

Словарик

- *Перестановка* – это отображение, которое переставляет элементы множества. У одного такого отображения есть несколько записей:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Матричная запись}} \quad \text{и} \quad \underbrace{|132\rangle|45\rangle}_{\text{Композиция циклов}}$$

- *Цикловым типом* перестановки называется соответствующая диаграмма Юнга (квадратики в рядах) или набор чисел. Например, у прошлой перестановки цикловой тип $(3, 2)$. А диаграмма Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{или просто} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

- *Порядок перестановки* обозначает минимальное число раз, которое нужно применить перестановку, чтобы получить изначальную расстановку (т.е. тривиальную перестановку). Например, у перестановки выше порядок равен 6.
- Перестановка называется *чётной*, если в ней присутствует чётное число циклов чётной длины.
- *Композицией* двух перестановок α и β называется их последовательное применение. И обозначается $\beta \circ \alpha$ – тут вначале применяется перестановка α , потом β .
- *Обратной перестановкой* α^{-1} называется такая перестановка, что композиция $\alpha^{-1} \circ \alpha$ тождественна, т.е. не меняет расстановки.

Задачи

1. Возьмите какое-нибудь четырёхбуквенное слово, скажем, прошлое слово УШКА. Покажите, что все варианты (А сколько, кстати, их?) тоже разбиваются на две группы, и обмен двух букв местами переводит нас из одной группы в другую.
2. Вова сказал своей подруге, что подарит ей доширак, если она в слове КОМАНДА сделает семь попарных обменов и получит исходное слово. В чём просчитался Вова?
3. Найти цикловой тип, порядок и четность перестановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 10 & 8 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите все перестановки трехэлементного множества.
5. Сколько существует перестановок слова РЫБА, состоящих ровно из двух циклов? Найдите эти слова.
6. Докажите, что любая перестановка имеет обратную.
7. Найдите обратную перестановку для:
 - (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;
 - (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
8. Верно ли, что композиция двух циклов длины 2 является перестановкой порядка 1 или 2?
9. Пусть дана перестановка в виде композиции циклов

$$\sigma = |1, 4, 7\rangle |2, 5\rangle.$$

Напишите ее “матричный вид”, ее порядок и обратную ей.

10. Пусть даны две перестановки

$$\sigma = |1, 4, 2\rangle, \quad \tau = |1, 3\rangle |2, 5\rangle.$$

Найдите композиции $\tau \circ \sigma$ и $\sigma \circ \tau$, четность и порядок этих композиций. А также их “матричный вид”.

11. Пусть даны две перестановки

$$\sigma = |1, 8, 5, 2\rangle |3, 7\rangle, \quad \tau = |1, 4\rangle |2, 3, 6\rangle |5, 8\rangle.$$

Найдите композиции $\tau \circ \sigma$ и $\sigma \circ \tau$, четность и порядок этих композиций.