

Олимпиадная математика. 5 класс

Задачник 5.2023

Данное пособие содержит задачи для пятиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. [Всероссийская олимпиада школьников](#), школьный этап в Москве (2014–2023)
2. Всероссийская олимпиада школьников, муниципальный этап в Москве (2014 и 2015; после 2015 не проводится)
3. [Ломоносов](#) (2020–2023)
4. [Покори Воробьёвы горы!](#) (2020–2023)
5. [Формула Единства / Третье тысячелетие](#) (2015–2023)
6. [Бельчонок](#) (2018–2023)
7. [Олимпиада КФУ](#) (2022–2023)
8. [Надежда энергетики](#) (2019–2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад «Ломоносов» и «Покори Воробьёвы горы!» можно найти в [олимпиадных листках](#).
- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: <http://mathus.ru/math/5math2023.pdf>.

Оглавление

1 Начало	4
1.1 Примеры и конструкции	4
1.2 Да или нет	6
2 Арифметика	9
2.1 Десятичная запись	9
2.2 Арифметические действия	10
2.3 Ребусы	10
2.4 Делимость	12
2.5 НОД и НОК	13
2.6 Деление с остатком	13
2.7 Дроби	14
2.8 Основная теорема арифметики	14
2.9 Последняя цифра	14
2.10 Числовые неравенства	15
3 Текстовые задачи	16
3.1 Движение	16
3.2 Работа	17
3.3 Стоимость	18
3.4 Части и отношения	18
3.5 Смеси и концентрации	19
3.6 Возраст	20
3.7 Часы, время, календарь	20
3.8 Неравенства	21
3.9 Разные арифметические задачи	21
4 Алгоритмы, процессы, игры	25
4.1 Алгоритмы и операции	25
4.2 Взвешивания	28
4.3 Переливания	28
4.4 Таблицы	29
4.5 Игры и стратегии	31
5 Комбинаторика	32
5.1 Перебор вариантов	32
5.2 Круги Эйлера	33
5.3 Правило произведения	33
5.4 Количество делителей числа	35
5.5 Сочетания	35
5.6 Подсчёт двумя способами	35

5.7	Принцип Дирихле	35
5.8	Взаимно-однозначное соответствие	36
6	Рассуждения и методы	37
6.1	Логика	37
6.2	Рыцари и лжецы	41
6.3	Оценка плюс пример	43
6.4	Принцип крайнего	47
7	Наглядная геометрия	48
7.1	Наглядная геометрия на плоскости	48
7.2	Наглядная геометрия в пространстве	50
7.3	Прямоугольники и квадраты	51
8	Комбинаторная геометрия	53
8.1	Разрезания	53
8.2	Замощения плитками	56
8.3	Геометрия на клетчатой бумаге	57
8.4	Целочисленные решётки	58

Глава 1

Начало

1.1 Примеры и конструкции

1.1.1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 5.1*) К числу прибавили сумму его цифр и получили 2017. Приведите пример такого числа.

1.1.2. (*«Бельчонок», 2021, 5.1*) Бельчонок хочет поместить в каждую клетку квадрата 5×5 либо один гриб (Γ), либо один орех (O) так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 8 грибов. Помогите ему это сделать.

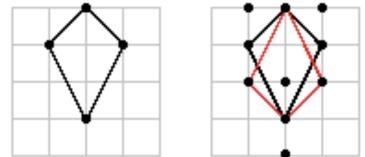
1.1.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.1, 7.1*) Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.

1.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.1*) Дедушка дал Пете несколько карточек и попросил составить из них равенство. У Пети получилось вот что:

$$\boxed{8} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{7} \boxed{5} = \boxed{0} \boxed{6}$$

«Мне не очень нравится твоё равенство, — сказал дедушка, — ведь в нём число 6 записано как 06, а так писать не принято». Придумайте, как Пете из всех карточек сложить верное равенство, которое понравится дедушке.

1.1.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.1*) Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги. Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повёрнут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Нарисуйте 10 точек так, чтобы они образовали целых пять змеев.



1.1.6. (*«Бельчонок», 2021, 5.1*) Бельчонок раскладывает в клетки квадрата 5×5 восемь орехов (O) и семнадцать грибов (Γ) так, чтобы рядом с каждым орехом (т. е. в клетках, соседних по стороне) было ровно 2 гриба. Покажите, как это можно сделать.

1.1.7. (*Всеросс., 2015, МЭ, 5.1*) К некоторому числу прибавили сумму его цифр и получили 2014. Приведите пример такого числа.

1.1.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.1) Расставьте в фигурках цифры от 1 до 9 так, чтобы каждая цифра встречалась в одном квадрате, одном круге и одном треугольнике, а равенство оказалось верным:

$$\Delta \cdot \bigcirc \cdot \square + \Delta \cdot \bigcirc \cdot \square + \Delta \cdot \square \cdot \square + \Delta \cdot \bigcirc \cdot \square + \Delta \cdot \bigcirc \cdot \square + \Delta \cdot \square \cdot \square + \Delta \cdot \bigcirc \cdot \square + \Delta \cdot \square \cdot \square + \Delta \cdot \bigcirc \cdot \square = 2020$$

1.1.9. («Бельчонок», 2022, 5.2) У Бельчонка есть несколько пакетов с орехами. В двух — по 2 ореха, в трёх — по 3 ореха, в четырёх — по 4 ореха, в пяти — по 5 орехов. Помогите бельчонку расставить пакеты на двух полках так, чтобы на них было поровну как пакетов, так и орехов.

1.1.10. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.2, 6.1) Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

1.1.11. (Всеросс., 2022, ШЭ, 5.3) На рисунке изображён план системы дорог некоторого города. В этом городе 8 прямых улиц, а 11 перекрёстков названы латинскими буквами A, B, C, \dots, J, K .

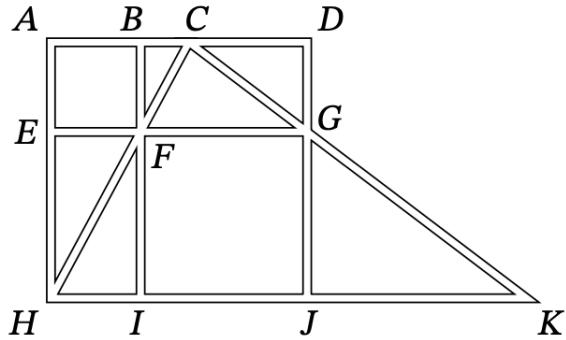
На некоторые три перекрёстка надо поставить по полицейскому так, чтобы на каждой из 8 улиц стоял хотя бы один полицейский. На какие именно три перекрёстка надо поставить полицейских? Достаточно указать хотя бы один подходящий вариант расположения.

Все улицы направлены вдоль прямых линий.

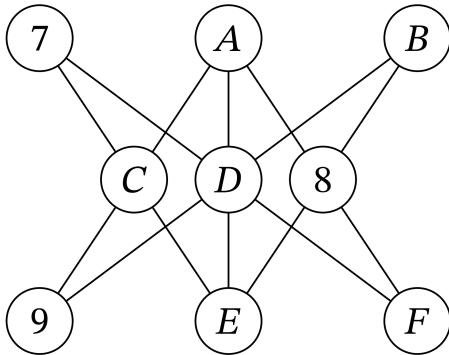
Горизонтальные улицы: $A - B - C - D, E - F - G, H - I - J - K$.

Вертикальные улицы: $A - E - H, B - F - I, D - G - J$.

Наклонные улицы: $H - F - C, C - G - K$.



1.1.12. (Всеросс., 2021, ШЭ, 5.4) Расставьте цифры от 1 до 6 (каждую нужно использовать ровно один раз) так, чтобы сумма трёх чисел, расположенных на каждой из 7 прямых, была равна 15. В ответе укажите, какие цифры должны стоять на местах $A - F$.



- | | |
|----------------------|---------------------------|
| (a) Вместо буквы A | (1) должен стоять цифра 1 |
| (b) Вместо буквы B | (2) должен стоять цифра 2 |
| (c) Вместо буквы C | (3) должен стоять цифра 3 |
| (d) Вместо буквы D | (4) должен стоять цифра 4 |
| (e) Вместо буквы E | (5) должен стоять цифра 5 |
| (f) Вместо буквы F | (6) должен стоять цифра 6 |

1.2 Да или нет

1.2.1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 5.1*) Антошка выкопал на огороде пять картошек. Все они весят по-разному. Могло ли оказаться так, что он сможет разделить все картошки как на две кучки одинакового веса, так и на три кучки одинакового веса? Кучка может состоять и из одной картошки. Обоснуйте свой ответ.

1.2.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.1, 6.1, 7.1*) За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

- Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?
- Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?

1.2.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.1*) Можно ли разместить в квадрате 3×3 числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше, чем каждое из его соседей? Числа называются соседями, если у клеток, в которых они стоят, есть общая сторона.

1.2.4. (*«Бельчонок», 2022, 5.2*) Мама, папа и девять детей встали в ряд на прямой дорожке. Мама и папа стоят рядом на расстоянии 1 метра друг от друга. Могут ли дети встать так, что суммарное расстояние всех детей до мамы равно суммарному расстоянию всех детей до папы? Если да, приведите пример; если нет, объясните, почему.

1.2.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.2) Встретились 7 детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Могло ли оказаться, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил)?

1.2.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.4) У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Хватит ли ему для этого девяти кошельков?

1.2.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.1) Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

1.2.8. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.5) Существуют ли три попарно различные натуральные числа a , b , c такие, что $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$ является квадратом целого числа?

1.2.9. («Бельчонок», 2021, 5.4) На день рождения бельчонок Вася получил мешок с орехами и начал есть их вместе с друзьями Димой, Гошей и Лёшем. Дима съел меньше всех орехов, а Гоша – больше всех. Лёша съел чётное число орехов, в 3 раза больше, чем Дима и в 2 раза меньше, чем Гоша. Все остальные орехи съел Вася. Могло ли в мешке быть 65 орехов?

1.2.10. («Бельчонок», 2019, 5.5) Существует ли число, у которого произведение суммы цифр на их количество равно 55?

1.2.11. («Бельчонок», 2019, 5.5) Существует ли число, у которого произведение суммы цифр на их количество равно 77?

1.2.12. («Бельчонок», 2022, 5.5) На детском празднике было 8 детей. Взрослые приготовили 16 пакетов с конфетами. В первом была 1 конфета, во втором 2 конфеты, и так далее, в 16-м пакете было 16 конфет. Каждому из восьми детей дали по одному пакету в начале праздника и по одному пакету в конце праздника. Могло ли оказаться так, что каждому ребёнку досталось поровну конфет, причём в начале и в конце праздника было раздано одинаковое количество конфет?

1.2.13. («Надежда энергетики», 2021, 5.5) Пусть имеется 2021 целое число, их произведение равно 1. Может ли сумма всех этих чисел быть равной нулю?

1.2.14. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.4, 6.4) Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

1.2.15. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5) Можно ли так расставить знаки «+» и «–» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$* 1^2 * 2^2 * \dots * 2020^2 = 2020?$$

Глава 2

Арифметика

2.1 Десятичная запись

2.1.1. («Ломоносов», 2022, 5–6.1) Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого все цифры различны, причём никакие две из них нельзя поменять местами так, чтобы получилось меньшее число.

2.1.2. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.2) Алла загадала трёхзначное число, в котором нет цифры 0, и все цифры различны. Белла записала число, в котором те же цифры идут в обратном порядке. Галя вычла из большего числа меньшее. Какая цифра стоит у полученной разности в разряде десятков?

2.1.3. (Олимпиада КФУ, 2022, 5.2) К натуральному числу n в конце приписали одну цифру. В результате получилось число, в 13 раз большее числа n . Чему могло равняться n ? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

2.1.4. («Ломоносов», 2018, 5–6.4; 7–8.3; 9.1) Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 4$ и $5 + 4 = 4 + 5 = 9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

2.1.5. («Ломоносов», 2021, 5–6.4) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

2.1.6. («Ломоносов», 2020, 5–6.5) Вовочка складывает числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы $248 + 208$ он получил бы значение 4416.

- a) В скольких случаях Вовочка получит правильный ответ, складывая всевозможные пары трёхзначных чисел? (Если некоторые два различных числа Вовочки уже складывал ранее в другом порядке, то он этого не замечает.)
- б) Найдите наименьшую возможную разность между верным ответом и ответом Вовочки для всех остальных пар трёхзначных чисел.

2.2 Арифметические действия

2.2.1. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 5.1*) Впишите в квадратики числа от 1 до 5, чтобы получилось верное равенство (каждое число используется ровно один раз):

$$\square + \square = \square \cdot (\square - \square).$$

Достаточно привести один пример.

2.2.2. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 5.1*) Впишите в каждый квадратик одну и ту же цифру, чтобы получилось верное равенство:

$$\square + \square + \square + \square = \square \times \square$$

2.2.3. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 5.1*) Вася может получить число 100, используя десять двоек, скобки и знаки арифметических действий:

$$100 = (22 : 2 - 2 : 2) \cdot (22 : 2 - 2 : 2).$$

Улучшите его результат: используйте меньшее число троек и получите число 100. (*Достаточно привести один пример*).

2.2.4. (*«Бельчонок», 2023, 5.1*) Расставьте цифры 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 3 в прямоугольники (по одной в каждый) так, чтобы разность получившихся чисел была наибольшей из возможных. Чему равна эта разность? *Четырёхзначное число не может начинаться с нуля.*

$$\square\square\square\square - \square\square\square\square$$

2.2.5. (*«Надежда энергетики», 2019, 5.1*) Задано правило, по которому каждой паре целых чисел X и Y ставится в соответствие число $X\nabla Y$. (Значок « ∇ » означает применение правила к числам X и Y .) Известно, что для любых целых чисел X , Y верны свойства

1. $X\nabla 0 = X$,
2. $X\nabla(Y + 1) = (X\nabla Y) + 2$.

Найдите формулу, которая описывает действие заданного правила, и определите, чему равно $2019\nabla 19$.

2.3 Ребусы

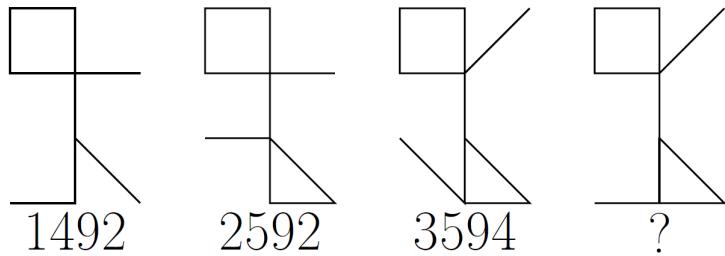
2.3.1. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 5.1*) Замените звёздочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр были различными: $*** - ** = 23$.

2.3.2. (*Всеросс., 2014, МЭ, 5.1*) Укажите какое-нибудь решение ребуса

$$2014 + \text{ГОД} = \text{СОЧИ}.$$

2.3.3. (Всеросс., 2018, ШЭ, 5.2) Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 2011533. Как её зовут?

2.3.4. («Ломоносов», 2023, 5–6.2) В одном средневековом монастыре пользовались такой системой записи чисел:



Какое число стоит на четвёртом месте? Ответ поясните.

2.3.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.5, 6.5) Экран калькулятора изначально выглядел так:



Но потом некоторые палочки на нём перегорели. Поэтому получилось, что $275 \times 9 = 1279$ (см. рис.). Восстановите, что вводили на самом деле и какое число получилось (найдите все возможные варианты и объясните, почему никаких других быть не может).

$$2\overline{7}5 \times 9 = 12\overline{7}9$$

2.3.6. («Ломоносов», 2023, 5–6.6) До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{y} = 8; \\ \bar{k} &= 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{q} = 90; \\ \bar{r} &= 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{\phi} = 500, \bar{x} = 600, \bar{\pi} = 900.\end{aligned}$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\overline{цла} = \bar{ц} + \bar{л} + \bar{а} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\overline{мд} = 44$. Или $\overline{ра} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\overline{да}, \overline{чух}, \overline{или}, \overline{ал}, \overline{боооо}$ запрещены.

Найдите хотя бы одно решение ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

2.4 Делимость

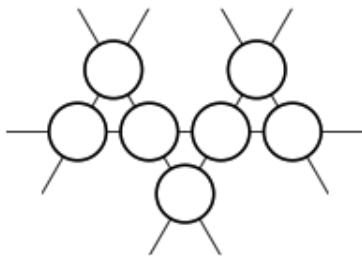
2.4.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.1) Может ли двузначное число делиться на пять других двузначных чисел?

2.4.2. (Олимпиада КФУ, 2023, 5.3) На празднике присутствовали несколько супружеских пар (других людей по отдельности не было). Каждый мужчина съел на три апельсина больше, и на два мандарина меньше, чем его жена. Оказалось, что апельсинов и мандаринов было съедено поровну. Докажите, что общее количество гостей делится на 4.

2.4.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.4, 6.3) В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов?

2.4.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 5.5) Участники весеннего математического лагеря в день числа π (14 марта) решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей обнаружил, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя подсчитала, что всего было подарено 4046 фигурок. Докажите, что кто-то из них ошибся.

2.4.5. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.8) Серёжа расставил в кружочках числа от 1 до 8 так, что каждое из чисел, кроме одного, использовано ровно по одному разу. Оказалось, что суммы чисел на каждой из пяти линий равны. Какое число Серёжа не использовал?



2.4.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

2.4.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

2.5 НОД и НОК

2.5.1. («Бельчонок», 2020, 5.2) Когда открыли новый магазин игрушек, Таня зашла туда в первый же день, и потом заходила каждый день. Олег зашел во второй день, и дальше заходил каждый второй день. Дима заходил каждый третий день, Игорь каждый четвертый день, Оля каждый пятый день. На какой день работы магазина они впервые все побывают в магазине в один и тот же день?

2.5.2. («Бельчонок», 2019, 5.4) На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размером 301×215 клеток и провели диагональ. Сколько клеток прямоугольника она пересекает по внутренним точкам?

2.5.3. («Бельчонок», 2019, 5.4) На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размером 259×185 клеток и провели диагональ. Сколько клеток прямоугольника она пересекает по внутренним точкам?

2.5.4. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2, 7–9.1) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится (без остатка) на 2, $N + 3$ — на 3, …, $N + 10$ — на 10.

2.5.5. («Бельчонок», 2020, 5.2) Доктор Пилюлькин провёл медосмотр коротышек — жителей Цветочного города. Все коротышки выстроились в ряд, а доктор каждому измерил температуру, каждого второго помазал йодом, каждого шестого — зелёной, и каждого седьмого — мазью от синяков. Каким по счёту был первый коротышка, которого доктор помазал и йодом, и зелёной, и мазью от синяков?

2.5.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2; 7–8.1) Найдите наименьшее натуральное N такое, что N делится (без остатка) на 12, $N + 2$ — на 14, $N + 4$ — на 16, а $N + 6$ — на 18.

2.6 Деление с остатком

2.6.1. («Надежда энергетики», 2023, 5.1) Некто пишет подряд без пробелов слово «математика». Вот так:

МАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКА…

Какой буквой будет 2023-я буква в этой цепочке?

2.6.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.2, 7–8.1) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.

2.7 Дроби

2.7.1. («Надежда энергетики», 2021, 5.1) Сравните дроби

$$\frac{20222021}{20212020} \quad \text{и} \quad \frac{20212020}{20202019}.$$

2.7.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1) Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна $\frac{86}{111}$.

2.7.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3) Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.

2.7.4. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.3, 7–8.2) Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток даёт a при делении на 601?

2.8 Основная теорема арифметики

2.8.1. («Надежда энергетики», 2022, 5.2) В доме не один подъезд, и во всех подъездах одинаковое число этажей. Число квартир на каждом этаже одинаковое, оно меньше числа подъездов. А число подъездов меньше числа этажей. Всего в доме 165 квартир. Сколько в доме подъездов?

2.8.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.2, 6.2) Приведите пример таких целых чисел a и b , что $ab(2a+b) = 2015$.

2.8.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1) Найдите все пары простых чисел p и q , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

2.9 Последняя цифра

2.9.1. («Надежда энергетики», 2020, 5.2) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$5^{2020} + 6^{2019}?$$

2.9.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–8.2, 9.1) Найдите наименьшее $n > 2016$ такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

2.9.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

2.10 Числовые неравенства

2.10.1. («Надежда энергетики», 2019, 5.2) Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 по 2019 (включительно) или сумма всех четных чисел от 2 по 2018 (включительно)?

2.10.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.6, 7–8.4, 9.3) Сравните числа

$$\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023} \quad \text{и} \quad \frac{5}{16}.$$

2.10.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Сравните числа

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad 2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

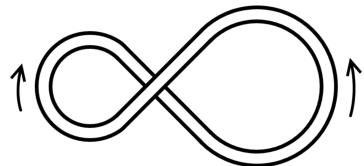
Глава 3

Текстовые задачи

3.1 Движение

3.1.1. («Бельчонок», 2023, 5.3) Вова с папой ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока папа управлял машиной, Вове было нечём заняться, и он рассматривал километровые столбы. Вова заметил, что ровно 12:05 в они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y — некоторые цифры), в 12:47 — мимо столба с числом YX , а в 13:05 — мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?

3.1.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.2) Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рис.). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями.



В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 10 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?

3.1.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.3) Маша с Леной вышли из дома и пошли в магазин за мороженым. Маша шла быстрее и дошла до магазина за 12 минут. Потратив 2 минуты на покупку мороженого, она пошла назад и встретила Лену ещё через 2 минуты. Сколько времени потребовалось Лене, чтобы дойти до магазина? Скорости девочек постоянны.

3.1.4. (Всеросс., 2014, ШЭ, 5.5) Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа? (*Напишите решение задачи, а не только ответ*).

3.1.5. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 5.5*) Каждому из двух муравьёв, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки *A* (где они сейчас находятся) в точку *B*. Расстояние между точками равно 15 м. Толстый муравей ползёт со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий — со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них быстрее доставит весь свой груз в точку *B*? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.

3.1.6. (*«Ломоносов», 2021, 5–6.2*) Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Она рассчитала, что если полетит на ступе со скоростью 50 км/ч, то опоздает на 2 часа, а если на электровенике со скоростью 150 км/ч, то прилетит на 2 часа раньше. А чтобы прибыть на Лысую Гору точно в срок, Баба-Яга воспользовалась метлой. В котором часу Баба-Яга вылетела и с какой скоростью летела на метле?

3.1.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Из пункта *A* в пункт *B* выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт *B*, сразу же развернулся и отправился обратно в пункт *A*. В этот момент велосипедист уже проехал 10 км. Когда велосипедист проехал еще 2 км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами *A* и *B*.

3.1.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.3, 7–8.2, 9.2*) Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

3.2 Работа

3.2.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.1*) Если открыть кран с холодной водой, то ванна наполнится за 10 минут, а если открыть кран с горячей, то за 15. Если вытащить пробку, то ванна полностью выливается за 12 минут. Сколько времени будет наполняться ванна, если открыть оба крана и вытащить пробку?

3.2.2. (*«Надежда энергетики», 2022, 5.3*) Один любознательный профессор установил, что два студента и три аспиранта за семь дней приносят столько же пользы, сколько четыре студента и один аспирант за пять дней. От кого исходит большие пользы: от одного студента или от одного аспиранта?

3.2.3. (*«Надежда энергетики», 2021, 5.4*) За полтора часа Пончик съел недельный запас варенья Сиропчика. При этом в течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение этих полутора часов) он съедал ровно 3 кг варенья. Можно ли утверждать, что средняя прожорливость Пончика составляла 3 кг варенья в час?

3.2.4. (*«Бельчонок», 2022, 5.5*) Мама, папа, Вася и Нина лепили пельмени. Мама и Нина слепили на 4 пельмени больше, чем папа и Вася, а мама и папа — на 2 больше, чем Вася и Нина. Потом Вася и мама ушли, а Нина и папа продолжали лепить с той же скоростью, и каждый налепил ещё в два раза больше пельменей, чем сначала. Кто теперь налепил больше пельменей, мама и папа вместе или Вася и Нина вместе?

3.2.5. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.3) Коля делал домашнюю работу: за 2 часа он успел сделать половину заданий по математике, $\frac{3}{4}$ заданий по физике и все задания по химии.

А когда он полностью закончил работу, то обнаружил, что на задания по химии ушло 25% от общего времени. Известно, что если бы он делал только физику, то сделал бы все задания по ней за час.

За какое время Коля сделал все задания?

3.2.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.5, 6.4) Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.

3.3 Стоимость

3.3.1. (Всеросс., 2021, ШЭ, 5.3) К первому сентября Влад купил себе несколько шариковых и гелевых ручек. Он заметил, что если бы все купленные ручки были гелевыми, то он заплатил бы в 4 раза больше, чем вышло у него. А если бы все ручки были шариковыми, то покупка обошлась бы в 2 раза дешевле реальной. Во сколько раз гелевая ручка дороже, чем шариковая?

3.3.2. (Всеросс., 2018, ШЭ, 5.3) Продавец закупил партию ручек и продал их. При этом некоторые покупатели купили одну ручку за 10 рублей, а некоторые купили 3 ручки за 20 рублей. Оказалось, что с каждой покупки продавец получал одинаковую прибыль. Найдите цену, по которой продавец закупил ручки.

3.4 Части и отношения

3.4.1. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.3) У Маши есть 4 куска пластилина красного цвета, 3 куска пластилина синего цвета и 5 кусков пластилина жёлтого цвета. Сначала она разделила пополам каждый не красный кусок пластилина, а затем разделила пополам каждый не жёлтый кусок пластилина. Сколько кусков пластилина получила Маша?

3.4.2. (Всеросс., 2015, ШЭ, 5.3) Жучка тяжелее кошки в 3 раза, мышка легче кошки в 10 раз, репка тяжелее мышки в 60 раз. Во сколько раз репка тяжелее Жучки? Ответ обоснуйте.

3.4.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.1) У Пети есть 10 конфет и еще половина количества конфет, которые есть у Миши. А у Миши 15 конфет и еще 75% количества конфет, которые есть у Пети. Найдите общее количество конфет у Миши и Пети.

3.4.4. (Всеросс., 2015, МЭ, 5.2) Волк, Ёж, Чиж и Бобёр делили апельсин. Ежу досталось вдвое больше долек, чем Чижу, Чижу — впятеро меньше, чем Бобру, а Бобру — на 8 долек больше, чем Чижу. Найдите, сколько долек было в апельсине, если Волку досталась только кожура.

3.4.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.3, 6.1, 7.1) Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороньи оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороньи оказалась втройне больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

3.4.6. (Математический праздник, 2010, 6.1) На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

3.4.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.3) У Пети 10 друзей. Однажды он решил их угостить их конфетами. Первому он отдал $\frac{1}{12}$ конфет, что у него были и еще $\frac{1}{12}$ конфеты, второму — $\frac{1}{11}$ того, что осталось плюс $\frac{1}{11}$ конфеты, ..., 10-му он дал $\frac{1}{3}$ того, что осталось и еще $\frac{1}{3}$ конфеты. В результате у Пети осталась только одна конфета. Сколько конфет у него было изначально?

3.4.8. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.2, 9.1) На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что не знают ни одного языка программирования. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем $\frac{1}{6}$ из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила $\frac{5}{12}$. Сколько всего участников кружка?

3.5 Смеси и концентрации

3.5.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.1) Маша смешала 50 г 90% раствора кислоты со 100 г 95% раствора кислоты и добавила некоторое количество дистиллированной воды. В результате получился 5% раствор кислоты. Сколько граммов воды было добавлено?

3.5.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.1) Свежие яблоки содержат 90% воды, а сушеные — 12% воды. Лена считает, что если компот содержит более 95% воды, то он невкусный. Какое наибольшее количество вкусного компота она может сварить из 4 кг свежих и 1 кг сушеных яблок (и произвольного количества воды)? Испарение воды в процессе варки считать незначительным.

3.5.3. («Ломоносов», 2020, 5–6.3) В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе кислота будет составлять $\frac{1}{20}$ часть, а во второй доля кислоты будет равна $\frac{7}{30}$. Какую часть будет составлять кислота в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

3.6 Возраст

3.6.1. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 5.2*) Петя в три раза старше Ани, а Аня на 8 лет младше Пети. Определите, сколько лет каждому. Ответ обоснуйте.

3.6.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.1*) Аня и Таня — сёстры, им вместе 28 лет. Сейчас Ане вдвое больше лет, чем было Тане в момент, когда Ане было столько лет, сколько Тане сейчас. Найдите возраст старшей из сестёр.

3.7 Часы, время, календарь

3.7.1. (*«Ломоносов», 2020, 5–6.1*) В некоторой семье папа работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня выходные), мама — по графику «1 через 2» (1 день работает, 2 дня выходные), а дети учатся по пятидневной рабочей неделе (с понедельника по пятницу). В субботу 2 сентября мама навещала бабушку в деревне, а следующий день вся семья провела дома. В какой день у них снова будет общий выходной?

3.7.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.2*) Назовем дату «палиндромом» если она слева направо и справа налево читается одинаково (точки не учитываются). Например, дата 22.02.2022 является палиндромом. Когда наступит ближайшая следующая дата-палиндром?

3.7.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

3.7.4. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.4*) Гагара вылетела из населённого пункта Уэлен на Чукотке 1 июля ровно в 3 часа утра по местному времени и прилетела в населённый пункт Уэйлс на Аляске 30 июня ровно в 10 часов утра по местному времени. Оттуда гагара вылетела 1 июля в 3 часа дня по местному времени и прилетела обратно в Уэлен 2 июля в 4 часа дня по местному времени. Определите длительность полёта гагары в одну сторону, если известно, что в обе стороны она летела с одной и той же постоянной скоростью одним и тем же кратчайшим маршрутом, который пересекает линию перемены дат.

3.7.5. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.5, 7–8.1*) Некто раздобыл вот такие часы. Чтобы от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтобы часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.

Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?



3.7.6. («Ломоносов», 2022, 5–6.5) Кошечка Бессмертный подарила Бабе-Яге электроступу. На приборной панели электроступы есть дисплей, который показывает время в формате ЧЧ:ММ (например, 13:56) и заряд ступы по стобалльной шкале (в целых числах от 1 до 100). Ступа расходует заряд равномерно и полностью разряжается за 10 часов. Дисплей в качестве наибольшего значения заряда показывает 100, а вместо того, чтобы показать 0, ступа опускается на землю из-за недостатка энергии. В 00:00 Баба-Яга отправилась в полёт на полностью заряженной ступе, и на протяжении всего времени до приземления ступа не получала питания. В какое время в течение полёта значения заряда ступы и число минут на дисплее совпадают?

3.8 Неравенства

3.8.1. («Ломоносов», 2023, 5–6.1) В тарелке 28 яблок и груш. Среди любых 11 фруктов есть хотя бы одно яблоко, а среди любых 19 фруктов есть хотя бы одна груша. Сколько яблок и сколько груш в тарелке?

3.8.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.1) Миша, Петя, Коля и Вася играли в «подкидного дурака», всего сыграли 16 партий. Каждый остался «в дураках» хотя бы один раз. Известно, что больше всех оставался Миша, а Петя и Коля в сумме остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?

3.8.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.2) Сумма 5 различных натуральных чисел равна 37, причем известно, что наименьшее из этих чисел составляет не менее половины от наибольшего из них. Найдите эти числа, в ответе запишите их произведение.

3.8.4. («Ломоносов», 2017, 5–6.3, 7–8.2) А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых лёгких весят в сумме 80 г, четыре самых тяжёлых — 200 г, а суммарный вес всех котят равен 500 г. Сколько котят родила кошка?

3.8.5. («Бельчонок», 2022, 5.5) На поляне растёт на 6 кустов меньше, чем деревьев. Прилетели птицы и сели и на кусты, и на деревья. Сели они так, что на всех деревьях их было поровну, и на всех кустах поровну, но на дереве по крайней мере на 10 птиц больше, чем на кусте. На деревьях всего сидело 128 птиц. Сколько было кустов?

3.8.6. («Ломоносов», 2016, 5–6.2; 7–8.1) На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

3.9 Разные арифметические задачи

3.9.1. («Бельчонок», 2022, 5.1) Сеня задумал два числа, потом вычел из большего меньшее, сложил оба числа и разность, и получил 68. Каким было большее из задуманных чисел?

3.9.2. («Бельчонок», 2020, 5.1) Книги для занятий упаковали в 3 сумки. Потом из первой сумки переложили одну книгу во вторую сумку, из второй переложили одну книгу в третью сумку, из третьей переложили одну книгу в первую сумку. В результате оказалось, что средний вес книг в первой сумке уменьшился на 60 граммов, во второй сумке средний вес книг уменьшился на 20 граммов, а в третьей сумке средний вес книг увеличился на 100 граммов. В первой и второй сумках по 10 книг. Сколько книг в третьей сумке?

3.9.3. («Бельчонок», 2020, 5.1) Бельчонок набрал поровну сосновых, еловых и кедровых шишек. Потом он выкинул несколько еловых шишек и добавил столько же кедровых. Теперь еловых и сосновых шишек вместе стало 12, а сосновых и кедровых шишек стало вместе 28. Сколько кедровых шишек добавил бельчонок?

3.9.4. («Бельчонок», 2018, 5.1) Бельчонок в день съедает или 1) 9 ягод, или 2) 2 ореха, или 3) 1 орех и 4 ягоды, или 4) ест только грибы. За 10 дней бельчонок съел 30 ягод и 9 орехов. Сколько из этих дней бельчонок ел только грибы?

3.9.5. (Всеросс., 2022, ШЭ, 5.1) В некотором месяце некоторого года ровно 5 пятниц. При этом первый и последний день этого месяца — не пятницы. Каким днём недели является 12-е число месяца?

3.9.6. («Надежда энергетики», 2022, 5.1) Мощность генератора «Алдан» на 100 кВт меньше, чем суммарная мощность генераторов «Бия» и «Витим», а мощность генератора «Бия» на 120 кВт меньше, чем суммарная мощность генераторов «Алдан» и «Витим». Чему равна мощность генератора «Витим»?

3.9.7. («Бельчонок», 2018, 5.1) Бельчонок в день съедает или 1) 8 ягод, или 2) 1 орех, или 3) 2 ореха и 5 ягод, или 4) ест только грибы. За 12 дней бельчонок съел 31 ягоду и 10 орехов. Сколько из этих дней бельчонок ел только грибы?

3.9.8. («Бельчонок», 2020, 5.1) В наборе было поровну карандашей, ручек и фломастеров. Денис убрал несколько карандашей и добавил столько же фломастеров. Теперь ручек и карандашей стало вместе 15, а ручек и фломастеров стало вместе 21. Сколько карандашей убрал Денис?

3.9.9. («Бельчонок», 2020, 5.2) У Васи два будильника. Они оба звонят ровно в 7 утра, а потом первый звонит через 2 минуты, а второй через три минуты, пока их не отключат. В понедельник Вася 17 раз слышал звон будильника, после чего встал. Если будильники звонят одновременно, их звонок сливаются и считается за один. Через сколько минут после 7 часов Вася встал?

3.9.10. («Бельчонок», 2019, 5.2) Четверо бельчат запасали припасы на зиму. Каждый день один бельчонок собирал грибы, а трое других собирали орехи, причем менялись они не по очереди, а как договаривались. Через несколько дней оказалось, что первый бельчонок собирал орехи больше всех, 8 раз, а второй — меньше всех, 5 раз. Сколько дней прошло? Составьте график: для каждого дня укажите, какие три бельчонка собирают орехи в этот день.

3.9.11. (Всеросс., 2016, ШЭ, 5.3) Маугли попросил пятерых обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую другую по одному ореху. В результате они принесли Маугли вдвое меньше орехов, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли? Обязательно объясните свой ответ.

3.9.12. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.3) Однажды Геральта укусила виверна. Лекарь велел ему принимать лекарство в течение 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма перемежаются одним днём отдыха. Геральт начал принимать лекарство в понедельник. Сколько раз он будет его принимать по понедельникам и вторникам подряд?

3.9.13. (Всеросс., 2014, МЭ, 5.3) Надя испекла пирожки с малиной, черникой и клубникой. Пирожков с малиной получилась половина от общего количества пирожков; пирожков с черникой — на 14 меньше, чем пирожков с малиной. А пирожков с клубникой получилось в два раза меньше, чем пирожков с малиной и черникой вместе. Сколько пирожков каждого вида испекла Надя?

3.9.14. («Бельчонок», 2022, 5.3) В первой четверти Маша и Лена получили вместе 23 пятёрки, Света и Маша получили вместе 18 пятёрок, а Света и Лена получили вместе 15 пятёрок. Сколько пятёрок получила каждая из девочек?

3.9.15. («Бельчонок», 2021, 5.3) Вася и Петя хотят найти на берегу реки одинаковое количество плоских камушков. После того, как Вася принес 120 камушков, а Петя — 147 камушков, Вася осталось найти камушков в четыре раза больше, чем Петя. Сколько всего камушков должен был найти каждый из них?

3.9.16. («Бельчонок», 2019, 5.2) Четыре девочки организовали дежурство так: каждый день одна из девочек отдыхала, а три дежурили, причем менялись они не по очереди, а как договаривались. Через несколько дней оказалось, что Марина дежурила больше всех, 7 раз, а Катя — меньше всех, 4 раза. Сколько дней прошло? Составьте график: для каждого дня укажите, какие три девочки дежурят в этот день.

3.9.17. («Надежда энергетики», 2021, 5.3) В провинциальном городе N установлены различные вышки передачи мысли на расстояние. На каждой вышке есть несколько площадок для техобслуживания. Каждые две соседние по высоте площадки вышки соединены между собой лесенкой. Кроме того, еще одна лесенка соединяет самую верхнюю площадку каждой вышки с верхушкой вышки и еще одна — самую нижнюю площадку с землей. Сколько таких вышек установлено в городе N, если общее количество площадок для техобслуживания в них — 2021, а лесенок — 2102?

3.9.18. («Надежда энергетики», 2020, 5.5) Вагоны скорого поезда «Москва–Ялта» должны быть пронумерованы подряд, начиная с единицы. Но в спешке два соседних вагона получили одинаковые номера. При этом оказалось, что сумма номеров всех вагонов равна 111. Сколько вагонов в составе и какой номер использован дважды?

3.9.19. («Бельчонок», 2018, 5.5) Вася записал на доске три различных натуральных числа. Если бы он увеличил наибольшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 84. А если бы Вася увеличил наименьшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 96. Чему будет равно произведение всех трёх чисел, если мальчик увеличил среднее число на 1?

3.9.20. (Всеросс., 2022, ШЭ, 5.5) На кружки по математике записалось несколько школьников. Их хотят распределить по группам равномерно — таким образом, чтобы количество учеников в любых двух группах отличалось не более чем на 1.

В результате такого равномерного деления получилось 6 групп, среди которых ровно 4 группы по 13 учеников. Сколько всего могло быть школьников? Укажите все возможные варианты.

3.9.21. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 5.5*) Четыре девочки поют песни, аккомпанируя друг другу. Каждый раз одна из них играет на фортепиано, а остальные три поют. Вечером они посчитали, что Аня спела 8 песен, Таня — 6 песен, Оля — 3 песни, а Катя — 7 песен. Сколько раз аккомпанировала Таня? Обоснуйте свой ответ.

3.9.22. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 5.6*) Несколько камней разложены в 5 кучек. Известно, что

- в пятой кучке камней в шесть раз больше, чем в третьей;
- во второй кучке камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе взятых;
- в первой кучке камней втрое меньше, чем в пятой, и на 10 меньше, чем в четвёртой;
- в четвёртой кучке камней в два раза меньше, чем во второй.

Сколько всего суммарно камней в этих пяти кучках?

3.9.23. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 5.6*) Ване на Новый Год подарили три набора конфет. В наборах три вида конфет: леденцы, шоколадные и мармеладные. Общее количество леденцов во всех трёх наборах равно общему количеству шоколадных конфет во всех трёх наборах, а также общему количеству мармеладных конфет во всех трёх наборах. В первом наборе шоколадных и мармеладных поровну, а леденцов на 7 больше. Во втором наборе леденцов и шоколадных одинаково, а мармеладных на 15 меньше. Сколько конфет в третьем наборе, если известно, что леденцов там нет?

3.9.24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Даны три числа a , b , c . Известно, что среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического всех трёх чисел. А среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

3.9.25. (*«Бельчонок», 2018, 5.5*) Вася записал на доске три различных натуральных числа. Если бы он увеличил наибольшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 72. А если бы Вася увеличил наименьшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 80. Чему будет равно произведение всех трёх чисел, если мальчик увеличил бы среднее число на 1?

Глава 4

Алгоритмы, процессы, игры

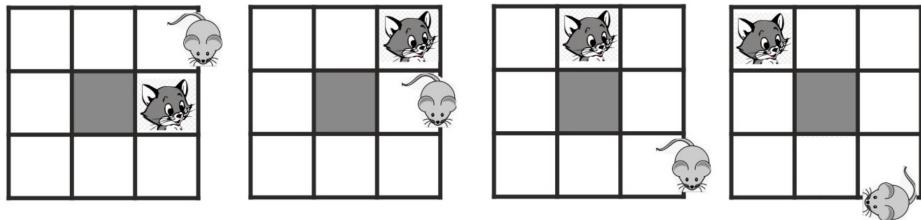
4.1 Алгоритмы и операции

4.1.1. («Бельчонок», 2022, 5.1) По кругу стоят семеро детей: Аня, Боря, Вася, Гена, Даша, Ева, Женя. Начиная с кого-то из детей, каждый третий по часовой стрелке уходит, а отсчет продолжают, пока не останется один человек. Например, если отсчёт начинают с Ани (Аня — первая), то уходит Вася, в следующей тройке Гена — первый, а Ева третья, она уходит, потом уходит Боря, и т. д. С кого надо начинать считать, чтобы осталась Ева?

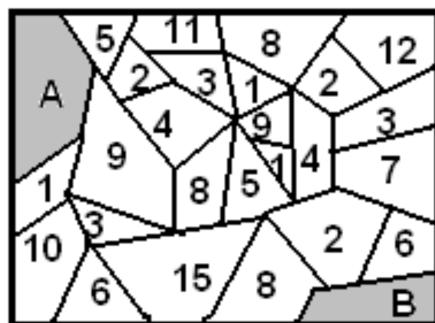
4.1.2. (Всеросс., 2021, ШЭ, 5.1) После футбольного матча тренер построил команду в шеренгу, как показано на рисунке, и скомандовал: «В раздевалку бегут те, у кого номер меньше, чем у любого из соседей». После того, как несколько человек убежали, он повторил свою команду. Тренер продолжал до тех пор, пока не остался один игрок. Какой номер у Игоря, если известно, что после того как он убежал, в шеренге осталось 3 человека? (После каждой команды убегали один или несколько игроков, после чего шеренга смыкалась, и пустых мест между оставшимися игроками не оставалось.)



4.1.3. (*Олимпиада КФУ, 2023, 5.2*) Кот бегает против часовой стрелки по восьми квадратикам, каждую секунду перемещаясь в соседний квадрат. Мышица бегает по часовой стрелке по периметру большого квадрата, перемещаясь каждую секунду на следующий отрезок (см. рис.). На картинке слева направо показаны стартовая позиция, а потом — позиции через 1, 2 и 3 секунды после старта соответственно. Где будут кот и мышь спустя 2023 секунды после старта?



4.1.4. (*«Бельчонок», 2022, 5.2*) Бельчонок идёт из точки *A* в точку *B*. По дороге он проходит через полянки. На рисунке указано, сколько на каждой полянке растёт грибов. Когда бельчонок заходит на полянку, он собирает полностью все грибы, и идёт на какую-нибудь соседнюю полянку, а на пустые полянки никогда не возвращается. Он прошёл из *A* в *B* и собрал ровно 60 грибов. Напишите по порядку, сколько грибов он собрал на каждой полянке.



4.1.5. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 5.2*) За круглый стол рассадили несколько человек так, что между соседними людьми расстояния одинаковые. Одному из них дали табличку с номером 1 и дальше по часовой стрелке раздали всем таблички с номерами 2, 3 и т. д.

Человек с табличкой с номером 31 заметил, что от него до человека с табличкой с номером 7 такое же расстояние, как и до человека с табличкой с номером 14. Сколько всего людей сели за стол?

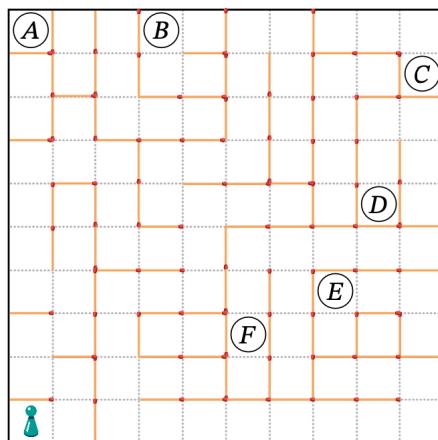
4.1.6. (*Всеросс., 2015, МЭ, 5.3*) В семиэтажном доме живут домовые. Лифт курсирует между первым и последним этажами, останавливаясь на каждом этаже. На каждом этаже, начиная с первого, в лифт заходил один домовой, но никто не выходил. Когда в лифт зашёл тысячный домовой, лифт остановился. На каком этаже это произошло? Ответ объясните.

4.1.7. (*«Ломоносов», 2022, 5–6.3*) На доске записаны все такие натуральные числа от 3 до 223 включительно, которые делятся на 4 с остатком 3. Каждую минуту Боря стирает какие-то два из написанных чисел и вместо них записывает их сумму, уменьшенную на 2. В конце концов на доске остается одно число. Каким оно может быть?

4.1.8. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.1*) На некоторые границы клеток доски 10×10 положили спички, а в одну из клеток — фишку, как показано на рисунке. За один ход фишку можно передвигать в соседнюю по стороне клетку, перепрыгивать через спичку запрещено.

Клетка называется *достижимой*, если в ней можно попасть за несколько ходов из клетки X , убрав с доски не более одной спички.

Среди 6 клеток с кружочками выберите все, являющиеся достижимыми.



4.1.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.2, 7–8.1, 9.3*) На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

4.1.10. (*«Бельчонок», 2022, 5.4*) На каждую из клеток доски 6×6 заползли муравьи и сидят неподвижно. Количества муравьев в клетках, соседних по стороне, отличаются на 1. На одной из клеток сидит 4 муравья, на другой — 14 муравьев. Заполните всю доску числами, показывающими, сколько муравьев в каждой клетке.

4.1.11. (*«Бельчонок», 2022, 5.5*) В ряд выписаны в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Под каждым числом этого ряда записано произведение его цифр. С получившимся рядом проделывают ту же самую процедуру и так далее. Сколько нечётных чисел будет находиться в пятом ряду?

4.1.12. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 5.5*) У продавца есть 3 пачки наклеек по 100 штук в каждой. К нему подошли трое покупателей. Первому покупателю нужно 70 наклеек, а второму и третьему — по 60 наклеек. Как продавцу отсчитать каждому покупателю нужное число наклеек за 70 секунд, если за одну секунду он отсчитывает ровно одну наклейку?

4.1.13. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 5.6*) В очереди в школьную столовую стоят 16 школьников так, что мальчики и девочки среди них чередуются. (Первым стоит мальчик, за ним — девочка, за ней — снова мальчик и так далее.) Любой мальчик, за которым в очереди стоит девочка, может поменяться с ней местами. Через некоторое время оказалось, что все девочки стоят в начале очереди, а все мальчики — в конце. Сколько обменов было совершено?

4.1.14. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.5, 6.3) У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n . Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

4.1.15. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.6, 7–8.6, 9.6) К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т. е. если есть портал, ведущий из A в B , то нет портала, ведущего из B в A . Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

4.1.16. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7) Дан набор из 100 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите массу самой тяжелой гири.

4.2 Взвешивания

4.2.1. (Всеросс., 2019, ШЭ, 5.4) Как известно, чашечные весы приходят в равновесие, когда на обеих чашах одинаковый вес. На одной чаше весов лежат 9 одинаковых алмазов, а на другой — 4 одинаковых изумруда. Если добавить один такой же изумруд к алмазам, то весы будут уравновешены. Сколько алмазов уравновесят один изумруд? Ответ нужно обосновать.

4.2.2. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.5) Мерлин решил взвесить короля Артура на заколдованных весах, которые всегда ошибаются на один и тот же вес в одну и ту же сторону. Когда Мерлин взвесил Артура, они показали вес 19 стоунов. Затем Мерлин взвесил королевского коня и получил вес 101 стоун. Наконец, Мерлин взвесил Артура на коне, и весы показали 114 стоунов. Сколько стоунов весит король Артур на самом деле?

4.2.3. («Надежда энергетики», 2019, 5.5) Как-то раз Баба Яга и Кошечка Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кошечка заподозрила, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

4.2.4. (Всеросс., 2014, МЭ, 5.5) Из пяти монет — две фальшивые. Одна из фальшивых монет легче настоящей, а другая — на столько же тяжелее настоящей. Объясните, как за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты.

4.3 Переливания

4.3.1. (Всеросс., 2014, ШЭ, 5.3) Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (8 л воды должно получиться в одном ведре.)

4.3.2. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 6.3*) Как отмерить 2 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (*Два литра воды должны получиться в одном ведре.*)

4.4 Таблицы

4.4.1. (*«Бельчонок», 2019, 5.3*) В таблице 4×4 можно за один ход поменять в любой строке или в любом столбце 1 на 3, а 3 на 1. Можно ли таким образом из таблицы, приведенной на рисунке, получить за несколько ходов таблицу, заполненную только единицами?

3	1	1	3
1	3	3	1
3	1	1	3
3	1	1	3

4.4.2. (*«Бельчонок», 2018, 5.3*) Во всех клетках квадрата 3×3 записано число 6 (см. рис. 1). За один ход можно в любых двух соседних по стороне клетках изменить числа на другие так, чтобы сумма чисел в этих двух клетках осталась прежней. Покажите, как за 6 ходов получить из квадрата, изображенного на рисунке 1, квадрат, изображенный на рисунке 2.

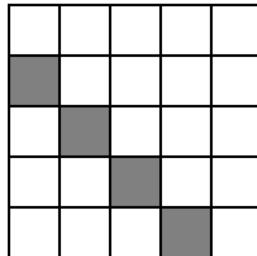
6	6	6
6	6	6
6	6	6

Рис. 1

2	3	4
5	6	7
8	9	10

Рис. 2

4.4.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 5.3*) В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 20?



4.4.4. (*«Бельчонок», 2022, 5.4*) Расставьте в клетках квадрата 6×6 числа 1, 2, 3 так, чтобы все 12 сумм по строкам и столбцам были разными.

4.4.5. (*Олимпиада КФУ, 2022, 5.4*) Паша записал во всех клетках таблицы 4×4 по одному числу так, что произведение чисел во всех строках и столбцах оказалось одинаковым и не равным нулю. Даша оставила восемь из этих чисел (см. рисунок), а остальные стерла. Какое число стояло в клетке, где нарисована звездочка? Обоснуйте свой ответ.

1/2	32		
	4	8	2
4	1		
	*		16

4.4.6. (*«Бельчонок», 2020, 5.5*) В таблице 5×5 расставлены числа (см. рис.). Люда отмечает 5 чисел так, что в каждой строке и в каждом столбце отмечено ровно одно число. Какие значения может принимать сумма отмеченных чисел? Докажите, что других значений быть не может.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

4.4.7. (*«Бельчонок», 2019, 5.3*) В таблице 4×4 можно за один ход поменять в любой строке или в любом столбце 1 на 2, а 2 на 1. Можно ли таким образом из таблицы, приведенной на рисунке, получить за несколько ходов таблицу, заполненную только единицами?

2	2	1	2
2	2	1	2
1	1	2	1
2	2	1	2

4.4.8. (*«Бельчонок», 2018, 5.3*) Во всех клетках квадрата 3×3 записано число 5 (см. рис. 1). За один ход можно в любых двух соседних по стороне клетках изменить числа на другие так, чтобы сумма чисел в этих двух клетках осталась прежней. Покажите, как за 6 ходов получить из квадрата, изображенного на рисунке 1, квадрат, изображенный на рисунке 2.

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Рис. 1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

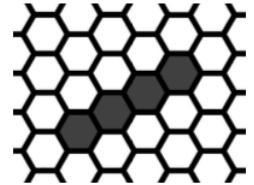
Рис. 2

4.4.9. («Белльчонок», 2020, 5.5) В таблице 4×4 расставлены числа (см. рис.). Вася отмечает 4 числа так, что в каждой строке и в каждом столбце отмечено ровно одно число. Какие значения может принимать сумма отмеченных чисел? Докажите, что других значений быть не может.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

4.5 Игры и стратегии

4.5.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 5.1) Том и Джерри играют на бесконечном во все стороны поле из шестиугольных клеток. Изначально только 4 клетки чёрные, остальные — белые (см. рис.). Игроки по очереди перекрашивают клетки, начиная с Тома: Том своим ходом перекрашивает одну чёрную клетку в белый цвет, а Джерри — одну белую в чёрный. При этом запрещено перекрашивать ту клетку, которую только что покрасил соперник. Если в какой-то момент на поле не окажется двух чёрных клеток, соседних друг с другом, Том выигрывает. Сможет ли Джерри продолжать игру бесконечно и почему?



4.5.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.3) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют трёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 351 — 189 — 936 — 621... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

4.5.3. («Надежда энергетики», 2023, 5.3) Теннисист и бадминтонист устали от спортивных турниров и решили устроить математический поединок. Они выписали в ряд числа от 25 до 57 включительно и условились по очереди ставить между ними знаки «+» или «-» (в произвольном месте и в произвольном порядке, но только эти знаки). Если ответ полученного выражения (когда все знаки между числами будут расставлены) окажется четным, то победит теннисист, а если нечетным — бадминтонист. Есть ли у одного из них (или у обоих) выигрышная стратегия, то есть такая последовательность действий, которая приводит к победе независимо от действий соперника?

4.5.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.3, 6.3) Двое играют в игру. Первый игрок пишет на пустой доске произвольное натуральное число, не кратное 10. Дальше игроки по очереди (начиная со второго) пишут на доске какую-нибудь степень любого из чисел, написанного на доске. (Например, если на доске написаны числа 3 и 81, то можно написать любое из чисел $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ и т. д., а также $81 = 81^1$, $6561 = 81^2$ и т. д.) Выигрывает тот из игроков, после хода которого сумма каких-нибудь чисел, написанных на доске, делится на 10. У кого из игроков есть способ выиграть при любой игре соперника? Как он должен действовать?

Глава 5

Комбинаторика

5.1 Перебор вариантов

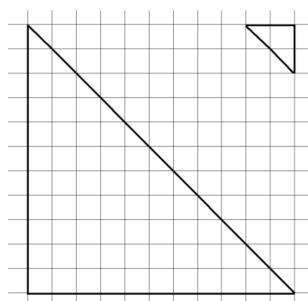
5.1.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.5*) У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькоими способами Денис сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 16 рублей? Не обязательно использовать монеты каждого вида.

5.1.2. (*«Бельчонок», 2020, 5.5*) В некоторых клетках таблицы 4×4 поставили по звёздочке так, что во всех строках разное число звёздочек, и во всех столбцах разное число звёздочек (от 0 до 4). Сколько звёздочек могло быть поставлено? Докажите, что других значений быть не может.

5.1.3. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.3*) На уроке труда школьника попросили склеить подставку под горячее: это квадрат, составленный из 9 маленьких квадратиков разной окраски. На нижнюю сторону подставки клеится пробковый слой, чтобы не поцарапать столешницу. Соединить квадратики нужно так, чтобы квадратики одинакового цвета не имели общей стороны. Сколько разных вариантов подставок можно получить, имея 4 зелёных, 3 красных и 2 жёлтых квадратика? Подставки считаются разными, если их нельзя повернуть на столе так, чтобы расположение цветов совпало.

5.1.4. (*«Физтех», 2016, 5–7*) Сколько целых чисел от 378 до 2433 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

5.1.5. (*«Бельчонок», 2022, 5.4*) На клетчатой бумаге нарисованы большой и маленький треугольники (все клетки квадратные одинакового размера). Сколько маленьких треугольников можно вырезать из большого треугольника? Треугольники нельзя поворачивать и переворачивать (у большого треугольника прямой угол слева внизу, у маленького треугольника прямой угол справа вверху).



5.1.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.6) Сколько чисел от 1 до 999 без цифр «0» записываются в римской системе счисления ровно на один символ длиннее, чем в десятичной?

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Справка. Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей $800 = \text{DCCC}$, $90 = \text{XC}$, $9 = \text{IX}$, получаем DCCCXCIX .

5.2 Круги Эйлера

5.2.1. («Бельчонок», 2022, 5.1) В классе 28 учеников. У 17 есть дома кошка, у 10 есть собака. У 5 учеников нет ни кошки, ни собаки. У скольких учеников есть и кошка, и собака?

5.2.2. («Бельчонок», 2021, 5.2) На доске записаны все числа от 1 до 300 включительно. Вера раскрашивает в оранжевый цвет только те числа, у которых общий делитель с числом 99 больше 1. Сколько всего чисел станут оранжевыми?

5.2.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

5.3 Правило произведения

5.3.1. (Всеросс., 2016, ШЭ, 5.2) Произведение $100 \cdot 100$ представили в виде суммы десяток:

$$100 \cdot 100 = 10 + 10 + \dots + 10.$$

Сколько получилось слагаемых? Обязательно объясните свой ответ.

5.3.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.1) В некотором языке есть 3 гласных и 5 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

5.3.3. («Надежда энергетики», 2023, 5.2) Золушка вместе со своей крестной выпустила коллекцию хрустальных туфелек из 7 новых моделей. Они устроили презентацию этой коллекции, на которой каждый гость должен был написать в анкете, какие туфли ему понравились (можно было указывать несколько моделей). Известно, что никакие два гостя не указали одинаковые наборы понравившихся туфелек. Какое наибольшее количество гостей могло присутствовать на презентации?

5.3.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.3, 7.1) Сколько есть способов разрезать квадрат 10×10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

5.3.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.4) Женя играет в игру «Сапёр», в которой необходимо установить, в каких клетках квадратной таблицы расположены мины. Для этого в каждой клетке, где нет мин, написано, в скольких соседних с ней (по стороне или углу) клетках мины есть. На первом уровне игра проходит на поле 5×5 , причём игроку на долю секунды показывается решение. Женя успела заметить, что ровно в трёх клетках стоит число 8, но не запомнила, где именно. Сколько расстановок мин удовлетворяют этому условию?

5.3.6. («Бельчонок», 2023, 5.4) Большой отрезок длины 30 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длины которых равны нечётному числу? *Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.*

5.3.7. («Ломоносов», 2020, 5–6.2, 7–8.2, 9.2) Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р О Т О Р
О Т О Р
Т О Р
О Р
Р

5.3.8. («Надежда энергетики», 2020, 5.4) В современных условиях считается актуальной **цифровизация** — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое **кодом буквы**. Тогда можно определить **вес слова** как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы О, П, С, Т, Ъ, Я элементарными кодами, состоящими каждого из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ПЯТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

5.3.9. («Ломоносов», 2016, 5–6.4, 7–8.4) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

5.3.10. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Будем обозначать \overline{abc} трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c . Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

5.3.11. («Ломоносов», 2021, 5–6.5) Марсианский светофор состоит из шести одинаковых лампочек, расположенных в двух горизонтальных рядах (один под другим) по три лампочки в каждом. Водитель марсохода в тумане может различить количество и взаимное расположение горящих лампочек светофора (например, если горят две лампочки, — находятся ли они в од-

ном горизонтальном ряду или в разных, находятся ли они в одном вертикальном ряду, или в соседних вертикальных рядах, или в двух крайних вертикальных рядах). Однако он не может различить негорящие лампочки и корпус светофора. Поэтому, если, например, горит всего одна лампочка, невозможно определить, какая именно из шести). Сколько сигналов марсианского светофора может отличить друг от друга в тумане водитель марсохода? Если ни одна лампочка светофора не горит, водитель его не видит.

5.4 Количество делителей числа

5.4.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

5.4.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

5.5 Сочетания

5.5.1. («Ломоносов», 2022, 5–6.4) У Маши есть семь разных кукол, которых она рассаживает по шести разным кукольным домикам так, чтобы в каждом домике оказалась хотя бы одна кукла. Сколькими способами Маша может это сделать? Важно, какая кукла в каком домике окажется. Как именно сидят куклы в том домике, где их две, неважно.

5.5.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6) Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

5.6 Подсчёт двумя способами

5.6.1. («Надежда энергетики», 2019, 5.4, 6.4, 7.4) В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

5.7 Принцип Дирихле

5.7.1. («Надежда энергетики», 2019, 5.3) Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.

5.7.2. («Надежда энергетики», 2023, 5.4) Четырнадцать лисиц встретили девяносто двух Колобков, но пожалели и не стали их есть. Докажите, что какие-то две из всех лис встретили одинаковое количество Колобков. (Будем также считать, что лиса могла и не встретить ни одного Колобка.)

5.7.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4) В правильном 2017-угольнике прошли все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

5.7.4. («Ломоносов», 2017, 5–6.5) На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одному количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

5.8 Взаимно-однозначное соответствие

5.8.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.6, 6.5) Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?

5.8.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.5, 6.5) На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а T — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — N или M ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

Глава 6

Рассуждения и методы

6.1 Логика

6.1.1. («Бельчонок», 2019, 5.1) Бельчонок собирался в поход. Он сложил всё нужное в три рюкзака разного цвета, и поставил их у стены. В одном рюкзаке была одежда, в другом — еда, в третьем — снаряжение. Он помнит, что синий рюкзак правее, чем еда; одежда правее, чем синий рюкзак; зелёный рюкзак стоит левее красного. В рюкзаке какого цвета лежит одежда?

6.1.2. («Бельчонок», 2019, 5.1) Три внучки, Оля, Катя и Маша, все разного возраста, пришли к бабушке. Одна внучка принесла торт, другая — цветы, третья — конфеты. Оля старше, чем девочка, которая принесла цветы, а девочка, которая принесла торт, старше Оли. Маша младше Кати. Кто принес торт?

6.1.3. («Надежда энергетики», 2020, 5.1) Охотник Пулька для своей собаки Бульки получил с «АлиЭкспресс» два куля корма. Наутро один куль оказался пуст. Незнайка взялся за расследование и выявил троих подозреваемых, которые заявили следующее.

- Сиропчик сказал, что он не ел собачий корм.
- Торопыжка заявил, что корм съел либо Пончик, либо Сиропчик.
- Пончик же подтвердил, что Сиропчик корм не ел.

Как выяснилось позже, невиновные сказали правду, а виновный солгал. Определите, кто же съел за ночь весь куль собачьего корма.

6.1.4. («Ломоносов», 2021, 5–6.1) Всякий раз, когда мой брат говорит правду, наша бабушка чихает. Однажды брат сказал, что он получил по математике «5», но бабушка не чихнула. Тогда он, слегка засомневавшись в своих первых словах, сказал, что получил «4», и бабушка чихнула. Приободрившись от бабушкиного чихания, он подтвердил, что уж точно получил не менее 3, но бабушка больше не чихала. Так какую же всё-таки оценку получил брат по математике?

6.1.5. (Всеросс., 2021, ШЭ, 5.2) На урок физкультуры Алина, Богдан, Вика и Гриша пришли в шортах и футболках, причём каждый из этих предметов одежды был синего или красного цвета. У Алины и Богдана футболки были красные, а шорты — разного цвета. У Вики и Гриши футболки были разного цвета, а шорты — синие. Также известно, что у девочек футболки разные по цвету, да и шорты тоже. Кто из детей в какой одежде?

6.1.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.2) На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.

В первый день Красный, Зелёный, Чёрный и Фиолетовый выбрали Жёлтого, Синий и Голубой — Зелёного, Жёлтый — Красного, Розовый — Фиолетового. По итогам голосования Жёлтого космонавта выгнали с корабля.

Во второй день Красный и Чёрный выбрали Голубого, Синий, Зелёный, Розовый и Фиолетовый — Чёрного, Голубой — Фиолетового. В результате Чёрный космонавт был выгнан. В третий день Красный, Голубой и Зелёный выбрали Фиолетового, Синий — Красного, Розовый и Фиолетовый — Синего.

Вычислите предателей, если голосуют они одинаково. Объясните, почему предатели — именно они, а не кто-нибудь другой.

6.1.7. («Бельчонок», 2020, 5.3) У каждой из трёх фигуристок (Стаси, Лены, Маши) есть отдельная часовая тренировка в зале, на льду, на беговой дорожке. Все тренировки начинаются в 10, 11, 12 часов. Одновременно одной и той же тренировки у двух фигуристок быть не может. Лена с 10 часов занимается в зале. Тренер по бегу сказал Лене, что Стася сегодня уже занималась. На льду Стася была не с 11 часов. Составьте все возможные расписания тренировок.

6.1.8. («Ломоносов», 2021, 5–6.3) В одной школе учатся четверо приятелей — все в разных классах: самый младший — в первом классе, а самый старший — в четвёртом. Определите имя, фамилию и класс каждого из них, если известно, что:

1. Боря — не первоклассник;
2. когда Вася идёт в бассейн на соседнюю с его улицей улицу Южную, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной;
3. Миша на год старше Димы;
4. Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной;
5. Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи еще первоклассником;
6. Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году.

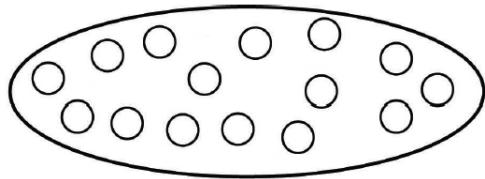
6.1.9. (Олимпиада КФУ, 2022, 5.3) У Андрея, Лейсан и Тимура есть 12 больших чупа-чупсов разных цветов: несколько желтых, несколько зеленых и несколько красных. Они разложили чупа-чупсы по четыре штуки в три одинаковых пакета. Андрей сказал: «Смотрите, ни в одном пакете нет трех одинаковых чупа-чупсов!» Лейсан сказала: «Верно. Но и трех разных чупа-чупсов тоже нет ни в одном пакете!» Тимур сказал: «И все пакеты получились разными!». Все трое были правы. Обязательно ли в каком-то пакете лежит два желтых и два красных чупа-чупса? Обоснуйте свой ответ.

6.1.10. («Бельчонок», 2022, 5.3) Вася, Дима, Коля и Сергей, которые учатся в 5, 6, 7 и 8 классах, решили организовать рок-группу. Среди них есть саксофонист, клавишник, барабанщик и гитарист. Вася играет на саксофоне и учится не в 8 классе. Клавишник учится в 6 классе. Барабанщика зовут не Дима, Сергей — не клавишник и не ученик 5 класса. Дима учится не в 6 классе, а барабанщик — не в 8 классе. В каком классе учится Дима и на каком инструменте он играет?

6.1.11. («Бельчонок», 2020, 5.3) У Ани, Оли, Светы и Маши разные увлечения. В свободное время одна из них рисует, другая вышивает, третья вязёт, а четвёртая лепит из глины. Девочка, которая рисует, живёт в одном доме с Аней и Светой. Аня и Маша показывают друг другу свои работы, а девочка, которая лепит, никому не показывает. Девочка, которая вязёт, живёт не в том районе, что Света и Маша. Кто чем увлекается?

6.1.12. («Бельчонок», 2020, 5.3) Жили в лесу четверо бельчат — Таш, Ив, Дюд и Сур. Один из них был чёрный, другой коричневый, третий рыжий, четвёртый серый. Чёрный бельчонок любит играть с Ивом и Ташем. У серого бельчонка хвост пышнее, чем у Ива и Дюда. У рыжего хвост пышнее, чем у Ива. Сур не играет ни с Ивом, ни с рыжим бельчонком. Определите, какого цвета каждый бельчонок.

6.1.13. (Всеросс., 2017, ШЭ, 5.4) В мешке лежат 15 шариков (см. рисунок).

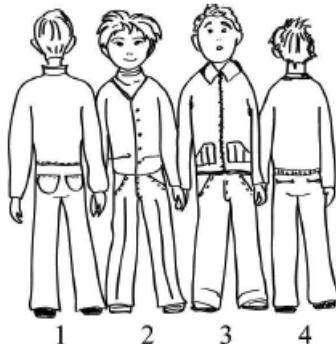


Раскрасьте каждый шарик в один из трёх цветов: синий, зелёный или красный — так, чтобы два утверждения были верны, а одно неверно:

- синих шариков на один больше, чем красных;
- красных и зелёных шариков поровну;
- синих шариков на 5 больше, чем зелёных.

Напишите подробно, как вы рассуждали.

6.1.14. (Всеросс., 2016, ШЭ, 5.4) На картинке мы видим четырёх детей: Колю, Васю, Сеню и Яна. Известно, что мы видим Сеню правее Коли, а Коля дал Васе левую руку. Найдите, как кого зовут, и объясните, почему Вы так считаете.



6.1.15. («Бельчонок», 2021, 5.4) Карина, Люда, Марина и Света — ученицы 3, 4, 5, 6 классов. На вопрос, кто кого старше, девочки сказали:

Карина: «Света младше Марины».

Люда: «Карина младше Светы».

Марина: «Света старше Люды».

Света: «Карина старше Марины».

Известно, что если какая-то девочка высказалась про девочку старше её самой, то она соврала. Все остальные утверждения были верными. Определите, кто из девочек в каком классе учится.

6.1.16. («Бельчонок», 2022, 5.4) Один из четверых бельчат разбил банку с мёдом. Серый заявил, что банку разбил Черныш. Но Черныш утверждал, что виноват Огнехвост. Рыжик сказал, что он не разбивал банку, а Огнехвост — что Черныш врёт. Только один из бельчат сказал правду. Кто сказал правду и кто разбил банку?

6.1.17. («Бельчонок», 2018, 5.4) Возле скорлупы грецкого ореха были задержаны четыре бельчонка — Боря, Вася, Гриша и Дима. Боря заявил, что орех съел Вася, который, в свою очередь, утверждал, что виноват Гриша. Гриша уверял, что Вася лжет, а Дима твердил, что это сделал не он. Выяснилось, что только один из них сказал правду. Кто сказал правду, и кто съел орех?

6.1.18. («Надежда энергетики», 2022, 5.4) Четыре студентки, живущие на разных этажах общежития (с 11-го по 15-й, каждая на своем), решили разыграть своих друзей и написали три фразы, в каждой из которых одна половина истинная, а другая — ложная: «На 11-м этаже живет Кира, а на 12-м Лера»; «На 12-м этаже живет Кира, а на 14-м Мила»; «На 12-м этаже живет Ника, а на 15-м Мила». Помогите их товарищам определить, кто на каком этаже живет, если в общежитии нет 13-го этажа.

6.1.19. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.6) У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 7 конфет. Папа может задать любой из них вопрос, на который она ответит «да» или «нет». Он хочет, задав не более 4 вопросов, выяснить, верно ли, что вместе у них больше 7 конфет. Придумайте, как ему это сделать.

Примечание. Каждый вопрос задаётся только одной из сестёр. Ни одна из сестёр не знает, сколько конфет в кармане у другой, поэтому каждую сестру можно спрашивать только об её конфетах.

6.1.20. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.6) Аня, Галя, Даша, Соня и Лена приехали в лагерь «Формула Единства» из разных городов: Курска, Вологды, Новороссийска, Петрозаводска и Чебоксар. Знакомясь с другими членами отряда, они рассказали о себе следующее. Соня и Даша никогда не были в Курске. Галя и Соня были вместе в прошлом лагере с девочкой из Новороссийска. Аня и Соня подарили девочке из Чебоксар по сувенирчику. Галя и Соня помогли девочке из Вологды занести вещи в комнату. Галя и Лена общаются по скайпу с девочкой из Чебоксар, а девочка из Новороссийска переписывается в контакте с Аней. Кто где живёт?

6.1.21. («Надежда энергетики», 2023, 5.5) В реке Умновке живут Примурские пескари с серыми глазами, и у них существует закон: как только у одного меняется цвет глаз с серого на зеленый, он должен уплыть в реку Мозговку в ту же ночь, как он узнает об этом превращении. Зеркал под водой нет, а пескари всё понимают, но говорить и жестикулировать не умеют. Умеет говорить только старый карп, который иногда заплывает к ним. Но он говорит им лишь две фразы: «У всех глаза серые» — и тогда жизнь пескарей идет своим чередом, и «Хотя бы у одного из вас глаза зеленые» — и тогда все зеленоглазые рыбы должны уплыть. Как пескари понимают, что им надо уплывать в случае, если зеленоглазый пескарь один? Если их двое? Если их трое и больше?

6.1.22. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.6) У Петра есть 5 клеток с кроликами (клетки стоят в один ряд). Известно, что в каждой клетке сидит хотя бы один кролик. Будем называть двух кроликов соседями, если они сидят либо в одной клетке, либо в соседних. Оказалось, что у каждого кролика есть либо 3, либо 7 соседей. Сколько кроликов сидит в центральной клетке?

6.1.23. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 5.7*) После чемпионата мира по хоккею три журналиста написали статью о сборной Германии — каждый для своей газеты.

- Первый написал: «Сборная Германии за весь чемпионат забила больше 10, но меньше 17 шайб».
- Второй: «Сборная Германии забила больше 11, но меньше 18 шайб за весь чемпионат».
- Третий: «Сборная Германии забила нечётное количество шайб за весь чемпионат».

В итоге оказалось, что правы были только два журналиста. Сколько шайб могла забить сборная Германии на чемпионате? Укажите все возможные варианты.

6.1.24. (*Всеросс., 2015, МЭ, 5.5*) После хоккейного матча Антон сказал, что он забил 3 шайбы, а Илья только одну. Илья сказал, что он забил 4 шайбы, а Серёжа целых 5. Серёжа сказал, что он забил 6 шайб, а Антон всего лишь две. Могло ли оказаться так, что втроём они забили 10 шайб, если известно, что каждый из них один раз сказал правду, а другой раз солгал? *Ответ объясните.*

6.1.25. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.8*) В многодетной семье Ивановых нет близнецов. Репортёр приехал к Ивановым, чтобы взять у них интервью.

Во время интервью каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Немного подумав, репортёр очень удивился. Но отец семейства объяснил, что некоторые дети пошутили, и лишь шестеро сказали правду. Сколько детей может быть в этой семье, если известно, что мальчиков у Ивановых на 4 больше, чем девочек? Укажите все возможные варианты.

6.2 Рыцари и лжецы

6.2.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.1*) Однажды на острове Рыцарей и Лжецов встретились 5 жителей.

Первый сказал: «Число рыцарей среди нас — простое».

Второй сказал: «Число лжецов среди нас — простое».

Третий сказал: «Число рыцарей среди нас — четное».

Четвертый сказал: «Число лжецов среди нас — составное».

Пятый сказал: «Вы все лжецы».

Сколько рыцарей было на самом деле? *Напоминаем, что 1 не является ни простым, ни составным числом.*

6.2.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.1*) На острове Рыцарей и Лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Недавно на острове появилось новое племя — Двурушники. Они говорят правду или ложь через раз, т. е. если двурушник сказал правду, то в следующий раз обязательно скажет ложь — и наоборот. Однажды путешественник спросил троих жителей А, В и С — кто они.

А сказал: «В — двурушник».

В ответил — «Это неправда».

С сказал — «В сейчас солгал».

А сказал — «С сейчас солгал».

Определите, кем является А.

6.2.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.1, 7–8.1) На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

1. «Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я»,
2. «Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня».

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

6.2.4. (Всеросс., 2023, ШЭ, 5.2) На уроке физкультуры в шеренгу встали 25 учеников 5 «Б» класса. Каждый из ребят либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда врёт.

Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, заявили: «Между мной и Владом ровно 6 хулиганов». Сколько всего хулиганов в шеренге?

6.2.5. («Бельчонок», 2022, 5.2) В кедре два дупла. Бельчонок, сидящий перед вторым дуплом, сказал:

1. в другом дупле нет орехов,
2. хотя бы в одном дупле есть орехи.

Рыжие бельчата всегда говорят правду, а серые всегда врут. Какого цвета этот бельчонок?

6.2.6. (Олимпиада КФУ, 2023, 5.4) В ряд стоят шесть человек, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Первый говорит: «Справа от меня ровно пять лжецов», второй: «Слева от меня ровно один лжец», третий: «Справа от меня ровно три лжеца», четвертый: «Слева от меня ровно три лжеца», пятый: «Справа от меня ровно один лжец», шестой: «Слева от меня ровно один лжец». Кто из них кто? Номера людей считаются слева направо.

6.2.7. («Бельчонок», 2018, 5.4) В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды на поляне собрались трое бельчат. «Сегодня олимпиада по математике. Завтра — по информатике», — произнес Боря. «Сегодня олимпиада по информатике. Вчера была олимпиада по физике», — сказал Вася. «Вчера была олимпиада по физике» — вступил в спор Гена, — «А сегодня олимпиада по математике!». Определите, сколько среди этих бельчат рыцарей.

6.2.8. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 5.5*) Шесть гномов сидят за круглым столом. Известно, что ровно два гнома всегда говорят правду, и они сидят рядом. Кроме этого, ровно два гнома всегда врут, и они тоже сидят рядом. Оставшиеся два гнома могут как врать, так и говорить правду, и они не сидят рядом. Искатель сокровищ ходит вокруг стола и спрашивает гномов, где они спрятали золото.

- Первый гном сказал, что в пещере.
- Второй сказал — на дне озера.
- Третий сказал — в замке.
- Четвёртый сказал — в сказочном лесу.
- Пятый сказал — на дне озера.

Где гномы спрятали золото? Ответ нужно обосновать.

6.2.9. (*«Бельчонок», 2023, 5.5*) В некотором уезде живут купцы, разбойники и торговцы. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торговцы чередуют правдивые и ложные высказывания, начать могут с любого. Однажды за круглым столом собралась компания из 12 жителей. Каждый произнёс три фразы: «Мой сосед слева — разбойник. Следующий за ним — торговец. Следующий за ним — купец». Сколько торговцев могло сидеть за столом?
Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

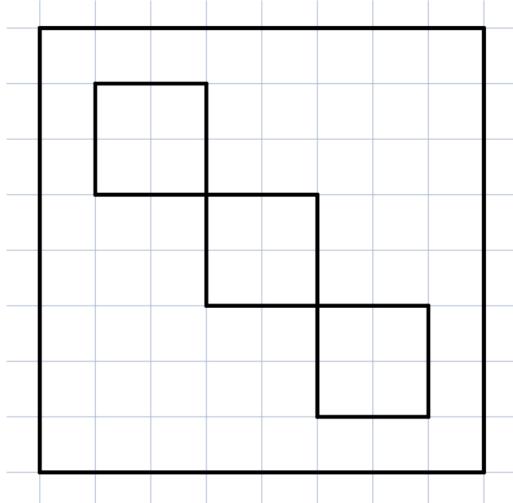
6.2.10. (*«Бельчонок», 2021, 5.5*) В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 20 бельчат, среди которых 10 рыцарей и 10 лжецов, встали в ряд на поляне. Всем бельчатам задали два вопроса: «Сколько лжецов слева от тебя?» и «Сколько лжецов справа от тебя?». Каждый бельчонок назвал два числа. Какое наибольшее число раз среди 40 ответов могло встретиться одно и то же число, и что это за число?

6.2.11. (*«Бельчонок», 2021, 5.5*) В лесу живут бельчата-правдивцы и бельчата-лжецы, правдивцы всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды на поляне собрались 2043 бельчат и встали в круг. Каждого из них попросили назвать своего правого соседа, и каждый ответил либо «правдивец», либо «лжец». Могло ли оказаться, что ответов «правдивец» было ровно 2022?

6.3 Оценка плюс пример

6.3.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.2, 6.1, 7.1*) Если из прямоугольника на клетчатой бумаге вырезали (тоже по клеткам) прямоугольник, один (и только один) из углов которого совпадает с каким-то из углов исходного, то фигуру, оставшуюся после такого вырезания, будем называть Г-образной. Квадрат какого наименьшего размера можно разрезать на Г-образные фигуры?

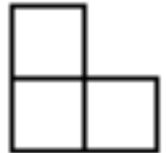
6.3.2. («Ломоносов», 2022, 5–6.2) Петя вырезал из клетчатого квадрата 8×8 три квадрата 2×2 , как показано на рисунке. Оля хочет вырезать (по линиям сетки) из оставшейся части квадрата как можно больше прямоугольников 1×3 . Какое наибольшее число таких прямоугольников она сможет вырезать?



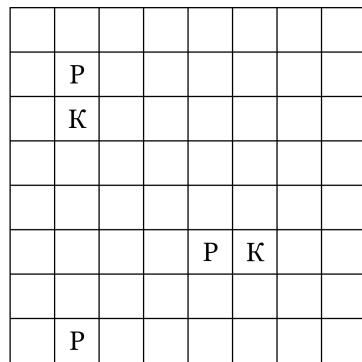
6.3.3. (Всеросс., 2014, ШЭ, 5.4) Белоснежка вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 30 стульев. На некоторых из стульев сидели гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов могло быть за столом? (*Объясните, как должны были сидеть гномы и почему, если бы гномов было меньше, Белоснежка нашла бы стул, рядом с которым никто не сидит*).

6.3.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.4, 6.4, 11.1) Прямоугольник 11×12 разрезан на несколько полосок 1×6 и 1×7 . Каково минимальное суммарное количество полосок?

6.3.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.4, 6.2) У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата 4×4 , из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить? (Уголок — фигура, показанная на рисунке, возможно, повёрнутая.)



6.3.6. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 5.7*) Мышонок Джерри решил подарить коту Тому на День Рождения пирог в виде квадрата 8×8 . В три куска, отмеченные буквой «Р», он положил рыбку, в два куска, отмеченные буквой «К», положил колбасу, а ещё в один кусок добавил и то, и другое, но такой кусок не отметил (все остальные куски — без начинки). Также Джерри сообщил Тому, что в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой, а в любом квадрате 3×3 — не более одного куска с колбасой.

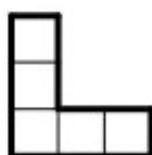


Какое наименьшее количество кусков пирога надо съесть Тому, чтобы среди них гарантированно оказался кусок с рыбой и колбасой?

6.3.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.4*) На поляне на расстоянии 20 метров одна от другой растут две ели высотой по 30 метров. Ветки елей растут очень густо, и среди них есть направленные точно навстречу друг другу, а длина каждой ветки вдвое меньше расстояния от неё до вершины. Паук может ползти по стволу (вверх или вниз строго по вертикали), по веткам (строго по горизонтали), либо спускаться вертикально вниз по паутине с одной ветки на другую. Какое наименьшее расстояние ему придётся проползти, чтобы добраться с вершины одной ели на вершину другой?

6.3.8. (*Олимпиада КФУ, 2023, 5.5*) В 5А классе провели опрос, кто какие фрукты любит. Оказалось, что 13 школьников любят яблоки, 11 — любят сливы, 15 — любят персики и 6 — любят дыню. Школьник может любить больше одного фрукта. Каждый школьник, любящий сливы, также любит либо яблоки, либо персики (но не то и другое сразу). А каждый школьник, который любит персики, также любит либо сливы, либо дыни (но не то и другое сразу). Какое минимальное количество людей может быть в 5А?

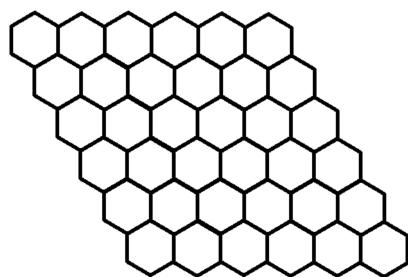
6.3.9. (*Олимпиада КФУ, 2022, 5.5*) Айгуль хочет вырезать из прямоугольника 5×10 как можно больше фигурок из 5 клеток вида



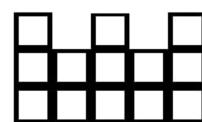
Помогите ей это сделать и объясните, почему больше фигурок вырезать не удастся. Фигурки могут быть повёрнуты как угодно. Все вырезания должны идти по клеточкам.

6.3.10. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.5) В нескольких пакетах лежат 20 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Но запрещено делать так, чтобы в каком-то пакете лежал пакет с пакетом внутри. Каково максимально возможное количество пакетов?

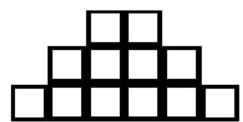
6.3.11. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.6, 6.6) Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.)



6.3.12. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.5, 7–8.5, 9.4) Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



Вид спереди



Вид сбоку

6.3.13. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.5, 7–8.5, 9.4) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если A знает B , то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

6.3.14. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.7, 7–8.6, 9.5) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

6.3.15. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.6, 7–8.4, 9.2) В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?



6.4 Принцип крайнего

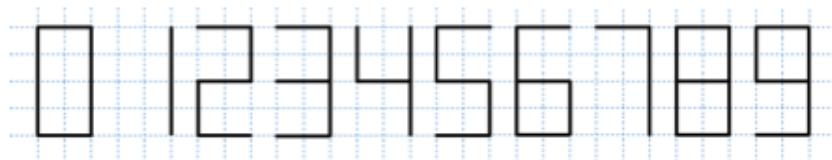
6.4.1. (Всеросс., 2023, ШЭ, 5.7) В классе 31 ученик. У трёх из них ровно по три друга, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать. Сколько друзей у 31-го ученика? (Дружба между людьми взаимна.)

Глава 7

Наглядная геометрия

7.1 Наглядная геометрия на плоскости

7.1.1. («Ломоносов», 2019, 5–6.1) Для представления записей чисел используют однотипные металлические формы цифр:

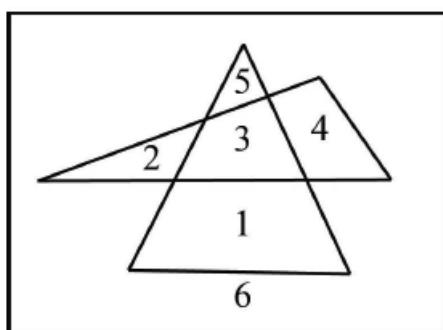


Сколько «весит» число 2019, если число 1 «весит» 1 кг?

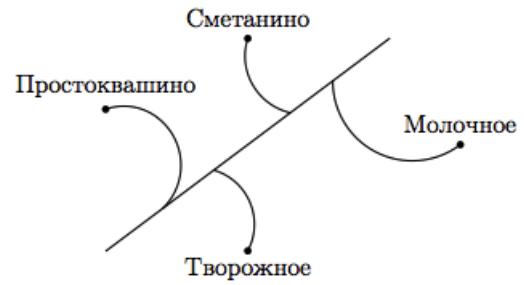
7.1.2. (Всеросс., 2019, ШЭ, 5.2) Два маляра красят 15-метровый коридор. Каждый из них движется от начала коридора в его конец и в какой-то момент начинает красить, пока не кончится краска. У первого маляра есть красная краска, и её хватит на покраску 9 метров коридора; у второго — жёлтая краска, и её хватит на 10 метров.

Первый маляр начинает красить, когда оказывается в двух метрах от начала коридора; а второй заканчивает красить, когда находится в метре от конца коридора. Сколько метров коридора покрашено ровно в один слой?

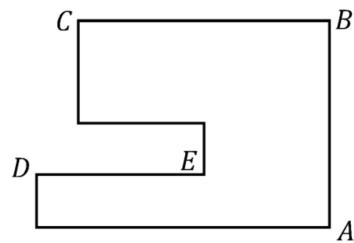
7.1.3. (Всеросс., 2017, ШЭ, 5.3) На рисунке два треугольника разделяют листок бумаги на 6 частей (шестая часть — это то, что останется на листе, если вырезать оба треугольника). Нарисуйте два четырёхугольника, которые разделяют лист бумаги на 9 частей. Пронумеруйте полученные части.



7.1.4. (Всеросс., 2014, МЭ, 5.4) Почтальон Печкин на велосипеде развозит почту по четырём деревням: Простоквашину, Сметанино, Творожное и Молочное (см. рисунок). Он знает, что длина пути от Простоквашину до Творожного 9 км, от Простоквашину до Сметанино — 13 км, от Творожного до Сметанино — 8 км и от Творожного до Молочного — 14 км. Найдите длину пути от Простоквашину до Молочного.



7.1.5. («Бельчонок», 2020, 5.4) Найдите длину замкнутой ломаной (см. рис.), если $AB = 17$, $BC = 15$, $DE = 7$.



7.1.6. («Ломоносов», 2018, 5–6.2, 7–8.2) Первоклассник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось таким же образом выложить контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на две фишечки меньше, чем сторона треугольника?

7.1.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3) В треугольнике одна из сторон равна 12,67 см, другая 0,55 см. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она составляет целое число сантиметров.

7.1.8. («Надежда энергетики», 2020, 5.3) Квадратный лист бумаги сложили пополам, затем еще раз пополам и в третий раз пополам. В результате получился треугольник (см. рис. 1, на котором все линии сгибов проходят по пунктирным линиям). После этого сделали разрез по линии PQ и развернули лист. Будет ли отличаться форма получившейся фигуры от того, как был произведен первый сгиб: по линии MN или по линии AB ? Обоснуйте свой ответ и нарисуйте получившуюся фигуру (одну или две).

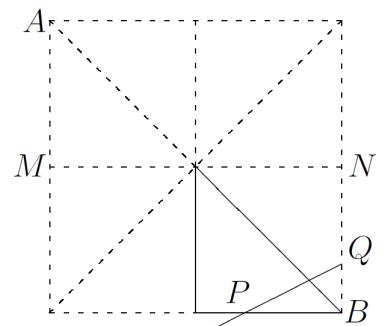
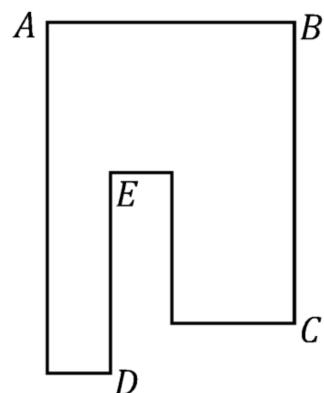


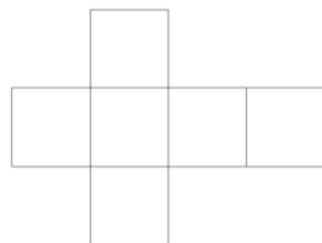
Рис. 1

7.1.9. Найдите длину замкнутой ломаной (см. рис.), если $AB = 16$, $BC = 13$, $DE = 8$.

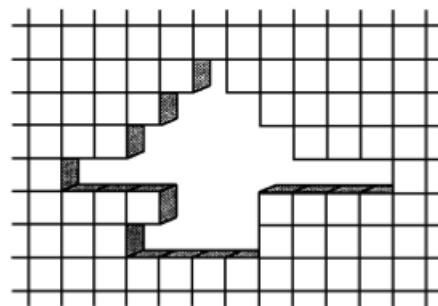


7.2 Наглядная геометрия в пространстве

7.2.1. («Белльчонок», 2022, 5.1) На рисунке изображена развертка куба, состоящая из 6 квадратиков. Расставьте в квадратиках числа 4, 8, 12, 16, 20, 24, чтобы после того, как из развертки сложили куб, сумма чисел на противоположных гранях была бы одинаковой.



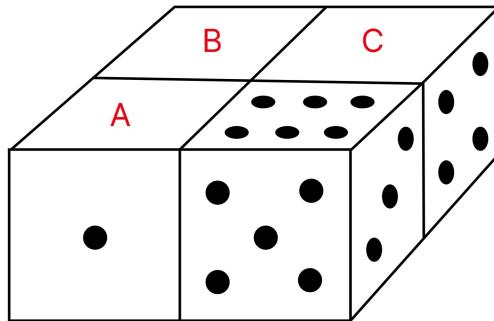
7.2.2. (Всеросс., 2015, ШЭ, 5.2) Сколько кирпичей не хватает в стене, изображённой на рисунке?



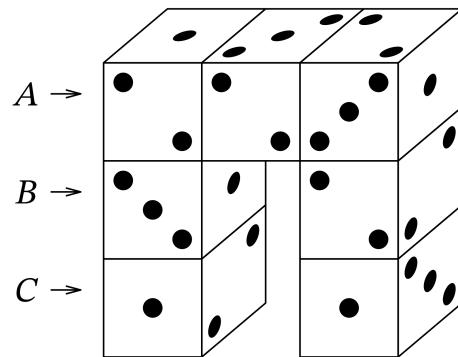
7.2.3. («Надежда энергетики», 2021, 5.2) На покраску кубика размером $2 \times 2 \times 2$ (см) потребовалось 2 грамма краски. Сколько краски потребуется на покраску кубика размером $6 \times 6 \times 6$ (см)?

7.2.4. (Всеросс., 2023, ШЭ, 5.6) Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Известно, что на любых двух противоположных гранях кубика суммарно 7 точек.

Из этих 4 кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке. Известно, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. Сколько точек на гранях A , B , C ?



7.2.5. (Всеросс., 2021, ШЭ, 5.8) Есть 7 абсолютно одинаковых кубиков, у которых отмечены на одной грани 3 точки, на двух гранях по 2 точки, на остальных по 1. Из этих кубиков склеили фигуру в виде буквы «П», изображённую на рисунке, причём количество точек на любых двух соприкасающихся гранях одинаково.



Что находится на трёх левых гранях A , B и C ?

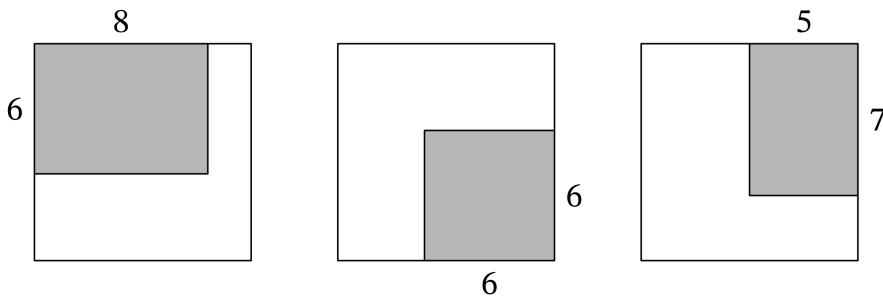
7.3 Прямоугольники и квадраты

7.3.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 5.2) Есть 49 одинаковых квадратиков. Составьте из них два прямоугольника так, чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков оставаться не должно.

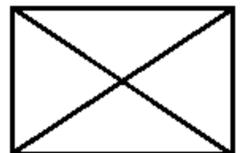
7.3.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.2) Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 19%. Через какое время пруд полностью замёрзнет?

7.3.3. (Всеросс., 2022, ШЭ, 5.4) Директор школы, завхоз и родительский комитет, не договорившись друг с другом, купили по ковру для школьного актового зала размером 10×10 . Подумав, что же делать, они решили положить все три ковра так, как показано на картинке: первый ковёр 6×8 — в один угол, второй ковёр 6×6 — в противоположный угол и третий ковёр 5×7 — в один из оставшихся углов (все размеры указаны в метрах).

Найдите площадь части зала, накрытой коврами в три слоя (ответ дайте в квадратных метрах).



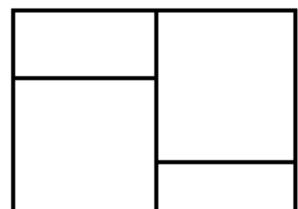
7.3.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.3) В клетчатом прямоугольнике длиной 303 клетки и шириной 202 клетки провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено?



7.3.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.3, 6.2) Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиною в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, койей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.

7.3.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.4, 9.1) Квадрат со стороной 12 см разрезали на три прямоугольника одинакового периметра. Чему же равен этот периметр?

7.3.7. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.5) В стекольной мастерской сделали необычное окно. Оно имеет форму прямоугольника, разделённого по вертикали на две равных части. В каждой половинке есть форточка: в левой — сверху, площадью в шестую часть от всего окна и периметром 92 сантиметра; в правой — снизу, площадью в восьмую часть всего окна и периметром 84 сантиметра. Чему равны периметры всего окна и остальных кусков стекла?



7.3.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.5) В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что площадь первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

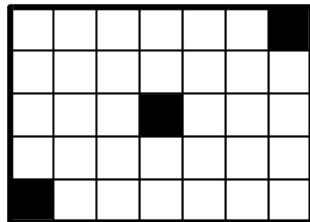
Глава 8

Комбинаторная геометрия

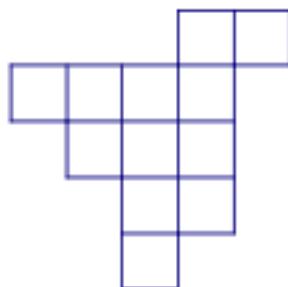
8.1 Разрезания

8.1.1. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 5.1*) Бумажный прямоугольник 3×7 разрезали на квадратики 1×1 . Каждый квадратик, за исключением тех, что стояли в углах прямоугольника, разрезали по обеим диагоналям. Сколько получилось маленьких треугольников?

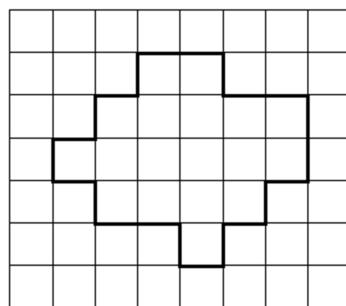
8.1.2. (*Олимпиада КФУ, 2023, 5.1*) Из прямоугольника 5×7 вырезали три клетки (см. рис.). Разрежьте по линиям сетки оставшуюся фигуру на 8 равных частей. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.* В решении достаточно привести один правильный пример разрезания.



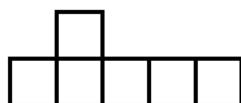
8.1.3. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 5.2*) Разрежьте фигуру на три равные части.



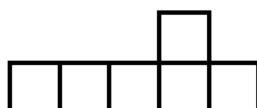
8.1.4. («Белъчонок», 2021, 5.2) Торт имеет форму, изображенную на рисунке. Покажите, как разделить торт на два равных куска двумя разными способами.



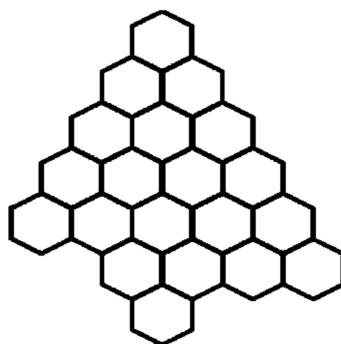
8.1.5. («Белъчонок», 2018, 5.2) Сложите из двух фигурок, представленных на рисунке, одну, а затем разрежьте новую фигуру на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать.



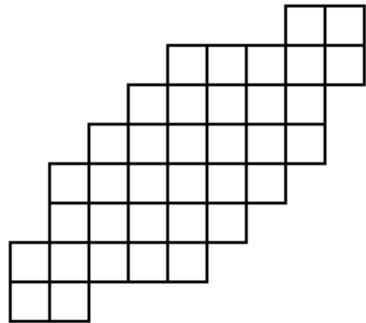
8.1.6. («Белъчонок», 2018, 5.2) Сложите из двух фигурок, представленных на рисунке, одну, а затем разрежьте новую фигуру на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать.



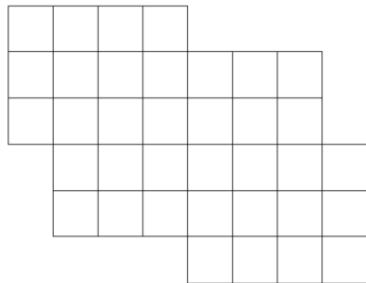
8.1.7. («Белъчонок», 2023, 5.2) Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из ячеек, на равные части.



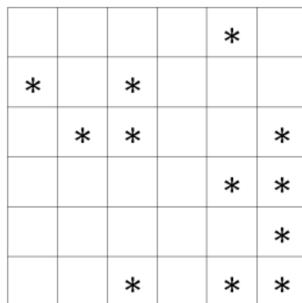
8.1.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.2) Покажите, как разрезать «конфетку» на восемь фигур двух видов (по четыре фигуры каждого вида) и собрать из этих восьми фигур квадрат. (Фигуры одного вида должны быть одинаковыми, то есть совпадать при наложении друг на друга, но они могут быть по-разному повернуты.)



8.1.9. («Бельчонок», 2022, 5.3) Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части.



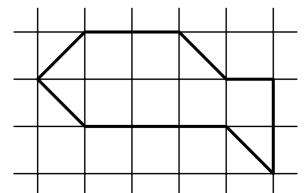
8.1.10. («Бельчонок», 2022, 5.3) Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части так, чтобы в частях было одинаковое количество звёздочек.



8.1.11. («Ломоносов», 2020, 5–6.4) На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Требуется разрезать её на несколько частей и сложить из них квадрат (поворачивать части можно, переворачивать нельзя). Можно ли это сделать при условии, что

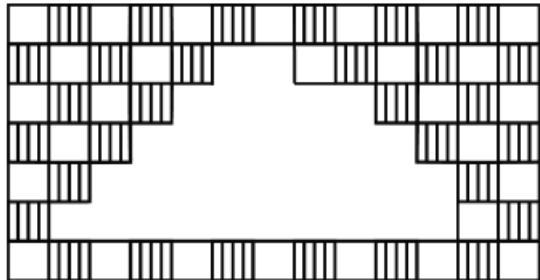
- а) частей не больше четырёх;
- б) частей не больше пяти, причём все они — треугольники?

Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.

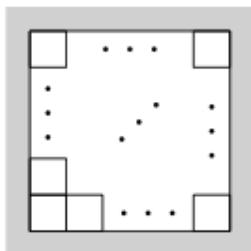


8.2 Замощения плитками

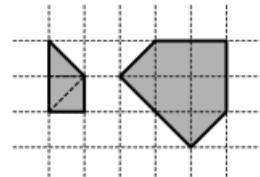
8.2.1. (Всеросс., 2016, ШЭ, 5.1) Плитки двух видов были выложены на стене в шахматном порядке. Несколько плиток упали со стены. Оставшиеся плитки изображены на рисунке. Сколько полосатых плиток упало? Обязательно объясните свой ответ.



8.2.2. (Всеросс., 2020, ШЭ, 5.4) Квадратную площадку замостили квадратной плиткой (все плитки одинаковые). К четырём сторонам площадки примыкает в общей сложности 20 плиток. Сколько всего плиток использовалось?



8.2.3. (Всеросс., 2014, МЭ, 5.2) Федя из трёх равных треугольников составил несколько различных фигур (одна из них изображена на рисунке слева). Затем из всех имеющихся фигур он сложил «стрелку» так, как показано на рисунке справа. Нарисуйте отдельно каждую из Фединых фигур и покажите, как из них можно сложить «стрелку».



8.2.4. (Всеросс., 2015, МЭ, 5.4) Полина решила раскрасить свой клетчатый браслет размером 10×2 (см. рисунок слева) волшебным узором из одинаковых фигуруок (см. рисунок справа), чередуя в них два цвета. Помогите ей это сделать. (*Изобразите ответ на полоске, являющейся разверткой браслета.*)

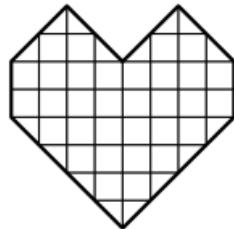


8.2.5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3, 7–8.4, 9.2) Сложить квадрат наименьшей площади из квадратиков размера 1×1 , 2×2 и 3×3 так, чтобы количество квадратиков каждого размера было одинаковым.

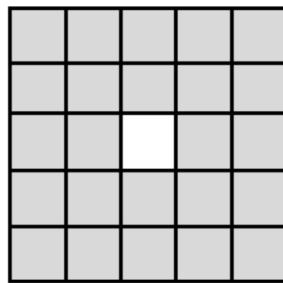
8.2.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.5) Найдите 5 прямоугольников, из которых можно сложить квадрат размера 15×15 , причём таких, что все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника, являются различными целыми числами.

8.3 Геометрия на клетчатой бумаге

8.3.1. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 5.3*) Лёша купил плитку шоколада в виде сердца (рисунок снизу). Каждый целый маленький квадратик плитки весит 6 г. Сколько весит вся плитка?



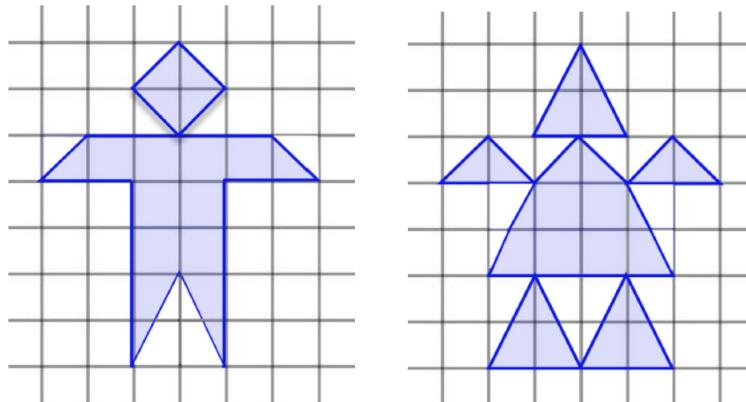
8.3.2. (*«Белъчонок», 2021, 5.3*) Торт имеет форму квадрата 5×5 , изображенного на рисунке, с вырезанным в центре квадратиком 1×1 . Покажите, как разделить торт на три куска, имеющие равные периметры и равные площади, двумя разными способами.



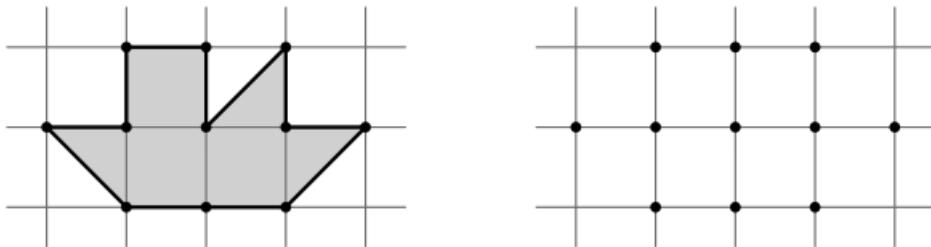
8.3.3. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.4*) Маша нарисовала в тетради двух человечков. Площадь каждой клеточки равна 1.

Площадь какого из человечков больше?

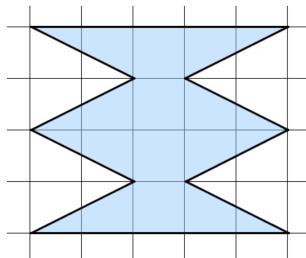
Чему равна разница? Если площади одинаковы, в ответ запишите «0».



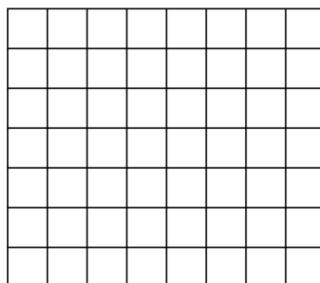
8.3.4. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 5.4*) Паучок-ученик натянул паутину между 11 точками так, чтобы его паутинки нигде не пересекались, и в конце вернулся в исходную точку. Паук-учитель его похвалил, и лишь заметил, что настоящие мастера соблюдают эти же условия, но натягивают «правильную» паутину, у которой никакие отрезки не лежат на одной прямой. Помогите паучку соединить все 11 точек на рисунке «правильной» паутиной.



8.3.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.4*) Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна 1 см^2 .



8.3.6. (*«Бельчонок», 2020, 5.4*) В прямоугольнике 7×8 проведите замкнутую ломаную по линиям сетки так, чтобы она проходила через каждый узел сетки ровно 1 раз. Ломаная не должна выходить за пределы прямоугольника.



8.4 Целочисленные решётки

8.4.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.3*) Петя и Вася играли в солдатиков. Петя выстроил своих рыцарей «прямоугольником» — сколько-то колонн и сколько-то рядов. Когда все рыцари из первого и второго ряда ушли в разведку, то рыцарей осталось 24. Затем Васины лучники обратили в бегство всех рыцарей, которые остались в первой и второй колоннах. После этого осталось 18 рыцарей. Сколько рыцарей было у Пети изначально?

8.4.2. («Надежда энергетики», 2022, 5.5) Элементы 1, 2, 3, 4, 5 электросхемы располагаются в узлах плоской клетчатой решетки, образованной одинаковыми квадратами. Надо соединить проводниками пары элементов 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4 и 4-5. Каждый проводник должен проходить по линиям решетки, он может содержать несколько ребер квадратов, составляющих решетку, и если изгибается, то только под прямыми углами. По каждой стороне квадрата может проходить только один проводник, пересекаться проводники не должны. Найдите наименьшее число клеток решетки, содержащее такую схему.