Словарик

- Для заданных множеств X, Y их *объединение* $X \cup Y$ состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X, Y; *пересечение* $X \cap Y$ состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств X, Y; *разность* $X \smallsetminus Y$ состоит из всех элементов множества X, которые не содержатся в Y.
- Множество X, явбляющееся объединением двух непересекающихся множеств Y и Z, называется *дизъюнктным объединением* $Y \sqcup Z$.
- Множество $X \times Y$, элементами которого являются всевозможные пары (x, y) с $x \in X,\ \ y \in Y$, называется *декартовым произведением* множеств X и Y.
- Множество всех таких точек $x \in X$, образ которых равен заданной точке $y \in Y$, называется *полным прообразом* точки y или *слоем* отображения f над y и обозначается $f^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = y\}$.
- Множетсво $y \in Y$, имеющих непустой прообраз, называется образом отображения f и обозначается $f(X) = \operatorname{im}(f) \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \exists x \in X \colon f(x) = y\}$.
- Отображение $f \colon X \to Y$ называется *наложением* (а также *сюръекцией* или *эпиморфизмом*), если $\operatorname{im}(f) = Y$. Мы будем отображать сюръективные отображения стрелками $f \colon X \twoheadrightarrow Y$.
- Отображение $f \colon X \to Y$ называется *вложение* (а также *инъекцией* или *мономорфизмом*), если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Мы будем отображать сюръективные отображения стрелками $f \colon X \hookrightarrow Y$.
- Отображение $f \colon X \to Y$, которое является и вложением, и наложемнием называется *взаимно однозначным* (а также *биекцией* или *изоморфизмом*). Мы будем обозначать биекцию стрелками $X \xrightarrow{\sim} Y$.
- Назовём *отношением* на множестве X любое подмножество $R \subset X \times X = \{(a, b) \mid a, b \in X\}$.
- Отношение $R \subset X \times X$ называется *эквивалетностью*, если оно обладает тремя свойствами: (i) рефлексивность: $a \sim a, \quad \forall a \in X$; (ii) транзитивность: для любых $a, b, c \in X$ из $a \sim b$ и $b \sim c$ вытекает $a \sim c$; (iii) симметричность: $a \sim b \iff b \sim a, \quad \forall a, b \in X$.

Задачи

1. Даны множества $A = \{\{1, 2\}, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, 4\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$.: (a) какие множества являются подмножествами других; (b) количество элементов каждого множества; (c) количество подмножеств каждого множества; (d) найлите $A \cup B$; (e) найдите $(A \cap B) \cup C$; (f) доказать, что $(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$, и (g) доказать, что $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$.
2. Нарисуйте все отображения $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$ и $\{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Сколько среди них сюръекций и инъекций?
3. Из отображений: (a) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon x \mapsto x^2$; (b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon x \mapsto x^2$, и (c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon x \to 7x$ выделите все вложения, наложения и биекции.
4. Найдите слои отображения $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^4$ над точками 0 и 1.
5. Отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto |x| + 1$. Найдите полный прообраз точки 5.
6. Покажите, что если $A \subset B$, то $A \times A \subset B \times B$.
7. На множестве $\mathbb{Z}$ задано отношение $x \sim y \iff x + y$ кратно 2. Докажите, что это является отношением эквивалентности. Найдите классы эквивалентности для чисел $0, 1, 5, -3$.
8. Рассмотрите множество чисел от 1 до 50. Определите классы эквивалентности так, чтобы два числа были эквивалентны, если они имеют одинаковое количество простых делителей. Сколько всего будет классов эквивалентности? Укажите по одному представителю от каждого класса.
9. Сколько имеется таких отображений из пятиэлементного множества в двухэлементное, чтобы у каждой точки было не менее двух прообразов.
10. Из отображений: (a) $\mathbb{Z}/(12) \to \mathbb{Z}/(12), x \mapsto 2x$; (b) $\mathbb{Z}/(12) \to \mathbb{Z}/(12), x \mapsto 3x$, и (c) $\mathbb{Z}/(12) \to \mathbb{Z}/(12), x \mapsto 7$ выделите все инъекии, сюръекции, а также биекции. Везде найдите образ. А также прообразы каждой точки, проверьте, что множество $\mathbb{Z}/(12)$ распадается в дизъюнктное объединение слоёв.
11. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$. Сколько всего имеется отображений $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$: (a) произвольных; (b) биективных; (c) возрастающих; (d) инъективных; (e) неубывающих; (f) сюръективных неубывающих, и (g) сюръективных.
12. Про каждое из следующим множеств выясните, существует ли биекция из первого во второе[1] (a) множество натуральных чисел; (b) множество чётных натуральных чисел; (c) множество натуральных чисел без числа 3.
13. На квадратном листе $[0; 1]^2$ введено отношение, где $(a, b) \sim (c, d)$, если $|a - c| = 1$ и $b + d = 1$. Докажите, что это является отношением эквивалетности, а также назовите получившуюся поверхность.

[1] Ноль здесь является натуральным числом.