Содержание

Содержание

1 Введение в группы

Алгебра – наука о структурах, которые описываются с помощью операций и законов. Возможно, то что мы будем называть "алгебра" – это не совсем то, что вы привыкли называть "алгебра". Потому что в школьном курсе алгебры, особенно в старших классах, почему-то изучается анализ, а не сама алгебра.

Первая структура, с которой мы с вами познакомимся – это группы. Это одно из самых "базовых понятий", но оно же и является центральным.

1.1 Перестановки

Самая интерпретируемая группа – это группа перестановок. Вероятно, вы уже слышали о том, что такое перестановка, не задумываясь о её групповой структуре. Для начала, "нестрого" разберемся с перестановками.

Пример 1. Напишем, какое-нибудь слово, например:

УШКА[1]

За один шаг разрешается поменять местами любые две буквы. Например, можно поменяв буквы А и К, получить слово

УШАК

Упражнение 1. Можно ли получить слово КАШУ из слова УШКА за один шаг? Если нет, то за какое минимальное число шагов можно это сделать?

Упражнение 2. Можно ли, начав, со слова ТАПОК, вернуться в исходное слово после 10 шагов? После 11 шагов?

В упражнении 2, вы заметили, что за 10 шагов все получилось. А вот за 11 – никак. На самом деле это не случайность, и верен более общий факт.

[1]Это слово осмысленное, но в дальнейшем, мы будем называть "словами" любые цепочки букв, не заботясь о том, являются ли они словами русского языка.

Утверждение 1.1. *Если на каждом шаге разрешено поменять только две буквы, то за нечетное число шагов не получится вернуться в исходное слово.*

Теперь возьмём другое слово, допустим, АДО. Есть три пары букв, которые можно поменять. Так что, за один шаг мы можем получить три слова.

ОДА ДАО АОД

На втором шаге мы должны выбрать одно из этих слов и поменять в нём две буквы. Пару для обмена в каждом слове можно выбрать двумя способами, а два другие дадут новые слова.

ОДА → ДОА ОАД АДО
ДАО → ДОА ОАД АДО
АОД → ДОА ОАД АДО

Видно, что в результате получаются одни и те же три слова.

ДОА ОАД АДО

Упражнение 3. Проверьте, что за три шага получается тот же набор слов, что и за 1 шаг.

Видно, что мы разбили все варианты на две группы по три слова и на каждом шаге переходим из одной группу в другую:

АДО ОАД ДОА ↔ ДАО АОД ОДА

А значит, вернуться в исходную группу (в частности, получить слово АДО) можно только за четное число шагов.

Задача 1: Возьмите какое-нибудь четырёхбуквенное слово, скажем, прошлое слово УШКА. Покажите, что все варианты (*А сколько, кстати, их?*) тоже разбиваются на две группы, и обмен двух букв местами переводит нас из одной группы в другую.

Задача 2: Вова сказала своей подруге, что подарит ей доширак, если она в слове КОМАНДА сделает семь попарных обменов и получит исходное слово. В чём просчитался Вова?

1.2 Определение группы

Определение 1.2 (Группа)**.** Это множество G с операцией $\star$, которое обладает следующими свойствами:

(i) *Замкнутость*:
$$\forall a, b \in G : a \star b \in G.$$

(ii) *Ассоциативность*:
$$\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

(iii) *Наличие нейтрального элемента*:
$$\exists e \in G : \forall a \in G : e \star a = a \star e = a.$$

(iv) *Наличие обратного элемента*:
$$\forall a \in G : \exists b \in G : a \star b = b \star a = e.$$

Для группы также существует обозначение: $(G, \star)$.

Существуют различные классификации групп. Например, классификация по типу операции. Бывают группы по сложению (аддитивные), то есть с операцией сложения. А также бывают группы по умножению (мультипликативные) – с операцией умножения.

Пример 2. $(\mathbb{Z}, +)$ множество целых чисел с операцией сложения.

Пример 3. $(\mathbb{Z}/(5), +)$ множество остатков по модулю 5 с операцией сложения.

Пример 4. Как множество – движения правильной фигуры, а операция тут – композиция этих движений. Например, у нас есть квадрат. Мы можем его поворачивать на 90 градусов, а также можем его отражать относительно осей симметрии. Тогда у нас получится группа, которая называется D_4, она состоит из 8 элементов:

- e – ничего не делать;
- r – поворот на 90 градусов;
- r^2 – поворот на 180 градусов;
- r^3 – поворот на 270 градусов;
- s_1 – отражение относительно оси симметрии по оси x;
- s_2 – отражение относительно оси симметрии по оси y;
- s_3 – отражение относительно диагонали, которая идет из левого верхнего угла в правый нижний;
- s_4 – отражение относительно диагонали, которая идет из правого верхнего угла в левый нижний.

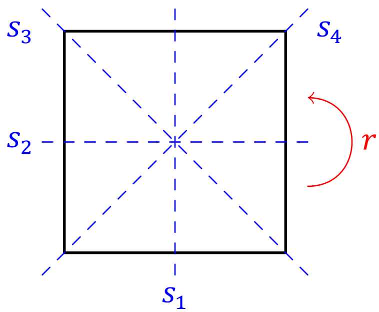

Рис. 1: Группа движений квадрата

Пример 5. До этого мы рассматривали с вами перестановки букв в словах. Такие перестановки тоже образуют группу. Она обозначается S_n, где n – количество букв в слове.

Определение 1.3 (Абелева группа)**.** Группа G[1] называется абелевой, если она коммутативна, то есть:

$$\forall a, b \in G : ab = ba..$$

В этом моменте нужно себя спросить: *"А что, бывает по-другому?!"* И вот оказывается, что бывает. Для этого, можно рассмотреть один яркий пример.

Пример 6. Пусть у нас есть группа G, которая содержит в себе, по крайней мере два элемента: $a =$ "надеть носок" и $b =$ "надеть ботинок".[2] Тогда одна последовательность действий не приведет к *странным взглядам окружающих,* а другая да.

Упражнение 4. Какой из этих случаев "нормален", а какой нет?

Упражнение 5. Приведите свои примеры *абелевых* и *неабелевых* групп.

[1]Часто операция опускается и подразумевается, что группа мультипликативна

[2]Такая группа устроена довольно сложно и в нашем курсе рассматриваться не будет. Ее название F_2.