1. (Лемма Фусса) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая вторично пересекающая окружность ω_1 в точке A_1 и окружность ω_2 в точке A_2. Точки B_1 и B_2 для прямой через точку B определяются аналогично. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

2. В равнобедренном треугольник ABC ($AB = AC$) на меньшей дуге AB окружности (ABC) взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат по одну сторону относительно прямой BC. Окружность (BDE) пересекает прямую AB в точке F. Докажите, что $EF \parallel BC$.

3. В трапеции $ABCD$ проведена окружность, проходящая через точки A и D. Окружность пересекает боковые стороны AB и CD (или их продолжения) в точках N и M соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых BM и CN равноудалена от точек A и D, то она лежит на окружности.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины A, выбрана точка P. Пусть B_1 и C_1 – проекции точки P на прямые AC и AB соответственно.
   (a) Докажите, что точки B, C, B_1, C_1 концикличны.
   (b) Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек B_1 и C_1, на прямые AB и AC соответственно, параллелен стороне BC.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Пусть точки K и L – проекции точки D на стороны AB и AC соответственно. Известно, что $\angle BAC = 72°$, $\angle ABL = 30°$. Чему равен угол $\angle DKC$?

6.* (Окружность Тейлора) Докажите, что шесть точек в виде шести проекций трёх оснований высот треугольника, пересекающих каждую сторону, на две оставшиеся стороны лежат на одной окружности.

7. (a) (Точка Микеля треугольника) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях, выбраны точки C_1, B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что окружности (AB_1C_1), (A_1BC_1) и (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.
   (b)* (Точка Микеля четырехсторонника) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Эти прямые образуют 4 треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Точка D – проекция точки B_1 на сторону AB, точка E – пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что $EC_1 \perp BB_1$.

9. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что BO – биссектриса угла ABC.

10. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Биссектрисы треугольника BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Докажите, что $IB_1 = IC_1$.

11. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. Точки A_1 и C_1 – проекции точки $P \in \ell$ на прямые AB и BC соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

12. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая ℓ касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно (точка B[1] лежит внутри треугольника APQ). Прямая BP вторично пересекает ω_2 в точке T. Докажите, что AQ – биссектриса угла $\angle PAT$.

13.* Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что проекции точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 коллинеарны.

14.* В треугольнике ABC точки D и E – основания биссектрис из углов A и C соответственно, а точка I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Точки P и Q – пересечения прямой DE с (AIE) и (CID) соответственно, причем $P \neq E, Q \neq D$. Докажите, что $\angle EIP = \angle DIQ$.[2]

[1]Точка B называется точкой Шалтая треугольника APQ.
[2]Сделав инверсию в точке A или I, получите задачу с Высшей Пробы 2024.