Словарик

- *Группа* – это множество G с операцией $\star$, которое обладает следующими свойствами:
  (i) *замкнутость*: $\forall a, b \in G : a \star b \in G$;
  (ii) *ассоциативность*: $\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
  (iii) *наличие нейтрального элемента*: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \star a = a$;
  (iv) *наличие обратного элемента*: $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \star a^{-1} = e$.
- Для группы также существует обозначение: $(G, \star)$, если операция понятна, то она обозначается G. Если группа G конечна, то ее *порядок* $|G|$ – это количество элементов в ней. *Порядком элемента* a же, аналогично с перестановкой, называется такое минимальное число d, что $a^d = e$.
- Множество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы $(G, \star)$. Если для нее выполняются аксиомы группы (i)-(iv), то есть: (i) $\forall a, b \in H : a \star b \in H$; (ii) $\forall a, b, c \in H : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$; (iii) $\exists e \in H : \forall a \in H : e \star a = a$, и (iv) $\forall a \in H : \exists a^{-1} \in H : a \star a^{-1} = e$. Тут важно, что вместо группы G написана группа H.
- Группа называется *абелевой (коммутативной)*, если операция $\star$ коммутативна, то есть $\forall a, b \in G : a \star b = b \star a$.
- *Таблицой Кэли* называется таблица, в которой записаны все элементы группы и их композиции.
- Группы называются *изоморфными*, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операцию. То есть, если $\varphi : (G, \star) \to (H, *)$ – изоморфизм, то $\forall a, b \in G : \varphi(a \star b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Только у изоморфных группы изоморфны таблицы Кэли. Неформально говоря, изоморфные группы – это „одни и те же“ группы.

Задачки

1. Сколько элементов в группе D_5? А сколько элементов порядка 2?
2. Докажите, что A_n — подгруппа группы S_n.
3. Верно ли, что подгруппа абелевой группы всегда абелева? Если да — объясните. Если нет — приведите контрпример.
4. В группе D_6 найдите композицию $r \circ s_1$, где r — поворот на 60°, а s_1 — отражение относительно вертикальной оси.
5. Напишите таблицу Кэли для группы S_3. Какие из элементов коммутируют между собой?
6. Докажите, что в группе D_n выполняется равенство:
$$s \circ r = r^{-1} \circ s.$$
Где r — поворот на $360^\circ/n$, а s — отражение относительно любой оси.
7. Пусть $H = (\{-1, 1\}, \times)$ в $(\mathbb{R}^*, \times)$.[1] Является ли H подгруппой? Является ли H абелевой?
8. Изоморфны ли группы: (a) S_2 и $\mathbb{Z}/(2)$; (b) S_3 и $\mathbb{Z}/(3)$; (c) D_4 и S_4; (d) S_4 и D_{12}, и (f*) S_5 и D_{10}.
9. Найдите все подгруппы в: (a) $\mathbb{Z}/(6)$; (b) S_3; (c) D_4; (d) D_6; (e*) D_{12}, и (f*) A_4. Для каждой подгруппы проверьте, что ее порядок делит порядок всей группы. Подумайте над тем, каким группам изоморфны каждая из них.
10. Летнешкольников заставили выложить плац правильной шестиугольной плиткой[2]. Сколько существует симметрий такого замощения плиткой? Образуют ли они группу? Если да, то какой у нее порядок?
11. Пусть H — множество всех перестановок из S_3, которые оставляют тройку на месте. Является ли H подгруппой группы S_3? Если да, то какой у нее порядок и является ли она абелевой?
12. Является ли множество $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения группой? Если да, то является ли она абелевой? Какие в ней подгруппы?
13. Придумайте свой объект, например, букву "Ж". Опишите его группу симметрий. Подумайте, какой группе она изоморфна.
14. Пусть H подгруппа группы G. Тогда *левым смежным классом* называется $gH = \{gh \mid h \in H\}$.
    (a) Докажите, что два смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.
    (b)* Докажите, что все смежные классы находятся в биекции друг с другом.
    (c) В каком соотношении находится порядок группы H, число смежных классов и порядок группы G?
    (d) Почему в группе порядка 15 не может быть подгруппы порядка 4?

[1] Здесь "звёздочка" обозначает то, что нет нуля.
[2] Причем плитка самая обычная, на ней даже узоров никаких нет.