Словарик

- Классом эквивалентности отношения $x \sim y \iff gx = y$ называется *орбитой* точки x под действием G и обозначается $Gx \stackrel{\text{def}}{=} \{gx \mid g \in G\}$.

  Множеством всех орбит называется *фактором* множества X под действием G и обозначается X/G.

- Слоем отображения $\mathrm{ev}_x\colon G \twoheadrightarrow Gx$ над самой точкой x называется *стабилизатором* точки $x \in X$ и обозначается $\mathrm{Stab}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$.

- Длина орбиты произвольной точки $x \in X$ при действии на неё конечной группы преобразований G равна $|Gx| = {}^{|G|}/_{|\,\mathrm{Stab}(x)}$. В частности, длины всех орбит и порядки стабилизаторов всех точек являются делителем порядка группы.

- *Формула Пойа-Бернсайда.* Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Для каждого $g \in G$ обозначим, через

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\} = \{x \in X \mid g \in \mathrm{Stab}(x)\}$$

  множество неподвижных точек преобразования g. Тогда верна следующая формула

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Задачки

1. Сколькими разными способами можно раскрасить грани тетраэдра в n цветов, где две раскраски считаются *одинаковыми*, если одну можно получить поворотов другой.

2. Сколькими различными способами можно составить ожерелье из n цветов, в котором будет

   (a) 5 бусин;

   (b) 6 бусин;

   (c) 7 бусин.

3. Флаг некоторой страны состоит из трёх горизонтальных полос. Сколькими способами можно раскрасить его в n цветов. Если флаги, отличающиеся перестановкой полос, считаются одинаковыми.

4. Сколькими разными способами можно раскрасить рёбра куба в n цветов, где две раскраски считаются *одинаковыми*, если одну можно получить поворотов другой.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски 4×4 в чёрный и белый цвета, две раскраски считаются одинаковыми:

   (a) если одну можно получить из другой поворотом;

   (b) если одна получается из другой под действием элемента группы D_4.

6. Правильный шестиугольник разбит на 6 равносторонних треугольников. Сколькими способами можно раскрасить эти треугольники в 3 цвета, если расраски совпадающие, при повороте на угол 60°, считаются одинаковыми?

7. Молекула имеет форму правильного тетраэдра, в каждой вершине которой может находиться один из атомов: H (водород), Cl (хлор), Br (бром). Сколько существует различных молекул, если молекулы, совпадающие при вращении, считаются одинаковыми, но при отражения (зеркальные изомеры) считаются разными?