$\boxed{3}$ $\ln \prod_i p(x_i) = \sum_i \ln p(x_i) = \sum_i \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) =$

$= \sum_i \left(-\frac{1}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$

$L = \ln \prod_i p(x_i) = -\frac{N}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i-\mu)^2$

$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i) - \mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{N} \sum_i x_i = \bar{x}}$

$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_i (x_i-\mu)^2 = 0$

$-\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 0$

$N\sigma^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$

$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$

$\boxed{4}$

диаг. с λ м-цы A

① $\tilde{y} - y = Sz$ $\quad S:\ S^T A S = \Lambda$

$A = (S^{-1})^T \Lambda S^{-1} \qquad A^{-1} = S \Lambda^{-1} S^T$

Якобиан преобразования $= \det(S)$

$$\int d^N \tilde{y},\, p(\tilde{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det A)^{1/2}} \int d^N z,\, \det|S|\, \exp\left(-\frac{(Sz)^T \Lambda^{-1} S^T (Sz)}{2}\right) =$$

$$= \frac{|\det S|}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det A)^{1/2}} \int d^N z\, \exp\left(-\frac{z^T \Lambda^{-1} z}{2}\right) \ominus$$

т.к. Λ - диагональная $\quad \int d^N \to \underbrace{\int d \ldots \int d}_{N}$

$$\ominus \frac{|\det S|}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det A)^{1/2}} \prod_{i=1}^{N} \int dz_i\, \exp\left(-\frac{z_i^2}{2\lambda_i}\right) = \frac{|\det S|}{(2\pi)^{N/2} (\det A)^{1/2}} \prod_{i=1}^{N} \sqrt{2\pi\lambda_i} =$$

$$= \frac{|\det S|}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det A)^{\frac{1}{2}}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} |\det \Lambda|^{\frac{1}{2}} = \frac{|\det S| (\det \Lambda)^{1/2}}{(\det A)^{1/2}} =$$

$$= \frac{|\det S| \sqrt{\det A}\, |\det S|}{\sqrt{\det A}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ok}$$

② $\tilde{y} - y = Y \quad \to \quad \tilde{\omega} = X^T \tilde{y} = X^T (Y + y) = X^T Y + X^T y =$

$= X^T Y + \omega$

$$\langle\langle \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \rangle\rangle = \langle \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \rangle - \langle \tilde{\omega}_i \rangle \langle \tilde{\omega}_j \rangle = \int d^N Y,\, (X^T Y)_i (X^T Y)_j\, p(Y) -$$

$$\left(\int d^N y,\ (X^T y)_i,\ p(y)\right)\left(\int d^N y,\ (X^T y)_j,\ p(y)\right)$$

где $p(y) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det A)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^T A^{-1} y\right)$

$$I(J) = \int d^N y \exp\left(-\frac{1}{2} y^T A^{-1} y + J^T y\right) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} J^T A J\right)$$

Тогда $\langle y_i y_j \rangle = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det A)^{1/2}} \dfrac{\partial^2 I}{\partial J_i \partial J_j}\Big|_{J=0} = A_{ij}$

$$\Rightarrow \langle\langle \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \rangle\rangle = \sum_{\alpha\beta} X^T_{i\alpha} X^T_{j\beta} \langle\langle y_\alpha y_\beta \rangle\rangle = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha i} X_{\beta j} A_{\alpha\beta} =$$

$$(X^T A X)_{ij}$$

$\boxed{5}$ $\langle\langle \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j \rangle\rangle = (X^T A X)_{ij}$

1)

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\omega}) = (X^T X)^{-1} X^T A X (X^T X)^{-1}$$

$$\sigma^2_{\omega_a} = \left[(X^T X)^{-1} X^T A X (X^T X)^{-1}\right]_{\alpha\alpha}$$ диаг. эл-т

$$\sigma_{\omega_a} = \sqrt{\left[(X^T X)^{-1} X^T A X (X^T X)^{-1}\right]_{\alpha\alpha}}$$

2) $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_N)$ — описывает независимые погрешности y_i. Для такого моделирования следует выбрать $A_i = \frac{1}{S_i^2}$ т.к. A^{-1} — ков. м-ца для многомерного распределения

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\omega}) = (X^T X)^{-1} X^T \mathrm{diag}\left(\frac{1}{S_1^2}, \dots, \frac{1}{S_N^2}\right) X (X^T X)^{-1}$$

сист. погрешность параметра ω_a:

$$\sigma_{\omega_a} = \sqrt{\left[(X^T X)^{-1} X^T \mathrm{diag}\left(\frac{1}{S_1^2}, \dots, \frac{1}{S_N^2}\right) X (X^T X)^{-1}\right]_{\alpha\alpha}}$$

$\boxed{6}$ $\tilde{X}$ – м-ца с возмущением

X – м-ца с исх. значениями

δX – м-ца малых возмущений

$$\tilde{X} = X + \delta X$$

Каждый эл-т $\delta X_{ij} \sim \mathcal{N}(0, s^2)$

МНК: $\omega = (X^T X)^{-1} X^T y$ $\quad M := X^T X$

Тогда для возм. м-цы

$$\tilde{\omega} = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T y = ((X+\delta X)^T (X+\delta X))^{-1} (X+\delta X)^T y$$

$$\tilde{\omega} = (M + \delta M)^{-1} (X^T + \delta X^T) y \quad , \delta M = X^T \delta X + \delta X^T X + \delta X^T \delta X$$

пренебрегаю членом 2-го пор-ка малости:

$$\delta M \approx X^T \delta X + \delta X^T X$$

$$(M + \delta M)^{-1} \approx M^{-1} - M^{-1} \delta M M^{-1}$$

для малых δM $\hookrightarrow$

$$\tilde{\omega} \approx (M^{-1} - M^{-1} \delta M M^{-1}) (X^T + \delta X^T) y$$

$$\tilde{\omega} \approx \omega + M^{-1} \delta X^T y - M^{-1} \delta M \omega$$

Раскладывая и отбрасывая члены 2-го пор-ка малости

$$\tilde{\omega} \approx \omega + M^{-1} \delta X^T y - M^{-1} (X^T \delta X + \delta X^T X) \omega = \omega +$$

$$+ M^{-1} \delta X^T (y - X\omega) - M^{-1} \delta X^T X \omega$$

остатки $r := y - X\omega$. Тогда

$$\tilde{\omega} \approx \omega + M^{-1} \delta X^T r - M^{-1} \delta X^T X \omega$$

$\mathrm{Cov}(\hat{\omega}) - ?$

$$\langle \tilde{\omega}\tilde{\omega}^T\rangle - \langle\tilde{\omega}\rangle\langle\tilde{\omega}^T\rangle \approx \langle (M^{-1}\delta X^T \tau - M^{-1}\delta X^T X\omega)(\tau^T\delta X M^{-1} -$$
$$- \omega^T X^T \delta X M^{-1})\rangle$$

т.к. $\langle \delta X_{i\alpha}\delta X_{j\beta}\rangle = s^2 \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ получим после усредн.:

$$\boxed{\mathrm{Cov}(\hat{\omega}) \approx s^2 M^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(\tau_i^2 \mathbb{1} + x_i x_i^T \omega\omega^T - \tau_i x_i \omega^T - \tau_i \omega x_i^T)\right]M^{-1}}$$

x_i - i-ая строка X

диаг. эл-ты этой м-цы дают оценку дисперсий параметров ω_a