Судя по карте, дорога здесь одна.
Трясёт на ухабах — мы
переносим с одобреньем.

Александр Башлачёв

1. Докажите, что высоты треугольника конкурентны.

Решение: Пусть H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC из вершин A, B и C соответственно.
Четырехугольники ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c — вписанные. По ?? прямые AH_a, BH_b, CH_c конкурентны.

2. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник — равносторонний.

Решение: Пусть окружность высекает на сторонах AB, AC и BC треугольника ABC отрезки CC_1, BB_1, AA_1.

$$\begin{cases} AB_2 = B_1B_2 = B_1C & = b \\ AC_1 = C_1C_2 = BC_2 & = c \\ BA_1 = A_1A_2 = A_2C & = a \end{cases} \tag{0.1}$$

Т.к. $A_1A_2B_1B_2$ — вписанный, то

$$\begin{gathered} \mathrm{pow}(C, (A_1A_2B_1B_2)) = CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2 \implies \\ \implies c \cdot 2c = b \cdot 2b \implies c = b \implies AC = BC. \end{gathered} \tag{0.2}$$

Т.к. $A_1A_2C_1C_2$ — вписанный, то

$$\begin{gathered} \mathrm{pow}(B, (A_1A_2C_1C_2)) = BA_1 \cdot BA_2 = BA_1 \cdot BA_2 \implies \\ \implies a \cdot 2a = c \cdot 2c \implies a = c \implies AB = AC. \end{gathered} \tag{0.3}$$

Из уравнений ???? следует что $AB = AC = BC$.

3.* Окружности ψ и ω вписаны в вертикальный угол $\angle nm$, ψ касается прямой n в точке N, а ω касается прямой m в точке M. Докажите, что ψ и ω высекают на NM равные отрезки.

Решение: Пусть окружность ψ касается прямой m в точке Q, а ω касается n в точке P. Точка R — вторая точка пересечения прямой MN с ψ. Точка T — вторая точка пересечения прямой MN с ω.
По ??

$$\left.\begin{cases} \mathrm{pow}(M, \psi) = MN \cdot MR = MQ^2 \\ \mathrm{pow}(N, \omega) = NM \cdot NT = NP^2 \\ MQ = NP, \quad \text{symmetry} \end{cases}\right| \implies MN \cdot MR = NM \cdot NT \implies$$
$$\implies MR = NT \implies MR - MN = NT - MN \implies NR = MT. \tag{0.4}$$

4. (ММО, 2013, 11.3) Четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке T. Докажите, что прямые $KL \perp TM$.

Решение: Пусть точка P — основание перпендикуляра из точки A на прямую BC, а точка Q — основание перпендикуляра из точки на прямую AD.
Т.к. $AB = BC$ и $AD = DC$, то $AC \perp BD$ и $AC \cap BD = M$. Тогда четырехугольники $APBM$, $BCDQ$, $APCQ$ — вписанные, с центрами K, L, M соответственно.
По ??

$$\begin{cases} AP = \text{radical axis}\,((AB),(AC)) \\ CQ = \text{radical axis}\,((CD),(AC)) \end{cases}\Bigg| \implies \qquad (0.5)$$

$$\implies AP \cap CQ = T = \text{radical center}((AB),(AC),(CD)).$$

По ??

$$M \in (AB) \cap (CD) \implies M \in \text{radical axis}\,((AB),(CD)) \implies KL \perp TM. \qquad (0.6)$$

5. Точка D — основание биссектрисы из точки A треугольника ABC. Окружность (ABD) повторно пересекает прямую AC в точке E, а окружность (ACD) повторно пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $BF = CE$.

Решение:

Теорема 0.1 (Теорема о биссектрисе). *В треугольнике ABC провели биссектрису AD, тогда*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

По ??

$$\begin{cases} \text{pow}(B,(ADC)) = BF \cdot BA = BD \cdot BC \\ \text{pow}(C,(ADB)) = CE \cdot CA = CD \cdot CB \end{cases}\Bigg| \implies \frac{BF \cdot BA}{BD} = \frac{CE \cdot CA}{CD}. \qquad (0.7)$$

По ????

$$\frac{BF}{CE} = \frac{BD \cdot CA}{BA \cdot CD} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CA}{BA} = 1. \qquad (0.8)$$

6.* Окружность ω проходит через вершины A и D равнобокой трапеции $ABCD$ и пересекает диагональ BD и боковую сторону CD в точках P и Q соответственно. Точки P' и Q' симметричны точкам P и Q относительно середин отрезков BD и CD соответственно. Докажите, что B, C, P' и Q' концикличны.

Решение: По обратной ??

$$\mathrm{pow}(C,\Omega) = DQ' \cdot DC = DP' \cdot DB. \tag{0.9}$$

Если P' и Q' симметричны относительно середин отрезков BD и CD, то $DP' = BP$ и $CQ = DQ'$. Тогда ?? преобразовывается в

$$\underbrace{CQ \cdot CD}_{\mathrm{pow}(C,\omega)} = \underbrace{BP \cdot BD}_{\mathrm{pow}(B,\omega)} \tag{0.10}$$

Уравнение ?? верно, т.к. ω, B, C — все эти объекты симметричны относительно серединного перпендикуляра к AD.

7.** (JBMO Shortlist, 2022, G6) Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC. Взяты точки P и Q, так что P равноудалена от A и B, а Q равноудалена от A и C и углы PBC и QCB равны. Докажите, что касательная к Ω в точке A, прямая PQ и BC пересекаются в одной точке.

Решение: Пусть ℓ — касательная в точке B к окружности (ABC).
По ?? существует окружность ω, которая касается прямой AP в точке A, а прямой BQ в точке B.

$$\left\{\begin{aligned} AP^2 &= BP^2 \\ CQ^2 &= BQ^2 \end{aligned}\right| \implies PQ = \text{radical axis}((B),\omega). \tag{0.11}$$

$$\left\{\begin{aligned} BC &= \text{radical axis}(\omega,(ABC)) \\ PQ &= \text{radical axis}((B),\omega) \\ \ell &= \text{radical axis}((B),(ABC)) \end{aligned}\right| \implies BC \cap PQ \cap \ell \neq \emptyset. \tag{0.12}$$

8.* Вневписанные окружности ω_b и ω_c треугольника ABC касаются сторон AC и AB соответственно в точках E и F. Прямая EF повторно пересекает окружности ω_b и ω_c в точках X и Y соответственно. Касательные в точках X и Y проведенные к окружностям ω_b и ω_c пересекают прямые AC и AB в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от точек E и F.

Решение: По задаче 3 $EX = FY$.
Пусть K', L' — середины отрезков EX, YF соответственно. Тогда $YL' = L'F = EK' = K'X$, $LL' \perp EF$ и $KK' \perp EF$. Тогда и середина KL проецируется в середину XY, что эквивалентно середине EF.

9. (a) Пусть C_1 и B_1 — точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно. Докажите что, радикальная ось окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметре, проходит через ортоцентр треугольника ABC.

Решение: Пусть окружность (BB_1) пересекает сторону AC в точке P, а окружность (CC_1) пересекает сторону AB в точке Q. Тогда BQ, CP — высоты треугольника ABC, тогда $BQ \cap CP = H$ — ортоцентр.
Построим окружность $(BC) \subset \{P, Q\}$.

$$\left.\begin{cases} BQ = \text{radical axis}((BC), (BB_1)) \\ CP = \text{radical axis}((BC), (CC_1)) \end{cases}\right| \implies \\ \implies H = \text{radical center}((BC), (BB_1), (CC_1)) \implies \\ \implies H \in \text{radical axis}((BB_1), (CC_1)). \tag{0.13}$$

(b)* (Ось Обера) Докажите, что четыре ортоцентра четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку[1], коллинеарны.

Решение: Пусть треугольник ABC пересекает прямая ℓ, которая пересекает стороны AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Через $H_{ABC}, H_{A_1B_1C}, H_{A_1BC_1}, H_{AB_1C_1}$ будем обозначать ортоцентры соотетствующих треугольников.
Построим на AA_1, BB_1, CC_1 окружности как на диаметрах. Тогда по задаче 9a для треугольника ABC

$$\begin{cases} H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1), (BB_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((AA_1), (CC_1)) \\ H_{ABC} \in \text{radical axis}((BB_1), (CC_1)) \end{cases} \tag{0.14}$$

Аналогичные утверждения можно произвести для других ортоцентров, таким образом получается, что каждый ортоцентр лежит на каждой радикальной оси каждой пары окружности. Т.к. ортоцентры различны, то радикальные оси не могут пересекаться в одной точке, а значит радикальные оси совпадают. И каждый ортоцентр лежит на этой общей радикальной оси.

(c)* (Теорема Гаусса-Боденмиллера) Докажите, что прямая Гаусса[2] перпендикулярна оси Обера.

Решение: По ?? задаче 9b *Ось Обера* будет перпендикулярна линии центров данных окружностей. А линия центров данных окружностей и есть *прямая Гаусса*, т.к. центрами окружностей являются центры диагоналей четырехсторонника.

10.* Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC конкурентны. Прямая EF пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что P, Q, D и середина отрезка BC концикличны.

[1] Такие прямые образуют фигуру, называемую полным четырёхсторонником.

[2] Прямой Гаусса полного четырёхсторонника называется прямая, проходящая через середины трех его диагоналей.

Решение:

Теорема 0.2 (Теорема Чевы). *Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC конкурентны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Теорема 0.3 (Теорема Менелая). *Точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB соответственно коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке T, а точка M — середина BC.

$$\text{pow}(T, (ABC)) = TP \cdot TQ = TB \cdot TC. \tag{0.15}$$

Чтобы искомая окружность ω существовало должно выполняться

$$\text{pow}(T, \omega) = TD \cdot TM = \underbrace{TP \cdot TQ = TB \cdot TC}_{\text{по ??}}. \tag{0.16}$$

Также по ????

$$\frac{BT}{CT} \underset{\text{по ??}}{=} \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \underset{\text{по ??}}{=} \frac{BD}{DC}. \tag{0.17}$$

Заметим что в уравнениях ???? остались только точки на прямой BC. Такую задачу можно решить координатным способом, за начало координат приняв T.

$$\begin{gathered}
\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{DC} = \frac{TD - TB}{TC - TD} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow TB(TC - TD) = TC(TD - TB) \\
TB \cdot TC - TB \cdot TD = TC \cdot TD - TB \cdot TC \\
2TB \cdot TC = TD\,(TC + TB) \\
TB \cdot TC = TD \cdot \frac{TC + TB}{2} = TD \cdot TM.
\end{gathered} \tag{0.18}$$

Хочется еще отметить, что из уравнения ?? следует, что

$$TD = \frac{2TB \cdot TC}{TB + TC} = \frac{2}{\frac{1}{TB} + \frac{1}{TC}}.$$

Поэтому четверка точек (T, B, D, C) называется *гармонической*.

11.* В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Прямые DE, EF и DF пересекаются прямые AB, BC и AC. В точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой[1] перпендикулярной прямой Эйлера

[1] Такая прямая называется трилинейной полярой ортоцентра, или ортоцентрической осью, или центральной линией центра описанной окружности.

треугольник ABC.

Решение: По теореме об окружности Эйлера Точки D, E, F лежат на окружности Эйлера ω_9 треугольника ABC. А Ω — описанная окружность этого треугольника. Каждый из четырехугольников $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ является вписанным.

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{A_1B \cdot A_1C}_{\mathrm{pow}(A_1,\omega_9)} = \underbrace{A_1F \cdot A_1E}_{\mathrm{pow}(A_1,\Omega)} \\ \underbrace{B_1C \cdot B_1A}_{\mathrm{pow}(B_1,\omega_9)} = \underbrace{B_1D \cdot B_1F}_{\mathrm{pow}(B_1,\Omega)} \\ \underbrace{C_1A \cdot C_1B}_{\mathrm{pow}(C_1,\omega_9)} = \underbrace{C_1E \cdot C_1D}_{\mathrm{pow}(C_1,\Omega)} \end{array}\right| \implies \{A_1, B_1, C_1\} \in \text{radical axis}(\omega_9, \Omega). \tag{0.19}$$