② $Loss = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2 \to \min_{\beta}$

в матричном виде: β - столбец

$$Loss = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + \alpha \beta^2 =$$

$$= (y - X\beta)^T (y - X\beta) + \alpha \beta^2 =$$

$$= y^T y - y^T X\beta - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X \beta + \alpha \beta^2$$

хотим минимум

$$\frac{\partial Loss}{\partial \beta} = -2X^T y + 2X^T X\beta + 2\alpha\beta = 0$$

$$-X^T y + (X^T X + \alpha E)\beta = 0$$

$$\beta = (X^T X + \alpha E)^{-1} X^T y$$ - получено решение

③ $Weight = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - x_i^T \beta)^2 \to \min_{\beta}$

к матрицам $W = \|w_{ij}\|$ β - столбец

$$Weight = (y - X\beta)^T W (y - X\beta) =$$

$$= y^T W y - y^T W X \beta - \beta^T X^T W y + \beta^T X^T W X \beta$$

$$\frac{\partial Weight}{\partial \beta} = -2X^T W y + 2X^T W X \beta = 0$$

т.е. $\beta = (X^T W X)^{-1} X^T W y$ - решение