Словарик

- *Полной группой фигуры* Φ называется подгруппа преобразований n-мерного пространства, которая оставляет фигуру на месте (переводит в себя). Подгруппа в этой группе, которая сохраняет в добавок „ориентацию“ фигуры, назвывается *собственной группой фигуры* Φ.
- Группа преобразований правильного плоского n-угольника, называется группой *диэдра* D_n.

  Простейший диэдр, это двуугольник, его группа состоит из 3 симметрий относительно осей его симметрии, а также тождественного преобразования.

  Следующая диэдральная группа — группа треугольника D_3. Она состоит из тождественного движения, двух поворотов r, r^{-1} на $\pm 120^\circ$ вокруг центра треугольника, а также из трёх осевых симметрий s_1, s_2, s_3.
- *Прямым произведением* группы $(G, \star)$ и $(H, \circ)$ называется группа $(G \times H, *)$, где $(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \star g_2, h_1 \circ h_2)$. И обозначается $(G, \star) \times (H, \circ)$.
- Для доказательства *изоморфности*[1] двух групп достаточно восстановить соответствие между их таблицами Кэли.

Задачки

1. Придумайте свою фигуру, например букву «Ж» или прямую пятиугольную призму, найдите её полную и собственную группу движений.
2. Напишите *таблицу Кэли (умножения)* для групп D_3, D_4, D_5. Изоморфны ли данные группы каким-нибудь вам известным?
3. Среди несобственных движений тетраэдра есть повороты на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер. Докажите, что такие движение образуют группу, изоморфную V_4.
4. Докажите или опровергните: (a) $D_2 \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$; (b) $D_3 \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)$; (c) $D_3 \cong A_3 \times \mathbb{Z}/(2)$; (d) $D_6 \cong A_4$, и (e) $O_{\text{октаэдр}} \cong O_{\text{куб}}$.
5. Проверьте, что полные и собственные группы куба, октаэдра и икосаэдра соотсветнно состоят из 48 и 24, 48 и 24, 120 и 60 движений.
6. В собственной группе движений тетраэдра найдите для заданной вершины V найдите две величины: (a) количество вершин, в которые можно преобразовать вершину V каким-то движением g; (b) количество преобразований,

[1] Что, по сути, означает, что группы одинаковы, только описание другое. Одинаково в том смысле, что 3 коровы и 3 тысячи лет эквивалентны.

которые оставляют вершину V неподвижной. Проверьте, что произведение этих чисел дает порядок всей группы.

7. Классифицируйте все повороты додекаэдра. Сколько их? Сколько в каждом классе?

8. Докажите, что $SO_{\text{тетраэдр}}$ является подгруппой $SO_{\text{куб}}$.

9*. Докажите, что $SO_{\text{куб}} \cong O_{\text{тетраэдр}}$.