Словарик

- Отображение $\varphi\colon G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом*, если переводит композицию в композицию, иначе говоря для любых $a, b \in G_1$ в группе G_2 выполняется соотношене $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

  Эпиморфизмом называют сюръективный гомоморфизм, *мономорфизмом* называют инъективный гомоморфизм, а *изоморфизмом*, на самом деле, называют биективный гомоморфизм.

- Множество всех значений гомоморфизма $\varphi\colon G_1 \to G_2$ называется его *образом* и обозначается $\operatorname{im}\varphi$ или $\varphi(G_1) = \{\varphi(g_1) \mid g_1 \in G_1\}$.

- Подмножество $f^{-1}(y) \subset X$ называется *слоем отображения* $f\colon X \to Y$ над точкой $y \in Y$.

- Полный прообраз единицы $e_2 \in G_2$ при гомоморфизме групп $\varphi\colon G_1 \to G_2$ называется *ядром* гомоморфизма φ, обозначается $\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{g_1 \in G_1 \mid \varphi(g_1) = e_2\}$.

- Гомоморфизм $\varphi\colon G \to \operatorname{Aut}(X)$ называется *Действием* группы G на множестве X или *представлением* группа G автоморфизмами множества X.

- Классом эквивалентности отношения $x \sim y \iff gx = y$ называется *орбитой* точки x под действием G и обозначается $Gx \overset{\text{def}}{=} \{gx \mid g \in G\}$.

  Множеством всех орбит называется *фактором* множества X под действием G и обозначается X/G.

- Слоем отображения $\operatorname{ev}_x\colon G \twoheadrightarrow Gx$ над самой точкой x называется *стабилизатором* точки $x \in X$ и обозначается $\operatorname{Stab}(x) \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$.

- Длина орбиты произвольной точки $x \in X$ при действии на неё конечной группы преобразований G равна $|Gx| = {}^{|G|}/_{|\operatorname{Stab}(x)}$. В частности, длины всех орбит и порядки стабилизаторов всех точек являются делителем порядка группы.

Задачки

1. Найдите длину орбиты и стабилизатор каждой точки тетраэдра и додекаэдра под действием собственной группы этого тела.

2. Пусть $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(6)$ гомоморфизм, который $n \mapsto n \pmod 6$. Является ли он изоморфизмом? Найдите $\ker\varphi$ и опишите, чем являются элементы $\operatorname{im}\varphi$?

3. Пусть $H = \{e, |12\rangle\}$ подгруппа S_3. Постройте гомоморфизм $\psi\colon S_3 \to H$, такой что четные перестановки он переводит в e, а нечетные в $|12\rangle$.

(a) Проверьте, что гомоморфизм ψ сохраняет композицию.

(b) Найдите $\ker\psi$.

(c) Проверьте, что $S_3/\ker\psi \cong H$.

4. Группа D_4 действует на множестве вершин квадрата $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (a) Сколько орбит у этого действия?

   (b) Найдите стабилизатор вершины 1. Какой группе он изоморфен?

   (c) Проверьте, что $|D_4| = |\operatorname{Stab}(1)| \cdot |\operatorname{Orb}(1)|$.

5. Группа S_3 действует на многочлене $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3$, переставляя переменные. Найдите орбиты этого действия. Какой стабилизатор у P?

6. Пусть задан гомоморфизм $\mu\colon \mathbb{Z}/(12) \to \mathbb{Z}/(12)$, который $z \mapsto 3z$.

   (a) Найдите $\ker\mu$.

   (b) Постройте таблицу Кэли для $\operatorname{im}\mu$.

   (c) Изоморфна ли $\operatorname{im}\mu$ какой-то известной группе?

7. Группа $G = \mathbb{Z}/(4)$ действует на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ циклическими сдвигами. Запишите соответствующий гомоморфизм $\varphi\colon G \to S_4$. Чему равно $\ker\varphi$?

8. Группа $\mathbb{Z}/(6)$ действует на множестве $X = \{A, B, C\}$ по правилу

$$k \cdot A = A, \quad k \cdot B = C, \quad k \cdot C = B, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}/(6).$$

   Найдите орбиты и стабилизаторы элементов X.

9. Пусть задан гомоморфизм групп $\varphi\colon G \to M$. Докажите, что для любого элемента $h \in \ker\varphi$ и произвольного $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in \ker\varphi$.[1]

10. Постройте группу A_n с помощью какого-то гомоморфизма $S_n \to S_n$.

[1]Этим доказательством вы покажете, что ядра гомоморфизмов являются *нормальными* подгруппами.