Решение задачи условной оптимизации методом множителей Лагранжа

Постановка задачи

Задача: Минимизировать целевую функцию при двух ограничениях типа равенство:

$$\text{Минимизировать } f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 6y$$

$$\text{При ограничениях:}$$

$$g_1(x,y) = x - y - 2 = 0$$

$$g_2(x,y) = 3x + y - 1 = 0$$

Метод решения

Шаг 1: Функция Лагранжа

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y) - \lambda_1 \cdot g_1(x,y) - \lambda_2 \cdot g_2(x,y)$$

$$L = 4x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 6y - \lambda_1(x - y - 2) - \lambda_2(3x + y - 1)$$

Шаг 2: Необходимые условия первого порядка

Находим частные производные и приравниваем к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 2y - 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 10y + 6 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x - y - 2) = 0 \Rightarrow x - y = 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(3x + y - 1) = 0 \Rightarrow 3x + y = 1$$

Шаг 3: Решение системы уравнений

Из ограничений:

- Из первого: $x = y + 2$
- Подстановка во второе: $3(y+2) + y = 1 \Rightarrow 4y = -5 \Rightarrow y^* = -\frac{5}{4}$
- Тогда: $x^* = -\frac{5}{4} + 2 = \frac{3}{4}$

Из условий первого порядка для λ_1 и λ_2:

- $\lambda_1^* = \frac{29}{8}$
- $\lambda_2^* = -\frac{11}{8}$

Шаг 4: Значение целевой функции

$$f(x^*, y^*) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 5\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{37}{16}$$

Проверка характера экстремума (Критерий Сильвестра)

Матрица Гессе

$$H(f) = \begin{bmatrix} 8 & amp; 2 \\ 2 & amp; 10 \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби ограничений

$$J = \begin{bmatrix} 1 & amp; -1 \\ 3 & amp; 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(J) = 2$$

Ограничения линейно независимы.

Окаймленная матрица Гессе

$$B = \begin{bmatrix} 0 & amp; 0 & amp; 1 & amp; 3 \\ 0 & amp; 0 & amp; -1 & amp; 1 \\ 1 & amp; -1 & amp; 8 & amp; 2 \\ 3 & amp; 1 & amp; 2 & amp; 10 \end{bmatrix}$$

Вывод: По критерию Сильвестра для задачи с $m = 2$ ограничениями, так как , точка является **локальным минимумом**.

Результаты

Параметр	Символьное значение	Численное значение
x^*	$\frac{3}{4}$	0.75
y^*	$-\frac{5}{4}$	-1.25
λ_1^*	$\frac{29}{8}$	3.625
λ_2^*	$-\frac{11}{8}$	-1.375
$f(x^*, y^*)$	$-\frac{37}{16}$	-2.3125
Характер точки	Локальный минимум	—
$\det(B)$	—	16

Проверка выполнения ограничений

$$g_1(x^*, y^*) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$g_2(x^*, y^*) = 3 \cdot \frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Заключение

Решение задачи условной оптимизации найдено методом множителей Лагранжа. Единственная критическая точка $\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ является локальным минимумом целевой функции при заданных ограничениях, с минимальным значением $f(x^*, y^*) = -\frac{37}{16} \approx -2.3125$.