

Это точно алгебра?

1. Сколько элементов в группе D_5 ? А сколько элементов порядка 2?
2. Докажите, что A_n – подгруппа группы S_n .
3. Верно ли, что подгруппа абелевой группы всегда абелева? Если да — объясните. Если нет — приведите контрпример.
4. В группе D_6 найдите композицию $r \circ s_1$, где r – поворот на 60° , а s_1 – отражение относительно вертикальной оси.
5. Напишите таблицу Кэли для группы S_3 . Какие из элементов коммутируют между собой?
6. Докажите, что в группе D_n выполняется равенство:

$$s \circ r = r^{-1} \circ s.$$

Где r – поворот на $360^\circ/n$, а s – отражение относительно любой оси.

7. Пусть $H = (\{-1, 1\}, \times)$ в (\mathbb{R}^*, \times) .¹ Является ли H подгруппой? Является ли H абелевой?
8. Изоморфны ли группы: (a) S_2 и $\mathbb{Z}/(2)$; (b) S_3 и $\mathbb{Z}/(3)$; (c) D_4 и S_4 ; (d) S_4 и D_{12} , и (f*) S_5 и D_{10} .
9. Найдите все подгруппы в: (a) $\mathbb{Z}/(6)$; (b) S_3 ; (c) D_4 ; (d) D_6 ; (e*) D_{12} , и (f*) A_4 . Для каждой подгруппы проверьте, что ее порядок делит порядок всей группы. Подумайте над тем, каким группам изоморфны каждая из них.
10. Летнешкольников заставили выложить плац правильной шестиугольной плиткой². Сколько существует симметрий такого замощения плиткой? Образуется ли группа? Если да, то какой у нее порядок?
11. Пусть H – множество всех перестановок из S_3 , которые оставляют тройку на месте. Является ли H подгруппой группы S_3 ? Если да, то какой у нее порядок и является ли она абелевой?
12. Множество $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения является ли группой? Если да, то является ли она абелевой? Какие в ней подгруппы?
13. Придумайте свой объект, например, букву “Ж”. Опишите его группу симметрий. Подумайте, какой группе она изоморфна.
14. Пусть H подгруппа группы G . Тогда *левым смежным классом* называется $gH = \{gh \mid h \in H\}$.

¹Здесь “звёздочка” обозначает то, что нет нуля.

²Причем плитка самая обычная, на ней даже узоров никаких нет.

- (a) Докажите, что два смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.
- (b)* Докажите, что все смежные классы находятся в биекции друг с другом.
- (c) В каком соотношении находится порядок группы H , число смежных классов и порядок группы G ?
- (d) Почему в группе порядка 15 не может быть подгруппы порядка 4?