Аннотация

Данный курс посвящён решению задач школьной планиметрии. Он будет охватывать такие темы как: счёт углов, ортоцентр треугольника, степень точки, движения плоскости, гомотетия и другие. Темы выходят за рамки школьного курса геометрии, поэтому этот курс поможет по-новому взглянуть на знакомые темы и задачи, а при решении новых, покажет “незнакомые” пути решения.

Курс подойдет для школьников, которые уже знакомы с понятие “вписанные углы” или “вписанные четырехугольники”.

Содержание

1 Счет углов

Под этим названием скрывается, не побоюсь этого слова, самый (!) используемый метод в решении задач. В каждой он встречается в том или ином виде. Поэтому, если вы хотите решать задачи, вам нужно его знать. В основном "считаются" углы, связанные с окружностями, но бывает и что-то другое.

Для примера, давайте дакажем, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Для этого вспомним «вписанные углы»

Теорема 1.1. *Высоты треугольника* конкурентны[1].

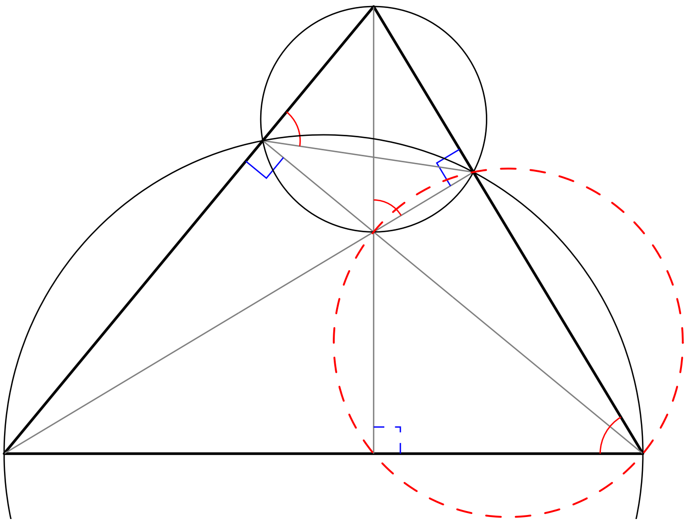
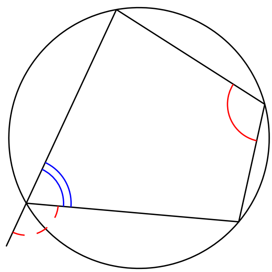


Рис. 1: Высоты треугольника пересекаются в одной точке.



Лемма 1.2. *Четырехугольник $ABCD$ является вписанным, если $\angle ABC$ равен смежному углу $\angle ADC$.*

[1] Пересекаются в одной точке.

Утверждение 1.3. *Пусть AB – хорда окружности, а C – точка касания касательной к окружности. Тогда угол между касательной и хордой равен вписанному углу, операющему на ту же дугу, что и хорда. То есть $\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.*

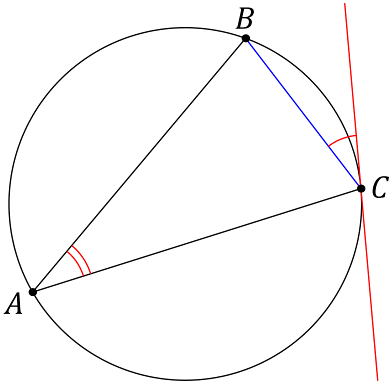


Рис. 2: Угол между касательной и хордой.

2 Симметрии

3 Площади

Давайте сейчас повторим то, чего мы уже знаем про площади различных многоугольников.

- Равные многоулольники имеют равную площадь.
- Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равняется сумме площадей этих многоугольников.
- Площадь прямогоульника равняется прозведению двух его сторон.
- Площадь треугольника равняется половине произведения его основания на высоту.
- Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

- Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей
- Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.
- Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

Пример 1. Докажите, что в треугольнике высоты обратно пропорциональна сторонам, к которым они проведены.

Пример 2. Медины AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника A_1MB_1, если площадь треугольника ABC равняется 1.

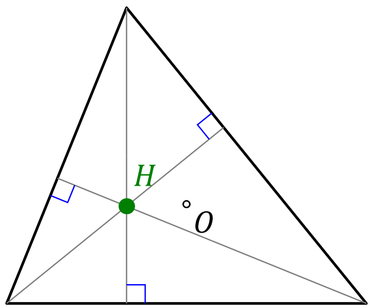
Пример 3. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

4 Ортоцентр треугольника

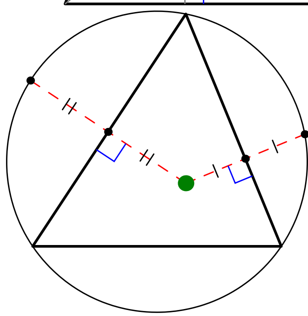
Ортоцентр – это замечетальная точка треугольника. Конструкции, в которых используются его *симметрии* относительно чего-либо, *замечательно* связанны с описанной окружностью, и наоборот!

Определение 4.1. Ортоцентр (H) – это точка пересечения высот треугольника.

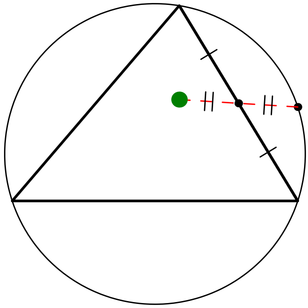
Я всегда буду ортоцентр треугольника ABC обозначать большой зеленой точкой *(просто я так решил)*, а центр описанной окружности как выколотую *(так уже более принято)*.



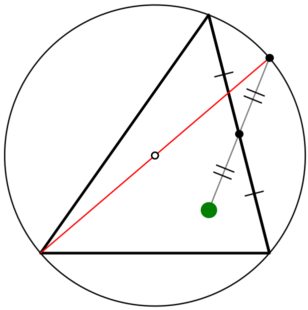
Теорема 4.2. *Если отразить ортоцентр относительно стороны, то он попадет на описанную окружность.*



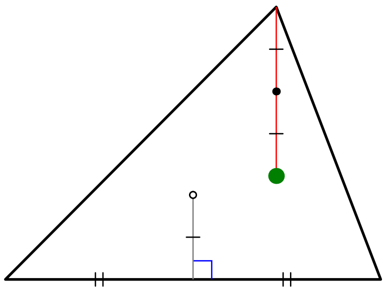
Теорема 4.3. *Если ортоцентр отразить относительно середины стороны, то он попадет на описанную окружность.*



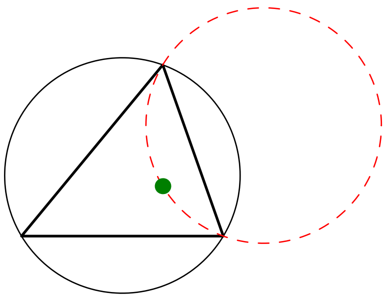
Следствие 4.3.1. *Точка из теоремы 4.3 диаметрально противоположна противолежащей стороне вершине.*



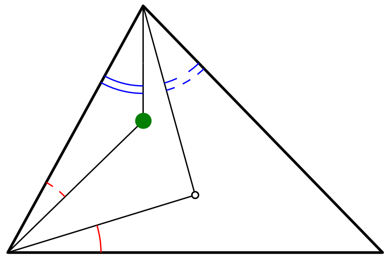
Следствие 4.3.2. *Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.*



Лемма 4.4 (Окружность Джонсона). $(ABC) = (ABH)$, *т.е. окружности, описанные вокруг* $\triangle ABC$ *и* $\triangle ABH$ *равны.*

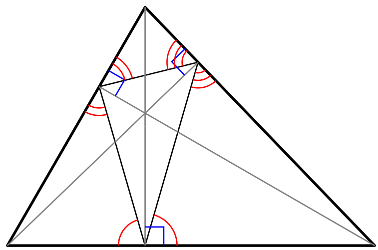


Определение 4.5 (Изогональное сопряжение[1]). Точки P, Q называются изогонально сопряженными, если $\angle PAB = \angle QAC, \angle PBC = \angle QBA, \angle PCB = \angle QCA$.



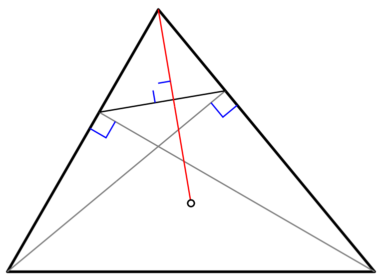
Теорема 4.6. *Ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.*

Определение 4.7. Инцетр – это центр, вписанной в многоугольник окружности.



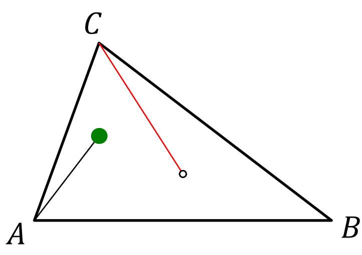
Определение 4.8. Ортотреугольник – это треугольник, вершины которого являются основаниями высот исходного треугольник.

Лемма 4.9. *Ортоцентр является инцентром для ортотреугольника.*



Следствие 4.9.1. *Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.*

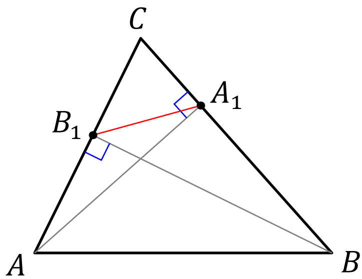
Лемма 4.10. *Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.*



$$AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OC^2$$

[1] Также можно думать об *изогоналях*, как о лучах, симметричных относительно биссектрис.

Лемма 4.11. *Если* AA_1 *и* BB_1 *– высоты треугольника* ABC*, то* $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$, $\quad k = \cos\angle C$.



4.1 Другие популярные уголки

Лемма 4.12. *Если в четырехугольнике* $ABCD$*,* AC *– биссектриса угла* A *и* $BC = CD$*, то этот четырехугольник является либо вписанным, либо дельтоидом*[1]*.*

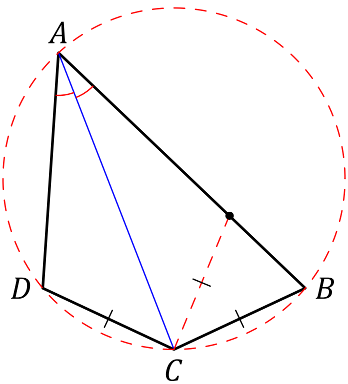


Рис. 3: Случай вписанности и дельтоида.

[1] *Дельтоидом (кайтом)* называется четырехугольник, у которого есть две пары равных смежных сторон

5 Подобие треугольников

6 Степень точки

Определение 6.1 (Степень точки). Степень точки P, находящейся на расстоянии d от центра окружности ω радиусом r, относительно этой же окружности:

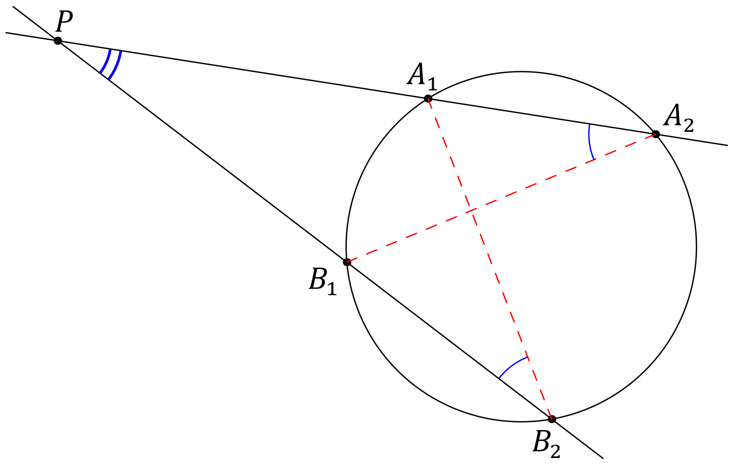
$$\operatorname{pow}(P,\omega) = d^2 - r^2.$$

Теорема 6.2. *Если прямая $\ell \ni P$ касается окружность в точке K, то*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = PK^2.$$

Теорема 6.3. *Если прямая $\ell \ni P$ пересекает окружность ω в точках A и B, тогда*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$



Следствие 6.3.1 (Теорема о касательной и секущей). *Если из точки P, проведена касательная PK к окружности ω и прямая $(\ell \ni P)$ пересекает окружность ω в точках A и B, тогда*

$$PK^2 = PA \cdot PB.$$

Теорема 6.4 (Главная теорема о степени точки). *Если через точку P проходят две прямые, которые пересекают окружность ω в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно, то*

$$\operatorname{pow}(P,\omega) = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PB_2}.$$

6.1 Радикальная ось

Теорема 6.5. *Геометрическое место точек* (ГМТ)*, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.*

Определение 6.6 (Радикальная ось). Прямая, состоящая из точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.

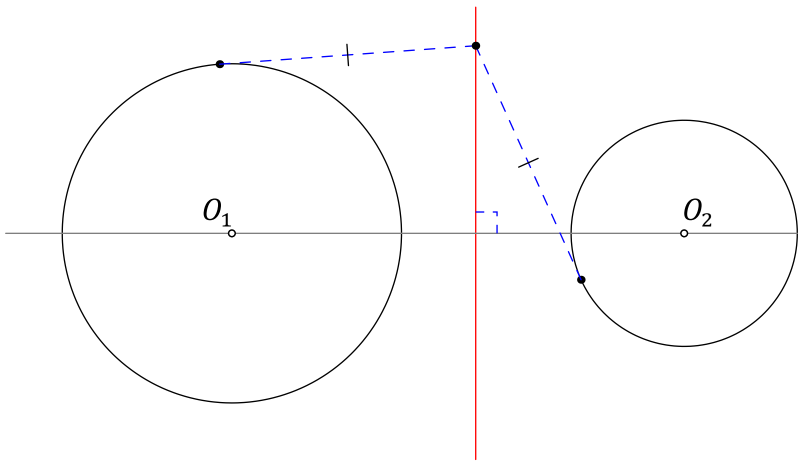


Рис. 4: Радикальная ось двух окружностей.

Теорема 6.7 (Радикальный центр). *Радикальные оси трех окружностей либо конкурентны, либо параллельны.*

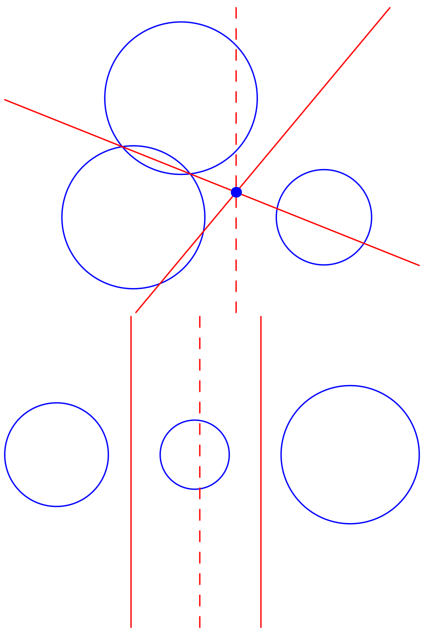
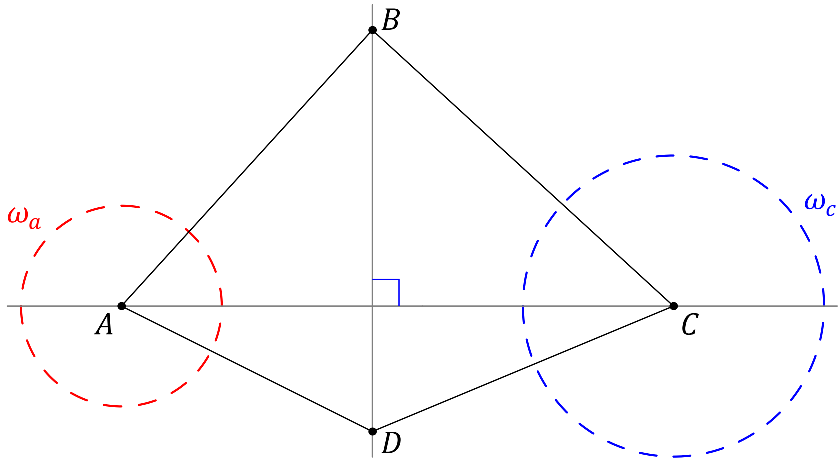


Рис. 5: Радикальный центр трех окружностей.

Теорема 6.8. *$AC \perp BD$, если*

$$\mathrm{pow}(B, \omega_a) - \mathrm{pow}(B, \omega_c) = \mathrm{pow}(D, \omega_a) - \mathrm{pow}(D, \omega_c)$$



Задачи

i Счёт углов-I

1. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке L. Докажите, что $BL = CL$.

2. Биссектрисы треугольника ABC пересекают описанную окружность (ABC) в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1.

3. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Точки M, N, K, L – середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

4. (Лемма Фусса) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая вторично пересекающая окружность ω_1 в точке A_1 и окружность ω_2 в точке A_2. Точки B_1 и B_2 для прямой через точку B определяются аналогично. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

   Решение: По теореме 1.2 $\angle B_1A_1A = \angle ABB_2 = 180^\circ - \angle B_2A_2A \Rightarrow \angle B_1A_1A_2 + \angle B_2A_2A_1 = 180^\circ \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

5. В трапеции $ABCD$ проведена окружность ω, проходящая через точки A и D. Окружность пересекает боковые стороны AB и CD (или их продолжения) в точках N и M соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых BM и CN равноудалена от точек A и D, то она лежит на окружности ω.

   Решение: $AD \parallel BC$, тогда по обратной задаче 4 $NBCM$ – вписанный. Тогда $\angle BNC = \angle BMC$.
   По обратной теореме 1.2 для четырехугольников $ANPD$ и $APMD$ $\angle BNC = \angle PDA$ и $\angle BMC = \angle PAD$. Отсюда следует, что треугольник APD – равнобедренный, а значит P равноудалена от A и D.

6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины A, выбрана точка P. Пусть B_1 и C_1 – проекции точки P на прямые AC и AB соответственно.

   (a) Докажите, что точки B, C, B_1, C_1 концикличны.

   Решение: Пусть точка D – основания высоты из вершины A. Тогда $BDPC_1$ и AC_1PB_1 – вписаные четырехугольники. По теореме 1.2 $\angle ABC = \angle APC_1$ и $\angle APC_1 = \angle AB_1C_1$. Тогда по обратной теореме 1.2 BCC_1B_1 – вписанный четырехугольник.

(b)* Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек B_1 и C_1, на прямые AB и AC соответственно, параллелен стороне BC.

Решение: По задаче 6a BCC_1B_1 – вписанный, а также $B_1C_1C_2B_2$ (B_1C_1 – диаметр). Тогда по теореме 1.2 $\angle ABC = \angle AB_1C_1 = \angle AC_2B_2 \Rightarrow B_2C_2 \parallel BC$.

7. (a) (Точка Микеля треугольника) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях, выбраны точки C_1, B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что окружности (AB_1C_1), (A_1BC_1) и (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть $(AB_1C_1) \cap (A_1BC_1) = P$. Будем доказывать, что $P \in (A_1B_1C)$. По теореме 1.2 $\angle BC_1P = \angle CA_1P = \angle AB_1P$. Отсюда по обратной теореме 1.2 точки A_1, B_1, C и P концикличны.

(b)* (Точка Микеля четырехсторонника) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Эти прямые образуют 4 треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть на первой прямой лежат точки A, F и B, на второй B, D и C, на третьей C, A и E и на четвертой E, D и F. Тогда по задаче 7a для $\triangle ABC$ и точек F, D и E

$$(AFE) \cap (BFD) \cap (CDE) = M. \tag{6.1}$$

По задаче 7a для $\triangle AFE$ и точек B, D и C

$$(ABC) \cap (FBD) \cap (EDC) = G. \tag{6.2}$$

Но по уравнение (6.1) и (6.2) $G \equiv M$. Отсюда следует, что все нужные окружности пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Точка D – проекция точки B_1 на сторону AB, точка E – пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что $EC_1 \perp BB_1$.

Решение: Нужно доказать, что DC_1EB_1 – вписанный, тогда утверждение верно. B_1EFC – вписанный, тогда по теореме 1.2 $\angle B_1CF = \angle B_1ED$. Также BCC_1B_1 – вписанный, тогда, опять же, по теореме 1.2 $\angle BCB_1 = \angle B_1C_1D$. Тогда, раз $\angle B_1ED = \angle B_1ED = \angle B_1C_1D$, то DC_1EB_1 – вписанный.

9. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что BO – биссектриса угла ABC.

> Решение: $ABCO$ – вписанный, т.к. $\angle B = \angle O = 90^\circ$. $AO = OC$, т.к. это половины диагоналей квадрата. Тогда BO – биссектриса угла ABC.

10. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Биссектрисы треугольника BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Докажите, что $IB_1 = IC_1$.

> Решение:
>
> Лемма 6.9. *Если в треугольнике ABC, точка I – инцентр, то*
>
> $$\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$$
>
> По теореме 6.9 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$. Тогда AB_1IC_1 – вписанный. AI – биссектриса, поэтому $IB_1 = IC_1$.

11. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. Точки A_1 и C_1 – проекции точки $P \in \ell$ на прямые AB и BC соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

> Решение:
>
> Лемма 6.10. *Угол между касательной и хордой окружности, равен половине градусной меры дуги, стягиваемой данной хордой.*
>
> Следствие 6.10.1. *Если к окружности (ABC) провели касательную BK, то: $\angle BAC = \angle CBK$.*
>
> По следствии 6.10.1 $\angle PBA_1 = \angle BAC$. PC_1BA_1 – вписанный, поэтому $\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1$.
> $\angle PC_1A_1 + \angle A_1C_1B = 90^\circ = \angle BAC + \angle(AB, A_1C_1) \Rightarrow AC \perp A_1C_1$.

12. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая ℓ касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно (точка B[1] лежит внутри треугольника APQ). Прямая BP вторично пересекает ω_2 в точке T. Докажите, что AQ – биссектриса угла $\angle PAT$.

[1] Точка B называется точкой Шалтая треугольника APQ.

Решение: По следствии 6.10.1 для прямой PQ и окружностей ω_1 и ω_2 $\angle BPQ = \angle BAP$ и $\angle BQP = \angle BAQ$. Тогда угол $TBQ = \angle BAQ + \angle BAP = \angle PAQ$ (внешний в треугольнике BPQ).
Так как $BQTA$ – вписанный, то $\angle TBQ = \angle TAQ = \angle PAQ$. Тогда и получается, что AQ – биссектриса угла PAT.

ii Симметрия

iii Площади

1. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

2. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?

3. Точка M расположена на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма.

4. Пусть M – точка на стороне AB треугольника ABC, причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.

5. Точки M и N – соотвественно середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прымях AN, BN, CM, DM.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK.

7. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD, пересекает продолжение основания AD в точке M. Докажите, что треугольник ACM равновелик трапеции $ABCD$.

8. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

9. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что четырехугольник $AMKN$ равновелик треугольнику BKC.

10. Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.

11. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.[1]

12. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырехугольника.

13.* Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

14. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности.

15. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых:

    (a) треугольники AMB и ABC равновелики;

    (b) треугольники AMB и AMC равновелики;

    (c) треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

16. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше ее основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

iv Счёт углов-II

1. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, а также отмечена точка M – середина стороны BC. Точка H – его ортоцентр, а точка P – пересечения луча (!) MH с окружностью (ABC). Докажите, что точки P, A, B_1, C_1 конциклины.

> Решение: Отметим вторую точку пересечения Q окружности (ABC) с прямой MH. Тогда по следствии 4.3.1 AQ – диаметр, а значит $\angle APQ = 90°$. Тогда P, A, C_1, B_1, H концикличны, т.к. лежат на окружности с диаметром AH.

[1] Привет задаче 1!

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка P – точка пересечения диагоналей AC и BD. Точка O – центр окружности (ABP). Докажите, что $OP \perp CD$.

Решение: Т.к. $ABCD$ – вписанный, то $\triangle BAP \sim \triangle CPD$ (по двум углам). Тогда если O_1 – центр окружности (CPD), то $\angle APO = \angle DPO_1$.
По теореме 4.6 в треугольнике CPD, если H_1 – его ортоцентр, $\angle DPO_1 = \angle CPH_1$. Тогда точки O, P, H – коллинеарны, т.к. $\angle CPH = \angle APO$ (вертикальные). А значит $OP \equiv PH \perp CD$.

3. (Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4) Пусть точки B и C лежат на полуокружности с диаметром AD. Точка M – середина отрезка BC. Точка N такова, что точка M – середина отрезка AN, докажите что $BC \perp ND$.

Решение: $ABNC$ – параллелограмм. Тогда раз AD – диаметр, то $AB \perp BD$ и $AC \perp CD$. Но $AB \parallel CN$ и $AC \parallel BN$. Тогда $BD \perp CN$ и $CD \perp BN$. Значит C – ортоцентр треугольника BND, а значит $BC \perp ND$.

4. В треугольнике ABC проведена высота AD и отмечен центр описанной окружности – O. Пусть точки E и F – проекции точек B и C на прямую AO. N – точка пересечения прямых AC и DE, а M – точка пересечения прямых AB и DF. Докажите, что точки A, D, N, M концикличны.

Решение: Пусть точка A' – диаметрально противоположна A. Тогда $ACA' = \angle ABA' = 90°$, отсюда $\angle CA'A = \angle ACF$ и $\angle BA'A = \angle ABE$. Т.к. $ABDE$ и $ADFC$ – вписанные и по теореме 1.2 $\angle ABE = \angle ADN$ и $\angle ACF = \angle ADM$. Тогда $\angle NDM = \angle BA'C$, а значит $ADNM$ – вписанный, раз $ABA'C$ был вписанным.

v Подобие

vi Степень точки и радикальная ось

1. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. o_o

Решение: Пусть H_a, H_b, H_c – основания высот треугольника ABC из вершин A, B и C соответственно.
Четырехугольники ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c – вписанные. По теореме 6.7 прямые AH_a, BH_b, CH_c конкурентны.

2. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

Решение: Пусть окружность высекает на сторонах AB, AC и BC треугольника ABC отрезки CC_1, BB_1, AA_1.

$$\begin{cases} AB_2 = B_1B_2 = B_1C & = b \\ AC_1 = C_1C_2 = BC_2 & = c \\ BA_1 = A_1A_2 = A_2C & = a \end{cases} \tag{6.3}$$

Т.к. $A_1A_2B_1B_2$ – вписанный, то

$$\begin{aligned} \operatorname{pow}(C, (A_1A_2B_1B_2)) = CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2 \implies \\ \implies c \cdot 2c = b \cdot 2b \implies c = b \implies AC = BC. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Т.к. $A_1A_2C_1C_2$ – вписанный, то

$$\begin{aligned} \operatorname{pow}(B, (A_1A_2C_1C_2)) = BA_1 \cdot BA_2 = BA_1 \cdot BA_2 \implies \\ \implies a \cdot 2a = c \cdot 2c \implies a = c \implies AB = AC. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Из уравнений (6.4) и (6.5) следует что $AB = AC = BC$.

3.* Окружности ψ и ω вписаны в вертикальный угол $\angle nm$, ψ касается прямой n в точке N, а ω касается прямой m в точке M. Докажите, что ψ и ω высекают на NM равные отрезки.

Решение: Пусть окружность ψ касается прямой m в точке Q, а ω касается n в точке P. Точка R – вторая точка пересечения прямой MN с ψ. Точка T – вторая точка пересечения прямой MN с ω.
По следствии 6.3.1

$$\begin{aligned} \left.\begin{cases} \operatorname{pow}(M, \psi) = MN \cdot MR = MQ^2 \\ \operatorname{pow}(N, \omega) = NM \cdot NT = NP^2 \\ MQ = NP, \quad \text{symmetry} \end{cases}\right| \implies MN \cdot MR = NM \cdot NT \implies \\ \implies MR = NT \implies MR - MN = NT - MN \implies NR = MT. \end{aligned} \tag{6.6}$$

4. (ММО, 2013, 11.3) Четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M – середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке T. Докажите, что прямые $KL \perp TM$.

Решение: Пусть точка P – основание перпендикуляра из точки A на прямую BC, а точка Q – основание перпендикуляра из точки на прямую AD. Т.к. $AB = BC$ и $AD = DC$, то $AC \perp BD$ и $AC \cap BD = M$. Тогда четырехугольники $APBM, BCDQ, APCQ$ – вписанные, с центрами K, L, M соответственно.

По теореме 6.7

$$\begin{cases} AP = \text{radical axis}\left((AB),(AC)\right) \\ CQ = \text{radical axis}\left((CD),(AC)\right) \end{cases} \Bigg| \implies \\ \implies AP \cap CQ = T = \text{radical center}((AB),(AC),(CD)). \tag{6.7}$$

По уравнении (6.7)

$$M \in (AB) \cap (CD) \implies M \in \text{radical axis}\left((AB),(CD)\right) \implies KL \perp TM. \tag{6.8}$$

5. Точка D – основание биссектрисы из точки A треугольника ABC. Окружность (ABD) повторно пересекает прямую AC в точке E, а окружность (ACD) повторно пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $BF = CE$.

Решение:

Теорема 6.11 (Теорема о биссектрисе). *В треугольнике ABC провели биссектрису AD, тогда*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

По теореме 6.4

$$\begin{cases} \text{pow}(B,(ADC)) = BF \cdot BA = BD \cdot BC \\ \text{pow}(C,(ADB)) = CE \cdot CA = CD \cdot CB \end{cases} \Bigg| \implies \frac{BF \cdot BA}{BD} = \frac{CE \cdot CA}{CD}. \tag{6.9}$$

По уравнении (6.9) и теореме 6.11

$$\frac{BF}{CE} = \frac{BD \cdot CA}{BA \cdot CD} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CA}{BA} = 1. \tag{6.10}$$

6.* Окружность ω проходит через вершины A и D равнобокой трапеции $ABCD$ и пересекает диагональ BD и боковую сторону CD в точках P и Q соответственно. Точки P' и Q' симметричны точкам P и Q относительно середин отрезков BD и CD соответственно. Докажите, что B, C, P' и Q' концикличны.

Решение: По обратной теореме 6.4

$$\operatorname{pow}(C,\Omega) = DQ' \cdot DC = DP' \cdot DB. \tag{6.11}$$

Если P' и Q' симметричны относительно середин отрезков BD и CD, то $DP' = BP$ и $CQ = DQ'$. Тогда уравнении (6.9) преобразовывается в

$$\underbrace{CQ \cdot CD}_{\operatorname{pow}(C,\omega)} = \underbrace{BP \cdot BD}_{\operatorname{pow}(B,\omega)} \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) верно, т.к. ω, B, C – все эти объекты симметричны относительно серединного перпендикуляра к AD.

7.** (JBMO Shortlist, 2022, G6) Пусть Ω – описанная окружность треугольника ABC. Взяты точки P и Q, так что P равноудалена от A и B, а Q равноудалена от A и C и углы PBC и QCB равны. Докажите, что касательная к Ω в точке A, прямая PQ и BC пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть ℓ – касательная в точке B к окружности (ABC).
По следствии 6.10.1 существует окружность ω, которая касается прямой AP в точке A, а прямой BQ в точке B.

$$\left.\begin{cases} AP^2 = BP^2 \\ CQ^2 = BQ^2 \end{cases}\right| \implies PQ = \text{radical axis}((B),\omega). \tag{6.13}$$

$$\left.\begin{cases} BC = \text{radical axis}(\omega,(ABC)) \\ PQ = \text{radical axis}((B),\omega) \\ \ell = \text{radical axis}((B),(ABC)) \end{cases}\right| \implies BC \cap PQ \cap \ell \neq \emptyset. \tag{6.14}$$

8.* Вневписанные окружности ω_b и ω_c треугольника ABC касаются сторон AC и AB соответственно в точках E и F. Прямая EF повторно пересекает окружности ω_b и ω_c в точках X и Y соответственно. Касательные в точках X и Y проведенные к окружностям ω_b и ω_c пересекают прямые AC и AB в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от точек E и F.

Решение: По задаче 3 $EX = FY$.
Пусть K', L' – середины отрезков EX, YF соответственно. Тогда $YL' = L'F = EK' = K'X$, $LL' \perp EF$ и $KK' \perp EF$. Тогда и середина KL проецируется в середину XY, что эквивалентно середине EF.

9. (a) Пусть C_1 и B_1 – точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно. Докажите что, радикальная ось окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметре, проходит через ортоцентр треугольника ABC.

Решение: Пусть окружность (BB_1) пересекает сторону AC в точке P, а окружность (CC_1) пересекает сторону AB в точке Q. Тогда BQ, CP – высоты треугольника ABC, тогда $BQ \cap CP = H$ – ортоцентр.
Построим окружность $(BC) \subset \{P, Q\}$.

$$\left.\begin{cases} BQ = \text{radical axis}((BC),(BB_1)) \\ CP = \text{radical axis}((BC),(CC_1)) \end{cases}\right| \Rightarrow \\ \Rightarrow H = \text{radical center}((BC),(BB_1),(CC_1)) \Rightarrow \\ \Rightarrow H \in \text{radical axis}((BB_1),(CC_1)). \tag{6.15}$$

(b)* (Ось Обера) Докажите, что четыре ортоцентра четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку[1], коллинеарны.

Решение: Пусть треугольник ABC пересекает прямая ℓ, которая пересекает стороны AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Через $H_{ABC}, H_{A_1B_1C}, H_{A_1BC_1}, H_{AB_1C_1}$ будем обозначать ортоцентры соответствующих треугольников.
Построим на AA_1, BB_1, CC_1 окружности как на диаметрах. Тогда по задаче 9a для треугольника ABC

$$\begin{cases} H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1),(BB_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1),(CC_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((BB_1),(CC_1)) \end{cases} \tag{6.16}$$

Аналогичные утверждения можно произвести для других ортоцентров, таким образом получается, что каждый ортоцентр лежит на каждой радикальной оси каждой пары окружности. Т.к. ортоцентры различны, то радикальные оси не могут пересекаться в одной точке, а значит радикальные оси совпадают. И каждый ортоцентр лежит на этой общей радикальной оси.

(c)* (Теорема Гаусса-Боденмиллера) Докажите, что прямая Гаусса[2] пер-

[1] Такие прямые образуют фигуру, называемую полным четырёхсторонником.

[2] Прямой Гаусса полного четырёхсторонника называется прямая, проходящая через середины трех его диагоналей.

пендикулярна оси Обера.

Решение: По теореме 6.5 и задаче 9b *Ось Обера* будет перпендикулярна линии центров данных окружностей. А линия центров данных окружностей и есть *прямая Гаусса*, т.к. центрами окружностей являются центры диагоналей четырехсторонника.

10.* Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC конкурентны. Прямая EF пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что P, Q, D и середина отрезка BC концикличны.

Решение:

Теорема 6.12 (Теорема Чевы). *Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC конкурентны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Теорема 6.13 (Теорема Менелая). *Точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB соответственно коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке T, а точка M – середина BC.

$$\mathrm{pow}(T, (ABC)) = TP \cdot TQ = TB \cdot TC. \tag{6.17}$$

Чтобы искомая окружность ω существовало должно выполняться

$$\mathrm{pow}(T, \omega) = TD \cdot TM = \underbrace{TP \cdot TQ = TB \cdot TC}_{\text{по уравнении (6.17)}}. \tag{6.18}$$

Также по теоремах 6.12 и 6.13

$$\frac{BT}{CT} \underset{\text{по теореме 6.13}}{=} \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \underset{\text{по теореме 6.12}}{=} \frac{BD}{DC}. \tag{6.19}$$

Заметим что в уравнениях (6.18) и (6.19) остались только точки на прямой BC. Такую задачу можно решить координатным способом, за начало координат приняв T.

$$\begin{gathered}
\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{DC} = \frac{TD - TB}{TC - TD} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow TB(TC - TD) = TC(TD - TB) \\
TB \cdot TC - TB \cdot TD = TC \cdot TD - TB \cdot TC \\
2TB \cdot TC = TD\,(TC + TB) \\
TB \cdot TC = TD \cdot \frac{TC + TB}{2} = TD \cdot TM.
\end{gathered} \tag{6.20}$$

Хочется еще отметить, что из уравнения (6.20) следует, что

$$TD = \frac{2TB \cdot TC}{TB + TC} = \frac{2}{\frac{1}{TB} + \frac{1}{TC}}.$$

Поэтому четверка точек (T, B, D, C) называется *гармонической*.

11.* В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Прямые DE, EF и DF пересекаются прямые AB, BC и AC. В точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой[1] перпендикулярной прямой Эйлера треугольник ABC.

Решение: По теореме об окружности Эйлера Точки D, E, F лежат на окружности Эйлера ω_9 треугольника ABC. А Ω – описанная окружность этого треугольника.
Каждый из четырехугольников $ABDE, BCEF, CAFD$ является вписанным.

$$\left\{\begin{aligned} \underbrace{A_1B \cdot A_1C}_{\mathrm{pow}(A_1,\omega_9)} &= \underbrace{A_1F \cdot A_1E}_{\mathrm{pow}(A_1,\Omega)} \\ \underbrace{B_1C \cdot B_1A}_{\mathrm{pow}(B_1,\omega_9)} &= \underbrace{B_1D \cdot B_1F}_{\mathrm{pow}(B_1,\Omega)} \\ \underbrace{C_1A \cdot C_1B}_{\mathrm{pow}(C_1,\omega_9)} &= \underbrace{C_1E \cdot C_1D}_{\mathrm{pow}(C_1,\Omega)} \end{aligned}\right| \implies \{A_1, B_1, C_1\} \in \text{radical axis}(\omega_9, \Omega). \tag{6.21}$$

[1]Такая прямая называется трилинейной полярой ортоцентра, или ортоцентрической осью, или центральной линией центра описанной окружности.

Контрольная работа