Задание 3

① $ay^3 + d = 0$ $\quad a = 1 \quad d = 8$

$\Delta a = 10^{-3} \quad \Delta d = 10^{-3}$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}} = \left(-\frac{d}{a}\right)^{1/3}$$

$$\Delta y = \left| -\frac{1}{3} \left(\frac{d}{a}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{\Delta d \cdot a - \Delta a \cdot d}{a^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{3} \frac{\Delta d \cdot a - \Delta a \cdot d}{a^{\frac{4}{3}} d^{2/3}} \right| \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

② $$u'(x) \approx \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h}$$

$h_{opt} = ?$ порядок аппроксимации? $\begin{cases} |u^{(5)}(t)| \le M_5 \\ \Delta u = err_4 \end{cases}$

$$\varepsilon_{округл} = \frac{\Delta u + 8\Delta u + 8\Delta u + \Delta u}{12h} = \frac{3}{2} \frac{\Delta u}{h}$$

$$\varepsilon_{метода} = \max \left| u'(x) - \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} \right| =$$

$$= \max \left| \frac{1}{12h} \left\{ 12h\, u'(x) - \left[u(x) + u'(x)(-2h) + \frac{u''(x)(-2h)^2}{2!} + \frac{u'''(x)(-2h)^3}{3!} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{u^{IV}(x)(-2h)^4}{4!} + \frac{u^{V}(\xi_1)(-2h)^5}{5!} \right] + 8\left[u(x) + u'(x)(-h) + \ldots + \frac{u^{V}(\xi_2)(-h)^5}{5!} \right] -$$

$$\left.\left. - 8\left[u(x) + u'(x)h + \ldots + \frac{u^{V}(\xi_3)h^5}{5!} \right] + \left[u(x) + u'(2h) + \ldots + \frac{u^{V}(\xi_4)(2h)^5}{5!} \right] \right\} \right| =$$

$$(0)\quad -1+8-8+1=0 \qquad w$$

$$(1)\quad 12+2-8-8+2=0 \qquad w$$

$$(2)\quad -2+\frac{8}{2}-\frac{8}{2}+2=0 \qquad w$$

$$(3)\quad \frac{4}{3}-\frac{8}{6}-\frac{8}{6}+\frac{4}{3}=0 \qquad w$$

$$(4)\quad -\frac{2}{3}+\frac{8}{24}-\frac{8}{24}+\frac{2}{3}=0 \qquad w$$

$$(5)\quad \frac{4}{15}-\frac{8}{120}-\frac{8}{120}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$$

$$= \quad \frac{h^4}{12}\cdot\frac{2}{5}\cdot M_5 = \frac{M_5 h^4}{30}$$

$$\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_{\text{округл}} + \varepsilon_{\text{метода}} = \frac{3}{2}\frac{\Delta u}{h} + \frac{M_5 h^4}{30}$$

ищем min

$$\varepsilon_\Sigma' = -\frac{3}{2}\frac{\Delta u}{h^2} + \frac{2}{15} M_5 h^3 = 0$$

$$\frac{3}{2}\frac{\Delta u}{h^2} = \frac{2}{15} M_5 h^3 \Rightarrow \boxed{h_{opt} = \sqrt[5]{\frac{45}{4}\frac{\Delta u}{M_5}}}$$

Видно, что конечно-разностная схема имеет 4-ый порядок аппроксимации

Задание 4

верные знаки

$11{,}1111 \pm 0{,}0015$

сомнительные (хотя как-то меняются)

$$x^2 - 2x + \underbrace{0{,}99993751}_{=c} = 0$$

$$x_1 \approx 1{,}0025$$

$$x_2 \approx 0{,}9975$$

$$|\Delta c| = |2x\Delta x - 2\Delta x| = |2\Delta x(x-1)| \textcircled{<}$$

$$\Delta x < \underbrace{5\cdot 10^{-4}}_{\text{не сменит разряд впереди}}$$

$$\textcircled{<} |2\cdot 5\cdot 10^{-4}(x-1)|$$

$$\begin{cases} \Delta c < 2\cdot 5\cdot 10^{-4}(x_1-1) = 0{,}0000025\ldots \\ \Delta c < 2\cdot 5\cdot 10^{-4}|(x_2-1)| = 0{,}0000025\ldots \end{cases} \Rightarrow$$

c должно иметь 7 верных знаков

$$\boxed{c = 0{,}999993}$$

Задание 5

$\{x_n\},\ n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\Delta x_0 = 10^{-6}$

$5x_{n+1} - x_n = 4$

При каких x_0 погрешность x_n будет быстро возрастать?

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}(4 + x_n)$$