

1. Сколько элементов в группе  $D_5$ ? А сколько элементов порядка 2?
2. Докажите, что  $A_n$  – подгруппа группы  $S_n$ .
3. Верно ли, что подгруппа абелевой группы всегда абелева? Если да — объясните. Если нет — приведите контрпример.
4. В группе  $D_6$  найдите композицию  $r \circ s_1$ , где  $r$  – поворот на  $60^\circ$ , а  $s_1$  – отражение относительно вертикальной оси.
5. Напишите таблицу Кэли для группы  $S_3$ . Какие из элементов коммутируют между собой?
6. Докажите, что в группе  $D_n$  выполняется равенство:

$$s \circ r = r^{-1} \circ s.$$

Где  $r$  – поворот на  $360^\circ/n$ , а  $s$  – отражение относительно любой оси.

7. Пусть  $H = (\{-1, 1\}, \times)$  в  $(\mathbb{R}^*, \times)$ .<sup>1</sup> Является ли  $H$  подгруппой? Является ли  $H$  абелевой?
8. Найдите все подгруппы в

(a) $S_3$ ;	(c) $\mathbb{Z}/(6)$ ;	(e)* $D_{12}$ ;
(b) $D_4$ ;	(d) $D_6$ ;	(f)* $A_4$ ;

Для каждой подгруппы проверьте, что ее порядок делит порядок всей группы. Подумайте над тем, каким группам изоморфны каждая из них.

9. Летнешкольников заставили выложить плац правильной шестиугольной плиткой. Сколько существует симметрий такого замощения плиткой? Образуется ли группа? Если да, то какой у нее порядок?
10. Пусть  $H$  – множество всех перестановок из  $S_3$ , которые оставляют тройку на месте. Является ли  $H$  подгруппой группы  $S_3$ ? Если да, то какой у нее порядок и является ли она абелевой?
11. Множество  $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  с операцией умножения является ли группой? Если да, то является ли она абелевой? Какие в ней подгруппы?
12. Придумайте свой объект, например, букву “Ж”. Опишите его группу симметрий. Подумайте, какой группе она изоморфна.

<sup>1</sup>Здесь “звёздочка” обозначает то, что нет нуля.

13. Пусть  $H$  подгруппа группы  $G$ . Тогда *левым смежным классом* называется  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ .
- (a) Докажите, что два смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.
  - (b)\* Докажите, что все смежные классы находятся в биекции друг с другом.
  - (c) В каком соотношении находится порядок группы  $H$ , число смежных классов и порядок группы  $G$ ?
  - (d) Почему в группе порядка 15 не может быть подгруппы порядка 4?