

1. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке L . Докажите, что $BL = CL$.
2. Биссектрисы треугольника ABC пересекают описанную окружность (ABC) в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .
3. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.
4. (Лемма Фусса) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая вторично пересекающая окружность ω_1 в точке A_1 и окружность ω_2 в точке A_2 . Точки B_1 и B_2 для прямой через точку B определяются аналогично. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
5. В трапеции $ABCD$ проведена окружность ω , проходящая через точки A и D . Окружность пересекает боковые стороны AB и CD (или их продолжения) в точках N и M соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых BM и CN равноудалена от точек A и D , то она лежит на окружности ω .
6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины A , выбрана точка P . Пусть B_1 и C_1 — проекции точки P на прямые AC и AB соответственно.
 - (а) Докажите, что точки B, C, B_1, C_1 концикличны.
 - (b)* Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек B_1 и C_1 , на прямые AB и AC соответственно, параллелен стороне BC .
7. (а) (Точка Микеля треугольника) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях, выбраны точки C_1, B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что окружности (AB_1C_1) , (A_1BC_1) и (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.
 - (b)* (Точка Микеля четырехсторонника) Прямая ℓ пересекает прямые содержащие стороны треугольника AB, BC и AC в точках F, D, E соответственно. Тогда окружности 4 окружности (ABC) , (AFE) , (BFD) и (CDE) имеют общую точку.
8. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Точка D — проекция точки B_1 на сторону AB , точка E — пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC , с отрезком BB_1 . Докажите, что $EC_1 \perp BB_1$.
9. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что BO — биссектриса угла ABC .

10. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Биссектрисы треугольника BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Докажите, что $IB_1 = IC_1$.
11. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B . Точки A_1 и C_1 — проекции точки $P \in \ell$ на прямые AB и BC соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.
12. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а сторон AD и BC — в точке N . Докажите, что биссектрисы углов AMD и CNC взаимно перпендикулярны.
13. Прямая проходящая через точку A и центр O описанной окружности треугольника ABC , вторично пересекает описанную окружность в точке N . Докажите, что треугольники BON и CON равнобедренные.
- 14.* Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Прямая ℓ касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно (точка B^1 лежит внутри треугольника APQ). Прямая BP вторично пересекает ω_2 в точке T . Докажите, что AQ — биссектриса угла $\angle PAT$.

¹Точка B называется точкой Шалтая треугольника APQ .