$\boxed{1}$ Для 2 задачи: $\hat{\theta} = \bar{X}$ — несмещ., сильно сост., асимптотич. норм оценка θ

$$P\left(z_{\frac{1-\alpha}{2}} \le \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\sigma^2}} \le z_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \theta \in \left(\hat{\theta} - \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma(\theta),\ \hat{\theta} + \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma(\theta)\right)$$

] $\sigma(\theta)$ — непр ф-ция $\Rightarrow$ $\sigma(\hat{\theta}) = \hat{\sigma}$ — сост. оценка σ

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\hat{\sigma}} = \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)}}_{\overset{d}{\sim}\ \mathcal{N}(0,1)}\ \underbrace{\frac{\sigma(\theta)}{\hat{\sigma}}}_{\xrightarrow{p} 1} \ \overset{d}{\sim}\ \mathcal{N}(0,1)$$

т.е. $\theta \in \left(\hat{\theta} \pm \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}\right)$ — АДИ уровня доверия α

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{т.к. } \hat{\theta} = \bar{X}$$

Для задачи 3:

$\hat{\theta} = 2\bar{X}$ — несмещ., сильно состоят., асимпт. норм оценка θ

$$\sigma(\theta) = \frac{\sqrt{(\theta-0)^2}}{\sqrt{12}} \overset{\theta>0}{=} \frac{\theta}{\sqrt{12}}$$ — непрер.

$$\hat{\sigma} = \sigma(\hat{\theta}) = \frac{\bar{X}}{\sqrt{3}}$$ — сост. оценка σ

Тогда $\theta \in \left(\hat{\theta} \pm \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}\right)$ — АДИ уровня доверия α

Для задачи 6:

$\hat{\theta} = \overline{X}$ – несмещ., сильно сост., а.н.о. θ

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ – а.н.о σ^2

как и в задаче 2

$\theta \in \left(\hat{\theta} \pm \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}\right)$ – АДИ уровня доверия α

$\boxed{5}$ Будем использовать формулу:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\int_0^{y_{1-\alpha}} t^2 f(t)\,dt + \alpha y_{1-\alpha}^2\right)$$

y – квантили распределения F

f – плотность F

$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$ $\quad \gamma = 1$, $x_0 = 0$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{y_{1-\alpha}} \underbrace{\frac{t^2+1-1}{1+t^2}}_{1-\frac{1}{1+t^2}}\,dt + \alpha y_{1-\alpha}^2\right) =$$

$$= \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\frac{1}{\pi}y_{1-\alpha} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{y_{1-\alpha}} + \alpha y_{1-\alpha}^2\right) =$$

$$= \frac{2}{(1-2\alpha)^2} \left(\frac{1}{\pi} y_{1-\alpha} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(y_{1-\alpha}) + \alpha y_{1-\alpha}^2 \right) = \sigma_\alpha^2$$

$\boxed{4}$ Процедура бутстрепа построения доверительного интервала для $\theta = E X_i$

1) Нормальный интервал.

$\hat{\theta}$ – а.н.о. θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$

$\hat{v}_{boot}$ – бутстрепная оценка дисперсии

Тогда бутстрепный доверительный интервал:

$$\left(\hat{\theta} - z_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{v}_{boot}},\ \hat{\theta} + z_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{v}_{boot}} \right)$$

2) Центральный интервал

$\theta_1^*, \ldots, \theta_B^*$ – оценки по бутстрепным выборкам

Тогда бутстрепный доверительный интервал:

$$\left(2\hat{\theta} - \theta^*_{\left(\left\lceil \frac{B(1+\alpha)}{2} \right\rceil\right)},\ 2\hat{\theta} - \theta^*_{\left(\left\lfloor \frac{B(1-\alpha)}{2} \right\rfloor\right)} \right)$$

3) Квантильный интервал

$\hat{\theta}$ – некоторая оценка θ

$\theta_1^*, \ldots, \theta_B^*$ – оценки по бутстрепным выборкам

Тогда бутстрепный доверительный интервал:

$$\left(\theta^*_{\left(\left\lfloor \frac{B(1-\alpha)}{2} \right\rfloor\right)},\ \theta^*_{\left(\left\lceil \frac{B(1+\alpha)}{2} \right\rceil\right)} \right)$$