

Задача 3

$$\textcircled{1} \quad ay^3 + d = 0 \quad a = 1 \quad d = 8$$

$$\Delta a = 10^{-3} \quad \Delta d = 10^{-3}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}} = \left(-\frac{d}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = \left| -\frac{1}{3} \left(\frac{d}{a}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{\Delta d \cdot a - \Delta a \cdot d}{a^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{3} \frac{\Delta d \cdot a - \Delta a \cdot d}{a^{\frac{4}{3}} d^{\frac{2}{3}}} \right| \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\textcircled{2} \quad u'(x) \approx \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h}$$

$$h_{\text{opt}} = ? \quad \text{напорок анькоскаинеу?} \quad \begin{cases} |u^{(5)}(t)| \leq M_5 \\ \Delta u = err_u \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\text{анал}} = \frac{\Delta u + 8\Delta u + 8\Delta u + \Delta u}{12h} = \frac{3}{2} \frac{\Delta u}{h}$$

$$\varepsilon_{\text{метода}} = \max \left| u'(x) - \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} \right| =$$

$$= \max \left| \frac{1}{12h} \left[12h u'(x) - \left[u(x) + u'(x)(-2h) + \frac{u''(x)(-2h)^2}{2!} + \frac{u'''(x)(-2h)^3}{3!} + \right. \right. \right.$$

$$+ \frac{u^{IV}(x)(-2h)^4}{4!} + \frac{u^{V}(x)(-2h)^5}{5!} \left. \left. \right] + 8 \left[u(x) + u'(x)(-h) + \dots + \frac{u^{IV}(x)(-h)^5}{5!} \right] - \right.$$

$$\left. - 8 \left[u(x) + u'(x)h + \dots + \frac{u^{IV}(x)h^5}{5!} \right] + \left[u(x) + u'(2h) + \dots + \frac{u^{IV}(2h)h^5}{5!} \right] \right| \quad \text{=} \quad \text{=}$$

$$(0) \quad -1 + 8 - 8 + 1 = 0 \quad w$$

$$(1) \quad 12 + 2 - 8 - 8 + 2 = 0 \quad w$$

$$(2) \quad -2 + \frac{8}{2} - \frac{8}{2} + 2 = 0 \quad w$$

$$(3) \quad \frac{4}{3} - \frac{8}{6} - \frac{8}{6} + \frac{4}{3} = 0 \quad w$$

$$(4) \quad -\frac{2}{3} + \frac{8}{24} - \frac{8}{24} + \frac{2}{3} = 0 \quad w$$

$$(5) \quad \frac{4}{15} - \frac{8}{120} - \frac{8}{120} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\textcircled{=} \quad \frac{h^4}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot M_5 = \frac{M_5 h^4}{30}$$

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}_{\text{округ}} + \mathcal{E}_{\text{метода}} = \frac{3}{2} \frac{\Delta u}{h} + \frac{M_5 h^4}{30}$$

$$\mathcal{E}'_\Sigma = -\frac{3}{2} \frac{\Delta u}{h^2} + \frac{2}{15} M_5 h^3 \stackrel{\text{нужен мин}}{=} 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{\Delta u}{h^2} = \frac{2}{15} M_5 h^3 \quad \Rightarrow$$

$$h_{\text{opt}} = \sqrt[5]{\frac{45}{4} \frac{\Delta u}{M_5}}$$

Видно, что квадратичная схема имеет 4-ий порядок аппроксимации

Задание 4

$$x^2 - 2x + \underbrace{0,999993751}_{=c} = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &\approx \underline{\underline{1,0025}} \\ x_2 &\approx \underline{\underline{0,9975}} \end{aligned}$$

Берите знаки

$$11,1111 \pm 0,0015$$

контрольные
(кото вернёте наставку)

$$|\Delta c| = |2x\Delta x - 2\Delta x| = |2\Delta x(x-1)| \textcircled{4}$$

$$\Delta x \sim \underbrace{10^{-4}}_{\text{не смущайтесь, вперед}}$$

$$\textcircled{4} |2 \cdot 10^{-4} (x-1)|$$

$$\Delta c < 2 \cdot 10^{-4} (x_1 - 1) = 0,00000005\dots$$

$$\Delta c < 2 \cdot 10^{-4} |(x_2 - 1)| = 0,00000005\dots \Rightarrow \begin{matrix} \text{С должна иметь} \\ 7 \text{ бегущих знаков} \end{matrix}$$

$$c = 0,999993$$

Задание 5

$$\{x_n\}, n \in \mathbb{N} \quad \delta x_0 = 10^{-6} = \frac{\Delta x_0}{x_0}$$

$$5x_{n+1} - x_n = 4$$

При каких x_0 погрешность x_n будет быстро уменьшаться?

$$x_n = a \cdot b^n + c$$

$$\text{однородное: } 5ab^{n+1} - ab^n = 0$$

$$5b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$\text{частное: } 5c - c = 4 \rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow x_n = a \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$$

$$x_n = (x_0 - 1) \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$$

$$\Delta x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \Delta x_0$$

$$\delta x_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{\Delta x_0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}{(x_0 - 1) \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1} = \frac{5^{-n} \delta x_0 \cdot x_0}{(x_0 - 1) 5^{-n} + 1} \xrightarrow{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}} 0$$

Ответ: при каких x_0 т.к. погрешность уменьшается экспоненциально.