Решение задачи условной оптимизации методом множителей Лагранжа

Введение

Данная работа представляет собой полный анализ классической задачи условной оптимизации с применением метода множителей Лагранжа и критерия Сильвестра для проверки характера найденной критической точки.

Особенность этой задачи: Количество неизвестных переменных (x, y) совпадает с количеством ограничений (g_1, g_2). Геометрически это означает, что допустимая область представляет собой пересечение двух прямых, то есть единственную точку. Тем не менее, мы строго следуем методологии и применяем полный анализ.

Постановка задачи

Целевая функция:

$$f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 6y$$

Ограничения:

$$g_1(x, y) = x - y - 2 = 0$$

$$g_2(x, y) = 3x + y - 1 = 0$$

Требуется: Найти минимум функции $f(x, y)$ при заданных ограничениях и определить характер найденной точки.

Решение

1. Формулировка функции Лагранжа

Для целевой функции $f(x, y)$ и двух ограничений-равенств $g_1(x, y) = 0$ и $g_2(x, y) = 0$ функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y)$$

Подставляя наши функции:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 6y + \lambda_1(x - y - 2) + \lambda_2(3x + y - 1)$$

2. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Условие экстремума — равенство нулю частных производных функции Лагранжа по всем переменным:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 2y - 4 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \quad \text{(уравнение 1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 10y + 6 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{(уравнение 2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x - y - 2 = 0 \quad \text{(уравнение 3)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 3x + y - 1 = 0 \quad \text{(уравнение 4)}$$

3. Решение системы уравнений

Шаг 3.1: Нахождение координат точки экстремума

Начнём с решения уравнений ограничений (3) и (4), так как они образуют линейную систему двух переменных:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем y:

$$y = x - 2$$

Подставляем во второе уравнение:

$$3x + (x - 2) = 1$$

$$4x - 2 = 1$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4} = 0.75$$

Находим y:

$$y = 0.75 - 2 = -1.25 = -\frac{5}{4}$$

Координаты точки экстремума: $M\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$

Шаг 3.2: Нахождение множителей Лагранжа

Подставим найденные значения $x = \frac{3}{4}$ и $y = -\frac{5}{4}$ в уравнения (1) и (2):

Из уравнения (1):

$$8(0.75) + 2(-1.25) - 4 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$6 - 2.5 - 4 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$-0.5 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.5 \quad \text{(уравнение А)}$$

Из уравнения (2):

$$2(0.75) + 10(-1.25) + 6 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$1.5 - 12.5 + 6 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-5 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \quad \text{(уравнение Б)}$$

Сложим уравнения А и Б:

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-\lambda_1 + \lambda_2) = 0.5 + 5$$

$$4\lambda_2 = 5.5$$

$$\lambda_2 = \frac{5.5}{4} = 1.375 = \frac{11}{8}$$

Найдём λ_1:

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 5 = 1.375 - 5 = -3.625 = -\frac{29}{8}$$

4. Проверка характера точки (Критерий Сильвестра)

Специфика задачи

Так как количество ограничений ($m = 2$) равно количеству переменных ($n = 2$), в допустимой области нет степеней свободы. Это означает, что возможных стационарных точек на многообразии ограничений не может быть более одной.

Для проверки характера найденной точки достаточно проверить выпуклость самой функции $f(x, y)$. Если функция выпукла, то любая найденная стационарная точка является минимумом.

Матрица Гессе целевой функции

Найдём матрицу вторых производных (Гессиан) функции $f(x, y)$:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & amp; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & amp; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Вычислим вторые производные:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(8x + 2y - 4) = 8$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(8x + 2y - 4) = 2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 10y + 6) = 10$$

Таким образом, матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & amp; 2 \\ 2 & amp; 10 \end{pmatrix}$$

Применение критерия Сильвестра

Матрица положительно определена, если все её угловые миноры положительны.

Минор 1-го порядка:

Минор 2-го порядка (определитель полной матрицы):

Вывод по критерию Сильвестра

Поскольку и , матрица Гессе **положительно определена**. Это означает, что функция $f(x, y)$ является **строго выпуклой** (представляет собой эллиптический параболоид ветвями вверх).

Следовательно: Найденная точка M является точкой **безусловного глобального минимума** функции $f(x, y)$, и тем более **условного минимума** на множестве, определяемом ограничениями.

5. Вычисление значения функции

Найдём значение $f(x, y)$ в точке $\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$:

$$f\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) + 5\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(-\frac{5}{4}\right)$$

Вычислим каждое слагаемое:

- $4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{4} = 2.25$
- $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{15}{8} = -1.875$
- $5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 5 \cdot \frac{25}{16} = \frac{125}{16} = 7.8125$
- $-4 \cdot \frac{3}{4} = -3$
- $6 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{30}{4} = -7.5$

Сумма:

$$f_{\min} = 2.25 - 1.875 + 7.8125 - 3 - 7.5 = -2.3125 = -\frac{37}{16}$$

Итоговые результаты

Параметр	amp; **Точное значение**	amp; **Численное значение**
x^*	amp; $\frac{3}{4}$	amp; 0.75
y^*	amp; $-\frac{5}{4}$	amp; -1.25
λ_1^*	amp; $-\frac{29}{8}$	amp; -3.625
λ_2^*	amp; $\frac{11}{8}$	amp; 1.375
$f(x^*, y^*)$	amp; $-\frac{37}{16}$	amp; -2.3125
Δ_1 (тест Сильвестра)	amp; 8	amp;
Δ_2 (определитель H)	amp; 76	amp;

Table 1: Итоговая таблица решения

Заключение

Точка минимума: $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right) = (0.75, -1.25)$

Минимальное значение функции: $f_{\min} = -\frac{37}{16} = -2.3125$

Характер точки: Строгий локальный (и глобальный) минимум, подтверждённый положительной определённостью матрицы Гессе по критерию Сильвестра (,).

Геометрическая интерпретация: Допустимая область, определяемая двумя ограничениями-равенствами, представляет собой единственную точку пересечения двух прямых. На этой точке целевая функция — выпуклый параболоид — достигает своего минимального значения.

Метод множителей Лагранжа позволил найти эту точку аналитически, а критерий Сильвестра подтвердил её оптимальность.