

1. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.
2. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?
3. Точка  $M$  расположена на стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что площадь треугольника  $AMD$  равна половине площади параллелограмма.
4. Пусть  $M$  — точка на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , причем  $AM : MB = m : n$ . Докажите, что площадь треугольника  $CAM$  относится к площади треугольника  $CBM$  как  $m : n$ .
5. Точки  $M$  и  $N$  — соответственно середины противоположных сторон  $AB$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ , площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых  $AN, BN, CM, DM$ .
6. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , площадь которого равна 50, взяты соответственно точки  $M$  и  $K$  так, что  $AM : MB = 1 : 5$ , а  $AK : KC = 3 : 2$ . Найдите площадь треугольника  $AMK$ .
7. Прямая, проведенная через вершину  $C$  трапеции  $ABCD$  параллельно диагонали  $BD$ , пересекает продолжение основания  $AD$  в точке  $M$ . Докажите, что треугольник  $ACM$  равновелик трапеции  $ABCD$ .
8. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.
9. Медианы  $BM$  и  $CN$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что четырехугольник  $AMKN$  равновелик треугольнику  $BKC$ .
10. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.
11. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.<sup>1</sup>
12. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.
- 13.\* Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

---

<sup>1</sup>Привет задаче 1!

14. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности.
15. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите геометрическое место таких точек  $M$ , для которых:
  - (a) треугольники  $AMB$  и  $ABC$  равновелики;
  - (b) треугольники  $AMB$  и  $AMC$  равновелики;
  - (c) треугольники  $AMB$ ,  $AMC$  и  $BMC$  равновелики.
16. Окружность касается стороны треугольника, равной  $a$ , и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной  $a$ .
17. Боковая сторона  $AB$  и основание  $BC$  трапеции  $ABCD$  вдвое меньше ее основания  $AD$ . Найдите площадь трапеции, если  $AC = a$ ,  $CD = b$ .
18. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.