Phystech@DataScience

Бутстреп

19 марта 2024 г.

Постановка задачи

$X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка

$T(X_1, ..., X_n)$ — статистика

Задача: оценить распределение $T(X)$ или функционал $V(T(X))$.

Пример: оценка дисперсии статистики

$$V(T(X_1, ..., X_n)) = \mathrm{D}\, T(X_1, ..., X_n) = \mathrm{E}\, T^2(X) - (\mathrm{E}\, T(X))^2$$

Какую сделать оценку? Не знаем распределения $\mathrm{E}\, T^2(X)$ ...

Бутстреп

Метод бутстрепа

Этап 1.

Генерация индексов из равномерного распределения:

$$i_1, ..., i_n \sim U\{1, ..., n\}$$

Генерация выборки $X^* = (X_1^*, ..., X_n^*) = (X_{i_1}, ..., X_{i_n})$: упорядоченный выбор **с возвращением** n элементов из мн-ва $\{X_1, ..., X_n\}$.

Например:

1. $X = (100, 11, -5, 91, 32)$ — реализация выборки
2. $(4, 5, 5, 1, 2) = (i_1, ..., i_5) \sim U\{1, ..., 5\}$.
3. $X^* = (X_{i_1}, ..., X_{i_n}) = (91, 32, 32, 100, 11)$ — бутстрепная выборка.

Важно: размер выборки равен исходному

Метод бутстрепа

Этап 2.

Процедуру генерации выборок повторить B раз:

$$X_b^* = (X_{b1}^*, ..., X_{bn}^*), \text{ где } 1 \leqslant b \leqslant B.$$

Далее по каждой выборке посчитаем значение статистики T, получив выборку значений: $T_1^* = T(X_1^*), ..., T_B^* = T(X_B^*)$.

Этап 3.

Полученную выборку использовать для аппроксимации значения оценки, которая называется *бутстрепной оценкой*.

Например, бутстрепная оценка дисперсии T имеет вид

$$\widehat{v}_{boot} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T_b^{*2} - \left(\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T_b^*\right)^2$$

Схема метода бутстрепа

$X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка

$T(X_1, ..., X_n)$ — статистика

Задача: оценить распределение $T(X)$ или функционал $V(T(X))$.

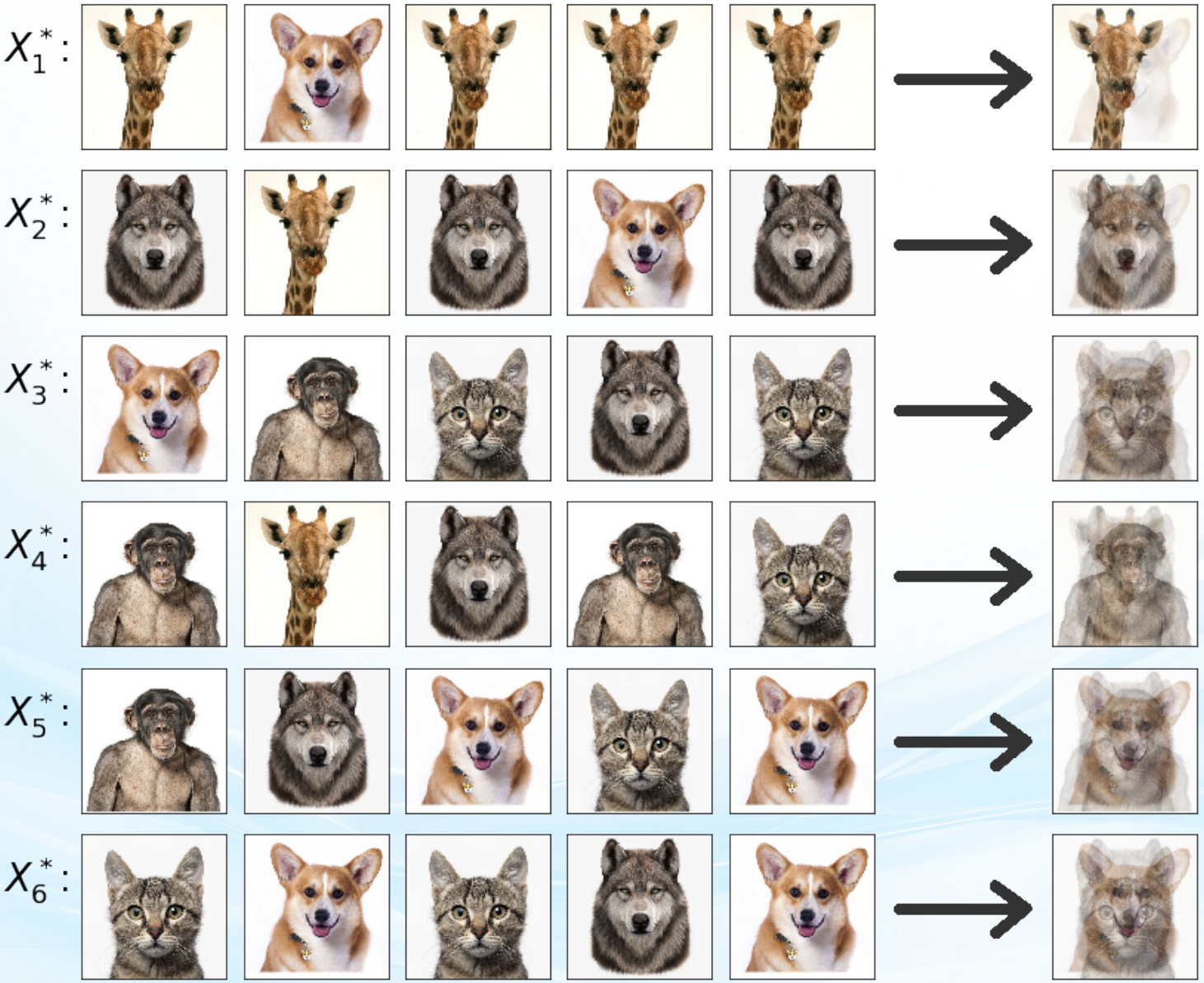
$$\left.\begin{array}{rcl} X^*_{11}, \ ..., \ X^*_{1n} & \longrightarrow & T(X^*_1) \\ & & ... \\ X^*_{b1}, \ ..., \ X^*_{bn} & \longrightarrow & T(X^*_b) \\ & & ... \\ X^*_{B1}, \ ..., \ X^*_{Bn} & \longrightarrow & T(X^*_B) \end{array}\right\} \ v_{boot} \text{ — бутстрепная оценка } v = V(T(X))$$

Зоопарк: оценить дисперсию выборочного среднего

Выборка:

Задача: Для каждого пикселя и каждого цветового канала оценить дисперсию выборочного среднего.

Зоопарк: оценить дисперсию выборочного среднего

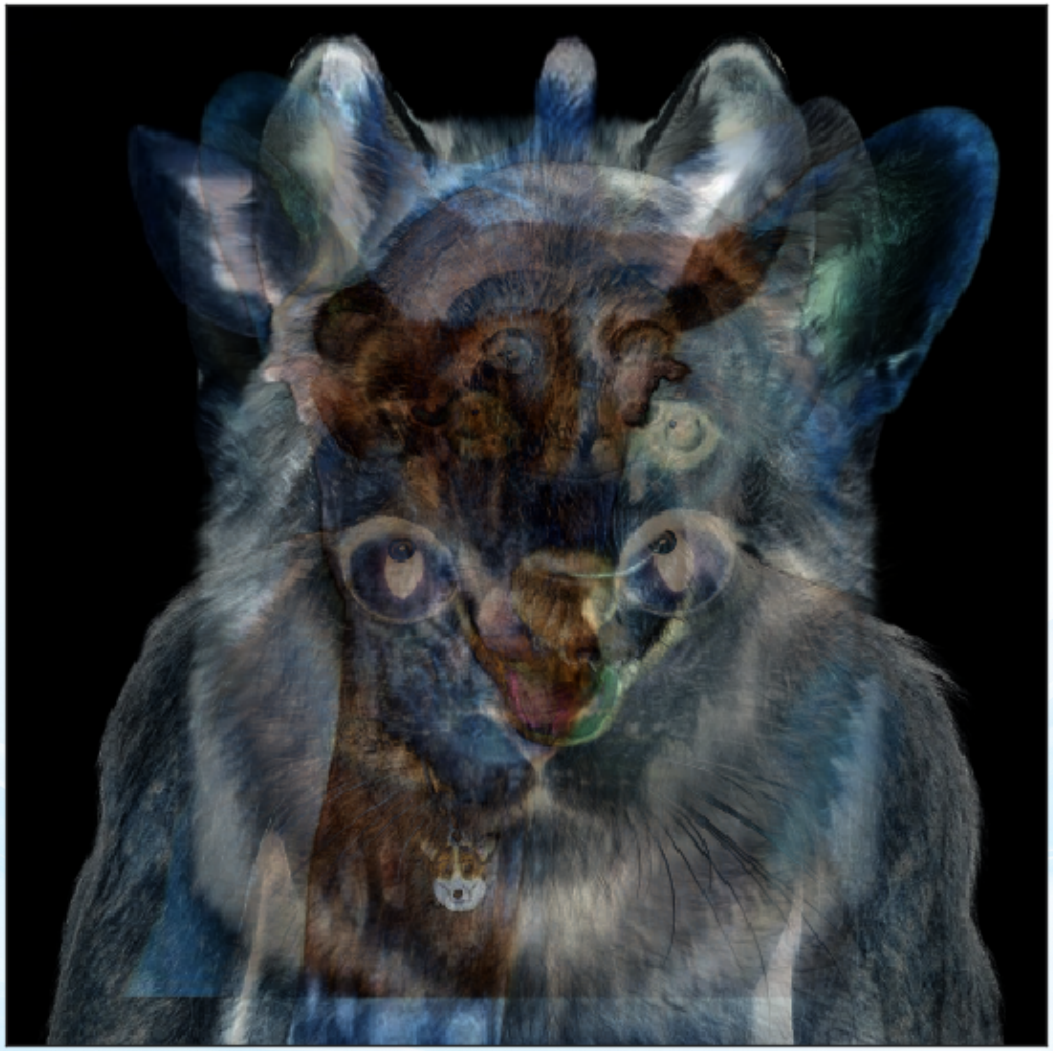


Зоопарк: оценить дисперсию выборочного среднего

Дисперсия по бутстрепной выборке средних:

Зоопарк: оценить дисперсию выборочного среднего

При большем количестве бутстрепных выборок:



Особенности

- Число B стоит брать как можно больше.
- Размер бутстрепной выборки **всегда тот же**, что и у исходной.

  При генерации выборок иного размера распределение статистики T, вообще говоря, может быть другим.

  Например, дисперсия выборочного среднего зависит от размера выборки.
- Генерация бутстрепной выборки проводится независимо с повторами.

  Иначе полученный набор даже не является выборкой.

Бутстрепные доверительные интервалы

1. **Нормальный интервал**

   Пусть $\widehat{\theta}$ — а.н.о. θ с ас. дисп. $\sigma^2(\theta)$.

   $\widehat{v}_{boot}$ — бутстрепная оценка дисперсии.

   Бутстрепный дов. интервал для параметра θ имеет вид

$$\left(\widehat{\theta} - z_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\widehat{v}_{boot}}, \quad \widehat{\theta} + z_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\widehat{v}_{boot}}\right)$$

2. **Центральный интервал**

   $\theta = G(\mathrm{P})$ и $\widehat{\theta} = G(\widehat{\mathrm{P}}_n)$ — оценка методом подстановки.

   $\theta_1^*, ..., \theta_B^*$ — оценки по бутстрепным выборкам.

   Бутстрепный доверительный интервал имеет вид

$$C^* = \left(2\widehat{\theta} - \theta^*_{(\lceil B(1+\alpha)/2 \rceil)}, \quad 2\widehat{\theta} - \theta^*_{(\lfloor B(1-\alpha)/2 \rfloor)}\right).$$

Бутстрепные доверительные интервалы

3. **Квантильный интервал**

$\widehat{\theta}$ — некоторая оценка θ.

$\theta_1^*, ..., \theta_B^*$ — оценки по бутстрепным выборкам.

Бутстрепный доверительный интервал имеет вид

$$C^* = \left(\theta^*_{(\lfloor B(1-\alpha)/2 \rfloor)}, \quad \theta^*_{(\lceil B(1+\alpha)/2 \rceil)}\right).$$

Утверждение. Если существует монотонное преобразование φ, для которого $\varphi(\widehat{\theta}) \sim \mathcal{N}(\varphi(\theta), \sigma^2)$, то $\mathsf{P}\left(\theta \in C^*\right) = \alpha$.

На практике такое преобразование существует редко, но при этом часто может существовать приближенное преобразование.

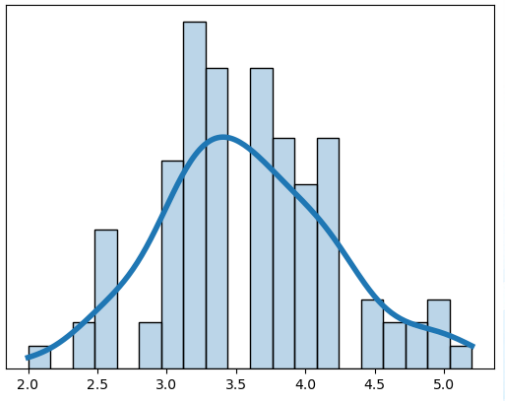
Пример: построение дов. интервалов для θ

$x = (5, 1, 3, 6, 4)$ — реализация выборки

$\theta = \mathsf{E}X_1$ — параметр, $\quad \widehat{\theta} = \overline{X}$ — оценка, $\quad \widehat{\theta} = 3.8$ — реализация оценки

Реализации оценки параметра по бутстрепным выборкам ($B = 100$):

4.2, 4.2, 2.6, 3.2, 4.2, 3.8, 3.2, 3.6, 3.6, 3.4,
3.8, 4.4, 3.6, 3.2, 4.6, 4.2, 3.0, 3.2, 4.0, 3.0,
4.0, 2.4, 3.4, 3.8, 2.0, 3.0, 4.6, 3.2, 3.6, 3.6, ...



1. **Нормальный интервал**

   $\widehat{\theta} = 3.8, v_{boot} = 0.394, z_{0.975} = 1.96$

   $(3.8 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.394}) = (2.57,\ 5.03)$

2. **Центральный интервал**

   $B(1+\alpha)/2 = 100 \cdot 0.975 = 97.5, B(1-\alpha)/2 = 100 \cdot 0.025 = 2.5$

   $\theta^*_{(\lceil 97.5 \rceil)} = 5, \quad \theta^*_{(\lfloor 2.5 \rfloor)} = 2.4$

   $(2 \cdot 3.8 - 5,\ 2 \cdot 3.8 - 2.4) = (2.6,\ 5.2)$

3. **Квантильный интервал**

   $(2.4,\ 5)$

Оценка доли покрытия интервалом

Задача:

$$\text{Оценить P}\left(X \in \left(T_1(X), T_2(X)\right)\right) = \text{EI}\{X \in \left(T_1(X), T_2(X)\right)\}$$

Решение:

1. Генерируем n случайных индексов из $U(1, \ldots, n)$ B раз:

   $(X_{b1}, \ldots, X_{bn}), b \in (1, B)$

2. Считаем $T_1(X_b)$, $T_2(X_b)$ и $\text{I}\{X_b \in \left(T_1(X_b), T_2(X_b)\right)\} = I_b \in \{0, 1\}$

3. $\widehat{\text{P}}(\cdot) = \overline{I_b} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} I_b$


ВСЁ!