1. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.

2. Пусть точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$, $AH$ — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

3. Пусть $AA_1$ и $BB_1$ — высоты остроугольного треуглньика $ABC$, а точка $O$ — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

4. В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$, а также отмечена точка $M$ — середина стороны $BC$. Точка $H$ — его ортоцентр, а точка $P$ — пересечения луча (!) $MH$ с окружностью $(ABC)$. Докажите, что точки $P, A, B_1, C_1$ концикличны.

5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка $P$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$. Точка $O$ — центр окружности $(ABP)$. Докажите, что $OP \perp CD$.

6. (Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4) Пусть точки $B$ и $C$ лежат на полуокружности с диаметром $AD$. Точка $M$ — середина отрезка $BC$. Точка $N$ такова, что точка $M$ — середина отрезка $AN$, докажите что $BC \perp ND$.

7. В треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$ и отмечен центр описанной окружности — $O$. Пусть точки $E$ и $F$ — проекции точек $B$ и $C$ на прямую $AO$. $N$ — точка пересечения прямых $AC$ и $DE$, а $M$ — точка пересечения прямых $AB$ и $DF$. Докажите, что точки $A, D, N, M$ концикличны.

8. Окружность $S_2$ проходит через центр $O$ окружности $S_1$ и пересекает ее в точках $A$ и $B$. Через точку А проведена касательная к окружности $S_2$; $D$ — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью $S_1$. Докажите, что $AD = AB$.

9. (Baltic Way, 2019, problem 12) Let $ABC$ be a triangle and $H$ its orthocenter. Let $D$ be a point lying on the segment $AC$ and let $E$ be the point on the line $BC$ such that $BC \perp DE$. Prove that $EH \perp BD$ if and only if $BD$ bisects $AE$.

10. (Лемма Архимеда) Две окружности касаются внутренним образом в точке $M$. Пусть $AB$ — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке $T$. Докажите, что $MT$ — биссектриса угла $AMB$.

11. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB$ $CD$ выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть $E$ — середина $AC$. Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.

12. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC$ больше диагонали $BD$. Точка $M$ на диагонали $AC$ такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что $BD$ — общая касательная окружностей, описанных около треугольников $ABM$ и $ADM$.

13. (Прямая Симсона) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.

14. Пусть $H$ — ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$ Серединный перпендикуляр $\ell$ к стороне $AC$ пересекает прямые $AH$, $CH$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника лежит на прямой, содержащей одну из медиан треугольника $ABC$.