1. Пусть $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(6)$ гомоморфизм, который $n \mapsto n \pmod 6$. Является ли он изоморфизмом? Найдите $\ker\varphi$ и опишите, чем являются элементы $\operatorname{im}\varphi$?

2. Пусть $H = \{e, |12\rangle\}$ подгруппа S_3. Постройте гомоморфизм $\psi\colon S_3 \to H$, такой что четные перестановки он переводит в e. А нечетные в $|12\rangle$.

   (a) Проверьте, что гомоморфизм ψ сохраняет композицию.

   (b) Найдите $\ker\psi$.

   (c) Проверьте, что $S_3/\ker\psi \cong H$.

3. Группа D_4 действует на множестве вершин квадрата $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (a) Сколько орбит у этого действия?

   (b) Найдите стабилизатор вершины 1. Какой группе он изоморфен?

   (c) Проверьте, что $|D_4| = |\operatorname{Stab}(1)| \cdot |\operatorname{Orb}(1)|$.

4. Группа S_3 действует на многочлене $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3$, переставляя переменные. Найдите орбиты этого действия. Какой стабилизатор у P?

5. Пусть задан гомоморфизм $\mu\colon \mathbb{Z}/(12) \to \mathbb{Z}/(12)$, который $z \mapsto 3z$.

   (a) Найдите $\ker\mu$.

   (b) Постройте таблицу Кэли для $\operatorname{im}\mu$.

   (c) Изоморфна ли $\operatorname{im}\mu$ какой-то известной группе?

6. Группа $G = \mathbb{Z}/(4)$ действует на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ циклическими сдвигами. Запишите соответствующий гомоморфизм $\varphi\colon G \to S_4$. Чему равно $\ker\varphi$?

7. Группа $\mathbb{Z}/(6)$ действует на множестве $X = \{A, B, C\}$ по правилу

$$k \cdot A = A, \quad k \cdot B = C, \quad k \cdot C = B, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}/(6).$$

   Найдите орбиты и стабилизаторы элементов X.

8. Пусть задан гомоморфизм групп $\varphi\colon G \to M$. Докажите, что для любого элемента $h \in \ker\varphi$ и произвольного $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in \ker\varphi$.[1]

9. Постройте группу A_n с помощью какого-то эндоморфизма[2] S_n

[1] Этим доказательством вы покажете, что ядра гомоморфизмов являются *нормальными* подгруппами.

[2] Эндоморфизм – гомоморфизм в себя, т.е. $\psi\colon G \to G$.