$\boxed{1}$ Возможные ответы в результате проверки гипотез:

1) $T(x) > 1 \Rightarrow$ отвергаем H_0 и принимаем H_1

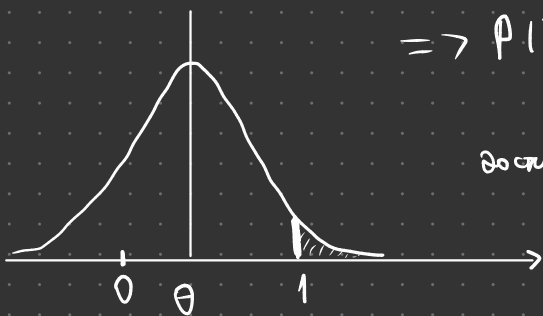
2) $T(x) \le 1 \Rightarrow$ принимаем H_0

Вероятность ошибки I рода

$$P(I_s) = \sup_{\theta \in [-1,1]} P(T(x) > 1)$$

$T(x) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ функция этого распред.

$$P_\theta(T(x) > 1) = 1 - F(1-\theta)$$



$$\Rightarrow P(I_s) = \sup_{\theta \in [-1,1]} (1 - F(1-\theta))$$

достигается при $\theta = 1$

$$P(I_s) = 1 - F(0) = 50\%$$

$\boxed{2}$ $\exp(\lambda)$

$\hat{\theta} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ – АНО параметра λ

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{\theta}^2}{n}$ – состоятельная оценка дисперсии

$$W = \left| \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} \right| = \sqrt{n} \left| \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\theta}} \right|$$

$\boxed{5}$ $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\overset{\text{неизв.}}{a, \sigma^2})$

$H_0: a = 0$ vs $H_1: a > 0$ α - уровень значимости

1) Если справедливо H_0,

статистика $T(x) = \sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X}}{S} \sim t_{n-1}$ ← распр. стьюдента

т.к. при $a = 0$ $\overline{X} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$

а выборочная дисперсия $S^2 \sim \chi_{n-1}$

независимы

также $\overline{X} \perp\!\!\!\perp S^2$

из Теоремы 1 на 8 лекции

Критерий правосторонний и это разумно, так как при больших значениях $T(X)$ гипотезу H_0 нужно отвергать. (т.к. при $a > 0$ ↳ $\overline{X}$ больше, чем при $a = 0$ => значение $T(X)$ больше)

$T(x) > t_{n-1, 1-\alpha}$ – мы отвергаем гипотезу H_0, если это выполнено

$p_{value} = 1 - F_{T(n-1)}(T(X))$ — это вероятность получить

$\uparrow$ функция распред. Стьюдента с $n-1$ степ. свободы

значение статистики $T(X)$ такое же или более экстремальное (при усл H_0 верна)

2) $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из неизв. P с конечным вторым моментом.

Статистика $S(X) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}}{S}$, при справедливости H_0 она $\sim \mathcal{N}(0,1)$

следует из ЦПТ

т.к. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$ при больших n

$S(X) > z_{1-\alpha}$

квантиль стандартного норм. распред. уровня $1-\alpha$

Тогда $p_{value} = 1 - F_{z}(S(X))$ — это вероятность получить

функция распределения станд. норм. велич.

значение статистики $S(X)$ такое же или более экстремальное (при усл H_0 верна)

При $n \to \infty$ критерий совпадает с критерием из 1-го пункта т. к. с ростом числа степеней свободы распр. Стьюдента стремится к станд. норм. распределению.