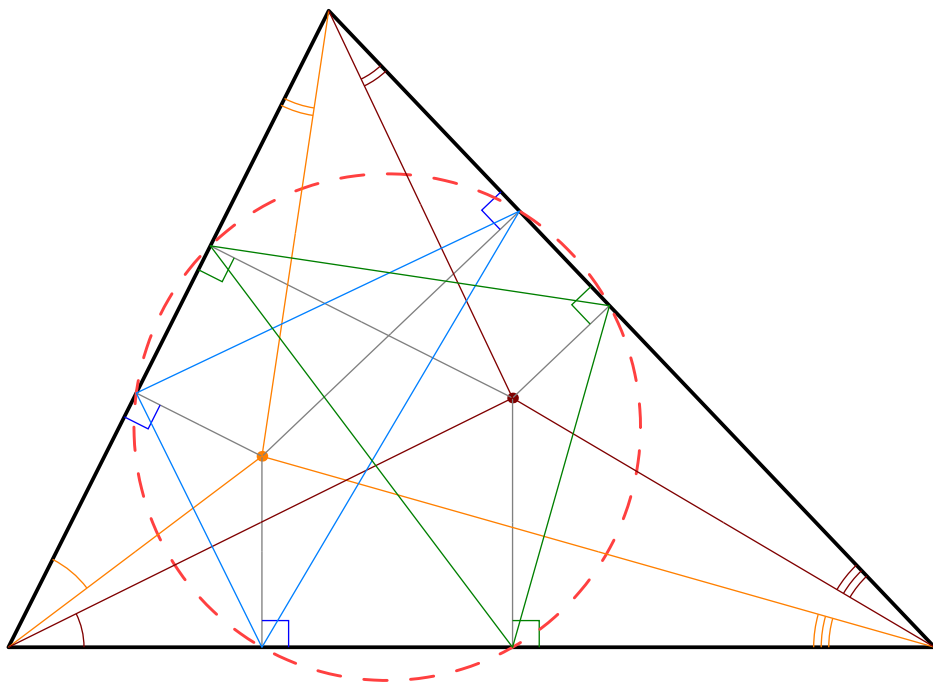


# Топ-5 теорем, которые не помогут построить дом

Направление точных наук

Лунёв Егор (@egorrrshuk)



Место под соснами  
Лето, 2024



## Аннотация

Доказательство перпендикулярности – это очень частое явление в задачах. Поэтому на этом факультативе мы будем учиться проверять перпендикулярность прямых разными способами: счет углов, поиск ортоцентра, свойства ортоцентра, прямая Симсона, задача 255, ортодиагональные четырехугольники, радикальные оси, ортологичные треугольники и другие..

Чтобы понять каждую тему, нужно лишь владеть знаниями о вписанных четырехугольниках, т.е. после окончания восьмого класса вы сможете понять данный материал, если изучили эту тему. В каждой главе есть секция с задачами на эту тему. Сложность задач примерно ( $\approx$ ) возрастает ( $\uparrow$ ). Задачи, разделенные горизонтальной коричнево-зеленой чертой, относятся к разным темам. Все хорошие, всех люблю, приходите! ♥



Содержание

<b>1</b>	<b>Счет углов</b>	<b>2</b>
	Задачи . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Свойства ортоцентра</b>	<b>5</b>
	2.1 Симметрии ортоцентра . . . . .	5
	2.2 Остальные свойства ортоцентра . . . . .	7
	2.3 Окружность Эйлера . . . . .	8
	Задачи . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Ортодиагональные четырёхугольники</b>	<b>10</b>
	Задачи . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Радикальная ось и линия центров</b>	<b>12</b>
	4.1 Степень точки . . . . .	12
	4.2 Радикальная ось . . . . .	13
	Задачи . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Известные конструкции</b>	<b>16</b>
	5.1 Прямая Уоллеса-Симсона . . . . .	17
	5.2 Задача №255 . . . . .	18
	Задачи . . . . .	19
<b>A</b>	<b>Анкета</b>	<b>i</b>
<b>B</b>	<b>Заметки</b>	<b>ii</b>

# 1 Счет углов

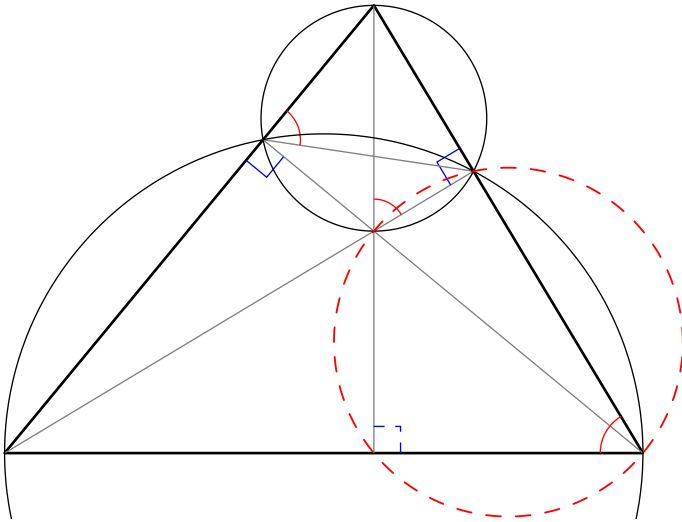
скажи им, что нужно быть  
счастливыми и что главное стать  
хорошим человеком

---

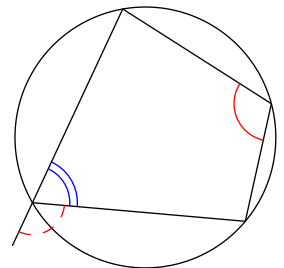
дед всегда прав

Это самое базовое, что можно сделать, чтобы доказать перпендикулярность: просто посчитать углы, и из этого сделать вывод (какой-то угол будет равен  $90^\circ$ ).

**Теорема 1.1.** *Высоты треугольника конкурентны<sup>1</sup>.*



**Лемма 1.2.** *Четырехугольник  $ABCD$  является вписанным, если  $\angle ABC$  равен смежному углу  $\angle ADC$ .*




---

<sup>1</sup>Пересекаются в одной точке.

## Задачи

Было тяжело подобрать задачи, в которых требуется исключительно доказательство перпендикулярности; поэтому тут задачи, которые в целом хорошо делаются счетом углов, а не только на ортогональность.

1. (Лемма Фусса) Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена прямая вторично пересекающая окружность  $\omega_1$  в точке  $A_1$  и окружность  $\omega_2$  в точке  $A_2$ . Точки  $B_1$  и  $B_2$  для прямой через точку  $B$  определяются аналогично. Докажите, что  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .  $\bigcirc$
2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) на меньшей дуге  $AB$  окружности  $(ABC)$  взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат по одну сторону относительно прямой  $BC$ . Окружность  $(BDE)$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что  $EF \parallel BC$ .
3. В трапеции  $ABCD$  проведена окружность, проходящая через точки  $A$  и  $D$ . Окружность пересекает боковые стороны  $AB$  и  $CD$  (или их продолжения) в точках  $N$  и  $M$  соответственно. Докажите, что если точка пересечения прямых  $BM$  и  $CN$  равноудалена от точек  $A$  и  $D$ , то она лежит на окружности.  $\bigcirc$
4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте, проведённой из вершины  $A$ , выбрана точка  $P$ . Пусть  $B_1$  и  $C_1$  – проекции точки  $P$  на прямые  $AC$  и  $AB$  соответственно.
  - (a) Докажите, что точки  $B, C, B_1, C_1$  конциклически.  $\bigcirc$
  - (b) Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точек  $B_1$  и  $C_1$ , на прямые  $AB$  и  $AC$  соответственно, параллелен стороне  $BC$ .
5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AD$ . Пусть точки  $K$  и  $L$  – проекции точки  $D$  на стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно. Известно, что  $\angle BAC = 72^\circ$ ,  $\angle ABL = 30^\circ$ . Чему равен угол  $\angle DKC$ ?
6. (Окружность Тейлора) Докажите, что шесть точек в виде шести проекций трёх оснований высот треугольника, пересекающих каждую сторону, на две оставшиеся стороны лежат на одной окружности.
7. (a) (Точка Микеля треугольника) На сторонах  $AB, BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  или их продолжениях, выбраны точки  $C_1, B_1$  и  $A_1$  соответственно. Докажите, что окружности  $(AB_1C_1)$ ,  $(A_1BC_1)$  и  $(A_1B_1C)$  пересекаются в одной точке.  $\bigcirc$

- (b) (Точка Микеля четырехсторонника) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Эти прямые образуют 4 треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.  $\bigcirc$
8. В треугольнике  $ABC$  точки  $B_1$  и  $C_1$  – основания высот, проведенных из вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Точка  $D$  – проекция точки  $B_1$  на сторону  $AB$ , точка  $E$  – пересечения перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на сторону  $BC$ , с отрезком  $BB_1$ . Докажите, что  $EC_1 \perp BB_1$ .
9. На гипотенузе  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке  $O$ . Докажите, что  $BO$  – биссектриса угла  $ABC$ .  $\bigcirc$
10. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . Биссектрисы треугольника  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $I$ . Докажите, что  $IB_1 = IC_1$ .  $\bigcirc$
11. Прямая  $\ell$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $B$ . Точки  $A_1$  и  $C_1$  – проекции точки  $P \in \ell$  на прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что  $A_1C_1 \perp AC$ .  $\bigcirc$
12. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  касается окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно (точка  $B^1$  лежит внутри треугольника  $APQ$ ). Прямая  $BP$  вторично пересекает  $\omega_2$  в точке  $T$ . Докажите, что  $AQ$  – биссектриса угла  $\angle PAT$ .  $\bigcirc$
13. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что проекции точки  $A_1$  на прямые  $AB$ ,  $AC$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  коллинеарны.  $\bigcirc$
14. В треугольнике  $ABC$  точки  $D$  и  $E$  – основания биссектрис из углов  $A$  и  $C$  соответственно, а точка  $I$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Точки  $P$  и  $Q$  – пересечения прямой  $DE$  с  $(AIE)$  и  $(CID)$  соответственно, причем  $P \neq E, Q \neq D$ . Докажите, что  $\angle EIP = \angle DIQ$ .

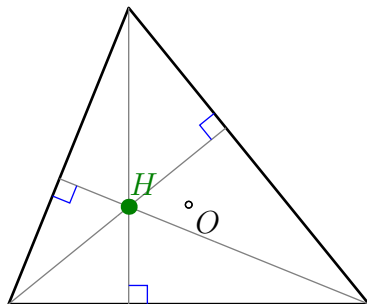
---

<sup>1</sup>Точка  $B$  называется точкой Шалтая треугольника  $APQ$ .

## 2 Свойства ортоцентра

**Определение 2.1.** Ортоцентр ( $H$ ) – это точка пересечения высот треугольника.

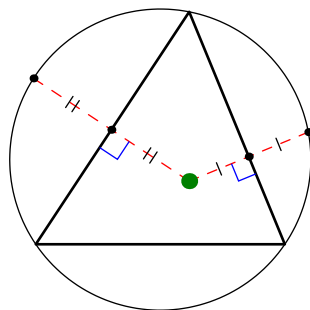
Я всегда буду ортоцентр треугольника  $ABC$  обозначать **большой зеленой точкой** (просто я так решил), а центр описанной окружности как выколотую (так уже более принято).



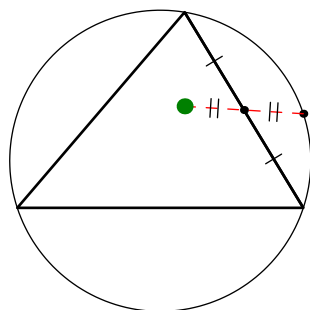
### 2.1 Симметрии ортоцентра

Ортоцентр – это такая особенная точка: конструкции, в которых используются его **симметрии** относительно чего-либо, **замечательно** связаны с описанной окружностью, и наоборот!

**Теорема 2.1.** Если отразить ортоцентр относительно стороны, то он попадет на описанную окружность.

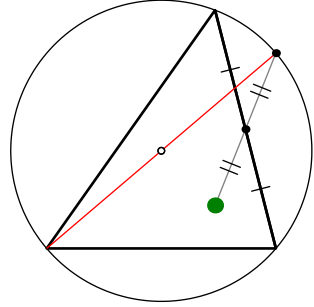


**Теорема 2.2.** Если ортоцентр отразить относительно середины стороны, то он попадет на описанную окружность.

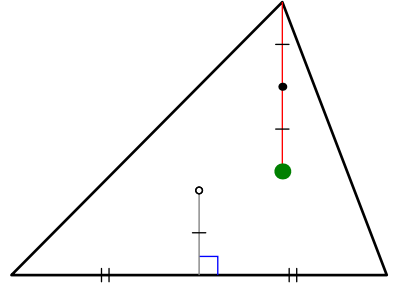




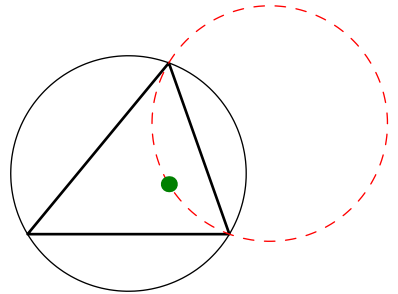
**Следствие 2.2.1.** Точка из теоремы 2.2 диаметрально противоположна противоположной стороне вершине.



**Следствие 2.2.2.** Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны.

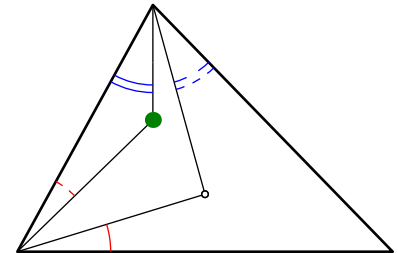


**Лемма 2.3** (Окружность Джонсона).  $(ABC') = (ABH)$ , т.е. окружности, описанные вокруг  $\triangle ABC$  и  $\triangle ABH$  равны.



**Определение 2.2** (Изогональное сопряжение<sup>1</sup>). Точки  $P$ ,  $Q$  называются изогонально сопряженными, если  $\angle PAB = \angle QAC$ ,  $\angle PBC = \angle QBA$ ,  $\angle PCB = \angle QCA$ .

**Теорема 2.4.** Ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.



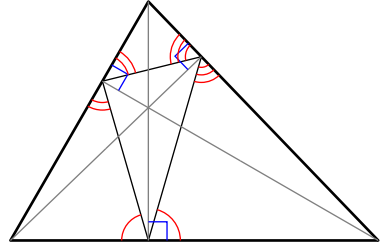
<sup>1</sup>Можно думать об изогональном сопряжении, как о симметрии относительно биссектрисы.

## 2.2 Остальные свойства ортоцентра

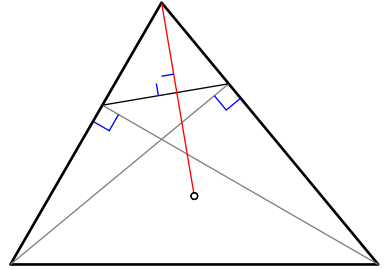
**Определение 2.3.** Инцетр – это центр, вписанной в многоугольник окружности.

**Определение 2.4.** Ортотреугольник – это треугольник, вершины которого являются основаниями высот исходного треугольника.

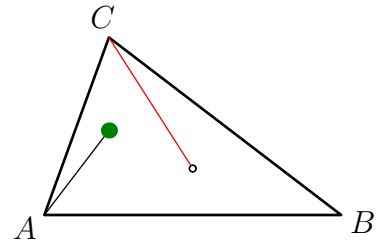
**Лемма 2.5.** Ортоцентр является инцентром для ортотреугольника.



**Следствие 2.5.1.** Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.

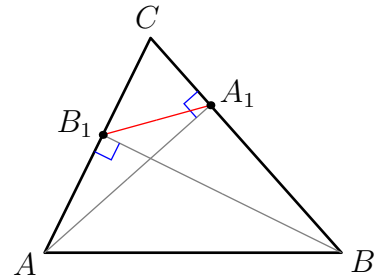


**Лемма 2.6.** Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.



$$AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OC^2$$

**Лемма 2.7.** Если  $AA_1$  и  $BB_1$  – высоты треугольника  $ABC$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ ,  $k = \cos \angle C$ .



## 2.3 Окружность Эйлера

Давайте соединим пару свойств, которые мы уже знаем (а именно по теоремам 2.1 и 2.2) и сделаем парочку незамысловатых размышлений. Получим *окружность Эйлера* или *окружность девяти точек*.

**Определение 2.5** (Окружность Эйлера). Окружностью Эйлера называют окружность, проходящую через основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром треугольника.

**Определение 2.6** (Прямая Эйлера). Точки  $O, O_9, H, M$  лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера.

**Теорема 2.8.** *Отрезки на прямой Эйлера хорошо относятся.*

$$\overrightarrow{O_9M} : \overrightarrow{MO} : \overrightarrow{OH} = 1 : 2 : (-3)$$

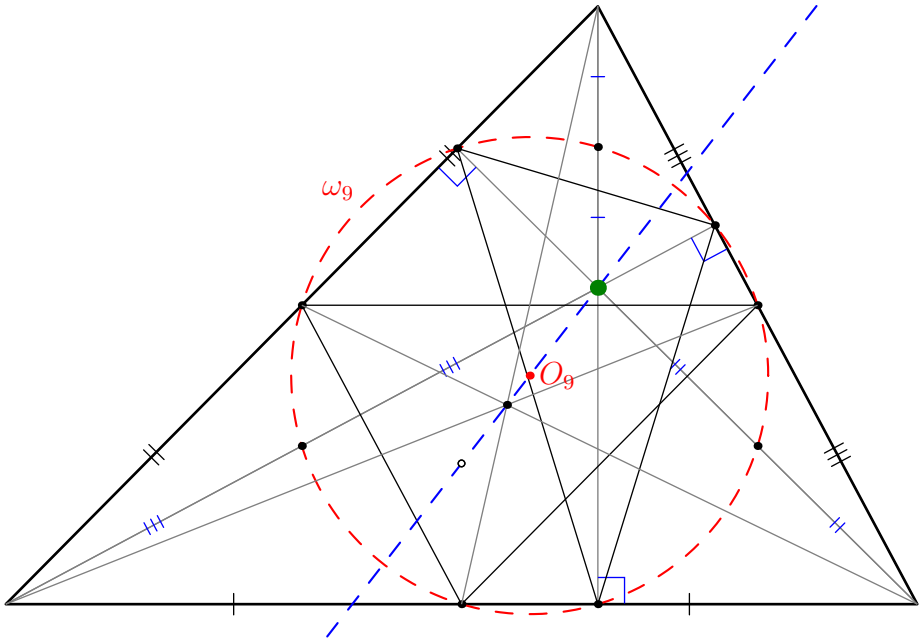


Рис. 1: Окружность Эйлера и прямая Эйлера.

## Задачи

15. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ , а также отмечена точка  $M$  – середина стороны  $BC$ . Точка  $H$  – его ортоцентр, а точка  $P$  – пересечения луча (!)  $MH$  с окружностью  $(ABC)$ . Докажите, что точки  $P, A, B_1, C_1$  конциклически.  $\bigcirc$
16. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  точка  $P$  – точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Точка  $O$  – центр окружности  $(ABP)$ . Докажите, что  $OP \perp CD$ .  $\bigcirc$
17. (Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4) Пусть точки  $B$  и  $C$  лежат на полуокружности с диаметром  $AD$ . Точка  $M$  – середина отрезка  $BC$ . Точка  $N$  такова, что точка  $M$  – середина отрезка  $AN$ , докажите что  $BC \perp ND$ .  $\bigcirc$
18. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AD$  и отмечен центр описанной окружности –  $O$ . Пусть точки  $E$  и  $F$  – проекции точек  $B$  и  $C$  на прямую  $AO$ .  $N$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $DE$ , а  $M$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $DF$ . Докажите, что точки  $A, D, N, M$  конциклически.
19. (Baltic Way, 2019, problem 12) Let  $ABC$  be a triangle and  $H$  its orthocenter. Let  $D$  be a point lying on the segment  $AC$  and let  $E$  be the point on the line  $BC$  such that  $BC \perp DE$ . Prove that  $EH \perp BD$  if and only if  $BD$  bisects  $AE$ .  $\bigcirc$
- 
20. Докажите теорему об окружности девяти точек с помощью леммы о трезубце и внешней леммы о трезубце.
21. (a) Докажите, что треугольники  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  имеют общую окружность девяти точек.  $\bigcirc$
- (b) Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  пересекаются в одной точке.
- (c) Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABC, HBC, AHC$  и  $ABH$  образуют четырехугольник, симметричный четырехугольнику  $HABC$ .  $\bigcirc$
22. Высоты  $BD$  и  $CE$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Продолжения сторон  $AB$  и  $AC$  пересекают окружность  $BHC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что отрезок  $PQ$  в два раза больше отрезка  $DE$ .  $\bigcirc$

23. (Заключительный этап ВСОШ, 2015, 9.7) Остроугольный треугольник  $ABC$  ( $AB < AC$ ) вписан в окружность  $\omega$ . Пусть  $M$  – его центроид<sup>1</sup>, а  $D$  – основании высоты, опущенной из вершины  $A$ . Луч  $MD$  пересекает  $\omega$  в точке  $E$ . Докажите, что окружность  $(BDE)$  касается  $AB$ .  $\bigcirc$
24. (Высшая проба, 2013, 9.5) Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $P$  так, что окружность  $(PA_1B_1)$  касается стороны  $AB$ . Найдите  $PC_1$ , если  $PA = 30$  и  $PB = 10$ .
25. Треугольник высекает на своей окружности Эйлера три туги. Докажите, что одна из этих дуг равна сумме двух других.  $\bigcirc$

### 3 Ортодиагональные четырёхугольники

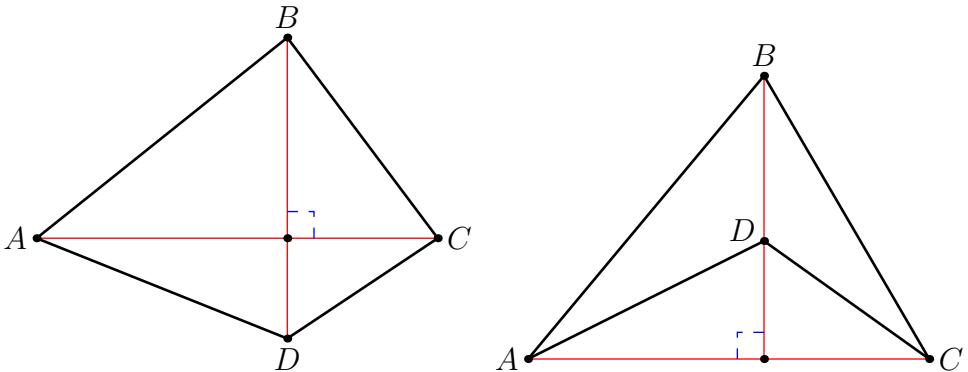


Рис. 2: Ортодиагональные четырёхугольники (выпуклый и невыпуклый).

**Теорема 3.1.** *Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$  (выпуклого или не выпуклого) перпендикулярны тогда и только тогда, когда*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

#### Задачи

26. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. ;)  $\bigcirc$

<sup>1</sup>Точка пересечения медиан.

27. (Муниципальный этап ВСОШ (Москва), 2020, 9.4) Пусть точки  $B$  и  $C$  лежат на полуокружности с диаметром  $AD$ . Точка  $M$  – середина отрезка  $BC$ . Точка  $N$  такова, что точка  $M$  – середина отрезка  $AN$ , докажите что  $BC \perp ND$ .

28. (Baltic Way, 2019, problem 13) Let  $ABCDEF$  be a convex hexagon in which  $AB = AF$ ,  $BC = CD$ ,  $DE = EF$  and  $\angle ABC = \angle EFA = 90^\circ$ . Prove that  $AD \perp CE$ .  $\bigcirc$

29. (а) (Теорема Штейнера) Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  – невырожденные треугольники. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$C_1A^2 + A_1B^2 + B_1C^2 = C_1B^2 + B_1A^2 + A_1C^2.$$

(б) Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на прямые  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $A_1B_1$  тоже.<sup>1</sup>  $\bigcirc$

30. (Теорема об изогональном сопряжении) Чевяны  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке. Докажите, что чевяны, симметричные им относительно биссектрис соответствующих углов, тоже пересекаются в одной точке.<sup>2</sup>  $\bigcirc$

31. Пусть точки  $P$  и  $Q$  – изогонально сопряженные точки треугольника  $ABC$ .  $B_p$ ,  $C_p$  и  $B_q$ ,  $C_q$  – перпендикуляры из  $P$  и  $Q$  на прямые  $AC$  и  $AB$  соответственно.

(а) Докажите, что треугольники  $PB_pC_p$  и  $QB_qC_q$  подобны.

(б) Докажите, что вершины pedalных треугольников изогонально сопряженных точек лежат на одной окружности. Найдите её центр.  $\bigcirc$

32. Углы  $A$  и  $C$  четырехугольника  $ABCD$  равны. Докажите, что середина отрезка  $AC$  и проекции  $D$  на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  конциклически.

<sup>1</sup>Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  из задачи называют ортологичными. Пишут  $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$ . При этом точки пересечения соответствующих перпендикуляров называют центрами ортологии.

<sup>2</sup>Рассмотрите pedalный треугольник этой точки.

## 4 Радикальная ось и линия центров

Не всегда удается "счетом углов" доказать принадлежность четверки точек одной окружности. Часто нужно использовать "счет в отрезках". С этим нам помогает степень точки. А чтобы доказать, что три прямые пересекаются в одной точке, можно сказать что это радикальный центр какой-то тройки окружностей.

### 4.1 Степень точки

**Определение 4.1** (Степень точки). Степень точки  $P$ , находящейся на расстоянии  $d$  от центра окружности  $\omega$  радиусом  $r$ , относительно этой же окружности:

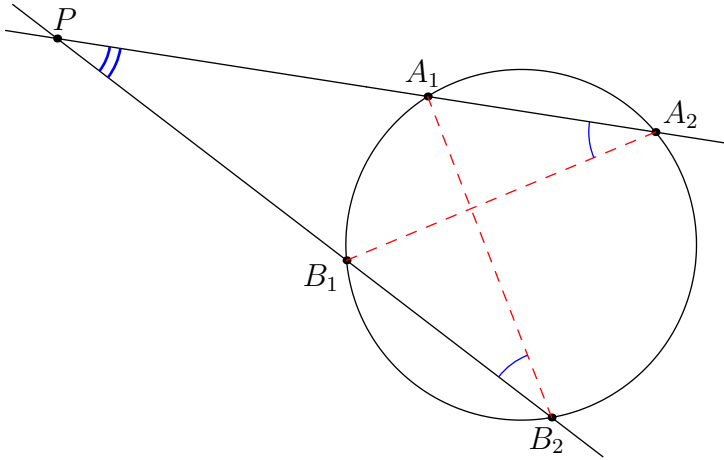
$$\text{pow}(P, \omega) = d^2 - r^2.$$

**Теорема 4.1.** Если прямая  $\ell \ni P$  касается окружность в точке  $K$ , то

$$\text{pow}(P, \omega) = PK^2.$$

**Теорема 4.2.** Если прямая  $\ell \ni P$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$ , тогда

$$\text{pow}(P, \omega) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$



**Следствие 4.2.1** (Теорема о касательной и секущей). Если из точки  $P$ , проведена касательная  $PK$  к окружности  $\omega$  и прямая ( $\ell \ni P$ ) пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$ , тогда

$$PK^2 = PA \cdot PB.$$

**Теорема 4.3** (Главная теорема о степени точки). Если через точку  $P$  проходят две прямые, которые пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$  соответственно, то

$$\text{pow}(P, \omega) = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PB_2}.$$

## 4.2 Радикальная ось

**Теорема 4.4.** Геометрическое место точек (ГМТ), степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.

**Определение 4.2** (Радикальная ось). Прямая, состоящая из точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.

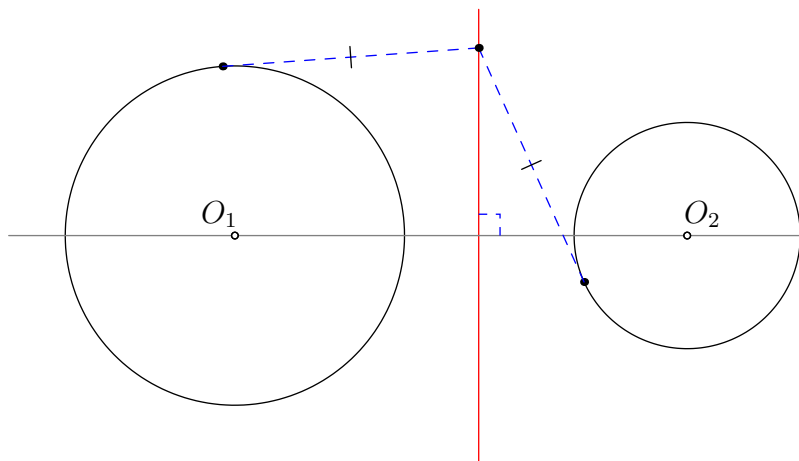


Рис. 3: Радикальная ось двух окружностей.

**Теорема 4.5** (Радикальный центр). Радикальные оси трех окружностей либо конкурентны, либо параллельны.



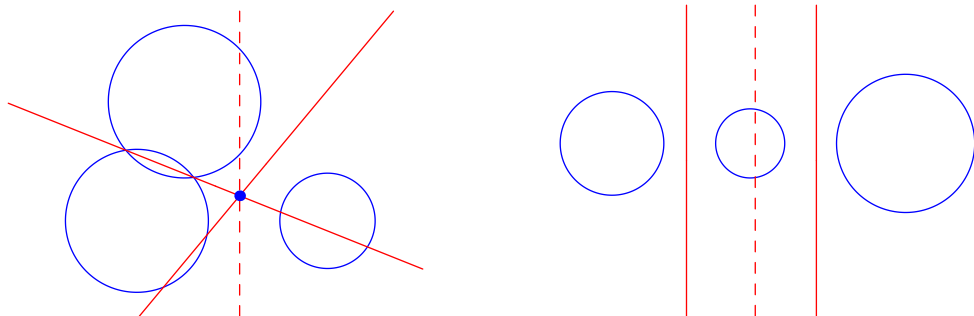
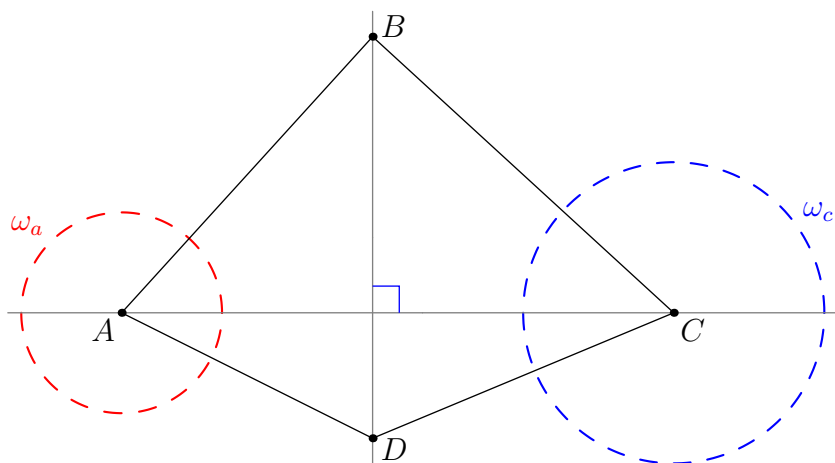


Рис. 4: Радикальный центр трех окружностей.

**Теорема 4.6.**  $AC \perp BD^1$ , если

$$\text{pow}(B, \omega_a) - \text{pow}(B, \omega_c) = \text{pow}(D, \omega_a) - \text{pow}(D, \omega_c)$$



<sup>1</sup>Типа крутая теореме 3.1

## Задачи

Судя по карте, дорога здесь одна.  
Трясет на ухабах — мы переносим с одобрением.

Александр Башлачёв

Простите меня заранее за такие трудные задачи. Если вы отвалитесь довольно рано — не горюйте. Я вам всегда помогу! Удачи ♥

33. Докажите, что высоты треугольника конкурентны. 0\_0 ○
34. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник — равносторонний. ○
35. Окружности  $\psi$  и  $\omega$  вписаны в вертикальный угол  $\angle nm$ ,  $\psi$  касается прямой  $n$  в точке  $N$ , а  $\omega$  касается прямой  $m$  в точке  $M$ . Докажите, что  $\psi$  и  $\omega$  высекают на  $NM$  равные отрезки. ○
36. (ММО, 2013, 11.3) Четырёхугольник  $ABCD$  такой, что  $AB = BC$  и  $AD = DC$ . Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  — середины отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $T$ . Докажите, что прямые  $KL \perp TM$ . ○
37. Точка  $D$  — основание биссектрисы из точки  $A$  треугольника  $ABC$ . Окружность  $(ABD)$  повторно пересекает прямую  $AC$  в точке  $E$ , а окружность  $(ACD)$  повторно пересекает прямую  $BC$  в точке  $F$ . Докажите, что  $BF = CE$ . ○
38. Окружность  $\omega$  проходит через вершины  $A$  и  $D$  равнобокой трапеции  $ABCD$  и пересекает диагональ  $BD$  и боковую сторону  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Точки  $P'$  и  $Q'$  симметричны точкам  $P$  и  $Q$  относительно середин отрезков  $BD$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $B$ ,  $C$ ,  $P'$  и  $Q'$  конциклически. ○
39. (JBMO Shortlist, 2022, G6) Пусть  $\Omega$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Взяты точки  $P$  и  $Q$ , так что  $P$  равноудалена от  $A$  и  $B$ , а  $Q$  равноудалена от  $A$  и  $C$  и углы  $PBC$  и  $QCB$  равны. Докажите, что касательная к  $\Omega$  в точке  $A$ , прямая  $PQ$  и  $BC$  пересекаются в одной точке.

40. Внеписанные окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  треугольника  $ABC$  касаются сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно в точках  $E$  и  $F$ . Прямая  $EF$  повторно пересекает окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Касательные в точках  $X$  и  $Y$  проведенные к окружностям  $\omega_b$  и  $\omega_c$  пересекают прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что середина отрезка  $KL$  равноудалена от точек  $E$  и  $F$ .
41. (a) Пусть  $C_1$  и  $B_1$  – точки на сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно. Докажите что, радикальная ось окружностей, построенных на  $BB_1$  и  $CC_1$  как на диаметре, проходит через ортоцентр треугольника  $ABC$ .  $\bigcirc$
- (b) (Ось Обера) Докажите, что четыре ортоцентра четырёх треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, никакие три из которых не проходят через одну точку<sup>1</sup>, коллинеарны.
- (c) (Теорема Гаусса-Боденмиллера) Докажите, что прямая Гаусса<sup>2</sup> перпендикулярна оси Обера.
42. Чевианы  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  треугольника  $ABC$  конкурентны. Прямая  $EF$  пересекает окружность  $(ABC)$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $P$ ,  $Q$ ,  $D$  и середина отрезка  $BC$  концикличны.
43. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Прямые  $DE$ ,  $EF$  и  $DF$  пересекаются прямыми  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ . В точках  $C_1$ ,  $B_1$ ,  $A_1$  соответственно. Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на прямой<sup>3</sup> перпендикулярной прямой Эйлера треугольник  $ABC$ .

## 5 Известные конструкции

Этот раздел посвящен тому, чтобы при доказательстве перпендикулярности использовать какие-то известные вам конструкции (прямая Симсона, задача №255, или что вы там знаете..). Таких очень много, и это то, что по-сути и остается только изучать. Да и все, что мы до этого с вами проходили, можно тоже называть известными конструкциями.

<sup>1</sup>Такие прямые образуют фигуру, называемую полным четырёхсторонником.

<sup>2</sup>Прямой Гаусса полного четырёхсторонника называется прямая, проходящая через середины трех его диагоналей.

<sup>3</sup>Такая прямая называется трилинейной полярной ортоцентра, или ортоцентрической осью, или центральной линией центра описанной окружности.

# 5.1 Прямая Уоллеса-Симсона

**Теорема 5.1** (Прямая Симсона). *Проекции точки  $P$  на прямые, содержащие стороны треугольника  $ABC$ , коллинеарны, тогда и только тогда, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .*

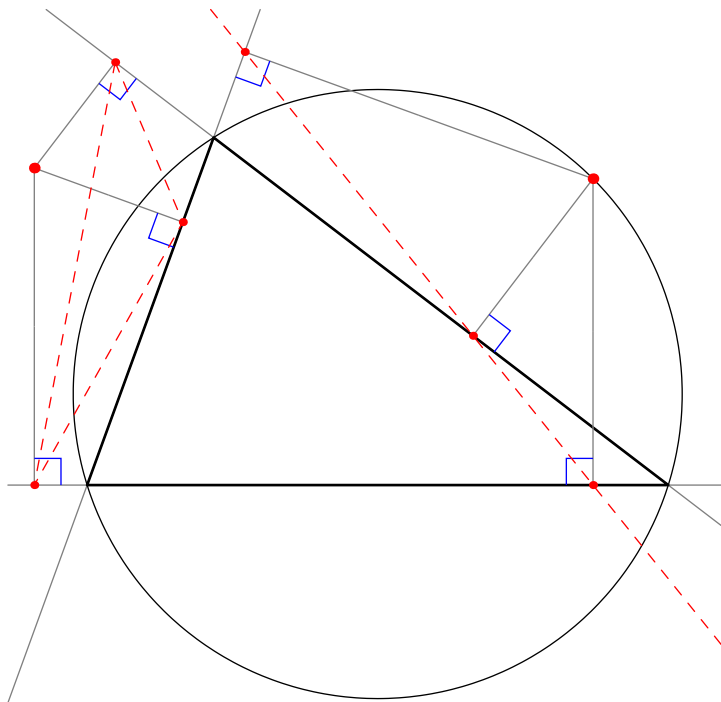


Рис. 5: Педальные треугольники двух точек. Прямая Симсона.

## 5.2 Задача №255

Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого с ней надо некоторое время «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть новая, совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу №255...

И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Задачник 9–11

**Теорема 5.2** (Лемма 255, Iran Lemma). Пусть  $M$  и  $N$  – точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ ,  $P$  – точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $MN$ . Докажите, что  $\angle APC = 90^\circ$ . Докажите, что точка  $P$  лежит на средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $AB$ .

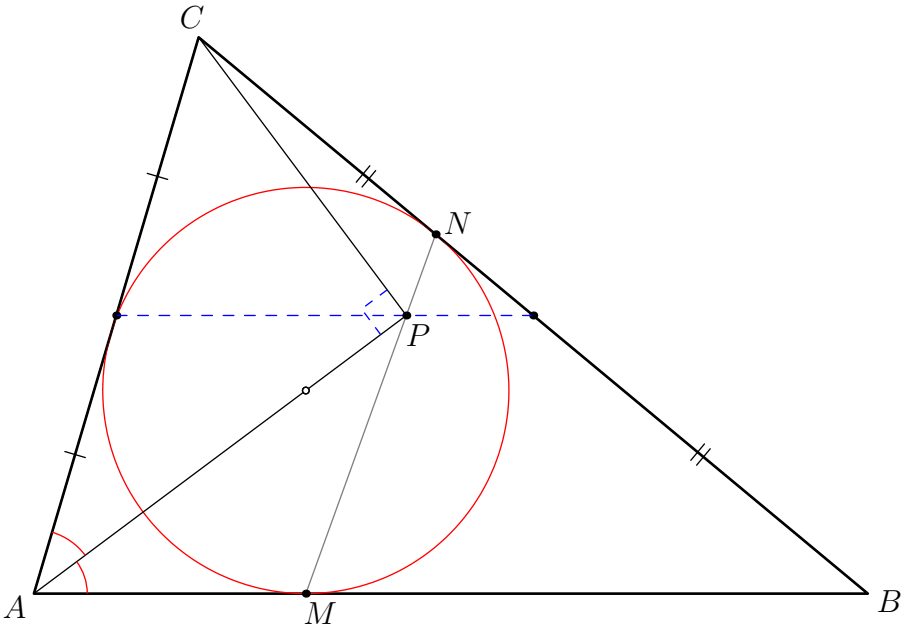


Рис. 6: Лемма 255.

## Задачи

44. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Через точку  $B$  провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ , а вторая — продолжение стороны  $CD$  в точке  $L$ .  $F$  — точка пересечения  $KL$  и  $AC$ . Докажите, что  $BF \perp KL$ .  $\bigcirc$

45. Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что проекции точки  $A_1$  на прямые  $AB, AC, BB_1, CC_1$  коллинеарны.  $\bigcirc$

46. (Обобщённая прямая Симсона)  $P$  — произвольная точка описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  на прямых  $AC, BC, AB$  коллинеарны, когда выполняется равенство:

$$\angle(AB, PC_1) = \angle(BC, PA_1) = \angle(AC, PB_1).$$

47. Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность касается сторон  $AB, BC, CA$  в точках  $C_1, B_1, A_1$  соответственно. Пусть прямая  $C_1I$  пересекает прямую  $A_1B_1$  в точке  $P$ . Тогда прямая  $CP$  содержит медиану треугольника  $ABC$ .

48. (а) Хорда  $PQ$  описанной окружности треугольника  $ABC$  и сторона  $BC$  перпендикулярны. Докажите, что прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $AQ$ .  $\bigcirc$

(б) (Закл. этап ВСОШ, 2009–2010 гг., 10.6) Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Точки  $X$  и  $Y$  — проекции точки  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$  на стороны  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что середина отрезка  $HP$  и точки  $X$  и  $Y$  коллинеарны.<sup>1</sup>

49. (Прямая Штейнера) Пусть  $P$  — произвольная точка на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Точки  $P_a, P_b, P_c$  — симметричны  $P$  относительно прямых  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Докажите что, точки  $P_a, P_b, P_c, H$  коллинеарны.  $\bigcirc$

50. Пусть  $\ell$  — прямая Штейнера точки  $R$  на описанной окружности  $ABC$ . Докажите, что если прямую  $\ell$  отразить относительно стороны треугольника  $ABC$ , то полученная прямая пройдет через точку  $R$ .

<sup>1</sup>Подсказка в том, что эта задача — пункт (b). Ну и симметрии ортоцентра.

51. (Л. А. Попов, Ф. Л. Бахарев) Точки  $A_1, B_1, C_1$  — основания высот остроугольного треугольника  $ABC$  из точек  $A, B, C$  соответственно. Точки  $A_1, B_1, C_1$  отразили относительно средних линий треугольника, параллельных  $AB, BC, CA$  соответственно, — получились точки  $A_2, B_2, C_2$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке.
52. (Олимпиада им. И.Ф. Шарыгина, 2021, 8-9.6, устный тур)  
В треугольнике  $ABC$ , точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $H$  — ортоцентр. Биссектриса угла  $A$  пересекает отрезок  $HM$  в точке  $T$ . Окружность построенная на отрезке  $AT$ , как на диаметре, пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что точки  $X, Y$  и  $H$  коллинеарны.
53. (ММО, 2006, 10.6) Точки  $P$  и  $Q$  лежат на описанной окружности треугольника  $ABC$ . На прямой  $AB$  выбрана точка  $C_1$  так, что  $\angle(AB, PC_1) = \angle(QC_1, AB)$ . Аналогично выбраны точки  $B_1$  и  $C_1$  на прямых  $AC$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  коллинеарны.
54. (Теорема Дроз-Фарни) Обозначим точкой  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Прямые  $\ell$  и  $t$  проходят через  $H$  и  $\ell \perp t$ . Пусть  $L_a, L_b, L_c$  пересечение  $\ell$  с прямыми  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно, точки  $T_a, T_b$  и  $T_c$  определяются аналогично. Докажите, что середины отрезков  $T_a L_a, T_b L_b, T_c L_c$  коллинеарны.

---

Эта серия задач довольно простая, потому что у нас последнее (!) занятие. Ну и вы, кажется, должны были устать от "Симсона" и "степени точки". Поэтому отдыхайте и наслаждайтесь задачами! ♥

55. (ММО, 1994) В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  — проекции вершины  $B$  биссектрисы углов  $A$  и  $C$ , а  $P$  и  $Q$  — проекции на внешние биссектрисы этих же углов.
- (a) Докажите, что точки  $M, N, P$  и  $Q$  коллинеарны. ○
- (b) Докажите, что длина отрезка  $PQ$  равна полупериметру треугольника  $ABC$ .
56. В трапецию  $ABCD$  вписана окружность с центром  $I$ . Окружность вписанная в треугольник  $ACD$  касается сторон  $AD$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что точки  $E, F$  и  $I$  коллинеарны. ○

57. (Ф. Л. Бахарев, Санкт-Петербургская олимпиада, 1999) В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  и отмечены точки  $K$  и  $L$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно.  $AP$  и  $CQ$  – перпендикуляры, опущенные на  $CC_1$  и  $AA_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $PK$  и  $QL$  пересекаются на стороне  $AC$ .  $\bigcirc$
58. (а) (Первая внешняя Лемма 255) Пусть  $M$  и  $N$  – точки касания вневписанной окружности  $\omega_a$  треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$  и продолжением стороны  $AC$ , а  $P$  – точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $MN$ . Докажите, что  $\angle APB = 90^\circ$ .  $\bigcirc$
- (б) (Вторая внешняя Лемма 255) Пусть  $M$  и  $N$  – точки касания вневписанной окружности  $\omega_a$  треугольника  $ABC$  с продолжениями сторон  $AB$  и  $AC$ , а  $P$  – точка пересечения биссектрисы внешнего угла  $B$  с прямой  $MN$ . Докажите, что  $\angle BPC = 90^\circ$ .  $\bigcirc$
59. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) средняя линия, параллельная стороне  $BC$  пересекается со вписанной окружностью в точке  $D$ , не лежащей на  $AC$ . Докажите, что касательная к окружности в точке  $D$  пересекается с биссектрисой угла  $C$  на стороне  $AB$ .
60. В треугольнике  $ABC$  точки  $A_c, B_c, C_c$  – точки касания прямых  $BC, AC$  и  $AB$  с вневписанной окружностью  $\omega_c$  (с центром в  $I_c$ ). Точки  $A_b, B_b, C_b$  определяются аналогично.

$$\begin{cases} B_1 &= A_c C_c \cap A_b C_b \\ C_1 &= A_b B_b \cap A_c B_c \\ A_1 &= A_b B_b \cap A_c C_c \\ A_2 &= A_c B_c \cap A_b C_b \end{cases}$$

- (а) Докажите, что точки  $A, B_1, C_1, I_b, I_c$  коллинеарны.
- (б) Докажите, что  $A_1 A_2 \perp BC$ .



## А Анкета

Фамилия Имя, класс: \_\_\_\_\_ ○

Команда: \_\_\_\_\_ Знак зодиака: \_\_\_\_\_

Хобби: \_\_\_\_\_ Сколько дней в году: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

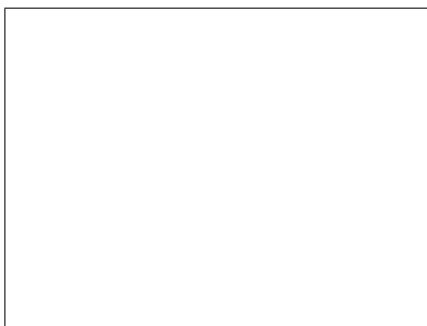
Любимый цвет (можно нарисовать): \_\_\_\_\_

Любимая музыкальная группа: \_\_\_\_\_

Любимый фильм: \_\_\_\_\_

Любимая футбольная команда: \_\_\_\_\_

Нарисуйте лошадь:



В   Заметки

Награда	Доля от количества	Количество ○
Конфета	33%	≈ 14
Шоколадка	50%	≈ 21
Значок	Особо старательным	
Общее количество	100%	42

Таблица 1: Таблица ништяков.

1

# True Love Waits (Live in Oslo)

Radiohead

Intro: *C Em6<sup>b</sup> Am E<sup>b</sup>6**C* I'll drown my beliefs *Em6<sup>b</sup>**Am* To have your babies *E<sup>b</sup>6**C* I'll dress like your niece *Em6<sup>b</sup>**Am* And wash your swollen feet *E<sup>b</sup>6**C* *Fmaj7/C* *G6(11)*  
Just don't*C* *Fmaj7/C*  
leave*G6(11)* *Am* *G6(11)*  
Don't leave*C* I'm not living *Em6<sup>b</sup>**Am* I'm just killing time *E<sup>b</sup>6**C* Your tiny hands *Em6<sup>b</sup>**Am* Your crazy kitten smile *E<sup>b</sup>6**C* *Fmaj7/C* *G6(11)*  
Just don't*C* *Fmaj7/C*  
leave*G6(11)* *Am* *G6(11)*  
Don't leaveBridge: *C Em6<sup>b</sup> Am G6(11) E<sup>b</sup>6**Fmaj7/C**C* And true love waits *Em6<sup>b</sup>**Am* In haunted attics *E<sup>b</sup>6**C* And true love lives *Em6<sup>b</sup>**Am* On lollipops and crisps *E<sup>b</sup>6*||: *C* *Fmaj7/C* *G6(11)*  
Just don't*C* *Fmaj7/C*  
leave*G6(11)* *Am* *G6(11)* :||  
Don't leave