Задание 3

$$C_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2\|x\|_2$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \Rightarrow C_1 = 1$$

очев $\rightarrow \{(x+y)^2 = x^2+y^2+\underbrace{2xy}_{>0},\ x,y>0\}$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot 1 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{n} \Rightarrow C_2 = \sqrt{n}$$

вроде КБШ

$$\bar{x}\cdot\bar{e} \le \sqrt{\sum|x_i|^2}\cdot\sqrt{\sum 1^2} \qquad \bar{e} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Задание 4

$$\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty \qquad (*)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_{max}^2} = \sqrt{m}\,|x_{max}| = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

Т.к. $\|A\|_{2\text{ и }\infty}$ подчинены $\|x\|_{2\text{ и }\infty}$ соответственно, то по определению

$$\|A\|_\infty \underset{\text{опр}}{=} \sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \underset{(*)}{\le} \sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_\infty\sqrt{n}}{\|x\|_2} \le \sqrt{n}\sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \underset{\text{опр}}{=} \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

$\bar{a} = (x, y)$

$\|\bar{a}\|_\infty = \max(x,y) \overset{\text{НУО}}{=} x$

$\|\bar{a}\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant x$

Пример:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{m \times n}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\underbrace{1 + \dots + 1}_{= m}} = \sqrt{m} \cdot 1 = \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} = n$$

ok

$$\|A\|_2 = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \sqrt{n}$$

Задание 5

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T A = \operatorname{tr} AA^T$$

$$\|UA\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T U^T U A = \operatorname{tr} A^T A = \|A\|_F^2$$

$$\|AU\|_F^2 = \operatorname{tr} A U U^T A = \operatorname{tr} AA^T = \|A\|_F^2$$