1 Введение в группы

Алгебра – наука о структурах, которые описываются с помозью операций и законов. Группы – это один из основных объектов алгебры. Это самое “базовое понятие”, но оно же и является центральным.

Определение 1.1 (Группа)**.** Это множество G с операцией $\star$, которое обладает следующими свойствами:

(i) *Замкнутость*:
$$\forall a, b \in G : a \star b \in G.$$

(ii) *Ассоциативность*:
$$\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

(iii) *Наличие нейтрального элемента*:
$$\exists e \in G : \forall a \in G : e \star a = a \star e = a.$$

(iv) *Наличие обратного элемента*:
$$\forall a \in G : \exists b \in G : a \star b = b \star a = e.$$

Для группы также существует обозначение: $(G, \star)$.

Существуют различные классификации групп. Например, классификация по типу операции. Бывают группы по сложению (аддитивные), то есть с операцией сложения. А также бывают группы по умножению (мультипликативные) – с операцией умножения.

Пример 1. $(\mathbb{Z}, +)$ множество целых чисел с операцией сложения.

Пример 2. $(\mathbb{Z}/(5), +)$ множество остатков по модулю 5 с операцией сложения.

Пример 3. Как множество – движения правильной фигуры, а операция тут – композиция этих движений.

Определение 1.2 (Абелева группа)**.** Группа G[1] называется абелевой, если она коммутативна, то есть:

$$\forall a, b \in G : ab = ba..$$

В этом моменте нужно себя спросить: *"А что, бывает по-другому?!"* И вот оказывается, что бывает. Для этого, можно рассмотреть один яркий пример. Представьте, что в вашей группе находятся два элемента:

Пример 1. Пусть у нас есть группа G, которая содержит в себе, по крайней мере два элемента: $a =$ "надеть носок" и $b =$ "надеть ботинок". Тогда одна последовательность действий не приведет к *странным взглядам окружающих,* а другая да.

Упражнение 1. Какой из этих случаев "нормален", а какой нет?

[1]Часто операция опускается и подразумевается, что группа мультипликативна