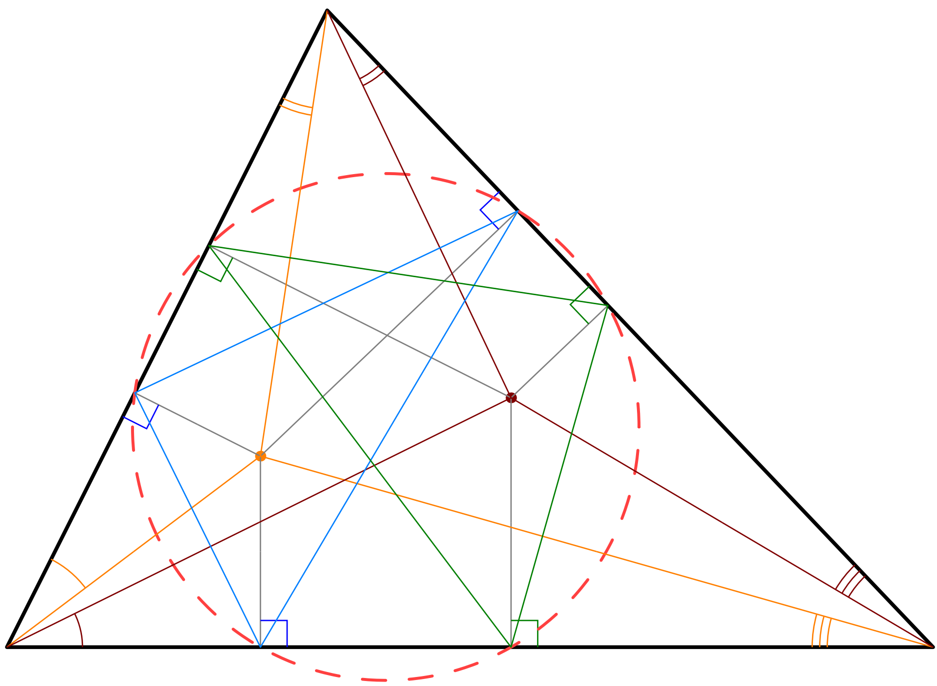
# Топ-5 теорем, которые не помогут построить дом

Направление точных наук

Лунёв Егор (@egorrshuk)



Место под соснами
Лето, 2024


OUTSKIRTS

# Аннотация

Доказательство перпендикулярности – это очень частое явление в задачах. Поэтому на этом факультативе мы будем учиться проверять перпендикулярность прямых разными способами: счет углов, поиск ортоцентра, свойства ортоцентра, прямая Симсона, задача 255, ортодиагональные четырехугольники, радикальные оси, ортологичные треугольники и другие..

Чтобы понять каждую тему, нужно лишь владеть знаниями о вписанных четырехугольниках, т.е. после окончания восьмого класса вы сможете понять данный материал, если изучили эту тему. В каждой главе есть секция с задачами на эту тему. Сложность задач примерно ($\approx$) возрастает ($\uparrow$). Задачи, разделенные горизонтальной коричнево-зеленой чертой, относятся к разным темам. Все хорошие, всех люблю, приходите! ♡

# Содержание

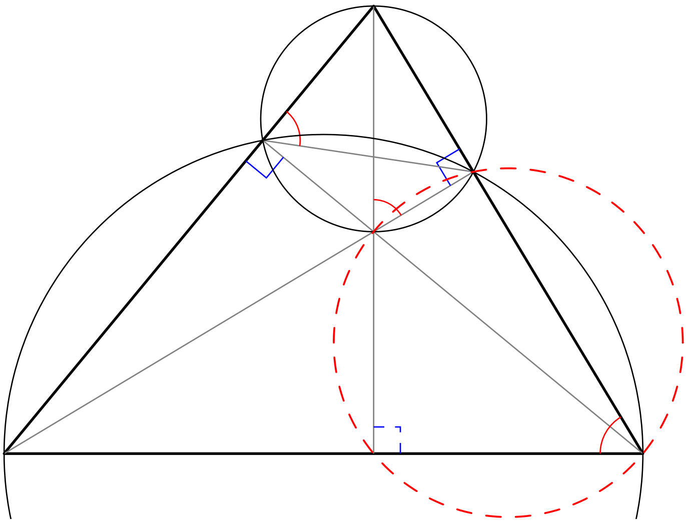
# 1 Счет углов

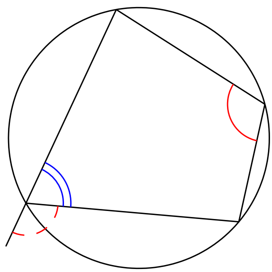
скажи им, что нужно быть
счастливыми и что главное стать
хорошим человеком

дед всегда прав

Это самое базовое, что можно сделать, чтобы доказать перпендикулярность: просто посчитать углы, и из этого сделать вывод (какой-то угол будет равен $90^\circ$).

**Теорема 1.1.** *Высоты треугольника* конкурентны[1].





**Лемма 1.2.** *Четырехугольник $ABCD$ является вписанным, если $\angle ABC$ равен смежному углу $\angle ADC$.*

[1] Пересекаются в одной точке.

## Задачи

Было тяжело подобрать задачи, в которых требуется исключительно доказательство перпендикулярности; поэтому тут задачи, которые в целом хорошо делаются счетом углов, а не только на ортогональность.

1. `(Лемма Фусса)` Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена прямая вторично пересекающая окружность $\omega_1$ в точке $A_1$ и окружность $\omega_2$ в точке $A_2$. Точки $B_1$ и $B_2$ для прямой через точку $B$ определяются аналогично. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. □

2. В равнобедренном треугольник $ABC$ $(AB = AC)$ на меньшей дуге $AB$ окружности $(ABC)$ взята точка $D$. На продолжении отрезка $AD$ за точку $D$ выбрана точка $E$ так, что точки $A$ и $E$ лежат по одну сторону относительно прямой $BC$. Окружность $(BDE)$ пересекает прямую $AB$ в точке $F$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

3. В трапеции $ABCD$ проведена окружность, проходящая через точки $A$ и $D$. Окружность пересекает боковые стороны $AB$ и $CD$ (или их продолжения) в точках $N$ и $M$ соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых $BM$ и $CN$ равноудалена от точек $A$ и $D$, то она лежит на окружности. □

4. В остроугольном треугольнике $ABC$ на высоте, проведённой из вершины $A$, выбрана точка $P$. Пусть $B_1$ и $C_1$ – проекции точки $P$ на прямые $AC$ и $AB$ соответственно.

   (a) Докажите, что точки $B$, $C$, $B_1$, $C_1$ концикличны. □

   (b) Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек $B_1$ и $C_1$, на прямые $AB$ и $AC$ соответственно, параллелен стороне $BC$.

5. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$. Пусть точки $K$ и $L$ – проекции точки $D$ на стороны $AB$ и $AC$ соответственно. Известно, что $\angle BAC = 72^\circ, \angle ABL = 30^\circ$. Чему равен угол $\angle DKC$?

6. `(Окружность Тейлора)` Докажите, что шесть точек в виде шести проекций трёх оснований высот треугольника, пересекающих каждую сторону, на две оставшиеся стороны лежат на одной окружности.

7. (a) `(Точка Микеля треугольника)` На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ или их продолжениях, выбраны точки $C_1$, $B_1$ и $A_1$ соответственно. Докажите, что окружности $(AB_1C_1)$, $(A_1BC_1)$ и $(A_1B_1C)$ пересекаются в одной точке. □

(b) `(Точка Микеля четырехсторонника)` На плоскости даны четыре прямые общего положения. Эти прямые образуют $4$ треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке. □

8. В треугольнике $ABC$ точки $B_1$ и $C_1$ – основания высот, проведенных из вершин $B$ и $C$ соответственно. Точка $D$ – проекция точки $B_1$ на сторону $AB$, точка $E$ – пересечения перпендикуляра, опущенного из точки $D$ на сторону $BC$, с отрезком $BB_1$. Докажите, что $EC_1 \perp BB_1$.

9. На гипотенузе $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке $O$. Докажите, что $BO$ – биссектриса угла $ABC$. □

10. В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60°$. Биссектрисы треугольника $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Докажите, что $IB_1 = IC_1$. □

11. Прямая $\ell$ касается описанной окружности треугольника $ABC$ в точке $B$. Точки $A_1$ и $C_1$ – проекции точки $P \in \ell$ на прямые $AB$ и $BC$ соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$. □

12. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Прямая $\ell$ касается окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ в точках $P$ и $Q$ соответственно (точка $B$[1] лежит внутри треугольника $APQ$). Прямая $BP$ вторично пересекает $\omega_2$ в точке $T$. Докажите, что $AQ$ – биссектриса угла $\angle PAT$. □

13. Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что проекции точки $A_1$ на прямые $AB$, $AC$, $BB_1$, $CC_1$ коллинеарны. □

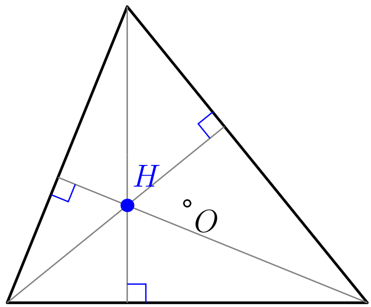
14. В треугольнике $ABC$ точки $D$ и $E$ – основания биссектрис из углов $A$ и $C$ соответственно, а точка $I$ – центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Точки $P$ и $Q$ – пересечения прямой $DE$ с $(AIE)$ и $(CID)$ соответственно, причем $P \neq E, Q \neq D$. Докажите, что $\angle EIP = \angle DIQ$.

[1]Точка $B$ называется точкой Шалтая треугольника $APQ$.

# 2 Свойства ортоцентра

**Опеределение 2.1.** Ортоцентр **H** – это точка пересечения высот треугольника.

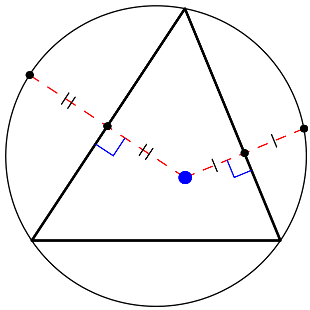
Я буду ортоцентр всегда обозначать **большой синей точкой** *(просто я так решил)*, а центр описанной окружности как выколотую *(так уже более принято)*.



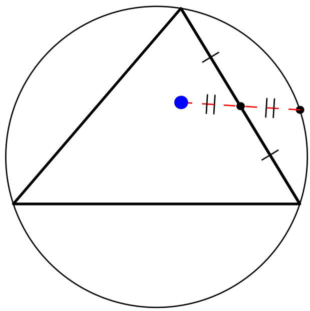

## 2.1 Симметрии ортоцентра

Ортоцентр – это такая особенная точка: конструкции, в которых используются его **симметрии** относительно чего-либо, **замечательно** связанны с описанной окружностью, и наоборот!

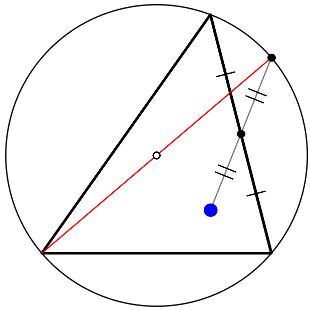
**Теорема 2.1.** *Если отразить ортоцентр относительно стороны, то он попадет на описанную окружность.*



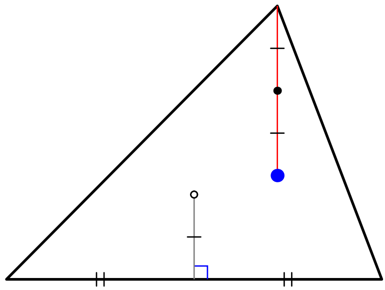
**Теорема 2.2.** *Если ортоцентр отразить относительно середины стороны, то он попадет на описанную окружность.*



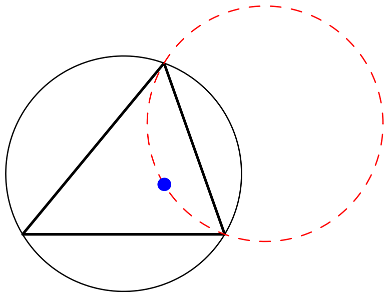
**Следствие 2.2.1.** *Точка из теоремы 2.2 диаметрально противоположна противолежащей стороне вершине.*



**Следствие 2.2.2.** *Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.*

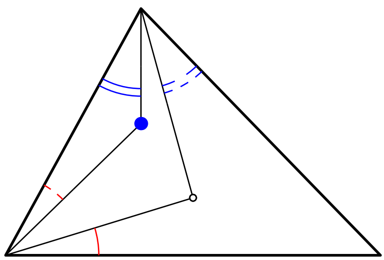


**Лемма 2.3** (Окружность Джонсона)**.** $(ABC) = (ABH)$*, т.е. окружности, описанные вокруг* $\triangle ABC$ *и* $\triangle ABH$ *равны.*



**Опеределение 2.2** (Изогональное сопряжение[1])**.** Точки $P$, $Q$ называются изогонально сопряженными, если $\angle PAB = \angle QAC$, $\angle PBC = \angle QBA$, $\angle PCB = \angle QCA$.

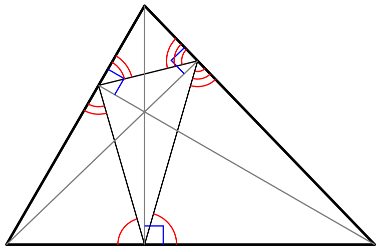
**Теорема 2.4.** *Ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.*



[1]Можно думать об изогональном сопряжении, как о симметрии относительно биссектрисы.

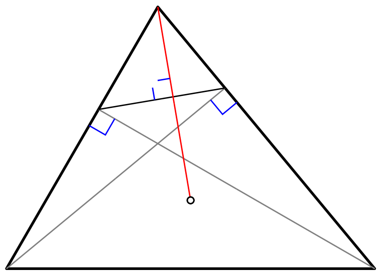
## 2.2 Остальные свойства ортоцентра

**Опеределение 2.3.** Инцетр – это центр, вписанной в многоугольник окружности.

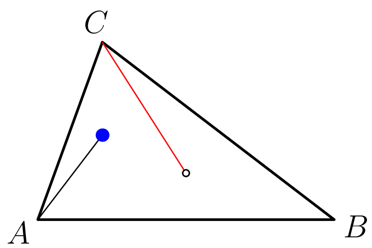


**Опеределение 2.4.** Ортотреугольник – это треугольник, вершины которого являются основаниями высот исходного треугольник.

**Лемма 2.5.** *Ортоцентр является инцентром для ортотреугольника.*

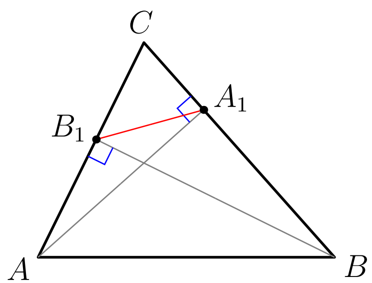


**Следствие 2.5.1.** *Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.*




$$AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OC^2$$

**Лемма 2.6.** *Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.*




**Лемма 2.7.** *Если $AA_1$ и $BB_1$ – высоты треугольника $ABC$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$,* $k = \cos\angle C$.

## 2.3 Окружность Эйлера

Давайте соединим пару свойств, которые мы уже знаем (а именно по теоремам 2.1 и 2.2) и сделаем парочку незамысловатых размышлений. Получим *окружность Эйлера* или *окружность девяти точек*.

**Опеределение 2.5** (Окружность Эйлера)**.** Окружностью Эйлера называют окружность, проходящую через основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром треугольника.

**Опеределение 2.6** (Прямая Эйлера)**.** Точки $O, O_9, H, M$ лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера.

**Теорема 2.8.** *Отрезки на прямой Эйлера хорошо относятся.*

$$\overrightarrow{O_9M} : \overrightarrow{MO} : \overrightarrow{OH} = 1 : 2 : (-3)$$

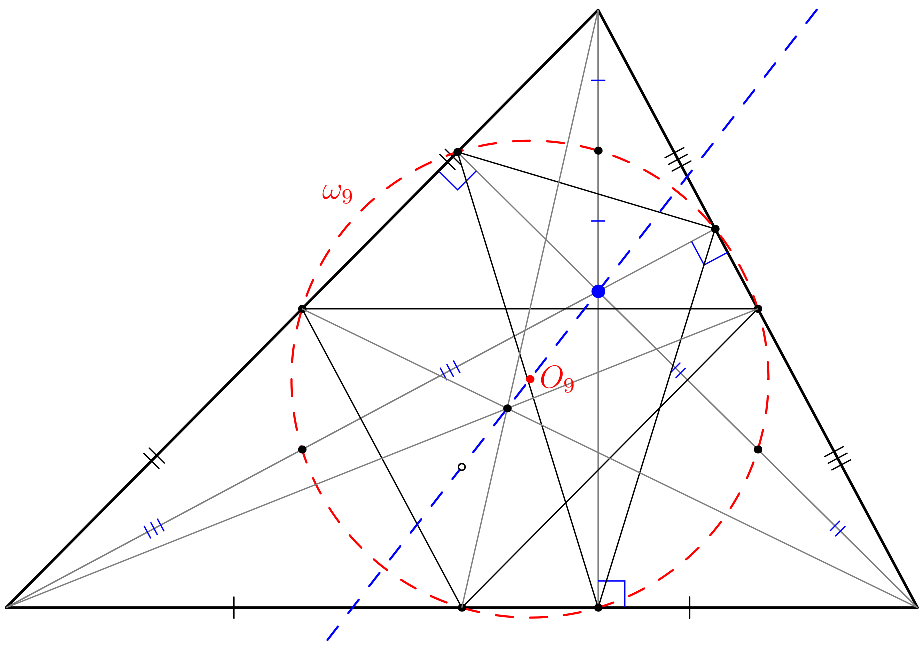



Рис. 1: Окружность Эйлера и прямая Эйлера.

## Задачи

15. В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$, а также отмечена точка $M$ – середина стороны $BC$. Точка $H$ – его ортоцентр, а точка $P$ – пересечения луча `(!)` $MH$ с окружностью $(ABC)$. Докажите, что точки $P, A, B_1, C_1$ концикличны. □

16. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка $P$ – точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$. Точка $O$ – центр окружности $(ABP)$. Докажите, что $OP \perp CD$. □

17. `(Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4)` Пусть точки $B$ и $C$ лежат на полуокружности с диаметром $AD$. Точка $M$ – середина отрезка $BC$. Точка $N$ такова, что точка $M$ – середина отрезка $AN$, докажите что $BC \perp ND$. □

18. В треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$ и отмечен центр описанной окружности – $O$. Пусть точки $E$ и $F$ – проекции точек $B$ и $C$ на прямую $AO$. $N$ – точка пересечения прямых $AC$ и $DE$, а $M$ – точка пересечения прямых $AB$ и $DF$. Докажите, что точки $A, D, N, M$ концикличны.

19. `(Baltic Way, 2019, problem 12)` Let $ABC$ be a triangle and $H$ its orthocenter. Let $D$ be a point lying on the segment $AC$ and let $E$ be the point on the line $BC$ such that $BC \perp DE$. Prove that $EH \perp BD$ if and only if $BD$ bisects $AE$. □

---

20. Докажите теорему об окружности девяти точек с помощью леммы о трезубце и внешней леммы о трезубце.

21. (a) Докажите, что треугольники $ABC$, $HBC$, $AHC$ и $ABH$ имеют общую окружность девяти точек. □

    (b) Докажите, что прямые Эйлера треугольников $ABC$, $HBC$, $AHC$ и $ABH$ пересекаются в одной точке.

    (c) Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $ABC$, $HBC$, $AHC$ и $ABH$ образуют четырехугольник, симметричный четырехугольнику $HABC$. □

22. Высоты $BD$ и $CE$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Продолжения сторон $AB$ и $AC$ пересекают окружность $BHC$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что отрезок $PQ$ в два раза больше отрезка $DE$. □

23. `(Заключительный этап ВСОШ, 2015, 9.7)` Остроугольный треугольник $ABC$ ($AB < AC$) вписан в окружность $\omega$. Пусть $M$ – его центроид[1], а $D$ – основании высоты, опущенной из вершины $A$. Луч $MD$ пересекает $\omega$ в точке $E$. Докажите, что окружность $(BDE)$ касается $AB$. □

24. `(Высшая проба, 2013, 9.5)` Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$. На стороне $AB$ выбрана точка $P$ так, что окружность $(PA_1B_1)$ касается стороны $AB$. Найдите $PC_1$, если $PA = 30$ и $PB = 10$.

25. Треугольник высекает на своей окружности Эйлера три туги. Докажите, что одна из этих дуг равна сумме двух других. □

# 3 Ортодиагональные четырёхугольники

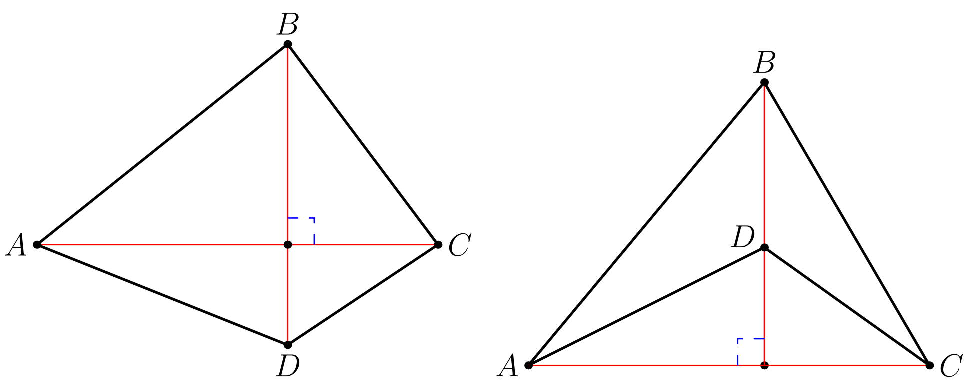



Рис. 2: Ортодиагональные четырёхугольники (выпуклый и невыпуклый).

**Теорема 3.1.** *Диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника $ABCD$ (выпуклого или не выпуклого) перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

## Задачи

26. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. `;)` □

[1]Точка пересечения медиан.

27. **(Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4)** Пусть точки $B$ и $C$ лежат на полуокружности с диаметром $AD$. Точка $M$ – середина отрезка $BC$. Точка $N$ такова, что точка $M$ – середина отрезка $AN$, докажите что $BC \perp ND$.

28. **(Baltic Way, 2019, problem 13)** Let $ABCDEF$ be a convex hexagon in which $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ and $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. Prove that $AD \perp CE$. □

29. (a) **(Теорема Штейнера)** Пусть $ABC$ и $A_1B_1C_1$ — невырожденные треугольники. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек $A_1$, $B_1$, $C_1$ на прямые $BC$, $AC$, $AB$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$C_1A^2 + A_1B^2 + B_1C^2 = C_1B^2 + B_1A^2 + A_1C^2.$$

   (b) Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек $A_1$, $B_1$, $C_1$ на прямые $BC$, $AC$, $AB$ пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек $A$, $B$, $C$ на прямые $B_1C_1$, $A_1C_1$, $A_1B_1$ тоже.[1] □

30. **(Теорема об изогональном сопряжении)** Чевианы $AA_1, BB_1, CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке. Докажите, что чевианы, симметричные им относительно биссектрис соответствующих углов, тоже пересекаются в одной точке. [2] □

31. Пусть точки $P$ и $Q$ – изогонально сопряженные точки треугольника $ABC$. $B_1$, $C_1$ и $B_2$, $C_2$ – перпендикуляры из $P$ и $Q$ на прямые $AC$ и $AB$ соответственно.

   (a) Докажите, что треугольники $P_1B_1C_1$ и $P_2B_2C_2$ подобны.

   (b) Докажите, что вершины педальных треугольников изогонально сопряженных точек лежат на одной окружности. Найдите её центр. □

32. Углы $A$ и $C$ четырехугольника $ABCD$ равны. Докажите, что середина отрезка $AC$ и проекции $D$ на прямые $AB$, $BC$ и $AC$ концикличны.

---

[1] Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ из задачи называют ортологичными. Пишут $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$. При этом точки пересечения соответствующих перпендикуляров называют центрами ортологии.

[2] Рассмотрите педальный треугольник этой точки.

# 4 Радикальная ось и линия центров

Не всегда удается "счетом углов"доказать принадлежность четверки точек одной окружности. Часто нужно использовать "счет в отрезках". С этим нам помогает степень точки. А чтобы доказать, что три прямые пересекаются в одной точке, можно сказать что это радикальный центр какой-то тройки окружностей.

## 4.1 Степень точки

**Опеределение 4.1** (Степень точки)**.** Степень точки $P$, находящейся на расстоянии $d$ от центра окружности $\omega$ радиусом $r$, относительно этой же окружности:

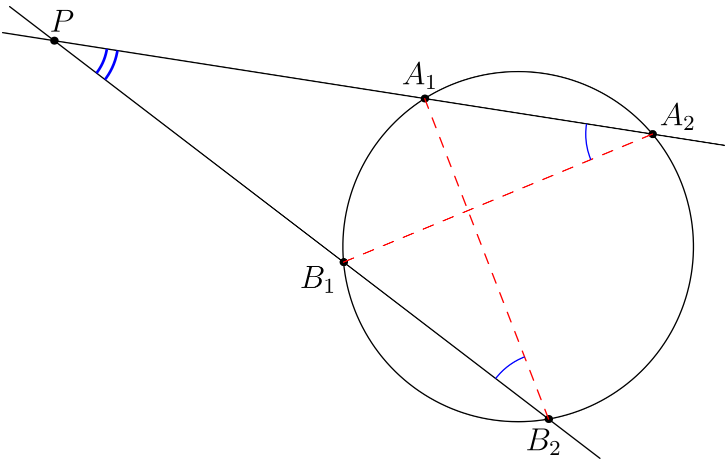
$$\mathrm{pow}(P, \omega) = d^2 - r^2.$$

**Теорема 4.1.** *Если прямая $\ell \ni P$ касается окружность в точке $K$, то*

$$\mathrm{pow}(P, \omega) = PK^2.$$

**Теорема 4.2.** *Если прямая $\ell \ni P$ пересекает окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$, тогда*

$$\mathrm{pow}(P, \omega) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$




**Следствие 4.2.1** (Теорема о касательной и секущей)**.** *Если из точки $P$, проведена касательная $PK$ к окружности $\omega$ и прямая $(\ell \ni P)$ пересекает окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$, тогда*

$$PK^2 = PA \cdot PB.$$

**Теорема 4.3** (Главная теорема о степени точки)**.** *Если через точку $P$ проходят две прямые, которые пересекают окружность $\omega$ в точках $A_1, A_2$ и $B_1, B_2$ соответственно, то*

$$\operatorname{pow}(P, \omega) = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PB_2}.$$

## 4.2 Радикальная ось

**Теорема 4.4.** *Геометрическое место точек* (ГМТ)*, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.*

**Опеределение 4.2** (Радикальная ось)**.** Прямая, состоящая из точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.

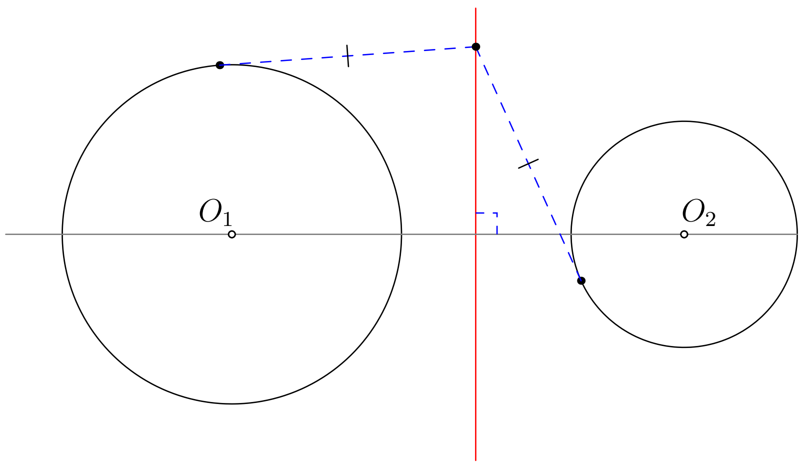



Рис. 3: Радикальная ось двух окружностей.

**Теорема 4.5** (Радикальный центр)**.** *Радикальные оси трех окружностей либо конкурентны, либо параллельны.*

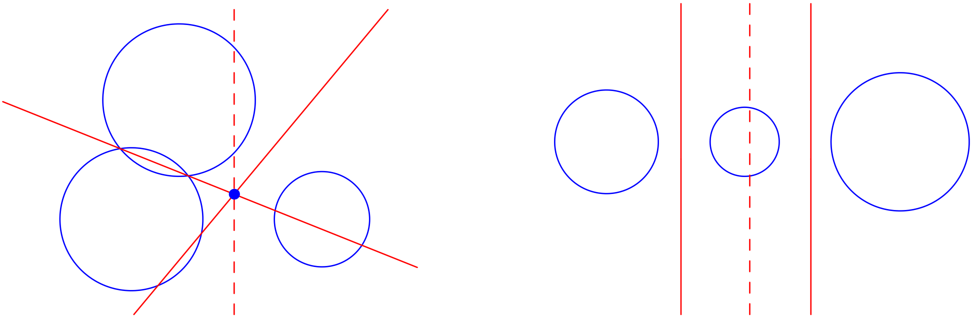
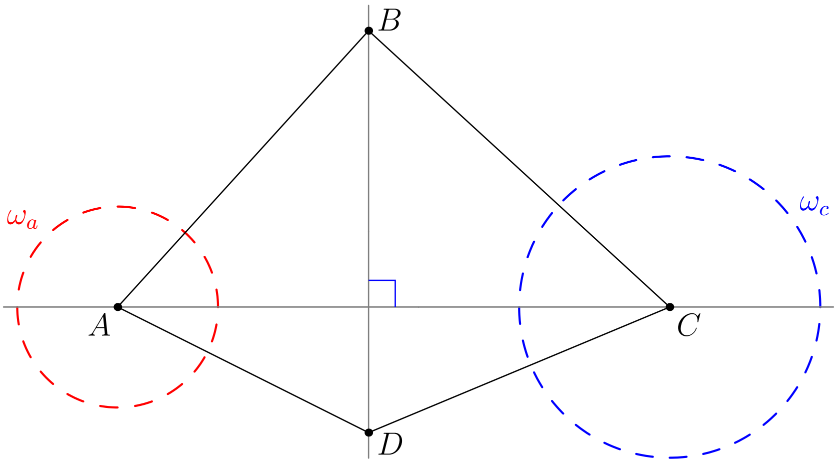


Рис. 4: Радикальный центр трех окружностей.

**Теорема 4.6.** *$AC \perp BD$[1], если*

$$\operatorname{pow}(B, \omega_a) - \operatorname{pow}(B, \omega_c) = \operatorname{pow}(D, \omega_a) - \operatorname{pow}(D, \omega_c)$$




[1]Типа крутая теореме 3.1

## Задачи

> Судя по карте, дорога здесь одна.
> Трясет на ухабах — мы переносим с одобреньем.
>
> Александр Башлачёв

Простите меня заранее за такие трудные задачи. Если вы отвалитесь довольно рано – не горюйте. Я вам всегда помогу! Удачи ♡

33. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. `0_0` ☐

34. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник – равносторонний. ☐

35. Окружности $\psi$ и $\omega$ вписаны в вертикальный угол $\angle nm$, $\psi$ касается прямой $n$ в точке $N$, а $\omega$ касается прямой $m$ в точке $M$. Докажите, что $\psi$ и $\omega$ высекают на $NM$ равные отрезки. ☐

36. `(ММО, 2013, 11.3)` Четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки $K$, $L$ и $M$ – середины отрезков $AB$, $CD$ и $AC$ соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки $A$ к прямой $BC$, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки $C$ к прямой $AD$, в точке $T$. Докажите, что прямые $KL \perp TM$. ☐

37. Точка $D$ – основание биссектрисы из точки $A$ треугольника $ABC$. Окружность $(ABD)$ повторно пересекает прямую $AC$ в точке $E$, а окружность $(ACD)$ повторно пересекает прямую $BC$ в точке $F$. Докажите, что $BF = CE$. ☐

38. Окружность $\omega$ проходит через вершины $A$ и $D$ равнобокой трапеции $ABCD$ так, что пересекает диагональ $BD$ и боковую сторону $CD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Точки $P'$ и $Q'$ симметричны точкам $P$ и $Q$ относительно середин отрезков $BD$ и $CD$ соответственно. Докажите, что $B$, $C$, $P'$ и $Q'$ концикличны. ☐

39. `(JBMO Shortlist, 2022, G6)` Пусть $\Omega$ – описанная окружность треугольника $ABC$. Взяты точки $P$ и $Q$, так что $P$ равноудалена от $A$ и $B$, а $Q$ равноудалена от $A$ и $C$ и углы $PBC$ и $QCB$ равны. Докажите, что касательная к $\Omega$ в точке $A$, прямая $PQ$ и $BC$ пересекаются в одной точке.

40. Вневписанные окружности $\omega_b$ и $\omega_c$ треугольника $ABC$ касаются сторон $AC$ и $AB$ соответственно в точках $E$ и $F$. Прямая $EF$ повторно пересекает окружности $\omega_b$ и $\omega_c$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Касательные в точках $X$ и $Y$ проведенные к окружностям $\omega_b$ и $\omega_c$ пересекают прямые $AC$ и $AB$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что середина отрезка $KL$ равноудалена от точек $E$ и $F$.

41. (a) Пусть $C_1$ и $B_1$ – точки на сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ соответственно. Докажите что, радикальная ось окружностей, построенных на $BB_1$ и $CC_1$ как на диаметре, проходит через ортоцентр треугольника $ABC$.

    (b) `(Ось Обера)` Докажите, что четыре ортоцентра четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку[1], коллинеарны.

    (c) `(Теорема Гаусса–Боденмиллера)` Докажите, что прямая Гаусса[2] перпендикулярна оси Обера.

42. Чевианы $AD$, $BE$ и $CF$ треугольника $ABC$ конкурентны. Прямая $EF$ пересекает окружность $(ABC)$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $P$, $Q$, $D$ и середина отрезка $BC$ концикличны.

43. `(Устная олимпиада по геометрии, 2014, 10–11.4)` Медианы $AM_a$, $BM_b$ и $CM_c$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $G$, а высоты $AH_a$, $BH_b$ и $CH_c$ – в точке $H$. Касательная к окружности девяти точек треугольника $ABC$ а в точке $H_c$ пересекает прямую $M_aM_b$ в точке $C'$. Точки $A'$ и $B'$ определяются аналогично. Докажите, что $A'$, $B'$ и $C'$ лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой $GH$.

44. В треугольнике $ABC$ высоты $AD$, $BE$, $CF$ пересекаются в точке $H$. Прямые $DE$, $EF$ и $DF$ пересекаются прямые $AB$, $BC$ и $AC$. В точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на прямой[3] перпендикулярной прямой Эйлера треугольник $ABC$.

[1] Такие прямые образуют фигуру, называемую полным четырёхсторонником.

[2] Прямой Гаусса полного четырёхсторонника называется прямая, проходящая через середины трех его диагоналей.

[3] Такая прямая называется трилинейной полярой ортоцентра, или ортоцентрической осью, или центральной линией центра описанной окружности.

# 5 Известные конструкции

Этот раздел посвящен тому, чтобы при доказательстве перпендикулярности использовать какие-то известные вам конструкции (прямая Симсона, задача №255, или что вы там знаете..). Таких очень много, и это то, что по-сути и остается только изучать. Да и все, что мы до этого с вами проходили, можно тоже называть известными конструкциями.

## 5.1 Прямая Симсона

**Теорема 5.1** (Прямая Симсона)**.** *Проекции точки $P$ на прямые, содержащие стороны треугольника $ABC$, коллинеарны, тогда и только тогда, когда точка $P$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.*

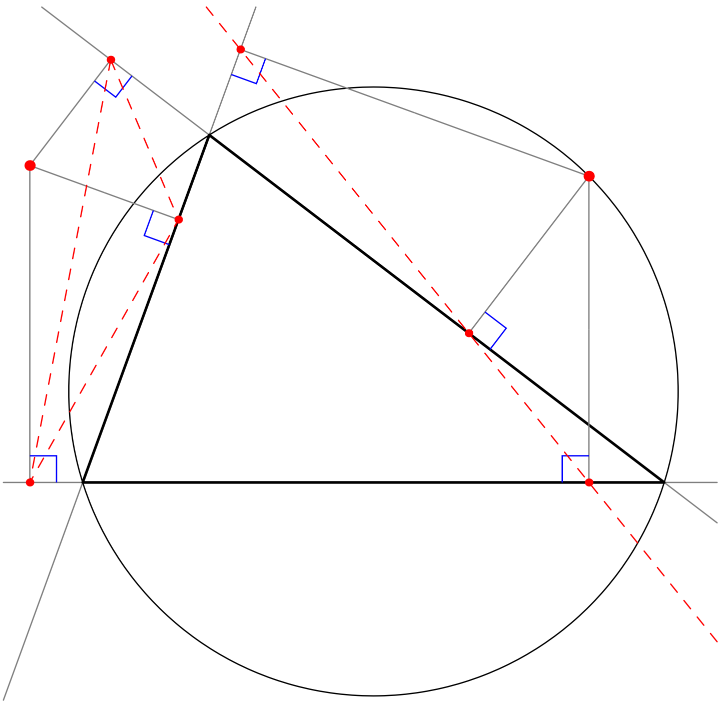


Рис. 5: Педальные треугольники двух точек. Прямая Симсона.

## 5.2 Задача №255

> Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого с ней надо некоторое время «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть новая, совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу №255...
>
> И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Задачник 9–11

**Теорема 5.2** (Лемма 255, Iran Lemma). *Пусть $M$ и $N$ – точки касания вписанной окружности со сторонами $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$, $P$ – точка пересечения биссектрисы угла $A$ с прямой $MN$. Докажите, что $\angle APC = 90^\circ$. Докажите, что точка $P$ лежит на средней линии треугольника $ABC$, параллельной стороне $AB$.*

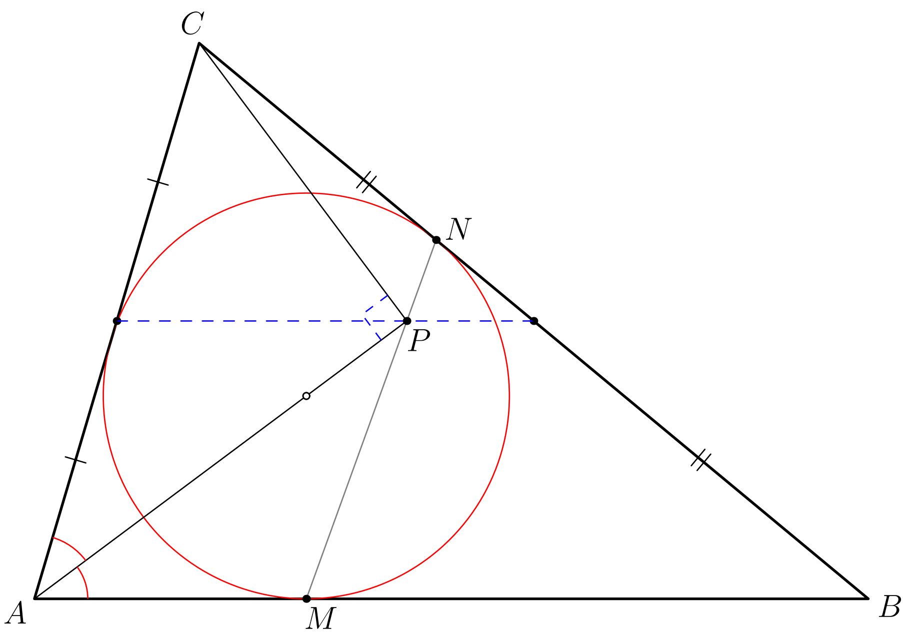



Рис. 6: Лемма 255.

## Задачи

45. Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку $B$ провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону $AD$ в точке $K$, а вторая — продолжение стороны $CD$ в точке $L$. $F$ – точка пересечения $KL$ и $AC$. Докажите, что $BF \perp KL$. □

46. Пусть $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что проекции точки $A_1$ на прямые $AB$, $AC$, $BB_1$, $CC_1$ коллинеарны. □

47. `(Обобщённая прямая Симсона)` $P$ – произвольная точка описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ на прямых $AC$, $BC$, $AB$ коллинеарны, когда выполняется равенство:
$$\angle(AB, PC_1) = \angle(BC, PA_1) = \angle(AC, PB_1).$$

48. Точки $P$ и $Q$ лежат на описанной окружности треугольника $ABC$. На прямой $AB$ выбрана точка $C_1$ так, что $\angle(AB, PC_1) = \angle(QC_1, AB)$. Аналогично выбраны точки $B_1$ и $C_1$ на прямых $AC$ и $BC$ соответственно. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ коллинеарны.

49. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $AB$, $BC$, $CA$ в точках $C_1$, $B_1$, $A_1$ соответственно. Пусть прямая $C_1I$ пересекает прямую $A_1B_1$ в точке $P$. Тогда прямая $CP$ содержит медиану треугольника $ABC$. □

50. (a) Хорда $PQ$ описанной окружности треугольника $ABC$ и сторона $BC$ перпендикулярны. Докажите, что прямая Симсона точки $P$ относительно треугольника $ABC$ параллельна прямой $AQ$. □

    (b) `(Закл. этап ВСОШ, 2009–2010 гг., 10.6)` Пусть $H$ – ортоцентр треугольника $ABC$. Точки $X$ и $Y$ – проекции точки $P$, лежащей на описанной окружности треугольника $ABC$ на стороны $AB$ и $BC$. Докажите, что середина отрезка $HP$ и точки $X$ и $Y$ коллинеарны.[1]

51. `(Прямая Штейнера)` Пусть $P$ – произвольная точка на описанной окружности треугольника $ABC$. Точки $P_a$, $P_b$, $P_c$ – симметричны $P$ относительно прямых $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Докажите что, точки $P_a$, $P_b$, $P_c$, $H$ коллинеарны. □

52. Пусть $\ell$ – прямая Штейнера точки $R$ на описанной окружности $ABC$. Докажите, что если прямую $\ell$ отразить относительно стороны треугольника $ABC$, то полученная прямая пройдет через точку $R$.

[1]Подсказка в том, что эта задача – пункт (b). Ну и симметрии ортоцентра.

53. `(Л. А. Попов, Ф. Л. Бахарев)` Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — основания высот остроугольного треугольника $ABC$ из точек $A$, $B$, $C$ соответственно. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ отразили относительно средних линий треугольника, параллельных $AB$, $BC$, $CA$ соответственно, — получились точки $A_2$, $B_2$, $C_2$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ пересекаются в одной точке.

54. `(Теорема Дроз-Фарни)` Обозначим точкой $H$ – ортоцентр треугольника $ABC$. Прямые $\ell$ и $t$ проходят через $H$ и $\ell \perp t$. Пусть $L_a$, $L_b$, $L_c$ пересечение $\ell$ с прямыми $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно, точки $T_a$, $T_b$ и $T_c$ определяются аналогично. Докажите, что середины отрезков $T_aL_a$, $T_bL_b$, $T_cL_c$ коллинеарны.

55. `(Олимпиада им. И.Ф. Шарыгина, 2021, 8-9.6, устный тур)` В треугольнике $ABC$, точка $M$ – середина стороны $BC$, точка $H$ – ортоцентр. Биссектриса угла $A$ пересекает отрезок $HM$ в точке $T$. Окружность построенная на отрезке $AT$, как на диаметре, пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что точки $X$, $Y$ и $H$ коллинеарны.

---

Эта серия задач довольно простая, потому что у нас последнее (!) занятие. Ну и вы, кажется, должны были устать от ”Симсона” и ”степени точки”. Поэтому отдыхайте и наслаждайтесь задачами! ♡

56. `(ММО, 1994)` В треугольнике $ABC$ точки $M$ и $N$ – проекции вершины $B$ биссектрисы углов $A$ и $C$, а $P$ и $Q$ – проекции на внешние биссектрисы этих же углов.
    (a) Докажите, что точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ коллинеарны. □
    (b) Докажите, что длина отрезка $PQ$ равна полупериметру треугольника $ABC$.

57. В трапецию $ABCD$ вписанная окружность с центром $I$. Окружность вписанная в треугольник $ACD$ касается сторон $AD$ и $AC$ в точках $E$ и $F$. Докажите, что точки $E$, $F$ и $I$ коллинеарны. □

58. `(Ф. Л. Бахарев, Санкт-Петербургская олимпиада, 1999)` В неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ и отмечены точки $K$ и $L$ – середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно. $AP$ и $CQ$ – перпендикуляры, опущенные на $CC_1$ и $AA_1$ соответственно. Докажите, что прямые $PK$ и $QL$ пересекаются на стороне $AC$.

59. В равнобедренном треугольнике $ABC$ $(AB = BC)$ средняя линия, параллельная стороне $BC$ пересекается со вписанной окружностью в точке $D$, не лежащей на $AC$. Докажите, что касательная к окружности в точке $D$ пересекается с биссектрисой угла $C$ на стороне $AB$. □

60. (a) `(Первая внешняя Лемма 255)` Пусть $M$ и $N$ – точки касания вневписанной окружности $\omega_a$ треугольника $ABC$ со стороной $BC$ и продолжением стороны $AC$, а $P$ – точка пересечения биссектрисы угла $A$ с прямой $MN$. Докажите, что $\angle APB = 90°$. □

    (b) `(Вторая внешняя Лемма 255)` Пусть $M$ и $N$ – точки касания вневписанной окружности $\omega_a$ треугольника $ABC$ со продолжениями сторон $AB$ и $AC$, а $P$ – точка пересечения биссектрисы внешнего угла $B$ с прямой $MN$. Докажите, что $\angle BPC = 90°$. □

61. В треугольнике $ABC$ точки $A_c$, $B_c$, $C_c$ – точки касания прямых $BC$, $AC$ и $AB$ с вневписанной окружностью $\omega_c$ (с центром в $I_c$). Точки $A_b$, $B_b$, $C_b$ определяются аналогично.

$$\begin{cases} B_1 \equiv A_cC_c \cap A_bC_b \\ C_1 \equiv A_bB_b \cap A_cB_c \\ A_1 \equiv A_bB_b \cap A_cC_c \\ A_2 \equiv A_cB_c \cap A_bC_B \end{cases}.$$

    (a) Докажите, что точки $A$, $B_1$, $C_1$, $I_b$, $I_c$ коллинеарны.

    (b) Докажите, что $A_1A_2 \perp BC$.

# А Анкета

Фамилия Имя, класс: ______________________________ ☐

Команда: ______________ Знак зодиака: ______________

Хобби: ______________ Сколько дней в году: ______________

______________

Любимый цвет (можно нарисовать): ______________

Любимая музыкальная группа: ______________

Любимый фильм: ______________

Любимая футбольная команда: ______________

Нарисуйте лошадь:

☐

# B Заметки

| **Награда** | **Доля от количества** | **Количество** □ |
| --- | --- | --- |
| Конфета | $33\%$ | 14 |
| Дошик | $50\%$ | 21 |
| Шоколадка | $70\%$ | 29 |
| Значок | $90\%$ | 38 |
| Общее количество | $100\%$ | 42 |

Таблица 1: Таблица ништяков.

# 1 *True Love Waits (Live in Oslo)*

**Radiohead**

Intro: *C Em6♭ Am E♭6*

*C* I'll drown my *Em6♭* beliefs
*Am* To have your *E♭6* babies
*C* I'll dress like your *Em6♭* niece
*Am* And wash your swollen *E♭6* feet

| *C* Just *Fmaj7/C* *G6(11)* don't
| *C* leave *Fmaj7/C*
| *G6(11)* Don't *Am* leave *G6(11)*

*C* I'm not *Em6♭* living
*Am* I'm just killing *E♭6* time
*C* Your tiny *Em6♭* hands
*Am* Your crazy kitten *E♭6* smile

| *C* Just *Fmaj7/C* *G6(11)* don't
| *C* leave *Fmaj7/C*
| *G6(11)* Don't *Am* leave *G6(11)*

Bridge: *C Em6♭ Am G6(11) E♭6*

*Fmaj7/C*

*C* And true love *Em6♭* waits
*Am* In haunted *E♭6* attics
*C* And true love *Em6♭* lives
*Am* On lollipops and *E♭6* crisps

‖: *C* Just *Fmaj7/C* *G6(11)* don't
*C* leave *Fmaj7/C*
*G6(11)* Don't *Am* leave *G6(11)* :‖