

Словарик

Группа *действует* на множестве X , если задано отображение $\varphi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$, где $\text{Sym}(X)$ — группа всех перестановок множества X . То есть каждый элемент группы $g \in G$ переводит элементы из X в элементы из X какой-то перестановкой.

Задачи

1. Группа D_4 действует на множестве вершин квадрата $\{1, 2, 3, 4\}$.
 - (a) Сколько орбит у этого действия?
 - (b) Найдите стабилизатор вершины 1. Какой группе он изоморфен?
 - (c) Проверьте, что $|D_4| = |\text{Stab}(1)| \cdot |\text{Orb}(1)|$.
2. Группа S_3 действует на многочлене $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3$, переставляя переменные. Найдите орбиты этого действия. Какой стабилизатор у P ?
3. Группа $G = \mathbb{Z}/(4)$ действует на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ циклическими сдвигами. Запишите соответствующий гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow S_4$. Чему равно $\ker \varphi$?
4. Группа $\mathbb{Z}/(6)$ действует на множестве $X = \{A, B, C\}$ по правилу

$$k \cdot A = A, \quad k \cdot B = C, \quad k \cdot C = B, \quad \forall k \in \mathbb{Z}/(6).$$

Найдите орбиты и стабилизаторы элементов X .