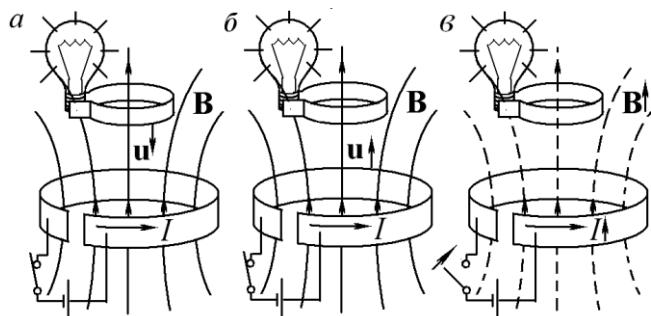


Рис. 14.2. Три способа возбуждения индукционного тока в контуре:

- a* — в результате перемещения вторичного контура относительно витка (источника поля);
- б* — в результате перемещения витка (источника) относительно неподвижного контура;
- в* — в результате изменения силы тока в витке.

Для объяснения изображенного на рис. 14.2,*б* опыта в терминах классической электродинамики необходимо ввести силы, приводящие в движение исходно неподвижные заряды в проводящем материале вторичного (находящегося в состоянии покоя) контура. В рамках электростатики возникновение сил, действующих на неподвижные электрические заряды, традиционно относилось на счет электрического поля. С этой точки зрения представляется разумным допустить, что **изменяющееся во времени магнитное поле способно порождать электрическое поле**.

В пользу изложенной концепции свидетельствует третий тип экспериментов по наблюдению индуцированных магнитным полем электрических токов (рис. 14.2,*в*). При создании электрического тока в одном из контуров (например, в результате замыкания ключа в электрической цепи, содержащей батарею) в расположенному вблизи него другом замкнутом проводящем контуре также возникает электрический ток. В проанализированной ситуации возникновение тока (направленного движения зарядов) не может быть объяснено действием силы Лоренца, поскольку никакого механического перемещения

контуров вообще не происходит. Концепция же вихревого электрического поля, создаваемого изменяющимся во времени магнитным полем, полностью описывает наблюдаемую на опыте картину. При этом математическое описание всех трех изображенных на рис. 14.2 типов экспериментов оказывается одинаковым и задается соотношением (14.4).

Приведенные соображения указывают на некоторую некорректность использования соотношения (14.4) для записи закона электромагнитной индукции с позиции наблюдателя, неподвижного относительно контура, в котором наводится индукционный ток. Поскольку в рассматриваемой системе отсчета сторонние (магнитные) силы отсутствуют, а их функции выполняют электрические силы, входящую в (14.4) ЭДС (работу сторонних сил по замкнутому контуру) логично заменить циркуляцией вдоль контура электрического поля, порожденного изменяющимся магнитным потоком:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \quad (14.5)$$

Соотношение (14.5) существенно отличается от ранее доказанного утверждения (2.5) о равенстве нулю циркуляции создаваемого неподвижными зарядами электростатического поля, которая непосредственно следовала из его потенциального характера. Силовые линии нового электрического поля, порожденного изменяющимся магнитным, могут представлять собой замкнутые кривые, подобные линиям вектора \mathbf{B} . По этой причине наряду с потенциальным электростатическим полем вводится *вихревое электрическое поле*, циркуляция которого по неподвижному контуру оказывается существенно отличной от нуля. Переход по ранее рассмотренным стандартным правилам от интегральных соотношений к их дифференциальным аналогам приводит к более общему уравнению для ротора электрического поля:

$$[\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (14.6)$$

справедливому в случае изменяющихся во времени электромагнитных полей.

С точки зрения классической (нерелятивистской) физики, вихревое электрическое поле может рассматриваться как новый объект, прин-

ципиально отличный от электростатического поля. В рамках релятивистского описания представляется более оправданным не только объединение потенциального электростатического и вихревого электрического полей, но и рассмотрение их в качестве единого с магнитным полем объекта.

Направление возникающего вихревого электрического поля или связанного с ним индукционного тока на практике удобно определять с помощью правила Ленца, наиболее общая формулировка которого состоит в утверждении, что **индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать любой порождающей его причине**. Нетрудно понять, что это правило является простым следствием закона сохранения энергии. Действительно, индукционный ток согласно закону Джоуля—Ленца неизбежно приводит к превращению части энергии рассматриваемой системы в тепловую. Если бы возникновение индукционного тока усиливало причины, вызвавшие породившее его изменение магнитного потока, это привело бы к саморазвивающемуся процессу, в результате которого количество выделяемой теплоты непрерывно бы возрастало.

Соотношения (14.5) и (14.6) более удобны по сравнению с (14.4) и в том случае, если контур выполнен из электроизолирующего материала или мысленно проведен в не проводящей электрический ток среде или просто в вакууме. В указанной ситуации понятие ЭДС вновь оказывается мало удобным, поскольку в изоляторе никакого макроскопического переноса электрических зарядов попросту не происходит. Что же касается электрического поля, то понятие напряженности оказывается вполне определенным даже в случае полного отсутствия способных к свободному перемещению зарядов.

Пример. Переменный трехфазный ток

Три рамки размером $a \times b$, имеющие одну общую сторону и расположенные так, что их плоскости составляют друг с другом угол 120° , помещены в однородное магнитное поле. Поле вращается вокруг общей стороны рамок с постоянной угловой скоростью ω . Описанное устройство подключено к трем одинаковым нагрузкам, каждая из которых имеет сопротивление R (рис. 14.3, а). Рассчитать среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на нагрузках, и токи, протекающие по подводящим проводам.

Решение. Ориентацию плоскостей рамок (обмоток генератора переменного трехфазного тока) в пространстве удобно задавать с помощью единичных векторов, направленных по нормали к их плоскостям: \mathbf{e}_k , $k = 0, 1, 2$. Начало отсчета времени удобно выбрать так, чтобы направление врачающегося магнитного поля совпадало с одним из этих векторов, например \mathbf{e}_1 . Тогда пронизывающие рамки магнитные потоки будут изменяться во времени по гармоническим законам с одинаковой частотой, но с разными фазами:

$$\Phi_k(t) = ab(\mathbf{B}(t), \mathbf{e}_k) = (ab)B \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi k\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

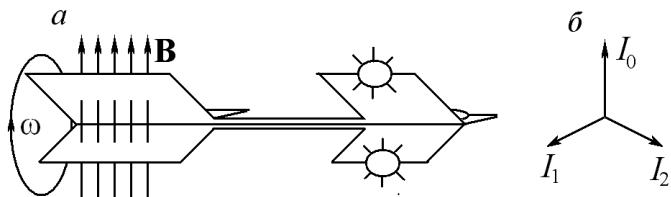


Рис. 14.3. Модель генератора трехфазного тока и простейшей линии электропередач:

- a* — принцип производства трехфазного тока;
- b* — к вычислению суммарного тока, протекающего по нулевому проводу.

. Соответствующие ЭДС в обмотках определяются по закону Фардая, а мгновенные значения токов, протекающих по каждой из трех цепей, — по закону Ома:

$$\begin{aligned} E_k &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_k}{dt} = \frac{abB\omega}{c} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} k\right), \\ I_k &= \frac{E_k}{R_k} = \frac{abB\omega}{cR} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} k\right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (14.7)$$

При этом предполагается, что вторичные магнитные поля, создаваемые этими переменными токами, настолько малы, что обусловленные

ими изменяющиеся магнитные потоки не вносят сколько-нибудь заметного вклада в ЭДС индукции.

Среднюю за период мощность, выделяемую на каждой из нагрузок, можно определить, усреднив по периоду мгновенную мощность, вычисляемую по закону Джоуля—Ленца:

$$\langle P_k \rangle = I_0^2 R \left\langle \sin^2 \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} k \right) \right\rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{(abB\omega)^2}{2Rc^2}.$$

Полученный результат показывает, что **средняя тепловая мощность, выделяющаяся на нагрузке при протекании через нее переменного тока, оказывается в два раза меньше мощности, которая выделялась бы при протекании постоянного тока, равного амплитудному значению переменного**. В связи с этим оказалось удобным измерять переменные токи (и напряжения) их *действующими значениями*, по определению равными величинам постоянных токов (напряжений), обеспечивающих выделение на активной нагрузке эквивалентной средней мощности.

Токи, протекающие по цепи каждой фазы, вычислялись при расчете мощностей, выделяемых на нагрузках (14.7). Протекающий по нулевому проводу ток согласно закону Кирхгофа равен сумме этих токов:

$$I_0 = \frac{abB\omega}{cR} \sum_k \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} k \right). \quad (14.8)$$

Задача суммирования трех тригонометрических функций может быть легко решена переходом к их комплексному представлению:

$$\sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi k \right) = \operatorname{Im} \left[\exp(i\omega t) \exp \left(i \frac{2}{3} \pi k \right) \right].$$

В результате вычисление протекающего по нулевому проводу суммарного тока (14.8) сводится к нахождению суммы трех векторов на комплексной плоскости, повернутых на 120° относительно друг друга (рис. 14.3,б), и не представляет трудности. Полученный нулевой результат, разумеется, справедлив только в том случае, когда все три нагрузки одинаковы. Это является одной из причин устойчивого же-

ления энергетиков иметь симметричную нагрузку на всех трех фазах: в этом случае по нулевому проводу ток не протекает и тепловые потери на нем отсутствуют.

14.3. Диамагнетизм

Закон электромагнитной индукции позволяет дать представление о механизме возникновения явления *диамагнетизма* (ослабление магнитного поля в веществе) и его предельном случае — полном экранировании магнитного поля в объемах сверхпроводников.

Диамагнетиками являются вещества, атомы которых изначально не имеют магнитного момента. Таковыми, например, оказываются атомы, с полностью заселенными электронными оболочками. В качестве простейшего примера можно рассмотреть невозбужденный атом гелия. В рамках классической планетарной модели Резерфорда можно (весьма условно) принять, что образующие замкнутую оболочку два электрона этого атома движутся в противоположных направлениях по одной и той же круговой орбите и при этом имеют противоположно направленные спины (рис. 14.4).

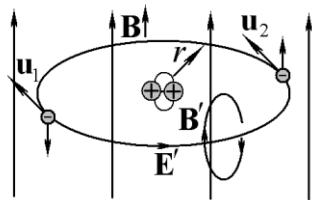


Рис. 14.4. Очень наивная модель атома гелия, дающая качественно правильное описание механизма диамагнетизма.

В отсутствие внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент рассматриваемой системы очевидно равен нулю. При возрастании внешнего магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, направленное вдоль круговой орбиты электронов, величину которого легко вычислить с помощью (14.5):

$$2\pi rE = \left| \frac{d}{dt} (\pi Br^2) \right| \Rightarrow E = \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

Возникновение вихревого поля приводит к появлению дополнительных сил, изменяющих скорость движения электронов по орбите и, следовательно, величину момента импульса, обусловленного орби-

тальным движением. Скорость изменения момента импульса каждого из электронов определяется моментом действующих на них электрических сил:

$$\left| \frac{dl}{dt} \right| = rqE = \frac{qr^2}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

В результате за время возрастания магнитного поля от начального нулевого до конечного значения моменты обоих электронов получат одинаковые приращения (как по величине, так и по направлению). Это приводит к тому, что обладавший ранее нулевым орбитальным моментом атом во внешнем магнитном поле приобретает наведенный момент, равный

$$l_{\Sigma} = 2\delta l = qr^2 B.$$

Соответствующий ему магнитный момент связан с орбитальным гиромагнитным отношением

$$|\boldsymbol{\mu}_{\Sigma}| = \Gamma_l l_{\Sigma} = \frac{q^2 r^2}{2mc} B.$$

Наведенный магнитный момент оказывается направленным противоположно магнитному полю, в чем нетрудно убедиться с помощью правила Ленца:

$$\boldsymbol{\mu}_{\Sigma} \sim -\frac{q^2 r^2}{mc} \mathbf{B}. \quad (14.9)$$

Таким образом, как и в случае парамагнетиков, наведенный магнитный момент оказывается пропорциональным внешнему магнитному полю, но коэффициент пропорциональности становится отрицательным. Результат (14.9) позволяет оценить по порядку величины константу магнитной поляризуемости молекул и атомов диамагнетиков. Очевидный путь улучшения точности в результате усреднения полученных значений по всевозможным ориентациям орбит электронов не представляется оправданным из-за заведомо приближенного характера изначально использованной планетарной модели атома.

Более общий подход к объяснению явления диамагнетизма в рамках классической физики основан на использовании *теоремы Лармора*, в которой утверждается, что при наложении однородного магнитного поля на классическую систему движущихся заряженных частиц уравнения их движения сохраняют первоначальную форму, если пе-

рейти к системе отсчета, равномерно вращающейся вдоль оси, направленной по магнитному полю с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \frac{q_e}{2mc} \mathbf{B}.$$

В соответствии с сформулированной теоремой при помещении атома во внешнее магнитное поле траектории его движения перестают быть плоскими: орбиты электронов начинают прецессировать вокруг направления, задаваемого линиями магнитного поля. Это дополнительное движение зарядов приводит к появлению дополнительного магнитного момента атома, направленного противоположно полю.

При построении теории диамагнетизма необходимо учитывать достаточно неожиданное обстоятельство: попытки последовательного применения классической механики для описания этого явления неизбежно приводят к выводу о невозможности его существования. Непротиворечивое описание диамагнетизма может быть дано лишь на языке квантовой механики.

Диамагнитный эффект наблюдается во всех без исключения атомах и молекулах. Однако в случае парамагнетиков и ферромагнетиков, атомы и молекулы которых изначально имеют нескомпенсированные магнитные моменты, ориентационные эффекты оказываются сильнее диамагнитных.

14.4. Взаимная индукция и самоиндукция

Если два контура расположены достаточно близко друг от друга, то при протекании тока по первому контуру возникает магнитное поле, часть линий вектора \mathbf{B} которого проходит через второй контур (рис.14.5,*a*). Рассматриваемая система представляет собой весьма упрощенную (и поэтому удобную для теоретического анализа, но абсолютно непригодную для использования на практике) модель *трансформатора*.

Составляющие трансформатор контуры $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ обычно называют соответственно его первичной и вторичной обмотками. При протекании по обмоткам токов I_1 и I_2 каждая из них пронизывается *магнитными потоками* Φ_1 и Φ_2 . Величины магнитных потоков, определяемые создаваемым токами I_1 и I_2 суммарным магнитным полем и гео-

метрией контуров, вычисляются в соответствии с общим определением (2.1):

$$\Phi_k = \int_{S_k} (\mathbf{B}_\Sigma (I_1, I_2), d\mathbf{S}_k), \quad k = 1, 2.$$

Обусловленная током в первичной обмотке часть магнитного потока Φ_{21} , пронизывающего вторичный контур, оказывается линейной функцией от силы этого тока:

$$\Phi_{21} = M_{21} \frac{I_1}{c}. \quad (14.10)$$

Если сила тока в первичном контуре по какой-либо причине начинает изменяться во времени, в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея во вторичном контуре возникает ЭДС.

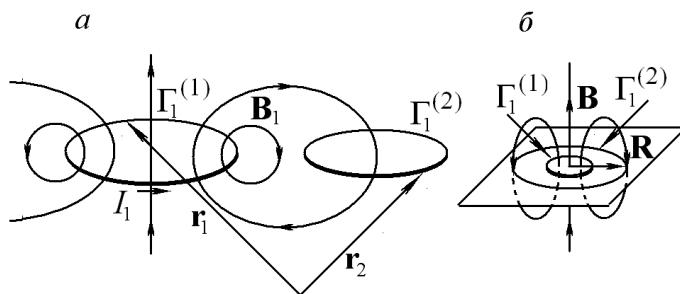


Рис. 14.5. Взаимная индукция:
 а — к вычислению коэффициента взаимной индукции;
 б — применение теоремы взаимности к расчету поля магнитного диполя.

Входящий в соотношение (14.10) коэффициент пропорциональности между магнитным потоком через вторичный контур и отнесенным к скорости света током в первичном контуре носит название *коэффициента взаимной индукции*.

Для доказательства линейного характера связи между силой тока I_1 в первичном контуре $\Gamma_1^{(1)}$ и обусловленным этим током магнитным потоком Φ_{21} через охватываемую вторичным контуром $\Gamma_1^{(2)}$ площадь создаваемое первичным витком с током магнитное поле удобно выразить через его векторный потенциал:

$$\Phi_{21} = \oint_{S_2} (\mathbf{B}_1, d\mathbf{S}_2) = \oint_{S_2} ([\nabla, \mathbf{A}_1], d\mathbf{S}_2).$$

Подобно тому как это делалось при выводе уравнения (10.16) для циркуляции вектора \mathbf{B} , интеграл по поверхности от ротора векторного потенциала может быть преобразован в циркуляцию от векторного поля \mathbf{A} по совпадающему со вторичным витком замкнутому контуру:

$$\Phi_{21} = \oint_{S_2} ([\nabla, \mathbf{A}_1], d\mathbf{S}_2) = \oint_{\Gamma_1^{(2)}} (\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2), d\mathbf{l}_2).$$

Утверждение о возможности сделанного перехода в общем случае произвольного векторного поля в математике носит название *теоремы Стокса*.

Входящий в подынтегральное выражение векторный потенциал с помощью соотношения (10.11) просто выражается через плотность токов в первичном витке, обычно представляющем собой тонкий провод. Последнее допущение позволяет перейти от вычисления содержащего плотность тока объемного интеграла к однократному интегралу, зависящему от силы тока. Остающаяся постоянной в каждом сечении контура величина I_1 может быть вынесена из-под контурного интеграла, который оказывается зависящим только от геометрии контура:

$$\Phi_{21} = \oint_{\Gamma_1^{(2)}} \int_{V_1} dV(\mathbf{r}_1) \left(\frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_1)}{c|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, d\mathbf{l}_2 \right) = \frac{I_1}{c} \oint_{\Gamma_1^{(2)}} \oint_{\Gamma_1^{(1)}} \frac{(d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Получившийся результат доказывает наличие пропорциональности между потоком Φ_{21} и обуславливающим его током и позволяет получить явное выражение для коэффициента взаимной индукции, которое оказывается симметричным по двум его индексам, нормирующим контуры:

$$M_{21} = \oint_{\Gamma_1^{(1)}} \oint_{\Gamma_1^{(2)}} \frac{(d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{12}. \quad (14.11)$$

Последнее утверждение иногда называют *теоремой взаимности*.

Согласно закону Фарадея изменение потока через контур приводит к возникновению в нем ЭДС, которая в рассматриваемой ситуации оказывается пропорциональной скорости изменения магнитной индукции, следовательно, силы тока в другом контуре

$$E_{21} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{1}{c^2} M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (14.12)$$

Для удобства выполнения электротехнических и инженерных расчетов (в рамках традиций которых появление скорости света в соотношениях не всегда выглядит уместным) иногда оказывается целесообразным введение «электротехнического коэффициента взаимной индукции»:

$$\tilde{M}_{21} \equiv \frac{1}{c^2} M_{21}. \quad (14.13)$$

С учетом определения (14.13) выражение (14.12) для ЭДС индукции принимает вид, формально совпадающий с «привычным» соотношением, записанным в системе единиц СИ:

$$E_{21} = -\tilde{M}_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (14.14)$$

Рассмотренный механизм передачи электроэнергии между двумя контурами, представляющими собой не имеющие омического контакта электрические цепи, находит широкое и весьма разнообразное применение в электротехнике.

Линии магнитного поля тока, протекающего по контуру, пронизывают не только окружающие контуры, но и сам этот контур. Коэффициент пропорциональности между током в контуре и создаваемым им магнитным потоком через этот же контур называется *коэффициентом самоиндукции*, или *индуктивностью*:

$$\Phi_{22} \equiv L_2 \frac{I_2}{c}. \quad (14.15)$$

Общее выражение для коэффициента самоиндукции может быть получено аналогично выражению для коэффициента взаимной индукции и имеет сходную с (14.11) форму:

$$L_2 = \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_2, d\mathbf{l}'_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|}.$$

$$\Gamma_1^{(2)} \Gamma_1^{(2)}$$

Различие состоит лишь в том, что при расчете индуктивности оба контурных интеграла берутся по одному и тому же контуру. В этом случае нередко возникает расходимость из-за появления нулей в знаменателе (например, индуктивность прямого бесконечного провода оказывается бесконечно большой). Указанная расходимость очевидно не имеет реального физического смысла, поскольку возникает в рамках модели токов, протекающих по бесконечно тонким проводам, образующим контур.

Наличие индуктивности у контура приводит к возникновению в нем ЭДС самоиндукции, порождаемой изменением токов в этом контуре:

$$E = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}. \quad (14.16)$$

Для удобства проведения прикладных расчетов иногда, подобно (14.13), вводится иное определение индуктивности, которую в дальнейшем будем называть электротехнической:

$$\tilde{L} \equiv \frac{1}{c^2} L.$$

В результате выражение (14.16) для ЭДС самоиндукции принимает вид, аналогичный (14.14):

$$E = -\tilde{L} \frac{dI}{dt}. \quad (14.17)$$

Пример. Использование теоремы взаимности для расчета магнитного поля диполя

Используя теорему взаимности (14.11), рассчитать магнитное поле небольшого витка с током на больших расстояниях от него в плоскости этого витка.

Решение. Для решения поставленной задачи в качестве контуров удобно выбрать два контура в виде концентрических колец, из которых малое совпадает с заданной петлей с током, а большое проходит через те точки, в которых вычисляется поле (рис.14.5,б).

В соответствии с теоремой взаимности при протекании тока I по любому из двух витков в другом должен возникать один и тот же магнитный поток Φ , пронизывающий другой виток. Увеличение же радиуса большего витка на небольшую величину δR должно приводить к одинаковому изменению потоков через оба контура.

Изменение потока через внешний контур $\Gamma^{(2)}$ обусловлено простым увеличением ограничивающей им площади и равно произведению искомого поля на площадь кольца, занимаемую перемещенным контуром:

$$\delta\Phi_2 = 2\pi R \delta R B(R).$$

Поскольку размеры внутреннего контура остается постоянной, изменение потока через него вызвано уменьшением магнитного поля в центральной части контура из-за удаления от него токов, протекающих по внешнему контуру:

$$\delta\Phi_1 = \pi r^2 \frac{I}{c} \delta \frac{2\pi R}{R^2} = |\boldsymbol{\mu}| \cdot 2\pi \left(-\frac{\delta R}{R^2} \right).$$

Из равенства приращений потоков следует искомое выражение для магнитного поля, создаваемого протекающим по внутреннему контуру током, в точках расположения внешнего контура

$$\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2 \Rightarrow B(R) = -\frac{|\boldsymbol{\mu}|}{R^3}.$$

Появление отрицательного знака в ответе означает, что в рассматриваемых точках магнитное поле диполя ориентировано противоположно его моменту и направлению поля в центральной части. Таким образом,

увеличение площади, ограниченной внешним контуром, приводит к уменьшению потока через него. Полученный результат, разумеется, согласуется с ранее выведенным выражением (10.18) для поля магнитного диполя.

14.5. Энергия магнитного поля

Наличие индуктивности у соленоида приводит к тому, что при изменении силы протекающего через него тока в катушке возникает ЭДС, стремящаяся противодействовать этому изменению. В результате наличие в электрических цепях элементов с большой индуктивностью делает невозможными скачкообразные изменения в них силы тока.

Простой расчет зависимости от времени силы тока в электрической цепи (рис. 14.6), представляющей собой замкнутую на сопротивление катушку индуктивности, приводит к экспоненциальному убывающей зависимости

$$-\tilde{L} \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{\tilde{L}} t\right).$$

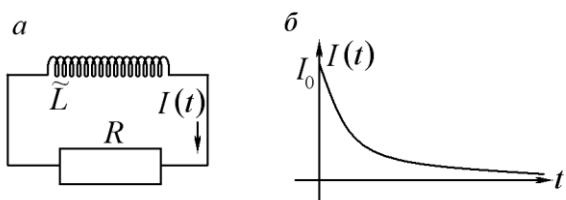


Рис. 14.6. Энергия магнитного поля, локализованного внутри соленоида:

- a* — электрическая цепь, ток в которой поддерживается ЭДС самоиндукции;
- б* — зависимость от времени силы электрического тока в цепи, состоящей из катушки индуктивности и активного сопротивления.

Мгновенная тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении, легко рассчитывается по закону Джоуля—Ленца (7.11). Для вычисления суммарного количества теплоты, выделяющегося на сопротивле-

ния за все время разряда катушки, вычисляется интегрированием по бесконечному промежутку времени:

$$W_B = Q = \int_0^{\infty} dt i^2 R = \frac{\tilde{L} I_0^2}{2} = \frac{L}{2} \left(\frac{I_0}{c} \right). \quad (14.18)$$

Выделившаяся на сопротивлении энергия, очевидно, первоначально была запасена в катушке, ЭДС самоиндукции которой препятствует мгновенному обрыванию тока в цепи. Подобно тому как энергия заряженного конденсатора запасается в заполняющем его объем электрическом поле, логично предположить, что аккумулируемая в соленоиде энергия обусловлена магнитным полем, локализованным в его объеме.

Для вычисления объемной плотности магнитной энергии удобно пользоваться известной формулой для энергии внутри содержащего N витков с током I соленоида длиной h (см. задачу 10.6):

$$B = 4\pi \frac{N}{h} \frac{I_0}{c}. \quad (14.19)$$

Индуктивность соленоида легко рассчитывается с учетом определения (14.15) и оказывается равной

$$L = \frac{\Phi c}{I} = \frac{NBS c}{I} = 4\pi N^2 \frac{S}{h}. \quad (14.20)$$

Подстановка в выражение для энергии катушки с током (14.18) соотношений (14.19), (14.20) позволяет получить связь между запасенной в катушке энергией (W_B) и индукцией магнитного поля в ее объеме:

$$W_B = \frac{1}{8\pi} B^2 Sh.$$

Как и в случае с плоским конденсатором, **запасенная в соленоиде энергия оказывается пропорциональной объему пространства, заполненному магнитным полем**. Это позволяет предположить, что и в случае магнитного поля запасенная энергия локализована в

содержащей его области пространства, и ввести понятие *объемной плотности энергии магнитного поля* в вакууме:

$$w_B = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (14.21)$$

В случае магнитного поля в веществе к объемной плотности магнитной энергии (14.21) следует добавить слагаемое, описывающее плотность добавочной энергии молекулярных магнитных диполей во внешнем поле. В результате возникает суммарное выражение для объемной плотности магнитной энергии в веществе, полностью аналогичное ранее полученному соотношению (6.14) для объемной плотности энергии электростатического поля в диэлектрике:

$$w_H = \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi} = \frac{(\mathbf{H}, \hat{\mu} \mathbf{H})}{8\pi}. \quad (14.22)$$

Строгий вывод формулы (14.21) для объемной плотности энергии магнитного поля в вакууме идеально весьма близок к проведенному в лекции 6 расчету объемной плотности энергии электрического поля. Различие состоит в том, что при расчете потенциальной энергии системы элементарных источников магнитного поля из-за отсутствия магнитных зарядов должна рассматриваться совокупность взаимодействующих друг с другом магнитных диполей, энергия которой оказывается равной

$$W = \frac{1}{2} \sum_k (\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{A}_k), \quad (14.23)$$

где \mathbf{A}_k — векторный потенциал, создаваемый в точке нахождения магнитного диполя с номером k всеми остальными диполями кроме него самого.

Соотношения, которые полезно помнить

$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$	Закон электромагнитной индукции Фарадея
$[\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Связь вихревого электрического поля с изменяющимся во времени магнитным
$w_B = \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{8\pi} = \frac{(\mathbf{H}, \bar{\mu} \mathbf{H})}{8\pi}$	Объемная плотность энергии магнитного поля

Задачи для самостоятельного решения

14.1. В *бетатроне* (разновидность ускорителя заряженных частиц) используется изменяющееся во времени магнитное поле: с одной стороны, оно создает силу Лоренца, искривляющую траектории движения частиц, с другой — порождает вихревое электрическое поле, ускоряющее эти частицы. Показать, что в случае пространственно неоднородного, симметричного относительно оси магнитного поля, удовлетворяющего бетатронному условию (величина поля в каждой точке равна половине его среднего значения по площади, ограниченной проходящей через эту точку окружностью с центром на оси симметрии), при любом законе изменения этого поля во времени заряды будут двигаться по окружностям постоянного радиуса.

14.2. Показать, что при медленном изменении пространственно однородного магнитного поля траектория движущегося в нем свободного заряда будет меняться таким образом, что обусловленный его вращением магнитный момент в первом приближении останется постоянным во времени.

Указание. Учесть, что при изменении магнитного поля возникает дополнительная электрическая сила, изменяющая скорость частицы.

14.3. В рамках планетарной модели атома Резерфорда, используемой при анализе механизма возникновения диамагнетизма, при выводе соотношения (14.9) по умолчанию предполагалось, что по-

сле включения магнитного поля радиус орбиты электрона остается неизменным. Попытайтесь обосновать сделанное допущение в рамках классической модели атома.

Указание. При наличии магнитного поля на электрон помимо электростатической силы притяжения к ядру действует сила Лоренца, математическое выражение которой весьма сходно с выражением для кориолисовой силы инерции.

14.4. Доказать теорему Лармора..

Указание. Воспользоваться формальным сходством между выражениями для силы Лоренца и кориолисовой силой инерции, возникающей во вращающейся системе отсчета.

14.5. Токопроводящий стержень массой M помещен на два параллельных рельса, наклоненных под углом α к горизонту, расстояние между которыми равно l . Трение отсутствует. Постоянное магнитное поле \mathbf{B} направлено вертикально вверх. Как будет изменяться во времени скорость движения стержня, если между рельсами включить: а) сопротивление; б) конденсатор; в) катушку (индуктивность) с заданными электрическими параметрами (R , C или L)?

14.6. Рассчитать индуктивность и коэффициент взаимной индукции двух катушек, плотно намотанных на цилиндрический сердечник заданных размеров, выполненный из материала с магнитной проницаемостью μ . Число витков катушек равно N_1 и N_2 соответственно.

14.7. Рассчитать индуктивность катушки, содержащей N витков токоведущей проволоки, намотанных на кольцеобразный (внешний радиус равен R) сердечник из магнетика с проницаемостью μ , сечение которого представляет собой прямоугольник со сторонами a и b .

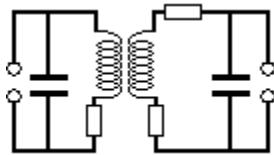
14.8. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС E и внутренним сопротивлением r , катушки с индуктивностью L и ключа. В начальный момент ключ замкнут. Рассчитать зависимость напряжения на ключе после его быстрого размыкания.

Указание. Сопротивление разомкнутого ключа (точнее, сопротивление воздуха между его контактами) очень велико, но не бесконечно: $R \gg r$.

14.9. На сердечник цилиндрической формы очень плотно друг к другу намотаны две катушки, содержащие одинаковое число витков. Одна из катушек замкнута на сопротивление R , другая в

начальный момент времени подсоединяется к батарее с заданной ЭДС и очень малым внутренним сопротивлением. Определить токи как функции времени в каждой из катушек. Сопротивления проводов очень малы.

- 14.10. Содержащий N витков соленоид длиной l и радиусом r прорезан через проволочное кольцо радиусом $R > r$. Найти ЭДС в соленоиде, если в кольце создан электрический ток, возрастающий во времени по линейному закону: $I = \alpha t$.
- 14.11. Куб с ребром a , спаянный из 12 проволочек сопротивлением R каждая, равномерно вращается вокруг диагонали, проходящей через противоположные вершины. Постоянное магнитное поле \mathbf{B} направлено перпендикулярно оси вращения. Найти среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в кубе. Вторичными магнитными полями токов, протекающих по кубу, пренебречь. Угловая скорость вращения куба известна.
- 14.12. Попытайтесь дать строгое обоснование соотношения (14.21) для объемной плотности энергии магнитостатического поля, использовав (также предварительно обоснованное Вами!) соотношение (14.23) для энергии статического распределения системы магнитных диполей.
- 14.13. Попытайтесь дать строгое обоснование соотношения (14.22) для объемной плотности энергии магнитного поля в изотропном магнетике. Если эта задача покажется Вам слишком простой, рассмотрите случай анизотропного вещества.
- 14.K1. Попытайтесь разработать компьютерную модель бетатрона с симметричным относительно оси полем. Весьма желательно предоставить пользователю возможность задания пространственной конфигурации магнитного поля и его зависимости от времени.
- 14.K2. Попытайтесь разработать программу вычисления индуктивности токоведущего контура известной формы, удельное сопротивление материала которого задано.



Лекция 15

Цепи переменного тока

Цепи переменного тока, содержащие линейные элементы (резисторы, конденсаторы, катушки и трансформаторы) описываются системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Полный расчет прохождения произвольных сигналов по таким цепям может быть сведен к анализу их откликов на гармонические сигналы различных частот.

15.1. Элементы линейных цепей

В широком смысле цепями переменного тока называют такие электрические цепи, в которых ток и напряжение зависят от времени. Чаще под переменным током или напряжением, подразумевают сигналы, изменяющиеся во времени по гармоническому закону:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_u), \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I).$$

Важнейшим частным случаем цепей переменного тока являются *линейные цепи*, которые состоят только из элементов, для которых связь между током и напряжением дается линейными соотношениями. К ним относятся сопротивления (резисторы):

$$u_R = I_R R,$$

конденсаторы (емкости):

$$q_C = C u_C \Rightarrow I_C = C \frac{du_C}{dt},$$

идеальные катушки (индуктивности), сопротивление (r) проводов которых обычно считается равным нулю:

$$I_L = \frac{E_L + u_L}{r} \Rightarrow u_L = I_L r - E_L \stackrel{r=0}{=} -E_L = +\tilde{L} \frac{dI_L}{dt},$$

и трансформаторы с не содержащими ферромагнитных материалов сердечниками:

$$u_2 = E_2 = -\tilde{M} \frac{dI_1}{dt}.$$

Электрическое сопротивление проводов катушек и обмоток трансформаторов традиционно принимается равным нулю. При необходимости учета указанных сопротивлений их добавляют в схему в виде дополнительных элементов — резисторов.

Описывая линейные схемы системы уравнений обычно составляются с использованием *правил Кирхгофа*, известных из теории цепей постоянного тока и остающихся справедливыми в случае протекания переменных токов не очень высоких частот. Первый закон не претерпевает каких-либо изменений, поскольку представляет собой не более чем одну из форм записи закона сохранения электрического заряда. Что же касается второго закона Кирхгофа, то в общем случае он должен быть видоизменен, так как наличие переменного магнитного поля должно приводить к возникновению дополнительных ЭДС в каждом замкнутом контуре рассматриваемой электрической цепи. Однако на практике эти ЭДС оказываются существенно меньшими по сравнению с ЭДС, возникающими в катушках и создаваемыми источниками токов и напряжений. При этом в случае необходимости данные ЭДС могут быть включены в рассмотрение введением в схему дополнительных эффективных элементов с сосредоточенными параметрами.

Из линейности соотношений, связывающих мгновенные значения токов и напряжений на рассматриваемых элементах цепей, и линейного характера законов Кирхгофа следует, что линейные электрические цепи могут быть описаны с помощью систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае отсутствия сигналов, подаваемых извне, система уравнений оказывается однородной. Электрические цепи, на которые подается внешний сигнал (обычно разность потенциалов, изменяющаяся во времени по заданному закону), описываются неоднородными системами уравнений.

Пример. Реальный колебательный контур

Записать систему дифференциальных уравнений, описывающих процессы в реальном колебательном контуре, провода которого имеют

ненулевое сопротивление, а конденсатор обладает конечным сопротивлением утечки. Входящая в колебательный контур катушка используется для возбуждения в нем колебаний с помощью трансформаторной связи.

Решение. Эквивалентная схема описанного в условии колебательного контура приведена на рис. 15.1, а. Резистор r введен для учета сопротивления соединительных проводов и обмоток катушки индуктивности, R описывает сопротивление утечки на конденсаторе. Для реального контура обычно выполняется условие $r \ll R$.

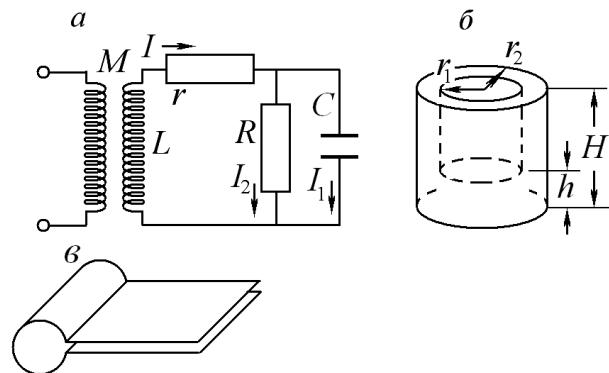


Рис. 15.1. Колебательный контур и аналогичные ему системы с заданными параметрами:

- а — принципиальная схема простейшего колебательного контура;
- б — закрытый резонатор, имеющий форму «стакана»;
- в — резонатор РЛС.

Систему уравнений удобно составить, разбив электрическую цепь на два замкнутых контура с общим участком, содержащим сопротивление R , и воспользовавшись законами Кирхгофа:

$$\begin{aligned} -\tilde{L} \frac{dI}{dt} - \tilde{M} \frac{dJ(t)}{dt} &= Ir + I_2 R, \\ 0 &= -I_2 R + \frac{Q_1}{C}, \\ I &= \frac{dQ_1}{dt} + I_2, \end{aligned}$$

где $J(t)$ — изменяющийся во времени по заданному закону электрический ток в первичной цепи трансформатора.

Таким образом, электрические колебания в реальном контуре описываются неоднородной линейной системой из трех обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой содержит известную функцию, пропорциональную производной подаваемого на схему от внешних источников тока $J(t)$. Эта система может быть записана в символьном виде (13.15) как результат действия матрицы линейного дифференциального оператора на вектор, составленный из искомых функций:

$$\begin{pmatrix} \left(\tilde{L} \frac{d}{dt} + r\right) & 0 & R \\ 0 & \frac{1}{C} & -R \\ 1 & -\frac{d}{dt} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ Q_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M \frac{dJ(t)}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15.1)$$

В случае отсутствия внешнего сигнала говорят о собственных электрических колебаниях в контуре. Очевидно, что этим процессам соответствует общее решение однородной системы (15.1), которое может быть найдено по общей схеме получения решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, рассмотренной в лекции 13. Подстановка пробного решения в виде вектора, экспоненциально зависящего от времени

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ Q_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ Q_{10} \\ I_{20} \end{pmatrix} \exp(\lambda t),$$

и введение новых параметров

$$\frac{r}{L} + \frac{1}{RC} = 2\beta, \quad \left(1 + \frac{r}{R}\right) \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

приводит к характеристическому уравнению стандартного вида для линейных систем, совершающих гармонические колебания:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (15.2)$$

Абсолютное сходство полученного уравнения (15.2), описывающего электрические процессы в колебательном контуре, с уравнением колебаний линейного маятника сделало возможным создание часов, в которых роль механического маятника выполняет колебательный контур. Из-за того, что значения частоты собственных электромагнитных колебаний в контуре обычно оказываются на несколько порядков больше, чем значения, характерные для частот механических колебаний, точность электрических часов оказывается существенно более высокой, чем у механических.

15.2. Электрические процессы в колебательном контуре

Уравнение затухающих гармонических колебаний столь часто встречается в самых разных разделах физики, что представляется полезным кратко остановиться на возможных типах его решения. В частности, такое уравнение получается из закона Ома для замкнутой цепи в случае «классического» колебательного контура (13.11) с идеальным (не обладающим утечкой $R = \infty$) конденсатором:

$$\tilde{L} \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (15.3)$$

Очевидными обозначениями

$$2\beta \equiv R/\tilde{L}, \quad \omega_0^2 \equiv 1/(\tilde{L}C)$$

уравнение (15.3) приводится к уравнению стандартного вида:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (15.4)$$

Уравнению (15.4) соответствует характеристические уравнение, полностью совпадающее с уравнением (15.2), полученным при рассмотрении более приближенной к реальной схемы колебательного контура.

В случае не совпадающих друг с другом корней характеристического уравнения (15.2)

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

общее решение исходного дифференциального уравнения представляется собой линейную комбинацию двух линейно независимых решений, зависящих от времени по экспоненциальному закону:

$$Q(t) = Q_+ \exp(\lambda_+ t) + Q_- \exp(\lambda_- t). \quad (15.5)$$

В зависимости от соотношения параметров контура возможно существование трех принципиально отличающихся друг от друга типов решений для искомой функции $Q(t)$.

При малых потерях энергии на теплоту при протекании тока через сопротивление ($\beta < \omega_0$) корни характеристического уравнения оказываются комплексными, что соответствует затухающим колебаниям заряда (и пропорционального ему напряжения) на конденсаторе:

$$Q(t) = \sum Q_{\pm} \exp(-\beta \pm i\omega t) = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta < \omega_0.$$

В предельном случае $R \rightarrow 0$ колебания становятся незатухающими, т. е. истинно гармоническими. В реальном контуре колебания всегда оказываются затухающими: даже в случае использования сверхпроводящих элементов (тепловые потери отсутствуют) остается еще один канал рассеяния энергии — электромагнитное излучение. Частота затухающих колебаний зависит от величины затухания: при увеличении потерь частота убывает.

В случае больших сопротивлений колебательная система переходит в апериодический режим, в котором решение представляет собой линейную комбинацию двух затухающих со временем экспонент:

$$Q(t) = \sum Q_{\pm} \exp\left(-\beta t \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t\right), \quad \beta > \omega_0.$$

При выполнении условия $\beta = \omega_0$ корни характеристического уравнения оказываются вырожденными ($\lambda_1 = \lambda_2$), а соответствующие им решения дифференциального уравнения перестают быть линейно независимыми, что делает невозможным построение общего решения в стандартном виде (15.5). В этом случае реализуется *критический режим*, при котором общее решение уравнения (15.4) представляет собой линейную комбинацию стандартного экспоненциального и так называемого присоединенного решений:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t} + \tilde{Q}_0 t e^{-\beta t}, \quad \beta = \omega_0. \quad (15.6)$$

Соответствующий решению (15.6) критический режим характеризуется наименьшей длительностью релаксационных процессов в колебательном контуре.

Для нахождения входящих в соответствующее любому из трех названных режимов общее решение уравнения второго порядка констант, как обычно, необходимо задание двух начальных условий. В рассматриваемой задаче естественно задание заряда на конденсаторе и тока в цепи в начальный момент времени.

Пример. Закрытый резонатор

Оценить частоту свободных колебаний электромагнитного поля в закрытом резонаторе, изображенном на рис.13.1,*б* и представляющем собой замкнутое пространство между двумя вставленными друг в друга «металлическими стаканами».

Решение. Металлические «днища» вложенных дуг в друга «проводящих стаканов» представляют собой плоский конденсатор, емкость которого может быть легко оценена при возможности пренебрежения краевым эффектом:

$$C = 4\pi \frac{\pi r^2}{h}.$$

При сообщении обкладкам конденсатора разноименных зарядов по стенкам вертикальных цилиндров резонатора начинает течь электрический ток. Пространство между стенками цилиндров в известном смысле подобно катушке с индуктивностью: при протекании по ограничивающим его стенкам тока в нем возникает магнитное поле и, сле-

довательно, запасается энергия. Эффективную индуктивность такой катушки можно оценить с учетом энергетических соображений:

$$W = \frac{\tilde{L}I^2}{2} = \int_V dV \frac{B^2}{8\pi} = \frac{h}{8\pi} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi\rho d\rho \left(\frac{2I}{\rho c}\right)^2 = \frac{hI^2}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \tilde{L} = \frac{2h}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

В целом система аналогична колебательному контуру, частота свободных колебаний в котором задается выражением

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}C}} = \frac{c}{2\pi r} \left(2 \frac{H}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^{-1/2}.$$

Полученный результат носит приближенный характер, поскольку при разряде конденсатора по его обкладкам протекают токи и магнитное поле возникает и в пространстве между днищами цилиндров. Точно так же между боковыми стенками цилиндров существует электрическое поле. Далее будут кратко рассмотрены методы, позволяющие существенно уточнить решение задач нахождения собственных частот электромагнитных колебаний в закрытых резонаторах.

15.3. Четырехполюсники

Многие достаточно сложные электрические цепи могут рассматриваться как *четырехполюсники* — устройства, к двум входным клеммам которых подается изменяющееся во времени по известному закону входное напряжение (входной сигнал), а с двух других клемм снижается выходное напряжение, являющееся откликом электрической схемы на сигнал на входе. Для решения многих практических задач электротехники важно уметь, зная устройство четырехполюсника, расчитывать сигнал на выходе по заданному входному напряжению. Математически четырехполюсник может описываться как некоторый оператор, в результате действия которого на определяющую входной сигнал функцию возникает новая функция, соответствующая напряжению на выходе

$$u_1(t) = \hat{\mathfrak{R}} u_0(t).$$

В случае линейных цепей, как уже отмечалось, описанная задача может быть сведена к решению неоднородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Другой, более удобный на практике метод расчета прохождения сигналов через линейные цепи состоит в отыскании отклика четырехполюсника на входной сигнал, изменяющийся во времени по гармоническому закону, т. е. в расчете результата действия описываемого четырехполюсника оператора на гармоническую функцию. При этом линейная цепь преобразует гармонический сигнал в гармонический сигнал той же частоты, а изменению подвергаются только его амплитуда и фаза:

$$\Re u_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = u_1 \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Если задача определения амплитуды и фазы выходного сигнала отклика на гармонический входной сигнал решена, отклик четырехполюсника на произвольный сигнал на его входе может быть найден как сумма откликов линейной электрической схемы на гармонические составляющие, совокупность которых соответствует этому входному сигналу:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{\Re} \int d\omega, \sum u_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi_0(\omega)) = \\ &= \int d\omega, \sum u_1(\omega) \cos(\omega t + \varphi_1(\omega)). \end{aligned}$$

Решение задач разложения функции в суперпозицию гармонических и суммирования гармонических функций является чисто математической проблемой и решается с помощью *прямого и обратного преобразований Фурье*. Методы расчета отклика схемы на изменяющееся во времени по гармоническому закону входное напряжение представляют собой предмет рассмотрения важного раздела электротехники. В рамках такого подхода электрические свойства любого четырехполюсника можно описать, задав две функции: зависимость от частоты модуля отношения амплитуд выходного и входного сигналов (*амплитудно-частотная характеристику*) и зависимость от частоты сдвига фазы сигнала на выходе относительно сигнала на входе.

Идея расчета отклика линейной цепи на гармонический сигнал основана на том, что на всех ее элементах токи и напряжения описываются гармоническими функциями, частота изменения которых совпадает

дает с частотой сигнала на входе. Токи и напряжения удобно записывать в виде комплексных функций так, чтобы их вещественная часть совпадала с мгновенным значением физической величины. При этом фазовый множитель удобно объединять с амплитудой сигнала, вводя тем самым комплексную амплитуду напряжения на участке цепи с номером k :

$$u_k(t) = u_k \cos(\omega t + \varphi_k) = \operatorname{Re} U_k \exp(-i\omega t), \quad U_k \equiv u_k \exp(-i\varphi_k).$$

Совершенно аналогично вводится комплексная амплитуда тока:

$$I_k(t) = I_k \cos(\omega t + \phi_k) = \operatorname{Re} J_k \exp(-i\omega t), \quad J_k \equiv I_k \exp(-i\phi_k).$$

При подаче на вход линейной схемы сигнала, изменяющегося во времени по гармоническому закону, мгновенные значения тока и напряжения на любом элементе могут быть записаны в виде произведений комплексных амплитуд на одинаковый для всей схемы фазовый множитель. Таким образом, для полного описания отклика схемы на входной гармонический сигнал достаточно установить соотношения только между комплексными амплитудами токов и напряжений на элементах линейных цепей. С этой целью каждому линейному элементу приписывается *импеданс*, определяемый как отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока:

$$Z \equiv \frac{U}{J} \equiv Z' + iZ''$$

(здесь и далее действительная часть комплексного числа обозначается штрихом, а мнимая — двумя штрихами).

В случае резистора импеданс оказывается чисто вещественным и равным его омическому сопротивлению:

$$Z_R = R.$$

Следовательно, импеданс можно рассматривать как обобщение понятия сопротивления на случай элементов линейных цепей переменного тока. Импедансы же конденсаторов и катушек являются чисто мнимыми величинами и зависят от частоты сигнала:

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{1}{-i\omega C} = \frac{i}{\omega C}, \\ Z_L &= -i\omega \tilde{L}. \end{aligned}$$

Поскольку для линейных цепей переменного тока выполняются законы Кирхгофа и все слагаемые, входящие в соответствующие выражения, содержат одинаковый экспоненциальный множитель, эти законы могут быть переписаны для комплексных амплитуд в виде, аналогичном соответствующим соотношениям для цепей постоянного тока. При использовании такого описания мгновенные значения тока или напряжения на любом элементе цепи вычисляются путем домножения комплексной амплитуды на множитель вида $\exp(-i\omega t)$ с последующим взятием действительной части от получившегося комплексного выражения. Иногда комплексные амплитуды токов и напряжений изображают в виде векторов на комплексной плоскости. Получающиеся при этом схемы называют *векторными диаграммами*. Для того чтобы по векторной диаграмме определить реальное (измеряемое) значение той или иной отображаемой на ней физической величины, достаточно представить, что диаграмма вращается как целое в плоскости чертежа с угловой скоростью ω , и найти проекцию изображающего искомую величину вектора на горизонтальную ось.

Пример. Простейший фильтр низких частот

Рассчитать сигнал на выходе простейшего фильтра, изображенного на рис.15.2,*a*, если на его вход подается сигнал, представляющий собой сумму постоянного напряжения и напряжения, изменяющегося во времени по косинусоидальному закону. Найти частотную характеристику фильтра.

Решение. Для анализа прохождения суммы сигналов через линейный четырехполюсник достаточно рассчитать прохождение через нее каждого из слагаемых:

$$u_0(t) = u_0^{(-)} + u_0^{(\sim)} \cos(\omega t).$$

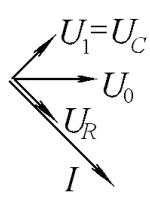
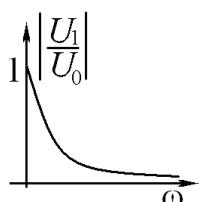
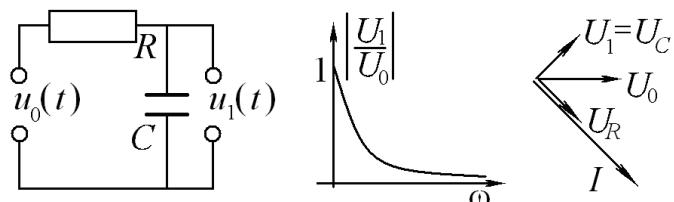


Рис. 15.2. Фильтр низких частот:
 а — принципиальная схема;
 б — амплитудно-частотная характеристика;
 в — векторная диаграмма.

В анализируемом случае постоянная составляющая может рассматриваться как гармонический сигнал с нулевой частотой. Таким образом, для решения задачи достаточно рассчитать прохождение через фильтр сигнала, изменяющегося во времени по косинусоидальному закону.

Начало отсчета времени удобно выбрать так, чтобы начальная фаза переменной составляющей входного напряжения равнялась нулю. В этом случае комплексные амплитуды обеих составляющих входного напряжения оказываются чисто вещественными:

$$U_0 \equiv u_0 = u_0^{(-)}, \quad \omega = 0,$$

$$U_0 \equiv u_0 = u_0^{(\sim)}, \quad \omega \neq 0.$$

Полный импеданс цепи фильтра равен сумме импедансов последовательно соединенных сопротивления и конденсатора:

$$Z(\omega) = R + \frac{i}{\omega C},$$

а комплексная амплитуда выходного напряжения определяется произведением комплексной амплитуды тока на импеданс конденсатора, с которого это напряжение снимается:

$$U_1(\omega) = I_1(\omega) Z_C = \frac{Z_C}{Z(\omega)} U_0(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega RC} U_0(\omega).$$

Напряжение на выходе фильтра рассчитывается как сумма выходных напряжений от постоянной и переменной составляющих исходного сигнала, каждое из которых легко вычисляется исходя из выражения для комплексной амплитуды выходного напряжения:

$$u_1(t) = \operatorname{Re} \left(U_1(0) + U_1(\omega) e^{-i\omega t} \right) = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0 \frac{\cos(\omega t) + \omega RC \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Как видно, анализируемая схема полностью пропускает на выход постоянную составляющую сигнала и существенно ослабляет переменную. Это свойство рассматриваемого четырехполюсника хорошо иллюстрирует его амплитудно-частотная характеристика (рис.15.2, δ):

$$\left| \frac{U_1}{U_0} \right| = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} .$$

Вследствие того, что импеданс конденсатора в области малых частот весьма велик, напряжение низкочастотных составляющих входного сигнала практически полностью передается на выход схемы. С увеличением частоты сигнала уменьшается импеданс конденсатора, что приводит к уменьшению коэффициента передачи.

На рис. 15.2, δ представлена векторная диаграмма, иллюстрирующая соотношения между переменными напряжением и током, протекающим через фильтр.

15.4. Активная и реактивная нагрузки

Комплексная форма записи амплитуд токов и напряжений, изменяющихся во времени по гармоническому закону, удобна и может широко использоваться в вычислениях, содержащих линейные операции (в результате которых, разумеется, должна быть сохранена только вещественная часть получаемого ответа). В случае же нелинейных операций необходимо использовать только вещественные значения. Примером такой нелинейной операции является вычисление мгновенной мощности переменного тока. Для упрощения дальнейших выкладок удобно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза переменного тока на рассматриваемом элементе цепи равнялась нулю. В случае комплексного импеданса напряжение на нагрузке имеет фазовый сдвиг по отношению к току и, следовательно, описывается существенно комплекснозначной амплитудой:

$$J = I_0 , \\ U = (Z' + iZ'')J = Z'I_0 + iZ''I_0 .$$

Мгновенная мощность, выделяющаяся на элементе цепи, задается выражением

$$N(t) = \left(\operatorname{Re} Je^{-i\omega t} \right) \left(\operatorname{Re} U e^{-i\omega t} \right) = I_0^2 Z' \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} I_0^2 Z'' \sin(2\omega t).$$

Для большинства приложений больший интерес представляет среднее за период значение мощности:

$$\langle N(t) \rangle = I_0^2 Z' \langle \cos^2(\omega t) \rangle + \frac{1}{2} I_0^2 Z'' \langle \sin(2\omega t) \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 Z'.$$

Найденная величина оказывается пропорциональной вещественной части импеданса нагрузки, называемой *активным сопротивлением*. Нагрузки с чисто мнимым импедансом (идеальные конденсаторы и катушки) называют *реактивными*. Эти элементы линейных цепей не поглощают энергии, а лишь частично запасают ее в электрическом или магнитном поле с последующей отдачей в электрическую цепь. На активной же нагрузке происходят одностороннее поглощение электрической энергии и ее преобразование в тепловую.

Пример. «Лестница» из реактивных элементов

Рассчитать входной импеданс бесконечной электрической цепи, состоящей из чисто реактивных элементов (рис.15.3,*a*).

Решение. Для расчета входного сопротивления бесконечной цепи из чисто реактивных элементов удобно использовать идею, примененную при анализе аналогичной «лестницы» из активных сопротивлений.

Пусть Z_n — импеданс конечной цепи, содержащей n звеньев. Добавление еще одного звена изменит входной импеданс на Z_{n+1} (рис.15.3,*b*):

$$Z_{n+1} = Z_L + \frac{Z_C Z_n}{Z_C + Z_n}.$$

Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ позволяет получить квадратное уравнение для искомого импеданса:

$$Z^2 + ZZ_C = ZZ_L + Z_C Z_L + ZZ_C.$$

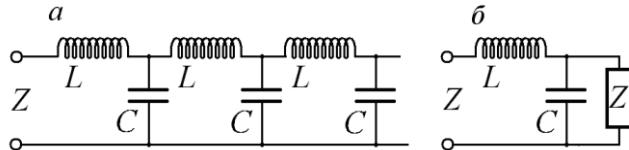


Рис. 15.3. Вычисление входного сопротивления «бесконечной лестницы» из реактивных элементов:

a — первые звенья бесконечной цепи;
б — эквивалентная схема.

Из двух возможных решений полученного квадратного уравнения следует выбрать то, которое в случае ненулевого активного сопротивления проводов дает физически осмысленный результат:

$$Z = \frac{Z_L}{2} + \sqrt{\frac{Z_L^2}{4} + Z_L Z_C} . \quad (15.7)$$

Подстановка в решение (15.7) явных выражений для импедансов конденсатора и катушки приводит к искомому ответу:

$$Z = \frac{-i\omega\tilde{L}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{L}}{C} - \frac{\omega^2\tilde{L}}{4}} . \quad (15.8)$$

Обращает на себя внимание несколько неожиданное появление ненулевой действительной части у импеданса цепи, состоящей только из реактивных элементов, при частотах входного сигнала, меньших граничного значения

$$\omega_r = \frac{2}{\sqrt{\tilde{L}C}} .$$

Пояснить ситуацию на качественном уровне легче всего в частном предельном случае нулевой частоты. При подаче на схему постоянного напряжения начинается последовательная зарядка расположенных друг за другом конденсаторов. При этом ток протекает через все большее число катушек. В результате энергия от внешнего источника ЭДС непрерывно аккумулируется в виде энергии электрического и магнитного полей конденсаторов и катушек. Вследствие того, что цепь бесконечная, такой процесс может идти бесконечно долго.

15.5. Входное сопротивление коаксиального кабеля

Коаксиальный кабель представляет собой полубесконечный проводящий цилиндр радиусом $r_>$ («оплетка»), вдоль оси которого проложен центральный провод радиусом $r_<$ («внутренняя жила»). Пространство между токоведущими частями заполнено однородным непроводящим диэлектриком с проницаемостью ϵ . Коаксиальные кабели находят широкое применение в радиотехнике для передачи электрических сигналов. Несмотря на отсутствие омического контакта между оплеткой и центральной жилой, входное сопротивление описанной полубесконечной системы оказывается конечным и одинаковым для входных сигналов произвольных частот.

Для составления эквивалентной электрической схемы идеального полубесконечного коаксиального кабеля удобно мысленно разделить его на бесконечно короткие секции длиной δl (рис. 15.4, а). Каждая из таких секций представляет собой небольшой цилиндрический конденсатор, расчет емкости которого не представляет трудности:

$$\delta C = \frac{\delta Q}{\delta \varphi} = \lambda \delta l \left(2 \frac{\lambda}{\epsilon} \ln \frac{r_>}{r_<} \right)^{-1} = \frac{\epsilon}{2} \delta l \ln^{-1} \frac{r_>}{r_<}. \quad (15.9)$$

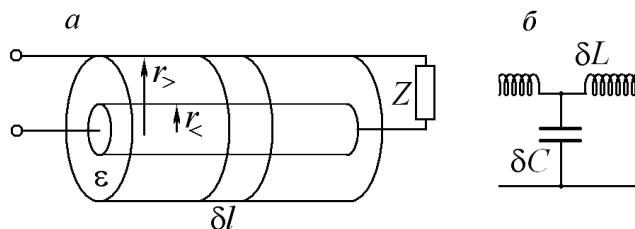


Рис. 15.4. Участок коаксиального кабеля с согласованной нагрузкой:

а — основные параметры кабеля, используемые при расчете его волнового сопротивления;

б — эквивалентная схема элементарного участка кабеля длиной δl .

Индуктивность системы из двух вложенных друг в друга соосных цилиндров, образующих звено кабеля, была найдена в примере расчета собственной частоты колебаний в закрытом резонаторе:

$$\delta\tilde{L} = \frac{2\delta l}{c^2} \ln \frac{r_>}{r_<} . \quad (15.10)$$

Таким образом, полубесконечный кабель может рассматриваться как совокупность секций, каждая из которых может быть заменена эквивалентной схемой (рис. 15.4,б). В результате возникает рассмотренная ранее «лестница реактивных элементов». Для вычисления ее входного импеданса можно воспользоваться результатом (15.8), при подстановке в который вычисленных значений емкости (15.9) и индуктивности (15.10) необходимо учесть, что полубесконечный кабель может быть заменен цепью из дискретных элементов лишь в том случае, если каждому из них будет сопоставлен бесконечно малый отрезок $\delta l \rightarrow 0$.

Результат расчета входного импеданса полубесконечного идеального коаксиального кабеля оказывается весьма неожиданным: **импеданс системы из двух не имеющих контактов друг с другом проводящих цилиндров оказывается вещественным на любых частотах:**

$$Z \equiv R_{LC} = \frac{-i\omega\delta\tilde{L}}{2} + \sqrt{\frac{\delta\tilde{L}}{\delta C} - \frac{\omega^2(\delta\tilde{L})^2}{4}} \Bigg|_{\delta\tilde{L} \rightarrow 0} = \frac{2}{c\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{r_>}{r_<} ! \quad (15.11)$$

Полученный результат показывает, что найденное *волновое* сопротивление полубесконечного коаксиального кабеля слабо (логарифмически) зависит от его поперечных размеров и свойств диэлектрика, разделяющего внутренний провод и оплетку. В результате это сопротивление не удается изменять в широких пределах. Стандартные значения волнового сопротивления используемых в электротехнике кабелей составляют 75 или 50 Ом.

Разумеется, ни в одной реальной электрической схеме бесконечно длинные отрезки кабеля не применяются. Однако если в конце кабеля между внутренним проводом и оплеткой подключить резистор с сопротивлением, равным волновому сопротивлению кабеля, такая система будет вести себя как бесконечный кабель. В частности, при наличии на конце конечного кабеля *согласованной нагрузки* с равным волновому сопротивлению система становится эквивалентной бесконечному кабелю. При подаче на ее вход каких-либо сигналов не возникает помех, связанных с его отражением от противоположного конца. Таким образом, для **устойчивой передачи высокочастотных**

импульсов между элементами электронных схем следует применять кабельные соединения и использовать приемные устройства с входными сопротивлениями, совпадающими с волновым сопротивлением кабеля.

Соотношения, которые полезно помнить

$\omega_0^2 = \frac{1}{\tilde{L}C}$	Собственная частота электрических колебаний в идеальном колебательном контуре
$u = \operatorname{Re} U \exp(-i\omega t)$, $Z_R = R$, $Z_C = \frac{1}{-i\omega C} = \frac{i}{\omega C}$, $Z_L = -i\omega \tilde{L}$.	Импедансы основных элементов линейных цепей Внимание! В большинстве книг по электротехнике в показателе экспоненты, входящей в комплексную запись токов и напряжений, стоит другой знак. В результате выражения для импедансов реактивных элементов оказываются противоположными по знаку

Задачи для самостоятельного решения

- 15.1. Найти зависимости $I(t)$ и $Q(t)$ в реальном колебательном контуре во всех трех режимах, если известно, что в начальный момент времени конденсатор был полностью разряжен, а через катушку протекал ток I_0 .
- 15.2. Найти все собственные частоты колебаний в контуре, состоящем из конденсатора и двух катушек, соединенных параллельно. Считать, что активное сопротивление проводов отсутствует. Емкость конденсатора и индуктивности катушек заданы.
Указание. При попытке замены двух параллельно соединенных катушек одной эквивалентной возникает опасность потери целого класса нетривиальных решений.
- 15.3. Два идеальных колебательных контура имеют одинаковые катушки и конденсаторы с различающимися емкостями. Катушки расположены так, что коэффициент взаимной индукции оказывается существенным. Постройте примерные графики зависимости частот собственных колебаний в системе от коэффициента связи между контурами (отношение коэффициента взаимной индукции к индуктивности катушек).
- 15.4. Оценить частоту свободных колебаний в системе, представляющей собой проводящую цилиндрическую трубу длиной l и радиусом R , в боковой поверхности которой сделан разрез шириной $h \ll R$. К краям разреза припаяны две параллельные металлические пластины размером $l \times l$ (рис. 15.1,6).

15.5. Рассчитайте амплитудно-частотные характеристики и постройте векторные диаграммы для фильтров, аналогичных рассмотренному в примере, но содержащих вместо конденсатора:

- а) катушку с известной индуктивностью и активным сопротивлением;
- б) параллельный колебательный контур;
- в) последовательный колебательный контур.

Постройте векторные диаграммы.

15.6. Рассчитать амплитудно-частотную характеристику одного звена «бесконечной лестницы» реактивных элементов, рассмотренной в примере.

15.7. Оценить входное сопротивление длинного коаксиального кабеля, представив ответ в единицах системы СИ.

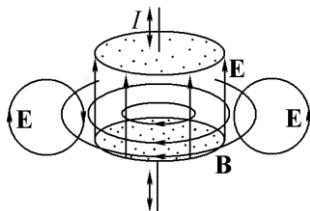
15.8. Найти входное сопротивление системы, представляющей собой две расположенные параллельно на расстоянии d друг от друга очень длинные металлические полоски шириной $l \gg d$.

15.K1. Если Вам удалось создать программу для расчетов цепей постоянного тока (задача 7.K1), попытайтесь разработать ее аналог, моделирующий прохождение гармонических сигналов по линейным цепям, содержащим сопротивления, конденсаторы, катушки и трансформаторы.

Указание. Для удобства использования программы желательно предусмотреть возможность применения «виртуального» осциллографа.

15.K2. Изучите прохождение сигналов различной формы (периодических и непериодических) через описанные в задаче 15.5 простейшие фильтры. Для представления сигналов в виде суперпозиции гармонических удобно воспользоваться программами, осуществляющими численное Фурье-преобразование, которые можно найти во многих стандартных пакетах компьютерных программ по математике.

Лекция 16



Система уравнений Максвелла

После открытия закона электромагнитной индукции система уравнений, описывающих электрические и магнитные поля, утратила симметрию. Еще более существенным ее недостатком было несоответствие закону сохранения электрического заряда. Из бесконечного числа мысленных способов видоизменений системы уравнений электромагнетизма, приводящих ее в соответствие с фундаментальным законом сохранения, Максвеллом был выбран тот, который делал ее симметричной хотя бы для пустого пространства. Измененная система уравнений указывала на возможность распространения электромагнитных волн в вакууме. Асимметрия уравнений в случае существования источников поля сохранилась.

16.1. Гипотеза Максвелла

После открытия Фарадеем закона электромагнитной индукции система уравнений, описывающих электромагнитное поле, потеряла симметричный вид, который имела в электростатике и магнитостатике:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 4\pi\rho, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Еще более существенным недостатком приведенной системы уравнений (16.1) является ее несовместность с законом сохранения электрического заряда (7.4). Действительно, тождественное равенство нулю дивергенции ротора магнитного поля с учетом закона сохранения заряда приводит к явно противоречащему здравому смыслу (и результатам экспериментов) выводу о невозможности изменения плотности заряда во времени:

$$0 = (\nabla, [\nabla, \mathbf{B}]) = \frac{4\pi}{c} (\nabla, \mathbf{j}) = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Для устранения указанного противоречия Максвелл видоизменил уравнение для ротора магнитного поля. Из бесчисленного множества способов изменить систему уравнений он выбрал тот, который в случае отсутствия источников поля делал систему (14.1) почти полностью симметричной. Идея состояла в дополнении правой части уравнения для ротора магнитного поля слагаемым

$$[\nabla, \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \mathbf{X},$$

подбираемым так, чтобы ее дивергенция, как и дивергенция левой части, тождественно обращалась в нуль:

$$0 = \frac{4\pi}{c} (\nabla, \mathbf{j}) + (\nabla, \mathbf{X}) = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{X}) = \left(\nabla, \mathbf{X} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

В результате система уравнений для электромагнитного поля приняла вид, сохранившийся в классической физике до настоящего времени:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 4\pi\rho, & (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & [\nabla, \mathbf{B}] &= 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Интегральная форма системы уравнений Максвелла для вакуума имеет вид

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) &= 4\pi q, & \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}), & \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) + \frac{4\pi}{c} I. \end{aligned}$$

Сравнение систем уравнений показывает, что идея Максвелла по сути сводилась к предположению о том, что **наряду с токами вихревое магнитное поле может порождаться переменным электрическим полем, подобно тому как вихревое электрическое поле порождается переменным магнитным.**

Следует отметить, что даже в случае отсутствия источников поля ($Q = 0, \mathbf{j} = 0$) система уравнений Максвелла оказалась не полностью симметричной: в уравнениях для роторов электрического и магнитного полей правые части имеют разные знаки:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 0, & (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & [\nabla, \mathbf{B}] &= +\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Пример. Электромагнитное поле в конденсаторе, подключенном к переменной ЭДС

Рассчитать электрическое и магнитное поля в плоском конденсаторе, обкладки которого представляют собой удаленные друг от друга на расстояние h диски, если к нему подключен источник переменного тока, в результате чего заряды на обкладках изменяются по гармоническому закону.

Решение. В нулевом приближении электрическое поле внутри конденсатора однородно и изменяется во времени по тому же закону, что и заряд на его обкладках (рис. 16.1,*a*):

$$Q(t) = Q \cos(\omega t) = \operatorname{Re} Q e^{-i\omega t} \Rightarrow E_0 = \frac{u(t)}{h} = \frac{Q(t)}{Ch} = \frac{Q}{Ch} e^{-i\omega t}.$$

Переменное электрическое поле согласно гипотезе Максвелла порождает вихревое магнитное поле, циркуляция которого определяется скоростью изменения потока вектора \mathbf{E} . Симметрия системы позволяет легко установить конфигурацию магнитного поля и выбрать соответствующий контур интегрирования в виде окружности с центром на оси симметрии конденсатора:

$$2\pi r B_1 = \frac{1}{c} \frac{dE_0}{dt} S = (-i\omega) \frac{Q}{Ch} \pi r^2 e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 = \operatorname{Re} \left(-\frac{i\omega r}{c} \right) \frac{Q}{Ch} e^{-i\omega t} = -\frac{\omega r}{c} \frac{Q}{Ch} \sin(\omega t).$$

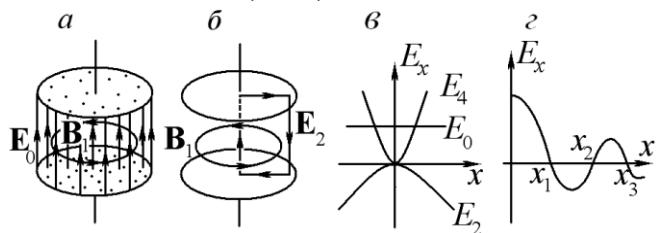


Рис. 16.1. Электромагнитное поле в плоском конденсаторе, подключенном к источнику переменного напряжения:

- a* — вычисление электрического и магнитного полей в нулевом (\mathbf{E}_0) и первом (\mathbf{B}_1) приближении;
- б* — вычисление электрического поля во втором (\mathbf{E}_2) приближении;
- в* — зависимость амплитуды от расстояния до оси симметрии для трех первых приближений к напряженности электрического поля в конденсаторе;
- г* — примерный вид зависимости суммарного электрического поля от расстояния до оси симметрии конденсатора.

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея переменное магнитное поле, в свою очередь, порождает вихревое электрическое. При вычислении циркуляции последнего удобен прямоугольный контур, проходящий по оси конденсатора и его двум обкладкам (рис. 16.1,*б*). На указанных участках индуцированное магнитным полем электрическое поле отсутствует. На оси конденсатора амплитуда переменного магнитного поля равна нулю, т. е. отсутствует причина, порождающая вторичное электрическое поле. В проводящих обкладках конденсатора электрическое поле существовать не может. Последнее утверждение не совсем строго и обосновывалось только для электростатических полей. В случае же переменных во времени полей утверждение о равенстве нулю электрического поля в объеме проводника выполняется с достаточно хорошей точностью лишь в случае не очень высоких частот. В результате получаем следующее уравнение для первой поправки к электрическому полю в конденсаторе:

$$hE_2 = \operatorname{Re} \frac{h}{c} \frac{d}{dt} \int_0^r dr B_1(r) = h \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{i\omega r}{c} \right)^2 \frac{Q}{Ch} e^{-i\omega t}.$$

Дополнительное электрическое поле \mathbf{E}_2 оказывается направленным противоположно исходному полю \mathbf{E}_0 и квадратично возрастает с расстоянием от оси симметрии системы (рис. 16.1,*б*):

$$\operatorname{Re} E_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \frac{Q}{Ch} \cos(\omega t).$$

Таким образом, существует такое расстояние от оси, на котором нулевое и первое приближения для электрического поля в сумме дают нуль.

На описанном этапе решение задачи расчета поля в конденсаторе методом последовательных приближений не завершается. Найденная поправка к напряженности электрического поля \mathbf{E}_2 изменяется во времени и, следовательно, порождает переменное магнитное поле \mathbf{B}_3 , которое, в свою очередь, порождает электрическое поле \mathbf{E}_4 . Последнее оказывается сонаправленным с исходным электрическим полем и возрастает пропорционально четвертой степени расстояния от оси. Учет этого приближения несколько изменяет расстояние, на котором суммарное поле в первый раз обращается в нуль и приводит к появлению еще одного нуля в зависимости напряженности электрического поля от расстояния до оси конденсатора.

Результирующие выражения для полных электрических и магнитных полей в конденсаторе представляются в виде бесконечных сумм знакопеременных слагаемых по четным (для \mathbf{E}) и нечетным (для \mathbf{B}) степеням расстояний. При этом возникает дискретный набор расстояний от оси x_n , на которых электрическое поле отсутствует (рис. 16.1,*в*).

Очевидно, что размещение в точках с равным нулю полем x_n металлических стенок, соединяющих обкладки конденсатора, не приведет к протеканию по ним токов. Радиусы таких «не закорачивающих» конденсатор перегородок однозначно определяются частотой переменного поля в конденсаторе. Из сказанного следует, что в пустотелом цилиндре с проводящими стенками могут существовать незатухающие (на самом деле слабозатухающие) колебания электромагнитного поля со строго определенными частотами. Такой цилиндр аналогичен коле-

бательному контуру (см. пример в разделе 15.2) и является одной из разновидностей широко применяемых в СВЧ-технике *закрытых резонаторов*.

16.2. Система Максвелла для поля в веществе

Введенное Максвеллом в уравнения электромагнитного поля в вакууме слагаемое было им не очень удачно названо *током смещения*. Этот термин больше подходит для дополнительного слагаемого, появляющегося при рассмотрении уравнения для ротора магнитного поля в веществе.

Как отмечалось в лекции 12, посвященной уравнениям для магнитостатических полей в веществе, в правой части уравнения для ротора магнитного поля стоит плотность всех имеющихся токов (свободных j_0 и молекулярных j'). В случае переменных во времени полей помимо этих токов и слагаемого, введенного Максвеллом, появляется еще одно, обусловленное токами j'' , связанными с вызванными переменным электрическим полем периодическими колебаниями электронных облаков атомов и молекул:

$$\mathbf{j}'' = qn\mathbf{u} = qn \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = n \frac{\partial(q\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} .$$

Именно эти переменные токи, обусловленные вынужденными колебаниями электронных облаков, и было бы логичнее назвать токами смещения. Однако в современной литературе сохранилась введенная Максвеллом терминология, и током смещения называется сумма из двух весьма разнородных по физическому содержанию слагаемых, формально объединяемых в одно путем замены вектора \mathbf{E} на \mathbf{D} :

$$\mathbf{j}_{cm} \equiv \mathbf{j}'' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} .$$

В результате измененное Максвеллом уравнение для ротора вектора \mathbf{B} , содержащее в случае существования полей в веществе четыре типа различающихся источников магнитного поля

$$[\nabla, \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}' + \mathbf{j}'') + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$

с помощью ранее введенных вспомогательных векторных полей \mathbf{D} и \mathbf{H} может быть записано в достаточно компактном виде:

$$[\nabla, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} .$$

В окончательном виде система уравнений Максвелла для макроскопического электромагнитного поля в веществе имеет вид

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{D}) &= 4\pi\rho_0, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \mathbf{D} &= \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

16.3. Закон сохранения энергии, вектор Пойнтинга

Закон сохранения энергии требует, чтобы убывание плотности электромагнитной энергии в одной области пространства сопровождалось ростом плотности в другой (разумеется, при условии, что электромагнитная энергия не переходит в энергию другой формы). Из относительного характера одновременности событий и требования выполнения закона сохранения энергии во всех инерциальных системах отсчета следует, что описанные изменения плотности электромагнитной энергии должны сопровождаться ее перетеканием между областями пространства, где происходят изменения плотности.

В системе уравнений Максвелла, по сути, содержится информация о законе сохранения электромагнитной энергии и способах ее изменения. Для получения соответствующего выражения достаточно про-дифференцировать по времени суммарную плотность электрической и магнитной энергии и преобразовать возникшие при этом производные от полей с помощью уравнений (16.4) для роторов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_B) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{E})}{8\pi} + \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{B})}{8\pi} \right) = \\ &= -(\mathbf{E}, \mathbf{j}) + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}, [\nabla, \mathbf{B}]) - \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B}, [\nabla, \mathbf{E}]). \end{aligned}$$

В результате несложных выкладок искомая скорость изменения объемной плотности энергии представляется в виде двух слагаемых, одно из которых имеет смысл *джоулевой теплоты* (7.13), выделяющейся в системе, а другое — форму дивергенции некоторого вектора \mathbf{S} , описывающего миграцию энергии в пространстве:

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_B) = -\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 - (\nabla, \mathbf{S}), \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (16.5)$$

Физический смысл вектора \mathbf{S} , введенного Пойнтингом, становится более очевидным, если от дифференциального соотношения (16.5) перейти к его интегральному аналогу:

$$\frac{d}{dt} W = -I^2 R - \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{S}, d\mathbf{s}). \quad (16.6)$$

Поток вектора Пойнtingа через произвольную замкнутую поверхность равен скорости убывания электромагнитной энергии внутри объема, ограниченного этой поверхностью, в результате электромагнитного излучения. Таким образом, вектор Пойнtingа описывает плотность потока электромагнитной энергии в данной точке пространства.

Пример. Поток энергии в заряжающийся конденсатор

Плоский конденсатор, обкладки которого представляют собой диски радиусом r , удаленные друг от друга на расстояние h (см., например, рис. 16.1,*a*), заряжается постоянным током I . Найти вектор Пойнtingа в точках, лежащих на боковой поверхности конденсатора и полный поток энергии через боковую поверхность.

Решение. При заряде конденсатора постоянным током электрическое поле внутри него возрастает по линейному закону:

$$E(t) = \frac{u(t)}{h} = \frac{q(t)}{ch} = \frac{It}{4\pi^2 r^2}.$$

Порождаемое переменным электрическим полем магнитное поле

$$B = \frac{1}{2\pi r c} \frac{dE}{dt} \pi r^2 = \frac{I}{8\pi^2 r c}$$

не изменяется во времени и не создает дополнительного электрического поля. Вектор Пойнtingа в точках на боковой поверхности конденсатора оказывается направленным по нормали к его оси симметрии и имеет величину

$$S = \frac{c}{4\pi} EB = \frac{I^2 t}{128\pi^5 r^3}.$$

Интеграл от вектора Пойнтинга по боковой поверхности конденсатора оказывается точно равным скорости увеличения запасенной между обкладками электростатической энергии, чего и следовало ожидать исходя из закона сохранения энергии (16.6):

$$\frac{dW}{dt} = S \cdot 2\pi r h = \frac{I^2 t h}{64\pi^4 r^2} = \frac{1}{8\pi} \pi r^2 h \frac{I^2 t}{8\pi^4 r^4} = V \frac{d}{dt} \frac{E^2(t)}{8\pi}.$$

Таким образом, при заряде конденсатора энергия втекает в объем между его пластинами «сбоку», а не вдоль проводов, по которым перемещаются электрические заряды.

16.4. Электромагнитные волны в коаксиальном кабеле

В разделе 14.5 был рассмотрен бесконечный коаксиальный кабель и было показано, что любой мысленно выделенный его отрезок обладает емкостью и индуктивностью, пропорциональными его длине. Это позволяет ввести для кабеля понятие *погонной емкости* (емкость единицы длины кабеля):

$$\delta C = \frac{\epsilon}{2} \delta l \ln^{-1} \frac{r_>}{r_<} \Rightarrow C' = \frac{\epsilon}{2} \ln^{-1} \frac{r_>}{r_<} \quad (16.7)$$

и *погонной индуктивности* (индуктивности единицы длины кабеля):

$$\delta \tilde{L} = \frac{2\mu}{c^2} \delta l \ln^{-1} \frac{r_>}{r_<} \Rightarrow \tilde{L}' = \frac{2\mu}{c^2} \ln^{-1} \frac{r_>}{r_<}. \quad (16.8)$$

Эквивалентной схемой полубесконечного коаксиального кабеля является «лестница» реактивных элементов, составленная из бесконечно малых конденсаторов и катушек. В случае изменяющихся во времени токов и напряжений заряды соседних конденсаторов и напряжения на них могут отличаться друг от друга, поскольку наличие препятствующей росту тока индуктивности делает невозможным быстрое перетекание зарядов с одного конденсатора на другой. При-

меняя закон Кирхгофа к ячейке цепи, состоящей из двух соседних конденсаторов, разделенных катушкой (рис. 16.2,*a*), и переходя к пределу малых расстояний, нетрудно получить уравнение в частных производных, связывающее токи и напряжения в кабеле:

$$U(r_x) - U(r_x + \delta r_x) - \tilde{L}' \delta r_x \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_x} = -\tilde{L}' \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (16.9)$$

Второе аналогичное уравнение следует из правила Кирхгофа: протекающие по соседним участкам кабеля токи могут отличаться друг от друга на величину тока заряда распределенной емкости:

$$I(r_x) = I(r_x + \delta r_x) + C' \delta r_x \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial r_x} = -C' \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (16.10)$$

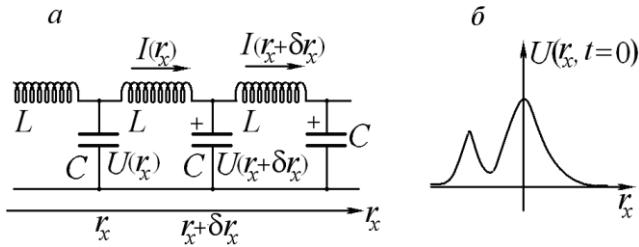


Рис. 16.2. Распространение импульсов токов и напряжений в коаксиальном кабеле:

- a* — к выводу дифференциальных уравнений для токов и напряжений в бесконечном коаксиальном кабеле по правилу Кирхгофа;
- б* — одно из возможных решений в виде одиночного импульса (приведено распределение напряжения по длине кабеля в начальный момент).

Исключая из полученной системы уравнений в частных производных (16.9), (16.10) одно из неизвестных (ток или напряжение), легко найти окончательное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r_x^2} &= -\tilde{L}' \frac{\partial^2 I}{\partial r_x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial r_x \partial t} &= -C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r_x^2} + \tilde{L}' C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (16.11)$$

которое обычно называют *волновым уравнением*, или *однородным уравнением Д'Аламбера* для одномерного случая (второе название предпочтительнее, поскольку в квантовой механике волновым уравнением называют другое соотношение).

Решением однородного уравнения Д'Аламбера (16.11) является произвольная дважды дифференцируемая функция от аргумента $\zeta_{\pm} = x \pm ut$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned} u &\equiv \sqrt{\frac{1}{L'C'}}, \quad \zeta_{\pm} \equiv r_x \pm ut, \quad U(x, t) = f(\zeta_{\pm}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\pm}^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{L'C'} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\pm}^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + L'C' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\zeta_{\pm}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\pm}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\pm}^2} \right) f(\zeta_{\pm}) = 0 \cdot f(\zeta_{\pm}) = 0. \end{aligned}$$

Смысл такого решения состоит в том, что **в кабеле в двух направлениях могут распространяться импульсы напряжения и связанные с ними уравнениями (16.9) и (16.10) импульсы тока весьма-ма произвольной формы**, определяемой дважды дифференцируемой функцией $f(\zeta_{\pm})$ (рис. 16.2, б). Для вычисления скорости распространения таких импульсов достаточно найти скорость перемещения в пространстве какой-либо одной его точки (например, точки максимальной амплитуды $\zeta_{\pm} = \zeta_{\max}$). Легко показать, что эта скорость определяется произведением погонной емкости и индуктивности линии:

$$\zeta_{\pm} = \zeta_{\max} = \text{const} \Rightarrow 0 = \frac{dx}{dt} \pm \sqrt{\frac{1}{L'C'}} \Rightarrow u \equiv \frac{dx}{dt} = \mp \sqrt{\frac{1}{L'C'}}. \quad (16.12)$$

Подстановка в формулу (16.12) выражений (16.7) и (16.8) для погонных индуктивности и емкости приводит к известному результату для скорости распространения электромагнитных импульсов в кабеле:

$$u \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (16.13)$$

Весьма существенно, что скорость распространения сигналов в коаксиальном кабеле оказывается не зависящей от геометрических размеров линии и определяется только свойствами диэлектрика, наполняющего пространство между токоведущими частями.

Результаты (16.11) и (16.13) были получены для коаксиального кабеля, однако они справедливы и в гораздо более общем случае: **импульсы токов и напряжений произвольной формы могут распространяться в любой двухпроводной линии с произвольным попечерным сечением проводников**. Под двухпроводной линией понимаются два параллельно расположенных бесконечных провода, попечерное сечение которых не изменяется при перемещении вдоль линии. Очевидно, что в природе и технике бесконечных двухпроводных линий не встречается, однако решение задачи о распространении сигналов в ограниченных линиях можно построить как суперпозицию полученных решений для бесконечной линии.

Необходимо учитывать, что выражение для скорости распространения электромагнитных импульсов в кабеле (16.13) получено в предположении, что характеризующие отклик среды на электромагнитное поле параметры ϵ и μ , вычисляемые в случае статических полей, сохраняют значение и в случае сигналов, изменяющихся во времени. Указанное предположение справедливо только в случае квазистатических полей, времена изменения которых велики по сравнению с характерными временами поляризации. В случае невыполнения этого требования процесс распространения электромагнитных импульсов по кабелю сопровождается изменением их формы, само понятие скорости в данном случае требует детального обсуждения.

Пример. Отражение электромагнитного импульса от разомкнутого конца кабеля

Импульс напряжения, форма которого описывается функцией f , распространяется по конечному коаксиальному кабелю в положительном направлении, приближаясь к его разомкнутому концу. Определить форму импульса напряжения после его отражения.

Решение. На разомкнутом конце кабеля сила электрического тока должна равняться нулю. Соответствующее решение можно пытаться строить как линейную комбинацию решений, ранее полученных для бесконечного кабеля.

Из соотношений (16.10), (16.11) следует, что импульс тока, соответствующий распространяющемуся в положительном направлении импульсу напряжения $f(\zeta)$, имеет ту же форму и отличается от импульса напряжения лишь множителем, равным волновому сопротивлению бесконечного кабеля R_{LC} (15.9):

$$\begin{aligned} U(r_x, t) &= f(r_x - ut) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_x} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_-}, \\ I(r_x, t) &= g(r_x - ut) \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = -u \frac{\partial g}{\partial \zeta_-}, \\ \frac{\partial U}{\partial r_x} &= -\tilde{L}' \frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \zeta_-} = -\tilde{L}'(-u) \frac{\partial g}{\partial \zeta_-} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{\tilde{L}'}{C'}} g = R_{LC} g. \end{aligned}$$

В случае же распространения импульсов в отрицательном направлении импульсы тока и напряжения имеют противоположные знаки:

$$\begin{aligned} U(r_x, t) &= f(r_x + ut) \Rightarrow f = -\sqrt{\frac{\tilde{L}'}{C'}} g = -R_{LC} g. \\ I(r_x, t) &= g(r_x + ut) \end{aligned}$$

Начальную точку $r_x = 0$ удобно совместить с точкой обрыва кабеля, а начальный момент времени — с моментом прихода в эту точку импульса напряжения. Тогда в силу граничного условия в любой момент времени ток в точке $r_x = 0$ должен отсутствовать. Этого можно добиться, прибавив к заданному в условии решению, описывающему распространяющийся по кабелю в положительном направлении импульс, другое решение, соответствующее равному по амплитуде импульсу, распространяющемуся навстречу:

$$\begin{aligned} I_\Sigma(r_x, t) &= g(r_x - ut) - g(r_x + ut) \Rightarrow \begin{cases} I_\Sigma(0, 0) = 0, \\ U_\Sigma(0, 0) = 2f(0). \end{cases} \\ U_\Sigma(r_x, t) &= f(r_x - ut) + g(r_x + ut) \end{aligned}$$

В этом случае токи в точке обрыва взаимно уничтожаются, а напряжения — складываются. Таким образом, при отражении от разомкнутого конца кабеля импульс напряжения сохраняет полярность, а токи начинают течь в направлении, противоположном токам в исходном падающем импульсе. В точке обрыва напряжение удваивается по сравнению с величиной напряжения в импульсе.

Аналогичным образом может быть рассмотрен процесс отражения электромагнитных волн от закороченного конца кабеля, на котором в нуль должен обращаться не ток, а напряжение.

16.5. Электромагнитные волны в вакууме

Электромагнитные импульсы могут распространяться не только в кабелях и двухпроводных линиях, но и в пустом пространстве. Это важнейшее следствие уравнений Максвелла получило блестящее экспериментальное подтверждение в опытах Герца и сегодня находит широчайшее применение в радио- и телевизионной технике и оказывает существенное влияние на облик современной цивилизации.

Совпадение предсказываемой системой уравнений скорости распространения электромагнитных волн в вакууме с измеренной скоростью света в пустоте явилось сильнейшим аргументом в пользу электромагнитной природы света. В результате создания законченной классической теории электромагнетизма классическая (неквантовая) оптика по существу перестала быть самостоятельной дисциплиной, превратившись в следствие системы уравнений Максвелла.

Уравнение, демонстрирующее возможность распространения электромагнитных волн в вакууме, непосредственно следует из системы уравнений Максвелла для свободного от источников поля пространства:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 0, & (\nabla, \mathbf{B}) &= 0, \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & [\nabla, \mathbf{B}] &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Дифференцирование по времени одного из двух уравнений для роторов электрического и магнитного полей позволяет исключить из рассматриваемой системы любой из векторов \mathbf{E} или \mathbf{B} :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = -c[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] = -c(\nabla(\nabla, \mathbf{E}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{E}) = c\nabla^2 \mathbf{E}.$$

В результате с учетом равенства нулю дивергенции каждого из векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} возникает однородное *уравнение Д'Аламбера*, отличающееся от ранее полученного для коаксиального кабеля одномерного

уравнения (16.11) наличием вторых производных по всем трем декартовым координатам:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (16.14)$$

В частном случае полей, изменяющихся только вдоль одной координаты (например, r_x), полученные уравнения для электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}(r_x, t) &\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r_x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(r_x, t) &\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial r_x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (16.15)$$

с точностью до буквенных обозначений совпадает с уравнением для распространения импульсов напряжения в кабеле, решение которого было рассмотрено ранее. Последнее означает, что **система уравнений Максвелла для пустого пространства допускает решения в виде импульсов электрического и магнитного полей произвольной формы, распространяющихся в пространстве со скоростью света**:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_x, t) &= \mathbf{e}_{1p} f(r_x \pm ct), \\ \mathbf{B}(r_x, t) &= \mathbf{e}_{2p} g(r_x \pm ct), \end{aligned} \quad (16.16)$$

где \mathbf{e}_p — единичные векторы, определяющие поляризацию электромагнитной волны.

Связь между функциями, описывающими импульсы электрического и магнитного полей и их многочисленные свойства будут подробно рассматриваться в курсе оптики.

Пример. Плоская монохроматическая волна

При каких значениях констант k и ω в вакууме может существовать электромагнитное поле, электрическая составляющая которого имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{e}_x \cos(kr_z - \omega t). \quad (16.17)$$

Получить выражение для соответствующей (16.17) конфигурации магнитного поля. Найти вектор Пойнтинга заданного электромагнитного поля.

Решение. Для определения связи между входящими в описывающее плоскую электромагнитную волну выражение волновым числом k и частотой ω достаточно подставить заданное выражение для электрического поля в уравнение Д'Аламбера (16.14):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_0 \mathbf{e}_x \cos(kr_z - \omega t) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0 \mathbf{e}_x \cos(kr_z - \omega t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k = \pm \frac{\omega}{c}.$$

Оба найденных решения соответствуют распространению волн вдоль координатной оси z (в прямом и в обратном направлении). Полученное в результате подстановки связи между частотой ω и волновым числом k в выражение для электрического поля плоской монохроматической волны (16.17) соотношение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{e}_x \cos[k(r_z \mp ct)]$$

согласуется с общим видом решения одномерного уравнения (16.16).

Соответствующее соотношению (16.17) магнитное поле удобно искать, используя уравнение Максвелла для ротора \mathbf{E} :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c [\nabla, \mathbf{E}] = ck E_0 \mathbf{e}_y \sin(kr_z - \omega t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{ck}{\omega} E_0 \mathbf{e}_y \cos(kr_z - \omega t) = E_0 \mathbf{e}_y \cos(kr_z - \omega t).$$

По найденным электрическому и магнитному полям определяется вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = E_0^2 \cos^2(kr_z - \omega t) [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y] = E_0^2 \mathbf{e}_z \cos^2(kr_z - \omega t).$$

Как можно видеть, энергия электромагнитного поля распространяется вдоль оси z , т. е. в направлении распространения плоской монохроматической волны. Векторы электрического, магнитного полей и вектор Пойнтинга взаимно перпендикулярны и составляют правую

тройку. Об этом свойстве, общем для всех электромагнитных волн в вакууме, говорят как о *поперечности электромагнитных волн*.

Соотношения, которые полезно помнить

$(\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0,$ $[\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$	Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в веществе
$\frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_B) = -\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 - (\nabla, \mathbf{S}),$ $\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]$	Закон сохранения электромагнитной энергии и вектор Пойнтинга
$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$ $\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	Однородное уравнение для электромагнитных волн в вакууме

Задачи для самостоятельного решения

- 16.1. Получите общее выражение для всех членов рядов для электрического и магнитного полей в плоском конденсаторе, через который протекает переменный ток (см. пример к разделу 16.1).
- 16.2. Получите выражение для вектора Пойнтинга, описывающего плотность потока электромагнитной энергии в веществе, характеризуемом константами ϵ и μ .
- 16.3. Заданный постоянный электрический ток протекает через сопротивление, представляющее собой однородный цилиндр известного размера, удельная проводимость вещества которого известна. Найти вектор Пойнтинга в точках на поверхности цилиндра. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность цилиндра равен тепловой мощности, выделяемой на этом сопротивлении.

- 16.4. Электрический заряд помещен в центр плоской петли с током. Что представляют собой линии вектора Пойнтинга на плоскости, определяемой этой петлей?
- 16.5. Источник заданного косинусоидального напряжения подсоединен к нагрузке с помощью очень длинных параллельных цилиндрических проводов, диаметр которых задан. Расстояние между проводами известно. Определить мгновенное и среднее значения вектора Пойнтинга в точках, расположенных посередине между проводами, на большом расстоянии от их концов. Рассмотреть случаи, когда в качестве нагрузки подключены сопротивление, конденсатор, катушка.
- 16.6. Показать, что в двухпроводной линии с произвольным попечным сечением параллельно расположенных проводов могут распространяться импульсы напряжения произвольной формы. Найти скорость распространения этих импульсов.
- Указание. Рассчитать погонные емкость и индуктивность линии исходя из выражений для электрической и магнитной энергии, запасенной в пространстве, окружающем проводники. Учесть, что пространственное распределение модулей векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} одинаково. Обосновать последнее утверждение.
- 16.7. Проанализировать случай отражения импульса напряжения от короткозамкнутого конца коаксиального кабеля.
- 16.8. Найти электрическое поле и вектор Пойнтинга стоячей электромагнитной волны в вакууме, магнитное поле которой описывается выражением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t) \sin(kr_y).$$

- 16.K1. Подумайте над созданием программы, позволяющей по заданному пространственному распределению электрической составляющей $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ монохроматического электромагнитного поля определять ее магнитную составляющую и соответствующий полю вектор Пойнтинга.

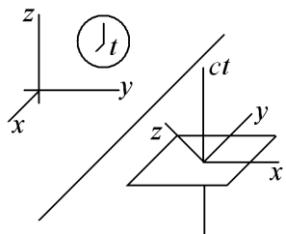
Указание. Монохроматическим называется электромагнитное поле, электрическая и магнитная составляющие которого изменяются во времени по гармоническому закону:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_E), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_B).\end{aligned}$$

- 16.K2. Используя имеющиеся в Вашем распоряжении моделирующие программы, изучите поведение свободного заряда в электромагнитном поле плоской монохроматической волны линейной поляризации (16.17).
- 16.K3. Используя имеющиеся в Вашем распоряжении моделирующие программы, изучите поведение атома Томсона (неподвижное ядро с электроном, удерживаемым в атоме упругой силой) в электромагнитном поле плоской монохроматической волны линейной поляризации. Проследите за тем, как изменяется отклик атома на воздействие поля при приближении частоты электромагнитной волны к частоте собственных колебаний электрона в атоме. Как изменится поведение модели в области резонанса в случае учета действия сил радиационного трения? Покажите, что при учете взаимодействия электрона с магнитной составляющей поля плоской монохроматической волны вынужденные колебания будут происходить не только на частоте электромагнитного поля, но и на удвоенной частоте.
- 16.K4. Известно, что при помещении тела в поле электромагнитной волны возникают силы, ориентированные вдоль направления ее распространения (эффект светового давления). Разработайте компьютерную модель, иллюстрирующую этот эффект на простейшем примере атома Томсона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны.

Указание. В рамках классического описания световое давление возникает в результате действия на раскачиваемые электрическим полем электроны атомов силы Лоренца, обусловленной магнитным полем световой волны.

Лекция 17



Электродинамика в релятивистских обозначениях

Система уравнений Максвелла (и ее решения) соответствует требованиям специальной теории относительности, основные идеи и соотношения которой исторически были получены в результате анализа следствий электродинамики. Однако стандартная форма записи уравнений электромагнетизма явно не отражает внутренней симметрии, обусловленной релятивистской инвариантностью описываемых ею законов природы. С этой точки зрения более адекватным представляется использование релятивистских четырехмерных обозначений.

17.1. Релятивистская механика в четырехмерных обозначениях

Принцип относительности сводится к утверждению, что **во всех инерциальных системах все физические явления** (а следовательно, и вообще все явления природы) **протекали одинаково**. В свою очередь это означает, что описывающие законы физики уравнения должны быть инвариантными относительно преобразований координат, соответствующих переходам из одной инерциальной системы в другую.

Вследствие релятивистского эффекта сокращения длин движущихся отрезков (9.1) обычные трехмерные векторы оказываются непригодными для инвариантного описания. Например, инвариантный относительно операции вращения системы координат квадрат длины трехмерного вектора, вычисляемый как скалярное произведение вектора на самого себя, изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой и, следовательно, перестает быть инвариантным.

Простейшим выходом из создавшегося положения является переход к описанию законов физики с помощью четырехкомпонентных

векторов (*четырехвекторов*), координаты которых при переходе к движущейся инерциальной системе отсчета изменяются в соответствии с установленными Х. Лоренцем преобразованиями:

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - u_c a_x}{\sqrt{1-u_c^2}}, \\ a'_t &= \frac{a_t - u_c a_x}{\sqrt{1-u_c^2}}, \\ a'_y &= a_y, \\ a'_z &= a_z, \end{aligned} \quad . \quad (17.1)$$

где для удобства записи введена «безразмерная скорость» $u_c = u/c$. В дальнейшем четырехвекторы будут обозначаться как четырехкомпонентные или двухкомпонентные столбцы, объединяющие нулевую («временную») компоненту и три компоненты обычного вектора. При обозначении четырехвектора с помощью одного символа будем использовать выделение шрифтом и стрелкой (последняя позволяет отличать четырехкомпонентный вектор от классического трехкомпонентного):

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_t \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \equiv \vec{\mathbf{A}}.$$

Простейшим (и исходным для построения релятивистской теории) четырехвектором является совокупность четырех скалярных величин: произведения времени на скорость света и трех компонент классического радиус-вектора:

$$\vec{\mathbf{R}} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix},$$

из компонент которого строится релятивистски инвариантная величина — *интервал*:

$$S^2 \equiv c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = r_t^2 - r_x^2 - r_y^2 - r_z^2 = \text{inv}. \quad (17.2)$$

В отличие от суммы квадратов трех компонент классического вектора, остающейся неизменной при произвольных пространственных поворотах системы координат, определяемый соотношением (17.2) «квадрат длины четырехвектора» остается неизменным не только при поворотах, но и при переходе к другой инерциальной системе отсчета.

Для четырехвекторов устанавливаются обычные правила сложения и умножения на число (указанные операции, как и в случае трехмерных векторов, проводятся покомпонентно) и несколько отличное от принятого для трехмерных векторов правило вычисления скалярного произведения

$$(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}) \equiv a_t b_t - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (17.3)$$

Используя преобразования Лоренца (17.1), легко показать, что определенное согласно (17.2) скалярное перемножение двух четырехвекторов оказывается релятивистски инвариантной величиной (скаляром). В частности, интервал может рассматриваться как скалярное произведение четырехмерного радиус-вектора на самого себя.

Традиционная операция дифференцирования четырехвектора по времени «портит» его трансформационные свойства вследствие того, что сам бесконечно малый интервал времени δt изменяется при переходе к другой системе отсчета в соответствии с релятивистским эффектом изменения длительностей временных интервалов (8.1). Для того чтобы производная по времени от четырехвектора оказалась вновь четырехвектором, необходимо использовать инвариантную операцию *дифференцирования по собственному времени*, т. е. интервалу длительности, измеряемому часами, установленными в рассматриваемой системе отсчета:

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-u_c^2}} \Rightarrow \frac{d}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \frac{d}{dt}. \quad (17.4)$$

Используя операцию инвариантного дифференцирования, легко ввести четырехвектор *скорости*

$$\vec{\mathbf{U}} \equiv \frac{d}{dt_0} \vec{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt_0} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-u_c^2}} \\ \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u_c^2}} \end{pmatrix},$$

произведение которого на инвариантную массу покоя дает новый четырехвектор, который следует назвать *четырехвектором импульса*:

$$\vec{P} \equiv m_0 \vec{U} = \begin{pmatrix} m_u c \\ m_u \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad m_u \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-u_c^2}}. \quad (17.5)$$

Трем пространственным компонентам последнего четырехвектора можно придать форму, совпадающую с классическим импульсом, если ввести *релятивистскую массу* m_u , увеличивающуюся по мере разгона частицы. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что квадраты четырехвекторов скорости и импульса, как и ожидается, оказываются инвариантами.

Для выяснения физического смысла «временной компоненты» четырехвектора импульса (17.5) удобно рассмотреть ее приближенное выражение в нерелятивистском случае. Второе слагаемое, появляющееся при ее разложении в ряд Тейлора, с точностью до постоянного множителя (скорости света) совпадает с классическим выражением для кинетической энергии тела

$$m_u c = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-u_c^2}} \approx \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0 u^2}{2} + \dots \right). \quad (17.6)$$

Полученный результат (17.6) указывает на то, что и порождаемая первым членом разложения в ряд Тейлора величина $m_0 c^2$ также может рассматриваться как часть энергии свободного тела, обусловленной только тем, что это тело обладает массой покоя. Интересным является тот факт, что практически всегда превышающая кинетическую энергию тела *энергия покоя* «оставалась незамеченной» в течение весьма длительного промежутка времени — всего развития классической физики.

Сформулированное на основании релятивистского рассмотрения механики предположение о существовании у тел энергии покоя впоследствии получило блестящее экспериментальное подтверждение в ходе изучения ядерных реакций, при которых суммарные массы исходных и конечных продуктов отличались друг от друга (реакции деления и ядерного синтеза). Таким образом, **«временная компонента» четырехвектора импульса представляет собой отношение энергии тела к скорости света.**

Пример. Квадрат четырехвектора энергии-импульса

Вычислить квадрат четырехвектора энергии-импульса.

Решение. Воспользовавшись правилом скалярного перемножения четырехвекторов (15.2) и явным выражением для компонент четырехвектора энергии-импульса (15.4), легко вычислить скалярное произведение последнего на самого себя:

$$(\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{P}}) = m^2 c^2 - m^2 \mathbf{u}^2 = \frac{m_0^2}{1-u^2} (c^2 - \mathbf{u}^2) = m_0^2 c^2 = \text{inv} .$$

17.2. Четырехмерный аналог оператора ∇

Для вывода явного выражения для четырехмерного аналога оператора пространственного дифференцирования удобно рассмотреть приращение какой-либо скалярной (инвариантной относительно преобразований Лоренца) функции от координат и времени $f = f(\mathbf{r}, t)$:

$$\delta f(\vec{\mathbf{R}}) = \frac{\partial f}{\partial r_t} \delta r_t + \frac{\partial f}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial f}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial f}{\partial r_z} \delta r_z = \sum_{\zeta} \frac{\partial f}{\partial r_{\zeta}} \delta r_{\zeta} . \quad (17.7)$$

Осуществляя аналогичное разложение для другой системы отсчета, легко получить сходное выражение для приращения функции, выраженное через координаты, изменяемые наблюдателем в другой системе отсчета:

$$\delta f(\vec{\mathbf{R}}') = \sum_{\zeta} \frac{\partial f}{\partial r'_{\zeta}} \delta r'_{\zeta} . \quad (17.8)$$

С помощью преобразований Лоренца приращения координат в движущейся системе (17.8) могут быть выражены через аналогичные приращения в исходной системе (17.7), после чего из сравнения коэффициентов при одинаковых приращениях нетрудно получить закон

преобразования частных производных, входящих в выражения для оператора пространственно-временного дифференцирования

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r_t} &= \frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r'_t} - u_c \frac{\partial}{\partial r'_x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r_x} &= \frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r'_x} - u_c \frac{\partial}{\partial r'_t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r_y} &= \frac{\partial}{\partial r'_y}, \\ \frac{\partial}{\partial r_z} &= \frac{\partial}{\partial r'_z}.\end{aligned}\quad (17.9)$$

Обратные (17.9) преобразования

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r'_t} &= \frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r_t} + u_c \frac{\partial}{\partial r_x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r'_x} &= \frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r_x} + u_c \frac{\partial}{\partial r_t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r'_y} &= \frac{\partial}{\partial r_y}, \\ \frac{\partial}{\partial r'_z} &= \frac{\partial}{\partial r_z}\end{aligned}\quad (17.10)$$

отличаются знаками от преобразований Лоренца (17.1). Для устранения этого досадного неудобства разумно определить четырехмерный аналог оператора пространственного дифференцирования (набла) так, чтобы знаки перед его пространственной частью были заменены на противоположные:

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_t} \\ -\nabla \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определенный четырехмерный оператор пространственного дифференцирования совместно с релятивистским правилом скалярного перемножения векторов позволяет достаточно компактно

записать выражение для приращения скалярной функции в виде, подобном трехмерному случаю:

$$\delta f = (\vec{\nabla} f, \delta \vec{r}) = \sum_{\zeta} \frac{\partial f}{\partial r_{\zeta}} \delta r_{\zeta}. \quad (17.11)$$

Аналогично (17.11) четырехмерный оператор дифференцирования может использоваться для компактной записи четырехмерной дивергенции:

$$(\vec{\nabla}, \vec{X}) = \nabla_t X_t - (-\nabla, \mathbf{X}) = \sum_{\zeta} \frac{\partial X_{\zeta}}{\partial r_{\zeta}}. \quad (17.12)$$

17.3. Закон сохранения электрического заряда

Введение операции вычисления дивергенции четырехвектора позволяет записать закон сохранения электрического заряда (7.4) в более элегантном виде. С этой целью удобно ввести *четырехвектор плотности тока*, определив его как произведение «собственной плотности» электрического заряда (плотность, рассчитываемая в системе отсчета, где этот заряд находится в состоянии покоя) на четырехвектор скорости:

$$\vec{J} \equiv \frac{\partial q}{\partial V_0} \vec{U}.$$

При таком определении три пространственные компоненты четырехвектора плотности тока совпадают с соответствующими компонентами ранее определенной плотности тока (7.1) вследствие взаимной компенсации релятивистских эффектов сокращения длин отрезков и увеличения интервалов времени:

$$\vec{J} \equiv \frac{\partial q}{\partial V_0} \frac{\partial}{\partial t_0} \vec{R} = \frac{\partial q}{\partial V} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (17.13)$$

Применение операции вычисления дивергенции (17.12) к четырехвектору плотности тока (17.13) с учетом записанного в традиционном

«трехмерном» виде закона сохранения электрического заряда (7.4) приводит к весьма простому результату:

$$(\vec{\nabla}, \vec{J}) = \frac{\partial j_t}{\partial r_t} - (-\nabla, \mathbf{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \mathbf{j}) = 0. \quad (17.14)$$

17.4. Неоднородное уравнение Д'Аламбера

Для придания системе уравнений Максвелла для вакуума более явной релятивистски инвариантной формы необходимо осуществить переход от описания электромагнитного поля с помощью векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} к его описанию с помощью потенциалов. Как отмечалось ранее, равенство нулю дивергенции магнитного поля позволяет определить с точностью до градиентного преобразования векторный потенциал (векторное поле, ротор которого восстанавливает вектор магнитной индукции \mathbf{B}):

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A}: \mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}].$$

Переход к записи магнитных полей с помощью векторного потенциала позволяет придать выражающему закон электромагнитной индукции Фарадея уравнению вид равенства нулю ротора некоторого векторного поля, а само это поле выразить через *градиент скалярного потенциала* (скалярное поле, градиент которого восстанавливает исходное потенциальное поле):

$$0 = [\nabla, \mathbf{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left[\nabla, \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \Rightarrow \exists \varphi: \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi.$$

Подстановка введенных векторного и скалярного потенциалов в уравнение для ротора магнитного поля приводит к достаточно громоздкому соотношению

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= [\nabla, \mathbf{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ &= \nabla \left\{ (\nabla, \mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} - \left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

которое существенно упрощается в случае выбора для потенциалов условия

$$(\nabla, \mathbf{A}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (17.15)$$

называемого *калибровкой Лоренца*. В этом случае векторный потенциал удовлетворяет *неоднородному уравнению Д'Аламбера*, правая часть которого содержит плотность тока:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (17.16)$$

Легко заметить, что полученное уравнение (17.15) является обобщением рассмотренного в магнитостатике уравнения Пуассона для векторного потенциала (10.12).

Аналогичное неоднородное уравнение для скалярного потенциала может быть получено из содержащего плотность электрических зарядов уравнения Максвелла и условия калибровки (17.15):

$$4\pi\rho = (\nabla, \mathbf{E}) = \left(\nabla, -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \dots = \left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (17.17)$$

Найденные соотношения (17.16) и (17.17) для векторного и скалярного потенциалов могут быть объединены в одно четырехкомпонентное уравнение

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} c\rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (17.18)$$

в правой части которого возникает использованный ранее при формулировании закона сохранения электрического заряда (17.14) четырехвектор плотности тока.

Стоящий в правой части объединенного уравнения оператор Д'Аламбера может рассматриваться как скалярное произведение на самого себя четырехкомпонентного оператора дифференцирования и, следовательно, представляет собой релятивистски инвариантный оператор

$$-\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Из сделанных утверждений следует, что стоящая в левой части четырехмерного уравнения (17.18) совокупность из скалярного потенциала и трех компонент векторного представляет собой четырехвектор

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \equiv \vec{\mathbf{A}},$$

который логично назвать *четырехпотенциалом*.

Введенные четырехмерные обозначения позволяют записать все уравнения электродинамики в краткой и изящной форме, демонстрирующей релятивистскую инвариантность этих уравнений:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}, \vec{\mathbf{J}}) &= 0, \\ (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{A}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}}. \end{aligned}$$

17.5. Решение неоднородного уравнения Д'Аламбера

Решение неоднородного уравнения Д'Аламбера удобно построить как естественное обобщение решения уравнений Пуассона (2.10) и (10.11) на случай зависящих от времени распределений источников поля. Первоначально уравнение Пуассона выводилось для макроскопических усредненных полей, что допускало замену распределения точечных зарядов-источников непрерывными распределениями, описываемыми специально вводимыми непрерывными функциями, — плотностями электрических зарядов и токов. Однако в математике существует возможность распространить такое описание и на случай дискретных источников поля (например, точечных зарядов). Для решения этой и сходных проблем в ней используется специальный и несколько экзотический объект — так называемая *дельта-функция Дирака*. Ее значение отлично от нуля только в одной точке, где аргумент обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, & x \neq 0, \\ \delta(x) &= \infty, & x = 0. \end{aligned}$$

Значение дельта-функции в указанной особой точке считается столь большим, что интеграл от нее оказывается равным единице.

Обсуждение строго математического определение дельта-функции

$$\delta(x) : \forall f(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

выходит далеко за пределы рассматриваемого в настоящем курсе круга вопросов и может быть найдено в курсах по обобщенным математическим функциям.

Использование аппарата дельта-функции позволяет записать уравнение Пуассона для потенциала, создаваемого расположенным в начале координат точечным зарядом, в виде, аналогичном случаю непрерывно распределенной плотности заряда:

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(0). \quad (17.19)$$

Сферически симметричное решение уравнения (17.19) вне точки $\mathbf{R} = 0$ априорно известно, поскольку представляет собой выражение для потенциала точечного заряда:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{q}{R}. \quad (17.20)$$

Естественным обобщением уравнения (17.19) на случай зависящего от времени потенциала, создаваемого неподвижным точечным зарядом, величина которого изменяется во времени, является неоднородное уравнение Д'Аламбера (17.17), правая часть которого содержит дельта-функцию от координат:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \varphi = -4\pi q(t)\delta(0). \quad (17.21)$$

Для получения сферически симметричного решения уравнения (17.21) удобно переписать оператор Лапласа в виде, содержащем только дифференцирование по расстоянию до точечного заряда R :

$$\varphi = \varphi(|\mathbf{R}|) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial R_\xi} = \frac{R_\xi}{R} \frac{\partial}{\partial R} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2}.$$

При этом для всех точек, не содержащих точечного заряда, неоднородное уравнение Д'Аламбера сводится к однородному одномерному уравнению волны типа (16.15) для неизвестной функции, представляющей собой произведение искомого потенциала на расстояние от текущей точки до начала координат:

$$R \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial t^2} = 0.$$

Ранее полученное решение однородного уравнения Д'Аламбера для одномерного случая (16.15) позволяет легко найти решение поставленной задачи для точек, не содержащих заряда:

$$R\varphi = f\left(t \mp \frac{R}{c}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{R} f\left(t \mp \frac{R}{c}\right). \quad (17.22)$$

Неоднозначность в аргументе входящей в решение (17.22) произвольной функции f устраняется при учете принципа причинности. Достаточно естественным представляется требование построения решения в виде запаздывающих (а не опережающих) сферических волн, приходящих в удаленные на расстояние R от испускающего их заряда точки наблюдения в моменты времени, следующие за моментом их испускания зарядом.

Существующий произвол в выборе самой функции f устраняется естественным требованием соответствия решения (17.22) исходному уравнению не только во всех точках пустого пространства, но и в точке нахождения самого заряда-источника поля. По аналогии с решением (17.20) для потенциала в случае не изменяющегося во времени заряда в качестве конкретного вида решения (17.22) должна выбираться функция, описывающая величину излучающего электромагнитные волны точечного заряда в моменты времени, выбираемые с учетом запаздывания:

$$f(t) = q(t) \Rightarrow \varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{R} q\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (17.23)$$

Подстановка построенного решения (17.23) в (17.21) показывает, что оно обращает исходное уравнение в тождество и в непосредственно прилегающей к излучающему заряду области $R \rightarrow 0$:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{1}{R} q\left(t - \frac{R}{c}\right) = \Delta \frac{q(t)}{R} - \frac{1}{R c^2} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -4\pi q(t) \delta(0).$$

Полученное решение для потенциала, создаваемого точечным зарядом, естественным образом обобщается на случай произвольной совокупности изменяющихся во времени точечных зарядов

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \sum_n \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_n|} q_n \left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_n|}{c} \right)$$

и, следовательно, произвольного слаженного пространственного распределения зарядов, плотность которых изменяется во времени:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \rho \left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (17.24)$$

Полная аналогия между неоднородными уравнениями Д'Аламбера для потенциалов (17.18) позволяет легко получить из решения (17.24) выражение для векторного потенциала, создаваемого заданным пространственным распределением изменяющихся во времени токов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int_V dV(\mathbf{r}) \frac{1}{c} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (17.25)$$

Пример. Электромагнитное поле электрического диполя, совершающего гармонические колебания

Рассчитать электрическое и магнитное поля в заданной точке пространства, создаваемые *электрическим диполем*, величина дипольного момента которого $d(t)$ изменяется во времени по гармоническому закону.

Решение. Для расчета магнитного поля достаточно найти векторный потенциал в произвольной точке пространства, задаваемой вектором \mathbf{R} . Считая размеры диполя малыми по сравнению с расстоя-

нием до точки наблюдения, можно существенно упростить решение (17.25) для векторного потенциала:

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \approx R \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \int dV(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{u}}{Rc} \rho\left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{Rc} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Магнитное поле вычисляется как ротор найденного векторного потенциала

$$\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}] = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \frac{d}{dR}, \frac{1}{R} \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R}{c}\right) \right] = \dots = \frac{1}{cR^3} \left[\ddot{\mathbf{d}} + \frac{R}{c} \ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{R} \right].$$

Для многих приложений оказывается важной приближенная формула для поля, создаваемого переменным диполем на большом расстоянии от него, в так называемой *волновой зоне*, где существенным оказывается только одно слагаемое, убывающее обратно пропорционально первой степени расстояния:

$$\mathbf{B}(R \gg \lambda) \approx \frac{1}{Rc^2} \left[\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R}{c}\right), \frac{\mathbf{R}}{R} \right].$$

Для нахождения электрического поля, создаваемого переменным диполем, необходимо вычислить скалярный потенциал. Последний может быть найден из решения (17.25), однако возможен и другой, более простой путь — вычисление потенциала исходя из условия калибровки Лоренца (17.15). Окончательное выражение для электрического поля оказывается несколько громоздким:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{R^3} \left[\mathbf{d} - 3 \frac{(\mathbf{d}^*, \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} - \frac{1}{c^2} \left[\ddot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R}{c}\right), \mathbf{R} \right], \mathbf{R} \right], \\ \mathbf{d}^* &\equiv \mathbf{d}\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{R}{c} \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{R}{c}\right), \end{aligned} \quad (17.26)$$

но существенно упрощается на больших расстояниях от диполя.

Соотношения, которые полезно помнить

$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}$	Четырехмерный аналог оператора «набла».
$\bar{\mathbf{J}} \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$	Четырехвектор плотности тока
$(\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{J}}) = 0$	Закон сохранения электрического заряда
$\bar{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$	Четырехвектор потенциала
$(\bar{\nabla}, \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{J}}$	Связь четырехвектора потенциала с четырехвектором плотности тока
$(\nabla, \mathbf{A}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$	Калибровка Лоренца
$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}]$	Выражение для векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} через потенциалы

Задачи для самостоятельного решения

- 17.1. Показать, что скалярное произведение двух четырехвекторов, определяемое соотношением (17.3), инвариантно относительно преобразований Лоренца (17.1).

Указание. Записать скалярное произведение через компоненты четырехвекторов и применить к каждой из компонент преобразование Лоренца.

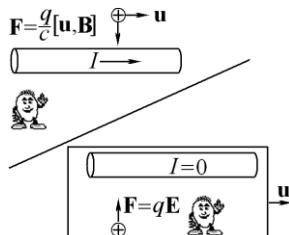
- 17.2. Вычислить квадрат четырехвектора скорости.
 17.3. Построить четырехвектор ускорения и вычислить его квадрат.
 17.4. Показать, что с точки зрения математики проблема выбора потенциалов в калибровке Лоренца сводится к решению неоднородного уравнения Д'Аламбера.

Указание. В случае если для выбранных векторного и скалярного потенциалов условие калибровки Лоренца не выполня-

ется, дивергенция векторного потенциала и производная по времени скалярного могут отличаться не более чем на скалярную функцию.

- 17.5. Найти явное выражение для оператора Лапласа, записанного в сферических координатах. Упростить полученное выражение для частного случая применения оператора Лапласа к сферически симметричной функции (зависящей только от расстояния от начальной точки).
- 17.6. Выполнить выкладки, пропущенные при выводе неоднородного уравнения Д'Аламбера для скалярного потенциала (17.17).
- 17.7. Выполнить без ошибок все вычисления и получить приведенное в примере окончательное выражение (17.26) для электрического поля, создаваемого расположенным в начале координат переменным диполем. Упростить выражение (17.26) для случая вычисления электрического поля на больших расстояниях от диполя.

Лекция 18



Релятивистские законы преобразования полей

Развитый формализм построения электродинамики на основе четырехмерных обозначений позволяет легко обобщить ранее полученные частные законы преобразования однородного электрического поля бесконечной плоскости на общий случай преобразования произвольных электромагнитных полей при переходе к движущимся системам отсчета. При этом удается получить удовлетворяющую требованиям релятивистской инвариантности весьма изящную форму записи уравнения движения заряженной частицы в электромагнитных полях.

18.1. «Векторное произведение четырехвекторов»

В стандартных трехмерных обозначениях компоненты вектора **B** выражаются через пространственные производные векторного потенциала:

$$B_\xi = \frac{\partial A_{\xi+2}}{\partial r_{\xi+1}} - \frac{\partial A_{\xi+1}}{\partial r_{\xi+2}} \Leftrightarrow \mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}], \quad (18.1)$$

$\xi = x, y, z.$

Операция вычисления ротора (18.1) в трехмерном случае формально записывалась как результат векторного перемножения оператора пространственного дифференцирования на векторный потенциал, понимаемый в трехмерном смысле.

Для придания соотношению (18.1) более явного релятивистского смысла, необходимо выразить входящие в его правую часть выражения через компоненты четырехвекторов.

С этой целью разумно обобщить на четырехмерный случай операцию векторного умножения, ранее определенную только для трехмерных векторов:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{\xi} (a_{\xi+1} b_{\xi+2} - a_{\xi+2} b_{\xi+1}) \mathbf{e}_{\xi}.$$

Из компонент двух четырехвекторов можно построить антисимметричный тензор, представимый матрицей 4×4 :

$$[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_{\zeta\eta} = a_{\zeta} b_{\eta} - a_{\eta} b_{\zeta}. \quad (18.2)$$

По аналогии с выражением (18.2) строится антисимметричный тензор, составляемый из компонент четырехмерного оператора дифференцирования и четырехвектора потенциала:

$$\mathfrak{I}_{\zeta\eta} \equiv \nabla_{\zeta} A_{\eta} - \nabla_{\eta} A_{\zeta}, \quad (18.3)$$

$$\zeta, \eta = t, x, y, z.$$

Полученный объект в известном смысле является обобщением понятия ротора трехмерного вектора на случай четырехвекторов.

18.2. Связь между четырехвектором потенциала и компонентами векторов \mathbf{E} и \mathbf{B}

Компоненты антисимметричного тензора (18.3), составленные из пространственных компонент четырехмерного оператора дифференцирования и четырехвектора потенциала, оказываются компонентами *вектора магнитной индукции*, взятыми с разными знаками:

$$\mathfrak{I}_{xy} = -\mathfrak{I}_{yx} = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial r_x} \right) - \left(-\frac{\partial A_x}{\partial r_y} \right) = -B_z, \quad (18.4)$$

$$\mathfrak{I}_{yz} = -\mathfrak{I}_{zy} = \dots = -B_x, \quad \mathfrak{I}_{zx} = -\mathfrak{I}_{xz} = \dots = -B_y.$$

Для выяснения физического смысла оставшихся недиагональных элементов, содержащих временные компоненты четырехвекторов, достаточно вычислить соответствующие разности производных. Учитывая определение скалярного потенциала в лоренцевой калибровке

(17.15), нетрудно убедиться, что шесть оставшиеся недиагональных элементов антисимметричного тензора (18.3) представляют собой взятые с разными знаками компоненты *вектора напряженности электрического поля*:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{tx} &= -\mathfrak{J}_{xt} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r_x} \right) = -E_x, \\ \mathfrak{J}_{ty} &= -\mathfrak{J}_{yt} = -E_y, \quad \mathfrak{J}_{tz} = -\mathfrak{J}_{zt} = -E_z.\end{aligned}\quad (18.5)$$

Диагональные элементы построенного антисимметричного тензора очевидно равны нулю. В рамках математического формализма четырехмерных обозначений компоненты векторов электрического и магнитного полей в вакууме представляют собой недиагональные элементы матрицы антисимметричного тензора второго ранга, построенного из компонент двух четырехвекторов: оператора дифференцирования и потенциала:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.6)$$

18.3. Релятивистские законы преобразования электрических и магнитных полей

Для нахождения релятивистских законов преобразования полей при переходе к другой инерциальной системе отсчета достаточно воспользоваться преобразованием Лоренца (17.1) для компонент каждого из четырехвекторов, составляющих тензор второго ранга (18.4) и (18.5), в результате чего получаются законы преобразования (18.6):

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - u_c B_z}{\sqrt{1-u_c^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + u_c E_z}{\sqrt{1-u_c^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + u_c B_y}{\sqrt{1-u_c^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - u_c E_y}{\sqrt{1-u_c^2}}.\end{aligned}$$

Полученные соотношения для преобразования полей можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & B'_\parallel &= B_\parallel, \\ E'_\perp &= \frac{(\mathbf{E} + [\mathbf{u}_c, \mathbf{B}])_\perp}{\sqrt{1-u_c^2}}, & B'_\perp &= \frac{(\mathbf{B} - [\mathbf{u}_c, \mathbf{E}])_\perp}{\sqrt{1-u_c^2}} \end{aligned} \quad (18.7)$$

Формулы (18.7) в классическом пределе $u_c \rightarrow 0$ согласуются с ранее выведенным в рамках магнитостатики соотношением (9.7), связывающим магнитное и электрическое поля, создаваемые системой зарядов, движущейся с одинаковыми постоянными скоростями. С позиций настоящего рассмотрения, данный результат является не случайным совпадением формул, а представляет собой закономерное следствие релятивистских законов, связывающих электрические и магнитные поля.

Пример. Релятивистский закон преобразования электрических полей

Используя связь компонент вектора электрического поля с элементами матрицы антисимметричного тензора (18.3), получить законы преобразования электрических полей при переходе к движущейся системе отсчета.

Решение. Для нахождения законов преобразования компонент напряженности электрического поля достаточно выразить их через компоненты четырехвекторов оператора дифференцирования и потенциала, после чего воспользоваться известными релятивистскими законами преобразования компонент этих четырехвекторов. В результате оказывается, что x -компоненты вектора \mathbf{E} (т. е. составляющая, соправленная со скоростью движения системы отсчета) остается инвариантной относительно преобразований Лоренца:

$$\begin{aligned} E'_x &= \nabla'_x A'_t - \nabla'_t A'_x = \\ &= \frac{\nabla_x - u_c \nabla_t}{\sqrt{1-u_c^2}} \frac{A_t - u_c A_x}{\sqrt{1-u_c^2}} - \frac{\nabla_t - u_c \nabla_x}{\sqrt{1-u_c^2}} \frac{A_x - u_c A_t}{\sqrt{1-u_c^2}} = \\ &= \nabla_x A_t - \nabla_t A_x = E_x. \end{aligned}$$

Что же касается двух других (поперечных) компонент вектора электрического поля, то закон их преобразования оказывается более сложным:

$$E'_y = \nabla'_y A'_t - \nabla'_t A'_y = \nabla_y \frac{A_t - u_c A_x}{\sqrt{1-u_c^2}} - \frac{\nabla_t - u_c \nabla_x}{\sqrt{1-u_c^2}} A_y = \frac{E_y - u_c B_z}{\sqrt{1-u_c^2}}.$$

18.4. Четырехвектор силы

Для записи уравнения движения релятивистской заряженной частицы в четырехмерной форме удобно ввести *четырехвектор силы*, определив его по аналогии с классической механикой в соответствии с правилом построения новых четырехвекторов с помощью операции инвариантного дифференцирования:

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} f_t \\ \mathbf{f}_u \end{pmatrix} \equiv \frac{d}{dt_0} \vec{P} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_u c \\ m_u \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (18.8)$$

Легко показать, что в классическом пределе $u/c \rightarrow 0$ три пространственные компоненты четырехвектора силы оказываются равными производной по времени от соответствующих компонент классического импульса и, следовательно, совпадают с составляющими трехмерного (классического) вектора силы. Для наблюдателя, движущегося с релятивистской скоростью \mathbf{u} относительно системы взаимодействующих друг с другом тел, пространственные компоненты \mathbf{f}_u четырехвектора силы легко вычислить путем применения преобразований Лоренца к декартовым компонентам «ньютоновской» силы. Результат соответствующего расчета приводит к ранее рассмотренным соотношениям (9.2). Их применение к задаче нахождения сил, возникающих между движущимися зарядами, приводит к идею введения магнитных взаимодействий (см. лекцию 9). Связь между «обычными» компонентами трехмерной силы и импульса дается следующим из (17.6) соотношением, представляющим собой релятивистский аналог импульсной формулировки второго закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2}} = \mathbf{f}_u.$$

18.5. Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле

Пространственные компоненты четырехвектора силы (18.8) легко выражаются через соответствующие составляющие «трехмерного вектора силы», которые, в свою очередь, определяются электрическим и магнитным полями в точке нахождения заряда. В результате возникает компактное соотношение, выражающее связь четырехвектора силы с четырехвектором скорости частицы и антисимметричным тензором электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{f_x}{\sqrt{1-u_c^2}} = q \frac{E_x + u_{cy}B_z - u_{cz}B_y}{\sqrt{1-u_c^2}} = \\ &= \frac{q}{c} \left\{ U_t \mathfrak{J}_{xt} + U_y \mathfrak{J}_{yx} + U_z \mathfrak{J}_{zx} \right\} = \\ &= \frac{q}{c} \left\{ U_t \mathfrak{J}_{xt} - U_x \mathfrak{J}_{xx} - U_y \mathfrak{J}_{xy} - U_z \mathfrak{J}_{xz} \right\} \equiv \frac{q}{c} (\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathfrak{J}})_x. \quad (18.9) \end{aligned}$$

Возникающие в конечном выражении «лишние» минусы могут быть легко устранины путем введения операции свертки, являющейся естественным обобщением операции скалярного перемножения векторов. Как и в случае перемножения четырехвекторов, при вычислении свертки слагаемые, содержащие произведения пространственных компонент, следует брать со знаком «–».

Как и следует ожидать, аналогичное (18.9) равенство для временной компоненты четырехвектора силы также оказывается справедливым:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_c)}{\sqrt{1-u_c^2}} = q \frac{(\mathbf{u}_c, \mathbf{E} + [\mathbf{u}_c, \mathbf{B}])}{\sqrt{1-u_c^2}} = \\ &= \frac{q}{c} \left\{ 0 + \frac{u_x E_x}{\sqrt{1-u_c^2}} + \frac{u_y E_y}{\sqrt{1-u_c^2}} + \frac{u_z E_z}{\sqrt{1-u_c^2}} \right\} = \\ &= \frac{q}{c} \left\{ U_t \mathfrak{J}_{tt} - U_x \mathfrak{J}_{tx} - U_y \mathfrak{J}_{ty} - U_z \mathfrak{J}_{tz} \right\} \equiv \frac{q}{c} (\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathfrak{J}})_t. \end{aligned}$$

С учетом четырехмерных обозначений уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле может быть записано в компактном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{P}} = q(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathfrak{I}}).$$

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathfrak{J}_{\zeta\chi} \equiv \nabla_{\zeta} A_{\chi} - \nabla_{\chi} A_{\zeta}$, $\zeta, \chi = t, x, y, z$	Определение полевого тензора
$(\bar{\mathfrak{I}}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$	Связь компонент векторов электрического и магнитного полей с элементами матрицы полевого тензора
$\frac{1}{\sqrt{1-u_c^2}} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{P}} = q(\bar{\mathbf{u}}_c, \bar{\mathfrak{I}})$	Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле

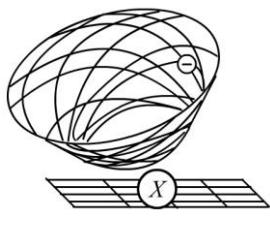
Задачи для самостоятельного решения

- 18.1. Подобно тому как это было сделано в примере, обоснуйте релятивистские формулы преобразования магнитных полей (18.7).
- 18.2. Используя соотношения (18.7) и приобретенные навыки решения задач электростатики, рассчитайте магнитные поля, создаваемые:
 - а) равномерно движущимся с нерелятивистской скоростью равномерно заряженным по объему шаром;
 - б) равномерно заряженным по объему длинным цилиндром, движущимся с заданной скоростью в направлении, параллельном его оси;
 - в) равномерно заряженным по объему длинным цилиндром, движущимся с заданной скоростью в направлении, перпендикулярном его оси.

18.3. Равномерно заряженный по поверхности длинный цилиндр заданного радиуса равномерно катится без проскальзывания по гладкой горизонтальной плоскости. Найти электромагнитное поле, создаваемое цилиндром.

Указание. Перейти к системе отсчета, в которой ось цилиндра остается неподвижной.

18.4. Исходя из изложенного релятивистского описания электромагнитных взаимодействий, обоснуйте основные утверждения о свойствах электрического поля равномерно движущегося заряда, приведенные в лекции 9.



Электродинамика Максвелла и современные представления об электромагнитных вза- имодействиях (вместо Заключения)

Система уравнений Максвелла дает согласующееся с требованиями теории относительности описание электромагнитных взаимодействий на макроскопическом уровне. Попытки ее распространения на микросистемы приводят к серьезным противоречиям с данными эксперимента. Классическая электродинамика не отвечает на вопрос о природе возникновения электрических сил. Ее уравнения сохраняют асимметрию, связанную с отсутствием магнитных зарядов.

Вот и завершен курс, посвященный классическому описанию электромагнитных взаимодействий. Изучив этот курс, Вы познакомились с фундаментальными идеями классической электродинамики, основы которой были заложены Дж. Максвеллом. Однако в рамках данного курса нам удалось продвинуться несколько дальше по сравнению с тем, что было сделано создателем классической электродинамики. Во-первых, в настоящем курсе использован более современный математический аппарат, что позволило практически во всех ситуациях избежать громоздких выкладок и записать выражющие законы физики математические соотношения в весьма изящной форме. Во-вторых (и это более важно!), в настоящем курсе была продемонстрирована тесная связь электродинамики Максвелла со специальной теорией относительности, которая была создана уже после того, как Максвелл получил свои известные уравнения. Следует напомнить, что одной из причин, заставивших создателей теории относительности усомниться в непоколебимости основ классической физики, как раз и были неразрешимые противоречия между теорией Максвелла и классической механикой Галилея — Ньютона.

Изучая данный курс, Вы прошли долгий путь от известных еще со школьных лет и записываемых в виде элементарных математических соотношений законов Кулона, Ома и Био—Савара—Лапласа до законов электромагнетизма, выражаемых на языке дифференциальных уравнений в частных производных. В курсе активно использовались такие нетривиальные математические объекты, как тензоры, дифференциальные операторы, четырехвекторы и т. д., которые вводились не принятым в математике путем носящих несколько формальный характер определений, а, хочется надеяться, более естественным для понимания способом — по мере возникновения необходимости в их применении — для удобства изложения физики. Тем не менее остается некоторая вероятность того, что у ряда читателей возникнет впечатление, будто в данном курсе баланс между физикой и математикой несколько смещен в сторону последней: обсуждаемые здесь физические идеи можно было проиллюстрировать с помощью существенно более простой математики.

Сейчас настало время признаться, что сделано это было умышленно. Именно относительная простота физических идей, рассматриваемых в первой части цикла, и их краткое изложение еще на уровне школьной программы позволили дополнить настоящий курс некоторой информацией по современной математике, без использования которой изучение двух других (и существенно более сложных) частей цикла было бы просто немыслимо. Автор считал бы эту задачу выполненной, если бы к окончанию изучения курса вычисления с помощью оператора «набла» и операции с четырехвекторами стали для читателя такими же привычными, как, скажем, приведение подобных или вычисление простой производной.

Хочется выразить надежду, что данный курс выполнил и еще одну важную задачу, продемонстрировав существование глубокой симметрии и красоты уравнений электродинамики, происхождение которой обусловлено их тесной связью с релятивистской физикой.

Законченность теории Максвелла и соответствие между электродинамикой и теорией относительности не могут не наводить на мысль о том, что эти уравнения абсолютно верны. Однако это не так. По-видимому, ни одно содержательное утверждение в физике (и естествознании) не может считаться абсолютно верным: все известные сегодня физические законы имеют ограниченную область применения. Разумеется, это касается и уравнений Максвелла, прекрасно зарекомендовавших себя при описании макроскопических систем. При попытке использования классической электродинамики для описания микроси-

стем даже в том случае, если в них электромагнитные взаимодействия играют доминирующую роль, получаемые теоретические результаты часто существенно расходятся с данными эксперимента. Более того, в природе могут существовать системы, поведение которых определяется электромагнитными взаимодействиями, но для которых такие теперь уже привычные для читателя понятия, как электромагнитные поля и волны в их классическом понимании, вообще теряют смысл.

Одновременно с этим именно на уровне квантового описания удается существенно развить представления о природе электромагнитных взаимодействий. Становится очевидным глубокое сходство между механизмами возникновения электрических, ядерных и химических (валентных) сил. Все указанные взаимодействия обусловлены квантовомеханическим обменом виртуальными частицами (соответственно фотонами, мезонами и электронами). Различия между законами, описывающими перечисленные взаимодействия, связаны и индивидуальными свойствами частиц — переносчиков взаимодействий. Известным примером, иллюстрирующим указанную связь, явилась теория сильных взаимодействий, построенная в середине XX века как обобщение электродинамики. На ее основе удалось предсказать основные характеристики частиц, являющихся переносчиками ядерных взаимодействий, которые оказались в прекрасном соответствии со свойствами открытых впоследствии мезонов.

Другой нерешенной проблемой классической электродинамики явилась уже обсуждавшаяся в данном курсе асимметрия между источниками электрических и магнитных полей, явно заметная в трехмерном варианте записи уравнений. Введение магнитного монополя (гипотетической частицы, создающей вокруг себя магнитное поле, аналогичное по структуре электрическому полю покоящегося электрического заряда) могло бы существенно повысить симметрию уравнений электромагнетизма как в случае статических, так и переменных во времени полей. Гипотеза о возможности существования магнитного монополя впервые была высказана П. Дираком.

Таким образом, изложенный в объеме курса классической электродинамики материал далеко не исчерпывает современных представлений об электромагнетизме.

Из сказанного не вытекает, что следующий курс цикла будет посвящен квантовой электродинамике, занимающейся описанием электромагнитных взаимодействий на масштабах, которые принято называть микроскопическими. Указанная тема составит содержание третьего курса настоящего цикла. Рассмотренных в первом разделе идей

(как физических, так и математических) пока недостаточно для адекватного восприятия необходимости перехода к принципиально новому способу описания электромагнитных взаимодействий, не говоря уже об осмыслиении идей такого описания. Кроме того, изложение настоящего курса даже в рамках классической электродинамики не может считаться достаточно полным, поскольку основное внимание уделялось обсуждению смысла фундаментальных уравнений и используемого для их записи математического аппарата, а многочисленные следствия теории не рассматривались. Это в полной мере относится к излучению и распространению электромагнитных волн и их взаимодействию с веществом — обширнейшей теме, представляющей собой, по сути, отдельный раздел физики — волновую оптику.

Именно рассмотрению указанного круга вопросов с позиций электромагнитной теории Максвелла будет посвящен второй курс лекций данного цикла. В его рамках будут продемонстрированы огромные возможности теории Максвелла, ее применимость к описанию широчайшего круга физических явлений, с одной стороны, и ограниченность в случае описания микросистем — с другой. Рассматриваемые в курсе оптики физические идеи и методы их математического выражения составят фундамент для изложения основ квантового описания электромагнитных взаимодействий.

Соотношения, которые следует понимать и помнить

Электродинамика Максвелла (для полей в материальных средах)	Электродинамика в четырехмерных обозначениях (для вакуума)
$(\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0$, $[\nabla, \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\Delta\varphi = -4\pi\rho$,	$(\nabla, \mathbf{B}) = 0$, $[\nabla, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}]$, $\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$