Аннотация

Данный курс посвящён решению задач школьной планиметрии. Он будет охватывать такие темы как: счёт углов, ортоцентр треугольника, степень точки, движения плоскости, гомотетия и другие. Темы выходят за рамки школьного курса геометрии, поэтому этот курс поможет по-новому взглянуть на знакомые темы и задачи, а при решении новых, покажет “незнакомые” пути решения.

Курс подойдет для школьников, которые уже знакомы с понятие “вписанные углы” или “вписанные четырехугольники”.

Содержание

1 Счет углов **1**

2 Симметрии **2**

3 Площади **2**

4 Ортоцентр треугольника **3**
  4.1 Другие популярные уголки 6

5 Подобие треугольников **7**

6 Степень точки **7**
  6.1 Радикальная ось 8

Задачи **10**
  i Счёт углов-I 10
  ii Симметрия 14
  iii Площади 14
  iv Счёт углов-II 16
  v Подобие 17
  vi Степень точки и радикальная ось 17

Контрольная работа **24**

1 Счет углов

Под этим названием скрывается, не побоюсь этого слова, самый (!) используемый метод в решении задач. В каждой он встречается в том или ином виде. Поэтому, если вы хотите решать задачи, вам нужно его знать. В основном “считаются” углы, связанные с окружностями, но бывает и что-то другое.

Для примера, давайте дакажем, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Для этого вспомним «вписанные углы»

Теорема 1.1. *Высоты треугольника* конкурентны[1]*.*

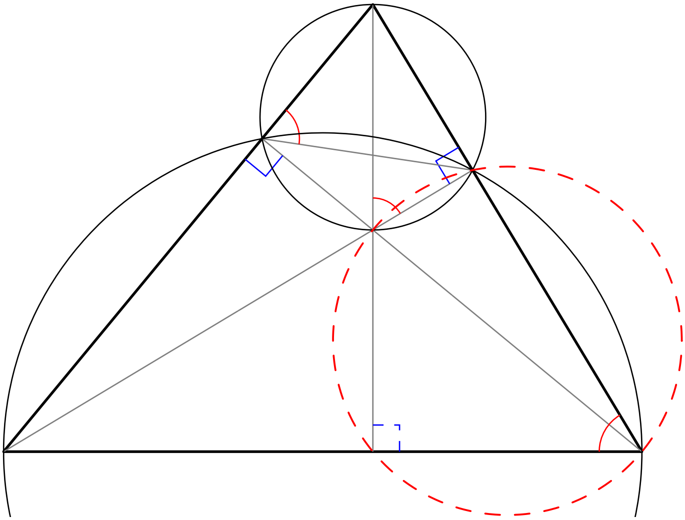
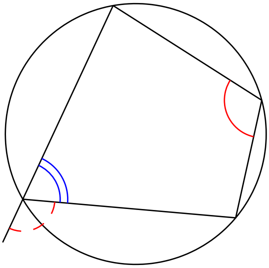


Рис. 1: Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Лемма 1.2. *Четырехугольник $ABCD$ является вписанным, если $\angle ABC$ равен смежному углу $\angle ADC$.*



---

[1] Пересекаются в одной точке.

Утверждение 1.3. *Пусть AB – хорда окружности, а C – точка касания касательной к окружности. Тогда угол между касательной и хордой равен вписанному углу, операющему на ту же дугу, что и хорда. То есть* $\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

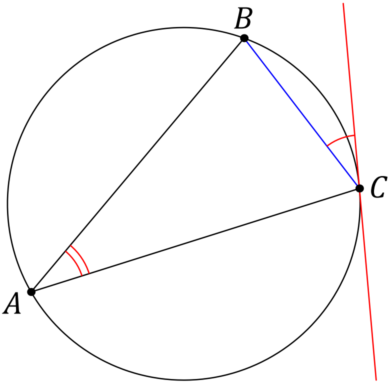


Рис. 2: Угол между касательной и хордой.

2 Симметрии

3 Площади

Давайте сейчас повторим то, чего мы уже знаем про площади различных многоугольников.

- Равные многоулольники имеют равную площадь.
- Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равняется сумме площадей этих многоугольников.
- Площадь прямогоульника равняется прозведению двух его сторон.
- Площадь треугольника равняется половине произведения его основания на высоту.
- Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

- Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей
- Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.
- Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

Пример 1. Докажите, что в треугольнике высоты обратно пропорциональна сторонам, к которым они проведены.

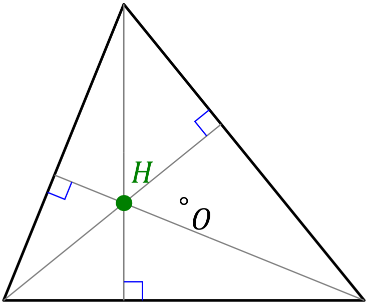
Пример 2. Медины AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника A_1MB_1, если площадь треугольника ABC равняется 1.

Пример 3. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

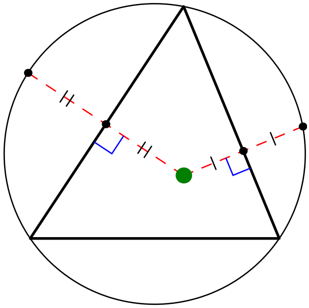
4 Ортоцентр треугольника

Ортоцентр – это замечетальная точка треугольника. Конструкции, в которых используются его *симметрии* относительно чего-либо, *замечательно* связанны с описанной окружностью, и наоборот!

Определение 4.1. Ортоцентр (**H**) – это точка пересечения высот треугольника.

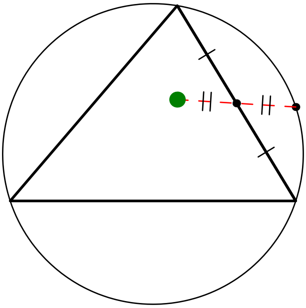


Я всегда буду ортоцентр треугольника ABC обозначать **большой зеленой точкой** *(просто я так решил)*, а центр описанной окружности как выколотую *(так уже более принято)*.

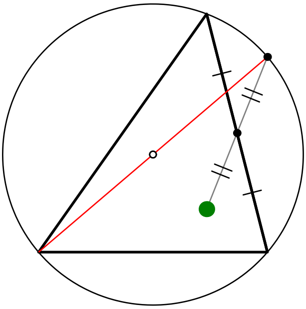


Теорема 4.2. *Если отразить ортоцентр относительно стороны, то он попадет на описанную окружность.*

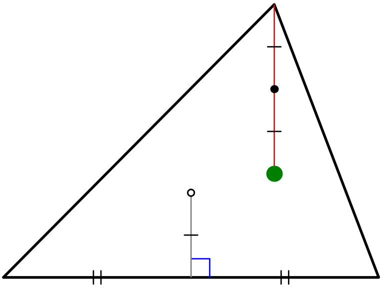
Теорема 4.3. *Если ортоцентр отразить относительно середины стороны, то он попадет на описанную окружность.*



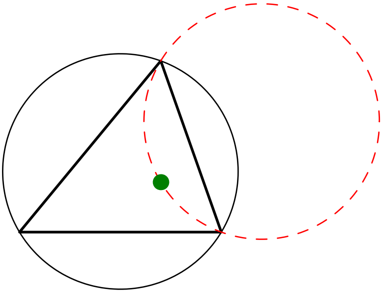
Следствие 4.3.1. *Точка из теоремы 4.3 диаметрально противоположна противолежащей стороне вершине.*



Следствие 4.3.2. *Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.*

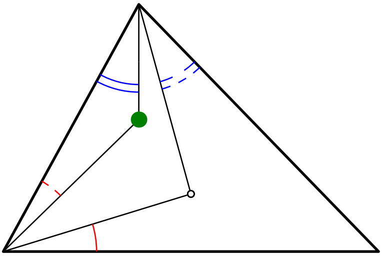


Лемма 4.4 (Окружность Джонсона)**.** *$(ABC) = (ABH)$, т.е. окружности, описанные вокруг $\triangle ABC$ и $\triangle ABH$ равны.*



Определение 4.5 (Изогональное сопряжение[1]). Точки P, Q называются изогонально сопряженными, если $\angle PAB = \angle QAC, \angle PBC = \angle QBA, \angle PCB = \angle QCA$.

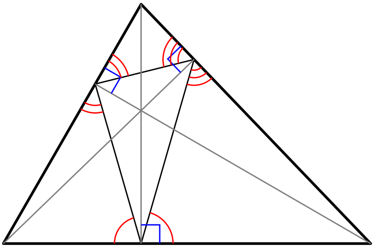
Теорема 4.6. *Ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.*



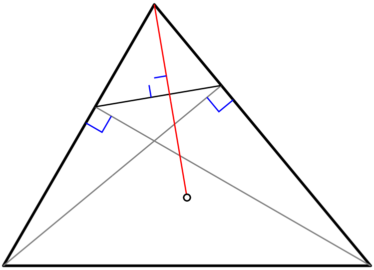
Определение 4.7. Инцетр – это центр, вписанной в многоугольник окружности.

Определение 4.8. Ортотреугольник – это треугольник, вершины которого являются основаниями высот исходного треугольник.

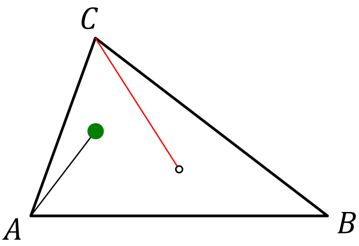
Лемма 4.9. *Ортоцентр является инцентром для ортотреугольника.*



Следствие 4.9.1. *Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.*



Лемма 4.10. *Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.*

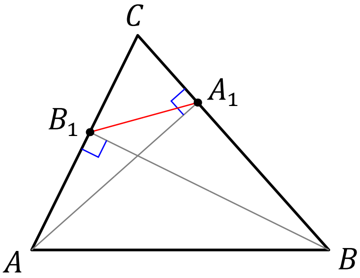


$$AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OC^2$$

---

[1] Также можно думать об *изогоналях*, как о лучах, симметричных относительно биссектрис.

Лемма 4.11. *Если AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$, $\quad k = \cos\angle C$.*



4.1 Другие популярные уголки

Лемма 4.12. *Если в четырехугольнике $ABCD$, AC – биссектриса угла A и $BC = CD$, то этот четырехугольник является либо вписанным, либо дельтойдом*[1].

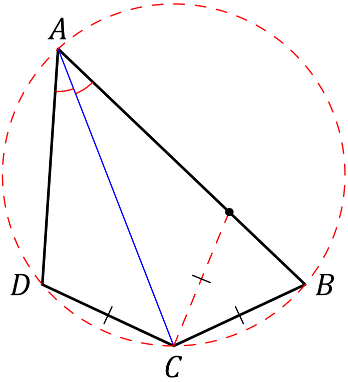


Рис. 3: Случай вписанности и дельтойда.

---

[1] *Дельтойдом (кайтом)* называется четырехугольник, у которого есть две пары равных смежных сторон

5 Подобие треугольников

6 Степень точки

Определение 6.1 (Степень точки)**.** Степень точки P, находящейся на расстоянии d от центра окружности ω радиусом r, относительно этой же окружности:

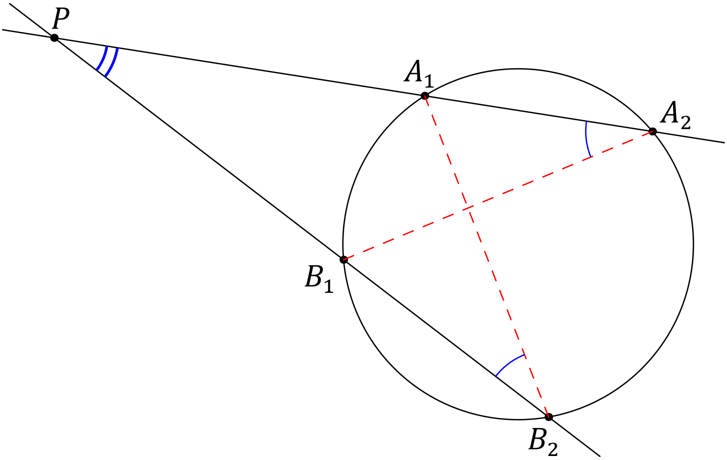
$$\operatorname{pow}(P,\omega) = d^2 - r^2.$$

Теорема 6.2. *Если прямая $\ell \ni P$ касается окружность в точке K, то*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = PK^2.$$

Теорема 6.3. *Если прямая $\ell \ni P$ пересекает окружность ω в точках A и B, тогда*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$



Следствие 6.3.1 (Теорема о касательной и секущей)**.** *Если из точки P, проведена касательная PK к окружности ω и прямая ($\ell \ni P$) пересекает окружность ω в точках A и B, тогда*

$$PK^2 = PA \cdot PB.$$

Теорема 6.4 (Главная теорема о степени точки)**.** *Если через точку P проходят две прямые, которые пересекают окружность ω в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно, то*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PB_2}.$$

6.1 Радикальная ось

Теорема 6.5. *Геометрическое место точек* (ГМТ)*, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.*

Определение 6.6 (Радикальная ось)**.** Прямая, состоящая из точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.

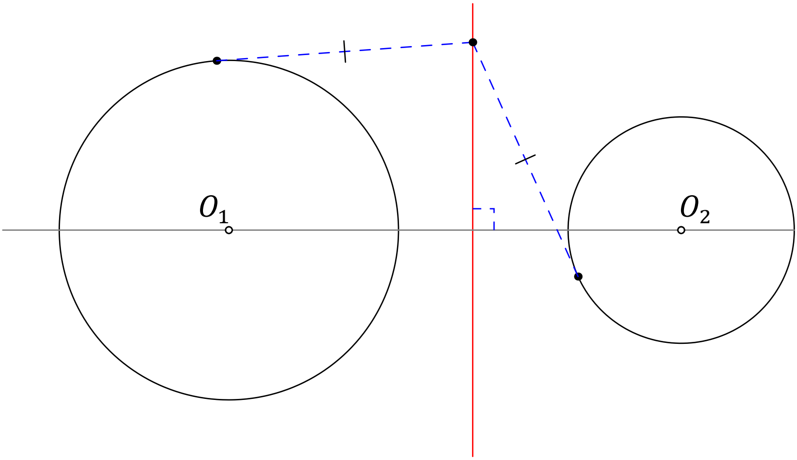


Рис. 4: Радикальная ось двух окружностей.

Теорема 6.7 (Радикальный центр)**.** *Радикальные оси трех окружностей либо конкурентны, либо параллельны.*

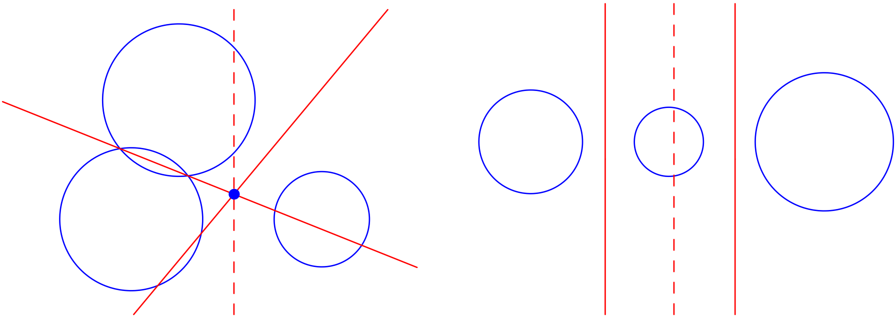
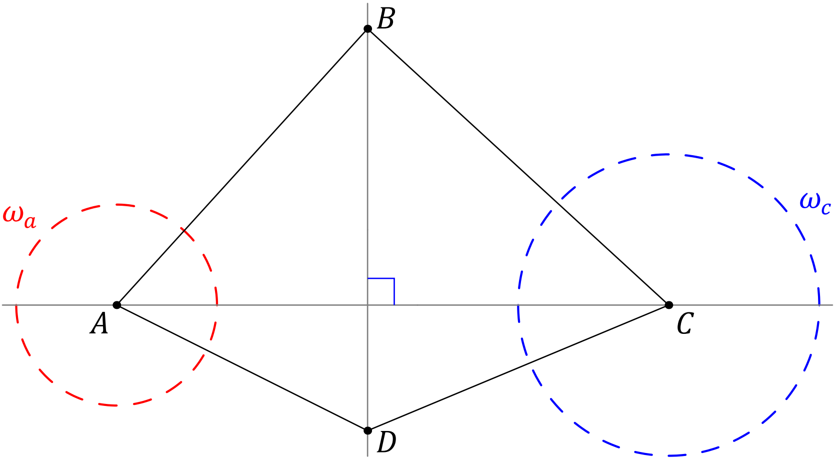


Рис. 5: Радикальный центр трех окружностей.

Теорема 6.8. *$AC \perp BD$*[1]*, если*

$$\operatorname{pow}(B,\omega_a) - \operatorname{pow}(B,\omega_c) = \operatorname{pow}(D,\omega_a) - \operatorname{pow}(D,\omega_c)$$



---

[1] Типа крутая **??**

Задачи

i Счёт углов-I

1. `(Лемма Фусса)` Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая вторично пересекающая окружность ω_1 в точке A_1 и окружность ω_2 в точке A_2. Точки B_1 и B_2 для прямой через точку B определяются аналогично. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Решение: По теореме 1.2 $\angle B_1A_1A = \angle ABB_2 = 180^\circ - \angle B_2A_2A \Rightarrow \angle B_1A_1A_2 + \angle B_2A_2A_1 = 180^\circ \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

2. В равнобедренном треугольник ABC ($AB = AC$) на меньшей дуге AB окружности (ABC) взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат по одну сторону относительно прямой BC. Окружность (BDE) пересекает прямую AB в точке F. Докажите, что $EF \parallel BC$.

Решение: По задаче 1 E и F – вторые точки пересечения окружности (BDE) с прямыми AD и AB соответственно. Тогда прямая EF параллельна касательной к (ABC) в точке A. И уже эта касательная параллельна BC, тогда и EF тоже.

3. В трапеции $ABCD$ проведена окружность, проходящая через точки A и D. Окружность пересекает боковые стороны AB и CD (или их продолжения) в точках N и M соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых BM и CN равноудалена от точек A и D, то она лежит на окружности.

Решение: $AD \parallel BC$, тогда по обратной задаче 1 $NBCM$ – вписанный. Тогда $\angle BNC = \angle BMC$.
По обратной теореме 1.2 для четырехугольников $ANPD$ и $APMD$ $\angle BNC = \angle PDA$ и $\angle BMC = \angle PAD$. Отсюда следует, что треугольник APD – равнобедренный, а значит P равноудалена от A и D.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины A, выбрана точка P. Пусть B_1 и C_1 – проекции точки P на прямые AC и AB соответственно.

   (a) Докажите, что точки B, C, B_1, C_1 концикличны.

Решение: Пусть точка D – основания высоты из вершины A. Тогда $BDPC_1$ и AC_1PB_1 – вписаные четырехугольники. По теореме 1.2 $\angle ABC = \angle APC_1$ и $\angle APC_1 = \angle AB_1C_1$. Тогда по обратной теореме 1.2 BCC_1B_1 – вписанный четырехугольник.

(b) Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек B_1 и C_1, на прямые AB и AC соответственно, параллелен стороне BC.

Решение: По задаче 4a BCC_1B_1 – вписанный, а также $B_1C_1C_2B_2$ (B_1C_1 – диаметр). Тогда по теореме 1.2 $\angle ABC = \angle AB_1C_1 = \angle AC_2B_2 \Rightarrow B_2C_2 \parallel BC$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Пусть точки K и L – проекции точки D на стороны AB и AC соответственно. Известно, что $\angle BAC = 72^\circ$, $\angle ABL = 30^\circ$. Чему равен угол $\angle DKC$?

Решение: По задаче 4a $BCLK$ – вписанный, тогда $\angle ABL = \angle LCK$.
$\angle DKC = \angle BDK - \angle DCK$. $\angle BDK = \angle BAD$ (углы при высоте прямоугольного треугольника).
$\angle DCK = \angle ACD - \angle LCK = 90^\circ - \angle CAD - \angle LCK = 90^\circ - \angle CAD - \angle ABL$.
$\angle DKC = \angle BAD - 90^\circ + \angle CAD + \angle ABL = \angle BAC + \angle ABL - 90^\circ = 72^\circ + 30^\circ - 90^\circ = 12^\circ$.

6.* (Окружность Тейлора) Докажите, что шесть точек в виде шести проекций трёх оснований высот треугольника, пересекающих каждую сторону, на две оставшиеся стороны лежат на одной окружности.

Решение: Пусть точки H_a, H_b и H_c – основания высот из соответствующих вершин треугольника ABC. Пусть B_a и C_a – проекции точки H_a на прямые AB и AC соответственно. Точки A_b, C_b, A_c и B_c определяются аналогично.
Тогда по задаче 4a BCB_AC_A – вписанный. Тогда по теореме 1.2 $\angle ACB = \angle AC_aB_a$.
По задаче 4b $AB \parallel A_bB_a \Rightarrow \angle AC_aB_a = \angle A_bB_aC_a$, и $AC \parallel A_cC_a \Rightarrow \angle ACB = \angle A_cC_aB$.
Тогда по обратной теореме 1.2 $A_cA_bB_aC_a$ – вписанный. Аналогично $B_aB_cC_bA_b$ и $C_bC_aA_cB_c$ – вписанные. Тогда и $A_cA_bB_aB_cC_bC_a$ – вписанный, т.к. точки лежат на сторонах треугольника (строго позже).

7. (a) (Точка Микеля треугольника) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях, выбраны точки C_1, B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что окружности (AB_1C_1), (A_1BC_1) и (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть $(AB_1C_1) \cap (A_1BC_1) = P$. Будем доказывать, что $P \in (A_1B_1C)$. По теореме 1.2 $\angle BC_1P = \angle CA_1P = \angle AB_1P$. Отсюда по обратной теореме 1.2 точки A_1, B_1, C и P концикличны.

(b)* `(Точка Микеля четырехсторонника)` На плоскости даны четыре прямые общего положения. Эти прямые образуют 4 треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть на первой прямой лежат точки A, F и B, на второй B, D и C, на третьей C, A и E и на четвертой E, D и F. Тогда по задаче 7a для $\triangle ABC$ и точек F, D и E

$$(AFE) \cap (BFD) \cap (CDE) = M. \tag{6.1}$$

По задаче 7a для $\triangle AFE$ и точек B, D и C

$$(ABC) \cap (FBD) \cap (EDC) = G. \tag{6.2}$$

Но по уравнение (6.1) и (6.2) $G \equiv M$. Отсюда следует, что все нужные окружности пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Точка D – проекция точки B_1 на сторону AB, точка E – пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что $EC_1 \perp BB_1$.

Решение: Нужно доказать, что DC_1EB_1 – вписанный, тогда утверждение верно. B_1EFC – вписанный, тогда по теореме 1.2 $\angle B_1CF = \angle B_1ED$. Также BCC_1B_1 – вписанный, тогда, опять же, по теореме 1.2 $\angle BCB_1 = \angle B_1C_1D$. Тогда, раз $\angle B_1ED = \angle B_1ED = \angle B_1C_1D$, то DC_1EB_1 – вписанный.

9. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что BO – биссектриса угла ABC.

Решение: $ABCO$ – вписанный, т.к. $\angle B = \angle O = 90^\circ$. $AO = OC$, т.к. это половины диагоналей квадрата. Тогда BO – биссектриса угла ABC.

10. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Биссектрисы треугольника BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Докажите, что $IB_1 = IC_1$.

Решение:

Лемма 6.9. *Если в треугольнике ABC, точка I – инцентр, то*

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$$

По теореме 6.9 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$. Тогда AB_1IC_1 – вписанный. AI – биссектриса, поэтому $IB_1 = IC_1$.

11. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. Точки A_1 и C_1 – проекции точки $P \in \ell$ на прямые AB и BC соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

Решение:

Лемма 6.10. *Угол между касательной и хордой окружности, равен половине градусной меры дуги, стягиваемой данной хордой.*

Следствие 6.10.1. *Если к окружности (ABC) провели касательную BK, то: $\angle BAC = \angle CBK$.*

По следствии 6.10.1 $\angle PBA_1 = \angle BAC$. PC_1BA_1 – вписанный, поэтому $\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1$.
$\angle PC_1A_1 + \angle A_1C_1B = 90^\circ = \angle BAC + \angle(AB, A_1C_1) \Rightarrow AC \perp A_1C_1$.

12. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая ℓ касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно (точка B[1] лежит внутри треугольника APQ). Прямая BP вторично пересекает ω_2 в точке T. Докажите, что AQ – биссектриса угла $\angle PAT$.

Решение: По следствии 6.10.1 для прямой PQ и окружностей ω_1 и ω_2 $\angle BPQ = \angle BAP$ и $\angle BQP = \angle BAQ$. Тогда угол $TBQ = \angle BAQ + \angle BAP = \angle PAQ$ (внешний в треугольнике BPQ).
Так как $BQTA$ – вписанный, то $\angle TBQ = \angle TAQ = \angle PAQ$. Тогда и получается, что AQ – биссектриса угла PAT.

13.* Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что проекции точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 коллинеарны.

---

[1] Точка B называется точкой Шалтая треугольника APQ.

Решение: Докажем, что проекции на AB, BB_1 и CC_1 коллинеарны. Аналогично будет следовать, что и проекция на AC лежит на этой прямой. Пусть X, Y и Z – проекции на AB, BB_1 и CC_1 соответственно, а H – ортоцентр. Тогда по задаче 4a и теореме 1.2 $\angle BCH = \angle HYZ. CH \parallel A_1X$, поэтому $\angle BCH = \angle BA_1X$. Т.к. $BXYA_1$ – вписанный, то $\angle BA_1X = \angle BYX$. Получили, что $\angle BYX = \angle HYZ$ – вертикальные углы, значит $Y \in XZ$.

14.* В треугольнике ABC точки D и E – основания биссектрис из углов A и C соответственно, а точка I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Точки P и Q – пересечения прямой DE с (AIE) и (CID) соответственно, причем $P \neq E, Q \neq D$. Докажите, что $\angle EIP = \angle DIQ$.[1]

Решение: Т.к. $AEPI$ и $CQDI$ – вписанные, то $\angle PIE = \angle PAE$ и $\angle DIQ = \angle DCQ$. Пусть точка T – пересечение прямых AP и CQ. Тогда нужно доказывать, что $APTC$ – вписанный.
Пусть $\angle ABC = 2\beta$, тогда по теореме 6.9 $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ + \beta$, тогда внешние углы PIA и DIA равны $90^\circ - \beta$.
По теореме 1.2 для четырехугольников $AEPI$ и $CQDI$ $\angle PIA = \angle TPQ$ и $\angle DIA = TQP$. Тогда $\angle PTQ = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta = \angle ABC$. Тогда $APTC$ – вписанный.

ii Симметрия

iii Площади

1. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

2. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?

3. Точка M расположена на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма.

4. Пусть M – точка на стороне AB треугольника ABC, причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.

---

[1] Сделав инверсию в точке A или I, получите задачу с Высшей Пробы 2024.

5. Точки M и N – соотвественно середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прымях AN, BN, CM, DM.
6. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK.
7. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD, пересекает продолжение основания AD в точке M. Докажите, что треугольник ACM равновелик трапеции $ABCD$.
8. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.
9. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что четырехугольник $AMKN$ равновелик треугольнику BKC.
10. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.
11. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.[1]
12. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.

13.* Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

14. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности.
15. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых:
    (a) треугольники AMB и ABC равновелики;
    (b) треугольники AMB и AMC равновелики;

---

[1] Привет задаче 1!

(c) треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

16. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше ее основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

iv Счёт углов-II

1. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, а также отмечена точка M – середина стороны BC. Точка H – его ортоцентр, а точка P – пересечения луча (!) MH с окружностью (ABC). Докажите, что точки P, A, B_1, C_1 конциклочны.

Решение: Отметим вторую точку пересечения Q окружности (ABC) с прямой MH. Тогда по следствии 4.3.1 AQ – диаметр, а значит $\angle APQ = 90°$. Тогда P, A, C_1, B_1, H концикличны, т.к. лежат на окружности с диаметром AH.

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка P – точка пересечения диагоналей AC и BD. Точка O – центр окружности (ABP). Докажите, что $OP \perp CD$.

Решение: Т.к. $ABCD$ – вписанный, то $\triangle BAP \sim \triangle CPD$ (по двум углам). Тогда если O_1 – центр окружности (CPD), то $\angle APO = \angle DPO_1$.
По теореме 4.6 в треугольнике CPD, если H_1 – его ортоцентр, $\angle DPO_1 = \angle CPH_1$. Тогда точки O, P, H – коллинеарны, т.к. $\angle CPH = \angle APO$ (вертикальные). А значит $OP \equiv PH \perp CD$.

3. `(Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4)` Пусть точки B и C лежат на полуокружности с диаметром AD. Точка M – середина отрезка BC. Точка N такова, что точка M – середина отрезка AN, докажите что $BC \perp ND$.

Решение: $ABNC$ – параллелограмм. Тогда раз AD – диаметр, то $AB \perp BD$ и $AC \perp CD$. Но $AB \parallel CN$ и $AC \parallel BN$. Тогда $BD \perp CN$ и $CD \perp BN$. Значит C – ортоцентр треугольника BND, а значит $BC \perp ND$.

4. В треугольнике ABC проведена высота AD и отмечен центр описанной окружности – O. Пусть точки E и F – проекции точек B и C на прямую AO. N – точка пересечения прямых AC и DE, а M – точка пересечения прямых AB и DF. Докажите, что точки A, D, N, M концикличны.

Решение: Пусть точка A' – диаметрально противоположна A. Тогда $ACA' = \angle ABA' = 90^\circ$, отсюда $\angle CA'A = \angle ACF$ и $\angle BA'A = \angle ABE$. Т.к. $ABDE$ и $ADFC$ – вписанные и по теореме 1.2 $\angle ABE = \angle ADN$ и $\angle ACF = \angle ADM$. Тогда $\angle NDM = \angle BA'C$, а значит $ADNM$ – вписанный, раз $ABA'C$ был вписанным.

v Подобие

vi Степень точки и радикальная ось

1. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. `0_0`

Решение: Пусть H_a, H_b, H_c – основания высот треугольника ABC из вершин A, B и C соответственно.
Четырехугольники ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c – вписанные. По теореме 6.7 прямые AH_a, BH_b, CH_c конкурентны.

2. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

Решение: Пусть окружность высекает на сторонах AB, AC и BC треугольника ABC отрезки CC_1, BB_1, AA_1.

$$\begin{cases} AB_2 = B_1B_2 = B_1C & = b \\ AC_1 = C_1C_2 = BC_2 & = c \\ BA_1 = A_1A_2 = A_2C & = a \end{cases} \tag{6.3}$$

Т.к. $A_1A_2B_1B_2$ – вписанный, то

$$\begin{gathered} \operatorname{pow}(C, (A_1A_2B_1B_2)) = CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2 \implies \\ \implies c \cdot 2c = b \cdot 2b \implies c = b \implies AC = BC. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Т.к. $A_1A_2C_1C_2$ – вписанный, то

$$\begin{gathered} \operatorname{pow}(B, (A_1A_2C_1C_2)) = BA_1 \cdot BA_2 = BA_1 \cdot BA_2 \implies \\ \implies a \cdot 2a = c \cdot 2c \implies a = c \implies AB = AC. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Из уравнений (6.4) и (6.5) следует что $AB = AC = BC$.

3.* Окружности ψ и ω вписаны в вертикальный угол $\angle nm$, ψ касается прямой n в точке N, а ω касается прямой m в точке M. Докажите, что ψ и ω высекают на NM равные отрезки.

Решение: Пусть окружность ψ касается прямой m в точке Q, а ω касается n в точке P. Точка R – вторая точка пересечения прямой MN с ψ. Точка T – вторая точка пересечения прямой MN с ω.
По следствии 6.3.1

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l}\mathrm{pow}(M,\psi) = MN\cdot MR = MQ^2\\ \mathrm{pow}(N,\omega) = NM\cdot NT = NP^2\\ MQ = NP, \quad \text{symmetry}\end{array}\right| \implies MN\cdot MR = NM\cdot NT \implies\\ &\implies MR = NT \implies MR - MN = NT - MN \implies NR = MT.\end{aligned} \tag{6.6}$$

4. `(ММО, 2013, 11.3)` Четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M – середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке T. Докажите, что прямые $KL \perp TM$.

Решение: Пусть точка P – основание перпендикуляра из точки A на прямую BC, а точка Q – основание перпендикуляра из точки на прямую AD. Т.к. $AB = BC$ и $AD = DC$, то $AC \perp BD$ и $AC \cap BD = M$. Тогда четырехугольники $APBM, BCDQ, APCQ$ – вписанные, с центрами K, L, M соответственно.
По теореме 6.7

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l}AP = \text{radical axis}\,((AB),(AC))\\ CQ = \text{radical axis}\,((CD),(AC))\end{array}\right| \implies\\ &\implies AP \cap CQ = T = \text{radical center}((AB),(AC),(CD)).\end{aligned} \tag{6.7}$$

По уравнении (6.7)

$$M \in (AB)\cap(CD) \implies M \in \text{radical axis}\,((AB),(CD)) \implies KL \perp TM. \tag{6.8}$$

5. Точка D – основание биссектрисы из точки A треугольника ABC. Окружность (ABD) повторно пересекает прямую AC в точке E, а окружность (ACD) повторно пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $BF = CE$.

Решение:

Теорема 6.11 (Теорема о биссектрисе). *В треугольнике ABC провели биссектрису AD, тогда*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

По теореме 6.4

$$\begin{cases} \mathrm{pow}(B,(ADC)) = BF \cdot BA = BD \cdot BC \\ \mathrm{pow}(C,(ADB)) = CE \cdot CA = CD \cdot CB \end{cases} \Bigg| \implies \frac{BF \cdot BA}{BD} = \frac{CE \cdot CA}{CD}. \tag{6.9}$$

По уравнении (6.9) и теореме 6.11

$$\frac{BF}{CE} = \frac{BD \cdot CA}{BA \cdot CD} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CA}{BA} = 1. \tag{6.10}$$

6.* Окружность ω проходит через вершины A и D равнобокой трапеции $ABCD$ и пересекает диагональ BD и боковую сторону CD в точках P и Q соответственно. Точки P' и Q' симметричны точкам P и Q относительно середин отрезков BD и CD соответственно. Докажите, что B, C, P' и Q' концикличны.

Решение: По обратной теореме 6.4

$$\mathrm{pow}(C,\Omega) = DQ' \cdot DC = DP' \cdot DB. \tag{6.11}$$

Если P' и Q' симметричны относительно середин отрезков BD и CD, то $DP' = BP$ и $CQ = DQ'$. Тогда уравнении (6.9) преобразовывается в

$$\underbrace{CQ \cdot CD}_{\mathrm{pow}(C,\omega)} = \underbrace{BP \cdot BD}_{\mathrm{pow}(B,\omega)} \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) верно, т.к. ω, B, C – все эти объекты симметричны относительно серединного перпендикуляра к AD.

7.** `(JBMO Shortlist, 2022, G6)` Пусть Ω – описанная окружность треугольника ABC. Взяты точки P и Q, так что P равноудалена от A и B, а Q равноудалена от A и C и углы PBC и QCB равны. Докажите, что касательная к Ω в точке A, прямая PQ и BC пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть ℓ – касательная в точке B к окружности (ABC).
По следствии 6.10.1 существует окружность ω, которая касается прямой AP в точке A, а прямой BQ в точке B.

$$\left.\begin{cases} AP^2 = BP^2 \\ CQ^2 = BQ^2 \end{cases}\right| \implies PQ = \text{radical axis}((B), \omega). \tag{6.13}$$

$$\left.\begin{cases} BC = \text{radical axis}(\omega, (ABC)) \\ PQ = \text{radical axis}((B), \omega) \\ \ell = \text{radical axis}((B), (ABC)) \end{cases}\right| \implies BC \cap PQ \cap \ell \neq \emptyset. \tag{6.14}$$

8.* Вневписанные окружности ω_b и ω_c треугольника ABC касаются сторон AC и AB соответственно в точках E и F. Прямая EF повторно пересекает окружности ω_b и ω_c в точках X и Y соответственно. Касательные в точках X и Y проведенные к окружностям ω_b и ω_c пересекают прямые AC и AB в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от точек E и F.

Решение: По задаче 3 $EX = FY$.
Пусть K', L' – середины отрезков EX, YF соответственно. Тогда $YL' = L'F = EK' = K'X$, $LL' \perp EF$ и $KK' \perp EF$. Тогда и середина KL проецируется в середину XY, что эквивалентно середине EF.

9. (a) Пусть C_1 и B_1 – точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно. Докажите что, радикальная ось окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметре, проходит через ортоцентр треугольника ABC.

Решение: Пусть окружность (BB_1) пересекает сторону AC в точке P, а окружность (CC_1) пересекает сторону AB в точке Q. Тогда BQ, CP – высоты треугольника ABC, тогда $BQ \cap CP = H$ – ортоцентр.
Построим окружность $(BC) \subset \{P, Q\}$.

$$\begin{gathered} \left.\begin{cases} BQ = \text{radical axis}((BC), (BB_1)) \\ CP = \text{radical axis}((BC), (CC_1)) \end{cases}\right| \implies \\ \implies H = \text{radical center}((BC), (BB_1), (CC_1)) \implies \\ \implies H \in \text{radical axis}((BB_1), (CC_1)). \end{gathered} \tag{6.15}$$

(b)* `(Ось Обера)` Докажите, что четыре ортоцентра четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку[1], коллинеарны.

Решение: Пусть треугольник ABC пересекает прямая ℓ, которая пересекает стороны AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Через $H_{ABC}, H_{A_1B_1C}, H_{A_1BC_1}, H_{AB_1C_1}$ будем обозначать ортоцентры сооттетствующих треугольников.
Построим на AA_1, BB_1, CC_1 окружности как на диаметрах. Тогда по задаче 9a для треугольника ABC

$$\begin{cases} H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1), (BB_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1), (CC_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((BB_1), (CC_1)) \end{cases} \tag{6.16}$$

Аналогичные утверждения можно произвести для других ортоцентров, таким образом получается, что каждый ортоцентр лежит на каждой радикальной оси каждой пары окружности. Т.к. ортоцентры различны, то радикальные оси не могут пересекаться в одной точке, а значит радикальные оси совпадают. И каждый ортоцентр лежит на этой общей радикальной оси.

(c)* `(Теорема Гаусса-Боденмиллера)` Докажите, что прямая Гаусса[1] перпендикулярна оси Обера.

Решение: По теореме 6.5 и задаче 9b *Ось Обера* будет перпендикулярна линии центров данных окружностей. А линия центров данных окружностей и есть *прямая Гаусса*, т.к. центрами окружностей являются центры диагоналей четырехсторонника.

10.* Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC конкурентны. Прямая EF пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что P, Q, D и середина отрезка BC концикличны.

---

[1] Такие прямые образуют фигуру, называемую полным четырёхсторонником.

[1] Прямой Гаусса полного четырёхсторонника называется прямая, проходящая через середины трех его диагоналей.

Решение:

Теорема 6.12 (Теорема Чевы). *Чевианы* AA_1, BB_1, CC_1 *треугольника* ABC *конкурентны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Теорема 6.13 (Теорема Менелая). *Точки* A_1, B_1, C_1 *на прямых* BC, AC, AB *соответственно коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке T, а точка M – середина BC.

$$\operatorname{pow}(T,(ABC)) = TP \cdot TQ = TB \cdot TC. \tag{6.17}$$

Чтобы искомая окружность ω существовало должно выполняться

$$\operatorname{pow}(T,\omega) = TD \cdot TM = \underbrace{TP \cdot TQ = TB \cdot TC}_{\text{по уравнении (6.17)}}. \tag{6.18}$$

Также по теоремах 6.12 и 6.13

$$\frac{BT}{CT} \underset{\text{по теореме 6.13}}{=} \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \underset{\text{по теореме 6.12}}{=} \frac{BD}{DC}. \tag{6.19}$$

Заметим что в уравнениях (6.18) и (6.19) остались только точки на прямой BC. Такую задачу можно решить координатным способом, за начало координат приняв T.

$$\begin{aligned}\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{DC} = \frac{TD-TB}{TC-TD} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow TB(TC-TD) = TC(TD-TB) \\ TB\cdot TC - TB\cdot TD = TC\cdot TD - TB\cdot TC \\ 2TB\cdot TC = TD\,(TC+TB) \\ TB\cdot TC = TD\cdot\frac{TC+TB}{2} = TD\cdot TM.\end{aligned} \tag{6.20}$$

Хочется еще отметить, что из уравнения (6.20) следует, что

$$TD = \frac{2TB\cdot TC}{TB+TC} = \frac{2}{\frac{1}{TB}+\frac{1}{TC}}.$$

Поэтому четверка точек (T, B, D, C) называется *гармонической*.

11.* В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Прямые DE, EF и DF пересекаются прямые AB, BC и AC. В точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой[1] перпендикулярной прямой Эйлера треугольник ABC.

Решение: По теореме об окружности Эйлера Точки D, E, F лежат на окружности Эйлера ω_9 треугольника ABC. А Ω – описанная окружность этого треугольника.

Каждый из четырехугольников $ABDE, BCEF, CAFD$ является вписанным.

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{A_1B \cdot A_1C}_{\text{pow}(A_1,\omega_9)} = \underbrace{A_1F \cdot A_1E}_{\text{pow}(A_1,\Omega)} \\ \underbrace{B_1C \cdot B_1A}_{\text{pow}(B_1,\omega_9)} = \underbrace{B_1D \cdot B_1F}_{\text{pow}(B_1,\Omega)} \\ \underbrace{C_1A \cdot C_1B}_{\text{pow}(C_1,\omega_9)} = \underbrace{C_1E \cdot C_1D}_{\text{pow}(C_1,\Omega)} \end{array}\right| \implies \{A_1, B_1, C_1\} \in \text{radical axis}(\omega_9, \Omega). \tag{6.21}$$

---

[1] Такая прямая называется трилинейной полярой ортоцентра, или ортоцентрической осью, или центральной линией центра описанной окружности.

Контрольная работа