Метод Пиявского

Духанов А.В.

Санкт-Петербург, 2023

Поиск глобального экстремума

Постановка задачи

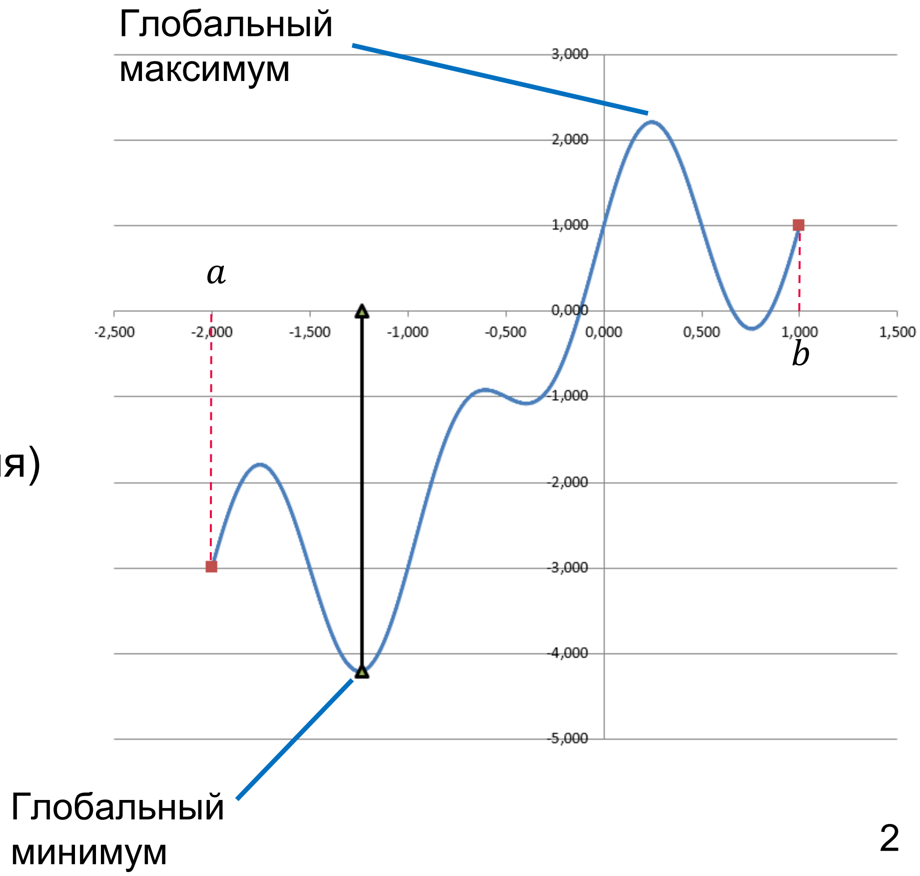
Найти **глобальный экстремум** заданной **одномерной гладкой функции** на заданном отрезке

Исходные данные

Функция $W(x)$, отрезок $[a, b]$, направление оптимизации (минимизация или максимизация)

Выходные данные

Значение аргумента x_{extr} , в котором достигается **глобальный экстремум** (максимум или минимум), значение функции $W(x_{extr})$



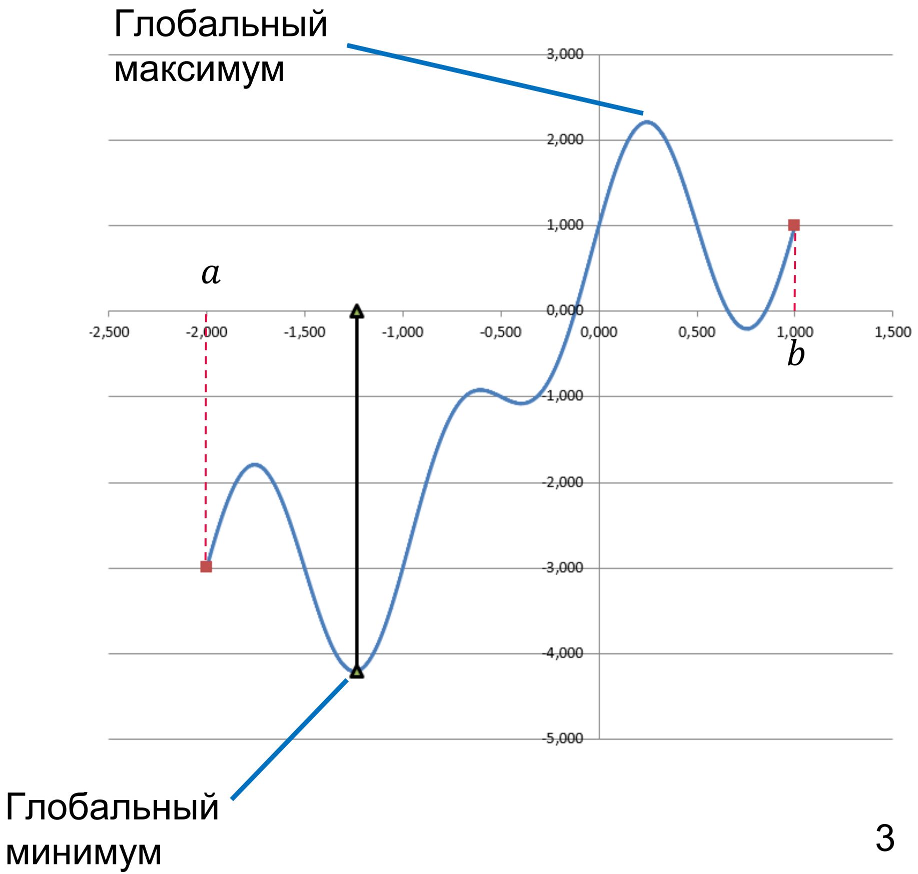
Метод Пиявского

Функция $W(x)$ называется **Липшицевой**, если при любых $u, v \in [a, b]$ найдется константа $L > 0$, при которой выполняется:

$|W(u) - W(v)| \leq L|u - v|$.

Иными словами при любых $u, v \in [a, b]$, *прирост функции* между этими точками по *модулю* будет <u>меньше</u>, чем *прирост самого аргумента по модулю*, помноженного на эту константу.

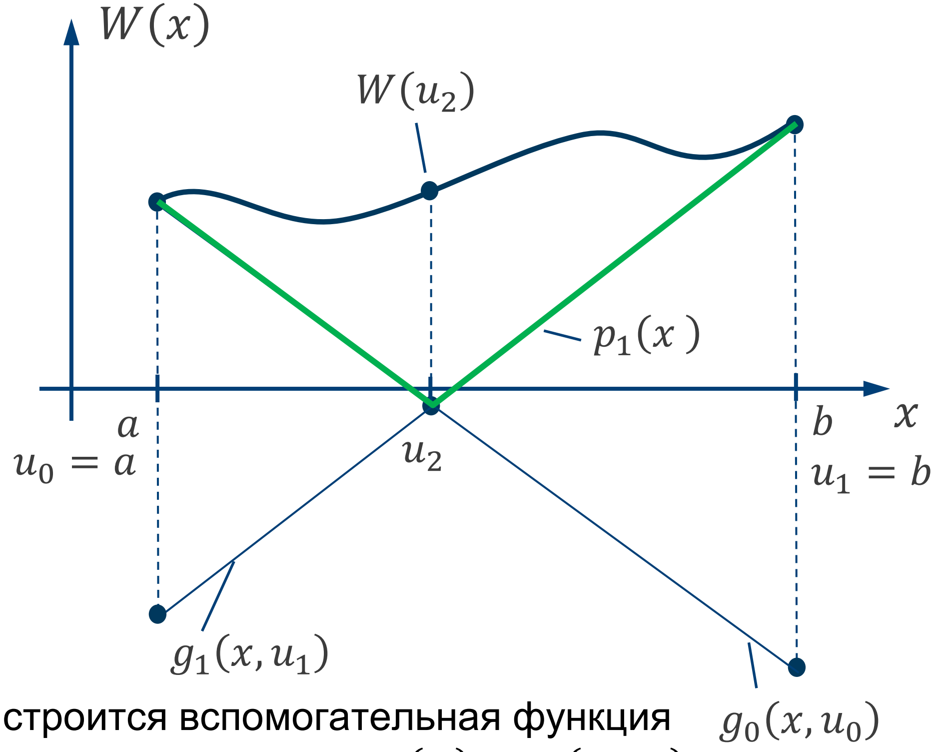
Такая константа L называется **константой Липшица**.



Метод Пиявского

<u>Суть метода</u>

Поиск минимума осуществляется не на исходной функции, а на <u>*специальной функции*</u>, график которой представляет собой состыкованные отрезки или *ломаную линию*, расположенные под углом, соответствующим <u>константе Липшица</u> L. Верхними вершинами ломаная касается графика функции. Ее нижние вершины всегда ниже графика $W(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для Липшицевой на $[a, b]$ функции $W(x)$ с L ломаная линия **никогда** не будет ***выше*** графика функции. По мере увеличения числа итераций она будет приближаться к графику исходной функции снизу. Поэтому такую линию называю минорантой.



На ***нулевой итерации*** $(n = 0)$ или итерации «А» строится вспомогательная функция при $u_0 = a$: $g_0(x, u_0) = W(u_o) - L|x - u_o|$. Ломаная нулевого порядка: $p_0(x) = g_0(x, u_0)$.
На ***первой итерации*** $(n = 1)$ строится $g_1(x, u_1) = W(u_1) - L|x - u_1|$ при $u_1 = b$.
Ломаная первого порядка: $p_1(x) = max\{p_0(x), g_1(x, u_1)\}$

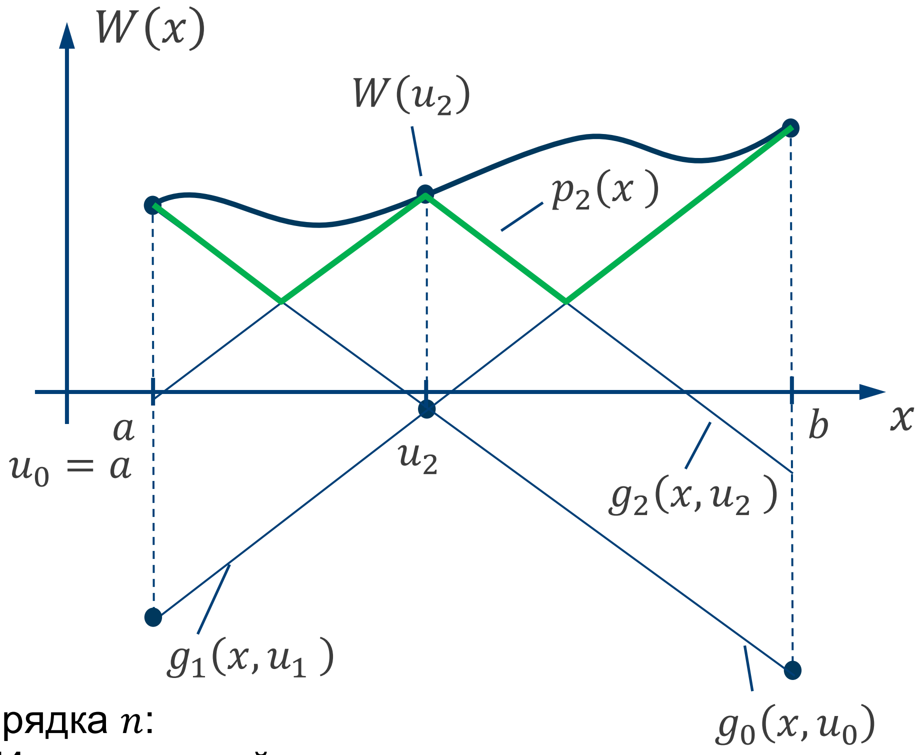
Метод Пиявского

Шаги метода

Нулевая и первая итерация – стартовые.
Далее выполняется цикл итераций.
Итерация 2. Вычисляется точка u_2: минимума функции $u_2 = \min\limits_{x\in[a,b]} p_1(x)$. В данной точке строим новую вспомогательную функцию
$g_2(x, u_2) = W(u_2) - L|x - u_2|$.
Далее строим ломаную второго порядка

$$p_2(x) = max\{p_1(x), g_2(x, u_2)\}$$

Далее итерационный процесс повторяется.
Рассмотрим итерацию n. Имеем ломаную порядка $n-1$: $p_{n-1}(x)$. Тогда $u_n = \min\limits_{x\in[a,b]} p_{n-1}(x)$.
Строим новую вспомогательную функцию:
$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$. Строим ломаную порядка n:
$p_n(x) = max\{p_{n-1}(x), g_n(x, u_n)\} = \max\limits_{i=0,1,\ldots,n} g_i(x, u_i)$. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не будет достигнуто предельное число итераций или не будет выполнено:
$W(u_n) - p_{n-1}(x) < \varepsilon$.



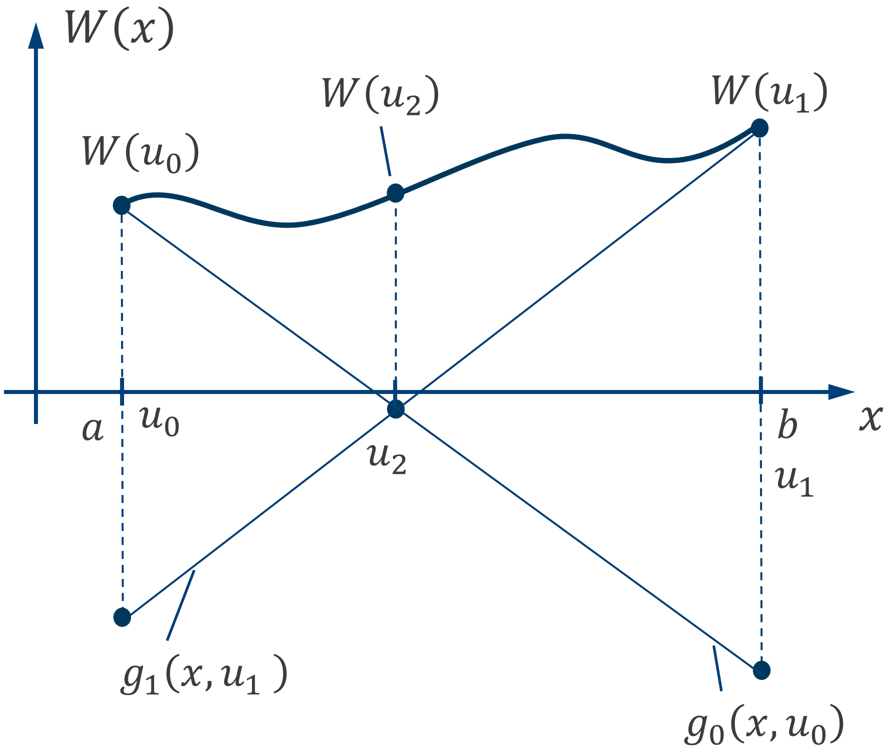
Метод Пиявского

Вычисление точек пересечения

Как вычислить точку пересечения прямых под одинаковыми по модулю, но противоположными уклонами?
На отрезке $[a, b]$ имеем $g_0(x, u_0) = W(u_0) - L(x - u_0)$, $g_1(x, u_1) = W(u_1) + L(x - u_1)$. Тогда точка пересечения u_2 будет вычисляться:

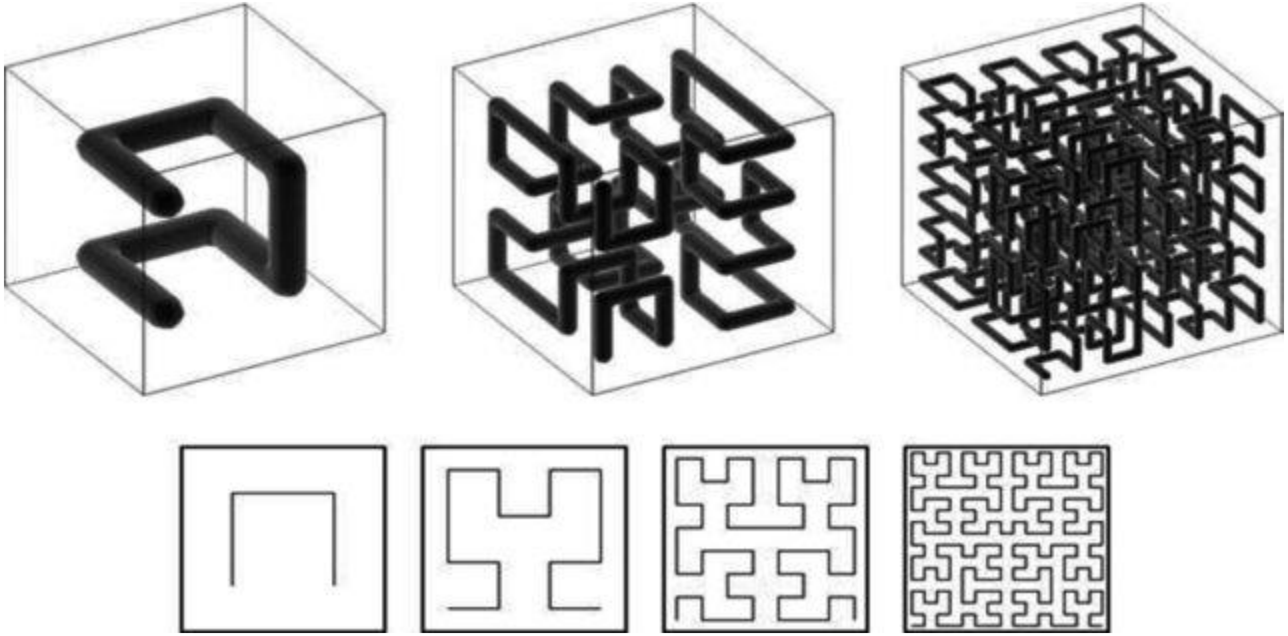
$$u_2 = \frac{W(u_0) - W(u_1)}{2L} + \frac{u_0 + u_1}{2}$$

Большая часть расчета строится на точках пересечения новой вспомогательно функции и ломаной текущего порядка.



Метод Пиявского

<u>Многомерный случай, обход по сетке</u>



Borovska, Plamenka & Ivanova, Desislava. (2015). Partnership for Advanced Computing in Europe Code Optimization and Scaling of the Astrophysics Software Gadget on Intel Xeon Phi.

Метод Пиявского (Ломаных)

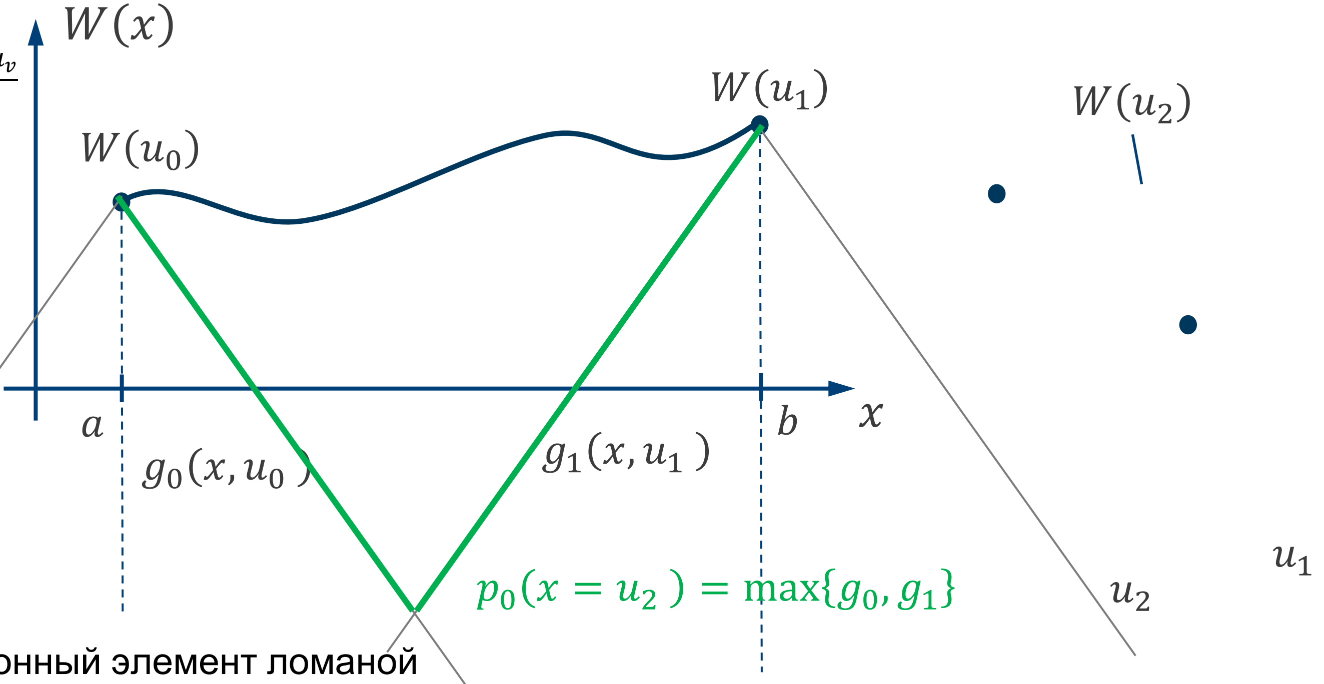
$$u_{cross} = \frac{W(u_q) - W(u_v)}{2L} + \frac{u_q + u_v}{2}$$

Два типа точек в МЛ:

1. Нижние вершины;
2. Верхние вершины (лежать на графике исходной функции)

u_0, u_1 - верхние вершины

$u_{cross} = u_2$ - нижняя вершина



Основной конструкционный элемент ломаной

$$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$$

Метод Пиявского (Ломаных)

$$u_{cross1} = \frac{W(u_q) - W(u_v)}{2L} + \frac{u_q + u_v}{2}$$

$u_q = \max(\text{все верхние вершины слева } u_2)$

$u_v = u_2$

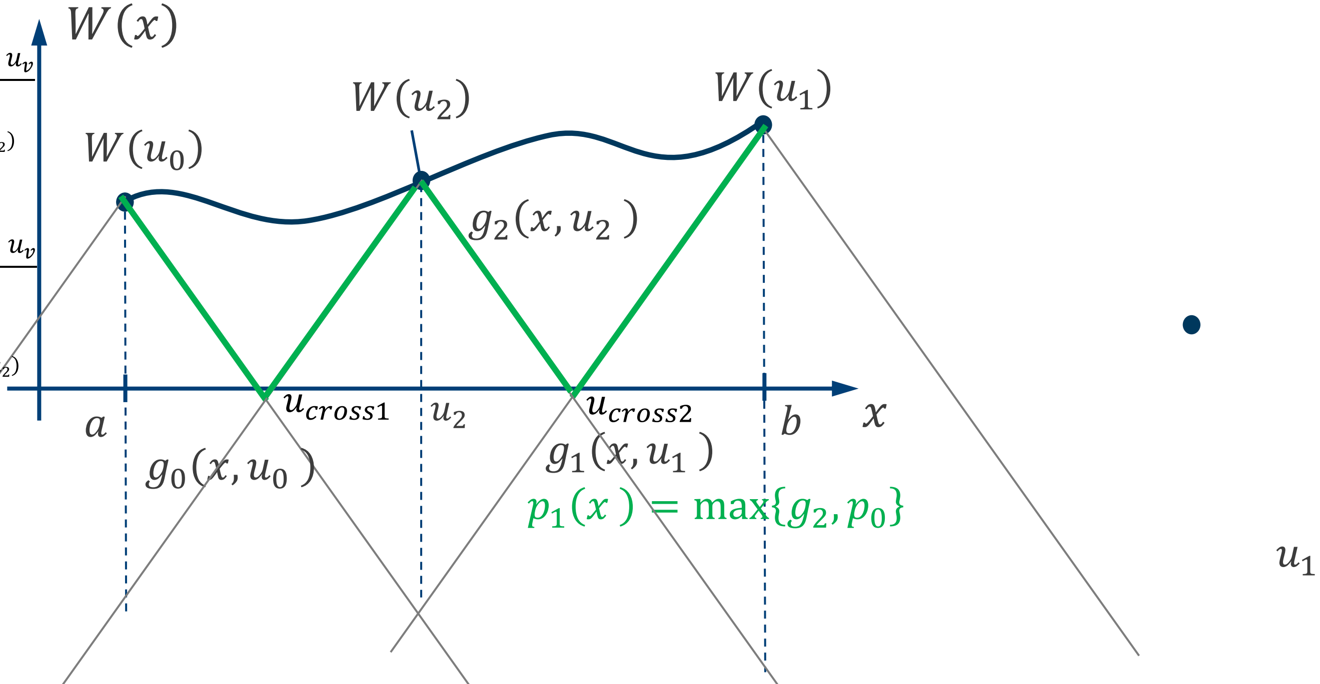
$$u_{cross2} = \frac{W(u_q) - W(u_v)}{2L} + \frac{u_q + u_v}{2}$$

$u_q = u_2$

$u_v = \max(\text{все верхние вершины справа } u_2)$

u_{cross1}, u_{cross2} - нижние вершины

u_0, u_1, u_2 - верхние вершины

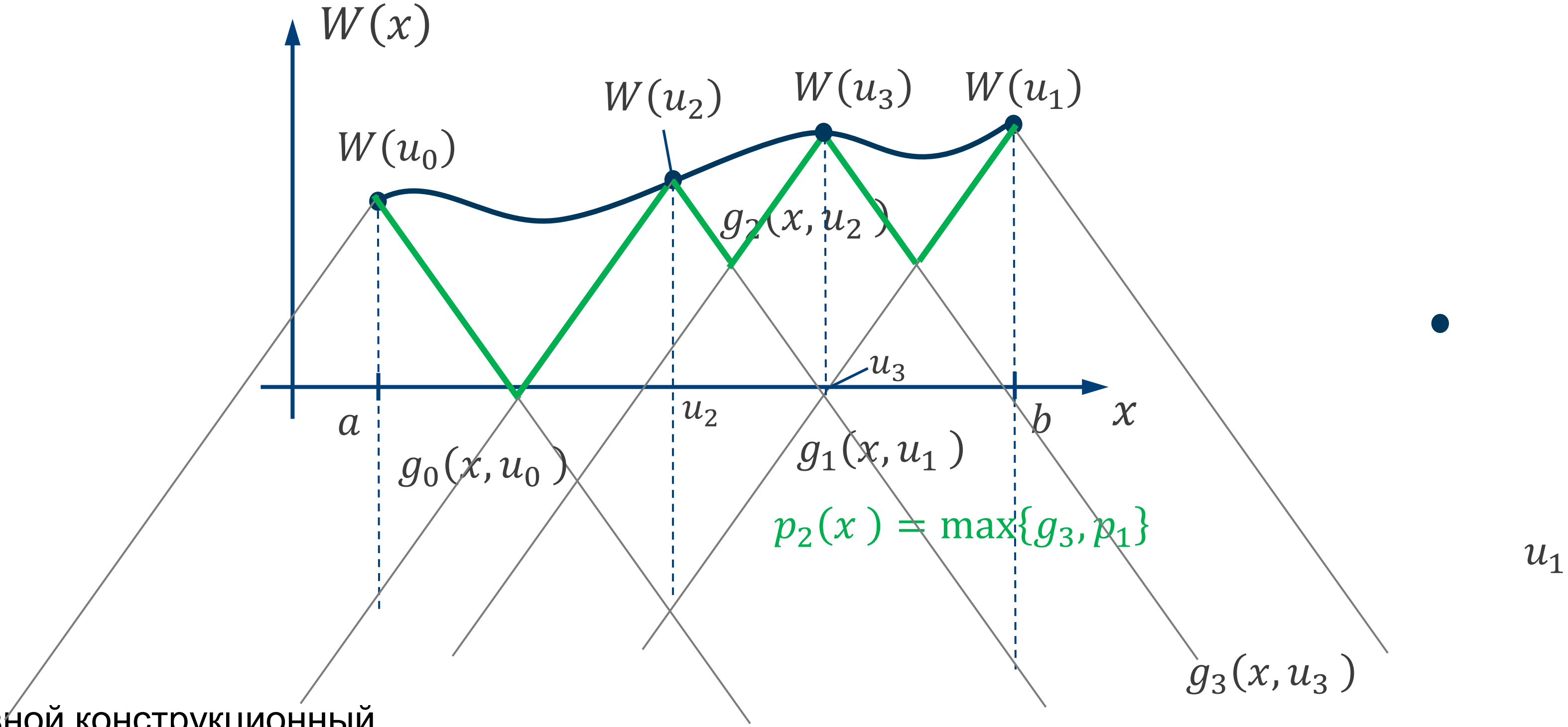


Основной конструкционный элемент ломаной

$$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$$

$$p_1(u_2) = \min_{x \in [a,b]} p_0(x)$$

Метод Пиявского (Ломаных)

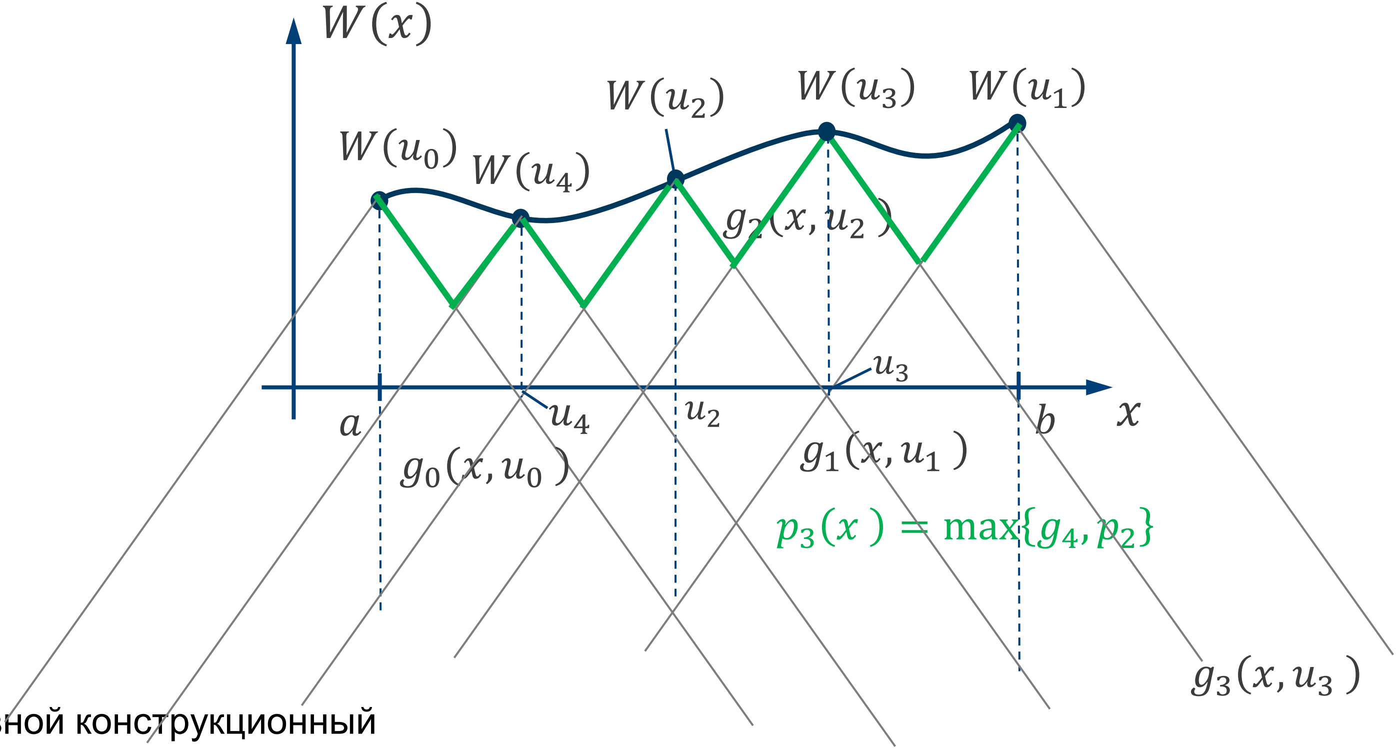


Основной конструкционный элемент ломаной

$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$

$p_1(u_3) = \min_{x \in [a,b]} p_1(x)$

Метод Пиявского (Ломаных)



u_4

Основной конструкционный элемент ломаной

$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$

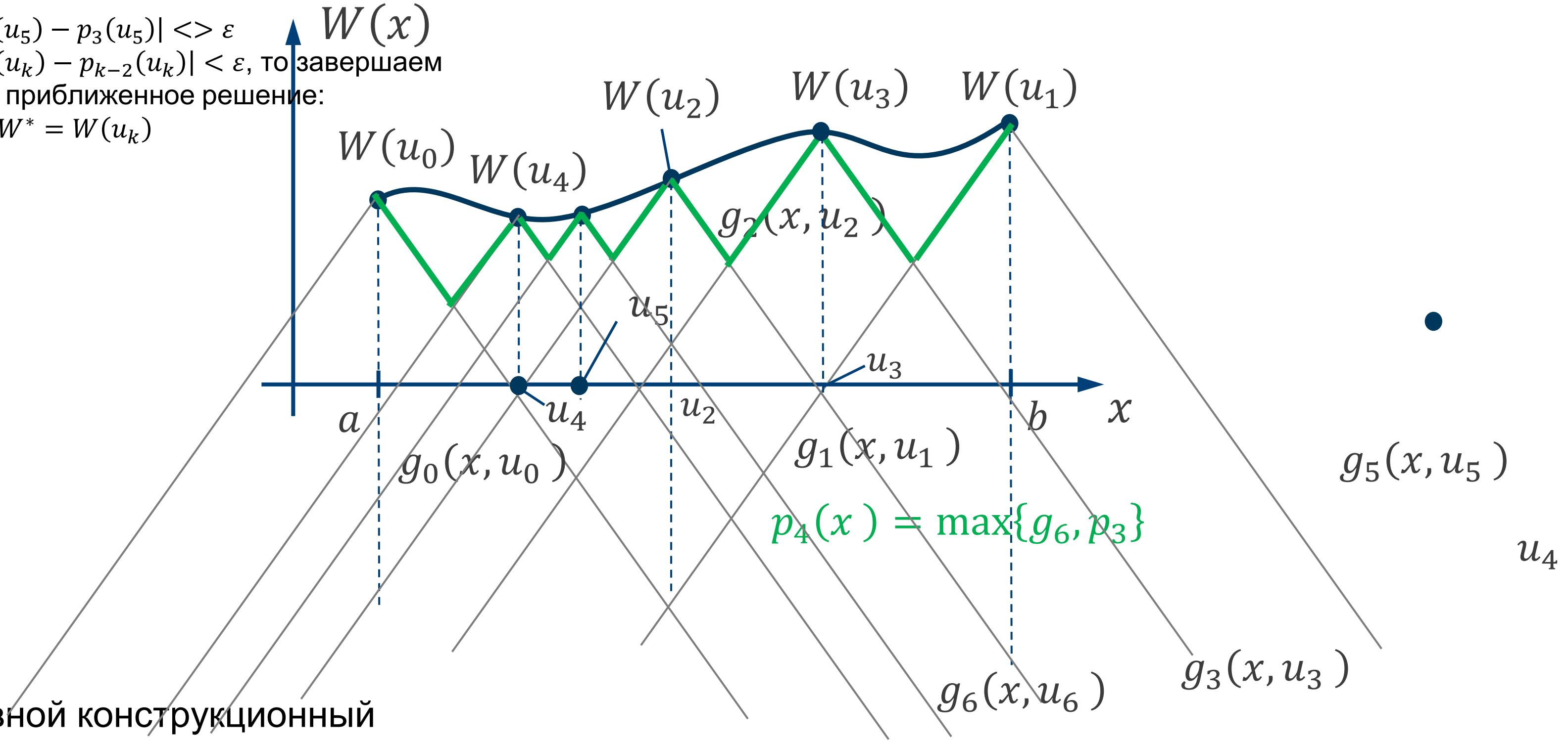
$p_2(u_4) = \min_{x \in [a,b]} p_2(x)$

Метод Пиявского (Ломаных)

$\delta_4 = |W(u_5) - p_3(u_5)| <> \varepsilon$

Если $|W(u_k) - p_{k-2}(u_k)| < \varepsilon$, то завершаем процесс, приближенное решение:

$u^* = u_k, W^* = W(u_k)$



Основной конструкционный элемент ломаной

$g_n(x, u_n) = W(u_n) - L|x - u_n|$

$p_3(u_5) = \min\limits_{x \in [a,b]} p_3(x)$

Спасибо
за внимание!

ITsMOre than a
UNIVERSITY