



Анализ бинарных изображений

Бинарные изображения

- Бинарные изображения содержат пикселы только с двумя значениями интенсивности – максимальным и минимальным.
- Бинарные изображения особенно полезны для
 - Идентификации объектов с заданным силуэтом (например, деталей, движущихся по конвейеру);
 - Распознавания символов и текста (например, при обработке документов, интерпретации дорожных знаков);
 - Определения ориентации объектов.
- Бинарные изображения просты для анализа.

Моменты бинарного изображения

Моменты бинарного изображения полезны для

- Характеризации и идентификации объектов на изображении
- Определения местоположения и ориентации объектов на изображении

Моменты бинарного изображения

- Определим бинарное изображение I так:

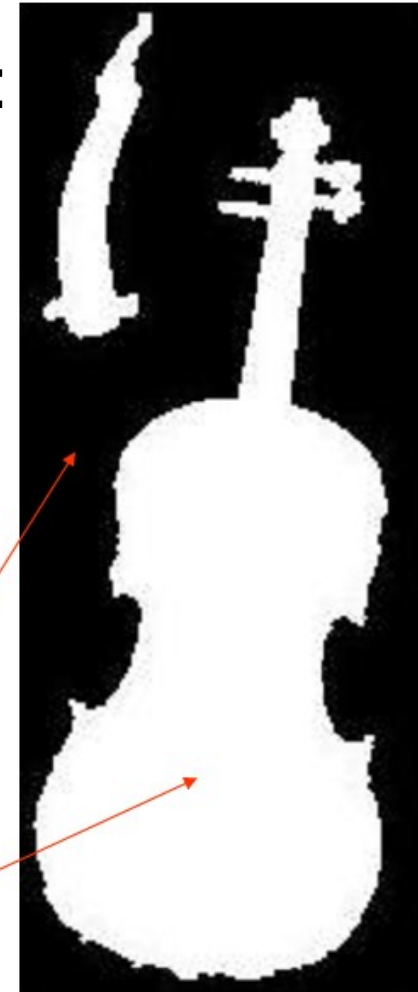
$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \text{объект} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Объект B на изображении:

$$I_B(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \text{объект } B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$I(x, y) = 0$$

$$I(x, y) = 1$$

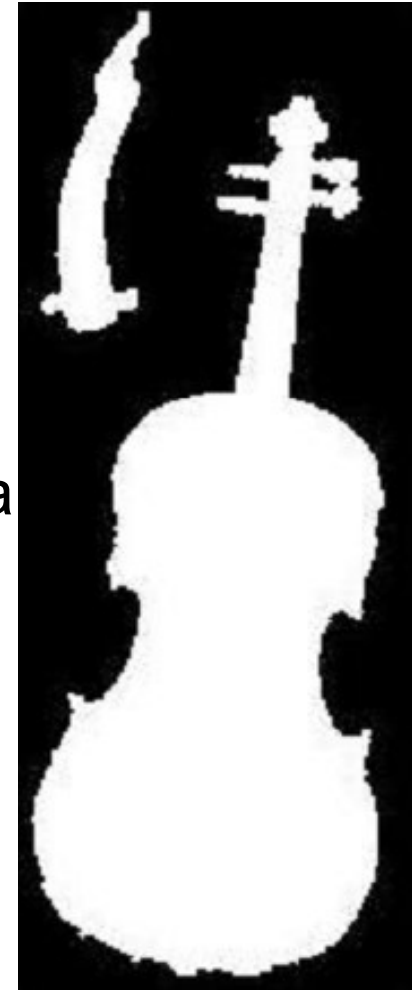


Моменты бинарного изображения

- Нулевой момент объекта B :

$$M_{00} = \sum_x \sum_y I(x, y)$$

- Нулевой момент равен площади объекта и часто обозначается $A = M_{00}$



Моменты бинарного изображения

- Первые моменты объекта B :

$$M_{10} = \sum_x \sum_y xI(x, y)$$

$$M_{01} = \sum_x \sum_y yI(x, y)$$

- Первые моменты
 - не имеют прямой физической интерпретации
 - редко используются на практике, т.к. зависят от масштаба изображения



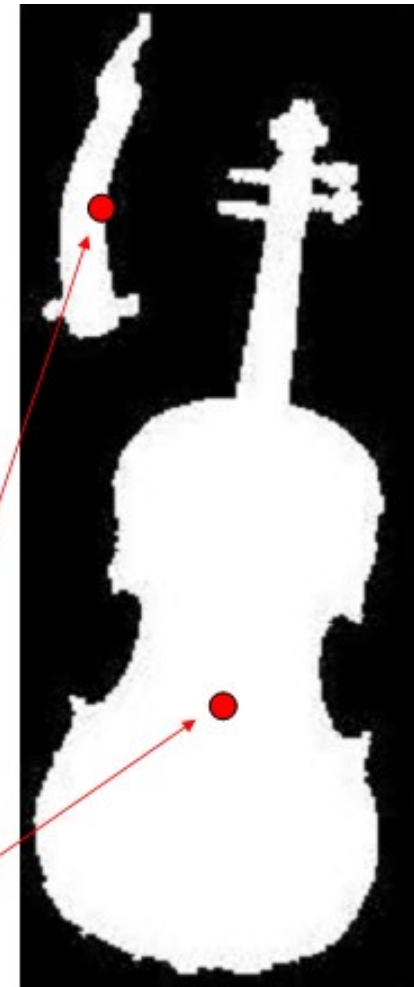
Моменты бинарного изображения

- Нормализованные первые моменты дают центроид объекта B :

$$\bar{x} = \frac{M_{10}}{M_{00}} \quad \bar{y} = \frac{M_{01}}{M_{00}}$$

- Физически центроид – центр тяжести

Центроиды



Моменты бинарного изображения

- Для сдвинутого изображения объекта $(B+t)$:

$$\begin{aligned}\bar{x}(B+t) &= \frac{\sum_x \sum_y x I_{(B+t)}(x, y)}{\sum_x \sum_y I_{(B+t)}(x, y)} \\&= \frac{\sum_x \sum_y x I_B(x - t_x, y - t_y)}{\sum_x \sum_y I_B(x - t_x, y - t_y)} \\&= \frac{\sum_{x+t_x} \sum_{y+t_y} (x+t_x) I_B(x, y)}{\sum_{x+t_x} \sum_{y+t_y} I_B(x, y)} \\&= \frac{\sum_x \sum_y x I_B(x, y)}{\sum_x \sum_y I_B(x, y)} - t_x \frac{\sum_x \sum_y I_B(x, y)}{\sum_x \sum_y I_B(x, y)} \\&= \bar{x} - t_x\end{aligned}$$

Перенумерация слагаемых корректна, если объект $B+t$ не покидает пределов изображения

- Т.о., центростид сдвигается вместе с объектом:

$$(\bar{x}(B+t), \bar{y}(B+t)) = (\bar{x}(B), \bar{y}(B)) + t$$

Моменты бинарного изображения

- Вторые моменты объекта:

$$M_{20} = \sum_x \sum_y x^2 I_B(x, y)$$

$$M_{11} = \sum_x \sum_y xy I_B(x, y)$$

$$M_{02} = \sum_x \sum_y y^2 I_B(x, y)$$

- Ненормализованные вторые моменты:
 - не имеют физической интерпретации
 - не используются на практике
 - связаны с ориентацией объекта, но нужно устранить влияние местоположения объекта

Моменты бинарного изображения

- Вторые центральные моменты объекта:

$$U_{20} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^2 I_B(x, y)$$

$$U_{11} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})(y - \bar{y}) I_B(x, y)$$

$$U_{02} = \sum_x \sum_y (y - \bar{y})^2 I_B(x, y)$$

- Центральные моменты инвариантны к сдвигу и связаны с матрицей инерции U объекта

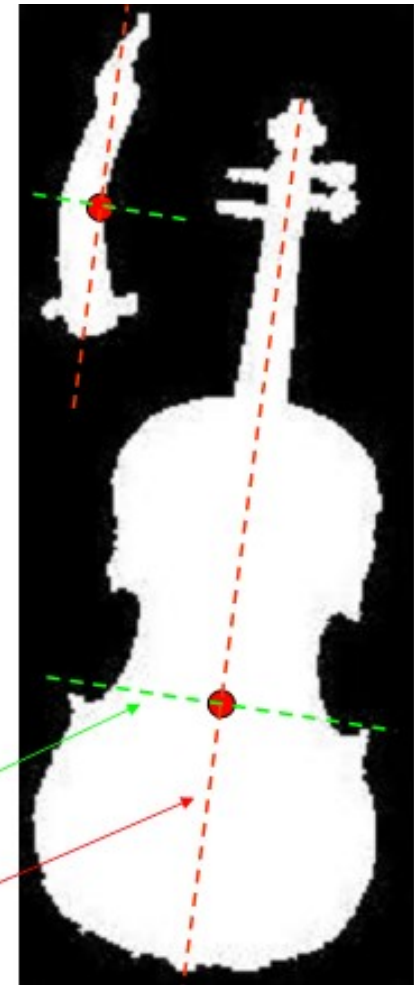
$$\begin{aligned} U &= \sum_x \sum_y \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}^T I_B(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y \begin{pmatrix} (x - \bar{x})^2 & (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \\ (x - \bar{x})(y - \bar{y}) & (y - \bar{y})^2 \end{pmatrix} I_B(x, y) \end{aligned}$$

Моменты бинарного изображения

- Матрица инерции U связана с ориентацией объекта
- Собственные вектора матрицы инерции U определяют направления минимальной и максимальной инерции

Ось максимальной инерции

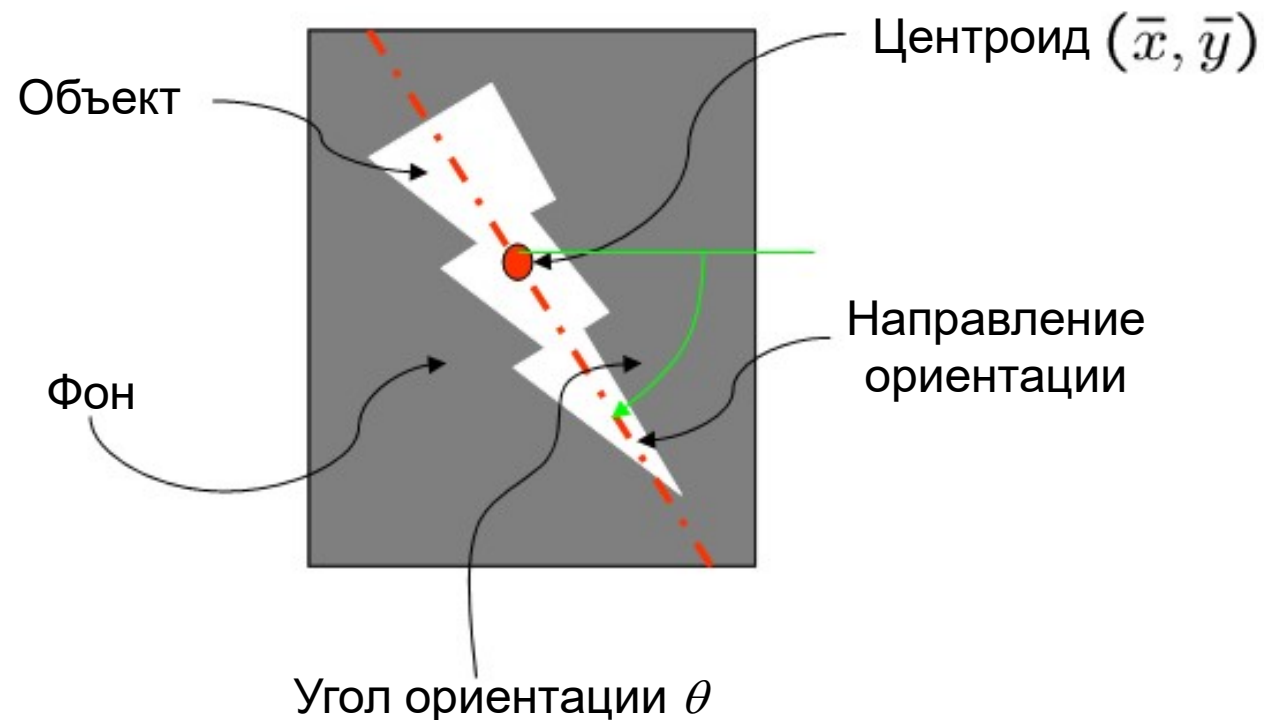
Ось минимальной инерции



Моменты бинарного изображения

- Ориентация объекта:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2U_{11}}{U_{20} - U_{02} + \sqrt{(U_{20} - U_{02})^2 + 4U_{11}^2}} \right)$$



Вычисление моментов

- Пусть (x_i, y_i) – точки объекта на изображении I . Тогда суммирование более компактно можно представить как

$$\sum_i x_i^n y_i^m = \sum_x \sum_y x^n y^m I(x, y)$$

- Моменты могут быть быстро вычислены на основе следующих сумм:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i 1 & S_{20} &= \sum_i x_i^2 \\ S_{10} &= \sum_i x_i & S_{02} &= \sum_i y_i^2 \\ S_{01} &= \sum_i y_i & S_{11} &= \sum_i x_i y_i \end{aligned}$$

- Моменты выражаются следующим образом

$$A = S$$

$$\bar{x} = \frac{S_{10}}{S}$$

$$\bar{y} = \frac{S_{01}}{S}$$

$$U_{20} = S_{20} - \frac{S_{10}^2}{S}$$

$$U_{02} = S_{02} - \frac{S_{01}^2}{S}$$

$$U_{11} = \left(S_{11} - \frac{S_{10} S_{01}}{S} \right)$$

Моменты бинарного изображения

- Центральные моменты могут быть произвольных порядков

$$U_{ij} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^i (y - \bar{y})^j I_B(x, y)$$

- Центральные моменты инвариантны к сдвигу, но не к масштабу изображения
- Нормализация центральных моментов устраняет зависимость от масштаба:

$$N_{ij}(B) = \frac{\sum_x \sum_y (x - \bar{x})^i (y - \bar{y})^j I_B(x, y)}{(M_{00})^{\frac{i+j+2}{2}}}$$

Моменты Ху

- Центральные моменты инвариантны к сдвигу
- Нормализованные центральные моменты инварианты к сдвигу и масштабу
- Моменты Ху (Ming-Kuei Hu в статье "Визуальное распознавание образов по моментным инвариантам" <http://www.sci.utah.edu/~gerig/CS7960-S2010/handouts/Hu.pdf>, 1962 год) инвариантны к сдвигу, масштабу, повороту

Моменты Ху

$$Hu_1 = n_{20} + n_{02}$$

$$Hu_2 = (n_{20} + n_{02})^2 + 4n_{11}^2$$

$$Hu_3 = (n_{30} + 3n_{12})^2 + (3n_{21} - n_{03})^2$$

$$Hu_4 = (n_{30} + n_{12})^2 + (n_{21} - n_{03})^2$$

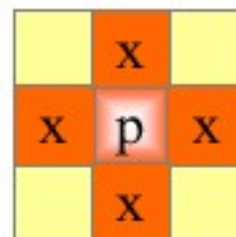
$$Hu_5 = (n_{30} - 3n_{12})(n_{30} + n_{12})[(n_{30} + n_{12})^2 - 3(n_{21} + n_{03})^2] + (3n_{21} - n_{03})(n_{21} + n_{03})[3(n_{30} + n_{12})^2 - 3(n_{21} + n_{03})^2]$$

$$Hu_6 = (n_{20} - n_{02})[(n_{30} + n_{12})^2 - (n_{21} + n_{03})^2 + 4n_{11}(n_{30} + n_{12})(n_{21} + n_{03})]$$

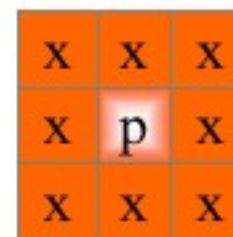
$$Hu_7 = (3n_{21} + n_{03})(n_{30} + n_{12})[(n_{30} + n_{12})^2 - 3(n_{21} + n_{03})^2] + (n_{30} - 3n_{12})(n_{21} + n_{03})[3(n_{30} + n_{12})^2 - (n_{21} + n_{03})^2]$$

СВЯЗНОСТЬ

- Какие пиксеты считать связными?
Обычно используются понятия 4-связности и 8-связности. На рисунке символом 'х' помечены пиксеты, связанные с пикселем р.

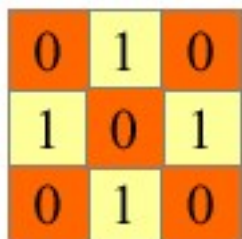


4-связные

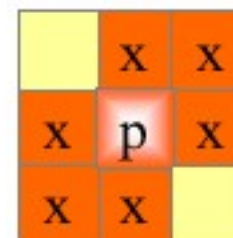
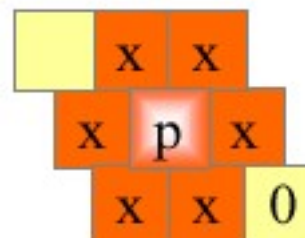


8-связные

- Проблемы** с 4- и 8-связностью:
 - Не подпадает под теорему о жордановой кривой: *Простая кривая разбивает плоскость на две односвязные области.*
 - 4- или 8-связная замкнутая кривая не всегда разбивает изображение на две связные области. Пример:



- Выход**
 - 6-связность – понятие, вводимое для «скошенного» изображения.



Разметка связанных областей

- Необходимо каждой связной области на изображении присвоить уникальную метку
- Нулевые пиксели рассматриваются как фоновые и остаются нулевыми.
- Разметка 4-связных компонент построчным сканированием

1	1	0	1
1	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

1	1	0	2
1	0	0	0
1	0	3	0
0	0	0	0

если $p = 0$ пропустить
иначе если a и b не помечены,
 увеличить номер метки и
 присвоить ее пикселу p
иначе если помечены либо только a ,
 либо только b , скопировать эту метку в p
иначе если помечены и a , и b ,
 если a и b помечены одинаково
 скопировать эту метку в p
 иначе скопировать любую из меток в
 p и сделать эти метки
 эквивалентными

a , b , c и d обозначают 4-соседей пиксела p :

	a	
b	p	c
	d	

Операции математической морфологии

- Операции математической морфологии позволяют:
 - утолщать объекты
 - утоньчать объекты
 - отыскивать границы объектов
 - находить скелеты объектов (центральные линии)
 - строить выпуклые оболочки объектов
 - подавлять бинарный шум (мелкие объекты)
 - и пр.

Множества точек и обозначения

- Бинарные объекты рассматриваются как множества точек
- Для множеств точек A и B обозначим
 - **сдвиг** A на x через $A_x = \{a_i + x \mid a_i \in A\}$
 - **отражение** B через $B^r = \{-b_i \mid b_i \in B\}$
 - **дополнение** A через $A^c = \{a_i \mid a_i \notin A\}$
 - **разность** A и B через $A - B = \{c_i \mid (c_i \in A) \text{ XOR } (c_i \in B)\}$

Дилатация и эрозия

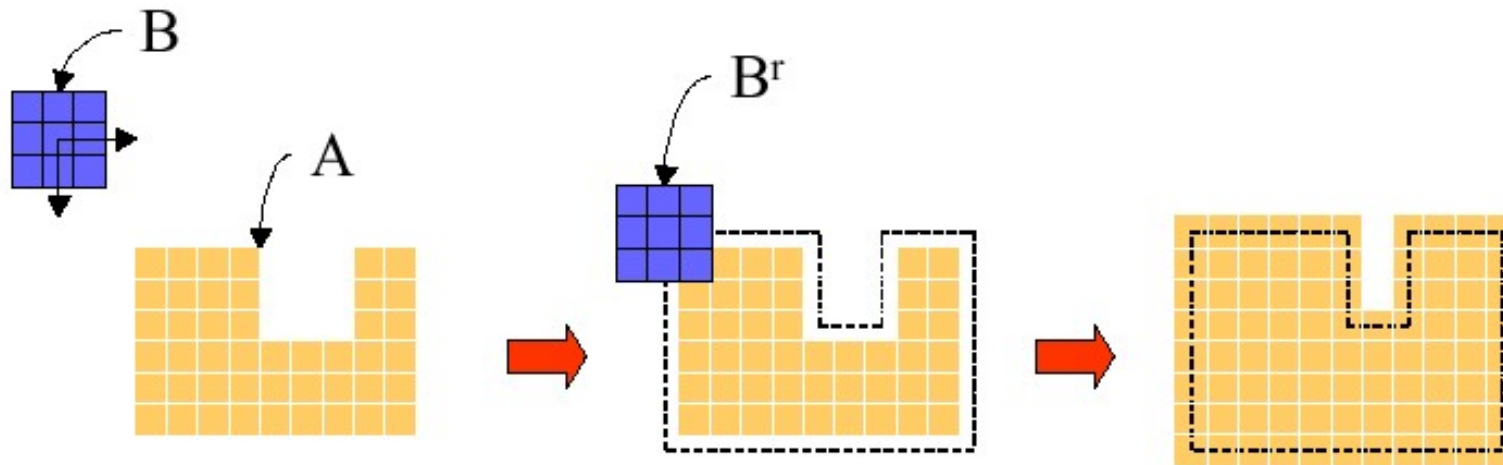
- Двумя основными операциями математической морфологии являются:
 - Дилатация (расширение)
 - Эрозия (сужение)
- Каждая из этих операций бинарна, т.е. задействует два множества:
 - Интересующий объект
 - Структурный элемент

Дилатация

- Дилатация множества A структурным элементом B есть множество

$$\text{dil}(A, B) = \{x_i \mid (B_x^r \cap A) \neq \emptyset\}$$

- Пример. Дилатация множества A структурным элементом B размера 3×3 , с центром в $(0,0)$.

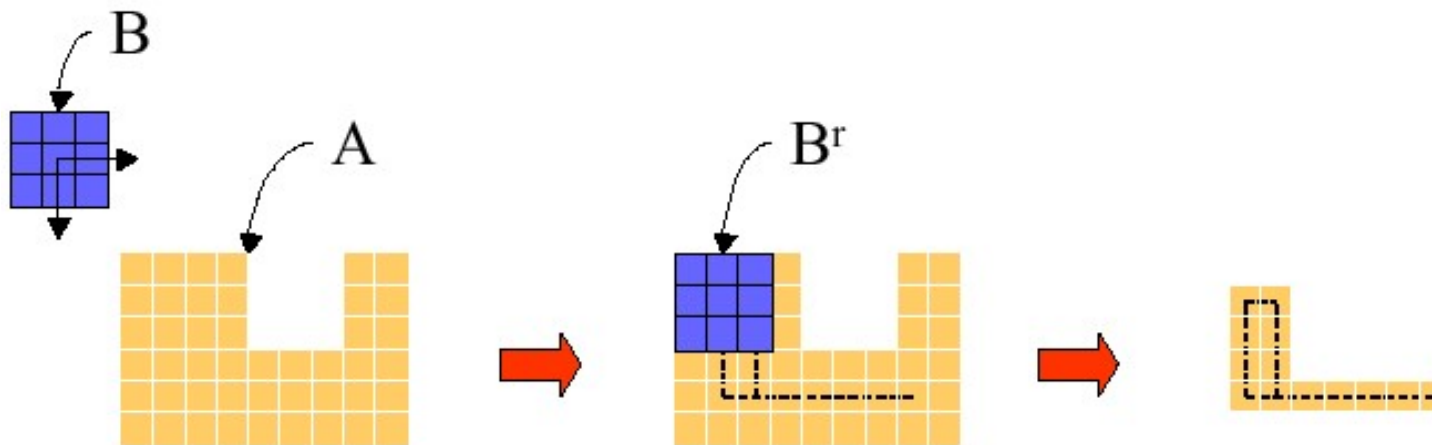


Эрозия

- Эрозия множества A структурным элементом B есть множество

$$er(A,B) = \{x_i \mid B_x \subseteq A\}$$

- Пример. Эрозия множества A структурным элементом B размера 3×3 , с центром в $(0,0)$.



Комбинации дилатации и эрозии

- На базе основных операций математической морфологии, получают операции
 - Заполнение, размыкание, открытие (opening)
 - Пополнение, замыкание, закрытие (closing)
 - Утончение (thinning)
 - Утолщение (thickening)
 - Скелетизация (skeletonisation)
 - ...
- } Наиболее важны

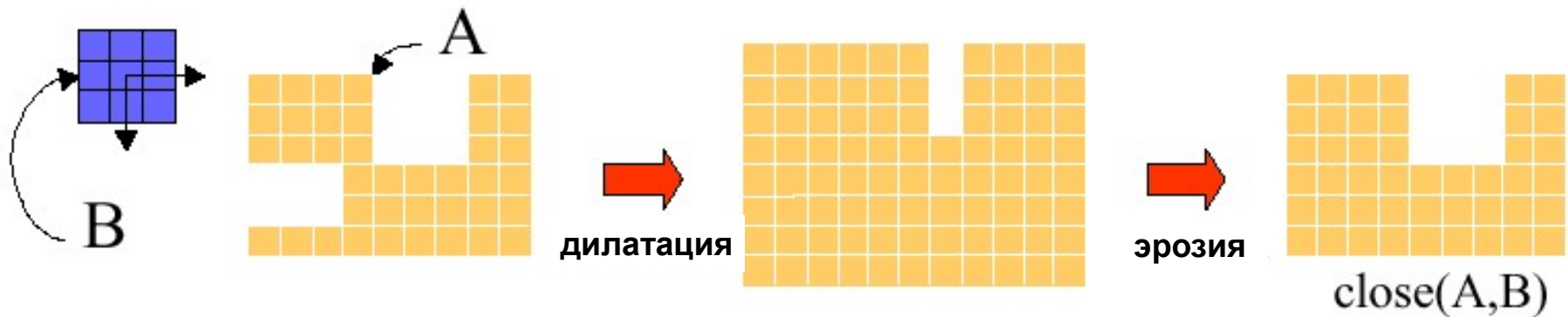
Интуитивная интерпретация

- Дилатация
 - Расширяет объект
- Эрозия
 - Сжимает объект
- Открытие (open)
 - Сглаживает контуры
 - Увеличивает узкие разрывы
 - Ликвидирует тонкие выступы
- Заккрытие (close)
 - Заполняет небольшие разрывы, дырки.

Заккрытие

- Заккрытие можно рассматривать как «сглаживание снаружи»

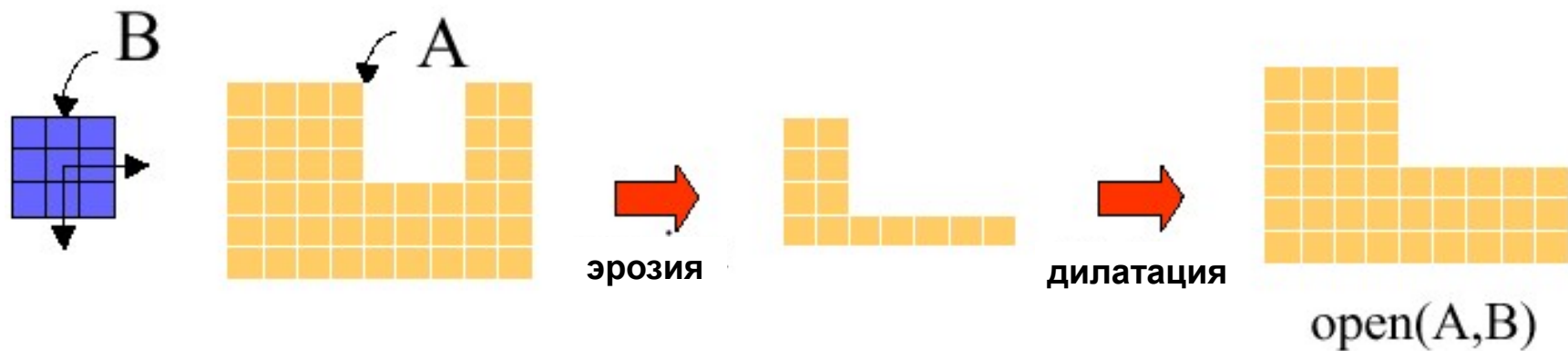
$$\text{close}(A,B) = \text{er}(\text{dil}(A,B),B)$$



Открытие

- Открытие можно рассматривать как «сглаживание изнутри»

$$\text{open}(A,B) = \text{dil} (\text{er} (A,B),B) = \cup \{B_x | B_x \subseteq A\}$$



Идемпотентность

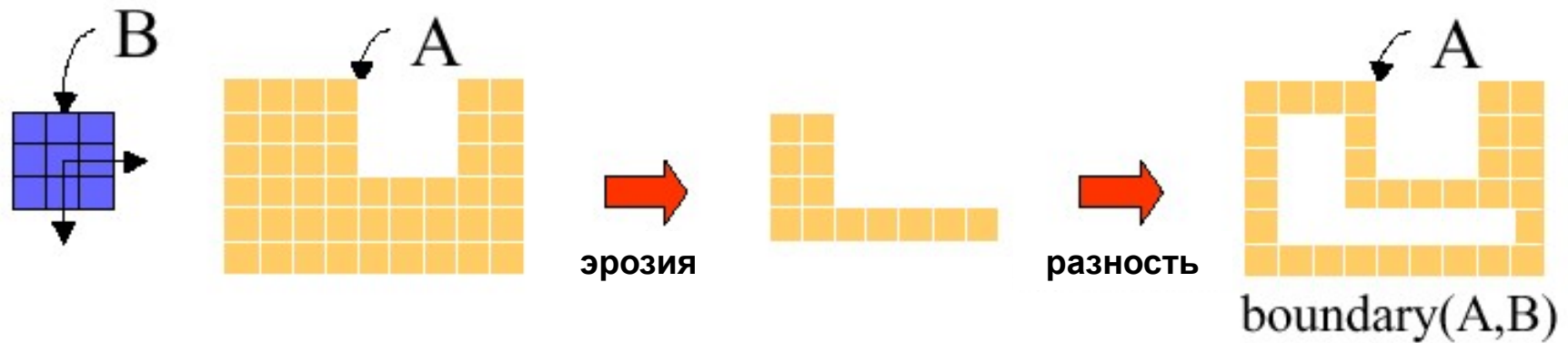
- Повторные применения открытия и закрытия не имеют эффекта, т.е.
 - $\text{open}(\text{open}(A,B),B) = \text{open}(A,B)$
 - $\text{close}(\text{close}(A,B),B) = \text{close}(A,B)$

Дополнительные операции

- Поиск границы объекта
- Заливка контура
- Скелетизация

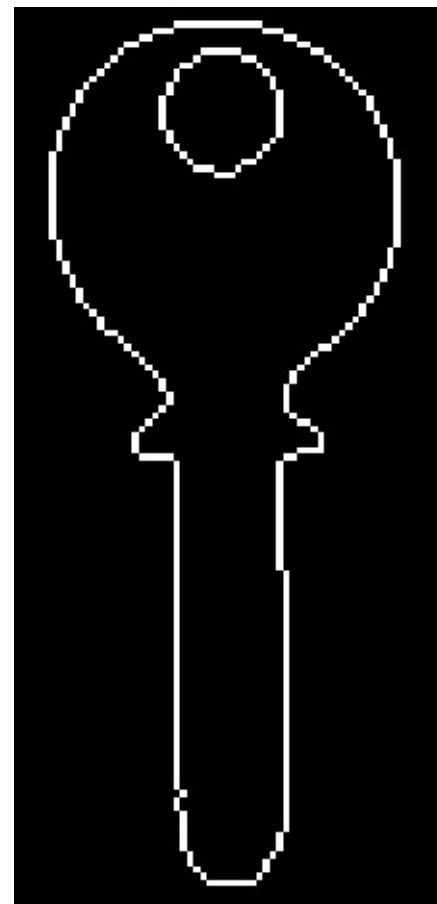
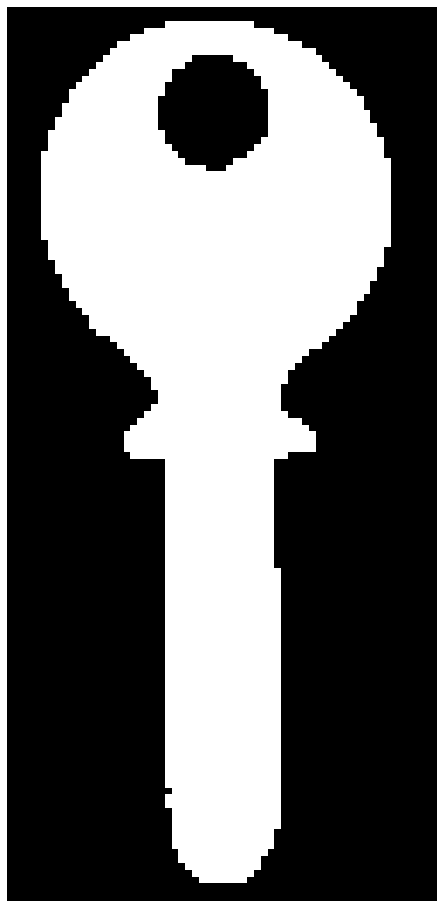
Поиск границы объекта

$$\text{boundary}(A,B) = A - \text{er}(A,B)$$



Поиск границы объекта

- Пример

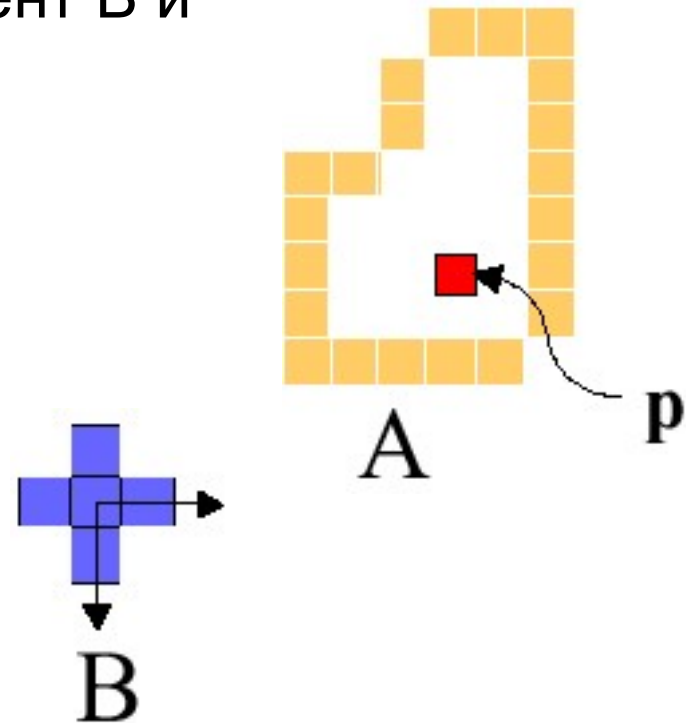


Заливка контура. Задача

Задача: заполнить внутренность 8-связного контура A , если внутри этого контура известен один пиксел p .

Используются структурный элемент B и

- Итеративные дилатации
- Пересечение
- Дополнение



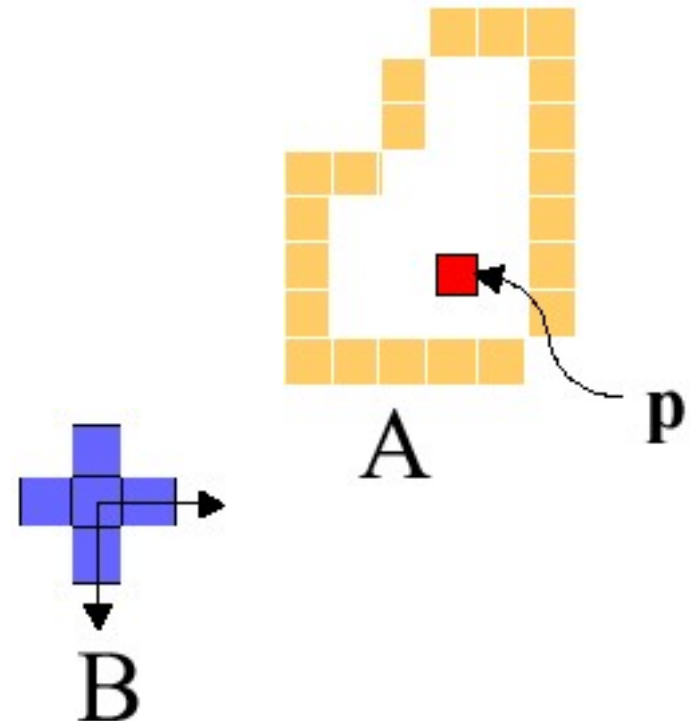
Заливка контура. Решение

- Пусть $C_0 = \mathbf{p}$

- Вычислить

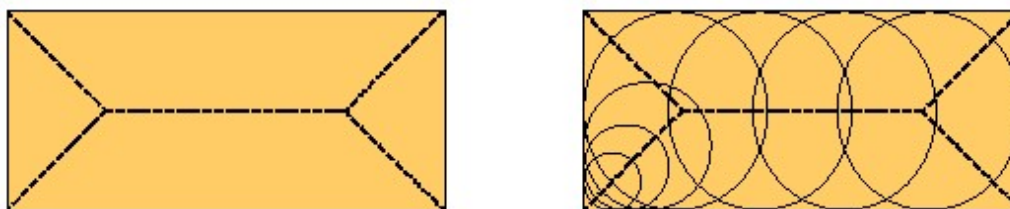
$$C_k = \text{dil}(C_{k-1}, B) \cap A^c, \text{ для } k = 1, 2, \dots$$

- Остановиться, когда $C_k = C_{k-1}$,
- C_k есть внутренность A



Скелетизация

Скелет \Leftrightarrow медианные линии (линии гашения огня).



Скелетизация – сравнительно быстрый алгоритм.

$$\text{skel}(A) = \bigcup_{k=0}^{K-1} \{ \text{er}(A, kB) - \text{open}(\text{er}(A, kB), B) \}$$

где

B – структурный элемент,

$\text{er}(A, kB)$ – k последовательных эрозий A ,

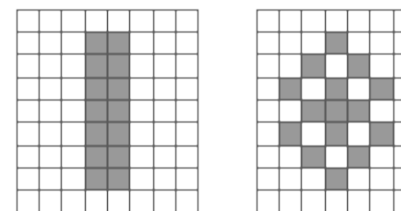
K – количество итераций, необходимых для полной эрозии A .

Скелетизация: еще один подход

Неформальное определение скелета —
линейное представление объекта, которое:

- 1) имеет толщину в один пиксел;
- 2) проходит по центру объекта;
- 3) сохраняет топологию объекта.

Условия 1-3 не всегда реализуемы:



Существует масса процедур построения скелета, в той или иной мере, удовлетворяющих условиям 1-3.

Скелетизация: еще один подход

Операция *утончения* может проводиться так.

Маска соседей, определяемая структурным элементом, перемещается по изображению.

Пикселу, соответствующему центру маски, сопоставляется нулевой отклик, при выполнении определенных условий.

Центральный пиксел **не** заменяется нулем, только если:

- а) найден изолированный пиксел;
- б) удаление пиксела изменило бы связность;
- в) удаление пиксела укоротило бы линию.



Скелетизация: еще один подход

При использовании только условия а) каждый объект сжимается до единственного пиксела (полезно для подсчета объектов).

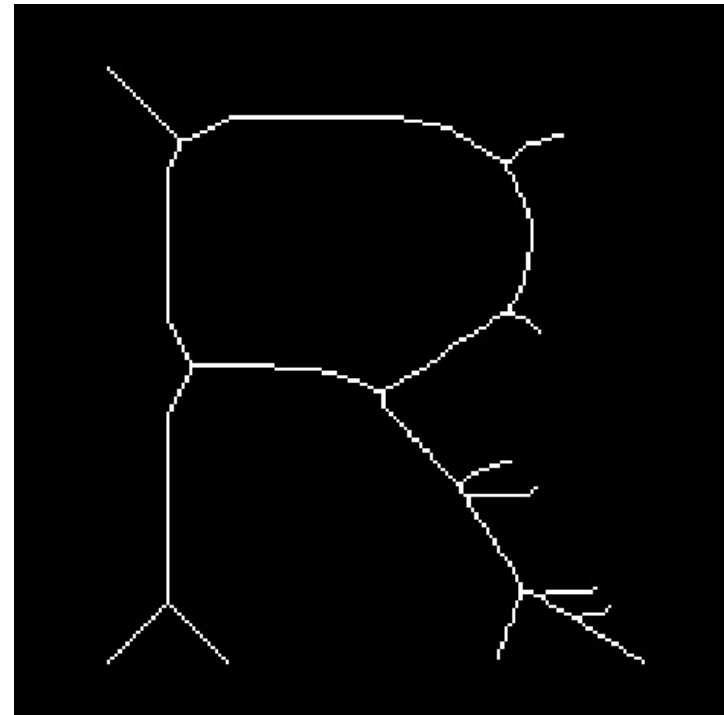
При использовании условий а) и б) каждый объект сжимается либо в пиксел, если он не содержит «дыр», либо в кольца, если он содержит «дыры».

Использование трех условий дает «полный скелет»



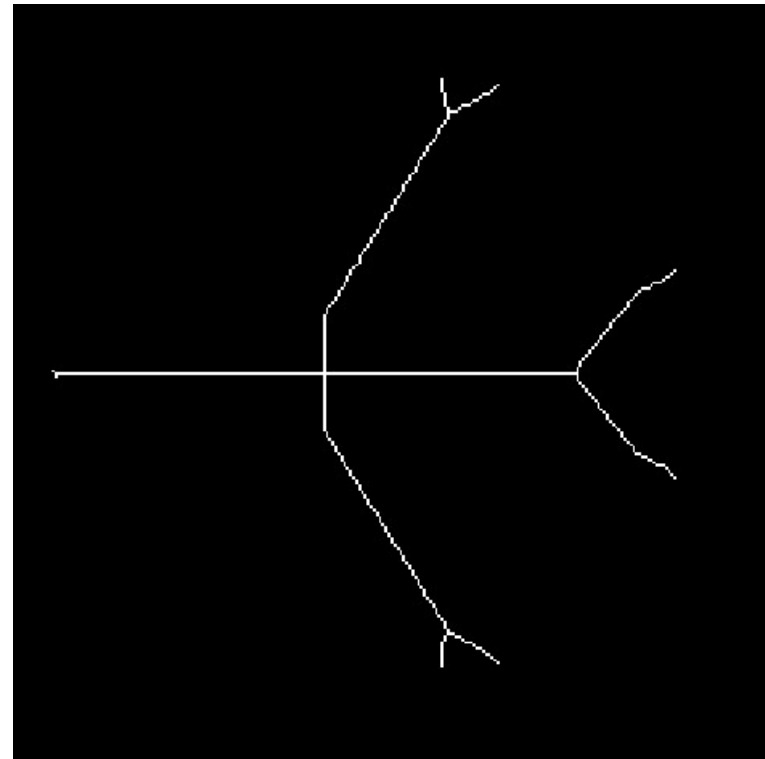
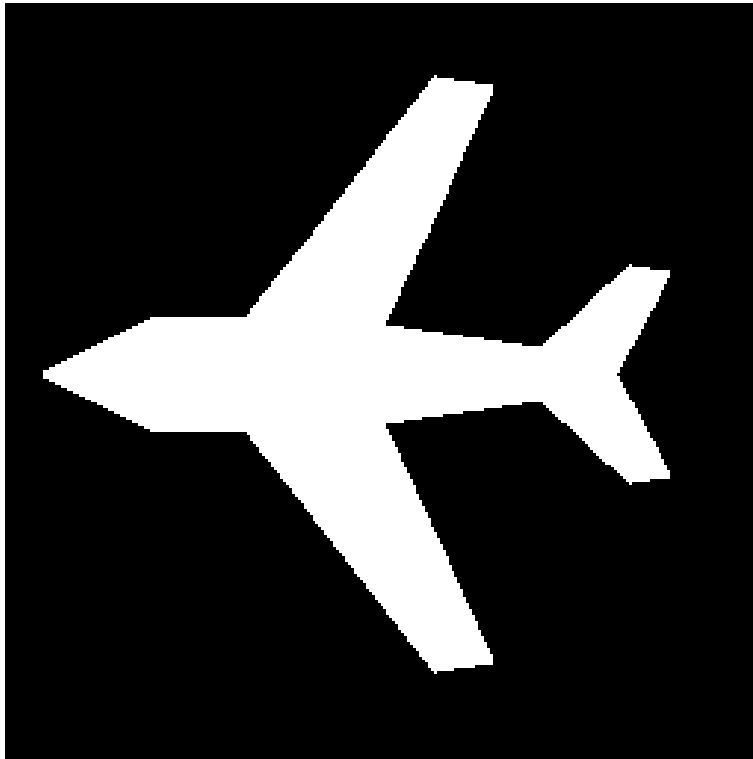
Скелетизация

- Пример



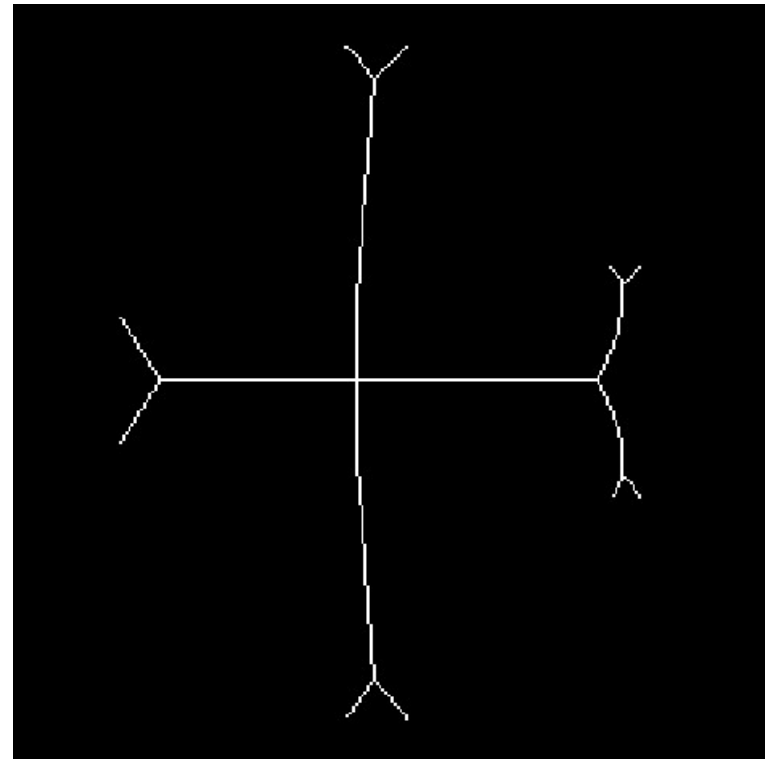
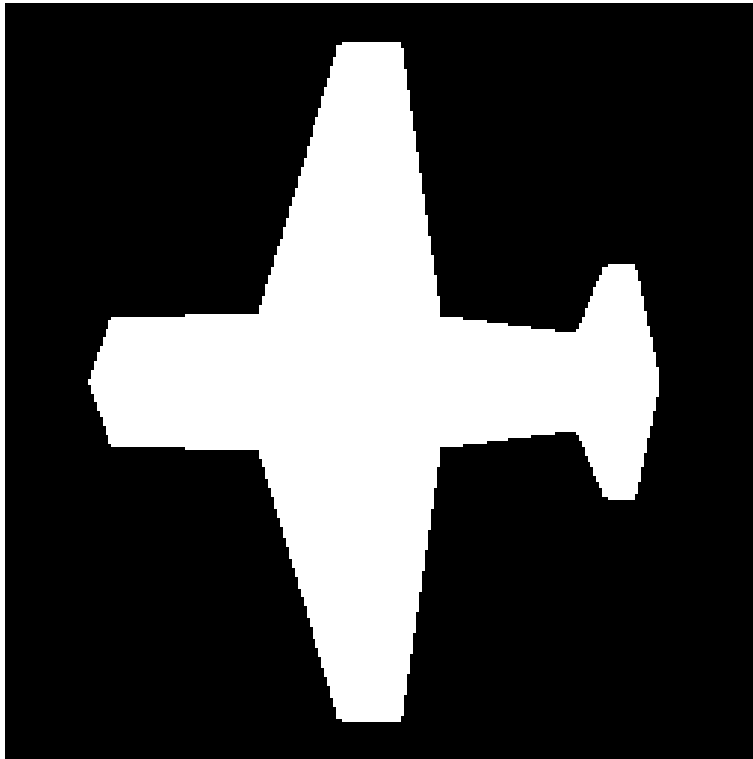
Скелетизация

- Пример



Скелетизация

- Пример

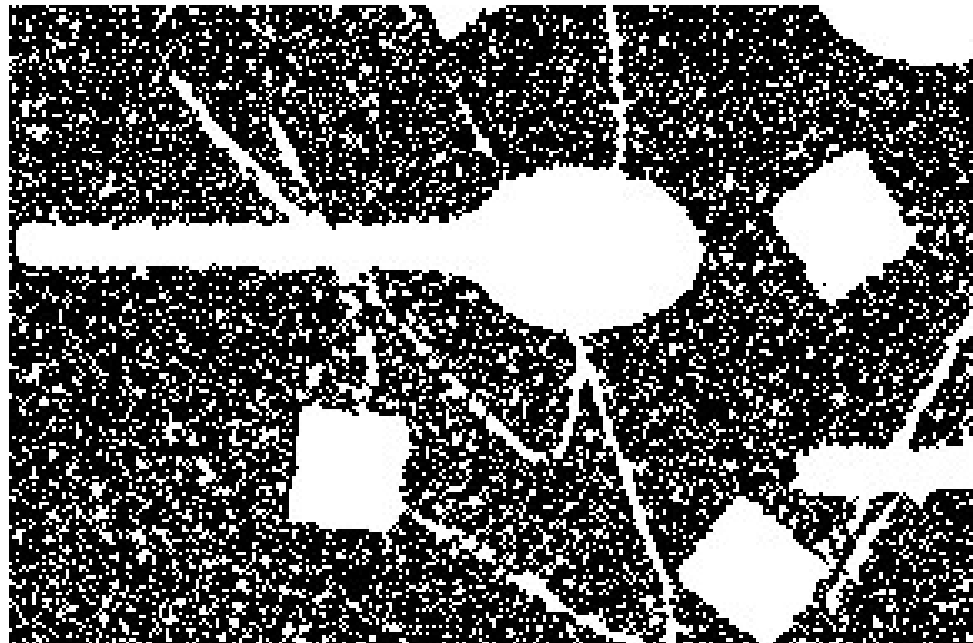


Морфологическое подавление шума

- Широко известный способ включает следующие шаги:
 - Эрозия (erosion)
 - Дилатация (dilation)
 - Закрытие (closing)
 - Открытие (opening)

Морфологическое подавление шума

- Пример бинарного изображения с сильным шумом



Морфологическое подавление шума

- Применение эрозии с различными структурными элементами



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Морфологическое подавление шума

- Пример изображения с дефектами распознаваемых объектов



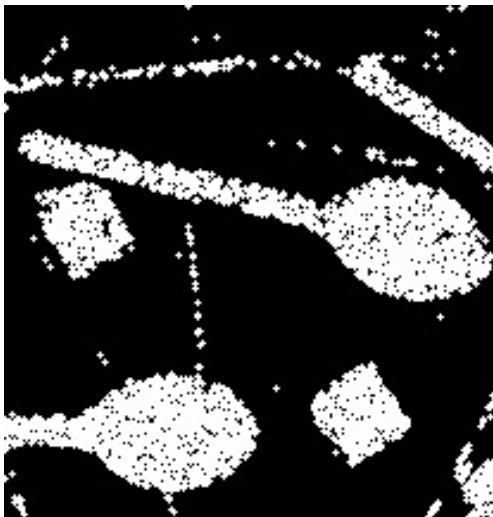
Морфологическое подавление шума

- Не во всех случаях математическая морфология так легко убирает дефекты, как хотелось бы



Морфологическое подавление шума

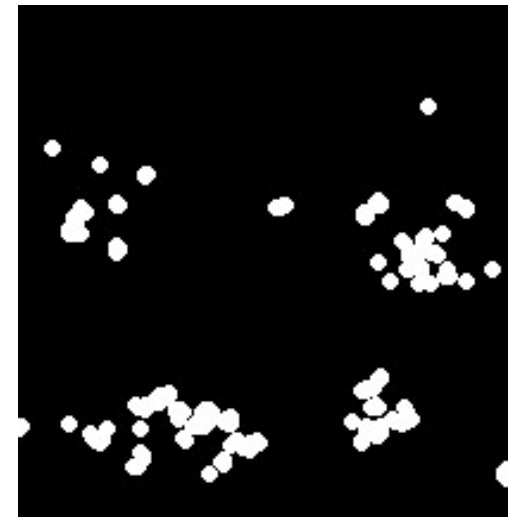
- Примеры применения операции открытия (пополнения) с различными структурными элементами



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Обнаружение объектов с помощью сегментации

- При достаточном контрасте «объект-фон» объект легко обнаружить с помощью
 - методов выделения границ
 - морфологических функций

Обнаружение объектов с помощью сегментации

- Процедура обнаружения включает следующие логические шаги

Шаг 1: Считывание изображения

Шаг 2: Детектирование всего объекта

Шаг 3: Заполнение разрывов контуров

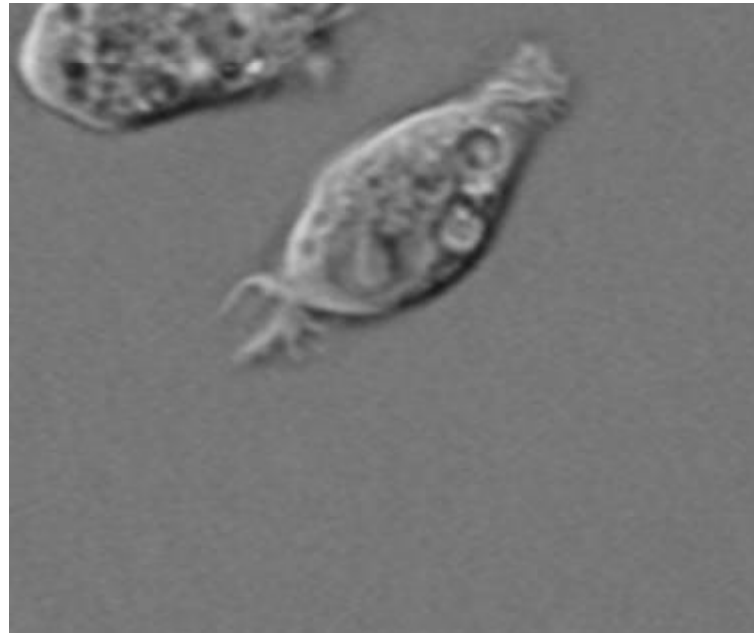
Шаг 4: Заполнение «дырок»

Шаг 5: Ликвидация «лишних» объектов на границе

Шаг 6: Сглаживание объекта

Шаг 1: Считывание изображения

- Считаем некоторое медицинское изображение



Шаг 2: Детектирование всего объекта

- После повышения контрастности применим оператор Собеля с использованием некоторого порога.



Шаг 3: Заполнение разрывов контуров

- Разрывы удаляются операцией закрытия с последовательно применяемыми вертикальным и горизонтальным структурными элементами.



Шаг 4: Заполнение «дырок»

- Заполнение «дырок» внутри объекта



Шаг 5: Удаление объектов на границе

- 4-связные объекты с границей изображения подавляются



Шаг 6: Сглаживание объекта

- Границы выделенного объекта сглаживаются с помощью эрозии структурным элементом «ромб».

