$\boxed{1}$ 1) $\check{y} = Xw$

решить задачу МНК $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\ell} (\check{y} - y_i)^2 \longrightarrow \min$, где $\check{y} = \text{const}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 2X^T(Xw - y) \underset{\text{min}}{\overset{\uparrow}{=}} 0$$

$$\Rightarrow \quad X^T X w = X^T y \quad \longrightarrow \quad \boxed{w^* = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

2) 1D: $\hat{y} = wx + b$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - \check{y})^2 = \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - wx_i - b)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - wx_i - b) = 0 \qquad \cdot \frac{1}{\ell} \sum x_i \ (= \bar{x})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = -2 \sum_{i=1}^{\ell} x_i (y_i - wx_i - b) = 0$$

$$\Rightarrow -\cancel{2} \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - wx_i - b)\bar{x} + \cancel{2} \sum_{i=1}^{\ell} x_i (y_i - wx_i - b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_i x_i (x_i - \bar{x})}$$

при этом $\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$

$\sum_i (y_i - \bar{y}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{w} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$\boxed{\hat{b} = \frac{1}{l}\sum_i (y_i - x_i w) = \bar{y} - \bar{x}\hat{w}}$$

$$\hat{y} = \hat{w}x + \hat{b} \overset{x=\bar{x}}{=\!=} = \hat{w}\bar{x} + \hat{b} = \bar{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x}\hat{w} + \hat{b}$$

ЧД:

$$\hat{y} = \underbrace{X}_{l \times n} w \quad \rightarrow \quad w = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_l \end{pmatrix}$$

$$Xw = X(X^T X)^{-1} X^T y$$

$$U^T X^T X U = \Lambda \longrightarrow X^T X = U \Lambda U^T \rightarrow (X^T X)^{-1} = U \frac{1}{\Lambda} U^T =$$

$$= U \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} U^T = X(X^T X)^{-1} X^T = XU \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} U^T X^T =$$

$$= XU \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \left(XU \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^T = \left(XU \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^T \left(XU \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow X(X^T X)^{-1} X^T y = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \underbrace{x_i (X^T X)^{-1} X^T}_{(0, \dots, \underset{k}{1}, 0, \dots)} \underbrace{y}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} y_i = \bar{y}$$

ч.т.д.

$\boxed{2}$ X – исх. м-ца $\qquad \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

X_c – м-ца с централизацией

$$X_c = X - \frac{1}{n} \bar{1} \bar{1}^T X$$

$$\hat{X} = X \bar{1}$$

$$\left(\hat{X}^T \hat{X}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} X^T \\ \bar{1}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & \bar{1} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} X^T X & X^T \bar{1} \\ 1^T X & 1^T 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

обратим м-цу

$$= \begin{pmatrix} \left(X^T X - \frac{1}{n} X^T \bar{1} \bar{1}^T X\right)^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(X_c^T X_c\right)^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ В случае переопределенной системы была левая псевдообратная м-ца. Теперь система недоопределена => строки независимы => псевдообр. м-ца правая

$$w_{о.н.} = w_{о.о.} + w_{ч.н.}$$

заметим, что $\quad w_{ч.н.} = X^T (X X^T)^{-1} y$ – решение неодн. системы

$w_{о.о.} = \left(I - X^T (X X^T)^{-1} X\right) b$ – реш. одн. системы

$$w = \left(I - X^T (X X^T)^{-1} X\right) b + X^T (X X^T)^{-1} y$$

Проверка: $\quad Xw = \underbrace{(X - X)}_{0} b + \mathbb{1} y = y \leftarrow$ OK

4

① $X = V\sqrt{\Lambda}U^T \qquad \tilde{X} = U\sqrt{\tilde{\Lambda}}U^T$

$$X - \tilde{X} = V(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T$$

$$\|X-\tilde{X}\|_F^2 = tr\left((X-\tilde{X})^T(X-\tilde{X})\right) = tr\big(U(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})\underbrace{V^TV}_{1}(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\big) =$$

$$= tr\left((\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})^2\right) = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i$$

$$\frac{1}{\ell}\|X-\tilde{X}\|_F^2 = \frac{1}{\ell}\sum_{i=\tilde{F}+1}^{F}\lambda_i$$

но $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$

$\Rightarrow$ в задании опечатка, не L_2, а $\underline{\underline{F}}$

② т.д. $u = \underset{\|u\|=1}{\arg\max} \, (Xu)^2$

$$X = V\sqrt{\Lambda}U^T$$

$$(Xu)^T(Xu) = u^TX^TXu = u^TU\Lambda U^Tu = (\underbrace{U^Tu}_{y})^T\Lambda(U^Tu)$$

$$\Rightarrow y^Ty = u^TUU^Tu = u^Tu \underset{\|u\|=1}{\overset{\uparrow}{=}} 1$$

$\Rightarrow$ задача свелась к максимизации $y^T\Lambda y$ при усл.

$$y^T\Lambda y = \sum_{i=1}^{F}\lambda_i y_i^2$$

максимум при $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = \ldots = 0$

т.к. $\lambda_1 = \max_i \{\lambda_i\}$

$$\Rightarrow y^T\Lambda y = \lambda_1 \,, \quad y = U^Tu = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ решением является первый столбец м-цы U из син. разложения

$\boxed{5}$

① $\underset{N\times 2}{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots \end{pmatrix}$] ц.м. в нач. коорд.

прямая a: $\bar{v} = (v_1, v_2)^T$ – ед. вектор прямой a

$\text{distance}\,[(x_i, y_i); a] = \|(x_i, y_i) - ((x_i, y_i)\cdot v)\, v\| = \|(x_i, y_i) - v v^T (x_i, y_i)\|$

$\text{distance}^2\,[(x_i, y_i); a] = x_i^2 + y_i^2 - (x_i v_1 + y_i v_2)^2$

$L' = \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2) - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (x_i v_1 + y_i v_2)}_{A} \to \min \Leftrightarrow$

$A \to \max$

$\sum_{i=1}^{N} (x_i v_1 + y_i v_2)^2 = \|Xv\|^2$ при усл $\|v\| = 1$ $\Rightarrow$

решение этой задачи – первый правый сингулярный вектор м-цы X

② Тензор инерции ТТ, сост. из N точек, расп. в $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3})$ опр-ся как $I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} \left(\|X_i\|^2 \delta_{\alpha\beta} - X_{i\alpha} X_{i\beta}\right)$ $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$

С другой стороны $\underset{N\times 3}{X}$: $\underset{3\times 3}{X^T X}$ её элементы

$(X^T X)_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} X_{i\alpha} X_{i\beta}$ Сингул. числа м-цы X – кв. корни из λ матрицы $X^T X$

Заметим, что I и $X^T X$ связаны линейным преобразованием.
Главные моменты инерции – собств. числа тензора инерции I
т.е. нахожд. собств. чисел $\Leftrightarrow$ нахождению главных осей и моментов инерции

$\boxed{6}$ <u>Док-во формул</u>

$$\|X_2 - (X_1R - \bar{1}\mu^T)\|_F^2 = L = tr\,(X_2 - (X_1R - \bar{1}\mu^T))\cdot$$

$$\cdot(X_2^T - (R^TX_1^T - \mu\,\bar{1}^T)) = tr\,(X_2X_2^T - X_2R^TX_1^T + X_2\mu\,\bar{1}^T -$$

$$- X_1RX_2^T + X_1RR^TX_1^T - X_1R\mu\,\bar{1}^T + \bar{1}\mu^TX_2^T - \bar{1}\mu^TR^TX_1^T + \bar{1}\mu^T\mu\,\bar{1}^T$$

$\to \min$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = tr\,\frac{\partial}{\partial \mu}\left(X_2\mu\,\bar{1}^T - X_1R\mu\,\bar{1}^T + \bar{1}\mu^TX_2^T - \bar{1}\mu^TR^TX_1^T + \bar{1}\mu^T\mu\bar{1}^T\right)$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = R^T\bar{X}_1 - X_2$$

$$R' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = tr\,\big(-X_2R'^TX_1 - X_1R'X_2^T + X_1R'R^TX_1^T + X_1RR'^TX_1^T -$$

$$- X_1R'\mu\,\bar{1}^T - \bar{1}\mu^TR'^TX_1^T\big) = 0$$

$\Rightarrow R = UV^T$, где

$$\tilde{X}_1 = X_1 - \bar{1}\,\tilde{x}_1^T$$

$$\tilde{X}_2 = X_2 - \bar{1}\,\tilde{x}_2^T$$

$$\tilde{X}_1^T\tilde{X}_2 = U\mathcal{D}V^T$$