

1 Введение в группы

Алгебра – наука о структурах, которые описываются с помощью операций и законов. Группы – это один из основных объектов алгебры. Это самое “базовое понятие”, но оно же и является центральным.

1.1 Перестановки

Самая интерпретируемая группа – это группа перестановок. Вероятно, вы уже слышали о том, что такое перестановка, не задумываясь о ее групповой структуре.

Определение 1.1 (Группа). Это множество G с операцией \star , которое обладает следующими свойствами:

(i) *Замкнутость*:

$$\forall a, b \in G : a \star b \in G.$$

(ii) *Ассоциативность*:

$$\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

(iii) *Наличие нейтрального элемента*:

$$\exists e \in G : \forall a \in G : e \star a = a \star e = a.$$

(iv) *Наличие обратного элемента*:

$$\forall a \in G : \exists b \in G : a \star b = b \star a = e.$$

Для группы также существует обозначение: (G, \star) .

Существуют различные классификации групп. Например, классификация по типу операции. Бывают группы по сложению (аддитивные), то есть с операцией сложения. А также бывают группы по умножению (мультипликативные) – с операцией умножения.

Пример 1. $(\mathbb{Z}, +)$ множество целых чисел с операцией сложения.

Пример 2. $(\mathbb{Z}/(5), +)$ множество остатков по модулю 5 с операцией сложения.

Пример 3. Как множество – движения правильной фигуры, а операция тут – композиция этих движений.

Определение 1.2 (Абелева группа). Группа G^1 называется абелевой, если она коммутативна, то есть:

$$\forall a, b \in G : ab = ba..$$

В этом моменте нужно себя спросить: “А что, бывает по-другому?!” И вот оказывается, что бывает. Для этого, можно рассмотреть один яркий пример.

Пример 1. Пусть у нас есть группа G , которая содержит в себе, по крайней мере два элемента: $a =$ “надеть носок” и $b =$ “надеть ботинок”. Тогда одна последовательность действий не приведет к *странным* взглядам окружающих, а другая да.

Упражнение 1. Какой из этих случаев “нормален”, а какой нет?

Упражнение 2. Приведите свои примеры абелевых и неабелевых групп.

¹Часто операция опускается и подразумевается, что группа мультипликативна