

## Словарик

- *Перестановка* – это отображение, которое переставляет элементы множества. У одного такого отображения есть несколько записей:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Матричная запись}} \quad \text{и} \quad \underbrace{|132\rangle|45\rangle}_{\text{Композиция циклов}}$$

- *Цикловым типом* перестановки называется соответствующая диаграмма Юнга (квадратики в рядах) или набор чисел. Например, у прошлой перестановки цикловой тип  $(3, 2)$ . А диаграмма Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{или просто} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

- *Порядок перестановки* обозначает минимальное число раз, которое нужно применить перестановку, чтобы получить изначальную расстановку (т.е. тривиальную перестановку). Например, у перестановки выше порядок равен 6.
- Перестановка называется *чётной*, если в ней присутствует чётное число циклов чётной длины.
- *Композицией* двух перестановок  $\alpha$  и  $\beta$  называется их последовательное применение. И обозначается  $\beta \circ \alpha$  – тут вначале применяется перестановка  $\alpha$ , потом  $\beta$ .
- *Обратной перестановкой*  $\alpha^{-1}$  называется такая перестановка, что композиция  $\alpha^{-1} \circ \alpha$  тождественна, т.е. не меняет расстановки.

## Задачи

- Возьмите какое-нибудь четырёхбуквенное слово, скажем, прошлое слово УШКА. Покажите, что все варианты (А сколько, кстати, их?) тоже разбиваются на две группы, и обмен двух букв местами переводит нас из одной группы в другую.
- Вова сказал своей подруге, что подарит ей доширак, если она в слове КОМАНДА сделает семь попарных обменов и получит исходное слово. В чём просчитался Вова?
- Найти цикловой тип, порядок и четность перестановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 3 & 2 & 11 & 10 & 8 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Найдите все перестановки трехэлементного множества.
- Сколько существует перестановок слова РЫБА, состоящих ровно из двух циклов? Найдите эти слова.
- Докажите, что любая перестановка имеет обратную.
- Найдите обратную перестановку для:
 
$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Верно ли, что композиция двух циклов длины 2 является перестановкой порядка 1 или 2?
- Пусть дана перестановка в виде композиции циклов

$$\sigma = |1, 4, 7\rangle |2, 5\rangle.$$

Напишите ее „матричный вид“, ее порядок и обратную ей.

- Пусть даны две перестановки

$$\sigma = |1, 4, 2\rangle, \quad \tau = |1, 3\rangle |2, 5\rangle.$$

Найдите композиции  $\tau \circ \sigma$  и  $\sigma \circ \tau$ , четность и порядок этих композиций. А также их „матричный вид“.

- Пусть даны две перестановки

$$\sigma = |1, 8, 5, 2\rangle |3, 7\rangle, \quad \tau = |1, 4\rangle |2, 3, 6\rangle |5, 8\rangle.$$

Найдите композиции  $\tau \circ \sigma$  и  $\sigma \circ \tau$ , четность и порядок этих композиций.