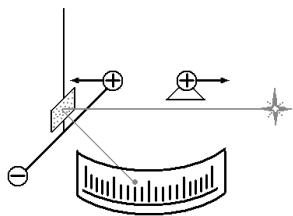


Лекция 1



Электростатические взаимодействия

Электростатические взаимодействия являются простейшим частным случаем одного из четырех типов признаваемых современной физикой фундаментальных взаимодействий — электромагнитного. Основу электростатики составляет закон Кулона, описывающий взаимодействия между покоящимися точечными зарядами. Для практических расчетов электростатических сил, действующих на заряд со стороны заданного распределения, оказывается удобным ввести понятия электростатического поля и скалярного потенциала.

1.1. Электромагнитные взаимодействия

Электромагнитные взаимодействия играют доминирующую роль в макро- и микромире в системах, размеры которых превосходят размеры атомных ядер. Начиная с расстояний порядка радиуса атомного ядра, основное значение приобретают мощные, но быстро ослабевающие с увеличением расстояния сильные ядерные взаимодействия. В мегамире силы электромагнитного отталкивания и притяжения достаточно хорошо компенсируют друг друга, в результате чего доминирующая роль переходит к весьма слабым гравитационным взаимодействиям.

Понятие *электрического заряда* является фундаментальным и не может быть определено строго. По существу им обозначают способность тел к участию в электромагнитных взаимодействиях. Эти взаимодействия достаточно сложны и зависят от свойств участвующих в них тел, их взаимного расположения и движения. В простейшем частном случае покоящихся относительно наблюдателя тел (и составляющих их частей) говорят об *электростатических взаимодействиях*, описание которых, по сути, может рассматриваться как косвенное определение заряда.

Сложность определения электростатических взаимодействий состоит в том, что они возникают на уровне элементарных частиц, адекватное описание поведения которых, вообще говоря, невозможно на языке классической физики и требует привлечения идей квантовой механики. Однако в случае нахождения взаимодействующих частиц в пустом пространстве на большом (по сравнению с характерными размерами атомов) расстоянии друг от друга их поведение хорошо описывается на языке механики Ньютона (в случае электростатики необходимость привлечения идей релятивистской физики заведомо отпадает). В дальнейшем будем предполагать, что основные механические понятия (координата, скорость, сила, масса, импульс и т. д.) ранее определены и не требуют дополнительного обсуждения даже применительно к элементарным частицам.

К электростатическим взаимодействиям прежде всего следует отнести возникновение между определенными типами одинаковых покоящихся относительно наблюдателя элементарных частиц центральных сил отталкивания \mathbf{f}_{ik} , обратно пропорциональных квадрату расстояния \mathbf{r}_{ik} между ними (рис. 1.1):

$$\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \sim \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}^3}. \quad (1.1)$$

Частицы, обладающие способностью к описываемым соотношениям (1.1) электростатическим взаимодействиям, принято называть электрически заряженными.

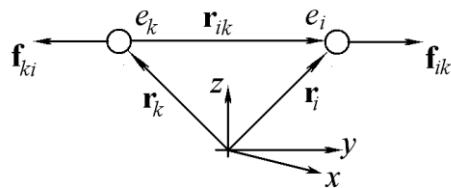


Рис. 1.1. Электростатические силы, возникающие между двумя одинаковыми элементарными частицами, обладающими электрическими зарядами.

Перечисленные свойства электростатических взаимодействий, а также масштабы обусловленных ими сил позволяют легко отличать

эти взаимодействия от других фундаментальных взаимодействий. Так, *ядерные взаимодействия* оказываются существенно более короткодействующими и экспоненциально ослабевают с увеличением расстояния между частицами. Зависимость *гравитационных сил* от расстояния сходна с (1.1). Различие состоит в масштабе возникающих сил: в атоме, например, электростатические взаимодействия превосходят гравитационные в 10^{42} раз. Кроме того, гравитационные взаимодействия могут приводить к появлению только сил притяжения, в то время как электростатические могут быть силами как притяжения, так и отталкивания.

Между двумя неподвижными частицами помимо рассмотренных электростатических сил возможно возникновение еще одного типа сил, обычно также относимых к электромагнитным взаимодействиям. Возникновение этих сил связано с наличием у большинства элементарных частиц специфического свойства — *спина*, не имеющего точного аналога в классической физике, и связанного с ним магнитного момента. Обусловленные наличием у частиц спинового *магнитного момента* силы оказываются малыми по сравнению с электростатическими, уменьшаются с изменением расстояния существенно быстрее, чем по закону обратных квадратов, и поэтому легко отличаются от электростатических.

1.2. Электрические заряды

Опыт показывает, что величина электростатической силы \mathbf{f}_{ik} , возникающей между двумя одинаковыми частицами, зависит от их свойств. Частицы, между которыми не возникает электростатических взаимодействий, называются *нейтральными*, им приписывается нулевой электрический заряд. Частицы, способные к участию в электростатических взаимодействиях, называют *заряженными*. Все относительно стабильные частицы с ненулевым зарядом проявляют одинаковую способность к электростатическим взаимодействиям. Последнее означает, что при заданном расстоянии между одинаковыми заряженными частицами всегда возникает одинаковая электростатическая сила. Это позволяет всем заряженным частицам приписать одинаковый по величине *элементарный заряд* $|e|$.

Опыт показывает, что между двумя разными заряженными элементарными частицами также возникают электростатические силы, величина которых не зависит от их типа, однако в этом случае возможно

не только их отталкивание, но и притяжение. При этом всегда выполняется следующее свойство: если две заряженные частицы одинаково взаимодействуют с третьей (обе притягиваются или отталкиваются), то они всегда будут отталкиваться друг от друга. В противном случае между рассматриваемыми частицами возникает притяжение. Это свойство электростатических взаимодействий позволяет разделить все заряженные частицы на две группы так, что любые две частицы из одной группы обязательно отталкиваются, а из разных групп — притягиваются. Зарядам частиц из разных групп были приписаны знаки «+» и «-». Необходимо подчеркнуть, что выбранный способ обозначения групп заряженных частиц носит чисто условный характер. Данный способ оказался весьма удобным, так как позволил описать все возможные случаи электростатического взаимодействия обладающих электрическим зарядом частиц (притяжение, отталкивание) с помощью единой формулы

$$\mathbf{f}_{ik} \sim \frac{e_i e_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}. \quad (1.2)$$

Переход к равенству в соотношении (1.2) для силы взаимодействия между элементарными зарядами в общем случае требует введения размерного коэффициента, величина которого зависит от выбора системы единиц. К этим вопросам удобнее обратиться позднее, при рассмотрении электростатических взаимодействий между макроскопическими телами.

Любой элементарной частице может быть приписано одно из трех значений электрического заряда: $-e$, 0 , $+e$. Электрический заряд макроскопического тела q складывается из элементарных зарядов составляющих его частиц и поэтому кратен элементарному заряду e :

$$q \equiv N_+(+e) + N_-(-e) = (N_+ - N_-)e \quad (1.3)$$

(в приведенном выражении через N_+ и N_- обозначены числа соответственно положительных и отрицательных элементарных зарядов в теле). Таким образом, **дискретность электрического заряда является следствием того, что все элементарные частицы имеют одинаковые по модулю заряды**.

Другим важным свойством электрического заряда является **закон его сохранения: суммарный электрический заряд замкнутой системы не изменяется во времени**. Это свойство электрического заряда не является самоочевидным, поскольку закона сохранения числа

элементарных частиц, являющихся его носителем, не существует. Однако все известные на сегодняшний день взаимопревращения элементарных частиц протекают так, что суммарный заряд продуктов реакции всегда оказывается равным суммарному заряду вступающих во взаимодействия элементарных частиц.

1.3. Закон Кулона

Опыт показывает, что электростатические взаимодействия подчиняются *принципу суперпозиции*: **электростатическая сила, действующая на элементарный заряд e_0 со стороны других элементарных зарядов, может быть рассчитана как сумма сил, возникающих при всех парных взаимодействиях**:

$$\mathbf{f}_0 \sim \sum_i \frac{e_0 e_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{r}_i).$$

Принцип суперпозиции выполняется для изучаемых в курсах элементарной физики электромагнитных и гравитационных взаимодействий и поэтому многим кажется самоочевидным (рис. 1.2,*a*). Вместе с тем далеко не все взаимодействия отвечают этому принципу.

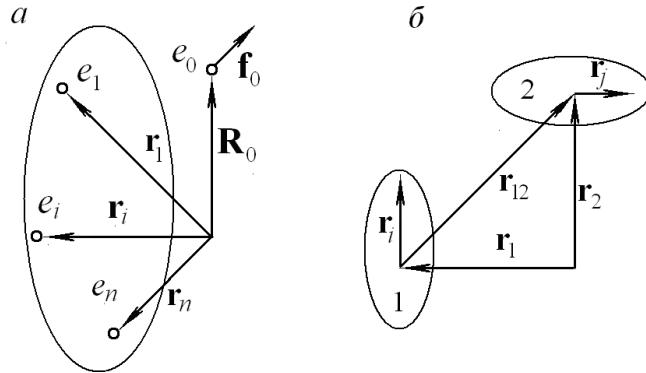


Рис. 1.2. К обоснованию закона Кулона:
а — принцип суперпозиции в случае электростатических взаимодействий между элементарными частицами;
б — к расчету сил электростатического взаимодействия между двумя протяженными макроскопическими телами.

В случае взаимодействия двух заряженных макроскопических тел суммарная сила очевидно вычисляется как сумма парных взаимодействий всех элементарных зарядов одного тела со всеми элементарными зарядами другого:

$$\mathbf{F}_{12} \sim \sum_{i,j} e_i e_j \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_j)}{\left|(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_j)\right|^3}. \quad (1.4)$$

Для удобства в выражении (1.4) положения зарядов взаимодействующих тел заданы с помощью суммы двух векторов, определяющих соответственно положение какой-либо выделенной точки тела и положение элементарного заряда относительно этой точки (см. рис. 1.2,б).

Если размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними (в этом случае макроскопические тела обычно называют *точечными*), расстояния между парами зарядов в формуле (1.4) можно приближенно заменить расстояниями между выбранными на телах точками. В результате с учетом определения макроскопического заряда (1.3) выражение для результирующей силы приобретает простую форму, аналогичную форме ранее приведенного соотношения для силы взаимодействия элементарных зарядов:

$$\mathbf{F}_{12} \sim \sum_{i,j} e_i e_j \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3} = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3}. \quad (1.5)$$

Поэтому в рамках курса классической (неквантовой) физики отпадает необходимость различать элементарные и точечные макроскопические заряды. И те, и другие в следующих за (1.5) соотношениях будем обозначать строчными буквами (q_i) в отличие от зарядов существенно протяженных тел, обозначаемых прописными буквами (Q_i).

Зависимость (1.5), известная как *закон Кулона*, была установлена экспериментально в 1785 г. В стандартной формулировке закон Кулона утверждает, что **силы, возникающие при взаимодействии двух точечных макроскопических тел, пропорциональны произведению величин их зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между телами**. Схема, поясняющая идею опытов, помещена рядом с названием темы.

Во многих курсах электродинамики именно закон (1.5) рассматривается как фундаментальный. Однако следует учитывать, что это со-

отношение заведомо приближенное. Например, как будет показано далее, между в целом электрически нейтральными телами могут существовать электростатические силы, уменьшающиеся с изменением расстояния быстрее, чем r^{-2} .

Для перехода к равенствам в соотношениях (1.2) – (1.5) необходимо ввести размерный коэффициент k , зависящий от выбора системы единиц:

$$\mathbf{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1.6)$$

Универсальность элементарного заряда наводит на мысль о целесообразности построения «естественной физической системы единиц», в которой элементарный заряд и коэффициент k положены равными единице. Такой подход реализован, например, в *атомной системе единиц*, где равными единицами принимаются также масса электрона и постоянная Планка. В этой «естественной» системе механические величины измеряются в совершенно непривычных для традиционных курсов механики единицах. Например, расстояния — в размерах невозбужденных атомов водорода, единица силы вводится на основании записываемого в виде равенства соотношения (1.2), скорость света c оказывается равной 137. Такая система единиц весьма удобна для профессиональной работы в области физики, но мало пригодна для использования в прикладных областях и при изучении элементарных курсов.

Весьма распространенная сегодня система единиц СИ очень популярна в технике из-за удобства выполнения прикладных расчетов, но не находит широкого применения при углубленном изучении физики. К ее основным недостаткам следует отнести введение в фундаментальный закон взаимодействия (1.2) и в связанный с ним закон Кулона (1.6) весьма «громоздкого» коэффициента пропорциональности

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

и (что еще более важно) отсутствие соответствующей реальному положению дел в физике симметрии между математическими формулами, описывающими законы электричества и магнетизма.

В настоящем курсе будет использована одна из модификаций системы единиц СГС — *система единиц Гаусса*. Хотя и она не полно-

стью свободна от недостатков, ее выбор, по-видимому, является разумным компромиссом между традиционным применением «привычных» механических единиц и естественным желанием иметь систему единиц, максимально отражающую фундаментальные физические идеи. В этой системе единиц расстояния измеряются в сантиметрах, время — в секундах, масса — в граммах. Коэффициент пропорциональности в соотношении (1.6) положен равным единице.

Поскольку единицы измерения всех величин, кроме зарядов, в законе взаимодействия (1.6) установлены, его можно рассматривать как определение единицы заряда: **в качестве единичного заряда принимается такой макроскопический точечный заряд, который, будучи удаленным от точно такого же на единичное расстояние (1 см), испытывает действие единичной силы (1 дин).** При таком способе определения единичного заряда он оказывается в $2 \cdot 10^9$ раз больше элементарного.

1.4. Электростатическое поле

Выражение электростатической силы, действующей на точечный заряд q_0 со стороны заданного распределения, может быть представлено как произведение величины этого заряда на множитель, не зависящий от его характеристик:

$$\mathbf{f}_0 = \sum_i q_0 q_i \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3} \equiv q_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}). \quad (1.7)$$

Введенный множитель $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ принято называть *напряженностью электрического поля*. **Напряженность электрического поля E в заданной точке пространства равна силе, действующей на единичный заряд, помещенный в данную точку пространства.**

Из определения напряженности следует метод ее расчета в случае заданного пространственного распределения точечных зарядов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{R}), \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = q_i \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{E}_i — электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q_i .

Электрическое поле имеет существенно более глубокий физический смысл, чем просто требующая трудоемких вычислений сумма

(1.8), возникающая в ходе расчета электростатических сил (1.7). В физике понятие поля используется для обозначения механизма передачи взаимодействия между частицами, отделенными друг от друга промежутками часто пустого пространства. Подразумевается, что каждый заряд является источником электрического поля, «заполняющего» окружающее его «пустое» пространство. Действующая же на заряд сила возникает не в результате непосредственного взаимодействия зарядов (как это допускалось в рамках концепции *дальнодействия*), а как результат воздействия на него поля, созданного всеми остальными зарядами (кроме него самого) в точке нахождения рассматриваемого заряда. Описанный механизм возникновения взаимодействий получил название концепции *близкодействия*.

Вводимая уравнением (1.8) напряженность \mathbf{E} является количественной характеристикой электростатического поля.

Если под точечными зарядами подразумеваются заряды элементарных частиц, составляющих электростатическую систему, вычисляемое по формуле (1.8) векторное поле носит название *микроскопического*. Внутри вещества это поле резко изменяется на расстояниях, сравнимых с размером атома. Знание микроскопического поля позволяет решать задачи электростатики с максимальной для классической теории точностью. Однако в большинстве случаев реальные расчеты такого поля оказываются слишком трудоемкими. Для решения множества задач классической физики оказывается возможным заменить микроскопическое поле «сглаженным» макроскопическим.

Переход к макроскопическому полю происходит в результате приближенной замены истинного дискретного распределения элементарных зарядов сглаженным, которое часто можно считать кусочно-непрерывным. В зависимости от конкретных особенностей распределения источников поля (рис.1.3) вводятся соответственно *объемная* (ρ), *поверхностная* (σ) или *линейная* (λ) *плотности зарядов*:

$$\rho \equiv \frac{\delta q}{\delta V}, \quad \sigma \equiv \frac{\delta q}{\delta S}, \quad \lambda \equiv \frac{\delta q}{\delta l}.$$

Входящие в определения плотностей отношения не являются точными производными в строгом математическом смысле, поскольку при истинном стремлении к нулю размеров рассматриваемой области неизбежно начнет сказываться дискретность микроскопического распределения зарядов. Фактически под δV , δS и δl понимаются размеры *физически бесконечно малых областей*, которые существенно меньше

характерных размеров рассматриваемой задачи, но достаточны для того, чтобы дискретность распределения зарядов была несущественной. В дальнейшем с учетом сделанных оговорок введенные плотности будут рассматриваться как обычные производные, допускающие «обычные» математические операции над ними:

$$\rho \equiv \frac{dq}{dV}, \quad \sigma \equiv \frac{dq}{dS}, \quad \lambda \equiv \frac{dq}{dl}.$$

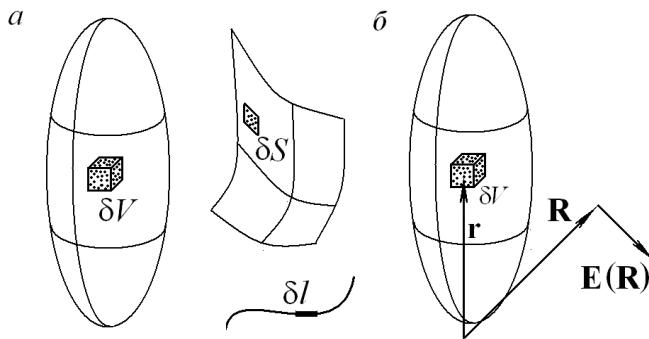


Рис. 1.3. Сглаженные распределения зарядов и макроскопические поля:

- a* — к определению объемной, поверхностной и линейной плотностей зарядов;
- б* — макроскопическое электростатическое поле, создаваемое сглаженным объемным распределением зарядов: \mathbf{r} — радиус-вектор, задающий текущее положение зарядов источников поля, \mathbf{R} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется поле.

Переход к непрерывным распределениям позволяет заменить суммирование в выражении (1.8) на интегрирование (рис. 1.3,*б*):

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \int_{\Theta} \frac{dq(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{r}). \quad (1.9)$$

В выражении (1.9) и далее Θ обозначает область, занимаемую зарядом (объем, поверхность или линию).

Рассчитываемое по формулам (1.9) макроскопическое поле оказывается близким к истинному микроскопическому в точках наблюдения, удаленных от источников поля. При несоблюдении этого условия сглаженное макроскопическое поле может существенно отличаться от микроскопического, быстро возрастающего вблизи каждого элементарного заряда. В этом случае расчеты по (1.9) дают информацию лишь об усредненных по макроскопическим объемам значениях истинного поля.

Пример. Поле равномерно заряженной плоскости

Рассчитать электрическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной поверхностью плотностью заряда σ , на расстоянии h от ее поверхности.

Решение. Наличие цилиндрической симметрии в исходном распределении зарядов указывает на целесообразность использования при решении задачи цилиндрической системы координат (рис. 1.4,*a*).

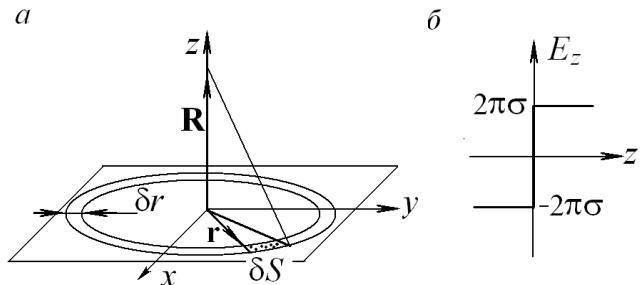


Рис. 1.4. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости:
а — представление заряженной плоскости в виде системы тонких колец, упрощающее вычисление интеграла (1.9);
б — результат расчета напряженности электростатического поля.

Из соображений симметрии следует, что напряженность электрического поля во всех точках должна быть направлена перпендикулярно бесконечной плоскости. В случае невыполнения этого требования (вектор \mathbf{E} составляет некоторый угол с вертикальной осью z) поворот системы вокруг этой оси привел бы к изменению напряженности электрического поля при неизменном распределении зарядов-

источников. Подобная ситуация кажется странной даже на интуитивном уровне и противоречит теореме о единственности решения задач электростатики, которая будет доказана в разделе 3.3. Аналогичные соображения позволяют утверждать, что напряженность электрического поля должна быть одинаковой по величине во всех точках пространства, равноудаленных от заряженной плоскости.

Сформулированные соображения симметрии позволяют решить поставленную задачу практически без вычислений. Однако на первом этапе представляется полезным продемонстрировать «прямой» путь решения, основанный на использовании соотношения (1.9), в результате которого все сформулированные свойства искомого поля будут получены «автоматически».

Применение общей формулы (1.9) для рассматриваемого случая приводит к интегралу от векторной функции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\sigma dS(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) = \sigma \int_{\infty}^{\infty} \frac{dS(-x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y + h\mathbf{e}_z)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Переход к интегрированию по заполняющим всю плоскость «концентрическим кольцам» в цилиндрической системе координат

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sigma \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{(-r \cos \alpha \mathbf{e}_x - r \sin \alpha \mathbf{e}_y + h\mathbf{e}_z)}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

существенно упрощает вычисления. После интегрирования по углу α остается, как и ожидалось, лишь нормальная к плоскости компонента поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sigma \int_0^{\infty} dr \frac{2\pi hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Интегрирование по кольцам всевозможных радиусов приводит к хорошо известному результату для напряженности поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = 2\pi\sigma \mathbf{e}_z. \quad (1.10)$$

Создаваемое равномерно заряженной плоскостью электростатическое поле направлено перпендикулярно ее поверхности (единственное выделенное направление) и не зависит от расстояния от нее до точки наблюдения.

1.5. Электрический (скалярный) потенциал

Расчеты даже макроскопических (сглаженных) электрических полей по формулам (1.9) все еще трудоемки, так как содержат интегрирование векторной функции, фактически означающее необходимость вычисления трех одномерных интегралов. Вместе с тем учет центрального характера электростатических взаимодействий позволяет существенно упростить расчеты, сведя их к интегрированию скалярной функции и последующему дифференцированию. Как известно, центральные силы являются **потенциальными**, т. е. **работа таких сил по перемещению тел между двумя заданными точками не зависит от выбора траектории перемещения**. Это свойство позволяет ввести скалярную характеристику электростатического поля — **электрический потенциал** (рис. 1.5,а):

$$\varphi(\mathbf{R}) \equiv \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_0} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}), \quad (1.11)$$

Согласно определению (1.11) **электрический потенциал численно равен работе сил электростатического поля по перемещению единичного заряда в ту точку пространства, где его значение принято равным нулю**. Такое определение очевидно не является однозначным. При изменении положения этой нулевой точки \mathbf{R}_0 функция $\varphi(\mathbf{R})$ изменяется на константу, равную работе по перемещению единичного заряда из исходной нулевой точки в новую. Далее будет показано, что такая неоднозначность не оказывается на результатах расчета электрического поля.

Указанная неоднозначность может быть устранена, если в качестве нулевой выбирать **бесконечно удаленную точку**: $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{\infty}$. Формальным препятствием такому выбору может оказаться расходимость интеграла (1.11) на бесконечном пределе. Однако в дальнейшем буд-

дет показано, что поле любого ограниченного в пространстве распределения зарядов (практически все реально встречающиеся в природе распределения обладают этим свойством) на больших расстояниях убывает не медленнее, чем r^{-2} , что заведомо обеспечивает сходимость интеграла.

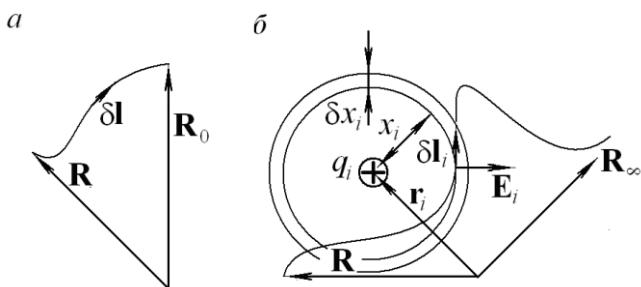


Рис. 1.5. Электрический (скалярный) потенциал:
 a — определение потенциала;
 b — вычисление потенциала, создаваемого точечным зарядом.

Из принципа суперпозиции для электрических полей и линейного характера связи (1.11) между потенциалом и полем непосредственно следует, что потенциал системы точечных зарядов $\phi(\mathbf{R})$ равен сумме потенциалов $\phi_i(\mathbf{R})$, создаваемых каждым из них:

$$\phi(\mathbf{R}) = \sum_i \int_{\mathbf{R}}^{\infty} (\mathbf{E}_i, d\mathbf{l}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{R}).$$

Таким образом, для решения задачи вычисления потенциала произвольного распределения зарядов необходим расчет потенциала, создаваемого в точке \mathbf{R} точечным зарядом q_i , расположенным в точке \mathbf{r}_i (рис. 1.5, б).

Для вычисления «элементарного потенциала» необходимо мысленно переместить единичный заряд из точки \mathbf{R} в бесконечно удаленную точку и рассчитать соответствующую работу электростатических сил, разбив траекторию на бесконечно малые отрезки с помощью концентрических сфер с центрами в точке \mathbf{r}_i нахождения заряда q_i (рис. 1.5, б). Элементарная работа электростатических сил на отрезке $d\mathbf{l}$ оказывается равной произведению модуля напряженности поля на расстояние

между сферами dx_i , с помощью которых производилось разбиение. Это соображение позволяет легко вычислить искомый потенциал, создаваемый точечным зарядом q_i :

$$\varphi_i(\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{R}}^{\infty} (\mathbf{E}_i, d\mathbf{l}) = \int_{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|}^{\infty} E_i dx_i = \int_{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|}^{\infty} \frac{q_i}{x_i^2} dx_i = \frac{q_i}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|}.$$

С учетом оговорок, аналогичных сделанным при переходе к макроскопическому полю (1.9), в выражении для потенциала также возможен переход от вычисляемого путем суммирования потенциала микроскопического распределения зарядов

$$\varphi_m = \sum_i \frac{e_i}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|} \quad (1.12)$$

к сглаженному потенциалу макроскопического распределения:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \int_{\Theta} \frac{dq(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}. \quad (1.13)$$

Расчет потенциала по формулам (1.12), (1.13) еще не означает решения основной задачи электростатики — определения поля по заданному распределению зарядов.

Для восстановления напряженности поля по потенциалу $\varphi(\mathbf{R})$ достаточно рассмотреть приращение потенциала на малом участке кривой $\delta\mathbf{R}$:

$$\delta\varphi = \varphi(\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) - \varphi(\mathbf{R}) \equiv \int_{\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_0} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) - \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_0} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = - \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

Полученное выражение для приращения потенциала можно упростить, используя теорему о среднем:

$$\delta\varphi = -(\mathbf{E}, \delta\mathbf{R}) = - \sum_{\xi=x, y, z} E_\xi \delta R.$$

Из данного соотношения непосредственно следует способ вычисления компонент вектора напряженности поля:

$$E_\xi = \left. \frac{\delta\varphi}{\delta R_\xi} \right|_{\substack{\delta R_\xi \rightarrow 0 \\ \delta R_\zeta = 0}} = - \frac{\partial\varphi}{\partial R_\xi},$$

$$\xi, \zeta = x, y, z, \quad \xi \neq \zeta.$$

Напряженность электрического поля \mathbf{E} очевидно может быть построена как сумма вычисляемых по известному скалярному потенциалу ее декартовых компонент, умножаемых на соответствующие орты:

$$\mathbf{E} = - \sum_{\xi=x, y, z} \frac{\partial\varphi(\mathbf{R})}{\partial R_\xi} \mathbf{e}_\xi. \quad (1.14)$$

Математические выражения типа (1.14) настолько часто встречаются в точных науках, что для них были введены специальные название (*градиент*) и обозначение:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.15)$$

В дальнейшем будем использовать еще более краткую и удобную символьную запись подобных выражений с помощью *оператора пространственного дифференцирования* (оператора «набла»):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \nabla \equiv \sum_{\xi} \mathbf{e}_\xi \frac{\partial}{\partial R_\xi}. \quad (1.16)$$

Из соотношений (1.14) – (1.16) следует независимость результата вычисления электростатического поля от значения аддитивной постоянной, с точностью до которой определяется потенциал. Действительно, преобразование $\varphi \rightarrow \varphi + C$ никак не скажется на значении

напряженности поля, так как любая производная от постоянной тождественно равна нулю.

Векторные поля, для которых оказывается возможным введение скалярной функции, восстанавливающей поле с помощью операции вычисления градиента, называются *потенциальными*. **Потенциальными оказываются любые векторные поля, циркуляция которых по произвольному замкнутому контуру всегда оказывается тождественно равной нулю** (обоснуйте приведенное утверждение самостоятельно!)

Пример. Электрический диполь

Рассчитать потенциал и электрическое поле, создаваемое *электрическим диполем* с моментом \mathbf{d} на большом расстоянии от него.

Решение. Электрический диполь представляет собой два одинаковых по величине разноименных точечных заряда, разведенных на расстояние l . Такую электростатическую систему принято характеризовать *дипольным моментом* — вектором, направленным, согласно определению, от отрицательного заряда к положительному:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{l}.$$

Потенциал, создаваемый диполем в произвольной точке пространства \mathbf{R} , вычисляется как сумма потенциалов, обусловленных каждым зарядом:

$$\phi(\mathbf{R}) = \phi_+ + \phi_- = \frac{q}{R_+} + \frac{-q}{R_-} = \frac{q}{|\mathbf{R}-\mathbf{l}/2|} - \frac{q}{|\mathbf{R}+\mathbf{l}/2|}.$$

Учет малости размеров диполя по сравнению с расстоянием до точки наблюдения ($l/R \rightarrow 0$) позволяет существенно упростить последнее выражение, разложив его в ряд Тейлора по малому параметру l/R и сохранив первый не исчезающий член:

$$\phi(\mathbf{R}) = q \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{R})}{R^3} = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3}. \quad (1.17)$$

Электрическое поле вычисляется как градиент полученного выражения. Вычисления существенно упрощаются, если учесть, что действие оператора пространственного дифференцирования на функцию, зависящую от модуля радиус-вектора \mathbf{R} сводится к дифференцирова-

нию функции по этому модулю и умножению результата на единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{R} (докажите это свойство самостоятельно):

$$\nabla f(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial f}{\partial R}, \quad R = |\mathbf{R}|.$$

Окончательное выражение (обязательно проделайте соответствующие выкладки!) для напряженности поля электрического диполя имеет вид

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3} = \frac{3(\mathbf{d}, \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{d}}{R^3}.$$

Соответствующая картина силовых линий электрического поля, создаваемого диполем, приведена на рис. 1.6.

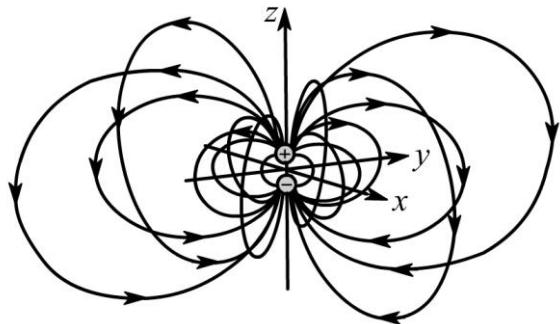


Рис. 1.6. Электростатическое поле электрического диполя (результат компьютерного моделирования).

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathbf{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ^3}$	Закон Кулона
$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	Сила, действующая на точечный заряд в электростатическом поле
$\mathbf{E}_m(\mathbf{R}) = \sum_i e_i \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_i}{ \mathbf{R} - \mathbf{r}_i ^3}$	Электрическое поле, создаваемое статическим распределением элементарных зарядов
$\varphi(\mathbf{R}) \equiv \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}_0} (\mathbf{E}, d\mathbf{l})$	Вычисление потенциала по известной напряженности электрического поля
$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	Вычисление напряженности электростатического поля по известному потенциалу
$\varphi_m(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{e_i}{ \mathbf{R} - \mathbf{r}_i }$	Потенциал, создаваемый статическим распределением элементарных зарядов

Задачи для самостоятельного решения

- 1.1. Электрическое поле точечного заряда уменьшается при удалении от него. Не противоречит ли этому факту результат (1.10), свидетельствующий о независимости величины напряженности поля, созданного бесконечной равномерно заряженной плоскостью, от расстояния до нее? Ведь это поле является суммой полей точечных зарядов.
- 1.2. Рассчитать потенциал и электрическое поле, создаваемые равномерно заряженной сферой, во всех точках пространства (внутри и вне нее).

Указание. В случае ограниченного в пространстве распределения заряда целесообразно начинать расчет с нахождения потенциала, после чего определить напряженность электростатического поля, вычислив градиент от найденного потенциала.

1.3. Если равномерно заряженный по поверхности шар распилить на две половинки по экватору, то в каждой точке плоскости экваториального сечения напряженность электрического поля будет ориентирована перпендикулярно этой плоскости. Доказать.

Указание. Воспользоваться принципом суперпозиции и известным решением задачи о напряженности электрического поля внутри шара, равномерно заряженного по поверхности.

1.4. Рассчитать электрическое поле и потенциал, создаваемые равномерно заряженной по длине бесконечной прямой нитью. Используя полученный результат, вычислить поле бесконечной равномерно заряженной плоскости, выполняя суммирование «по плоскам».

Указание. В данном случае бесконечного распределения заряда выбор бесконечности в качестве нулевой точки невозможен. Расчет следует начинать с вычисления поля. Интегрирование по длине нити легче выполнить, если в качестве переменной выбрать угол, под которым виден элемент нити из точки, в которой рассчитывается это поле.

1.5. Конденсатор представляет собой две параллельно расположенные на расстоянии $d = 1\text{ см}$ друг от друга квадратные металлические пластины площадью $S = 1\text{ м}^2$ каждая. До какой разности потенциалов следует зарядить плоский конденсатор, чтобы расположенный в его центре электрон мог неподвижно висеть в поле земного тяготения?

Предупреждение. Как показывает опыт, правильный ответ на эту внешне очень простую задачу дают далеко не все, кто утверждает, что нашел решение...

1.6. Какую разность потенциалов следует подать на пластины плоского конденсатора («электронную пушку»), чтобы ускоренные в нем α -частицы (ядра гелия) могли бы улететь на бесконечно большое расстояние с поверхности Луны? Считать, что средняя плотность грунта Луны и Земли примерно одинакова, а ускорение свободного падения на Луне в шесть раз меньше, чем на Земле.

1.7. Равномерно заряженная полубесконечная нить перпендикулярна незаряженной плоскости и обрывается на ее поверхности. Доказать, что во всех точках этой плоскости, кроме точки касания с нитью, электрическое поле составляет с ее направлением угол $\pi/4$.

Указание. Сформулированное утверждение можно доказать, непосредственно вычислив поле в указанной точке. Однако существует и другой путь доказательства, практически не требующий вычислений...

- 1.8. Рассчитать потенциал и электрическое поле, создаваемые двумя параллельными равномерно заряженными разноименными зарядами бесконечными нитями, на расстоянии, существенно превосходящем расстояния между ними.

Указание. Ответ этой задачи можно записать в виде, весьма сходном с результатом, полученным для обыкновенного диполя, если ввести аналог дипольного момента для рассматриваемого «двумерного» случая.

- 1.9. Показать, что поверхности с постоянным потенциалом, создаваемым двумя параллельными нитями, равномерно заряженными одинаковыми по величине разноименными линейными зарядами, представляют собой круговые цилиндры.
- 1.10. Потенциал в центре равномерно заряженного по объему куба равен ϕ . Определить потенциал вершин куба. (За нуль принят потенциал в бесконечно удаленной точке).

- 1.11. Несколько одинаковых невзаимодействующих друг с другом частиц с зарядом q и массой m находятся на разном расстоянии от длинной равномерно заряженной с линейной плотностью заряда λ нити. Какую одинаковую скорость следует сообщить всем частицам, для того чтобы они все начали двигаться по окружностям с центрами, лежащими на нити?

- 1.12. Две одинаковые по массе m частицы с зарядами q_1 и q_2 соответственно могут скользить без трения по двум бесконечным спицам, расположенным параллельно друг другу на расстоянии h . В начальный момент одна из частиц находилась в состоянии покоя, а другая, приближалась к ней, двигаясь по соседней спице из бесконечности с начальной скоростью u . Определить установившиеся скорости частиц.

- 1.13. Как показывают результаты численного моделирования, при придании всем частицам системы, рассмотренной в задаче 1.12, одинаковых по модулю начальных скоростей, направленных перпендикулярно нити, траектории этих частиц будут представлять собой подобные друг другу кривые (рис. 1.7). Доказать.

Указание. Эта, по-видимому, достаточно сложная задача (автору не удалось найти элементарного доказательства столь наглядного факта) может быть решена с помощью широко ис-

пользуемого при решении задач о движении в центральном поле метода разложения скорости частицы на радиальную и тангенциальную составляющие.

1.K1. Попытайтесь «научить» Ваш компьютер моделировать движение заряженных частиц в электростатическом поле задаваемой пользователем пространственной конфигурации. Проверьте правильность работы моделирующей программы на простейших примерах движения частицы в постоянном электрическом поле. Воспроизведите результаты численного эксперимента по движению зарядов в центральном поле, напряженность которого уменьшается с расстоянием по закону $E \sim 1/r$ (рис. 1.7, δ). Изучите особенности движения частиц в центральном поле вида $E \sim r^a$ для различных значений a .

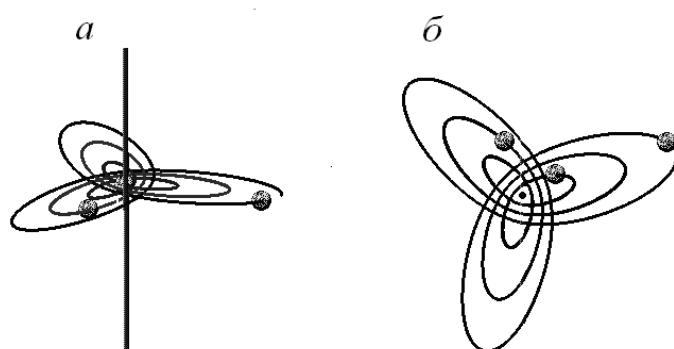


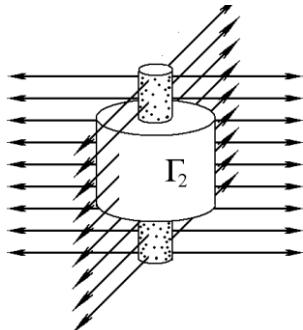
Рис. 1.7. Траектории частиц с одинаковыми массами и зарядами, выпущенных из разных точек с одинаковыми скоростями, направленными перпендикулярно равномерно заряженной нити:

- a* — результаты моделирования движения частиц в трехмерном пространстве;
- б* — проекции траекторий частиц на плоскость, перпендикулярную заряженной нити.

1.K2. Попытайтесь «научить» Ваш компьютер рассчитывать напряженность электростатического поля и потенциал, создаваемые произвольно задаваемым распределением точечных зарядов, в определяемой пользователем точке пространства. Проверьте

правильность работы моделирующих программ на частных примерах, допускающих простой аналитический расчет.

Лекция 2



Электростатическое поле в вакууме

Сглаженные уравнения для макроскопического поля и потенциала могут быть представлены несколькими эквивалентными закону Кулона математическими соотношениями, использование которых определяется особенностями рассматриваемой электростатической задачи. Обсуждаемый в этой лекции математический формализм находит применение не только в теории электричества, но и в большинстве разделов физики, посвященных описанию непрерывно изменяющихся величин.

2.1. Поток и циркуляция векторного поля

В ряде случаев при решении задач электростатики оказывается полезной иная по сравнению с использованной в лекции 1 (но, разумеется, эквивалентная ей по сути) математическая форма записи закона Кулона. Прежде чем перейти к ее рассмотрению, необходимо кратко ознакомиться с некоторыми новыми математическими идеями, которые весьма полезны не только в электродинамике, но и в других разделах физики сплошных сред.

В случае когда в каждой точке пространства \mathbf{R} определен некоторый вектор $\mathbf{K}(\mathbf{R})$, принято говорить о *векторном поле* $\mathbf{K}(\mathbf{R})$.

Для определения понятия *потока* N *векторного поля* $\mathbf{K}(\mathbf{R})$, пронизывающего элемент двумерной поверхности Γ_2 , удобно ввести понятие *вектора элемента площади*, приняв его длину равной площади рассматриваемого элемента поверхности и задав направление по нормали к этому элементу. Для получения однозначного определения направления вектора (рис. 2.1,а) необходимо договориться о том, в каком из двух возможных направлений нормали проводится вектор. В случае замкнутой поверхности Γ_2 вектор площади $\delta\mathbf{S}$ считается

направленным из объема, ограниченного этой поверхностью. Если же поверхность Γ_2 незамкнута, направление нормали согласуется с направлением обхода границы Γ_1 этой поверхности по *правилу правой руки*: если правую руку расположить в пространстве так, что четыре пальца будут указывать направление обхода границы поверхности, то большой палец будет указывать направление нормали к этой поверхности.

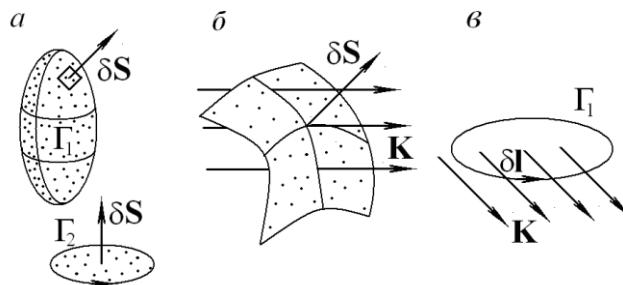


Рис. 2.1. Основные интегральные характеристики векторного поля:
 а — определение направления вектора элемента площади;
 б — определение потока через элемент поверхности;
 в — определение циркуляции векторного поля по замкнутому контуру.

Элементарным потоком векторного поля $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ через небольшой элемент поверхности $\delta\mathbf{S}$ называется скалярное произведение векторов поля и элемента площади (рис. 2.1,б):

$$\delta N \equiv (\mathbf{K}, \delta\mathbf{S}). \quad (2.1)$$

Полный поток через конечную поверхность по определению равен сумме потоков через все ее бесконечно малые элементы и вычисляется с помощью *поверхностного интеграла* (определяется как предел суммы по бесконечно малым элементам поверхности произведений значений подынтегральной функции на этих элементах на их площади):

$$N_1 \equiv \sum_i (\mathbf{K}_i, \delta\mathbf{S}_i) \Big|_{\delta\mathbf{S}_i \rightarrow 0} = \int_{\Gamma_2} (\mathbf{K}, d\mathbf{S}).$$

В случае если поверхность замкнута, для поверхностного интегрирования используется специальное обозначение

$$N_{\Sigma} \equiv \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{K}, d\mathbf{S}).$$

Помимо потока удобной интегральной характеристикой векторного поля является его *циркуляция* C , определяемая суммой по бесконечно малым участкам контура скалярных произведений вектора \mathbf{K} на элементы длины $d\mathbf{l}$ одномерного контура Γ_1 (рис. 2.1,б):

$$C \equiv \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{K}, d\mathbf{l}).$$

Ориентация вектора $d\mathbf{l}$ согласно определению выбирается вдоль контура в направлении его обхода.

2.2. Интегральная форма записи уравнений электростатики

Для расчета электростатических полей, создаваемых симметричными распределениями зарядов, часто оказывается полезной *теорема Гаусса*, утверждающая, что **поток напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность произвольной формы пропорционален суммарной величине электрического заряда, находящегося внутри этой поверхности**. В системе единиц Гаусса эта теорема имеет вид

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_{\Sigma}. \quad (2.2)$$

Доказательство сформулированного утверждения удобно начать с частного случая элементарного заряда, помещенного внутрь произвольной замкнутой поверхности, после чего следует обобщить результат на случай произвольного статического распределения.

Пусть точечный заряд q_k расположен внутри произвольной замкнутой поверхности Γ_2 (рис. 2.2,*a*). Поток напряженности создаваемого им поля через элементарный участок, вырезаемый из поверхности бесконечно малым телесным углом $d\Omega$, согласно определению (2.1) оказывается равным произведению величины заряда на величину этого угла:

$$dN_k = (\mathbf{E}_k, d\mathbf{S}) = \frac{q_k}{R^3} (\mathbf{R}, d\mathbf{S}) = \frac{q_k}{R^2} dS_0 = q_k d\Omega \quad (2.3)$$

и не зависит от расстояния от заряда до поверхности. Соотношение (2.3) сохраняет силу и в случае, если гауссова поверхность имеет более сложную форму и пересекает ограниченную телесным углом область несколько раз.

Действительно, в этом случае (рис. 2.2,*б*) задаваемый конусом $d\Omega$ элементарный поток dN_k будет складываться из потоков, пронизывающих нечетное число элементов поверхности Γ_2 . При этом абсолютные величины всех потоков в соответствии с соотношением (2.3) будут одинаковыми, а их знаки будут чередоваться от одного элементарного сечения к другому:

$$\begin{aligned} dN_k &= (\mathbf{E}_k, d\mathbf{S}_1) + (\mathbf{E}_k, d\mathbf{S}_2) + (\mathbf{E}_k, d\mathbf{S}_3) + \dots = \\ &= q_k d\Omega - q_k d\Omega + q_k d\Omega - \dots = q_k d\Omega. \end{aligned}$$

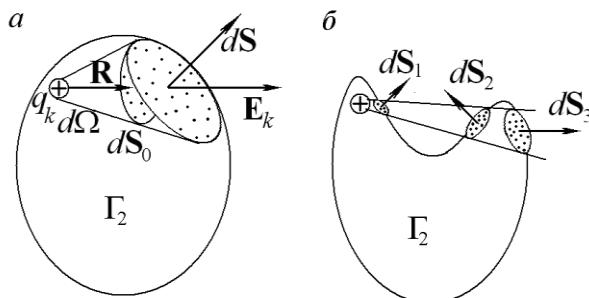


Рис. 2.2. К доказательству теоремы Гаусса для потока электростатического поля:

- а* — линии напряженности поля пересекают гауссову поверхность только один раз;
- б* — линии напряженности поля пересекают гауссову поверхность нечетное число раз.

Интегрирование по телесному углу соотношения (2.3) приводит к результату, соответствующему сформулированной теореме (2.2) для частного случая одного заряда:

$$N_k = \int q_k d\Omega = 4\pi q_k. \quad (2.4)$$

Обобщение частного результата (2.4) на случай произвольного числа точечных зарядов является простым следствием принципа суперпозиции и линейности потока по полю:

$$N_{\Sigma} = \sum_i N_k = 4\pi \sum_i q_k = 4\pi Q.$$

Очевидно, что доказанный результат справедлив не только для электростатического, но и для любого центрального поля, пропорционального обратному квадрату расстояния от его точечного источника. Например, аналог рассматриваемой теоремы справедлив в случае классического описания гравитационных полей, что позволяет сводить задачи расчета ускорения свободного падения к аналогичным электростатическим задачам.

Циркуляция электростатического поля по контуру Γ_1 имеет смысл работы, совершаемой силами поля по перемещению единичного заряда по замкнутому пути. Из потенциального характера электростатических сил следует, что **циркуляция напряженности электростатического поля тождественно равна нулю**:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0. \quad (2.5)$$

Совокупность соотношений (2.2) и (2.5) для потока и циркуляции электростатического поля, по сути, эквивалентна ранее выведенным формулам для расчета электростатического поля, создаваемого заданным распределением зарядов, и носит название *интегральной формы уравнений электростатики*. Этот способ записи оказывается наиболее удобным при расчетах полей, создаваемых симметричными распределениями зарядов.

Пример. Электрическое поле заряженного цилиндра

Рассчитать электрическое поле, создаваемое бесконечным цилиндром радиусом R_0 , равномерно заряженным объемной плотностью заряда ρ .

Решение. Заданное распределение зарядов обладает осевой и трансляционной симметрией. Повороты на любые углы вокруг оси цилиндра, отражения в любых плоскостях, перпендикулярных этой оси, и смещения вдоль оси на произвольные расстояния не приводят к каким-либо изменениям в распределении электрических зарядов. Симметрия распределения зарядов-источников накладывает достаточно жесткие ограничения на возможные пространственные конфигурации $\mathbf{E}(\mathbf{R})$: любое из перечисленных преобразований симметрии не должно приводить к каким-либо изменениям напряженности поля, поскольку сохраняет неизменным распределение его источников. Существование нескольких конфигураций электрического поля, созданного одной и той же системой зарядов-источников, противоречит теореме о единственности решения задач электростатики, доказательство которой будет приведено в следующей лекции. Такие допустимые конфигурации поля приведены на рис. 2.3.

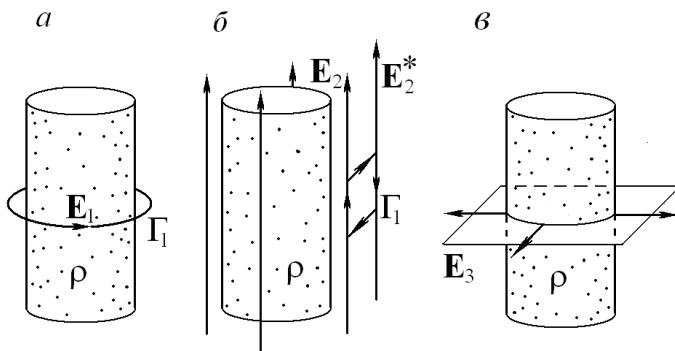


Рис. 2.3. Допустимые по соображениям симметрии задачи конфигурации электростатического поля равномерно заряженного цилиндра:
 a, b — конфигурации не существующих реально полей;
 c — истинная конфигурация электростатического поля.

Существование электростатического поля, линии которого представляют собой окружности с центрами, лежащими на оси симметрии (рис. 2.3,*a*), невозможно из-за условия потенциальности (2.5):

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 2\pi r E_1 = 0 \Rightarrow E_1 = 0.$$

Другая обладающая цилиндрической симметрией конфигурация электростатического поля приведена на рис. 2.3,*b*. Применение теоремы о циркуляции к контуру типа Γ_1 позволяет сделать вывод о независимости величины напряженности от расстояния:

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = E_2^* h - E_2 h = 0 \Rightarrow E_2^* = E_2 = 0.$$

Предположение же существования постоянного во всем пространстве электростатического поля хотя формально и не противоречит уравнениям электродинамики, но традиционно отвергается как физически абсурдное (по существу высказанное утверждение следует рассматривать как некий дополнительный принцип).

Последняя из приведенных конфигураций (рис. 2.3,*c*) соответствует решению поставленной задачи. Из соображений симметрии ясно, что напряженность электростатического поля в каждой точке пространства должна быть направлена перпендикулярно оси цилиндра (в противном случае отражение в перпендикулярной оси плоскости приведет к изменению конфигурации поля) и иметь одинаковую величину во всех равноудаленных от оси цилиндра точках пространства (в противном случае изменения напряженности происходили бы в результате любых поворотов вокруг оси симметрии или смещений вдоль нее).

Для расчета напряженности электрического поля, создаваемого обладающей цилиндрической симметрией электростатической системой, в качестве гауссовой поверхности удобно выбрать цилиндр, ось которого совпадает с осью симметрии распределения зарядов (рис. 2.4,*a*). При этом ненулевым оказывается только вклад в поток через боковую часть цилиндрической гауссовой поверхности.

Поскольку в каждой точке боковой поверхности цилиндра напряженность электрического поля направлена перпендикулярно к ней и постоянна по величине, полный поток вектора \mathbf{E} равен произведению

модуля искомой напряженности на площадь боковой поверхности. Полный заряд внутри гауссовой поверхности определяется величиной вырезаемого ею заряженного объема. В результате поле внутри цилиндра линейно возрастает с увеличением расстояния от его оси, а вне него уменьшается обратно пропорционально расстоянию (рис. 2.4,б):

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 2\pi RhE = 4\pi Q \Rightarrow \begin{cases} E(R) = 2\rho R_<, & R_< < R_0, \\ E(R) = 2\rho \frac{r^2}{R_>}, & R_> > R_0. \end{cases}$$

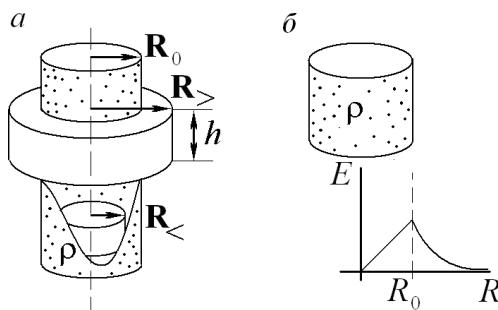


Рис. 2.4. Вычисление напряженности электростатического поля бесконечного цилиндра с помощью теоремы Гаусса:
 а — вид гауссовой коробочки;
 б — результат расчета напряженности поля бесконечного равномерно заряженного цилиндра.

2.3. Дифференциальная форма записи уравнений электростатики

Наряду с интегральной формой записи уравнений электростатики существует эквивалентная ей *дифференциальная форма*, которая во многих случаях оказывается более удобной. Пусть электрический заряд непрерывно распределен по некоторому объему. В этом случае

теорему Гаусса (2.2) можно применить к физически бесконечно малому объему δV , имеющему форму прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 2.5:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \delta V. \quad (2.6)$$

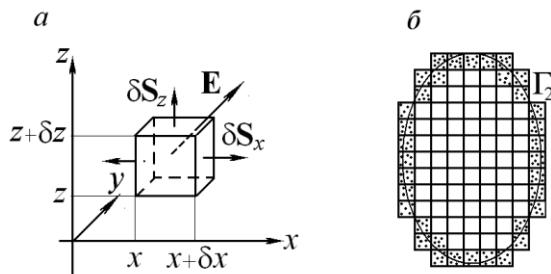


Рис. 2.5. Связь между дифференциальной и интегральной формами теоремы Гаусса:

- a* — к выводу теоремы Гаусса в дифференциальной форме (2.6);
- б* — идея перехода от дифференциальной формы записи теоремы Гаусса к интегральной; выделены те ячейки, поток поля через которые дает ненулевой вклад в поток, поступающий через гауссову поверхность Γ_2 .

Подстановка в формулу (2.6) в соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 2.5,*a*, явных выражений для объема и площадей граней параллелепипеда

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \sum_{\xi=x, y, z} (E_\xi(r_\xi + \delta r_\xi) - E_\xi(r_\xi)) \delta S_\xi$$

приводит к выражению, содержащему отношения приращений компонент вектора \mathbf{E} к одноименным приращениям координат радиус-вектора точки наблюдения. При стремлении к нулю размеров выделенного объема эти отношения превращаются в частные производные:

$$\sum_{\xi} \frac{E_\xi(r_\xi + \delta r_\xi) - E_\xi(r_\xi)}{\delta r_\xi} \rightarrow \sum_{\xi} \frac{\partial E_\xi}{\partial r_\xi} = 4\pi\rho(\mathbf{r}).$$

Полученное выражение является дифференциальным аналогом теоремы Гаусса. Для его компактной записи в математике вводится специальная операция, называемая *дивергенцией*, для обозначения которой иногда используется символ *div*. Более изящна и современна другая символьная форма записи этой математической операции — в виде скалярного произведения оператора пространственного дифференцирования на вектор \mathbf{E} :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv (\nabla, \mathbf{E}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

С точки зрения математики, соотношения (2.2) и (2.7) эквивалентны.

Интегральной формуле для циркуляции может быть сопоставлено дифференциальное соотношение, содержащее специальную операцию вычисления *ротора* (*rot*), которую можно определить как результат векторного умножения оператора пространственного дифференцирования на векторную функцию:

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} \equiv [\nabla, \mathbf{K}] \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \sum_{\xi=x, y, z} \left(\frac{\partial K_{\xi+1}}{\partial r_{\xi+2}} - \frac{\partial K_{\xi+2}}{\partial r_{\xi+1}} \right) \mathbf{e}_{\xi}.$$

В случае электростатического поля ротор его напряженности тождественно равен нулю. Этот результат можно получить исходя из интегрального соотношения для циркуляции \mathbf{E} , применяя его к бесконечно малому замкнутому контуру прямоугольной формы. Однако использование операторной формы записи позволяет получить этот результат совсем просто на основании хорошо известного свойства равенства нулю векторного произведения вектора на самого себя:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv [\nabla, \mathbf{E}] = [\nabla, (-\nabla\phi)] = -[\nabla, \nabla]\phi \equiv 0. \quad (2.8)$$

Дифференциальные соотношения для электростатического поля (2.7) и (2.8) были получены как следствие интегральных уравнений электростатики. Возможен и обратный переход. Так, например, из формулы (2.7) непосредственно следует выражение (2.6) для потока через поверхность бесконечно малого гауссового объема. Если конечный объем разбить на такие элементарные ячейки (рис. 2.5,*б*), применить к каждой из них указанное соотношение и учесть, что противо-

положные потоки через их общие стенки взаимно уничтожаются, в результате суммирования получим интегральную теорему Гаусса (2.2). Разумеется, в курсе математики это утверждение, называемое *теоремой Гаусса—Остроградского*, доказывается значительно строже.

Пример. Ленгмюровские колебания в плазме

Рассчитать частоту собственных малых одномерных колебаний электронной плотности в плазме, предположив, что она в целом электронейтральна, а скорости ионов пренебрежимо малы.

Решение. В стационарном состоянии электрически равновесной плазмы концентрации электронов и ионов n_0 равны, макроскопическое электрическое поле отсутствует.

Пусть в результате внешнего возмущения слой электронов толщиной δx переместился на некоторое расстояние $l(x)$ (рис. 2.6):

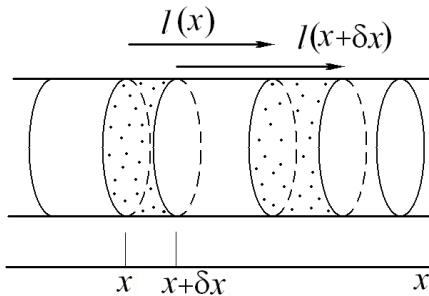


Рис. 2.6. Смещение электронов в плазме, приводящее к возникновению ленгмюровских колебаний.

В общем случае следует считать, что различные участки рассматриваемого слоя смещаются на разные расстояния. В результате объем слоя и, следовательно, концентрация электронов изменятся:

$$\frac{n(x)}{n_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{\delta x}{\delta x + \delta l(x)} = \left(1 + \frac{\delta l}{\delta x}\right)^{-1}.$$

Предположение малости отношения $\delta l/\delta x$ по сравнению с единицей (условие ленгмюровских колебаний) и его замена полной производной (предполагаемая в условии задачи одномерность подразумевает наличие зависимости всех параметров плазмы только от координаты x и

времени) приводят к следующей зависимости от координаты концентрации электронов в возмущенной плазме:

$$n(x) \approx \left(1 - \frac{dl}{dx}\right) n_0 .$$

Изменение электронной концентрации при условии постоянства концентрации положительных ионов (тяжелые частицы практически неподвижны) сопровождается возникновением пространственной плотности электрического заряда:

$$\rho(x) = e(n_0 - n(x)) = en_0 \frac{dl}{dx} .$$

В свою очередь согласно уравнению (2.6) этот пространственный заряд обусловливает появление электрического поля, описываемого равенством

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \frac{dE_x}{dx} = 4\pi\rho = 4\pi e(n_0 - n(x)) = 4\pi en_0 \frac{dl}{dx} .$$

Интегрирование полученного соотношения позволяет найти электрическое поле с точностью до константы. Поскольку в невозмущенной электрически нейтральной плазме смещение электронов отсутствует, эта константа должна считаться равной нулю. Таким образом, возникающее электрическое поле оказывается пропорциональным смещению электронов:

$$E_x(x) = 4\pi en_0 l + C = 4\pi en_0 l .$$

Это поле стремится вернуть электроны в исходное положение, что в соответствии с уравнением движения

$$m \frac{d^2l}{dt^2} = -eE_x = -4\pi e^2 n_0 l$$

приводит к возникновению гармонических колебаний.

Частота свободных колебаний электронной плотности в плазме (*плазменная, или ленгмюровская, частота*) задается соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m} .$$

2.4. Уравнение Пуассона

Используя дифференциальную форму теоремы Гаусса для электростатического поля (2.7) и выражение поля через потенциал (1.16), несложно получить соотношение, связывающее пространственное распределение заряда и обусловленный им потенциал:

$$4\pi\rho = (\nabla, \mathbf{E}) = -(\nabla, \nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi.$$

Вошедшее в получившееся выражение скалярное произведение оператора пространственного дифференцирования на самого себя весьма часто встречается в физике и математике. Для него были введены специальное обозначение Δ и название *оператор Лапласа*, или *лапласиан*. Выражение в явном виде для этого оператора в декартовой системе координат получают в результате формального выполнения операции скалярного умножения оператора пространственного дифференцирования на самого себя:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \left(\sum_{\xi} \mathbf{e}_{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{\xi}} \right)^2 = \sum_{\xi} \frac{\partial^2}{\partial r_{\xi}^2}.$$

Связывающее потенциал электростатического поля с плотностью электрического заряда неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных носит название *уравнения Пуассона*:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (2.8)$$

а его частный случай для пустого пространства ($\rho = 0$) — *уравнение Лапласа*:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.9)$$

Являющиеся решением уравнения Лапласа (2.9) функции называются гармоническими.

Уравнение Пуассона позволяет легко решить задачу определения неизвестного распределения зарядов по заданному пространственному распределению создаваемого им потенциала. Решение же задачи нахождения потенциала по известному распределению заряда было получено с учетом выражения для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \varphi(\mathbf{R}) = \int_V d^3\mathbf{r} \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}. \quad (2.10)$$

Уравнения типа (2.10) часто встречаются не только в электродинамике, но и в других разделах физики (см. приведенный ниже пример). При этом для их решения можно использовать уже рассмотренные способы, пользуясь весьма очевидным «замечательным» свойством математических уравнений: одинаковые уравнения имеют одинаковые решения независимо от того, какие переменные используются при их записи.

Пример. Диффузия нейтронов из реактора

Считая, что ядерный реактор представляет собой шар с заданным радиусом R , внутри которого скорость рождения нейтронов постоянна, найти стационарное распределение концентрации нейтронов во всем пространстве, окружающем реактор. Считать, что скорость направленного дрейфа нейтронов пропорциональна градиенту их концентрации.

Решение. По аналогии с плотностью электрического тока удобно ввести плотность тока нейтронов, определив ее как произведение концентрации частиц на среднюю скорость направленного движения:

$$\mathbf{J} = n \langle \mathbf{v} \rangle.$$

Согласно условию задачи нейтронный ток пропорционален градиенту концентрации и, разумеется, направлен в сторону ее уменьшения. Входящий в выражение для нейтронного тока множитель D носит название *коэффициента диффузии*:

$$\mathbf{J} = -D \nabla n. \quad (2.11)$$

Последнее выражение по форме аналогично ранее полученному соотношению (1.16), связывающему напряженность электрического поля с потенциалом, и выводится из него путем замены:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{J}, \quad \varphi \rightarrow Dn.$$

Скорость изменения числа частиц в объеме V определяется их диффузией через границу Γ_2 этого объема, скоростью рождения

нейтронов в результате ядерных процессов u_+ и скоростью их гибели при столкновениях с атомами поглотителя u_- :

$$\frac{dN}{dt} = - \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{J}, d\mathbf{S}) + \int_V u_+(\mathbf{r}) dV - \int_V u_- dV.$$

Дифференциальный аналог выражающего закон сохранения числа частиц соотношения легко получить, применяя его к бесконечно малому объему, аналогично тому, как это делалось при выводе уравнения для дивергенции электростатического поля:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{J}) + u_+ - u_-.$$

В стационарном случае при отсутствии поглощения последнее выражение принимает вид, весьма сходный с видом уравнения для дивергенции электростатического поля (2.7):

$$(\nabla, \mathbf{J}) = u_+. \quad (2.12)$$

Подстановка плотности тока (2.11) в соотношение (2.12) приводит к уравнению Пуассона

$$\Delta n = -\frac{u_+}{D},$$

совпадающему с уравнением для электрического потенциала (2.8) с точностью до замены:

$$\varphi \rightarrow n, \quad 4\pi\rho \rightarrow \frac{u_+}{D}. \quad (2.13)$$

Таким образом, задача о нахождении пространственного распределения концентрации нейтронов сводится к задаче отыскания потенциала внутри и вне равномерно заряженного шара. Ее решение может быть получено, например, с помощью известного решения задачи о расчете напряженности электрического поля равномерно заряженного шара (проще всего получить, используя теорему Гаусса) и вычисления работы по перемещению единичного заряда из рассматриваемой точки на бесконечность:

$$\varphi(r) = 2\pi\rho \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right), \quad r < R,$$

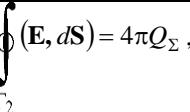
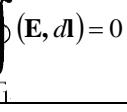
$$\varphi(r) = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r}, \quad r > R.$$

Искомый ответ следует из решения электростатической задачи в результате замены обозначений (2.13):

$$n(r) = \frac{u_+}{2D} \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right), \quad r < R,$$

$$n(r) = \frac{u_+}{3D} \frac{R^3}{r}, \quad r > R.$$

Соотношения, которые полезно помнить

$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_\Sigma ,$ 	Интегральная форма уравнений для электростатического поля в вакууме
$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$ 	
$(\nabla, \mathbf{E}) = 4\pi\rho,$ $[\nabla, \mathbf{E}] = 0$	Дифференциальная форма уравнений для электростатического поля в вакууме
$\Delta\varphi = -4\pi\rho$	Уравнение Пуассона

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Используя соображения симметрии и теорему Гаусса, рассчитать в произвольной точке пространства электрическое поле, создаваемое:

- а) равномерно заряженным по объему шаром;
- б) равномерно заряженной по поверхности сферой;
- в) равномерно заряженным по поверхности цилиндром;

г) равномерно заряженной по объему бесконечной «толстой плоскостью».

Плотности зарядов и все геометрические размеры считать известными.

- 2.2. Используя результаты предыдущей задачи рассчитать потенциалы, создаваемые указанными распределениями зарядов, и построить графики зависимости напряженности полей и величин потенциалов от расстояния до центра распределения.
- 2.3. Рассчитать пространственное распределение электростатического поля, создаваемого атомом водорода в основном состоянии. Ядро атома считать точечным, а плотность заряда в электронном облаке распределенной сферически симметрично в соответствии с выражением

$$\rho = C \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

где a_0 — константа, называемая *первым боровским радиусом*; C — нормировочная константа, определяемая из условия равенства суммарного электрического заряда электронного облака элементарному заряду.

- 2.4. Оценить полную электростатическую энергию атома гелия в основном состоянии, считая, что оба его *s*-электрона «размазаны по пространству» в соответствии с выражением для электронной плотности в электронном облаке атома водорода (см. предыдущую задачу).
- 2.5. Сильные ядерные взаимодействия удовлетворительно описываются с помощью потенциала, предложенного Юкавой:

$$\Phi = C \frac{\exp(-\alpha r)}{r}.$$

Найдите соответствующую такому потенциальному «напряженность ядерных сил». Как должен быть распределен в пространстве электрический заряд, чтобы создаваемый им потенциал зависел от расстояния так же, как потенциал Юкавы? Получите аналог уравнения Лапласа для случая потенциала Юкавы.

- 2.6. Рассчитайте пространственное распределение плотности нейтронов вблизи шарообразного ядерного котла, внутри которого скорость рождения нейтронов постоянна, а поглощение отсутствует. Котел окружен очень толстым слоем вещества, поглощающего нейтроны со скоростью, пропорциональной концентрации ча-

стиц. Считать, что внутри и вне котла поток нейтронов подчиняется уравнению диффузии (2.11).

- 2.7. После прыжка через гиперпространство космический корабль оказался вблизи планеты Гравигаусия, представляющей собой очень длинный однородный цилиндр, вращающийся вокруг своей оси с периодом T . Определите плотность вещества, из которого сложена планета, если известно, что любое тело, расположенное на ее поверхности, находится в состоянии невесомости.

Указание. Столь необычное название планеты придумано не случайно и является подсказкой для выбора способа решения задачи на расчет напряженности гравитационного поля.

- 2.8. Оцените, на сколько минут отстанут за сутки очень точные часы-ходики, расположенные на поверхности Земли, если строго под ними на глубине 100 м прорыть длинный прямой туннель радиусом 5 м.
- 2.9. Покажите, что на достаточно больших расстояниях от «бесконечной решетки», представляющей собой систему периодически расположенных в одной плоскости ($z = 0$) параллельных равномерно заряженных нитей, создаваемое ею электростатическое поле эквивалентно полю равномерно заряженной плоскости.

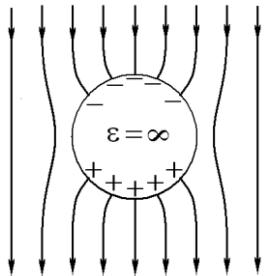
Указание. Вне содержащей электрические заряды плоскости ($z = 0$) удовлетворяющий уравнению Лапласа (2.9) потенциал, создаваемый периодической системой заряженных нитей, расположенных в точках $x_n = an$, следует искать в виде суммы гармонических функций с частотами, кратными пространственной частоте расположения нитей:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z) \cos\left(\frac{2\pi}{a} nx\right).$$

- 2.K1. Попытайтесь составить программу для Вашего компьютера, которая по задаваемому Вами пространственному распределению потенциала позволяла бы рассчитывать напряженность электрического поля в заданной точке пространства.

Указание. Программу желательно составить так, чтобы распределение потенциала можно было задавать не только с помощью аналитических выражений, но и численно (в виде массива значений φ для большого числа близко расположенных точек).

Лекция 3



Электростатическое поле при наличии проводников

При внесении проводника в электростатическое поле происходит перераспределение его свободных зарядов, приводящее к возникновению макроскопического индуцированного поверхностного заряда, который своим полем полностью компенсирует исходное макроскопическое поле во всем проводящем объеме. Объем проводника эквипотенциален. Для расчета индуцированных поверхностных зарядов и создаваемых ими полей часто используется метод изображений.

3.1. Электростатическое поле в веществе. Метод изображений

С точки зрения классической теории электричества, вещество может рассматриваться как объем пустого пространства, содержащий некоторое число положительных и отрицательных зарядов (атомных ядер и электронов), способных к перемещению относительно друг друга. Вещества, в которых отсутствуют препятствующие перемещению зарядов силы, называют *проводниками* в отличие от остальных веществ, называемых *диэлектриками*.

При внесении вещества во внешнее электрическое поле E_0 , создаваемое свободными зарядами q_{0i} , пространственное распределение которых, как правило, известно, в его объеме возникает перемещение заряженных частиц, приводящее к возникновению макроскопических *связанных зарядов*, создающих собственное электрическое поле $E'(r)$ (рис. 3.1,а). Сложность расчетов возникающего распределения зарядов в веществе состоит в том, что оно определяется не только внешним электрическим полем и внутренними силами, препятствующими смещению зарядов в объеме, но и не известным заранее полем $E'(r)$, обусловленным этим подлежащим расчету распределением. В данном

курсе будут рассмотрены методы решения описанной задачи в двух важнейших частных случаях: полного отсутствия внутренних полей (проводники) и внутренних полей, линейных по смещению зарядов (линейные диэлектрики).

В общем случае возникающие в веществе объемные $\rho'(\mathbf{r})$ и поверхностные $\sigma'(\mathbf{r})$ распределения зарядов достаточно сложны. Однако при решении ряда задач иногда удается подобрать такое сравнительно простое распределение точечных зарядов $q'(\mathbf{r})$, что создаваемое ими вне занимаемого веществом объема электрическое поле оказывается тождественным реальному полю, созданному распределением наведенных зарядов. Такие фиктивные заряды $q'(\mathbf{r})$ получили название *зарядов-изображений*, а основанный на их использовании метод решения задач электростатики — *метода изображений*.

Далее будет сформулирована и доказана теорема о единственности, гарантирующая, что найденное методом изображений поле совпадает с искомым. Следует иметь в виду, что никакой теоремы о существовании простого изображения в заданной системе не существует и указанный метод применим для решения далеко не всех задач электростатики.

3.2. Электростатические свойства проводников

Проводниками будем называть тела, содержащие способные свободно перемещаться заряды, число которых достаточно для полного экранирования внешнего электрического поля во всем объеме. При внесении проводника во внешнее поле в нем возникает перемещение зарядов, которое может прекратиться лишь при условии обращения в нуль полного поля в любой точке проводника, занимающего объем V . Возникающие в результате такого перемещения макроскопические заряды (*индуцированные заряды*) создают вторичное макроскопическое электрическое поле $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$, полностью компенсирующее исходное поле \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in V. \quad (3.1)$$

Электрическое поле внутри проводника обращается в нуль лишь после того, как закончатся все перемещения макроскопических зарядов в проводящем объеме. В общем случае свойство (3.1) выполняется только для статических распределений зарядов. Очевидным следстви-

ем отсутствия электростатического поля внутри проводника является эквипотенциальность его объема:

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{const}, \mathbf{r} \in V. \quad (3.2)$$

Из теоремы Гаусса следует, что **внутри проводника не может существовать макроскопических зарядов**. Действительно, поток электростатического поля через произвольную гауссову поверхность внутри проводника Γ_2 согласно требованию равенства нулю макроскопического поля в проводящем объеме (3.1) должен равняться нулю, что означает отсутствие макроскопических зарядов в любой точке внутри проводника:

$$0 = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi q' \Rightarrow q' = 0.$$

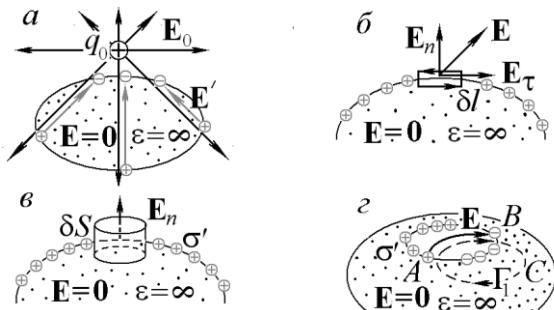


Рис. 3.1. Электростатическое поле при наличии проводников:
 а — экранирование поля свободных зарядов вторичным полем индуцированных поверхностных зарядов;
 б — доказательство равенства нулю тангенциальной составляющей электростатического поля вблизи поверхности проводника;
 в — вычисление нормальной составляющей электростатического поля вблизи той же поверхности;
 г — доказательство равенства нулю электростатического поля в не содержащей свободных зарядов замкнутой полости внутри проводника.

Анализ свойств электрического поля вблизи поверхности проводника основывается на допущении, что граница проводящего материала является «резкой», т. е. на сколь угодно малом расстоянии от поверхности поле внутри проводника отсутствует. **Вблизи такой проводящей поверхности электростатическое поле не имеет тангенциальной составляющей**, т. е. направлено нормально к поверхности. Для доказательства этого достаточно рассмотреть контур обхода в виде прямоугольной петли, две стороны которой имеют небольшую длину δl и расположены соответственно внутри проводника и над его поверхностью, а две другие бесконечно малы (рис. 3.1,*б*). С помощью теоремы о равенстве нулю циркуляции электростатического поля (2.5) нетрудно убедиться в отсутствии его составляющей E_t , параллельной проводящей поверхности (*тангенциальной составляющей*):

$$0 = \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = E_t \delta l \Rightarrow E_t = 0. \quad (3.3)$$

Что же касается *нормальной составляющей*, для ее расчета достаточно рассмотреть гауссову коробочку в виде небольшого цилиндра, содержащего внутри себя элемент заряженной поверхности проводника (рис. 3.1,*в*):

$$E_n \delta S = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi\sigma' \delta S \Rightarrow E_n = 4\pi\sigma'. \quad (3.4)$$

Вблизи поверхности проводника электростатическое поле направлено по нормали к поверхности и однозначно связано с поверхностной плотностью заряда проводника: $E_n = 4\pi\sigma'$.

Нетрудно показать, что в произвольной замкнутой полости, не содержащей зарядов и расположенной внутри проводника, электростатическое поле отсутствует.

Действительно, предположение о существовании электрического поля в такой полости (рис. 3.1,*г*) сразу приводит к заключению, что его силовые линии начинаются и обрываются на ограничивающих полость стенках (внутри полости нет зарядов, на которых линии могли бы возникнуть или оборваться). Перенос небольшого заряда между точками *A* и *B* вдоль такой линии сопровождался бы совершением положительной работы силами поля. Возвратить заряд обратно в точ-

ку A можно путем его перемещения внутри проводящего вещества (по траектории BCA), где поле отсутствует и работа не совершается. Таким образом, работа, совершаемая при переносе заряда по замкнутому контуру, оказывается отличной от нуля, что противоречит потенциальности электростатического поля.

Приведенный вариант доказательства использует не всегда верное предположение о возможности изображения любого электростатического поля в полости с помощью силовых линий. Более строгое доказательство равенства нулю электростатического поля в пустой замкнутой полости проводника приводится в курсе математической физики.

3.3. Теорема о единственности решения задач электростатики

Задача о нахождении электростатического поля свободных зарядов и системы проводников в общем случае решается численно исходя из требования эквипотенциальности проводящих объемов или условия перпендикулярности вектора \mathbf{E} во всех точках их поверхностей. В ряде простейших случаев верное решение можно «угадать», воспользовавшись *методом изображений*. При решении задач таким методом необходима уверенность в том, что «угаданное» решение действительно соответствует реальному распределению полей. Подобная уверенность обеспечивается *теоремой о единственности решения задач электростатики с заданными граничными условиями*. Указанная теорема является следствием леммы о свойстве потенциала в пустом пространстве: **в свободной от зарядов части пространства значение потенциала в центре сферы равно среднему значению потенциала на ее поверхности.**

Один из способов доказательства сформулированной леммы основан на общеизвестном факте эквивалентности электрического поля равномерно заряженной сферы полю точечного заряда, помещенного в ее центр. Работа по перемещению точечного заряда q из бесконечности в точку, удаленную на расстояние R_0 от центра сферы радиусом R ($R > R_0$), заряд Q которой равномерно распределен по поверхности (рис. 3.2), может быть вычислена как произведение величины точечного заряда на потенциал, создаваемый помещенным в центр сферы точечным зарядом Q :

$$A = q\varphi = q \frac{Q}{R_0} .$$

Одновременно это же выражение может рассматриваться как произведение заряда сферы на потенциал, создаваемый точечным зарядом в точке нахождения центра сферы:

$$A = q \frac{Q}{|\mathbf{R}_0|} = Q \frac{q}{|\mathbf{R}_0|} = Q\varphi(\mathbf{R}_0). \quad (3.5)$$

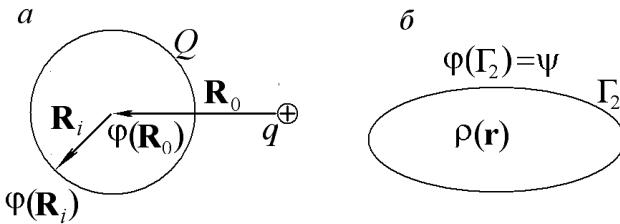


Рис. 3.2. К доказательству теоремы о единственности решения задач расчета электростатических полей систем, содержащих проводники:
 а — к доказательству леммы о величине потенциала в центре сферы в свободном от зарядов пространстве;
 б — к доказательству теоремы о единственности решения задач электростатики.

Вместе с тем ту же работу A можно найти как произведение величины заряда q на сумму потенциалов, создаваемых в точке его нахождения всеми элементами поверхности сферы:

$$A = q \sum_i \frac{\delta Q_i}{|\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_i|}.$$

Каждое из слагаемых в сумме можно рассматривать как произведение заряда элемента поверхности сферы на потенциал, создаваемый в месте его расположения точечным зарядом q :

$$A = q \sum_i \delta Q_i \frac{q}{|\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_i|} = \frac{Q}{S} \sum_i \varphi(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_i) \delta S_i = Q \langle \varphi \rangle_{r \in S}. \quad (3.6)$$

Приравнивание выражений для работы (3.5) и (3.6) приводит к соотношению, эквивалентному формулировке леммы:

$$\varphi(\mathbf{R}_0) = S^{-1} \sum_i \varphi(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_i) \delta S_i = \langle \varphi \rangle_{\mathbf{r} \in S}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что в соответствии с принципом суперпозиции доказанная лемма остается справедливой для произвольного статического распределения зарядов, находящихся вне рассматриваемой сферы. Ее непосредственным следствием является утверждение о том, что **в любой свободной от зарядов точке пространства потенциал не может принимать экстремальных значений**. В противном случае из точки экстремума как из центра можно описать сферу, в каждой точке поверхности которой потенциал будет превосходить (или окажется меньше) потенциал в центре, что противоречит лемме.

Полученное свойство потенциала позволяет легко доказать *теорему о единственности* решения задачи электростатики в замкнутой области пространства при заданных граничных условиях (рис. 3.2,б): **в объеме пространства с заданным распределением зарядов $\rho(r)$, ограниченном замкнутой поверхностью Γ_2 , для потенциала, величина которого на границе задается известной функцией $\psi(r)$, может существовать лишь единственное решение уравнения Пуассона.**

Сформулированная теорема доказывается методом от противного. Пусть, напротив, внутри рассматриваемой области существуют два разных решения $\varphi_1(\mathbf{r})$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$, удовлетворяющих уравнению Пуассона и заданному условию на границе:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi(\mathbf{r} \in \Gamma_2) = \psi(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

Тогда разность двух решений задачи (3.8) во всех точках области должна удовлетворять уравнению Лапласа и обращаться в нуль на границе:

$$\delta\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r}) \Rightarrow \begin{cases} \Delta(\delta\varphi) = 0, \\ \delta\varphi(\mathbf{r} \in \Gamma_2) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Любая функция, удовлетворяющая задаче (3.9), может рассматриваться как потенциал некоторого электростатического поля в пространстве, лишенном зарядов (напряженность такого поля может быть вычислена как градиент потенциала). Согласно доказанной лемме эта

функция не может принимать экстремальных значений внутри области. С учетом тождественности нулю функции φ на границе Γ_2 это означает ее тождественное равенство нулю во всей внутренней области, что, в свою очередь, заставляет признать тождественность функций $\varphi_1(\mathbf{r})$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$.

Доказанная теорема непосредственно применима к задачам определения потенциала внутри области, ограниченной проводящими поверхностями, потенциалы которых известны. Если свободное от проводников пространство неограниченно, дополнительно требуется задание потенциала бесконечно удаленной точки.

Если же потенциалы проводников не заданы, можно утверждать лишь то, что на их поверхностях вектор \mathbf{E} не имеет тангенциальной компоненты. В этом случае можно показать, что потенциал любой точки пространства определяется с точностью до константы, не влияющей на градиент потенциала, т. е. на вид электрического поля.

3.4. Использование метода изображений для расчета электростатических полей при наличии проводников

Доказанная теорема о единственности является основанием для решения задачи отыскания электростатических полей, создаваемых заданным статическим распределением зарядов и проводящих тел, с помощью описанного метода изображений. В случае проводников конфигурацию зарядов-изображений следует подбирать таким образом, чтобы в любой точке границы проводящих объемов выполнялось любое из условий (3.3) или (3.4). При этом в соответствии с доказанной теоремой поле в свободном от проводников пространстве может быть найдено единственным образом. Это гарантирует совпадение найденного поля с реально существующим.

Процедура поиска распределений зарядов-изображений в значительной степени основана на интуиции. Определенную помощь в угадывании верного решения может оказать использование соображений симметрии: распределение зарядов-изображений не должно ухудшать симметрии заданных в условии задачи конфигураций свободных зарядов и проводников. Следует также учитывать, что единственность решения задач методом изображений не гарантирует его существования.

Пример. Заряд над плоской поверхностью проводника

Рассчитать силу, действующую на точечный заряд q_0 , расположенный на высоте h_0 над плоской границей полупространства, заполненного проводником. Вычислить распределение индуцированных зарядов на поверхности проводника и суммарную величину индуцированного заряда.

Решение. Задача легко решается с помощью метода изображений. В качестве изображения разумно попытаться использовать простейшую систему — точечный заряд q' , поле которого вне проводящего объема оказалось бы эквивалентным полю индуцированного на поверхности проводника распределения зарядов $\sigma' = -\sigma_1 < 0$. Из соображений симметрии ясно, что заряд-изображение $q' = -q_1 < 0$ должен находиться на перпендикуляре, опущенном на поверхность проводника из точки нахождения заряда q_0 (рис. 3.3, а).

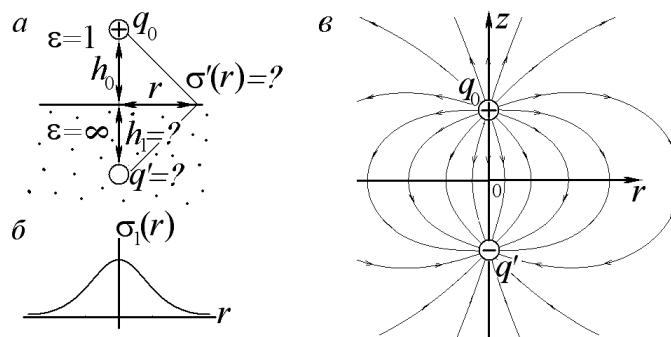


Рис. 3.3. Решение задачи о расчете напряженности электростатического поля, создаваемого точечным зарядом, расположенным над плоской поверхностью проводника:

- а — к постановке задачи о заряде вблизи плоской границы проводника;
- б — распределение поверхностной плотности индуцированного заряда;
- в — компьютерный расчет поля, созданного двумя равными по величине разноименными точечными зарядами; экви-потенциальной поверхностью, совпадающей с поверхностью проводника, является плоскость $z = 0$.

В качестве критерия правильности выбора величины заряд-изображения и его положения удобно использовать условие равенства нулю потенциала в произвольной точке поверхности проводника, удаленной на расстояние r от точки пересечения соединяющей заряды прямой с его поверхностью.

Сформулированное требование приводит к равенству, которое должно выполняться тождественно при любых значениях r :

$$\frac{q_0}{(h_0^2 + r^2)^{1/2}} - \frac{q_1}{(h_1^2 + r^2)^{1/2}} = 0.$$

Полученное уравнение эквивалентно системе из двух уравнений с двумя неизвестными (q_1 и h_1):

$$\begin{aligned} q_0^2 h_1^2 - q_1^2 h_0^2 &= 0, \\ q_1^2 - q_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

имеющей (с учетом условия $q_1 > 0$) два решения:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0, \\ h_1 &= \pm h_0. \end{aligned}$$

Первое из решений описывает заряд-изображение, обеспечивающее решение задачи о расчете поля над проводником, второе — в проводящем объеме.

После замены поверхностного распределения индуцированного заряда точечным зарядом-изображением расчет поля над произвольной точкой поверхности проводника не составляет труда:

$$E(r) = 2 \frac{q_0 h_0}{(r^2 + h_0^2)^{3/2}}.$$

Распределение плотности индуцированного на поверхности проводника заряда легко вычисляется исходя из формулы (3.4):

$$\sigma_1(r) = \frac{E(r)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{q_0 h_0}{(r^2 + h_0^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

На рис. 3.3,*б* представлен примерной график функции (3.10).

Полный индуцированный на поверхности проводника заряд вычисляется интегрированием распределения (3.10) по всей плоскости. Его абсолютная величина оказывается равной q_0 .

Поскольку поле, создаваемое индуцированным зарядом над поверхностью проводника, эквивалентно полю точечного заряда изображения, действующая на свободный заряд сила F равна силе его взаимодействия с фиктивным зарядом:

$$F = \frac{q_0^2}{4h_0^2}.$$

На рис. 3.3,*в* изображена картина силовых линий электростатического поля, создаваемого системой из двух одинаковых по величине разноименных зарядов. В соответствии с теоремой о единственности в полупространстве $z > 0$ это поле совпадает с искомым решением задачи об электростатическом поле точечного заряда над поверхностью проводника.

Пример. Проводящий шар в однородном электростатическом поле

Найти поверхностное распределение электрических зарядов на проводящем шаре радиусом R_0 , внесенном в однородное электростатическое поле напряженностью \mathbf{E}_0 .

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться известным свойством системы «однородное электростатическое поле + диполь»: при ориентации дипольного момента \mathbf{d} электрического диполя вдоль однородного электрического поля возникает сферическая эквипотенциальная поверхность, центр которой лежит посередине между зарядами диполя.

Для доказательства сформулированного утверждения значение потенциала в точке расположения центра предполагаемой эквипотенциальной сферы удобно принять равным нулю. При таком выборе полученное ранее выражение (1.16) для потенциала электрического диполя относительно бесконечно удаленной точки остается справедливым (подумайте, почему). Выражение для потенциала электростатической системы «однородное поле + диполь» имеет вид

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3} - (\mathbf{E}_0, \mathbf{R}) = \left| \frac{\mathbf{d}}{R^3} - \mathbf{E}_0 \right| |\mathbf{R}| \cos \alpha,$$

где α — угол между напряженностью суммарного электростатического поля системы и радиус-вектором \mathbf{R} , проведенным из центра эквипотенциальной сферы в ее текущую точку. Электрический потенциал рассматриваемой системы имеет постоянное значение $\varphi = 0$ на поверхности сферы радиусом

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{d}{E_0}}$$

при условии совпадения направлений векторов \mathbf{d} и \mathbf{E} . Поскольку поверхность любого проводника в произвольном внешнем электростатическом поле эквипотенциальна, рассмотренная электростатическая система вне сферы радиусом R_0 создает электростатическое поле, эквивалентное полю, возникающему при внесении во внешнее поле проводящей сферы того же радиуса (рис. 3.4, а). Как уже неоднократно отмечалось, построенное решение является единственным.

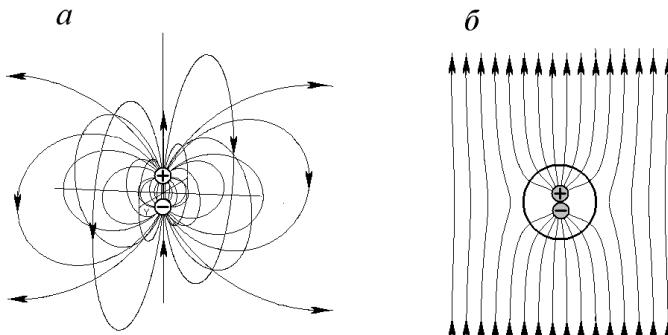


Рис. 3.4. Проводящая сфера в однородном электрическом поле (результаты компьютерного моделирования):

- а — поле электрического диполя;
- б — электрический диполь во внешнем однородном электрическом поле; окружность — эквипотенциальная поверхность, соответствующая поверхности проводящей сферы.

Из соображений симметрии следует, что величина поверхностной плотности индуцированного на сфере заряда может зависеть только от угла α между дипольным моментом системы зарядов-изображений

$$\mathbf{d} = R_0^3 \mathbf{E}_0 \quad (3.11)$$

и вектором \mathbf{R}_0 , проведенным из центра сферы в точку наблюдения. Подстановка найденной величины дипольного момента в выражение (1.17) для электрического поля диполя, величина дипольного момента которого задается соотношением (3.11), позволяет легко вычислить суммарное поле на поверхности проводящей сферы:

$$\mathbf{E}_{\Sigma}(\mathbf{R} = \mathbf{R}_0) = \frac{3(\mathbf{d}_0, \mathbf{R}_0)}{R_0^5} - \frac{\mathbf{d}_0}{R_0^3} + \mathbf{E}_0 = 3E_0 \cos \alpha \frac{\mathbf{R}_0}{R_0}.$$

Напряженность поля на поверхности проводящей сферы оказалась направленной по ее радиусу (рис. 3.4,*б*), что полностью соответствует граничным условиям на поверхности проводников. Распределение плотности заряда в соответствии с формулой (3.4) дается выражением

$$\sigma'(\alpha) = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \alpha.$$

3.5. Сила, действующая на поверхность заряженного проводника

Заряженная поверхность проводника испытывает действие электростатических сил. В качестве примера рассмотрим случай заряженного проводника, удаленного от других тел. Как отмечалось, его макроскопический заряд может располагаться только на поверхности. Сила, действующая на небольшую площадку поверхности δS , определяется электрическим полем \mathbf{E}_S , создаваемым в точке ее нахождения всеми зарядами кроме зарядов самой этой площадки:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{E}_S \delta q = \mathbf{E}_S \sigma \delta S.$$

Для нахождения поля \mathbf{E}_S в произвольной точке поверхности проводника достаточно сравнить легко вычисляемые поля в двух соседних точках: расположенной над поверхностью ($E_1 = 4\pi\sigma$) и в объеме проводника ($E_2 = 0$). Указанные поля могут рассматриваться как суммы искомого поля \mathbf{E}_S и поля $\delta \mathbf{E}$, создаваемого площадкой δS . Малые размеры площадки позволяют считать ее плоской (рис. 3.5,*а*), а поле $\delta \mathbf{E}$ по обе стороны от нее — одинаковым. В результате возникает система уравнений для искомого поля \mathbf{E}_S :

$$\begin{aligned} E_S + \delta E_S &= E_1 \\ E_S - \delta E_S &= E_2 \end{aligned} \Rightarrow E_S = \frac{E_S}{2} = 2\pi\sigma.$$

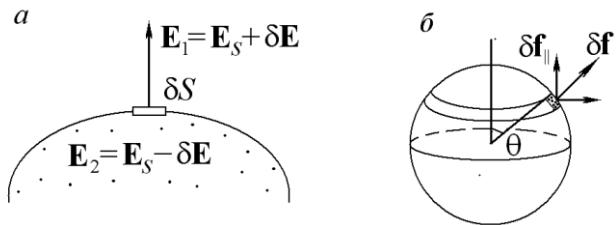


Рис. 3.5. Силы, действующие на поверхность заряженного проводника:

- a* — к расчету напряженности электрического поля в точке нахождения элемента заряженной поверхности δS ;
- б* — к расчету силы, разрывающей по экватору равномерно заряженный по поверхности шар.

Решение полученной системы показывает, что напряженность искомого поля составляет ровно половину от полной напряженности вблизи поверхности проводника. Из найденных соотношений следует окончательное выражение для электростатического давления на заряженную проводящую поверхность:

$$p = \frac{\delta F}{\delta S} = 2\pi\sigma^2.$$

Соотношения, которые полезно помнить

$E_n = 4\pi\sigma$, $E_\tau = 0$	Нормальная и тангенциальная составляющие электростатического поля вблизи поверхности проводника
$\exists! \varphi(\mathbf{R}): \begin{cases} \Delta\varphi(\mathbf{R}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \\ (\varphi(\mathbf{R} \in \Gamma_2) = \psi(\mathbf{R}) \end{cases}$	Теорема о единственности решения задач электростатики проводников

Задачи для самостоятельного решения

- 3.1. Рассчитать силу, действующую на электрический диполь, расположенный на высоте h над бесконечной заземленной проводящей плоскостью, дипольный момент которого \mathbf{d} ориентирован перпендикулярно этой плоскости.

Указание. Ответ задачи не должен содержать размеров диполя l , которые всегда считаются малыми по сравнению с характерными макроскопическими расстояниями, заданными в условии. Если решение задачи представить в виде ряда Тейлора по малому параметру l/h , то единственной характеристикой диполя, входящей в первое исчезающее слагаемое, окажется его дипольный момент.

- 3.2. Найти распределение индуцированного заряда на бесконечной заземленной плоскости, параллельно которой на расстоянии h расположена бесконечная нить, равномерно заряженная линейным зарядом λ .
- 3.3. Найти силу, действующую на единицу длины равномерно заряженной бесконечной нити (линейный заряд λ), расположенной параллельно заземленной проводящей плоскости.
- 3.4. Точечный заряд q_0 расположен на расстоянии $h_0 > R$ от заземленного металлического шара (R — радиус шара). Найти положение и величину точечного заряда-изображения, поле которого вне шара эквивалентно полю индуцированного на поверхности шара заряда.

Указание. Потенциал заземленного проводника равен нулю. Это условие должно выполняться в каждой точке поверхности шара.

- 3.5. Какой дополнительный заряд требуется сообщить изолированному металлическому шару радиусом R , для того чтобы на помещенный на расстоянии $r > R$ от его центра точечный заряд q не действовали никакие силы.

Указание. Воспользоваться решением задачи 3.3, принципом суперпозиции и требованием ортогональности силовых линий электрического поля поверхности проводника.

- 3.6. Бесконечная равномерно заряженная нить расположена параллельно оси бесконечного проводящего полого цилиндра радиусом R на расстоянии r от нее. Найти конфигурацию зарядов-изображений.

Указание. Несмотря на кажущееся сходство условия с задачей о точечном заряде вблизи металлического шара, решение и ответ этой задачи существенно отличается от ответа к задаче 3.3.

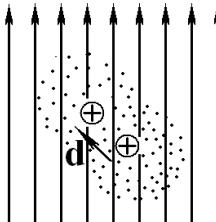
- 3.7. В однородное электрическое поле напряженностью \mathbf{E}_0 помещен бесконечный проводящий цилиндр радиусом R , ось которого перпендикулярна линиям поля. Найти распределение индуцированного на поверхности цилиндра заряда.

Указание. При попытке угадать решение, которое обязательно должно быть проверено расчетом, могут использоваться любые методы и идеи... Например, цилиндр можно представить как «шар, вытянутый вдоль одной из координатных осей».

- 3.8. Найти силу, действующую на точечный заряд q , расположенный на биссектрисе образованного двумя проводящими плоскостями двугранного угла $\pi/4$, в зависимости от расстояния до вершины.
- 3.9. Точечный заряд q_0 находится на расстоянии $h_0 > R$ точно над вершиной проводящей полусферы радиусом R , находящейся на бесконечной проводящей плоскости. Найти силу, действующую на заряд.
- 3.10. В толстой проводящей пластине с плоской поверхностью сделана выемка в виде полусфера радиусом R . На оси симметрии образовавшейся системы расположен точечный заряд q . Попытайтесь найти заряды-изображения.
- 3.11. Найти силу, разрывающую по экватору проводящий шар радиусом R , имеющий заряд Q .

Указание. Воспользоваться рис. 3.5,*б*.

- 3.K1. Попытайтесь освоить технику компьютерных расчетов пространственных распределений потенциалов и напряженностей электростатических полей в системах типа «заряды + проводники» на основе численного решения уравнения Пуассона, используя пакеты моделирующих программ (Ansys, Femlab или их аналоги). Начните с моделирования простейших систем (заряд вблизи проводящей плоскости, заряд и заземленная сфера и т. д.). Создайте модели электростатических систем с проводниками сложной конфигурации. Какие общие закономерности для распределений напряженности поля и потенциала наблюдаются в таких системах?
- 3.K2. Используя пакеты для компьютерного моделирования электростатических полей в системах с проводниками, сравните получаемые с их помощью результаты с данными расчетов методом изображений, которые также могут быть выполнены на компьютере. Обратите внимание на систематическое ухудшение соответствия результатов вблизи резких изломов проводящих поверхностей (например, у вершины двугранного угла, образованного проводящими плоскостями, на биссектрисе которого помещен электрический заряд). Чем можно объяснить ухудшение качества результатов? Как повысить точность моделирования в указанных «опасных» областях?



Лекция 4

Механизмы поляризации диэлектриков

При помещении молекул диэлектрика во внешнее электрическое поле в общем случае происходит деформация их электронных областей. В случае полярных и анизотропных молекул помимо деформации областей молекулы ориентируются электрическим полем, чему препятствует тепловое движение. В результате возникает поляризация диэлектрика: в веществе наводится отличный от нуля средний дипольный момент его молекул. В случае слабых электрических полей связь между средним дипольным моментом и создающим его внешним электрическим полем может считаться линейной.

4.1. Мультипольное разложение

С точки зрения теории электричества, молекула может рассматриваться как достаточно сложная компактная система электрических зарядов. Для нахождения макроскопических полей в веществе полезно уметь рассчитывать создаваемые молекулами поля и потенциалы на расстояниях, существенно превосходящих их размеры.

При решении большинства задач классической физики молекула (или атом) может рассматриваться как система точечных зарядов q_i , находящихся на большом (по сравнению с ее характерными размерами) расстоянии от точки наблюдения. В связи с этим возникает необходимость развития методов расчета потенциалов и напряженностей электрических полей, создаваемых компактным распределением зарядов.

Выражение для потенциала системы компактно расположенных элементарных зарядов

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}$$

удобно разложить в ряд Тейлора по малому параметру r_i/R (рис. 4.1,*a*). Получаемый при этом результат носит название *разложения по мультипольям*:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{R} \sum_i q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i (q_i \mathbf{r}_i, \mathbf{R}) + \dots \equiv \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{R})}{R^3} + \dots \quad (4.1)$$

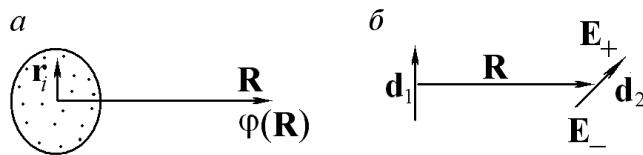


Рис. 4.1. Мультипольное разложение для потенциала электростатического поля молекулы или атома:

- a* — к расчету потенциала компактного распределения зарядов;
- б* — к вычислению силы электростатического взаимодействия двух полярных молекул.

Первое слагаемое мультипольного разложения (4.1) по форме зависимости от R аналогично потенциальному, создаваемому одним точечным зарядом, величина которого равна сумме элементарных зарядов частиц, составляющих молекулу. Молекулы, для которых разложение начинается с такого слагаемого, принято называть *ионами*. Электрическое поле иона на большом расстоянии от него в первом приближении совпадает с полем точечного заряда, величина которого равна заряду иона. В случае если суммарный заряд системы равен нулю, разложение может начинаться со слагаемого, аналогичного потенциальному диполя. Сумму произведений зарядов на их радиус-векторы называют *электрическим дипольным моментом* молекулы. Молекулы, обладающие при отсутствии внешнего поля ненулевым дипольным моментом, называют *полярными* в отличие от *неполярных молекул*, для которых мультипольное разложение начинается с последующих слагаемых (квадрупольного и т. д.). Выражение для потенциала таких молекул начинается со слагаемого, по форме совпадающего с выражением (1.17) для потенциала электрического диполя. Электрическое поле, создаваемое полярными молекулами, на большом расстоянии от них практически эквивалентно полю диполя (1.18).

Пример. Взаимодействие двух полярных молекул

Рассчитать силу, действующую между двумя молекулами, расположеными на расстоянии \mathbf{R} друг от друга и имеющими дипольные моменты \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 соответственно (рис. 4.1,б).

Решение. Сила, действующая на диполь с моментом \mathbf{d}_2 , определяется суммой сил, действующих на каждый из его зарядов:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q_2 \mathbf{E}_+ - q_2 \mathbf{E}_- = q_2 \mathbf{E}\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{l}_2}{2}\right) - q_2 \mathbf{E}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{l}_2}{2}\right). \quad (4.2)$$

Для вычисления последних необходимы значения напряженностей создаваемого молекулой с моментом \mathbf{d}_1 электрического поля в соответствующих точках. В силу малости размеров молекулярного диполя \mathbf{l}_2 по сравнению с расстоянием между молекулами искомые выражения для векторов \mathbf{E}_{\pm} легко найти, используя разложение в ряд Тейлора каждой из трех компонент:

$$E_{\xi}\left(\mathbf{R} \pm \frac{\mathbf{l}_2}{2}\right) = E_{\xi}(\mathbf{R}) \pm \frac{1}{2}(\mathbf{l}_2, \nabla E_{\xi}). \quad (4.3)$$

Подстановка компонент векторов (4.3) в выражение для силы (4.2) приводит к весьма полезной для приложений общей формуле для силы, действующей на диполь в неоднородном электростатическом поле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}_2, \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}). \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) дифференциальный оператор, получающийся в результате скалярного умножения дипольного момента на оператор пространственного дифференцирования, действует на каждую компоненту векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{R})$.

Для получения окончательного выражения для силы взаимодействия двух полярных молекул остается подставить в формулу (4.4) явное выражение для напряженности поля электрического диполя (1.18) и выполнить соответствующие математические операции.

4.2. Электронная поляризация молекул

Механизм электронной поляризации характерен для неполярных изотропных молекул. Наиболее характерными представителями этого класса являются атомы инертных газов: их электронные облака облашают сферической симметрией, а ядра можно считать точечными зарядами, расположеннымими в центре. Очевидно, что описанная электростатическая система находится в состоянии устойчивого равновесия (вопрос о том, почему электроны не падают на ядро и почему их следует считать неподвижными облаками, а не летающими по орбитам наподобие планет частицами, будет обсуждаться значительно позже).

При попадании молекулы во внешнее электрическое поле ее электронное облако деформируется и смещается относительно ядра до тех пор, пока возникшие внутренние электростатические силы не скомпенсируют внешнего воздействия. **Перераспределение зарядов в неполярной молекуле в результате воздействия на нее внешнего электрического поля приводит к возникновению дипольного момента.** Поскольку вблизи точки устойчивого равновесия возвращающая сила может приближенно считаться линейной функцией от смещения, наведенный дипольный момент оказывается пропорциональным внешнему полю \mathbf{E}_m в точке нахождения молекулы:

$$\mathbf{d} \equiv \alpha \mathbf{E}_m . \quad (4.5)$$

Введенный в соотношении (4.5) коэффициент пропорциональности α носит название *поляризуемости молекулы*. В случае больших внешних полей отступления от линейной зависимости между дипольным моментом и электрическим полем обычно учитывают, используя запись в виде разложения в ряд Тейлора по степеням напряженности внешнего поля:

$$\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{E}_m + \alpha_2 E_m^1 \mathbf{E} + \alpha_3 E_m^2 \mathbf{E} + \dots \quad (4.6)$$

Коэффициенты такого разложения называют соответственно линейной, квадратичной, кубичной и т. д. поляризуемостью молекулы.

Соотношения (4.5) и (4.6) выражают связь между электрическим полем и наведенным дипольным моментом в простейшем случае изотропных молекул, электрические свойства которых одинаковы во всех направлениях. В случае анизотропных молекул наведенный диполь-

ный момент может оказаться направленным под углом к обусловливающему его внешнему полю, связь между векторами \mathbf{d} и \mathbf{E} приобретает тензорный характер.

Рассмотренный механизм реализуется для любых молекулярных систем, обладающих устойчивой равновесной конфигурацией, т. е. реально встречающихся в природе. При существовании у молекул исходного дипольного момента появляются новые механизмы, действие которых может маскировать эффекты электронной поляризации.

Атомно-молекулярные системы с электронной поляризуемостью часто описывают с помощью удобной модели, предложенной Дж. Томсоном (*атом Томсона*). В ее рамках предполагается, что входящие в состав атома электроны удерживаются силами \mathbf{f}_i , величины которых пропорциональны смещениям \mathbf{l}_i относительно положений равновесия:

$$\mathbf{f}_i = -k_i \mathbf{l}_i \equiv -m\omega_{0i}^2 \mathbf{l}_i, \quad (4.7)$$

где ω_{0i} — собственная частота колебаний электрона. Во внешнем электрическом поле электроны такого модельного атома смещаются на расстояния, пропорциональные напряженности поля. В результате в атоме Томсона наводится линейный по полю дипольный момент, и соотношение (4.5) выполняется точно.

В первоначальном варианте модели Томсона считалось, что атом представляет собой непрерывную упругую субстанцию («пудинг»), имеющую положительный заряд, в которой подобно изюминкам вкраплены электроны. Несмотря на то, что предложенная качественная картина сильно расходится с современными представлениями о строении атома, заключению о линейности связи (4.6) между силой и смещением электрона может быть дано естественное обоснование.

Как известно, удерживаемые электрическими силами вблизи атомного ядра электроны не могут рассматриваться как локализованные в пространстве классические частицы. Это означает, что для пространственного расположения электронов, находящихся в связанных состояниях в атомах или молекулах, возможно только вероятностное описание. Во многих случаях эти (рассчитываемые методами квантовой механики) распределения вероятностей допустимо представлять в виде окружающих ядро электронных облаков с непрерывно распределенной в пространстве объемной плотностью отрицательного заряда $\rho(\mathbf{r})$, которая пропорциональна плотности вероятности обнаружения электрона. Например, для атома гелия в невозбужденном состоянии

электронное облако (рис. 4.2,*a*) оказывается сферически симметричным и убывает по экспоненциальному закону при удалении от ядра:

$$\rho(r) = C \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \quad (4.8)$$

где a_0 — *первый боровский радиус* (часто встречающаяся в задачах атомно-молекулярной физики константа, задающая характерный размер невозбужденного атома водорода); C — нормировочная константа. Величина этой константы определяется из условия равенства полного электрического заряда электронных облаков и суммарного заряда электронов в атоме:

$$\int_{\infty} dV \rho(\mathbf{r}) = Nq_e.$$

Распределение плотности заряда (4.8) в электронном облаке можно аппроксимировать равномерно заряженным по объему шаром радиусом a_0 (рис. 4.2,*b*).

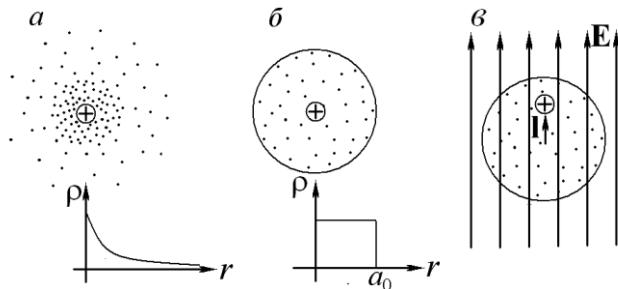


Рис. 4.2. Механизм электронной поляризации атомов:
а — распределение объемной плотности заряда в электронном *s*-облаке «реального» атома;
б — модель атома Томсона, обеспечивающая линейный отклик во внешнем поле;
в — атом Томсона во внешнем электрическом поле.

Допущение о том, что во внешнем электрическом поле такое «электронное облако» смещается относительно ядра, не изменяя формы (рис. 4.2,*c*), приводит к соотношению (4.7), определяющему модель Томсона.

Пример. Поляризуемость атома Томсона

Рассчитать поляризуемость атома Томсона, воспользовавшись моделью, в рамках которой предполагается, что электронное облако представляет собой равномерно заряженный по объему шар радиусом a_0 .

Решение. При попадании атома во внешнее электрическое поле его электронное облако смещается относительно ядра до тех пор, пока обусловленная этим полем сила не будет скомпенсирована силой электростатического взаимодействия между облаком и ядром. При вычислении последней удобно воспользоваться теоремой Гаусса. В результате возникает линейная связь между напряженностью внешнего (микроскопического) поля \mathbf{E} и вектором \mathbf{l} , описывающим смещение центра электронного облака относительно положения ядра:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{E}_e = Q \frac{\mathbf{l}}{a_0^3}.$$

Для расположенного на большом расстоянии от молекулы наблюдателя и ядро, и электронное облако могут рассматриваться как точечные заряды. В результате деформированная молекула оказывается эквивалентной диполю, момента которого является линейной функцией внешнего поля:

$$\mathbf{d} = Q\mathbf{l} = a_0^3 \mathbf{E}.$$

В соответствии с определением (4.5) поляризуемость атома Томсона оказывается равной $\alpha = a_0^3$ и по порядку величины совпадает с объемом его электронного облака. Эта классическая оценка удовлетворительно согласуется с результатами существенно более точных, но весьма трудоемких квантовомеханических расчетов.

4.3. Ориентационная поляризация

Для молекул, изначально обладающих дипольным моментом, характерен механизм *ориентационной поляризации*.

Находящийся во внешнем электрическом поле диполь испытывает действие момента сил, стремящегося ориентировать его вдоль поля (рис. 4.3,*a*):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{d}, \mathbf{E}_m].$$

Существенную роль в механизме ориентационной поляризации играют столкновения с другими молекулами. С одной стороны, они стремятся разориентировать диполи, с другой — в результате столкновений происходит постепенная релаксация вызванных полем крутых колебаний полярных молекул, сопровождающаяся переходом кинетической энергии в тепловую, и, как следствие, частичное выстраивание электрических диполей вдоль линий поля.

В случаях, когда анализ поведения каждого элемента системы излишне трудоемок, удобным способом описания является статистический подход, основанный на вычислении функции распределения, позволяющей вычислять средние по ансамблю значения параметров его элементов. В данном случае интерес представляет функция распределения молекул по углам θ , составляемым их дипольными моментами с напряженностью электрического поля, задающей единственное выделенное направление в пространстве (рис. 4.3,*б*).

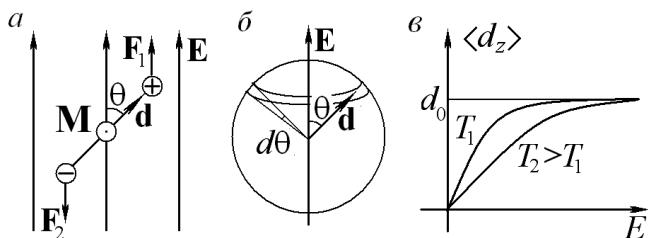


Рис. 4.3. Ориентационный механизм поляризации диэлектриков:
а — момент сил, действующий на электрический диполь во внешнем электрическом поле;
б — к выводу функции распределения молекул по углу между дипольным моментом и направлением поля;
в — результат расчета зависимости среднего дипольного момента газа полярных молекул от напряженности электростатического поля.

В случае изотропного распределения в отсутствие поля все ориентации диполей равновероятны. Это означает, что вероятность обнаружить молекулу, ориентация дипольного момента которой определяется малым телесным углом $d\Omega$, оказывается пропорциональной величине этого угла:

$$dP = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где θ и φ — задающие направление в пространстве углы в полярной системе координат.

В рассматриваемом случае *функция распределения* молекул по углу θ между направлением дипольного момента и выделенным направлением в пространстве определяется площадью соответствующего этому углу кольца на поверхности сферы с единичным радиусом и имеет вид

$$f(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta.$$

При наличии поля согласно законам классической статистики в функции распределения появляется характерный больцмановский множитель, показатель экспоненты которого содержит отношение потенциальной к средней кинетической энергии теплового движения:

$$f(\theta) d\theta = C \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) \sin \theta d\theta,$$

где $U(\theta)$ — потенциальная энергия молекулы, дипольный момент которой составляет угол θ с направлением электрического поля; T — температура газа полярных молекул; C — нормировочная константа.

Легко показать, что потенциальная энергия электрического диполя с моментом \mathbf{d}_0 во внешнем поле имеет вид

$$U = -(\mathbf{d}_0, \mathbf{E}). \quad (4.9)$$

В результате функция распределения полярных молекул по углам дается выражением

$$f(\theta) d\theta = C \exp\left(\frac{(\mathbf{d}_0, \mathbf{E}_m)}{kT}\right) \sin \theta d\theta, \quad (4.10)$$

в котором нормировочная константа определяется стандартным образом из условия нормировки:

$$\int_0^\pi f(\theta) d\theta = 1 \Rightarrow C = 2 \sinh^{-1} \beta, \quad \beta = \frac{d_0 E_m}{kT}.$$

0

Средний дипольный момент газа из молекулярных диполей d_0 очевидно направлен вдоль электрического поля (единственное выделенное направление в пространстве) и легко вычисляется с помощью найденной функции распределения (4.10):

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{\mathbf{E}}{E} \int_0^{\pi} d_0 \cos \theta \cdot f(\theta) d\theta = d_0 \frac{\mathbf{E}}{E} \left(\operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta} \right), \quad \beta \equiv \frac{d_0 E_m}{kT}. \quad (4.11)$$

Зависимость среднего дипольного момента от величины внешнего поля (рис. 4.3,в) в области малых значений безразмерного параметра β (отношение характерных значений электростатической и тепловой энергии в системе) является приближенно линейной. Коэффициент пропорциональности (*ориентационная поляризуемость молекул*) определяется исходным дипольным моментом и температурой. В случае **ориентационной поляризации возникающий средний дипольный момент зависит не только от величины поля и свойств молекул, но и от температуры диэлектрика.** При больших полях зависимость (4.11) асимптотически стремится к постоянной величине d_0 , что соответствует случаю полной ориентации всех молекулярных диполей по полю.

В отличие от рассмотренной ситуации в случае электронного механизма поляризации отклик вещества на действие электрического поля не зависит от температуры.

4.4. Поляризация анизотропных молекул

Практически все многоатомные молекулы (в том числе и неполярные) не обладают сферической симметрией. В этом случае простейшая теория электронной поляризации требует уточнения, поскольку реакция молекулы на внешнее поле зависит не только от его величины, но и от ориентации молекулы. В результате наведенный дипольный момент оказывается ориентированным в направлении, отличном от задаваемого вектором \mathbf{E} . В описанной ситуации связь наведенного момента с полем задается соотношением, являющимся естественным обобщением формулы (4.6):

$$d_\xi = \sum_{\eta} \alpha_{\xi\eta}^{(1)} E_\eta + \sum_{\eta, \zeta} \alpha_{\xi\eta\zeta}^{(2)} E_\eta E_\zeta + \dots, \quad \xi, \eta, \zeta, \dots = x, y, z.$$

В пределе слабых полей, как и в изотропном случае, можно ограничиться линейной связью дипольного момента и поля. Отличие от ранее рассмотренного случая изотропных молекул состоит в том, что каждая декартова компонента вектора \mathbf{d} оказывается линейной комбинацией всех трех составляющих вектора \mathbf{E} , а не линейной функцией от его одноименной компоненты:

$$d_\xi = \sum_i \alpha_{\xi\eta} E_\eta, \quad \xi, \eta = x, y, z. \quad (4.12)$$

В компактном виде связь (4.12) удобно записывать, пользуясь правилом перемножения матрицы на вектор:

$$\mathbf{d} = \hat{\alpha} \mathbf{E}_m. \quad (4.13)$$

О подобной связи между двумя векторами говорят как о *тензорной*. Таким образом, **в общем случае линейная поляризуемость молекулы является тензором**.

Пример. Тензор поляризуемости линейной молекулы

Записать матрицу тензора поляризуемости линейной молекулы, электронное облако которой имеет заряд q , массу m и может смещаться только вдоль одной прямой (молекулярной оси), составляющей с осями координат заданные углы θ и φ (рис. 4.4). Собственная частота колебаний электронного облака вдоль молекулярной оси равна ω_0 .

Решение. При помещении линейной молекулы в электростатическое поле величина смещения от положения равновесия ее электронного облака определяется проекцией электрического поля на направление его возможного перемещения:

$$E_l = E_x \cos \varphi \sin \theta + E_y \sin \varphi \sin \theta + E_z \cos \theta.$$

Величина смещения электронного облака l определяется равенством между силой, обусловленной внешним полем, и внутренней квазиупругой силой, удерживающей это облако вблизи центра молекулы:

$$qE_l = m\omega_0^2 l.$$

В результате смещения облака возникает дипольный момент, направленный вдоль указанного направления, величина которого задается выражением

$$d_l = ql = \frac{q^2 E_l}{m\omega_0^2}.$$

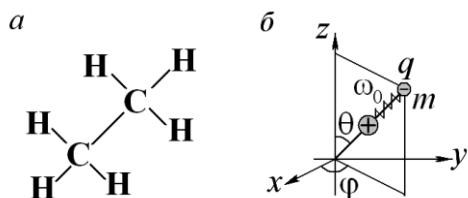


Рис. 4.4. Поляризация анизотропных молекул:
 а — пример анизотропной молекулы;
 б — линейная молекула — простейшая модель анизотропной молекулы.

Для записи наведенного дипольного момента анизотропной молекулы в стандартной для векторной алгебры форме (в виде столбца из декартовых координат вектора) необходимо найти его проекции на оси выбранной системы координат (см. рис. 4.4, б):

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = d_l \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В результате каждая компонента вектора дипольного момента оказывается линейной комбинацией всех трех компонент вектора напряженности электрического поля, например:

$$d_x = (\cos \alpha \sin \theta)^2 E_x + \sin \alpha \cos \alpha (\sin \theta)^2 E_y + \cos \alpha \sin \theta \cos \theta E_z.$$

Аналогичные соотношения легко получить и для двух остальных компонент вектора \mathbf{d} . Сделайте это самостоятельно!

Использование стандартного правила действия матрицы и вектора (перемножение «строка на столбец») позволяют записать связывающее векторы \mathbf{d} и \mathbf{E} соотношение в компактной форме (4.13). При этом естественным образом возникающая матрица

$$\hat{\alpha} = \frac{q^2}{m\omega_0^2} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \sin^2 \theta & \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta & \cos \alpha \sin \theta \cos \theta \\ \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \theta & \sin^2 \alpha \sin^2 \theta & \sin \alpha \sin \theta \cos \theta \\ \cos \alpha \sin \theta \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

представляет собой *тензор поляризуемости* простейшей анизотропной молекулы в выбранной системе координат.

Рассмотренная в примере «линейная молекула» очевидно является весьма грубой моделью. В зависимости от конкретной структуры молекулы могут использоваться и другие, более сложные классические приближения. Например, иногда удобной оказывается «анизотропная» модель Томсона, предусматривающая возможность колебаний электронов с разными частотами вдоль трех взаимно перпендикулярных осей.

4.5. Особенности поляризация молекул в газообразных и конденсированных диэлектриках

Во всех приведенных в данной лекции соотношениях под внешним полем, вызывающим поляризацию молекулы, подразумевается электростатическое поле в области ее нахождения. Поскольку размеры молекул, как правило, оказываются малыми по сравнению с характерными размерами физически бесконечно малых объемов, по которым осуществляется усреднение при вычислениях макроскопических полей, в качестве воздействующего на молекулы поля выступает не усредненное макроскопическое, а микроскопическое поле. Это поле создается не только внешними источниками и возникающими в диэлектрике при поляризации макроскопическими зарядами, но и ми-

роскопическими распределениями зарядов в молекулах, находящихся близи рассматриваемой.

В случае малых концентраций молекул (газообразные диэлектрики) вклад полей соседних молекул в суммарное поле, вызывающее поляризацию частицы, обычно оказывается малым. В результате приближенная замена микроскопического поля средним макроскопическим оказывается оправданной.

В случае же конденсированных диэлектриков (жидкости и кристаллы) микроскопическое поле может существенно отличаться от макроскопического, что требует более аккуратного учета влияния на молекулу ее соседей.

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathbf{d} \approx \hat{\alpha} \mathbf{E}_m$	Связь между средним дипольным моментом молекулы и наводящим его электростатическим полем
$\mathbf{F} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E}$	Сила, действующая на электрический диполь во внешнем неоднородном электрическом поле
$U = -(\mathbf{d}, \mathbf{E})$	Потенциальная энергия электрического диполя во внешнем электростатическом поле

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Определить зависимость от расстояния силы электростатического взаимодействия между:

- а) ионом и полярной молекулой;
- б) ионом и неполярной молекулой;
- в) диполем и неполярной молекулой.

Суммарный заряд иона, дипольный момент полярной молекулы и поляризуемость неполярной молекулы считать известными.

Указание. Во всех случаях принять, что расстояние между взаимодействующими объектами существенно превышает их собственные размеры.

4.2. Рассчитать энергию ионизации атома Томсона. Заряд ядра и радиус электронного облака известны.

Указание. Использовать модель атома, соответствующую рассмотренной в примере и на рис. 4.2,б.

- 4.3. Рассчитать энергию ионизации атома водорода, используя планетарную модель атома Резерфорда. Считать, что электрон движется по круговой орбите радиусом R .
- 4.4. Рассчитать линейную поляризумость атома гелия, распределение электронной плотности в котором описывается формулой (4.8).

Указание. Представить зависимость величины наведенного дипольного момента от напряженности электрического поля в виде ряда по степеням E и ограничиться в нем линейным слагаемым.

- 4.5. Используя выражение для среднего дипольного момента полярных молекул газа в электрическом поле (4.11), рассчитать величину константы линейной ориентационной поляризумости.

Указание. Разложить в ряд Тейлора вблизи точки $E = 0$ выражение для среднего дипольного момента.

- 4.6. Найти все элементы матрицы поляризумости анизотропной молекулы, электронное облако которой может совершать свободные колебания вдоль координатных осей с частотами ω_{0x} , ω_{0y} и ω_{0z} соответственно.
- 4.7. Рассчитать средний дипольный момент для газа из «полностью анизотропных» линейных молекул, способных поляризоваться лишь в одном направлении (см. пример в разделе 4.4), если температура газа равна T . Частота свободных колебаний электронного облака вдоль молекулярной оси равна ω_0 .

Указание. При записи функции распределения учесть, что помещенная в электрическое поле молекула помимо электростатической энергии взаимодействия ее дипольного момента с полем в результате поляризации приобретает дополнительную потенциальную энергию деформации. При вычислении интегралов, содержащих функции распределения молекул по углам с направлением поля, безразмерный параметр β удобно считать малым. Это позволяет разложить входящую в функцию распределения экспоненту в ряд.

- 4.8. Рассчитать средний дипольный момент для случая помещенного в заданное внешнее электрическое поле газа из полярных молекул с линейной поляризумостью, определяемой тензором вида

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

- 4.9. Найти следующий за дипольным (квадрупольным) член разложения потенциала (4.1).
- 4.K1. Используя имеющиеся в Вашем распоряжении программные средства, смоделируйте на компьютере электростатические поля, соответствующие некоторым первым слагаемым мультипольного разложения (4.1). Попытайтесь подобрать простые распределения точечных зарядов, электрические поля которых на достаточноном удалении совпадают с полями, возникающими при разложении по мультиполюм. В качестве примера на рис. 4.5 изображены простая система зарядов и силовые линии ее электрического поля. На расстояниях, превышающих характерные размеры системы, это поле совпадает с электрическим полем, описываемым третьим (квадрупольным) слагаемым суммы (4.1).

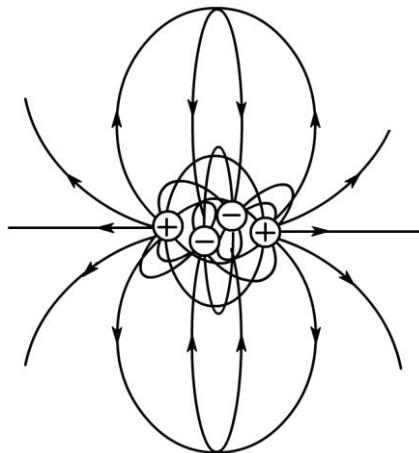
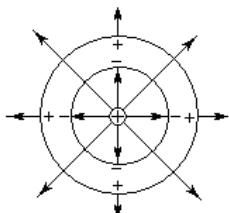


Рис. 4.5. Силовые линии электростатического поля, созданного электрическим квадруполем (результат компьютерного моделирования).

- 4.K2. Пользуясь компьютерным моделированием и сведениями из элементарного курса химии, покажите, что напряженность электрического поля, создаваемого молекулой воды на достаточно больших расстояниях от нее, практически совпадает с напряженностью поля электрического диполя.
- 4.K3. Попытайтесь разработать компьютерные модели, иллюстрирующие поведение электрического диполя во внешнем электростатическом поле различной конфигурации: пространственно однородном и обладающем отличным от нуля градиентом. Создайте аналогичные компьютерные демонстрации для электрического квадруполя.

Лекция 5



Электростатическое поле при наличии диэлектриков

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле в результате поляризации его молекул возникают макроскопические связанные заряды. Их поле частично компенсирует исходное поле внутри диэлектрика. Введение нового вектора \mathbf{D} (электрическая индукция) позволяет записать уравнения электростатики для диэлектриков в виде, сходном с видом аналогичных уравнений для вакуума.

5.1. Вектор поляризации

Наряду с микроскопической характеристикой поляризации вещества — дипольным моментом молекул вводится макроскопическая величина — вектор \mathbf{P} (поляризация), определяемый как дипольный момент единицы объема:

$$\mathbf{P} \equiv n\langle \mathbf{d} \rangle. \quad (5.1)$$

В случае линейных диэлектриков (дипольный момент молекулы пропорционален микроскопическому электрическому полю в точке ее нахождения) вектор поляризации является линейной функцией макроскопического электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \hat{\chi} \mathbf{E}. \quad (5.2)$$

Коэффициент пропорциональности между \mathbf{P} и \mathbf{E} (в общем случае являющийся тензором) называют *поляризуемостью вещества*, или *диэлектрической восприимчивостью*. В простейшем случае равенства макроскопического и микроскопического полей поляризуемость вещества связана с поляризуемостью молекул простым соотношением

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_m \Rightarrow \hat{\chi} = n\langle \hat{\alpha} \rangle. \quad (5.3)$$

В случае сильных полей линейная связь (5.2) перестает выполняться. Каждая из декартовых компонент вектора \mathbf{P} может быть представлена в виде ряда по степеням компонент напряженности электрического поля:

$$P_\xi = \sum_{\eta} \chi_{\xi\eta}^{(1)} E_\eta + \sum_{\eta, \zeta} \chi_{\xi\eta\zeta}^{(2)} E_\eta E_\zeta + \dots, \quad \xi, \eta, \zeta, \dots = x, y, z.$$

Соответственно вводятся тензоры линейной, квадратичной, кубичной и т. д. поляризуемости среды.

Вектор поляризации тесно связан с макроскопической плотностью поляризационных зарядов, возникающих в диэлектрике при его внесении во внешнее электрическое поле:

$$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho'. \quad (5.4)$$

Соотношение (5.4) является следствием закона сохранения заряда и выполняется точно даже в случае электрических полей, изменяющихся во времени. Действительно, связанный макроскопический заряд выделенного объема незаряженного и неполяризованного вещества отсутствует. В процессе поляризации происходит деформация молекул, сопровождающаяся перемещением зарядов на сравнимое с размерами молекул расстояние \mathbf{l} . В результате через элемент поверхности $d\mathbf{S}$ проходит некоторый заряд δQ , содержащийся в объеме $\delta V = (\mathbf{l}, d\mathbf{S})$. При этом внутри объема остается точно такой же заряд противоположного знака (рис. 5.1,*a*):

$$\delta Q' = -q n(\mathbf{l}, d\mathbf{S}) = -n(\mathbf{d}, d\mathbf{S}) = -(\mathbf{P}, d\mathbf{S}).$$

Полный заряд, возникший при поляризации во всем объеме, определяется потоком векторного поля \mathbf{P} через всю ограничивающую его поверхность

$$Q' = - \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{P}, d\mathbf{S}). \quad (5.5)$$

Очевидно, что этот заряд может оказаться отличным от нуля лишь в том случае, если поляризация меняется от точки к точке (например, в случае неоднородного диэлектрика).

Подобно тому как осуществлялся переход от интегрального соотношения для потока вектора \mathbf{E} к его дифференциальному аналогу, из формулы (5.5) может быть получено соотношение для дивергенции векторного поля \mathbf{P} (5.4).

Возникающие при поляризации вещества связанные заряды создают собственное электрическое поле, искажающее исходное.

Пример. Электрическое поле однородно поляризованного шара

Рассчитать электрическое поле, создаваемое однородно поляризованным шаром внутри и вне его объема.

Решение. Однородно поляризованный шар можно рассматривать как совокупность двух шаров из положительных и отрицательных зарядов, расстояние между центрами которых равно относительному смещению зарядов молекулы при ее поляризации (рис. 5.1, δ).

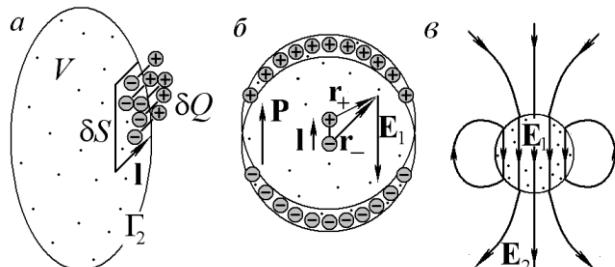


Рис. 5.1. Вектор поляризации:

- a — пример анизотропной молекулы;
- δ — к расчету электрического поля однородно поляризованного шара;
- ϵ — электрическое поле однородно поляризованного шара.

Электрические поля внутри каждого шара, как известно, пропорциональны радиус-векторам, проведенным из их центров в точку наблюдения:

$$\mathbf{E}_\pm = \pm \frac{4}{3} \pi n q \mathbf{r}_\pm. \quad (5.6)$$

Поле \mathbf{E}_1 внутри однородно поляризованного шара вычисляется как сумма полей (5.6), создаваемых двумя однородно заряженными противоположными зарядами шарами внутри их объемов, и оказывается однородным:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = -\frac{4}{3} \pi n q \mathbf{l} = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{P}. \quad (5.7)$$

Вне объема шара электрическое поле \mathbf{E}_2 эквивалентно полю диполя с моментом

$$\mathbf{d}_\Sigma = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{d}.$$

5.2. Электрическая индукция

При наличии вещества уравнения электростатики принимают вид

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{E}) &= 4\pi(\rho_0 + \rho'), \\ [\nabla, \mathbf{E}] &= 0 \end{aligned}$$

и становятся неудобными для практического применения, поскольку содержат в правой части обычно неизвестные связанные заряды или их плотности ρ' . Введенный вектор поляризации \mathbf{P} позволяет формальным путем исключить эти неизвестные, оставив в правой части уравнения только задаваемые в условии задачи распределения свободных зарядов

$$(\nabla, \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_0. \quad (5.8)$$

Введение вспомогательного векторного поля \mathbf{D} (*электрическая индукция*) позволяет формально придать уравнению (5.8) вид, сходный с видом аналогичного уравнения (2.7) для поля в вакууме:

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \Rightarrow (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0. \quad (5.9)$$

Несмотря на то, что правая часть уравнения (5.9) уже не содержит трудно учитываемой при решении задач плотности наведенных зарядов, на данном этапе не возникает никакого реального упрощения: неизвестное распределение связанных зарядов просто «спрятано» во введенном новом векторном поле \mathbf{D} .

Существенное упрощение возникает в случае линейных диэлектриков, для которых электрическая индукция оказывается связанный с искомой напряженностью макроскопического электрического поля линейным соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\hat{\chi}\mathbf{E} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}. \quad (5.10)$$

Вводимый соотношением (5.10) коэффициент пропорциональности между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E}

$$\hat{\epsilon} = 1 + 4\pi\hat{\chi} \quad (5.11)$$

носит название *диэлектрической проницаемости вещества* и, в принципе, может быть вычислен, если известны геометрическая форма и внутреннее строение диэлектрика. Интегральный аналог уравнения (5.9), разумеется, весьма схож с теоремой Гаусса для пространства, свободного от вещества:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_0. \quad (5.12)$$

Отдельного обсуждения требует вопрос о смысле вектора \mathbf{D} , который иногда ошибочно отождествляется с напряженностью электрического поля \mathbf{E}_0 , создаваемого свободными зарядами. Основанием для подобных утверждений служит, по-видимому, сходство выражения (5.12) для потока вектора \mathbf{D} с интегральной формулировкой теоремы Гаусса для свободных зарядов в вакууме (2.2). Однако равенство интегралов от векторных полей вовсе не гарантирует тождественности этих полей друг другу. В общем случае векторное поле \mathbf{D} вообще не является каким-либо электростатическим полем, поскольку его ротор отличен от нуля:

$$[\nabla, \mathbf{D}] = [\nabla, \epsilon\mathbf{E}] = \epsilon(\mathbf{r})[\nabla, \mathbf{E}] + [\nabla\epsilon(\mathbf{r}), \mathbf{E}] = [\nabla\epsilon(\mathbf{r}), \mathbf{E}] \neq 0.$$

В некоторых частных случаях между вектором \mathbf{D} и напряженностью электрического поля в свободном от вещества пространстве \mathbf{E}_0 существует простая связь, которая может оказаться удобной при решении ряда задач. Простейшая ситуация реализуется для полей в вакууме, где в соответствии с формулами (5.3) и (5.11) диэлектрическая

проницаемость оказывается равной единице и векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} совпадают друг с другом (только в используемой системе единиц Гаусса!).

Другим важнейшим частным случаем являются электростатические системы, симметрия распределения зарядов и вещества в которых достаточна для нахождения электрической индукции с помощью теоремы о потоке, записанной в интегральной форме (5.12). В этом (и только этом!) частном случае векторное поле \mathbf{D} в веществе совпадает с электростатическим полем, создаваемым тем же распределением свободных зарядов в вакууме, а поле в веществе оказывается уменьшенным в ϵ раз по сравнению с полем в вакууме (см. раздел 5.3). Далее будут приведены примеры, в которых утверждение о совпадении векторных полей \mathbf{D} и \mathbf{E}_0 оказывается заведомо неверным.

Электрическая индукция \mathbf{D} носит вспомогательный, формальный характер и в общем случае не может совпадать с напряженностью какого-либо из электростатических полей.

Существует весьма тесная связь задач электростатики диэлектриков с задачами электростатики проводников. Поскольку электрические заряды в объеме проводника могут перемещаться практически свободно, этому типу веществ логично приписывать бесконечно большую поляризаемость. Таким образом, решение задач на расчет электрического поля при наличии диэлектрика переходит в решение аналогичной задачи электростатики при наличии проводников в результате стремления к бесконечности диэлектрической проницаемости.

Пример. Распределение поляризационных зарядов в диэлектрике

Показать, что при внесении во внешнее электростатическое поле однородного диэлектрика, не содержащего в объеме свободных зарядов, макроскопический поляризационный заряд может появиться только на его поверхности.

Решение. Для нахождения объемной плотности возникающего вследствие поляризации диэлектрика заряда достаточно вычислить дивергенцию вектора поляризации, который, в свою очередь, может быть легко найден по векторам \mathbf{E} и \mathbf{D} :

$$\rho' = -(\nabla, \mathbf{P}) = -\left(\nabla, \frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi}\right) = \left(\nabla, \frac{1-\epsilon}{4\pi\epsilon} \mathbf{D}\right).$$

При вычислении дивергенции от произведения вектора на скаляр необходимо учесть, что оба сомножителя в общем случае могут зависеть от координат:

$$\rho' = \frac{\epsilon^{-1} - 1}{4\pi} (\nabla, \mathbf{D}) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D}, \nabla \epsilon^{-1}).$$

В случае отсутствия в диэлектрике свободных зарядов первое слагаемое в полученном выражении оказывается тождественно равным нулю. Второе слагаемое отлично от нуля лишь в точках, где диэлектрическая проницаемость изменяется в пространстве, т. е. на границе однородного диэлектрика.

5.3. Расчет полей в диэлектрике с помощью теоремы о потоке

Практическая польза от введения вспомогательного векторного поля \mathbf{D} (электрической индукции) состоит, например, в том, что при достаточно симметричных пространственных распределениях зарядов и диэлектриков теорема о потоке позволяет найти величину электрической индукции в произвольной точке пространства. Дальнейшее вычисление поля не представляет труда: по найденному значению вектора \mathbf{D} достаточно просто восстановить искомое электрическое поле с помощью связи между векторами (5.11).

Поскольку величина потока электрической индукции в веществе (как и величина потока напряженности электрического поля в отсутствие диэлектриков) определяется только свободными зарядами, в случаях, когда удается найти поле с помощью теоремы о потоке, оказывается, что электрическое поле в диэлектрике отличается от поля в вакууме в ϵ раз.

Пример. Заряд, окруженный слоем из изотропного диэлектрика

Найти во всех точках пространства электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q_0 , находящимся в центре сферического слоя из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \text{const}$.

Решение. Рассматриваемая система обладает сферической симметрией (рис. 5.2), что позволяет использовать для решения задачи теорему Гаусса (5.12) для потока векторного поля \mathbf{D} .

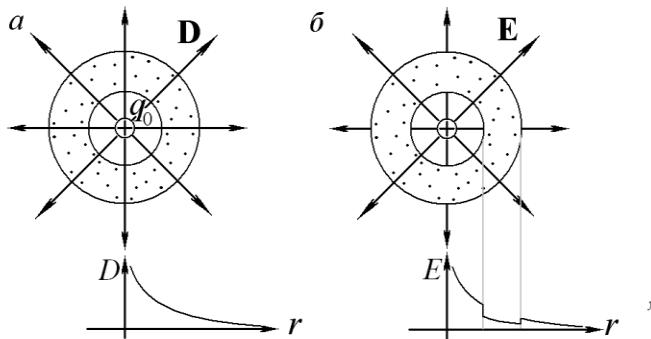


Рис. 5.2. К расчету электрических полей в случае симметричных распределений свободных зарядов и диэлектрика по теореме о потоке электрической индукции:
 a — пространственное распределение электрической индукции;
 b — пространственное распределение напряженности электрического поля.

В качестве гауссовой поверхности следует выбрать сферу с центром, совпадающим с точечным зарядом q_0 . В каждой точке такой гауссовой поверхности вектор \mathbf{D} направлен по радиусу и имеет одинаковую величину, которую легко найти из теоремы о потоке электрической индукции (рис. 5.2, a):

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi r^2 D(r) = 4\pi q \Rightarrow D(r) = \frac{q}{r}.$$

Электрическое поле (рис. 5.2, b) внутри диэлектрика в ϵ раз меньше, а вне него — точно такое же, каким было при отсутствии диэлектрического слоя:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon(r)} = \frac{q}{r\epsilon(r)}.$$

5.4. Границные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}

В случаях, когда симметрии электростатической системы недостаточно для нахождения вектора \mathbf{D} с помощью теоремы о потоке, при решении задач на расчет электростатических полей в присутствии диэлектриков оказываются полезными граничные условия для напряженностей электрического поля и электрической индукции.

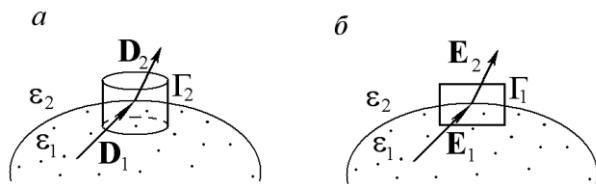


Рис. 5.3. К выводу граничных условий для векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} :
 а — условие для нормальных составляющих вектора \mathbf{D} ;
 б — условие для тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} .

Эти условия легко выводятся (рис. 5.3) из теорем о потоке вектора \mathbf{D} (5.6) и циркуляции вектора \mathbf{E} (2.5), записанных в интегральной форме:

$$\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q_0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma_0, \quad (5.13)$$

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0 \Rightarrow E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0. \quad (5.14)$$

Границные условия, например, могут использоваться при решении задач электростатики диэлектриков методом изображений. Как и в случае задач на расчет электростатических полей при наличии проводников, метод изображений состоит в таком подборе системы фиктивных зарядов, заменяющих связанные, при котором на границах диэлектриков должны выполняться условия, задаваемые соотношениями (5.13) и (5.14).

Как и в случае расчета электростатических полей при наличии проводников, использование метода изображений для расчета электростатических полей в системах с диэлектриками опирается на соответствующую теорему о единственности.

Пример. Заряд над плоской границей полупространства, заполненного диэлектриком (вариант 1)

Используя *метод изображений*, рассчитать силу, действующую на точечный заряд q_0 , расположенный на высоте h_0 над плоской границей полупространства, заполненного однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке внутри диэлектрика.

Решение. Как было показано ранее, в случае однородного диэлектрика, не содержащего свободных зарядов, макроскопические поляризационные заряды могут возникать только на его границе в виде поверхностного распределения $\sigma'(\mathbf{r})$. Из-за того, что заряженная поверхность является плоскостью, создаваемое ею вторичное поле \mathbf{E}' оказывается симметричным относительно границы диэлектрика (плоскости $z = 0$).

Из соображений симметрии следует, что создающие эквивалентное \mathbf{E}' поле точечные заряды-изображения (если, конечно, они существуют) должны располагаться симметрично плоскости $z = 0$ на перпендикуляре, опущенном на нее из точки нахождения свободного заряда q_0 (рис. 5.4,а). Это ограничение несколько упрощает решение задачи, поскольку автоматически приводит к выполнению граничного условия (5.14).

Как и в случае аналогичной задачи для проводников, расстояния от зарядов-изображений до границы диэлектрика $h' = \pm h_1$ первоначально не предполагаются равными h_0 .

Для определения величины зарядов-изображений и их положения удобно воспользоваться граничным условием для вектора \mathbf{D} (5.13), которое в конкретном случае принимает вид

$$D_z(z > 0) = D_z(z < 0) \Rightarrow E_z(z > 0) = \epsilon E_z(z < 0).$$

Подстановка в это уравнение конкретных выражений для полей точечных зарядов (источника и изображений) через их координаты при-

водит к уравнению для величины заряда-изображения $q_1 = -q' > 0$ и его z -координаты, которое должно выполняться тождественно во всех точках границы раздела двух сред (т. е. для любых значений r):

$$-\frac{q_0 h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{q_1 h_1}{(h_1^2 + r^2)^{3/2}} = \epsilon \left(-\frac{q_0 h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{q_1 h_1}{(h_1^2 + r^2)^{3/2}} \right).$$

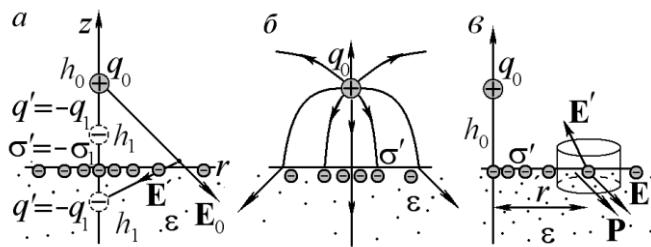


Рис. 5.4. Точечный заряд над полупространством из однородного изотропного диэлектрика:

- a* — постановка задачи о заряде над полупространством из однородного изотропного диэлектрика;
- б* — примерная картина силовых линий электрического поля;
- в* — к решению задачи методом расчета поверхностной плотности связанных зарядов.

Легко показать, что полученное равенство обращается в тождество при выполнении следующих условий:

$$q_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} q_0, \quad h_1 = h_0. \quad (5.15)$$

Таким образом, результирующее поле над поверхностью диэлектрика эквивалентно полю, создаваемому двумя точечными зарядами: свободным зарядом q_0 и симметрично расположенным в диэлектрике противоположным по знаку зарядом-изображением, величина которого отличается от q_0 в $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$ раз.

Электрическое поле в объеме диэлектрика является суперпозицией полей свободного точечного и связанного поверхностного зарядов. Поле последнего в этой части пространства эквивалентно полю точечного заряда-изображения ($q' = -q_1$), расположенному в точке нахожде-

ния заряда-источника. В результате электрическое поле в диэлектрике оказывается эквивалентным полю точечного заряда с эффективной величиной

$$q_{\text{эфф}} = \frac{2}{\epsilon + 1} q_0,$$

расположенного в точке нахождения свободного заряда.

Сила, действующая на свободный заряд со стороны диэлектрика, определяется напряженностью поля, создаваемого распределенным поверхностным зарядом и очевидно равна силе взаимодействия свободного заряда с фиктивным зарядом-изображением (5.15):

$$F = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{q_0^2}{4h_0^2}.$$

В заключение представляется полезным сделать ряд замечаний по поводу полученного результата:

1. Как и следовало ожидать, в предельных случаях $\epsilon \rightarrow \infty$ и $\epsilon = 1$ полученный результат переходит в решения простых задач о расчете электростатического поля, создаваемого точечным зарядом над поверхностью проводника, и поля точечного заряда в вакууме.

2. При наличии диэлектрика силовые линии электрического поля подходят к его границе под меньшим углом к нормали, чем в случае вакуума ($\epsilon = 1$), но отличным от нуля (как это имеет место в случае проводников).

3. В рассмотренной системе векторное поле \mathbf{D} существенно отличается от напряженности электрического поля, которое создается свободным зарядом q_0 в случае отсутствия диэлектрика. Несмотря на то, что правая часть интегрального соотношения для потока индукции \mathbf{D} (5.12) содержит только свободные заряды, структура векторного поля индукции оказывается существенно зависящей от формы и свойств диэлектрика. В данном случае наличие плоской границы диэлектрика нарушает сферическую симметрию системы и делает невозможным простое вычисление вектора \mathbf{D} с помощью теоремы о потоке подобно тому, как это было сделано в примере о расчете электрического поля точечного заряда в центре сферического слоя из диэлектрика.

4. В случае плоской границы диэлектрика существует другой, «менее формальный» метод анализа рассматриваемой электростатической системы, не использующий введения фиктивных зарядов-изображений (см. следующий пример).

**Пример. Заряд над плоской границей
полупространства, заполненного
диэлектриком (вариант 2)**

Найти расположение и величину зарядов-изображений для системы, рассмотренной в предыдущем примере, используя теоремы о потоках векторов \mathbf{P} , \mathbf{E} и \mathbf{D} .

Решение. Связь нормальной компоненты электрического поля \mathbf{E}' наведенных на поверхности диэлектрика поляризационных зарядов с модулем их поверхностной плотности $\sigma_1 = -\sigma' > 0$ может быть легко найдена с помощью теоремы о потоке напряженности электрического поля (рис. 5.4,б):

$$E'_z(r) = 2\pi\sigma_1(r). \quad (5.16)$$

Применение же теоремы о потоке вектора \mathbf{P} (5.5) позволяет связать ту же поверхностную плотность зарядов с нормальной составляющей вектора поляризации P_z , которая очевидно отлична от нуля только в объеме диэлектрика:

$$P_z(r) = -\sigma_1(r). \quad (5.17)$$

В свою очередь вектор поляризации и, следовательно, его нормальная составляющая, могут быть выражены через напряженность полного электрического поля, являющуюся суммой полей свободного заряда и искомого поверхностного распределения:

$$P_z = \chi E_z = \chi(E_{0z} + E'_z). \quad (5.18)$$

Подстановка в соотношение (5.18) явного выражения для нормальной составляющей поля свободного заряда и результатов вычисления нормальных составляющих векторов \mathbf{P} и \mathbf{E}' из (5.16) и (5.17) приводит к уравнению для искомой плотности поверхностных зарядов

$$-\sigma_1 = \chi \left(-\frac{q_0 h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + 2\pi\sigma_1 \right) \Rightarrow \sigma_1(r) = \frac{\chi}{2\pi\chi + 1} \frac{q_0 h_0}{(h_0^2 + r^2)^{3/2}},$$

решение которого с учетом связи (5.11) между поляризумостью вещества и его диэлектрической проницаемостью принимает вид

$$\sigma_1(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{q_0 h_0}{(h_0^2 + r^2)^{3/2}},$$

с точностью до множителя $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$ совпадающий с видом ранее найденного распределения плотности индуцированного на плоской поверхности проводника заряда (3.10).

Поскольку электрическое поле распределения (3.10) совпадает с полем точечного заряда-изображения $q' = -q_0$, расположенного симметрично плоскости $z = 0$ свободного заряда q_0 , в случае диэлектрика зарядом-изображением является точечный заряд, величина которого задается выражением (5.15).

5.5. Поляризация конденсированных диэлектриков

Одним из существенных недостатков ранее рассмотренной простейшей теории электростатического поля в диэлектриках является использование усредненного макроскопического поля. **Величина индуцированного дипольного момента молекулы определяется напряженностью микроскопического поля в точке ее нахождения.** Эта напряженность E_m может существенно отличаться от напряженности макроскопического поля, получаемой в результате усреднения по достаточно малому макроскопическому объему. Существенное уточнение ранее выведенных формул, описывающих поляризацию диэлектриков, может быть достигнуто путем учета дополнительного поля, создаваемого возникшими при поляризации зарядами молекул — ближайших соседей рассматриваемой.

В случае изотропного диэлектрика для грубой оценки величины напряженности дополнительного поля ближайших (по отношению к рассматриваемой молекуле) соседей можно считать, что поляризующаяся молекула помещена в пустую полость в непрерывном веществе. Радиус полости имеет величину порядка среднего расстояния между молекулами. Вклад в микроскопическое электрическое поле внутри такой полости определяется главным образом зарядом, появившимся на ее поверхности при поляризации окружающих полость молекул. Учет полей всех остальных возникающих при поляризации молекул микроскопических зарядов не дает существенных поправок из-за их

практически полной взаимной компенсации (рис. 5.5,*a*). Пустая полость в поляризованном диэлектрике с точки зрения электростатики может рассматриваться как непрерывный диэлектрик, в который внедрен соответствующий полости объем вещества, поляризованного в противоположном направлении. Таким образом, микроскопическое поле может быть приближенно заменено суммой среднего макроскопического поля в непрерывном диэлектрике и дополнительного поля \mathbf{E}'' шара (рис. 5.5,*b*), однородно поляризованного в направлении, противоположном поляризации вещества ($\mathbf{P}'' = -\mathbf{P}$):

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}''.$$

Поле однородно поляризованного шара было вычислено ранее и описывается соотношением (5.7). В рассматриваемом случае искомое поле в полости отличается от результата (5.7) только направлением:

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}'' = \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}.$$

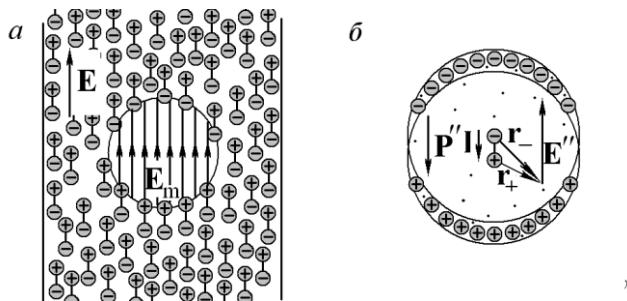


Рис. 5.5. Поляризация конденсированных диэлектриков:
а — механизм возникновения дополнительного поля в сферической полости внутри поляризованного диэлектрика;
б — к расчету электрического поля внутри однородно поляризованного шара.

Подстановка найденного микроскопического поля в выражение (5.1) приводит к линейному уравнению относительно \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = n\mathbf{d} = n\alpha\mathbf{E}_m = n\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}\right),$$

решение которого и является одной из форм *уравнения Клаузиуса—Моссомти:*

$$\mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4}{3}\pi n a} \mathbf{E}. \quad (5.19)$$

Соответствующее связи (5.19) выражение для электрической индукции очевидно имеет вид

$$\mathbf{D} = \frac{3 + 8\pi n a}{3 - 4\pi n a} \mathbf{E}.$$

Если концентрация молекул достаточно мала (например, в случае газообразного диэлектрика), знаменатель уточненного выражения для вектора поляризации (5.19) может быть приближенно заменен единицей, в результате чего из этого соотношения следует ранее полученная приближенная формула (5.3). В случае же больших концентраций (вещество в конденсированном состоянии) соотношение (5.19) формально допускает возможность обращения в бесконечность коэффициента пропорциональности между поляризацией и напряженностью макроскопического поля. На практике это, разумеется, не означает возникновения бесконечно больших дипольных моментов молекул и поляризации у вещества хотя бы потому, что в случае значительных деформаций молекул заведомо начинает нарушаться линейный характер связи между наведенным дипольным моментом и полем. Однако в случае обращения в нуль знаменателя в соотношении (5.19) возникает любопытная возможность существования поляризации у вещества при отсутствии выстраивающего молекулы внешнего электрического поля. Очевидно, что в указанном случае самовыстраивание молекул обуславливается микроскопическими полями, создаваемыми самими же молекулярными диполями.

При выводе соотношения (5.19) была использована весьма упрощенная модель механизма возникновения спонтанной поляризации в классе веществ, называемых *сегнетоэлектриками*. При увеличении температуры сегнетоэлектрика из-за увеличения интенсивности теплового движения молекул и теплового расширения образца происходит разрушение спонтанной поляризации. Сегнетоэлектрики превращаются в обычные диэлектрики.

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathbf{P} \equiv n\langle \mathbf{d} \rangle \approx \hat{\chi}\mathbf{E}$	Определение вектора поляризации и его связь с напряженностью электрического поля
$(\nabla, \mathbf{P}) = -\rho' \Leftrightarrow Q' = - \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{P}, d\mathbf{S})$	Дифференциальная и интегральная форма записи теоремы о потоке вектора поляризации
$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \hat{\epsilon}\mathbf{E}$	Определение электрической индукции и ее связь с напряженностью электрического поля
$(\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_0 \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi Q_0,$ $[\nabla, \mathbf{E}] = 0 \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$	Уравнения электростатического поля в веществе, записанные в дифференциальной и интегральной форме
$D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma_0, E_{\tau1} - E_{\tau2} = 0$	Условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} на границе диэлектриков

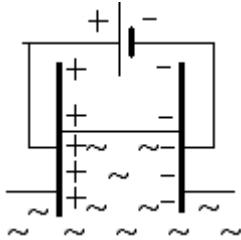
Задачи для самостоятельного решения

- 5.1. Обосновать соотношение (5.4) исходя из закона сохранения электрического заряда, не используя его интегрального аналога (5.5).
- 5.2. Найти электрическое поле, создаваемое бесконечным цилиндром, однородно поляризованным в направлении, перпендикулярном его оси.
- 5.3. Длинный прямой кабель представляет собой металлический провод, помещенный на ось металлической трубы-оплетки (длинный цилиндр). Внутренний провод отделен от оплетки слоем диэлектрика, проницаемость которого изменяется в перпендикулярном оси направлении по известному закону $\epsilon = \epsilon(r)$. Определить электрическое поле в произвольной точке пространства, ес-

ли провод несет постоянный линейный заряд λ , а полный заряд оплетки равен нулю.

Указание. Воспользоваться теоремой о потоке электрической индукции. В качестве гауссовой поверхности выбрать цилиндр, соосный с кабелем.

- 5.4. Диэлектрическую пластинку, поперечные размеры которой намного больше толщины, поместили в однородное электростатическое поле, расположив перпендикулярно силовым линиям. Определить напряженность поля в произвольной точке пространства и распределение поляризационных зарядов в пластинке, если ее диэлектрическая проницаемость изменяется по толщине в соответствии с заданным законом $\epsilon = f(h)$.
 - 5.5. Найти электростатическое поле, создаваемое зарядом, помещенным в однородный изотропный диэлектрик, заполняющий полупространство с плоской границей.
 - 5.6. Два полупространства, заполненных однородными изотропными диэлектриками с проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 , разделены плоской границей, на расстоянии h от которой помещен точечный заряд q . Найти электрическое поле во всем пространстве и электрическую силу, действующую на заряд.
 - 5.7. Определить силу взаимодействия молекулы, обладающей электрическим дипольным моментом, с полупространством из однородного изотропного диэлектрика с известной ϵ . Дипольный момент ориентирован перпендикулярно плоской границе диэлектрика. Расстояние от диполя до границы известно.
 - 5.8. В однородное поле напряженностью E_0 помещен шар из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Радиус шара R известен. Определить напряженность электрического поля в произвольной точке пространства.
- Указание. Попытайтесь доказать, что шар из однородного и изотропного диэлектрика в однородном поле поляризуется однородно. Использование этого свойства существенно упрощает решение задачи.
- 5.9. Решите задачу 5.8 для случая однородного бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна исходному полю. Изобразите примерную картину линий для векторов E и D .
 - 5.K1. Попытайтесь выполнить задания 3.K1 и 3.K2 для случая электростатических систем, содержащих заряды и диэлектрики.



Лекция 6

Энергия электростатического поля

Любому объему пространства, в котором существует электрическое поле, может быть сопоставлена энергия, величина которой пропорциональна произведению квадрата поля на этот объем. При вычислении энергии, запасенной в поле точечного заряда, возникают значительные трудности, которые, по-видимому, носят весьма принципиальный характер.

6.1. Энергия системы точечных зарядов

В соответствии с общим определением потенциальной энергии системы взаимодействующих тел электростатической энергией системы зарядов следует назвать работу, которую необходимо было бы совершить против сил поля при «сборке» этой системы в процессе перемещения зарядов из бесконечности в точки их истинного расположения. При этом оказывается, что **электростатическая энергия системы неподвижных зарядов равна половине суммы произведений величин зарядов на потенциалы, создаваемые в точках их нахождения всеми остальными зарядами системы:**

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad \varphi_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}. \quad (6.1)$$

Для доказательства приведенного утверждения удобно воспользоваться методом математической индукции. В случае двух зарядов справедливость формулы (6.1) достаточно очевидна:

$$W_E^{(N=2)} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i.$$

При осуществлении индукционного перехода необходимо учесть, что введение в систему из N зарядов $N+1$ заряженной частицы приведет к изменению потенциалов во всех точках нахождения ранее уже имевшихся зарядов. При этом истинность индукционного перехода доказывается цепочкой равенств

$$\begin{aligned} W_E^{(N+1)} &= W_E^{(N)} + A_{N+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i^{(N)} + q_{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{N+1,i}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\varphi_i^{(N)} + \frac{q_{N+1}}{r_{N+1,i}} \right) + \frac{1}{2} q_{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{N+1,i}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i^{(N+1)} + \frac{1}{2} q_{N+1} \varphi_{N+1}^{(N+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} q_i \varphi_i^{(N+1)}, \end{aligned}$$

в которых использованы следующие обозначения:

$W_E^{(N)}$ — электростатическая энергия системы из N точечных зарядов;

A_{N+1} — работа внешних сил по добавлению к системе из N точечных зарядов $N+1$ заряда;

$\varphi_i^{(N)}$ — потенциал в точке нахождения заряда q_i , создаваемый всеми элементами системы из N точечных зарядов кроме него самого;

r_{ij} — расстояние между точечными зарядами с номерами i и j .

Естественное обобщение формулы (6.1) на случай непрерывного распределения зарядов приводит к более удобному при практическом использовании соотношению

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V dq(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}). \quad (6.2)$$

6.2. Энергия системы заряженных проводников

В случае системы заряженных проводников выражения для электростатической энергии (6.1) или (6.2) существенно упрощаются вследствие того, что объем любого проводника эквипотенциален. В результате вместо вычисления суммы по гигантскому числу точечных зарядов q_i оказывается достаточным выполнить аналогичное суммирование только по изолированным друг от друга проводникам с потенциалами ϕ_J , несущим суммарные заряды Q_J :

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i = \sum_{J=1}^M \varphi_J Q_J, \quad M \ll N. \quad (6.3)$$

В отличие от случая вычисления энергии системы точечных зарядов по внешне схожей формуле (6.1) в выражении (6.3) под φ_J понимается значение потенциала во всех точках объема проводника с зарядом Q_J , создаваемого не только зарядами других проводников, но и его собственными.

В случае отдельного проводника потенциал его поверхности оказывается пропорциональным величине заряда. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть проводник заданной формы, имеющий заряд Q и создающий пространственное распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$, принимающее на его поверхности постоянное значение $\varphi(\Gamma_2) = \varphi_0$. Домножение функции $\varphi(\mathbf{r})$ на постоянный множитель α приводит к новому пространственному распределению потенциала $\phi(\mathbf{r}) = \alpha\varphi(\mathbf{r})$, принимающему на поверхности проводника в α раз большее значение. Изменение потенциала в заданное число раз во всех точках пространства приводит к точно такому же изменению его градиента, и, следовательно, напряженности электрического поля в произвольной точке, в том числе и вблизи поверхности проводника, $\phi(\Gamma_2) = \alpha\varphi_0$. Последнее в соответствии с соотношением (3.4) означает пропорциональное возрастание поверхностного распределения заряда проводника и, следовательно, его полного заряда. Из теоремы о единственности решения задач электростатики следует, что увеличение

заряда проводника в α раз обязательно приведет к рассмотренному распределению потенциала.

Отношение величины заряда проводника к потенциалу его поверхности носит название *емкости*:

$$C_J \equiv \left. \frac{Q_J}{\Phi_J} \right|_{Q_{J' \neq J} = 0}. \quad (6.4)$$

Согласно определению емкости (6.4) потенциал поверхности рассматриваемого проводника вычисляется в предположении равенства нулю всех зарядов других проводников.

Величина емкости проводника не зависит от его заряда и определяется только формой его поверхности.

С учетом (6.4) выражение для электростатической энергии уединенного проводника может быть переписано в виде

$$Q_{J' \neq J} = 0 \Rightarrow W = \frac{Q_J \Phi_J}{2} = \frac{C_J \Phi_J^2}{2} = \frac{Q_J^2}{2C_J}. \quad (6.5)$$

В случае системы заряженных проводников потенциал в произвольной точке пространства может быть вычислен как сумма потенциалов, создаваемых поверхностными распределениями зарядов каждого из проводников. В результате потенциал Φ_I каждого из проводников системы вычисляется как линейная комбинация полных электрических зарядов Q_J всех проводников этой системы:

$$\Phi_I = \sum_J b_{IJ} Q_J. \quad (6.6)$$

Совокупность потенциальных коэффициентов b_{IJ} линейной комбинации (6.6) составляет матрицу, число элементов которой определяется числом проводников в системе. Элементы обратной ей матрицы называют *емкостными коэффициентами*:

$$\hat{C} = \hat{b}^{-1}, \quad C_{IJ} = C_{JI}. \quad (6.7)$$

Обе матрицы (6.6) и (6.7) оказываются симметричными относительно их диагоналей. С учетом введенных определений выражение (6.3) для энергии системы проводников может быть записано в анало-

личном (6.5) виде как квадратичная форма от их зарядов или потенциалов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{I,J} b_{IJ} Q_I Q_J = \frac{1}{2} \sum_{I,J} C_{IJ} \varphi_I \varphi_J.$$

Система из двух имеющих равные разноименные заряды проводников, потенциалы которых не зависят от внешних зарядов, называется *конденсатором*. Разность потенциалов между образующими его проводниками (*обкладками*) является линейной функцией величины заряда:

$$\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = b_{22}Q - b_{21}Q - (-b_{11}Q + b_{12}Q) = (b_{22} + b_{11} - 2b_{12})Q.$$

Соответствующий приведенному выражению коэффициент пропорциональности между зарядом и разностью потенциалов между обкладками

$$Q = C\delta\varphi, \quad C = (b_{22} + b_{11} - 2b_{12})^{-1}$$

носит название *емкости конденсатора*.

Пример. Плоский конденсатор

Рассчитать емкость и энергию конденсатора, состоящего из двух параллельно расположенных на расстоянии d друг от друга пластин площадью S , имеющих заряды Q и $-Q$.

Решение. При расчете электрического поля внутри конденсатора обычно пренебрегают краевыми эффектами и предполагают, что каждая из пластин создает поле, подобное полю бесконечной плоскости. Таким образом, внутри плоского конденсатора электростатическое поле однородно, а величина его напряженности задается известным выражением

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{Q}{S},$$

где S — площадь пластин конденсатора. Вне идеального конденсатора электрическое поле считается равным нулю.

В случае однородного поля разность потенциалов между пластинами вычисляется как произведение напряженности на расстояние d между ними:

$$\delta\varphi = Ed = 4\pi \frac{d}{S} Q . \quad (6.8)$$

Из выражения для разности потенциалов (6.8) следует, что емкость плоского конденсатора задается соотношением:

$$C = \frac{Q}{\delta\varphi} = \frac{S}{4\pi d} . \quad (6.9)$$

Энергию заряженного конденсатора можно вычислить как работу, совершаемую внешними силами в процессе зарядки конденсатора путем переноса бесконечно малых порций зарядов с одной пластины на другую до тех пор, пока на них не накопится заданный заряд. Суммирование элементарных работ

$$\delta A = \delta Q Ed = 4\pi d \frac{Q \delta Q}{S}$$

по перемещению малых порций зарядов δQ в поле, создаваемом уже накопленным зарядом Q , с учетом выражения для емкости (6.9) приводит к хорошо известному выражению для энергии плоского конденсатора:

$$W = \int_0^Q \frac{4\pi d}{S} Q dQ = \frac{Q^2}{2C} . \quad (6.10)$$

Подстановка в выражение (6.10) для энергии конденсатора связи между зарядом конденсатора и напряженностью поля между его пластинами приводит к важному соотношению

$$W_E = \frac{E^2}{8\pi} dS = \frac{E^2}{8\pi} V , \quad (6.11)$$

показывающему, что **энергия заряженного конденсатора пропорциональна произведению квадрата напряженности его электрического поля на объем пространства между пластинами.**

6.3. Объемная плотность энергии электрического поля

Полученный в примере расчета энергии плоского конденсатора результат (6.11) позволяет высказать предположение, что **любой объем пространства, «заполненный» электрическим полем, обладает энергией, плотность которой задается выражением**

$$w_E = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (6.12)$$

Полная же энергия поля должна вычисляться путем интегрирования *объемной плотности энергии* (6.12) по всему объему, занимаемому полем:

$$W_E = \int_V w_E dV. \quad (6.13)$$

Приведенные утверждения можно обосновать для общего случая электростатического поля произвольной конфигурации, например, мысленно заполнив все занимаемое им пространство бесконечно малыми изолированными друг от друга плоскими конденсаторами. Если их обкладки выполнить достаточно тонкими, описанная операция может быть осуществлена таким образом, что поле останется практически неизменным. Поскольку энергия каждого такого конденсатора задается выражением (6.11), полную энергию вычисляют как сумму, стремящуюся к интегралу (6.13) по всему объему от энергий, запасенных в этих конденсаторах. Таким образом, оказывается возможным утверждать, что **объемная плотность энергии электростатического поля в вакууме определяется квадратом его напряженности.**

Для более строгого доказательства следует воспользоваться выражением для электростатической энергии (6.2), выразив в нем плотность зарядов через потенциал с помощью уравнения Пуассона:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int_V dV \varphi \Delta \varphi. \quad (6.14)$$

В приведенном выражении (6.14) интегрирование по конечному объему, занимаемому зарядами, распространено на все остальное пространство, которое предполагается свободным от зарядов, что, разумеется, никак не сказывается на результате. С помощью математического тождества

$$\nabla(\varphi \nabla \varphi) = (\nabla \varphi, \nabla \varphi) + \varphi \nabla^2 \varphi = E^2 + \varphi \Delta \varphi$$

интеграл (6.14) превращается в сумму двух. Первый из них содержит объемную плотность энергии электрического поля (6.12), а второй с помощью теоремы Гаусса—Остроградского сводится к поверхностному интегралу по ограничивающей бесконечный объем сфере бесконечного радиуса $S_{R \rightarrow \infty}$:

$$W_E = \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} dV E^2 - \frac{1}{8\pi} \oint_{S_{R \rightarrow \infty}} (\varphi \nabla \varphi, d\mathbf{S}). \quad (6.15)$$

Для оценки поверхностного интеграла достаточно воспользоваться мультипольным разложением для потенциала (4.2). Поскольку потенциал убывает с расстоянием как r^{-1} (или быстрее), интегрируемое по поверхности сферы большого радиуса $R \rightarrow \infty$ произведение потенциала компактного распределения зарядов на его градиент ведет себя «не хуже», чем $1/r^3$. В результате оказывается, что второе слагаемое в выражении (6.15) стремится к нулю не медленнее, чем $1/R$.

6.4. Энергия электростатического поля в веществе

Выражение (6.12) в принципе пригодно для вычисления энергии статического поля не только в вакууме, но и в веществе. Однако при включении поля в диэлектрике происходит его поляризация, сопровождающаяся совершением работы по перемещению зарядов в поле, которая, например, может запасаться в виде энергии деформации поляризующихся молекул. При выключении электрического поля запасенная таким образом дополнительная энергия будет выделяться. Поскольку эта дополнительная энергия практически неотделима от энергии самого поля, представляется целесообразным объединить ее с электростатической.

При изменении поляризации единицы объема диэлектрика на $d\mathbf{P}$ полем \mathbf{E} совершается работа, определяемая скалярным произведением этих векторов:

$$\frac{1}{V} dA_P = nq(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = (\mathbf{E}, d\mathbf{P}).$$

Поскольку сам вектор \mathbf{P} поляризации линеен по полю, полная работа по поляризации единичного объема вещества при включении поля задается интегралом

$$w_P = \int_0^E (\mathbf{E}, d\mathbf{P}) = \int_0^E (\mathbf{E}, \hat{\chi}d\mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}, \hat{\chi}\mathbf{E}).$$

В результате полная энергия единицы объема диэлектрика при наличии электростатического поля (объемная плотность электрической энергии в диэлектрике) может быть выражена через напряженность поля и электрическую индукцию:

$$w_D = w_E + w_P = \frac{E^2 + 4\pi(\mathbf{E}, \hat{\chi}\mathbf{E})}{8\pi} = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}. \quad (6.16)$$

Поскольку внесение диэлектрического образца в поле заданного статического распределения зарядов приводит к изменению запасенной в системе энергии, указанный процесс должен сопровождаться совершением работы силами поля. Последнее означает существование сил, действующих на диэлектрик, помещенный на границе поля (точнее, в любой точке пространства, где поле имеет отличный от нуля градиент). Эти силы, возникающие в результате взаимодействия с полем наводимых им при поляризации диэлектрика зарядов, носят название *пондеромоторных*. Вычисление пондеромоторных сил в общем случае оказывается весьма трудоемким. В подавляющем большинстве ситуаций расчеты оказывается удобным проводить исходя из энергетических соображений.

В качестве простейшего примера проявления пондеромоторных сил можно привести хорошо наблюдаемый в эксперименте эффект втягивания диэлектрика в пространство между пластинами заряженного конденсатора.

6.5. Проблема существования точечного заряда

С точки зрения простоты было бы весьма заманчивым считать элементарный заряд точечным. В противном случае неизбежно возникает проблема существования каких-либо дополнительных взаимодействий, удерживающих распределенный заряд от разрушения в результате расталкивания его собственных частей. Логически допустимо альтернативное предположение о конечных размерах соответствующего элементарному заряду распределения плотности при условии принципиальной невозможности существования каких-либо внутренних взаимодействий между его частями. В дальнейшем при обсуждении явлений, возникающих при ускоренном движении зарядов, окажется, что предположение о существовании внутренних сил может быть полезным для объяснения эффекта радиационного трения.

Основной трудностью при использовании модели точечного элементарного заряда оказывается необходимость сопоставления ему бесконечно большой энергии, обусловленной наличием поля. Действительно, в случае равномерного распределения заряда по поверхности сферы его энергия описывается выражением

$$W_E = \frac{q^2}{2R}, \quad (6.17)$$

стремящимся к бесконечности при стремлении к нулю ее радиуса. Использование иных модельных сферически-симметричных распределений плотности для элементарного заряда приводит к результатам, отличающимся от (6.17) не более чем на близкий к единице численный коэффициент.

Бесконечно большая энергия элементарного заряда могла бы быть сохранена в теории (начало отсчета энергии произвольно), если бы не существовало процессов рождения и уничтожения электрических зарядов. Наблюдаемые в природе процессы рождения и уничтожения пар разноименно заряженных частиц и античастиц сопровождаются поглощением и выделением конечных порций энергии. Это делает нелогичным сопоставление элементарным зарядам бесконечно больших энергий.

Грубая оценка радиуса электрона может быть получена из предположения, что вся его масса покоя обусловлена энергией его электриче-

ского поля. Получаемая в рамках этого предположения оценка носит название *классического радиуса электрона*:

$$W_E \approx m_0 c^2 \Rightarrow R_e \approx \frac{q_e^2}{m_0 c^2}.$$

Проблема существования точечного заряда до сих пор окончательно не решена в рамках не только классической, но и квантовой электродинамики.

Соотношения, которые полезно помнить

$W_E = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad \varphi_i \equiv \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$	Энергия системы неподвижных точечных зарядов
$W = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$	Энергия заряженного проводника
$w_D = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}$	Объемная плотность энергии электростатического поля
$R_e \approx \frac{q_e^2}{m_0 c^2}$	Классический радиус электрона

Задачи для самостоятельного решения

- 6.1. Доказать, что матрица емкостных коэффициентов симметрична относительно диагонали ($C_{ik} = C_{ki}$).

Указание. Рассмотреть изменение энергии системы заряженных проводников, обусловленное некоторым увеличением заряда одного из них.

- 6.2. Рассчитать емкость металлического шара радиусом R , окруженного сферическим слоем диэлектрика с проницаемостью ϵ , внутренний и внешний радиусы которого R и $2R$ соответственно.
- 6.3. Рассчитать электростатическую энергию, запасенную внутри равномерно заряженного по объему шара радиусом R , и энергию, запасенную в пустом пространстве, окружающем этот шар. Заряд шара равен Q .

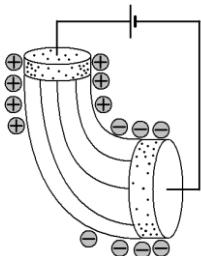
- 6.4. Рассчитать энергию, запасенную в объеме однородного шара радиусом R из диэлектрика с проницаемостью ϵ , внесенного в однородное электрическое поле с напряженностью \mathbf{E}_0 .
- 6.5. Рассчитать емкость сферического конденсатора (две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 , промежуток между которыми заполнен однородным изотропным диэлектриком с известной диэлектрической проницаемостью).
- 6.6. Рассчитать емкость цилиндрического конденсатора (два соосно расположенных цилиндра одинаковой длины h с известными радиусами R_1 и R_2).
- 6.7. Показать, что для сферического и цилиндрического конденсаторов расчет энергии через электроемкость и объемную плотность энергии приводит к одинаковым результатам.
- 6.8. Рассчитать емкость плоского конденсатора известных размеров, диэлектрическая проницаемость диэлектрика внутри которого при перемещении от одной пластины к другой изменяется по линейному закону от ϵ_1 до ϵ_2 .
- 6.9. Показать, что матрица тензора диэлектрической проницаемости вещества симметрична относительно диагонали ($\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$).

Указание. Рассчитать работу по поляризации диэлектрика в процессе увеличения внешнего электрического поля от нуля до конечного значения напряженности $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}_i + E_k \mathbf{e}_k$ путем поочередного увеличения каждой из его компонент; суммарная работа не должна зависеть от порядка включения указанных составляющих.

- 6.10. Нижние части пластин плоского конденсатора заданных размеров погружают в жидкий диэлектрик с проницаемостью ϵ и плотностью ρ . На какую высоту поднимется диэлектрик в конденсаторе, если его пластины были присоединены к источнику напряжения U , а перед погружением в диэлектрик: а) были отключены от источника; б) не отключались от источника.

Указание. При решении задачи удобно воспользоваться энергетическими соображениями, носящими достаточно общий характер: замкнутая система стремится перейти в состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии. Если возникнут сложности с решением алгебраических уравнений, можно ограничиться записью последних и выполнить численный расчет для конденсатора, погруженного в дистиллированную воду.

Лекция 7



Постоянный электрический ток

При создании в проводнике постоянной разности потенциалов в нем возникает электрическое поле, вызывающее направленное движение свободных носителей зарядов, называемое электрическим током. Для большинства проводящих сред плотность электрического тока оказывается пропорциональной напряженности электрического поля. При протекании электрического тока по проводнику силы электрического поля и сторонние силы совершают работу, что приводит к выделению тепловой энергии.

7.1. Основные определения

В рамках электростатики проводящих сред было показано, что электрические заряды в проводнике могут оставаться неподвижными лишь при отсутствии электрического поля. Снятие требования неподвижности зарядов приводит к возможности существования электрического поля в проводниках. Если не принять дополнительных мер, движущиеся под действием этого поля свободные носители зарядов постепенно накапляются на границе проводника и своим полем скомпенсируют исходное поле, после чего направленное движение зарядов прекратится, а объем проводника станет эквипотенциальным. Для поддержания постоянной разности потенциалов между двумя участками границы проводника необходимо организовать постоянный перенос накапливающихся на одном из этих участков зарядов на другой, где возникает их нехватка. Именно эту функцию выполняет *источник ЭДС*, без которого протекание постоянного электрического тока по проводнику невозможно.

Для количественной характеристики вызванного электрическим полем направленного движения свободных носителей зарядов в проводнике вводится *плотность электрического тока \mathbf{j}* (вектор, опреде-

ляемый произведением концентрации носителей n , переносимого ими заряда q и скорости движения частиц \mathbf{u} , усредненной по ансамблю носителей зарядов):

$$\mathbf{j} \equiv qn\langle \mathbf{u} \rangle = \rho \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (7.1)$$

В случае присутствия в проводнике нескольких типов различных носителей полная плотность тока вычисляется как векторная сумма плотностей токов, создаваемых частицами каждого сорта.

Другой важной количественной характеристикой направленного движения зарядов является *сила тока*, определяемая как поток плотности тока через рассматриваемое сечение проводника. Используя определение для плотности тока (7.1), легко показать, что сила тока численно равна заряду Q_J , переносимому электрическим током I через рассматриваемое сечение проводника за единицу времени:

$$I \equiv \oint (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{dQ_J}{dt}. \quad (7.2)$$

С помощью введенных соотношениями (7.1) и (7.2) величин оказывается возможной компактная математическая запись закона *сохранения электрического заряда*. Действительно, скорость изменения заряда Q_V в каком-либо объеме V равна по величине и противоположна по знаку суммарной величине заряда Q_J , переносимого через его замкнутую границу за единицу времени. Последняя очевидно определяется потоком плотности тока через замкнутую поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем:

$$\frac{dQ_V}{dt} = -\frac{dQ_J}{dt} = -\oint_{\Gamma_2} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}). \quad (7.3)$$

Применение интегрального соотношения (7.3) к физически бесконечно малому объему приводит к его дифференциальному аналогу

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{j}). \quad (7.4)$$

Переход от интегральной формы закона сохранения электрического заряда (7.4) к дифференциальной форме (7.3) осуществляется совершенно аналогично тому, как это было сделано при выводе дифференциальной формы теоремы Гаусса (2.7).

7.2. Закон Ома для цепи с распределенными параметрами

В общем случае протекающий по проводнику электрический ток является сложной функцией от приложенного электрического поля и состояния самого проводника. Рассмотрение процессов протекания тока удобно начать с модельного проводника, в котором концентрация свободных носителей постоянна, а их направленное движение может быть приближенно описано на языке классической механики. В уравнении движения носителя заряда

$$m \frac{d\langle \mathbf{u} \rangle}{dt} = q\mathbf{E} + \mathbf{F} - k\langle \mathbf{u} \rangle \quad (7.5)$$

учтены электрические силы $q\mathbf{E}$, обусловленные внешним электрическим полем, а также *сторонние силы* \mathbf{F} , связанные с другими взаимодействиями (в качестве сторонних сил в реальных электрических цепях обычно выступают либо магнитные силы, либо силы, обусловленные химическими процессами, имеющие в конечном итоге электромагнитное происхождение). Если бы в однородном проводнике присутствовали только указанные силы, носители зарядов в его объеме двигались бы равноускоренно, и электрический ток возрастал бы во времени по квадратичному закону. Однако опыт показывает, что в большинстве проводящих сред при создании постоянной разности потенциалов возникает постоянный электрический ток, что возможно лишь в случае независящей от времени средней скорости движения носителей. В рамках феноменологической теории проводимости приходится вводить дополнительную диссипативную силу, описывающую отвод энергии от разгоняемых внешним полем и сторонними силами зарядов. Представляется вполне разумным считать эту силу линейной функцией скорости. Например, в случае потерь энергии, обусловленных столкновениями носителей с другими объектами, частота этих столкновений действительно может быть пропорциональной скорости направленного движения. В первых классических теориях электропроводности считалось, что приводящие к потерям энергии направленного движения столкновения происходят между носителями зарядов и узлами кристаллической решетки проводника.

Введенный в рассмотрение коэффициент вязкого трения η может быть выражен через так называемое *время релаксации* τ , определяю-

щее скорость затухания направленного движения носителей (тока) при отключении поддерживающих его внешних полей (рис.7.1, а):

$$q\mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{v}_0 \exp\left(-\frac{\eta}{m}t\right) = \mathbf{u}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

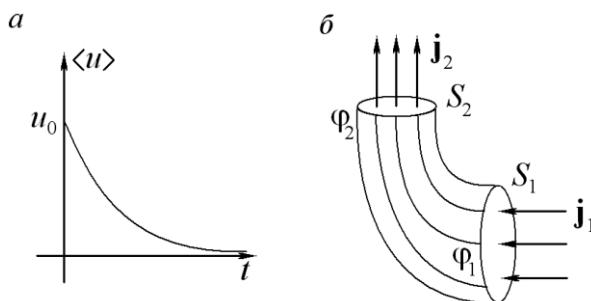


Рис. 7.1. Закон Ома для пассивного участка цепи:
 а — зависимость от времени скорости направленного движения свободных носителей после выключения внешнего поля;
 б — участок трубки тока, используемый при выводе закона Ома в интегральной форме.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (7.5) для скорости направленного движения носителей показывает, что независимо от начального состояния постепенно устанавливается стационарный режим их движения с постоянной скоростью

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = \frac{q}{\eta} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}}{q} \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

соответствующей протеканию постоянного электрического тока, плотность которого задается выражением

$$\mathbf{j}(t \rightarrow \infty) = nq^2 \eta^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}}{q} \right) = nq^2 \tau m^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}}{q} \right). \quad (7.6)$$

В важнейшем частном случае отсутствия сторонних сил составляющий элемент электрической цепи проводник принято называть ее

пассивным участком. Из соотношения (7.6) следует, что **на пассивном участке плотность электрического тока пропорциональна приложенному электрическому полю**

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.7)$$

Полученный результат для широкого класса изотропных проводящих сред хорошо согласуется с данными эксперимента и носит название *дифференциальной формы закона Ома* для пассивного участка цепи. Входящий в дифференциальную форму закона коэффициент пропорциональности между плотностью тока и полем называется *удельной проводимостью вещества*, а обратная ему величина — *удельным сопротивлением*. Их численные значения зависят от химического состава проводника и его температуры, обычно определяются экспериментально, но могут быть оценены в рамках той или иной конкретной модели строения проводящего вещества. В случае анизотропных сред закон Ома обычно выполняется, однако удельная проводимость оказывается тензорной величиной.

Для получения интегральной формы закона Ома для пассивного участка изотропной проводящей среды следует рассмотреть внутренний объем *трубки тока* (поверхности, образованной линиями плотности тока \mathbf{j}), ограниченный двумя «крышками», являющимися частями поверхностей, перпендикулярных плотности тока (рис. 7.1, б).

Каждая из нормальных к вектору \mathbf{j} «крышек» трубки является эквипотенциальной поверхностью, что позволяет говорить о разности потенциалов между двумя выбранными сечениями трубки. Поток вектора \mathbf{j} через боковую поверхность рассматриваемого объема очевидно равен нулю. Таким образом, величина электрического тока через любое сечение трубки оказывается постоянной:

$$I = \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \int_S (\sigma \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \text{const.}$$

Пропорциональное увеличение напряженности электрического поля в каждой точке пространства приведет к такому же увеличению разности потенциалов между «крышками» трубки и в соответствии с законом Ома к пропорциональному возрастанию плотности тока в каждой точке внутри нее, а следовательно, и силы тока I в каждом эквипотенциальному сечении. Таким образом, **сила тока, протекающего по участку токовой трубки, пропорциональна разности потенци-**

алов между ограничивающими его сечениями. Сформулированное утверждение, обычно называемое *законом Ома для пассивного участка в интегральной форме*, может быть записано в виде хорошо известного соотношения

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\delta\varphi}{R}, \quad (7.8)$$

в котором использованы следующие обозначения: $U \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ — *напряжение* (взятое с противоположным знаком разность потенциалов между торцами проводника); R — *сопротивление* (постоянный коэффициент пропорциональности между напряжением и током).

Появление знака «минус» при разности потенциалов в формуле (7.8) обусловлено тем, что определяющее положительное направление протекания тока движение положительных зарядов по пассивному участку цепи происходит в направлении понижения потенциала.

В случае присутствия сторонних сил оказывается удобным ввести *электродвижущую силу* (ЭДС) E , которая определяется как работа, совершаемая сторонними силами по перемещению единичного заряда по длине проводника:

$$E \equiv \frac{1}{q} \int_l (\mathbf{F}, d\mathbf{l}).$$

Рассуждения, аналогичные использованным при выводе формулы (7.8), приводят с хорошо известной формуле, выражающей закон Ома в интегральной форме для активного участка цепи:

$$I = \frac{-\delta\varphi \pm E}{R}, \quad (7.9)$$

где выбор знака перед ЭДС определяется тем, способствуют или противодействуют сторонние силы протеканию электрического тока в выбранном направлении.

Пример. Объемные токи

Рассчитать электрическое сопротивление между обкладками цилиндрического конденсатора, заполненного однородным слабо прово-

дящим диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельной проводимостью σ . Размеры конденсатора считать известными, краевыми эффектами пренебречь. Обобщить полученный результат на случай конденсатора произвольной формы. Найти закон убывания заряда конденсатора из-за утечки зарядов через слабо проводящий однородный диэлектрик.

Решение. Для вычисления емкости цилиндрического конденсатора его внутреннюю обкладку следует мысленно зарядить положительным зарядом Q , а внешнюю — отрицательным зарядом той же величины. Электрическое поле между обкладками определяется по теореме Гаусса для диэлектриков

$$2\pi rlD = 4\pi Q \Rightarrow D(r) = \frac{2Q}{rl}.$$

Соответствующая ему разность потенциалов между обкладками находится в результате элементарного интегрирования:

$$\delta\varphi = \frac{2Q}{\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Для вычисления полного тока, протекающего между обкладками, мысленно построим соосную с конденсатором вспомогательную цилиндрическую поверхность (рис. 7.2,а).

Суммарный ток, протекающий через боковую поверхность цилиндра, определяется пронизывающим ее потоком напряженности электрического поля и в случае однородного диэлектрика может быть вычислен без интегрирования с помощью теоремы о потоке для электрической индукции (5.12):

$$I = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{\sigma}{\epsilon} \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi \frac{\sigma}{\epsilon} Q.$$

Отношение найденной разности потенциалов к полному току дает искомое сопротивление

$$R = \frac{\delta\varphi}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Легко видеть, что в случае однородного диэлектрика, заполняющего пространство между проводниками произвольной формы, сопротивление между последними определяется параметрами диэлектрика и величиной их взаимной емкости:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\int (\mathbf{j}, d\mathbf{S})} = \frac{U\epsilon}{\sigma \int (\mathbf{D}, d\mathbf{S})} = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{U}{Q} = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{1}{C}.$$

Подстановка полученного соотношения в закон сохранения заряда (7.3) позволяет получить достаточно общее соотношение для скорости убывания разности потенциалов между двумя проводниками произвольной формы, помещенными в однородную слабо проводящую среду:

$$C \frac{dU}{dt} = -I = -\frac{U}{R} \Rightarrow U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где характерное время убывания заряда $\tau = RC = \epsilon\sigma^{-1}$ определяется только свойствами проводящей среды и не зависит от геометрии конденсатора.

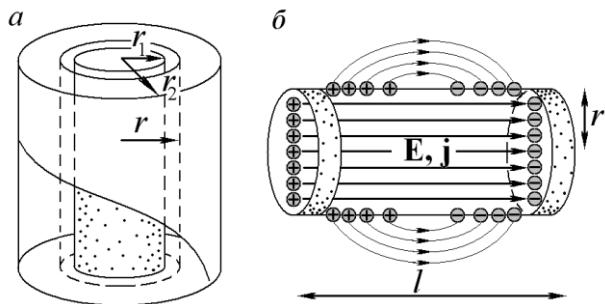


Рис. 7.2. Постоянный электрический ток в проводниках различной конфигурации:

- a* — к расчету электрического сопротивления между двумя соосно расположенными цилиндрическими поверхностями;
- б* — механизм образования однородного электрического поля в однородном цилиндре с малой удельной проводимостью, расположенном между кольцами из проводника с низким удельным сопротивлением.

7.3. Электрический ток в цепях с сосредоточенными параметрами

Практически важным является случай протекания электрического тока по объему однородного изотропного проводника в виде длинной и, возможно, изогнутой проволоки с постоянным поперечным сечением. В этом случае плотность тока во всем объеме проводника оказывается постоянной, что в соответствии с дифференциальной формой закона Ома (7.7) означает существование одинаковой по величине напряженности электрического поля во всем токоведущем объеме, в каждой точке направленного вдоль оси проводника.

Вопрос о механизме возникновения такого поля внутри проводников требует хотя бы краткого обсуждения. В качестве простой модели токоведущего провода удобно рассмотреть длинный цилиндр из однородного вещества, обладающего сравнительно низкой проводимостью, помещенный между двумя параллельными «заглушками» — дисками, выполненными из вещества с очень высокой удельной проводимостью, что позволяет считать их поверхности эквипотенциальными (рис. 7.2,б),

При подведении напряжения от внешнего источника эти диски соединяются вокруг себя (в том числе и внутри слабо проводящего объема) неоднородное электростатическое поле весьма сложной конфигурации. Под действием сил этого поля заряды в цилиндре приходят в движение, которое в первые моменты времени в общем случае направлено не вдоль его оси. Однако, достигнув границы проводящей среды, перемещаемые силами поля заряды оказываются не способными пересечь ее и остаются на поверхности проводника, постепенно заряжая ее. Накапливающийся поверхностный заряд создает собственное поле, искажающее исходное поле дисков. Очевидно, что накопление зарядов на поверхности происходит до тех пор, пока в объеме проводника не исчезнет направленная перпендикулярно оси составляющая поля.

После установления по всей длине проводника l однородного распределения электрического поля напряженностью $|E| = U/l$ сила тока, протекающего через каждое его поперечное сечение S , становится равной

$$I = jS = \sigma |E| S = \sigma \frac{S}{l} U .$$

Сравнение полученного выражения с законом Ома для пассивного участка цепи (7.8) приводит к хорошо известной формуле для электрического сопротивления однородного проводника:

$$R = \sigma^{-1} \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S}.$$

В большинстве реальных электрических схем проводники оказываются соединенными в достаточно сложные разветвленные цепи. При этом возникает естественный вопрос об универсальных методах расчета токов и потенциалов в произвольных точках таких цепей. Наиболее широко используемые методы опираются на *правила Кирхгофа*, являющиеся естественным следствием из ранее рассмотренных законов сохранения заряда и закона Ома.

Согласно первому правилу **алгебраическая сумма токов, втекающих в рассматриваемый узел схемы (и вытекающих из него), равна нулю**. При расчете втекающим в узел токам обычно приписывают положительные значения, вытекающим — отрицательные. В случаях сложных и разветвленных схем, в которых правильный выбор направлений токов в ветвях может вызывать затруднения, вполне допустимо их произвольное задание. Ошибки в выборе направлений токов будут приводить не более чем к появлению отрицательных значений для них.

Для обоснования сформулированного закона достаточно рассмотреть какой-либо узел разветвленной цепи и применить интегральную форму закона сохранения электрического заряда (7.3) к поверхности, окружающей этот узел (рис. 7.3,*a*). Поскольку движение зарядов возможно только во внутреннем объеме проводников, поверхностный интеграл от плотности тока сводится к сумме интегралов по их сечениям, каждый из которых согласно определению (7.2) дает ток, втекающий в узел или вытекающий из него. В случае если электрические заряды в элементах схемы не накапливаются, из (7.3) следует

$$\sum_k I_k = 0.$$

Для вывода второго правила Кирхгофа достаточно применить закон Ома для активного участка (7.9) к каждому из не содержащих узлов с ветвлениями участков цепи, составляющих произвольно выбираемый замкнутый контур (рис. 7.3,*b*). В результате сложения уравне-

ний полученной системы с учетом равенства нулю суммы разностей потенциалов по всем участкам замкнутого пути возникает соотношение

$$I_k R_k = \varphi_k - \varphi_{k+1} + E_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

показывающее, что **сумма падений напряжений на всех участках произвольного замкнутого контура цепи равно сумме ЭДС на всех участках того же контура:**

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k E_k.$$

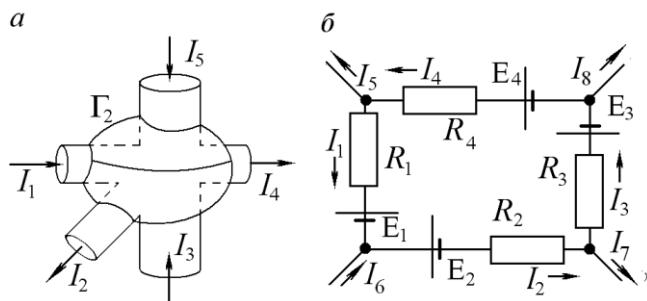


Рис. 7.3. К выводу правил Кирхгофа для расчетов сложных цепей постоянного тока:

- a* — равенство нулю алгебраической суммы втекающих в узел токов;
- б* — равенство суммы ЭДС суммарному падению напряжений на участках произвольного замкнутого контура.

Можно показать, что в случае произвольных цепей постоянного тока двух сформулированных правил всегда оказывается достаточно для составления системы независимых линейных уравнений для электрических параметров цепи в количестве, необходимом для ее полного расчета.

Пример. «Лестница» сопротивлений

Рассчитать входное сопротивление схемы, состоящей из бесконечного числа одинаковых ячеек, часть которой изображена на рис. 7.4,*a*.

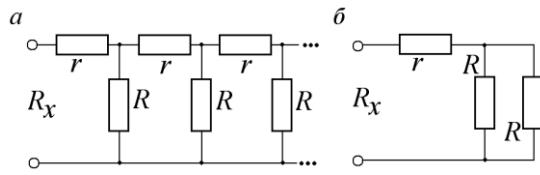


Рис. 7.4. Расчет входного сопротивления бесконечной «лестницы»:

а — постановка задачи;
б — эквивалентная схема.

Решение. Задача расчета входного сопротивления бесконечной «лестницы» решается очень просто, если учесть, что отсоединение одного первого звена (или любого конечного числа первых звеньев!) от бесконечной цепочки не приведет к изменению ее входного сопротивления. Это позволяет, вводя эквивалентный входному сопротивлению резистор R_x , перейти к упрощенной схеме цепочки. Использование общизвестных законов параллельного и последовательного соединения резисторов позволяет записать уравнение для искомого сопротивления

$$R_x = r + \frac{RR_x}{R + R_x},$$

из двух возможных решений которого следует выбрать соответствующее неотрицательному значению:

$$R_x = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR}.$$

7.4. Закон Джоуля—Ленца

В случае протекания постоянного электрического тока по однородному участку цепи скорость и, следовательно, кинетическая энергия носителей зарядов остаются неизменными. В соответствии с хо-

рошо известной из курса механики теоремой об изменении кинетической энергии это означает, что суммарная мощность всех сил, действующих на носитель заряда (электрических, сторонних и диссипативных), оказывается равной нулю:

$$(q\mathbf{E}, \mathbf{u}) + (\mathbf{F}, \mathbf{u}) - \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

В результате действия диссипативных сил развивающаяся силами электрического поля и сторонними силами мощность выделяется в проводнике в виде теплоты. Количество теплоты, выделяющееся в единице объема за единицу времени, может быть вычислено как произведение мощности, приходящейся на один носитель заряда, на концентрацию носителей:

$$\frac{dw_Q}{dt} = n\eta\mathbf{u}^2 = \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}}{q}, qn\mathbf{u} \right).$$

В соответствии с определением плотности тока (7.1) и законом Ома для активного участка (7.6) **выражение для количества теплоты, выделяющейся в единице объема проводника в единицу времени при протекании по нему постоянного тока, может быть выражено в виде произведения удельного сопротивления проводника на квадрат плотности протекающего через него тока:**

$$\frac{dw_Q}{dt} = (\sigma^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{j}) = \rho \mathbf{j}^2. \quad (7.10)$$

Полученное соотношение называют *законом Джоуля—Ленца*. В случае однородного проводника с однородно распределенной по его объему плотностью тока из (7.10) легко получить (сделайте это самостоятельно!) более привычное математическое выражение для закона Джоуля — Ленца в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} W_Q = I^2 R. \quad (7.11)$$

В частном случае пассивного участка цепи для вычисления тепловой мощности, выделяющейся при протекании по проводнику электрического тока, можно использовать эквивалентные (7.11) соотношения

$$\frac{d}{dt} W_Q = IU = \frac{U^2}{R}.$$

Соотношения, которые полезно помнить

$\mathbf{j} = qn\langle \mathbf{u} \rangle$	Определение плотности электрического тока
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{j})$	Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме
$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$	Закон Ома для пассивного участка в дифференциальной форме
$I = \frac{-\Delta\phi \pm E}{R}$	Закон Ома для активного участка цепи с сосредоточенными параметрами
$\frac{dw_Q}{dt} = (\hat{\sigma}^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{j})$	Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца
$\frac{dW_Q}{dt} = I^2 R$	Закон Джоуля—Ленца в интегральной форме для однородного проводника

Задачи для самостоятельного решения

- 7.1. Исходя из интегральной формы записи закона сохранения заряда (7.3) получите дифференциальную форму того же закона (7.4).
 Указание. Применить соотношение (7.3) к физически бесконечно малому объему в форме параллелепипеда.
- 7.2. Исходя из дифференциальной формы записи закона Джоуля—Ленца (7.10) получите его интегральный аналог (7.11).
- 7.3. N одинаковых элементов с известной ЭДС и внутренним сопротивлением r соединены в батарею: а) параллельно; б) последовательно. Батарея замкнута на внешнее сопротивление R . В какой из двух схем на внешнем сопротивлении выделится большее количество теплоты?
- 7.4. N одинаковых элементов с известным внутренним сопротивлением и ЭДС соединены в кольцо. Что покажет идеальный вольтметр, подключенный к n элементам этого кольца?
- 7.5. Рассчитать электрическое сопротивление одиночного шара, помещенного в слабо проводящую бесконечную среду, проводимость которой известна.

7.6. Рассчитать электрическое сопротивление между небольшим металлическим шариком радиусом r и бесконечной проводящей плоскостью, удаленной от шара на расстояние l , существенно превышающее его радиус. Все пространство между шаром и плоскостью заполнено однородным слабо проводящим диэлектриком с известными электрическими свойствами.

7.7. Из отрезков провода с сопротивлением r собрана очень большая сеть сопротивлений с квадратной ячейкой. Определить электрическое сопротивление между двумя соседними вершинами сети.

Указание. Воспользоваться свойством симметрии и принципом суперпозиции.

7.8. Электромотор подключен к источнику постоянного напряжения U . Через работающий электромотор протекает электрический ток I . Если вал электромотора закрепить (не давать ему вращаться), сила тока, протекающего через его обмотку, возрастет до $I_0 > I$. Какая механическая мощность развивается электромотором при работе?

Указание. При работе электромотора электрический ток протекает по проводнику, представляющему собой рамку, вращающуюся в специально создаваемом магнитном поле. При этом движущиеся по проводнику носители зарядов (электроны) испытывают действие дополнительных (сторонних) магнитных сил, пропорциональных скорости движения проводника в магнитном поле. Именно наличие этих сил объясняет наблюдаемое различие токов, протекающих через обмотку работающего и заторможенного мотора.

7.9. При включении в электрическую цепь нескольких параллельно соединенных резисторов на них возникает одинаковое падение напряжения. Как это согласуется с хорошо известным из бытовой практики заметным уменьшением накала электрических лампочек в случае параллельного подключения к одной розетке большого их числа? Ответ подтвердите расчетом.

Указание. Следует помнить, что и источник напряжения в осветительной сети, и провода, соединяющие его с розеткой, обладают малым, но конечным электрическим сопротивлением... Еще одна подсказка состоит в том, что попытки подключения к розетке очень большой нагрузки обычно заканчиваются «перегоранием пробок».

7.10. Какое количество теплоты выделится на сопротивлении R (электрическая схема приведена на рис. 7.5) после того, как во внут-

ренний объем конденсатора емкостью C был помещен диэлектрик с проницаемостью ϵ .

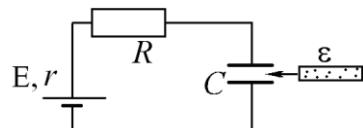
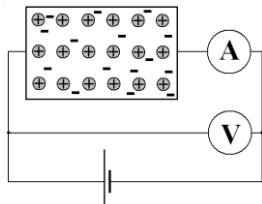


Рис. 7.5. Электрическая схема к задаче 7.10.

7.K1. Попытайтесь разработать оригинальную «программу-конструктор», позволяющую пользователю создавать на экране дисплея электрические цепи постоянного тока, содержащие источники ЭДС, резисторы, конденсаторы и соединительные провода и определять токи и напряжения на элементах схемы, используя «виртуальные» вольтметр и амперметр.

Указания. При составлении алгоритма расчета цепей целесообразно использовать правила Кирхгофа. При разработке современного и удобного интерфейса такой программы важно во время остановиться: подобное занятие весьма увлекательно, но непосредственно к физике не относится.

7.K2. Используя готовые пакеты моделирующих программ или собственные разработки, попытайтесь научиться рассчитывать электрическое сопротивление между двумя идеальными проводниками заданной формы, помещенными в вещество с малой электропроводностью.



Лекция 8

Электрический ток в различных средах

В реальных проводящих средах закон Ома выполняется в лучшем случае приближенно. Наряду с линейными проводящими средами существуют различные типы сред, для которых связь между силой тока и приложенным напряжением не может считаться даже приближенно линейной. Как линейные, так и нелинейные проводящие среды находят широкое практическое применение в электротехнике.

8.1. Классическая теория электропроводности металлов

Металлы являются материалами, наиболее часто используемыми в электротехнике в качестве проводников. Непротиворечивое описание механизма электропроводности металлов может быть дано только на языке квантовой механики. В рамках же классической теории может быть получено лишь весьма грубое качественное описание, которое при более детальном рассмотрении приводит к существенным трудностям.

Из многочисленных экспериментов известно, что электропроводность металла обусловлена наличием в его объеме свободных электронов. Для свободных электронов в металлах в рамках классического описания традиционно применяется модель идеального газа. При этом считается, что электроны совершают хаотическое тепловое движение, характерная скорость которого может быть грубо (не более чем по порядку величины) оценена исходя из статистики Максвелла:

$$u_T \approx \sqrt{\frac{kT}{m}}. \quad (8.1)$$

При возникновении в объеме проводника электрического поля (теорема о равенстве нулю электрического поля в проводнике выполняется только в электростатике, изучающей системы из неподвижных зарядов) электроны начинают испытывать действие электрических

сил, в результате чего на хаотическое движение зарядов накладывается направленное движение носителей с характерной скоростью

$$u \approx a\tau = \frac{q}{m} E\tau, \quad (8.2)$$

где q и m — соответственно заряд и масса электрона; τ — время его свободного пробега. Приведенные соотношения (8.1) и (8.2) носят оценочный характер, что делает бессмысленным включение в них каких-либо коэффициентов, по порядку величины близких к единице.

Количественные оценки в случае характерной для электротехнических задач силы токов показывают, что при комнатных температурах средняя скорость теплового движения значительно превосходит характерные скорости направленного движения. В результате время свободного пробега τ электрона в кристалле оценивается отношением длины его свободного пробега λ к средней скорости хаотического движения (8.1). В качестве оценки длины свободного пробега в рамках классической теории представляется разумным выбрать расстояние между узлами кристаллической решетки.

Подстановка найденного таким образом времени свободного пробега в качестве времени релаксации в выражение (7.6) приводит к классической оценке удельного сопротивления проводника

$$\rho = \frac{1}{nq^2} \sqrt{\frac{mkT}{\lambda}}.$$

При подстановке в полученное соотношение характерных численных значений **найденное значение удельного сопротивления по порядку величины согласуется с экспериментально измеряемыми значениями для металлов**. Более того, полученный результат предсказывает экспериментально наблюдаемый **эффект увеличения удельного сопротивления при нагревании проводников**. Причиной последнего очевидно является уменьшение времени свободного пробега электронов в кристаллической решетке вследствие увеличения скорости их теплового движения.

8.2. Трудности классической теории электропроводности металлов

Несмотря на кажущийся успех, классическая теория проводимости металлов имеет весьма существенные недостатки. К ним в первую

очередь следует отнести аномально малый (практически не регистрируемый в эксперименте) вклад «идеального газа» свободных электронов проводимости в молярную теплоемкость кристалла. В соответствии со статистикой Максвелла этот вклад должен составлять величину порядка $3R/2$, что резко расходится с данными измерений. Таким образом, при нагревании кристалл ведет себя так, будто подводимая извне энергия расходуется только на возбуждение колебаний кристаллической решетки, а электронный газ остается «вымороженным», т. е. энергия хаотического движения его частиц не изменяется. В этой связи кажется весьма спорной оправданность использования модели идеального газа для электронов в металле, с одной стороны, и теряет привлекательность рассмотренный выше механизм увеличения удельного сопротивления проводников с ростом температуры — с другой.

Кроме того, классическая теория предсказывает стремление к нулю удельного сопротивления всех без исключения металлов при приближении к нулю их абсолютной температуры. Большинство реальных проводников при приближении их температуры к абсолютному нулю сохраняет конечное удельное сопротивление. Некоторые же вещества, называемые *сверхпроводниками*, вопреки классической теории полностью перестают препятствовать прохождению через них электрического тока при весьма низких (порядка единиц градусов по абсолютной шкале), но отличных от абсолютного нуля температурах.

Классическая теория не может также дать удовлетворительного объяснения существования кристаллов с резко различающимися электрическими свойствами (проводников, диэлектриков, а также полупроводников, удельное сопротивление которых уменьшается с ростом температуры).

Наконец, при ближайшем рассмотрении оказывается не выдерживающей критики предложенная оценка длины свободного пробега электрона. Если причиной, вызывающей отклонение его движения от задаваемого полем направления, считать взаимодействия с ионами решетки, то характерные размеры области взаимодействий между разноименными зарядами должны быть весьма значительными и заведомо превышать период кристаллической решетки.

Таким образом, в классической теории проводимости возникают противоречия. Они вызваны тем, что лежащие в ее основе ньютоновские законы движения оказываются заведомо неприменимыми для описания поведения электронов в кристаллах. В рамках квантовомеханического описания показывается, что наличие у электронов волновых свойств открывает для небольшой их части возможность почти

беспрепятственного движения через периодическую структуру (кристаллическую решетку). Такому движению препятствуют нарушения симметрии: возникшие во время роста кристалла дислокации (нарушения периодичности решетки) и ухудшающие симметрию кристалла тепловые колебания узлов решетки. Эти причины приводят к возникновению постоянной и возрастающей с температурой составляющих сопротивления металла соответственно.

Температурные колебания кристаллической решетки (акустические волны) иногда оказывается удобным заменить на специфические *квазичастицы* — переносчики энергии акустических колебаний — *фононы*. Формально такая замена может быть произведена по аналогии с тем, как в оптике электромагнитным волнам были сопоставлены частицы света — *фотоны*. В рамках такой модели увеличение электрического сопротивления проводника при нагревании можно интерпретировать как результат возрастания числа столкновений электронов проводимости с фононами.

Теплоемкость «электронного газа» кристалла определяется только той незначительной частью его электронов, которая способна к движению в решетке и, следовательно, оказывается существенно меньше теплоемкости идеального газа.

8.3. Электрический ток в вакууме

Строго говоря, в абсолютном вакууме протекание электрического тока невозможно из-за отсутствия свободных носителей зарядов. Широко используемый термин подразумевает наличие в проводящем объеме свободных электронов, обычно возникающих в нем благодаря явлению *термоэмиссии* (вылет свободных электронов с поверхности некоторых веществ при их нагревании). Элементарная теория испускания электронов металлами может быть построена в рамках классического подхода, допускающего, что частицы электронного газа могут покидать объем проводника при наличии у них кинетической энергии, превосходящей *работу выхода* (энергию, затрачиваемую покидающим металл электроном на разрыв электростатических сил его притяжения к собственному изображению в проводнике). Помимо нагревания необходимую для вылета энергию электроны могут получить в результате поглощения кристаллами квантов света (*фотоэмиссия*) или при ударах о поверхность металла других частиц (ионная бомбардировка).

Простейшим примером технического устройства, в основе которого лежат процессы протекания тока в вакууме, является *вакуумный диод*. На рис. 8.1 приведены простейшая схема для изучения его электрических свойств и характерная *вольт-амперная характеристика*. Особенностью зависимостью $I(U)$ являются:

1. Явная асимметрия графика, отражающая практически одностороннюю электропроводимость диода. (Объясняется тем, что способностью к испусканию отрицательно заряженных носителей обладает только один электрод — нагреваемый катод.)
2. Наличие напряжения запирания U_3 , при превышении которого обратный ток через диод обращается в нуль. Величина запирающего потенциала определяется кинетической энергией вылетающих с катода электронов, которую, в свою очередь, можно оценить разностью тепловой энергии электронного газа (8.1) и *работы выхода* $A_{\text{вых}}$ (минимальной энергии, необходимой электрону для ухода с поверхности проводника):

$$-eU_3 \approx kT - A_{\text{вых}}.$$

3. Наличие тока насыщения. При больших разностях потенциалов между катодом и анодом электрический ток через диод определяется числом электронов, покидающих катод в единицу времени. Последнее определяется зависящей от температуры катода T функцией распределения по энергиям частиц электронного газа в проводнике, которая в грубом приближении может быть аппроксимирована статистикой Максвелла—Больцмана:

$$f(u_x) \sim \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2kT}\right).$$

В результате применения классической статистики к свободным электронам внутри проводника получаем следующую связь между током насыщения и температурой катода:

$$I_{\text{н}} \sim n_e \sim \exp\left(-\frac{A_{\text{вых}}}{kT}\right).$$

Несмотря на то, что в общем случае правильное описание поведения электронов может быть дано только на языке квантовой механики, удовлетворительная картина протекания тока в вакууме может быть

построена в рамках классической физики. Это связано с тем, что в предельном случае почти свободных частиц уравнения квантовой механики переходят в классические. В качестве примера может быть приведен расчет зависимости тока в диоде от приложенного к аноду напряжения. В области малых токов приближенно выполняется закон 3/2, согласно которому **в далекой от насыщения области ток через вакуумный диод пропорционален напряжению в степени 3/2**.

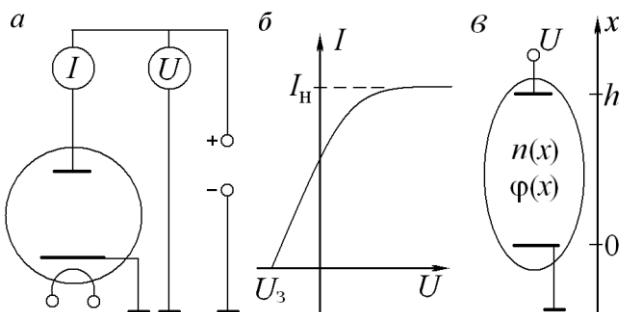


Рис. 8.1. Электрический ток в вакууме:
 а — вакуумный диод и простейшая схема для изучения его вольт-амперной характеристики;
 б — вольт-амперная характеристика вакуумного диода;
 в — к выводу закона 3/2.

Для обоснования закона 3/2 достаточно с помощью закона сохранения энергии в очевидном выражении для силы тока

$$I = q n(x) u(x) S, \quad (8.3)$$

протекающего через диод с поперечным сечением S , выразить скорость электронов $u(x)$ через потенциал в рассматриваемой точке

$$\frac{mu^2}{2} - q\phi(x) = 0. \quad (8.4)$$

Использованная связь между скоростью и потенциалом, строго говоря, выполняется в предположении малой начальной скорости электронов, покидающих катод. Таким образом, эффекты,ываемые при оценке величины напряжения запирания, при данном рассмотрении считаются малозначимыми.

Входящий в соотношение (8.4) электрический потенциал, в свою очередь, связан с концентрацией электронов уравнением Пуассона, которое в одномерном случае принимает вид

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -4\pi\rho = 4\pi qn(x). \quad (8.5)$$

Исключая из соотношений (8.3) – (8.5) неизвестные скорость и концентрацию электронов, легко получить дифференциальное уравнение для потенциала

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi I}{S} \sqrt{\frac{m}{2q}} \varphi^{-1/2}. \quad (8.6)$$

По форме уравнение (8.6) с точностью до замены ($\varphi \rightarrow r_x$, $r_x \rightarrow t$) аналогично математической записи второго закона Ньютона в случае одномерного движения в поле зависящих только от координат потенциальных сил:

$$\frac{d^2r_x}{dt^2} = f(r_x).$$

Подобно тому как в механике в аналогичной ситуации выводится закон сохранения механической энергии, из соотношения (8.6) может быть получено равенство

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{4\pi I}{S} \sqrt{\frac{m}{2q}} (2\varphi^{1/2}) + C, \quad C = 0. \quad (8.7)$$

Константа интегрирования C определяется исходя из требования равенства нулю напряженности электрического поля вблизи катода. Причиной, обеспечивающей обращение в нуль этого поля, является возникновение по мере накопления покидающих катод электронов пространственного заряда. Вблизи границы катода возникает динамическое равновесие между вылетающими (благодаря явлению термоэлектронной эмиссии) и возвращающимися в проводник электронами. В случае появления в прикатодной области отличного от нуля поля возникает нарушение равенства потоков, приводящее к необходимому для восстановления экранирования изменению плотности пространственного заряда.

В результате решения дифференциального уравнения (8.7) получаем искомую связь между током и анодным напряжением, подведенным к аноду вакуумного диода:

$$\frac{d\phi}{\phi^{1/4}} = 4 \sqrt{\frac{\pi I}{S}} \sqrt{\frac{m}{2q}} dx \Rightarrow I \sim \phi^{3/2}.$$

8.4. Электрический ток в газах

Для поддержания электрического тока в газе из электрически нейтральных атомов или молекул помимо электрического поля необходимо существование некоторой концентрации не связанных в нейтральные системы заряженных частиц — свободных электронов или ионов. Указанные носители зарядов обычно возникают в газах в результате разрушения (ионизации) составляющих его нейтральных частиц.

В простейшем случае атомарного газа находящиеся вблизи атомных ядер связанные электроны обладают отрицательной полной механической энергией, которая может принимать лишь дискретный набор значений. Принято говорить, что электроны в атоме могут находиться лишь на дискретных энергетических уровнях. В простейшем случае атомов водорода структура энергетических уровней выражается хорошо известным из квантовой механики соотношением

$$W_n = -\frac{W_0}{n^2}, \quad W_0 \approx 13,6 \text{ эВ}, \quad (8.8)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число, нумерующее энергетические уровни.

Из соотношения (8.8) следует, что густота энергетических уровней увеличивается по мере приближения к соответствующему граничу ионизации атома (уход электрона на бесконечно большое расстояние от ядра) нулевому значению энергии. В области положительных значений оказываются разрешенными любые значения энергии, что соответствует возможности свободного движения электрона вдали от атома с любой кинетической энергией. Для атомов, содержащих более одного электрона, структура энергетических уровней оказывается существенно более сложной, но в грубом приближении сохраняет общие черты схемы уровней водорода (рис. 8.2).

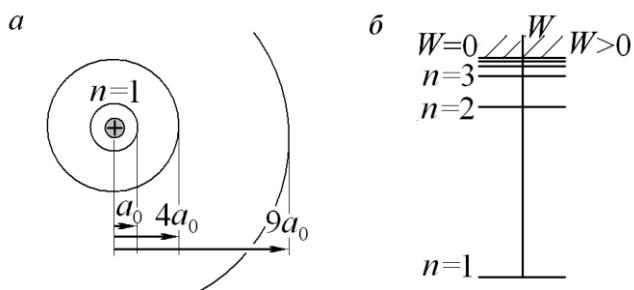


Рис. 8.2. Простейшие сведения об основных результатах квантовомеханического расчета атома водорода:
 а — радиусы первых трех стационарных орбит электрона в планетарной модели атома Резерфорда — Бора;
 б — примерная схема структуры энергетических уровней атома.

В большинстве случаев (газ при нормальных условиях, низкотемпературная плазма тлеющего разряда) средняя энергия теплового движения оказывается значительно меньше характерных расстояний между энергетическими уровнями атомов. В результате электроны занимают возможно более низкие уровни, для ионизации с которых требуется энергия порядка 10 эВ.

Несмотря на явную недостаточность тепловой энергии газа для ионизации его атомов (исключение составляет только так называемая *горячая плазма*), практически в любом газе всегда присутствуют в небольших количествах свободные электроны и ионы. Основным механизмом их возникновения является *фотоионизация*, т. е. процесс выбивания электрона из атома, вызванный поглощением обладающего необходимой энергией кванта жесткого излучения. «Поставщиком» таких квантов обычно оказываются космическое излучение либо радиоактивные примеси в материалах предметов, имеющих контакт с газом. По мере накопления электронов и ионизированных атомов усиливается обратный процесс рекомбинации, в результате которого электрон и ион превращаются в нейтральный атом, а излишки энергии выделяются в виде излучения. В отсутствие внешнего электрического поля концентрация свободных носителей определяется скоростями указанных процессов и в обычных условиях не достигает сколько-нибудь заметных значений.

После создания в газе сильного электрического поля ситуация кардинальным образом изменяется. Под действием электрических сил имеющиеся электроны и ионы начинают ускоряться и за время свободного пробега набирают некоторую кинетическую энергию. При последующих упругих столкновениях с нейтральными атомами обладающие примерно такой же массой разгоняемые полем ионы передают первым практически всю набранную ими энергию. Таким образом, вследствие эффективного охлаждения газом нейтральных частиц ускоряемые электрическим полем ионы не могут набрать достаточной для ионизации энергии.

Из-за того что масса электрона более чем на два порядка меньше массы атома, упругие электрон-атомные столкновения не сопровождаются сколько-нибудь заметным обменом энергией между частицами. В результате электроны (в отличие от ионов) в газе сохраняют способность накапливать энергию, полученную от внешнего поля. Как только эта энергия превзойдет пороговое значение энергии ионизации, возникает возможность ионизации атома электронным ударом (расчет вероятности такого процесса представляет собой достаточно сложную задачу квантовой механики). В результате столкновительной ионизации концентрация свободных электронов начинает быстро возрастать во времени, что, в свою очередь, приводит к дальнейшему увеличению скорости создания свободных электронов. В результате может возникнуть лавинообразно нарастающий процесс ионизации газа, приводящий к искровому разряду. Если же приводящие к уменьшению числа электронов в разряде процессы (рекомбинация, диффузия из разрядного промежутка и др.) окажутся достаточно эффективными и скорость гибели электронов станет равной скорости их рождения, реализуется стационарный режим горения разряда (тлеющий разряд, коронный разряд).

Приведенное качественное описание дает только весьма приближенную картину такого сложнейшего природного явления, как разряд в газе. Помимо рассмотренных процессов ионизации в плазме газового разряда существует множество других элементарных процессов, приводящих к переходам между возбужденными уровнями атомов, число которых оказывается бесконечно большим. Очевидно, что процессы ионизации с возбужденных уровней требуют меньшей энергии и, следовательно, протекают более эффективно, чем из основного. В результате процессы ступенчатой ионизации могут играть существенную роль в кинетике разряда. Для расчета суммарной скорости процессов, приводящих к рождению электронов, необходимо учитывать

гигантское множество элементарных процессов в плазме и знать концентрации всех типов возбужденных атомов, для которых выполняются дифференциальные уравнения баланса вида

$$\begin{aligned} \frac{dn_i(\mathbf{u}_i)}{dt} = & \\ = -(\nabla, \mathbf{j}_i) + \sum_{k,p} \int d\mathbf{u}_k d\mathbf{u}_p \sigma_{ki}^{(p)} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_k) n_k(\mathbf{u}_k) n_p(\mathbf{u}_p) - & \\ - \sum_{k,p} \int d\mathbf{u}_i \sigma_{ik}^{(p)} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_k) n_i(\mathbf{u}_i) n_p(\mathbf{u}_p) + \dots & \end{aligned}$$

В приведенной системе уравнений использованы следующие обозначения: $n_i(\mathbf{u}_i)$ — концентрация атомов, движущихся со скоростью \mathbf{u}_i и имеющих электрон, находящийся на энергетическом уровне с номером i ; $\sigma_{ki}^{(p)}$ — сечения элементарных процессов, приводящих к заселению или опустошению рассматриваемого энергетического уровня атомов в результате переходов $k \leftrightarrow i$, вызванных столкновениями с частицами (атомами, электронами, ионами и т. д.) в состоянии p . Расчет или экспериментальное измерение каждого из входящих в систему сечений обычно представляет собой нетривиальную задачу современной физики.

Пример. Простейшая модель счетчика Гейгера

Рассчитать силу электрического тока, протекающего через разрядную трубку длиной L с площадью поперечного сечения S , если известно, что внешнее ионизирующее излучение ежесекундно создает в единице объема трубы w электрон-ионных пар, а каждый свободный электрон на единице длины своего направленного движения создает в результате столкновений α новых пар. Скорость направленного дрейфа электронов считать постоянной по всей длине трубы.

Решение. В стационарном режиме горения разряда число электронов, возникающих в объеме трубы длиной dx с площадью поперечного сечения S за единицу времени должно равняться числу частиц, покидающих этот объем. Число возникающих в объеме электронов определяется процессами их перехода через границу x , фотоионизацией и рождением электронов при столкновениях. Убыль электро-

нов в объеме определяется числом частиц, пересекающих границу $x+\delta x$ (рис. 8.3).

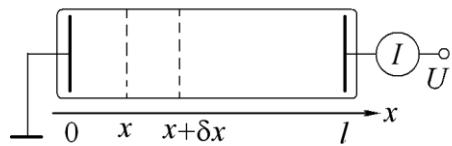


Рис. 8.3. Модель простейшего счетчика Гейгера.

Уравнение баланса, выражающее закон сохранения числа электронов, имеет вид

$$n(x)u\delta t S + w\delta t S\delta x + \alpha n(x)u\delta t S\delta x = n(x + \delta x)u\delta t S,$$

где u — скорость дрейфа электронов в газе, заполняющем разрядный промежуток. При неограниченном уменьшении толщины рассматриваемого слоя δx уравнение баланса для числа электронов приводит к линейному дифференциальному уравнению для их концентрации $n(x)$:

$$\frac{dn(x)}{dx} = \alpha n(x) + \frac{w}{u}.$$

Решение этого уравнения стандартными методами с учетом равенства нулю концентрации электронов вблизи катода имеет экспоненциальный вид

$$n(L) = \frac{w}{\alpha u} (\exp(\alpha L) - 1).$$

Из закона сохранения заряда следует, что полный электрический ток, протекающий через любое сечение трубы в стационарном режиме горения разряда, постоянен. В области анода полный ток обусловлен движением электронов и, следовательно, может быть рассчитан по найденной электронной концентрации

$$I = qnuS = \frac{qwS}{\alpha} (\exp(\alpha L) - 1).$$

Полученное выражение для полного тока показывает, что он весьма чувствителен к процессам фотоионизации, что позволяет использовать

вать описанное устройство в качестве детектора ионизирующего излучения.

Конечное выражение для тока газового разряда оказалось не зависящим от приложенного к трубке напряжения. Объяснение несколько неожиданного результата кроется в заведомо упрощенной формулировке задачи: заданная в условии «константа» столкновительной ионизации α в реальности является функцией скорости и, следовательно, весьма сильно зависит от напряженности электрического поля в газе.

8.5. Электрический ток в полупроводниках.

Элементы зонной теории

В заключение обзора механизмов электропроводности различных сред представляется необходимым дать краткое и не претендующее на какую-либо строгость описание на качественном уровне явлений, возникающих при протекании электрического тока в полупроводниках. Соответствующее современным представлениям изложение вопросов, связанных с электропроводностью кристаллов, в том числе полупроводников, возможно только на основе аппарата квантовой механики и не может быть реализовано в рамках настоящего курса.

Как уже отмечалось, в изолированном атоме связанные электроны могут обладать лишь дискретным набором разрешенных энергий. Этот набор уровней бесконечен, но ограничен нижним состоянием $1s$, соответствующим наиболее компактному расположению электронного облака вблизи ядра. Многоэлектронный атом, как и любая другая физическая система, с наибольшей вероятностью должен находиться в состоянии с минимальной энергией. Таким образом, электроны при низких температурах стремятся занять наиболее низко расположенные уровни.

В соответствии со сказанным в простейшем случае атома водорода единственный электрон обычно занимает указанное состояние с минимальной энергией. В многоэлектронных атомах в силу *принципа Паули*, запрещающего нахождение двух электронов в одном состоянии, на нижнем ($1s$) уровне может оказаться не более двух электронов, различающихся проекциями их спинов. Остальные электроны последовательно занимают попарно все более высокие состояния, отличающиеся энергией, орбитальным моментом и проекцией последнего на ось квантования (рис. 8.4,*a*). При этом в s -состояниях

может находиться не более двух электронов, в p -состояниях — не более шести, в d -состояниях — не более десяти и т. д.

При сближении двух атомов образуется единая система, структура энергетических уровней которой в целом повторяет картину для обособленного атома. Отличие состоит в том, что каждый уровень расщепляется на два близко расположенных подуровня: один из подуровней незначительно «опускается», другой — «приподнимается» на такую же «высоту» по шкале энергий. В результате всем электронам из нижних заполненных уровней находится место в соответствующей этому уровню паре близкорасположенных состояний (рис. 8.4, δ), требования принципа Паули не нарушаются, а суммарная энергия группы электронов с одноименных уровней двух атомов остается прежней.

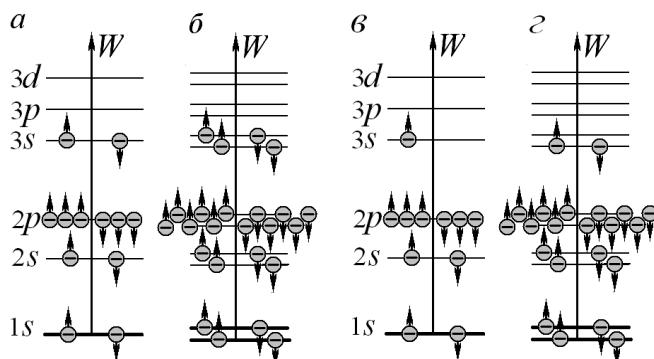


Рис. 8.4. Механизм образования химической связи:
 a — распределение электронов по энергетическим уровням в одиничном атоме второй группы;
 $б$ — распределение электронов по энергетическим уровням в системе из двух близко расположенных атомов второй группы (химическая связь не образуется);
 $в$ — распределение электронов по энергетическим уровням в одиничном атоме первой группы;
 $г$ — распределение электронов по энергетическим уровням в системе из двух близко расположенных атомов первой группы, спины внешних электронов которых противоположны (возникает химическая связь).

Менее очевидная ситуация возникает на самом верхнем уровне, содержащем электроны (*уровень Ферми*). Этот уровень в зависимости

от полного числа электронов в атоме может быть изначально заполненным или содержать вакансию. В качестве примера на рис. 8.4,*a* изображена схема расположения электронов на уровнях атомов с заполняемой 3*s*-оболочкой. В случае сближения щелочноземельных атомов (рис. 8.4,*a*) возникающая при расщеплении пара уровней оказывается полностью заселенной, и никакого выигрыша в энергии не возникает: четыре вакантных состояния оказываются занятыми электронами с двух верхних заполненных уровней этих атомов (рис. 8.4,*b*). В случае же атомов щелочных металлов (рис. 8.4,*c*) верхний подуровень может оказаться незанятым: оба внешних электрона (разумеется, при условии противоположной направленности их спинов) занимают нижний подуровень (рис. 8.4,*e*). При этом энергия каждого из электронов несколько уменьшается, что снижает энергию системы в целом. Таким образом, двум атомам оказывается энергетически выгодным находиться вблизи друг друга, образуя устойчивую конфигурацию — двухатомную молекулу. В химии описанный механизм получил название *ковалентной неполярной связи*.

При образовании кристаллов (связанных систем с очень большим числом регулярно расположенных одинаковых атомов) происходит аналогичное рассмотренному расщепление исходных атомных уровней. В отличие от двухатомной молекулы число возникающих подуровней оказывается равным числу неразличимых (вследствие симметрии кристаллической решетки) атомов, образующих кристалл. В макроскопических кристаллах подуровней оказывается так много, что они практически сливаются в сплошную энергетическую зону, в которой разрешенные значения энергии принимают не дискретный, а непрерывный набор значений энергий. Таким образом, разрешенные значения энергии в кристалле представляют собой множество непрерывно заполненных энергетических интервалов (*разрешенных зон*), разделенных интервалами значений запрещенных для электронов энергий (*запрещенных зон*). Каждая разрешенная зона соответствует одиночному энергетическому уровню изолированного атома.

Если до объединения атомов в кристалл все непустые энергетические уровни содержат максимально возможное число электронов (рис. 8.5,*a*), все возникающие энергетические зоны в кристалле оказываются либо полностью заселенными, либо пустыми (рис. 8.5,*b*). Находящиеся в заполненных зонах электроны не могут изменить своей энергии на небольшую величину под действием внешнего электрического поля или теплового движения. В результате электроны оказываются не способными ни начать необходимое для возникновения

тока направленное движение, ни внести вклад в теплоемкость системы. Описанные кристаллы обладают *диэлектрическими* свойствами.

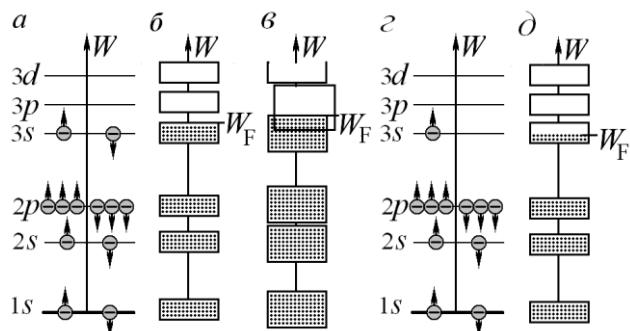


Рис. 8.5. Диэлектрические и проводящие кристаллы с позиций зонной теории:

- a* — схема заполнения электронами энергетических уровней атомов второй группы;
- б* — заполнение разрешенных энергетических зон кристалла, проявляющего диэлектрические свойства;
- в* — схема, поясняющая «случайное» возникновение электропроводности у щелочных металлов;
- г* — схема заполнения электронами энергетических уровней атомов щелочных металлов;
- д* — заполнение разрешенных энергетических зон кристалла, проявляющего свойства металла.

Иная ситуация возникает при объединении в кристалл атомов с не полностью заселенным верхним уровнем (рис. 8.5,*г*). Возникающая из него энергетическая зона при абсолютном нуле температур оказывается заполненной не до конца (рис. 8.5,*д*). Максимальное значение энергии электронов в такой зоне называют *границей Ферми* (W_F). Над границей Ферми имеется множество свободных состояний, в которые электроны могут легко переходить, лишь незначительно увеличивая свою энергию. Такое увеличение энергии в классической физике трактуется как результат направленного движения электрона под действием сил внешнего электрического поля. В результате кристалл будет проводить электрический ток. Теплоемкость электронного газа в проводящем кристалле при комнатных температурах оказывается аномально низкой из-за того, что переходы на верхние энергетические подуровни может совершать только небольшая группа частиц, находящихся вблизи границы Ферми.

дящихся у самой границы Ферми. При повышении температуры кристалла вклад электронов в теплоемкость возрастает.

Во избежание недоразумений необходимо отметить, что в реальности кристаллы, составленные из элементов второй группы, оказываются не диэлектриками, а проводниками. Указанное противоречие не опровергает зонной теории проводимости, а является результатом случайного стечения обстоятельств. Из-за близкого расположения s и p исходных состояний атомов щелочноземельных элементов соответствующие им заполненная и пустая зоны перекрываются (рис. 8.5,в). В результате электроны из заполненной зоны могут легко переходить в свободные состояния следующей зоны, обеспечивая тем самым электропроводность кристалла.

Полупроводники в известном смысле занимают промежуточное положение между традиционными проводниками и диэлектриками. С точки зрения зонной теории, *собственные полупроводники* (рис. 8.6,а) могут рассматриваться как диэлектрики с очень узкой запрещенной зоной. Последняя заполненная зона в полупроводниках носит название *валентной зоны*, а следующая за ней пустая зона — *зоны проводимости*.

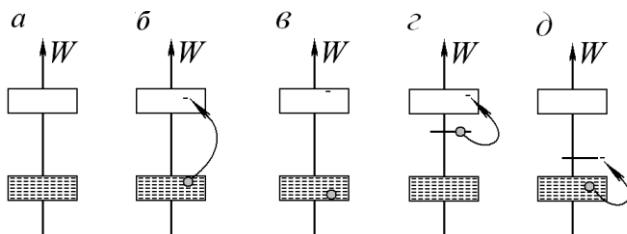


Рис. 8.6. Электрический ток в полупроводниках:
 а — собственный проводник при низких температурах;
 б — возникновение носителей зарядов в собственном полупроводнике;
 в — разгон электрическим полем электрона и дырки в собственном полупроводнике;
 г, д — образование основных носителей (электронов и дырок) в примесном полупроводнике с донорной и акцепторной примесями соответственно.

Наиболее распространенными представителями собственных полупроводников являются кристаллы кремния и германия. При сверхнизких температурах такие кристаллы проявляют диэлектрические

свойства, поскольку электроны оказываются не способными преодолеть узкую запрещенную зону, отделяющую их от зоны проводимости. Однако уже при комнатных температурах энергии оказывается достаточно для того, чтобы указанный энергетический барьер оказался преодолимым для электронов. Другим механизмом, способным сообщить электрону необходимую для перехода в зону проводимости энергию, является поглощение света.

В результате перехода электрона через запрещенную зону в зоне проводимости появляются **электроны**, а в валентной зоне освобождается вакантное место — **дырка** (рис. 8.6,б). Перешедшие в зону проводимости электроны приобретают возможность непрерывно изменять свою энергию, т. е. ускоряться электрическим полем, и, следовательно, переносить ток. Находящаяся в валентной зоне дырка также имеет возможность изменять собственную энергию, перемещаясь по своей зоне вследствие переходов в нее электронов из близлежащих состояний. При этом увеличение энергии системы сопровождается перемещением дырки вниз по зоне, ибо именно такое изменение сопровождается увеличением энергии реальных частиц — электронов (рис. 8.6,в). Поскольку дырка представляет собой место, где отрицательно заряженный электрон отсутствует, ей удобно приписать положительный элементарный заряд.

Рассмотренные дырки весьма похожи на реальные частицы, но на самом деле служат не более чем вспомогательными объектами — квазичастицами, вводимыми для более удобного описания коллективного поведения большого числа электронов (подобно тому как процесс всплыивания пузырька воздуха в сосуде с водой рассматривать удобнее, чем процесс весьма сложного движения вниз множества частичек воды). В связи с этим дыркам нередко приходится приписывать весьма экзотические свойства (например, эффективная масса дырки не только не всегда оказывается положительной, а нередко представляет собой тензорную величину).

Следует учитывать, что электроны проводимости, строго говоря, так же как фононы и дырки, являются квазичастицами, вводимыми для удобства построения теории твердого тела. С позиций квантовой механики все электроны кристалла являются принципиально неразличимыми, что делает бессмысленными попытки ответа на вопрос, какой именно электрон перешел в зону проводимости. **Электрический ток в кристалле обусловлен весьма сложным поведением всех без исключения имеющихся в нем электронов.** Однако описывающие это поведение уравнения обнаруживают близкое сходство с уравнени-

ями движения лишь очень небольшого числа заряженных частиц — электронов и дырок.

Электрон и дырка способны к *рекомбинации* (взаимному уничтожению), которая сопровождается выделением энергии, равной расстоянию между ними на диаграмме энергетических зон. Иногда при сближении электрона и дырки рекомбинации не происходит, а возникает относительно устойчивая связанная система — *экзитон*, представляющая собой аналог атома водорода, в котором роль ядра играет положительно заряженная дырка, а роль валентного электрона — электрон проводимости. Разумеется, из-за близости величин масс электрона и дырки обе частицы в экзитоне не могут быть неподвижными и врачаются вокруг общего центра масс.

Наряду с полупроводниками с собственной проводимостью существуют *примесные полупроводники*, обладающие заметной проводимостью при более низких, чем в случае собственных полупроводников, температурах. Последние получают искусственным внедрением в кристаллы собственных полупроводников (состоящих из атомов четырехвалентных элементов) примесей из трех или пяти валентных атомов (донорные и акцепторные примеси соответственно). Из-за малых концентраций атомов примесей они могут рассматриваться независимо друг от друга. Энергетические уровни атомов примесей в зонах не расщепляются. В результате оказывающиеся на примесных уровнях электроны и дырки не могут изменять своей энергии и перемещаться в пространстве. С точки зрения энергетической схемы, не участвующий в образовании валентных связей пятый электрон атома донорной примеси оказывается на уровне в непосредственной близости от зоны проводимости (рис. 8.6,*г*) и легко переходит в эту зону. Образующаяся при этом дырка оказывается локализованной вблизи атома примеси. Таким образом, в примесных полупроводниках донорного типа реализуется преимущественно электронный характер проводимости. В полупроводниках с акцепторной примесью ситуация оказывается прямо противоположной (рис. 8.6,*д*). Атом третьей группы захватывает недостающий для образования химической связи электрон у четырехвалентных соседей. В результате в валентной зоне возникают подвижные дырки, являющиеся носителями зарядов в таких системах.

При создании в кремниевом или германиевом кристалле граничащих друг с другом областей с *p*- и *n*-проводимостью в зоне их контакта возникает узкий пограничный слой, так называемый *p-n-p переход* (рис. 8.7,*а*). Из-за диффузии основных носителей (подвижных элек-

тронов и дырок) через рассматриваемую границу происходит их проникновение в области с противоположным типом проводимости с последующей рекомбинацией. В результате область $p-n$ -перехода оказывается обедненной основными носителями и, следовательно, обладает пониженной электропроводностью.

Процесс диффузии основных носителей через границу областей с разными типами проводимости сопровождается накапливанием на границах $p-n$ -перехода объемных зарядов, электрическое поле которых препятствует дальнейшей диффузии. В результате на $p-n$ -переходе устанавливается запирающая разность потенциалов, прерывающая диффузионный ток основных носителей (рис. 8.7, б).

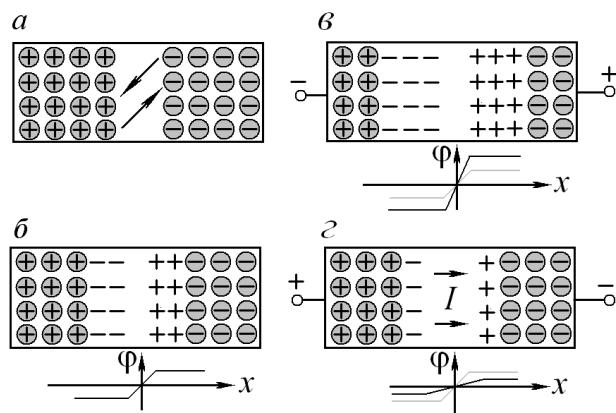


Рис. 8.7. $p-n$ -переход и его свойства:

- а* — диффузия основных носителей (дырки слева и электроны справа) через границу раздела областей с разными типами примесной (соответственно дырочной и электронной) проводимости;
- б* — потенциальный барьер, запирающий $p-n$ -переход по току основных носителей;
- в* — результат подачи на $p-n$ -переход внешнего запирающего напряжения в обратном направлении (скачок потенциала на переходе увеличивается);
- г* — результат подачи на $p-n$ -переход внешнего напряжения в прямом направлении (скачок потенциала на переходе уменьшается, что обеспечивает возможность протекания через переход тока основных носителей).

При подведении внешнего напряжения к $p-n$ -переходу оно в соответствии с законом Ома почти полностью оказывается приложенным к участку с пониженной электропроводностью, на котором уже существует запирающая разность потенциалов. В зависимости от полярности внешнее напряжение либо еще сильнее запирает $p-n$ -переход (рис. 8.7,в), либо уменьшает исходную запирающую разность потенциалов, обеспечивая возможность протекания тока основных носителей (рис. 8.7,г). В результате $p-n$ -переход оказывается способным пропускать электрический ток лишь в одном направлении, что приводит к резко нелинейному характеру его вольт-амперной характеристики. Это замечательное свойство $p-n$ -переходов открывает широкие возможности их практического использования в качестве выпрямителей и нелинейных элементов разнообразных электронных устройств.

Два $p-n$ -перехода, разделенных узким полупроводниковым промежутком с примесной проводимостью, образуют *транзистор* — простейшую полупроводниковую структуру, обладающую усиительными свойствами (рис. 8.8,а).

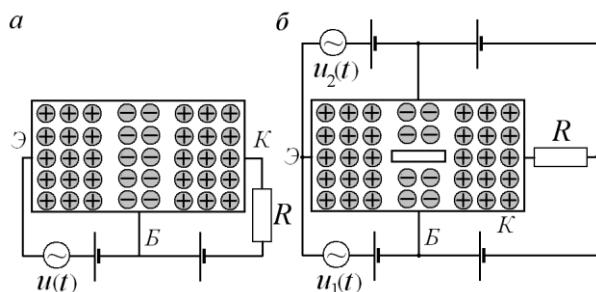


Рис. 8.8. Полупроводниковый транзистор и его основные элементы (Э — эмиттер, Б — база, К — коллектор):
 а — идея использования $p-n-p$ -транзистора в качестве усилителя тока;
 б — одно из возможных электронных устройств, осуществляющих логическую операцию ИЛИ.

Идея работы простейшего транзисторного усилителя состоит в следующем. На $p-n$ -переход, разделяющий эмиттер и базу, подается изменяющееся во времени управляющее напряжение, в результате чего поступающий на базу ток изменяется во времени. Транзистор изготавливается так, что расположенная между двумя $p-n$ -переходами

область с примесной проводимостью (база) оказывается весьма узкой. Поэтому попадающие в нее с эмиттерного перехода носители с очень большой вероятностью достигают второго $p-n$ -перехода (база–коллектор), который поддерживается в закрытом состоянии для основных носителей базы и, следовательно, открыт для пришедших с эмиттера частиц. В результате протекающий через сопротивление R в цепи коллектора ток может превосходить ток в цепи базы в несколько сотен и даже тысяч раз, что и делает возможным использование описанного устройства в качестве усилителя. Совершенно аналогично работают транзисторы $n-p-n$ -типа.

На базе полупроводников с примесной проводимостью могут быть созданы устройства, способные выполнять простейшие логические операции. Например, рис. 8.8,*б* иллюстрирует идею простейшего устройства, осуществляющего операцию логического сложения ИЛИ: сигнал с коллектора будет возникать на сопротивлении R во всех случаях, когда хотя бы на один из входов устройства будет подано отпирающее напряжение. Разумеется, в реальных электронных устройствах используются более удобные в эксплуатации схемы, которые обычно оказываются существенно более сложными, чем приведенные здесь только для пояснения идеи использования полупроводниковых приборов.

Идея размещения в одной кристаллической матрице множества полупроводниковых структур, внедряемых в четырехвалентный кристалл в процессе его бомбардировки атомами примеси, оказалась весьма плодотворной и открыла фантастические перспективы для создания чрезвычайно компактных и одновременно сложных электронных схем, существование которых было принципиально невозможно в дополупроводниковую эру.

Задачи для самостоятельного решения

- 8.1. В одной из первых работоспособных моделей аксонов было принято, что нервное волокно представляет собой тонкостенную трубку из плохо проводящего материала (мембранны), внутри которой находится хорошо проводящий электролит (смесь анионов хлора и катионов калия). Аксон помещен в физиологический раствор, обладающий высокой удельной проводимостью. Нервный импульс представляет собой создаваемую клеткой разность потенциалов между проводящими средами внутри и вне аксона.

8.2. Оцените величину входного сопротивления нервного волокна, если его длина столь велика, что ее можно считать бесконечно большой. Все геометрические размеры и проводимости материала считать заданными.

Указание. В первом приближении аксон можно считать имеющим бесконечную длину. Для вычисления его сопротивления мысленно разбить аксон на бесконечно малые секции, каждая из которых эквивалентна звену «бесконечной лестницы сопротивлений».

8.3. Для определения качества расплава кремния, используемого для создания полупроводниковых матриц, иногда применяется следующий метод. На достаточно толстый плоский слой диэлектрика (его проводимость практически равна нулю) наносится тонкий слой исследуемого вещества, толщина которого известна. Полученная система «прокалывается» двумя проводящими зондами (цилиндрическими проводниками большой длины, ориентированными перпендикулярно поверхностям диэлектриков). Радиусы зондов и расстояние между их осями известны. Определить электрическое сопротивление между зондами, если их собственная проводимость очень велика. Постарайтесь решить задачу точно!

8.4. Хорошо известно, что Земля является достаточно хорошим проводником. Еще лучшим проводником является ионосфера — слой практически полностью ионизованного газа, находящегося на высоте примерно 50 км над поверхностью Земли. Весьма удивительный факт состоит в том, что между ионосферой и поверхностью Земли существует гигантская (порядка 5000000 В) разность потенциалов (механизмом, подзаряжающим «небо» являются грозы). Оцените полный ток, протекающий с «неба на Землю» и выделяющуюся при этом тепловую мощность.

8.K1. Создайте простейшую компьютерную модель проводника, имеющего форму шара. Внутри шара равномерно распределен положительный заряд («кристаллическая решетка») и случайным образом расположены отрицательно заряженные частицы («электроны»), способные двигаться, взаимодействуя друг с другом и «решеткой» с помощью электростатических сил и испытывая действие сил вязкого трения (зависят от скорости линейно). Исследуйте поведение созданного Вами модельного проводника во внешнем электрическом поле и в случае сообщения ему дополнительного электрического заряда. Соответствует ли

численное решение, найденное для построенной модели проводящего шара, ранее полученным решениям задач электростатики проводников?

- 8.K2. Используйте сформулированные в задаче 8.K1 идеи для создания компьютерной модели пассивного участка цепи в виде проводника, имеющего форму вытянутого цилиндра, между торцами которого течет постоянный электрический ток. Какие дополнительные элементы следует ввести в модель для источника ЭДС? Пригодна ли созданная Вами модель проводника для демонстрации законов Ома и Джоуля—Ленца?
- 8.K3. Используя профессиональные пакеты компьютерного моделирования, изучите некоторые особенности протекания постоянного электрического тока по П-образному проводнику, удельная проводимость ρ^{-1} «перекладины» которого существенно ниже проводимости σ расположенных параллельно токоведущих частей, потенциалы торцов которых различны и поддерживаются постоянными (рис. 8.9). На первом этапе рассчитайте конфигурацию электрического поля в случае непроводящей «перекладины» ($\rho \rightarrow \infty$) и убедитесь, что линии электрического поля в этом случае не направлены вдоль ее оси.

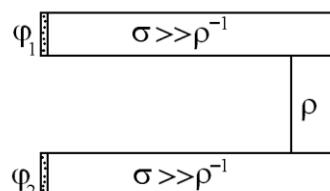
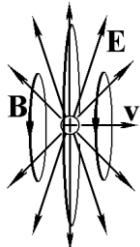


Рис. 8.9. П-образный проводник, на каждом участке которого электрический ток должен быть направлен параллельно его оси.

Как это согласуется с хорошо известным фактом, что протекающий с соответствием с законом Ома вдоль линий электрического поля ток направлен по оси проводника? Задайте конечное значение удельного сопротивления материала перекладины и постарайтесь получить ответ на поставленный вопрос, анализируя результаты компьютерных экспериментов.

Лекция 9



Электрическое поле равномерно движущегося заряда

Задачи о расчете взаимодействий между равномерно движущимися электрическими зарядами могут быть сведены к электростатическим путем перехода к новой инерциальной системе отсчета, относительно которой эти заряды находятся в состоянии покоя. Возникающие при обратном переходе к исходной системе отсчета изменения сил в классической электродинамике традиционно учитывают введением дополнительных магнитных взаимодействий.

9.1. Инвариантность электрического заряда

Задача расчета силы, действующей на равномерно движущийся заряд со стороны другого движущегося заряда, может быть сведена к задачам электростатики и преобразования электрических сил и полей при переходах из одной инерциальной системы в другую. На первом этапе вычисляется электростатическое поле, создаваемое одним из зарядов в той системе отсчета, где он поконится, после чего осуществляется переход к новой системе отсчета, в которой в состоянии покоя находится другой участвующий во взаимодействии заряд.

Второй этап состоит в вычислении силы, действующей на неподвижный заряд, с последующим переходом к системе отсчета, связанной с наблюдателем. Корректное преобразование физических величин для таких переходов должно осуществляться с учетом требований специальной теории относительности. Преобразование длин отрезков и интервалов времени выполняется в соответствии с преобразованиями Лоренца с помощью хорошо известных соотношений:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad L'_\parallel = L_\parallel \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad L'_\perp = L_\perp. \quad (9.1)$$

В приведенных формулах индексом «0» отмечены величины, регистрируемые неподвижным относительно рассматриваемой физической системы наблюдателем, штрихом — величины, регистрируемые наблюдателем, относительно которого рассматриваемая система движется со скоростью u . Знаками « \parallel » и « \perp » отмечены длины отрезков, ориентированных вдоль и поперек направления относительного движения соответственно (рис. 9.1). Аналогичные соотношения для преобразований продольной и поперечной составляющих трехмерных сил могут быть легко выведены, например, для частного случая торможения тела под действием сил сухого трения или исходя из преобразований Лоренца для четырехвектора силы:

$$f'_\parallel = f_\parallel, \quad f'_\perp = f_\perp \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (9.2)$$

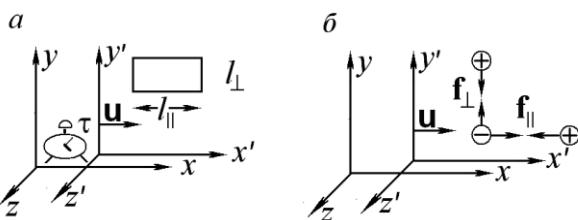


Рис. 9.1. К выводу релятивистских законов преобразования механических величин:
 a — преобразование длин отрезков и интервалов времени;
 b — преобразование компонент вектора силы.

Для получения релятивистских соотношений для преобразования полей помимо правил (9.1) и (9.2) необходим закон преобразования величины электрического заряда. Вид этого закона существенно зависит от того, каким образом определяется величина заряда в случае его движения (при изучении электростатики рассматривались только покоящиеся заряды). При этом систему определений разумно выбирать таким образом, чтобы построенная на них теория имела наиболее простой и элегантный вид.

Величина заряда в электростатике определялась на основании выражения для силы взаимодействия между одинаковыми покоящимися заряженными частицами. При этом подразумевалось, что электростатическое взаимодействие определяется только свойствами частиц и

расстоянием между ними, но не зависит от пространственной ориентации рассматриваемой пары зарядов. В случае движения измеряемого заряда в пространстве появляется выделенное направление, задаваемое его скоростью, и первоначальное предположение об изотропном характере взаимодействия становится необоснованным.

Удобно использовать следующую процедуру определения величины движущегося заряда, находящегося в заданной точке его траектории (рис. 9.2).

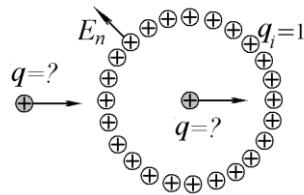


Рис. 9.2. Определение величины движущегося заряда.

Точка, в которой выполняется измерение, предварительно окружается неподвижной сферой единичного радиуса, на поверхности которой располагаются единичные заряды (понятие величины покоящегося заряда было введено в электростатике). В момент прохождения измеряемого заряда через центр неподвижной сферы (с точки зрения всех неподвижных наблюдателей, находящихся у единичных зарядов, это событие происходит в один и тот же момент) измеряются нормальные к ее поверхности составляющие силы, действующие на все пробные заряды (т. е. нормальные компоненты электрического поля). **Величина движущегося заряда определяется средним по поверхности сферы значением нормальной составляющей создаваемого им поля**

$$Q \equiv \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} E_n dS . \quad (9.3)$$

Сформулированное определение в частном случае покоящегося заряда согласуется с доказанной в электростатике теоремой Гаусса о потоке вектора \mathbf{E} через сферическую поверхность и, следовательно, с прежним определением величины покоящегося заряда.

Опыт показывает, что величина движущегося заряда, определенная в соответствии с (9.3), оказывается не зависящей от формы гауссовой поверхности и скорости движения самого заряда. О последнем из указанных свойств говорят как о релятивистской инвариантности электрического заряда.

9.2. Поле движущегося заряда

Соотношения, связывающие электрическое поле, создаваемое равномерно движущимся распределением зарядов, с полем аналогичного статического распределения, могут быть легко получены для частного случая равномерно заряженной бесконечной плоскости (рис. 9.3). В случае неподвижной плоскости единственным возможным из соображений симметрии направлением для вектора \mathbf{E} является нормаль к ее поверхности. Кроме того, соображения симметрии приводят к выводу об одинаковости величины напряженности поля во всех точках пространства, равноудаленных от заряженной плоскости (рис. 9.3, а). Использование теоремы Гаусса в этом случае приводит к известному из электростатики выражению

$$2E_n S = 4\pi\sigma S \Rightarrow E_n = 2\pi\sigma.$$

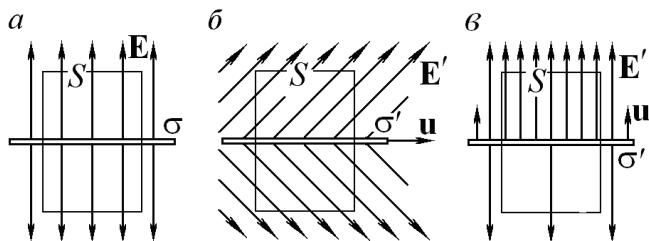


Рис. 9.3. К выводу релятивистского закона преобразования пространственно однородных электростатических полей при переходе к движущейся системе отсчета:
 а — поле неподвижной равномерно заряженной плоскости;
 б — поле плоскости, движущейся параллельно своей поверхности;
 в — поле плоскости, движущейся перпендикулярно своей поверхности.

В случае движущейся параллельно самой себе плоскости нормаль к ее поверхности перестает быть единственным выделенным направлением. Допустимыми оказываются любые конфигурации поля, инвариантные относительно произвольного смещения наблюдателя в параллельном плоскости направлении (рис. 9.3,б). Применяя теорему Гаусса к неподвижному цилиндрическому объему, через который движется плоскость, легко связать нормальную составляющую поля с наблюдаемой плотностью заряда движущейся плоскости:

$$2E'_n S = 4\pi\sigma' S \Rightarrow E'_n = 2\pi\sigma'.$$

В движущейся системе отсчета поверхностная плотность электрического заряда увеличивается, поскольку определяется отношением инвариантной величины заряда q к площади, размеры которой в соответствии с (9.1) уменьшаются. В результате поперечная движению заряженной плоскости компонента электрического поля увеличивается по сравнению со значением, регистрируемым неподвижным относительно плоскости наблюдателем:

$$\frac{E'_n}{E_n} = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (9.4)$$

Аналогичное рассмотрение для плоскости, равномерно движущейся вдоль собственной нормали (рис. 9.3,в), приводит к выводу, что параллельная скорости составляющая электрического поля не изменяется при движении:

$$E'_\tau = E_\tau. \quad (9.5)$$

Таким образом, изображенная на рис. 9.3,б конфигурация поля не соответствует действительности: никакой дополнительной составляющей, параллельной заряженной плоскости, при движении последней не возникает.

Можно показать, что выведенные для частного случая законы преобразования составляющих напряженности электрического поля (9.4) и (9.5) остаются справедливыми и в случае произвольного распределения зарядов.

Пример. Электрическое поле, создаваемое равномерно движущимся точечным зарядом

Точечный заряд q движется с постоянной скоростью u вдоль координатной оси x . Рассчитать создаваемое им электрическое поле в данной точке пространства, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} , в тот момент, когда заряд оказывается в начале координат (рис. 9.4,*a*).

Решение. На первый взгляд, сформулированную задачу удобно начать решать с расчета электрического поля, регистрируемого в данной точке \mathbf{r} наблюдателем, движущимся со скоростью заряда, с точки зрения которого заряженная частица находится в состоянии покоя. Результаты такого расчета позволили бы рассчитать электрическое поле в исходной системе, используя правила преобразования (9.4) и (9.5). Однако при таком подходе необходимо учитывать различие моментов времени прохождения зарядов через начало координат, с точки зрения неподвижного и движущегося наблюдателей.

Задача может быть легко решена значительно проще на основе принципа относительности, согласно которому искомое поле эквивалентно полю от неподвижного заряда, регистрируемому наблюдателем, движущимся со скоростью, равной скорости заряда, но направленной в противоположном направлении (рис. 9.4,*b*).

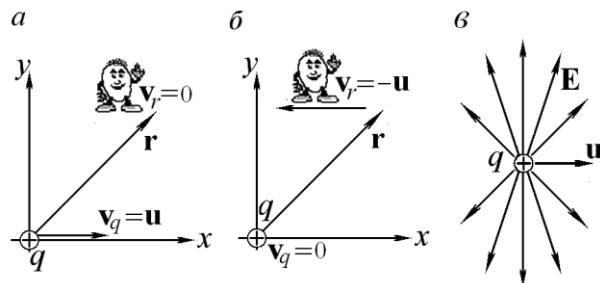


Рис. 9.4. К расчету электрического поля, создаваемого движущимся зарядом:

- a* — постановка задачи о расчете электрического поля заряда, движущегося со скоростью v_q ;
- б* — замена исходной задачи эквивалентной задачей о расчете поля неподвижного заряда, регистрируемого движущимся со скоростью $v_r = -v_q$ наблюдателем;
- в* — электрическое поле движущегося заряда.

Расчет искомого поля удобно начать с решения вспомогательной электростатической задачи о нахождении поля неподвижного заряда, регистрируемого неподвижным наблюдателем в точке, задаваемой радиус-вектором \mathbf{r} :

$$E_x = q \frac{r_x}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}}, \quad E_y = q \frac{r_y}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}}.$$

Переход к системе отсчета, связанной с движущимся наблюдателем (относительно которого покоящийся в начале координат заряд движется со скоростью \mathbf{u}), осуществляется с помощью формул преобразования компонент напряженности электрического поля (9.4) и (9.5) и приводит к следующим выражениям для составляющих вектора \mathbf{E} :

$$E'_x = q \frac{r_x}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}}, \quad E'_y = \frac{q}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{r_y}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}}.$$

Приведенные выражения неудобны для использования движущимся наблюдателем, поскольку содержат координаты, измеряемые не им, а наблюдателем неподвижным. Переход к «естественному» координатам осуществляется по формулам преобразования длин отрезков (9.1) и приводит к окончательному результату:

$$E'_x = q \frac{r'_x (1 - (u/c)^2)^{-1/2}}{\left((r'_x)^2 [1 - (u/c)^2]^{-1} + (r'_y)^2 \right)^{3/2}},$$

$$E'_y = q \frac{r'_y (1 - (u/c)^2)^{-1/2}}{\left((r'_x)^2 [1 - (u/c)^2]^{-1} + (r'_y)^2 \right)^{3/2}}.$$

Возвращаясь к исходной задаче, можно утверждать, что находящийся в точке с координатами (r_x, r_y) неподвижный наблюдатель в момент прохождения движущимся зарядом начала координат зарегистрирует точно такое же поле. Поскольку рассчитанное поле регистрируется неподвижным наблюдателем, в окончательном выражении штрихи при компонентах векторов \mathbf{E} и \mathbf{r} должны быть опущены.

Несколько неожиданное свойство полученного решения

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{r_y}{r_x}$$

означает, что **регистрируемая напряженность электрического поля, создаваемая равномерно движущимся зарядом, ориентирована точно в направлении фактического положения заряда-источника**, а не на его предшествующее положение, вычисляемое с учетом запаздывания вследствие конечности скорости распространения сигнала (рис. 9.4,в).

Никакого противоречия этого результата с требованиями специальной теории относительности не возникает, поскольку полученное решение касается равномерного движения заряда с заданной скоростью на бесконечно большом интервале времени. При таком движении в любой наперед заданный момент времени (не только настоящий, но и будущий) положение заряда может быть определено простым расчетом без использования какой-либо дополнительной информации, обусловленной направлением напряженности электрического поля. Таким образом, ориентация вектора \mathbf{E} на фактическое положение заряда не означает запрещаемой постулатами СТО мгновенной передачи сигнала.

Представляется важным отметить, что в случае неожиданной остановки заряда (или любого изменения его скорости) в начале координат сигнал о таком событии будет достигать удаленных точек с запозданием на интервал $\tau = r/c$, где r — расстояние от заряда до наблюдателя. В течение указанного времени поле будет направлено не на фактическое положение заряда, а в ту точку, где он должен был бы находиться при условии движения с постоянной скоростью. По прошествии же интервала времени τ поле в удаленной точке \mathbf{r} начнет изменяться в соответствии с характером изменения движения заряда. В случае остановки заряда поле в точке наблюдения скачком изменит свои величину и направление так, чтобы прийти в соответствие с известным решением для электростатического поля точечного заряда. Подобное изменение можно рассматривать как появление дополнительного поля, происходящее последовательно во все более удаленных от затормозившего заряда точках. Описанный на качественном уровне процесс является не чем иным, как распространением сферической электромагнитной волны, излучаемой ускоренно движущимся зарядом.

9.3. Природа магнитных сил

Механизм возникновения магнитных сил удобно рассмотреть на частном примере расчета сил взаимодействия двух точечных зарядов (q и Q), движущихся относительно наблюдателя в одном направлении с одинаковыми скоростями $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, направленными перпендикулярно соединяющему заряды отрезку (рис. 9.5, a). Рассмотрение более общего случая равномерного движения зарядов с произвольными скоростями приводит к громоздким выкладкам.

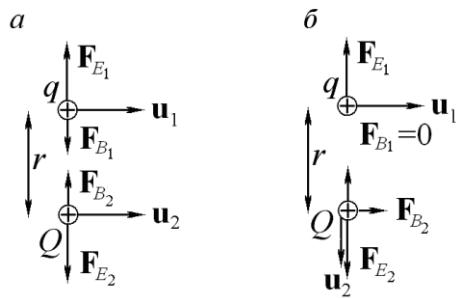


Рис. 9.5. Механизм возникновения магнитных сил:
 a — к расчету сил Лоренца, возникающих при движении двух зарядов;
 b — нарушение третьего закона Ньютона при магнитных взаимодействиях.

Задача расчета сил в рассматриваемой системе сводится к электростатической путем перехода к системе отсчета, относительно которой оба заряда находятся в состоянии покоя. С точки зрения наблюдателя, «бегущего вместе с зарядами», между ними существуют только силы электростатического отталкивания

$$F = \frac{qQ}{r^2}.$$

Для движущегося относительно пары зарядов наблюдателя сила взаимодействия между зарядами согласно правилу преобразования сил оказывается меньше. Этот имеющий релятивистскую природу эффект изменения поперечной компоненты электрической силы был экспериментально обнаружен задолго до создания А. Эйнштейном теории относительности. Для его интерпретации вместо допущения о суще-

ствовании зависимости величины электрических сил от скорости движения системы относительно наблюдателя были введены дополнительные *магнитные силы*, возникающие между заряженными частицами при условии их движения. Соответствующее выражение удобно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$F' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{qQ}{r^2} = q \frac{Q}{r^2 \sqrt{1 - (u/c)^2}} - qu \frac{Qu}{r^2 \sqrt{1 - (u/c)^2}} \equiv qE - quB.$$

Первому из них логично присвоить смысл взаимодействия заряда Q с усилившимся в соответствии с (9.4) поперечным электрическим полем, создаваемым движущимся зарядом q . Что же касается второго слагаемого, ему традиционно приписывается смысл новой магнитной силы, возникающей между зарядами при их одновременном движении. В случае взаимодействия двух заряженных частиц магнитную силу принято называть *силой Лоренца*.

Имея чисто релятивистское происхождение, сила Лоренца очевидно выглядит весьма необычно с точки зрения классической теории Ньютона. Во-первых, **величина силы Лоренца определяется скоростью движения зарядов относительно наблюдателя**, т. е. зависит не только от свойств системы взаимодействующих частиц, но и от состояния наблюдателя, изучающего эту систему. Во-вторых, сила Лоренца не удовлетворяет третьему закону Ньютона. Например, в случае движения зарядов во взаимно перпендикулярных направлениях один из зарядов испытывает действие магнитной силы, а второй не испытывает (рис. 9.5,б).

Несмотря на то, что сегодня в рамках неквантовой физики магнитные взаимодействия заведомо не являются фундаментальными, а сводятся к релятивистским поправкам к электростатическим силам, для решения множества задач оказывается удобным сохранить понятие магнитных сил. По аналогии с тем как в электростатике для описания механизма передачи электрических взаимодействий между зарядами вводилось понятие электростатического поля \mathbf{E} , в качестве переносчика магнитных взаимодействий между зарядами в теории магнетизма вводится понятие *магнитного поля*, созданного электрическими зарядами только при условии их движения и характеризуемого вектором \mathbf{B} . По причинам, которые будут обсуждаться позднее, при создании теории электромагнетизма произошла досадная ошибка в выборе терминологии. В результате входящий в выражение для магнитной силы, действующей на заряд, и аналогичный по смыслу напряженности

электрического поля вектор \mathbf{B} был назван не *напряженностью магнитного поля* (как следовало поступить по аналогии с электростатикой), а *магнитной индукцией*. Напряженностью же магнитного поля был назван вспомогательный вектор \mathbf{H} , который, как нетрудно догадаться, аналогичен по смыслу вектору \mathbf{D} . С учетом указанных обстоятельств представляется целесообразным вообще воздержаться от употребления терминов «напряженность магнитного поля» и «магнитная индукция».

9.4. Сила Лоренца

Подобно тому как это делалось в электростатике, выражение для силы взаимодействия двух точечных зарядов Q и q удобно разделить на два сомножителя:

$$\mathbf{F}_B = Q \left[\frac{\mathbf{u}_Q}{c}, \mathbf{B}(\mathbf{R}) \right]. \quad (9.6)$$

Первый сомножитель в выражении (9.6) зависит только от индивидуальных характеристик испытывающей действие магнитной силы (силы Лоренца) частицы (ее электрического заряда Q и нормированной на скорость света c скорости движения относительно наблюдателя \mathbf{u}_Q). Второй сомножитель описывает поле, создаваемое ее партнерами по взаимодействию. В случае взаимодействия заряда Q с одним точечным зарядом q , движущимся относительно наблюдателя со скоростью \mathbf{u}_q , выражение для характеризующего магнитное поле вектора \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = q \left[\frac{\mathbf{u}_q}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3}. \quad (9.7)$$

Легко убедиться, что в частном случае сонаправленного движения двух зарядов с одинаковыми скоростями ($\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_q \equiv \mathbf{u}$) соотношения (9.7) и (9.6) приводят к выражению для силы, согласующемуся с результатами релятивистского рассмотрения.

Формула (9.7) естественным образом обобщается на случай источника в виде системы движущихся со скоростями \mathbf{u}_k точечных частиц с зарядами q_k :

$$\mathbf{B}_\Sigma(\mathbf{R}) = \sum_k q_k \left[\frac{\mathbf{u}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3}.$$

9.5. Традиционное определение вектора \mathbf{B}

В большинстве традиционных курсов классической электродинамики характеризующий магнитное поле вектор \mathbf{B} вводится не на основе релятивистского рассмотрения задачи о взаимодействии движущихся зарядов, а в результате анализа известных из опыта фактов силового воздействия на различные (сравнительно простые) электродинамические системы, помещаемые в ту область пространства, где существуют магнитные взаимодействия.

Для определения вектора \mathbf{B} обычно используется один из трех способов, основанных на анализе силового воздействия магнитного поля на: 1) обособленный движущийся заряд; 2) прямолинейный отрезок проводника с током; 3) небольшую рамку с током («магнитный диполь»). Представляется необходимым кратко остановиться на каждом из них (рис. 9.6).

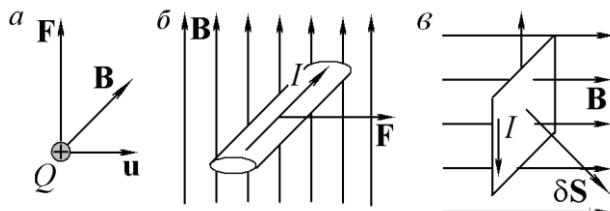


Рис. 9.6. Воздействие магнитного поля на простейшие электромагнитные системы:

- a* — электрический заряд в магнитном поле;
- б* — проводник с током в магнитном поле;
- в* — рамка с током (магнитный диполь) в магнитном поле.

Первый подход основан на использовании выражения (9.6) для силы Лоренца, действующей на движущийся в магнитном поле заряд (рис. 9.6,*a*). Поскольку все (за исключением вектора \mathbf{B}) ранее определенные величины могут быть найдены из эксперимента, соотношение (9.6) можно рассматривать как определение этого вектора. В частности, направление вектора \mathbf{B} выбирается так, чтобы при движении вдоль него заряженная частица не испытывала действия магнитной силы, а направление возникающей при движении положительного за-

ряда под углом к линиям поля силы Лоренца (9.6) соответствовало стандартному правилу перемножения векторов.

В случае прямолинейного проводника с током, помещенного в магнитное поле, действие силы Лоренца испытывают все находящиеся в нем движущиеся заряды (рис. 9.6,*б*). Сумма сил Лоренца, действующих на элемент длины проводника со стороны магнитного поля, в этом случае носит название *силы Ампера* (\mathbf{F}_A) и легко вычисляется прямым суммированием:

$$d\mathbf{F}_A = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (9.8)$$

Наконец, в случае рамки с током, помещенной в однородное магнитное поле (рис. 9.6,*в*), приложенные к ее проводам силы Ампера приводят к появлению врачающего момента

$$M = \frac{I}{c} SB \sin \alpha.$$

Последнее выражение может быть переписано в более краткой форме

$$\mathbf{M} = [\mu, \mathbf{B}] \quad (9.9)$$

путем введения новой величины, характеризующей замкнутый контур с током, — его *магнитного момента*

$$\mu \equiv \frac{I}{c} \mathbf{S},$$

где \mathbf{S} — задаваемый направлением протекающего тока I в соответствии с ранее введенным правилом обхода (рис. 2.1,*а*) вектор площади охватываемой током поверхности.

Выражения для силы Лоренца (9.6), силы Ампера (9.8) и врачающего момента (9.9) в магнитном поле помимо вектора \mathbf{B} содержат только определенные ранее электрические и механические величины, которые могут быть измерены экспериментально. По этой причине любое из них в принципе может использоваться для определения вектора \mathbf{B} , что нередко и делается в элементарных курсах электромагнетизма, не опирающихся на результаты релятивистского рассмотрения. При таком подходе кажется более целесообразным при определении вектора \mathbf{B} исходить из выражения для силы Лоренца, поскольку она описывает магнитные взаимодействия с наиболее элементарным объектом — электрическим зарядом.

Соотношения, которые полезно помнить

$q' = q$	Инвариантность электрического заряда
$E'_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad E'_{\tau} = E_{\tau}$	Релятивистский закон преобразования электрических полей при переходе к движущейся системе отсчета
$\mathbf{B}_k(\mathbf{R}) = q_k \left[\frac{\mathbf{u}_k}{c}, (\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right] \frac{1}{ \mathbf{R} - \mathbf{r}_k ^3}$	Магнитное поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью
$\mathbf{F}_L = Q \left[\frac{\mathbf{u}_Q}{c}, \mathbf{B} \right]$	Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Используя теорему Гаусса для электрического поля, созданного движущимися зарядами, показать, что электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости, равномерно движущейся вдоль собственной нормали, совпадает с полем такой же неподвижной плоскости.

Указание. В классической электродинамике традиционно принимается допущение об отсутствии постоянного во времени и однородного во всем пространстве поля.

9.2. Рассчитать силу, действующую на заряд Q , равномерно движущийся с заданной скоростью \mathbf{u} в известном электрическом поле \mathbf{E} , создаваемом неподвижными относительно наблюдателя зарядами.

Указание. Перейти к системе отсчета, связанной с движущимся зарядом, и, рассчитав действующую силу в этой системе, вернуться к исходной системе.

9.3. Используя релятивистские законы преобразования длин отрезков, сил и электрических полей, рассчитать силу, действующую между двумя электрическими зарядами, движущимися с одинаковой заданной скоростью в направлении соединяющей их прямой.

- 9.4. Батарея с заданной ЭДС и внутренним сопротивлением с помощью двух очень длинных параллельно расположенных проводников цилиндрической формы подсоединенена к сопротивлению. Какова величина этого сопротивления, если известно, что суммарная сила взаимодействия проводников друг с другом равна нулю. Сопротивление проводников очень мало. Их диаметры d значительно меньше расстояния L между их осями.
- 9.5. Показать, что в случае движения зарядов в одном направлении с одинаковой релятивистской скоростью выражение для силы их магнитного взаимодействия, полученное из релятивистского рассмотрения, совпадает с результатом расчета по формулам классической электродинамики (9.6) и (9.7).
- 9.6. Получить выражение для магнитостатического поля, создаваемого произвольным распределением электрических зарядов, движущихся с одинаковыми скоростями $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}$, если известно электрическое поле \mathbf{E} , создаваемое точно таким же статическим распределением.
- 9.7. Пользуясь результатом решения задач 1.4 и 9.6, рассчитать магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым проводом с током I на заданном расстоянии h от него.
- 9.8. Точечный заряд q движется со скоростью u вдоль прямого провода с током I на расстоянии L от него. Найти магнитную силу, действующую на этот заряд. Решить ту же задачу с позиции наблюдателя, движущегося вместе с зарядом.
- Указание. При переходе к движущейся вместе с зарядом системе отсчета в соответствии с релятивистским законом преобразования длин отрезков изменяются расстояния между электронами и ионами провода с током. В результате создаваемые ими электрические поля перестают компенсировать друг друга, и рассматриваемый заряд вместо магнитной силы начинает испытывать действие силы электрической.
- 9.9. Исходя из выражения для магнитного поля равномерно движущегося точечного заряда и принципа суперпозиции получить выражение для слаженного макроскопического магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{R})$, созданного заданным распределением плотности тока в пространстве $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.
- 9.10. Используя решение задачи 9.9, получить выражение для магнитного поля, созданного в произвольной точке пространства, заданной радиус-вектором \mathbf{R} , небольшим участком тонкого про-

вода с известным током I , расположенным в точке, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} (закон Био — Савара — Лапласа).

- 9.11. Рассчитайте величину (модуль) напряженности электрического поля релятивистской заряженной частицы в точке, расположенной на расстоянии R от нее в направлении, составляющем угол θ с ее скоростью.
- 9.12. Один из критиков специальной теории относительности приводит аргументы, по его мнению, свидетельствующие об ошибочности этой теории: «В соответствии с результатами расчетов в рамках теории относительности (см. задачу 9.11) при приближении скорости заряда к величине c напряженность его электрического поля в плоскости, перпендикулярной скорости движения, неограниченно возрастает. В результате заряженные частицы, разгоняемые в современных ускорителях до ультрарелятивистских скоростей, своими гигантскими полями должны вырывать электроны из окружающих неподвижных атомов. Поскольку в реальности разрушений ускорителя при его работе не происходит, приведенное рассуждение свидетельствует об ошибочности теории относительности». Какие аргументы Вы можете привести в качестве опровержения подобной точки зрения?
- 9.K1. Разработайте компьютерную программу, моделирующую движение двух взаимодействующих друг с другом заряженных частиц. Сравните результаты моделирования движения частиц в описанной системе с данными численного эксперимента, учитывая только электростатические взаимодействия.