Wild Mathing

ОЛИМПИАДЫ

Содержание

Занятие 1. Движения плоскости и пространства

Домашняя работа

Easy

1. Сколько осей симметрии у правильного 2020-угольника? У правильного 2021-угольника?

2. Верно ли, что любой четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом?

3. Является ли диагональ куба осью его симметрии? Сколько плоскостей симметрии у куба?

4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M, N — середины ребер AB, BC, CD, AD соответственно. Как с помощью поворота или симметрии доказать, что отрезки NL и KM равны?

5. Верно ли, что фигура может иметь только либо единственный центр симметрии, либо бесконечное количество центров симметрии?

Normal

6. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-4)^2+11^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{3^2+(13-y)^2}$.

7. Докажите, что всякий выпуклый четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.

8. (*«Всерос»*) Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O. Причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + DB \geq 1$.

9. Деревни Алексеево и Борисовка разделены двумя параллельными реками разной ширины. На каждой реке нужно поставить по мосту так, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (при этом мосты перпендикулярны берегам). Как это сделать?

10. (*Задача Ферма*) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

11. (*«Турнир Городов»*) Четырехугольник $ABCD$ вписанный, $AB = AD$. На стороне BC взята точка M, а на стороне CD — точка N так, что $\angle BAD = 2 \cdot \angle MAN$. Докажите, что $MN = BM + ND$.

12. Треугольник A_1B_1C симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы его прямоуго угла C. Чему равен угол между медианой CM треугольника ABC и прямой A_1B_1?

13. (*«ММО»*) Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, в которых окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается сторон BC, AC, AB соответственно. А кроме того, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Докажите, что $\triangle ABC$ — правильный.

14. Через каждую из двух противоположных вершин параллелограмма проведены перпендикуляры к прямым, содержащим его стороны, не проходящие соответственно через эти вершины. Докажите, что основания этих перпендикуляров являются вершинами прямоугольника. При каком условии он будет квадратом?

15. Две равные окружности пересекаются в точках M и N. Точки P и Q этих окружностей принадлежат их линии центров и находятся в одной полуплоскости от прямой MN. Докажите, что сумма $MN^2 + PQ^2$ не зависит от расстояния между центрами окружностей.

16. (*«ОММО», 2019*) Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от нее до вершмны A прямоуго угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найдите площадь треугольника ABC.

Hard

17. (*«СПбОШ», 2018*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, перпендикулярная BD, пересекает отрезки AB, BC и лучи DA, DC в точках P, Q, R, S соответственно. Известно, что $PR = QS$. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек A и C.

18. (*«ММО», 2017*) В треугольнике ABC с углом A, равным 45°, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.

19. (*«ОММО», 2013*) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер AD и B_1C_1. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

20. (*«ОММО», 2017*) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые ребра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2, DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от ребер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Ответы

1. 2020, 2021 **2.** Да **3.** Нет, 9 **4.** $R_{DO}^{120^\circ}$, где DO — высота тетраэдра **5.** Да **6.** 25
10. Точка Торричелли **12.** 90° **16.** $20+6\sqrt{7}$ **19.** $\sqrt{2}-\frac{2}{3}$ **20.** $\frac{10\sqrt{6}}{9}$

Подсказки и решения

1. Попробуйте для начала рассмотреть квадрат и правильный пятиугольник, а затем обобщите.

2. От противного: предположим, что четырехугольник не является параллелограммом. Тогда хотя бы одна пара противоположных сторон не параллельна. Как они преобразуются посредством центральной симметрии?

3. Назовем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрите его счение ACC_1A_1 (прямоугольник), симметричен ли он относительно оси AC_1? Насчет второго вопроса: сколько плоскостей симметрии у куба, проходящих через противоположные ребра (такие как AB и C_1D_1)? А сколько плоскостей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер?

4. Если DO — высота правильного тетраэдра $ABCD$, то при повороте на 120° вокруг прямой DO точка M перейдет в N, точка K перейдет в L, что и объясняет равенство $KM = NL$. Это же равенство можно доказать с помощью симметрии: если P — середина ребра AC, то точки N и M, K и L симметричны (как и весь тетраэдр) относительно плоскости (DBP).

5. Предположим, некоторая фигура имеет ровно два центра симметрии, тогда... (получите противоречие). Решение.

6. Вспомните, расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат находится по формуле $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Попробуйте дать геометрическую интерпретацию сумме квадратных арифметических корней в духе $AB + BC + CD$, и получится задача, которую мы уже решали с вами на занятии.

7. 1) Ось симметрии проходит через вершину четырехугольника: может ли противоположная вершина не принадлежать оси симметрии? 2) Ось симметрии не проходит через вершину четырехугольника: вспомните определение осевой симметрии и то, что она является движением — получите равнобокую трапецию или прямоугольник.

8. Используйте параллельный перенос. Решение.

9. Вспомните вторую задачу, которую мы разобрали на занятии — параллельный перенос и неравенство ломаной. Решение.

10. Как часто бывает в задачах на геометрические экстремумы, можно выстроить из трех разрозненных отрезков одну ломаную, а затем применить соответствующее неравенство. Помогают два последовательных поворота около вершин треугольника. Решение.

11. Присмотритесь к задаче 8, которую решали вместе: здесь можно реализовать ту же самую идею. Решение.

12. $R_C^{90^\circ}$ (поворот на 90° вокруг точки C). Решение (стр. 177, задача 3).

13. S_l (осевая симметрия относительно прямой l), где l — биссектриса угла ACB. Подумайте, как это движение преобразует $\triangle AA_1C$. Решение без использования симметрии.

14. Z_O (центральная симметрия относительно точки O), где O — центр данного параллелограмма. Решение (стр. 160, задача 2).

15. $T_{\overrightarrow{PQ}}$ (перенос на вектор $\overrightarrow{PQ}$). Решение (стр. 171, задача 2).

16. $R_A^{90^\circ}$, а далее очень аккуратный и терпеливый счет. Решение (задача 4).

17. Пусть точка T — середина отрезка PQ, а точка A' симметрична точке A относительно центра T. Что можно сказать о треугольниках $SA'Q$ и RAP?

18. Постройте треугольник, для которого треугольник ABC — серединный. Решение.

19. Вспомните финальную задачу из нашего занятия: первым делом постройте плоскость, перпендикулярную оси вращения, которая проходила бы через точки B_1 и C_1. Решение (задача 10).

20. Эту потрясающую конструкцию можно назвать трехмерным аналогом задачи Фаньяно, которую мы разразобрали на занятии. Попробуйте, используя симметрию относительно плоскости, выстроить отрезки в одну ломаную, а затем примените соответствующее неравенство. Решение (задача 10).

Дополнительные материалы

[1] «Дополнительные главы по геометрии» за 7–9 классы. Бесплатный онлайн-курс на платформе «Сириус».

[2] В. Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия. Том 1.

[4] Р. К. Гордин. Планиметрия. Задачник 7-9 классы.

Занятие 2. Принцип Дирихле. Принцип крайнего

Домашняя работа

Easy

1. (*«Ломоносов», 2015*) В ящике лежат 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зеленых, 13 желтых, 19 синих, 11 белых и 9 черных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

2. В квадрате 4×4 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1×1, не содержащий внутри себя точек.

3. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1, -1, 0$ так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

4. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: $2, 3, 4$ или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

5. Докажите, что в любой компании из n человек ($n \geq 2$) найдутся двое, имеющие одинаковое число друзей из этой компании.

6. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст — 332 года. Можно ли из них выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет?

7. (*«ОММО», 2018*) n грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав?

Normal

8. (*«ОММО», 2019*) В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

9. (*«Турнир городов», 2017*) Дан треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке

10. (*«Турнир городов», 2017*) 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

11. (*«Турнир Ломоносова», 2017*) В классе 28 учеников. На уроке программирования они делятся на три группы. На уроке английского языка они тоже делятся на три группы, но по-другому. И на уроке физкультуры они делятся на три группы каким-то третьим способом. Докажите, что найдутся хотя бы два ученика, которые на всех трёх занятиях находятся друг с другом в одной группе.

12. Даны 8 натуральных чисел $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_8 \leq 15$. Докажите, что среди всевозможных разностей $a_i - a_k$, (где $k < i \leq 8$) имеются три равных.

13. Числа от 1 до 10 записаны в строчку в произвольном порядке. Каждое из них сложили с номером места, на котором оно стоит. Докажите, что хотя бы две суммы оканчиваются одной и той же цифрой.

14. (*«ММО»*) На сферическом Солнце обнаружено конечное число круглых пятен, каждое из которых занимает меньше половины поверхности Солнца. Эти пятна предполагаются замкнутыми (т.е. граница пятна принадлежит ему) и не пересекаются между собой. Верно ли, что на Солнце найдутся две диаметрально противоположные точки, не покрытые пятнами.

15. Внутри равностороннего треугольника со стороной 3 см отмечено 10 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1 см.

16. Первоклассница Маша знает только цифру 1. Может ли она написать число, делящееся на 2021?

17. В таблице 10×10 расставлены целые числа, причём каждые два числа в соседних клетках отличаются не более чем на 5. Может ли среди них не оказаться двух равных?

18. (*«Турнир городов»*) По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа.

Hard

19. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно полностью покрыть круг радиуса 2?

20. (*«ММО», 2017*) Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

21. (*«Ломоносов», 2016*) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множеста всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось на другое?

22. (*«Ломоносов», 2017*) Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в наборе, состоящем из 2017 различных натуральных чисел и обладающем тем свойством, что ни одно из его чисел нельзя представить в виде суммы двух других различных его чисел?

23. (*«Wild», 2020*) В зал, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда размером 19м $\times$ 10м $\times$ 4м, залетели 253 бабочки. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 2,5м.

24. (*«Высшая проба», 2020*) В правильном тетраэдре с ребром равным 8. Отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.

Ответы

1. 76 **3.** Такой квадрат невозможен **4.** Да **6.** Да **7.** 21 **8.** 4 **10.** 50 **14.** Да **16.** Да **17.** Нет **18.** $\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0, ..., \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, 0$ **19.** 7 **20.** 75 **21.** 672 **22.** 4032.

Подсказки и решения

1. Попробуйте подумать головой! Решение (2014/2015 год, стр. 31).

2. Что будет, если разрезать исходный квадрат на 16 единичных квадратиков?

3. Какое наибольшее число может получиться в сумме? А какое наименьшее? Решение (стр. 38).

4. Посчитайте количество всевозможных упорядоченных натуральных троек, начиная от $(2, 2, 2)$ и заканчивая $(5, 5, 5)$. Их больше 64 или меньше? Решение (стр. 39).

5. Наименьшее возможное количество друзей — 0, а наибольшее — $(n-1)$. Но может ли в компании оказаться человек, который дружит со всеми, если имеется человек, который не дружит ни с кем? Продолжение истории читайте здесь.

6. Средний возраст трех старших работяг никак не меньше среднего возраста по бригаде.

7. Арифметическая прогрессия! Решение (задача 2).

8. Сколькими способами можно выбрать 2 элемента из 7? $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ — именно столько матчей было проведено всего. А сколько очков суммарно могли заработать все команды? Решение (задача 2).

9. Если прямая равноудалена от концов отрезка, то либо она параллельна ему, либо проходит через его середину. Решение.

10. Может ли у всех ребят оказаться различное число макаронин после 49 ходов? Решение.

11. $(1, 1, 1),\ (1, 1, 2),\ (1, 1, 3),\ (1, 2, 1),\ (1, 2, 2),\ (1, 2, 3),\ \ldots, (3, 3, 3)$ — сколько всего? Решение.

12. $1 \leq (a_i - a_k) \leq 14$ — интересующая разность может принимать не более 14 различных значений. А чему равно число всевозможных разностей?

13. Сумма всех 20 чисел равна $2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) = 110$.

14. Центральная симметрия. Решение.

15. Разбейте треугольник на фигуры, каждая из которых полностью покрывалась бы кругом единичного радиуса.

16. Мы сделали похожую задачку на занятии. Если вдруг не разобрались — это ваш шанс!

17. Рассмотрите противоположные (по диагонали) угловые клетки. Решение.

18. Рассмотрите наибольшее из чисел: какими могут быть два следующих за ним числа? Решение.

19. Подумайте сначала не о том, как покрыть весь круг радиуса 2, а как покрыть его границу (окружность) кругами вдвое меньшего радиуса.

20. Рассмотрите движение двух велосипедистов относительного третьего, положение которого можно считать фиксированным. Решение.

21. Поскольку числа различные и нечетные, то если одно из них делится на другое — числа отличаются по меньшей мере в три раза. Решение (2015/2016 год, стр. 43).

22. Почему ответ не может быть 4000? Потому что $4000 = 1 + 3999 = 2 + 3998 = 3 + 3997 = ... = 1999 + 2001$ — в исходном наборе нельзя использовать одновременно соответствующую пару чисел. Значит, чисел в наборе будет не больше 2000, а по условию их 2017. Решение (2016/2017 год, стр. 25).

23. Разбейте зал на 252 многогранника, внутри которых точки удалены менее, чем на 2,5м.

24. Найдите объем тетраэдра и докажите, что условие задачи будет выполнено, если исходный тетраэдр удастся разбить на 64 тетраэдра единичного объема. Решение (задача 6).

Дополнительные материалы

[1] А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи.

[2] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике.

[3] А. В. Шаповалов. Принцип узких мест.

[4] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки.

Занятие 3. Теория чисел

Домашняя работа

Easy

1. (*«ОММО», 2017*) Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}.$$

2. (*«Турнир городов», 2016*) Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

3. (*«ПВГ», 2014*) В периодической десятичной дроби 0,242424... первую цифру после запятой заменили на 4. Во всколько раз полученное число больше исходного?

4. (*«ОММО», 2019*) При каком наименьшем натуральном k выражение $2017\cdot 2018\cdot 2019\cdot 2020+k$ является квадратом натурального числа?

5. (*«ПВГ», 2014*) Дана бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$, о которой известно следующее: $a_1=20, a_{n+1}=a_n\cdot a_{n+2},\ n\in\mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014}.

6. (*«ОММО», 2012*) Найдите последнюю цифру числа $7^{\left(2012^{2011}\right)}-3^{\left(12^{11}\right)}$.

7. (*«ОММО», 2013*) Докажите, что число $4^{2013}+1$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.

8. (*«ММО», 2017*) Даны две непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n), одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1=b_1, a_2:b_2=2$ и $a_4:b_4=8$. Чему может быть равно отношение $a_3:b_3$?

Normal

9. (*«Росатом», 2017*) При каких значениях a система

$$\begin{cases}2[x]-3[y]=7,\\3x+2y=a\end{cases}$$

имеет единственное решение?

10. (*«ОММО», 2016*) При каких натуральных $n>1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

11. (*«ОММО», 2015*) Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

12. (*«Турнир Ломоносова», 2015*) Первый член бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел равен 1. Докажите, что среди её членов можно найти 2015 последовательных членов геометрической прогрессии.

13. (*«Турнир городов», 2016*) Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$?

14. (*«Ломоносов», 2010*) Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

15. (*«Курчатов», 2018*) Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5},$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

16. (*«ОММО», 2018*) Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможые ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

17. (*«ПВГ», 2016*) Решите уравнение $[\log_2 \log_3 x]^2 - 11\log_2[\log_3 x] + 18\log_2 \log_3[x] = 0$ (через $[t]$ обозначена целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

18. (*«СПбОШ», 2015*) Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимно простые.

19. (*«ММО», 2019*) Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2 + 20n + 19$ делится на 2019.

20. (*«ММО», 2017*) Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.

21. (*«ПВГ», 2019*) Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что $m^3 + n^3 = k! + 32$.

Hard

22. (*«Ломоносов»*) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2004\left[n\sqrt{1002^2+1}\right] = n\left[2004\sqrt{1002^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

23. (*«СПбОШ», 2017*) Натуральное число n назовем почти квадратом, если n можно представить в виде $n = ab$, где a и b — натуральные числа, причем $a \leq b \leq 1,01a$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных m среди чисел $m, m+1, m+2, ..., m+198$ нет почти квадратов.

24. (*«Физтех»*) Найдите наибольшее натуральное n, для которого число 6500! делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, ..., n$.

25. (*«Высшая проба», 2020*) Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих единицу. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не больше, чем на $\frac{1}{100}$.

Ответы

1. $\frac{171}{20}$ **2.** Да **3.** $\frac{73}{40}$ **4.** 1 **5.** 0; $\frac{1}{20}$ **6.** 0 **8.** -5 или $-3,2$ **9.** $13k+4, k \in \mathbb{Z}$ **10.** $3, 7, 9, 21, 63$
11. 11000 **13.** Одно **14.** 54, 72, 96, 128 **15.** $1\frac{14}{15}, 2\frac{7}{20}, 3\frac{1}{10}$ **16.** 14 **17.** $[3; 4)$ **19.** 2000
20. 1520 **21.** $(3, 5, 5), (5, 3, 5)$ **22.** $n = 1, 2, 3, ..., 2004$ **24.** 82.

Подсказки и решения

1. Каждая из пяти дробей сократима на 9. Решение (задача 1).

2. Используйте больше единичек. Решение.

3. Если $x = 0{,}242424...$, то $100x = 24{,}242424...$ Чему равно $99x$? На занятии, кроме этого способа, рассмотрели еще один: использование геометрической прогрессии. Решение (стр. 13).

4. $(a-3)(a-2)(a-1)a + k$. Решение (задача 3).

5. $\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot a_3, \\ a_3 = a_2 \cdot a_4. \end{cases}$ Решение (стр. 8).

6. $7^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Очень похожий номер обсудили на трансляции. Решение (задача 3).

7. Все вы хорошо помните формулу $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$, но у нее есть и обобщение:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... + b^{2n}\right).$$

Решение (задача 3).

8. Ничего хитрого: просто аккуратно рассмотрите два случая. Решение.

9. Вспомните определение целой части числа, а затем изобразите множество решений системы в плоскости xOy. Решение (задача 5).

10. Используйте формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, а также основную теорему арифметики. Решение (задача 3).

11. $X = 1000a + 100b + 10c + d$, а если записать цифры числа X в обратном порядке, получим: $1000d + 100c + 10b + a$. Причем a, b, c, d — цифры, $a \neq 0 \neq d$. Решение (задача 3).

12. Здесь используется только лишь определения соответствующих прогрессий. Хороший тон — связать одной формулой каждый член геометрической прогрессии с соответствующим членом арифметической прогрессии. Решение.

13. Делимость можно отразить стандартным образом: $pn = (p+n)k$, а до группировки нужно догадаться: $p^2 = (p+n)(p-k)$. Решение.

14. Не теряя общности, можно считать прогрессию возрастающей, а все ее члены — неотрицательными (не имеет значения в контекте вопроса задачи). Тогда можно формализовать условие так:

$$\begin{cases} b = 54, \\ b \cdot q^m = 128, \quad q \neq 0, \ k, m, n \in \mathbb{N}. \\ b \cdot q^k = n, \end{cases}$$

15. Заметьте, что все решения лежат в отрезке $[1; 4]$. Если обозначить $t = [x]$, то как записать через t выражение $[2x]$? Решение (задача 1).

16. Докажите, что $n^3 \equiv n \pmod 3$ и $n^5 \equiv n \pmod 5$ при $n \in \mathbb{N}$. Это делается аналогично тому, как мы доказывали на занятии утверждение $n^2 \not\equiv 2 \pmod 3$ при $n \in \mathbb{Z}$. Решение (задача 3).

17. Уравнение имеет смысл только при $[\log_3 x] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3$. А для таких значений переменной неравенство $\log_3 [x] \geq [\log_3 x]$ всегда верно. Решение (стр. 2).

18. Предположим обратное: числа $ab+1$ и $a+b$ имеют общий простой делитель. Рассмотрите произведение $(a^2+b)(a+b^2)$.

19. $n^2+20n+19 = (n+1)(n+19) = 3 \cdot 673 \cdot k$, причем $k \in \mathbb{N}$, а числа 3 и 673 — простые. Решение.

20. Искомое число не может состоять из одной или двух цифр. Кратность 80 до и после перестановки позволяет определить последнюю цифру числа — ноль. Докажите, что трехзначных чисел, удовлетворяющих условию, не существует. Решение.

21. Рассмотрите остатки при делении на 7. Решение (стр. 2).

22. Удобно смотреть на это уравнение в таком ключе: $2004\,[n(1002+\alpha)] = n\,[2004(1002+\alpha)]$, где $\alpha = \sqrt{1002^2+1} - 1002$.

23. Разбейте натуральные числа на отрезки по 199 чисел в каждом. Решение (задача 66).

24. Поймите, что 6500! делится на каждое из чисел k^k при натуральных $k \leq 80$ по одной и той же причине: натуральные сомножители от 1 до 6500 можно разбить на k отрезков так, что в каждом будет число, делящееся на k. А далее задумайтесь о том, что если $k > 80$ — простое число, то это сделать не удастся, поскольку $k^2 > 6500$. Решение.

25. Не теряя общности, $S \geq 0$. Решите задачу при $S = 0$ (это очень легко). Если $S > 0$, изобразите отрезок длины S и разбейте его на 100 частей. Если данные числа обозначить $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$, то $p \geq S$ — обдумайте это, докажите (не забудьте, что $|x_i| \leq 1$ при $1 \leq i \leq p$). А далее, как ни странно, нужно реализовать принцип Дирихле. Решение (задача 5).

Дополнительные материалы

[1] А. И. Сгибнев. Делимость и простые числа.

[2] К. А. Кноп. Азы теории чисел.

[3] А. Д. Блинков. Последовательности.

[4] В. В. Бардушкин, И. Б. Кожухов и др. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс.

[5] А. Егоров. Целая и дробная части числа («Квант», 2002-5).

Занятие 4. Комбинаторика

Домашняя работа

Easy

1. Сколько различных делителей имеет число 2020? А число 2021?

2. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг (каждый играет с каждым ровно один раз). Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

3. Сколькими способами можно разложить семь монет различного достоинства по трём карманам?

4. (*«Физтех», 2020*) Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16 875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

5. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

6. (*«Всерос»*) Каких чисел больше среди натуральных от 1 до 1 000 000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата или точного куба или не представимых в таком виде?

7. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

8. (*«Росатом», 2017*) Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

Normal

9. (*«Межведомственная олимпиада», 2019*) Аня с Борей играют в «Морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Боря (не зная расположение корабля Ани) производит «выстрел»: он называет два различных натуральных числа k и m от 1 до 29, и, если отрезок с концами в точках с номерами k и m, совпадает с одной из сторон треугольника Ани, то корабль считается «раненым». Сможет ли Боря, играя обдуманно, гарантированно «ранить» корабль, где бы Аня его ни расположила, сделав не более 134 выстрелов?

10. (*«Физтех», 2019*) Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

11. (*«Физтех», 2018*) Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47}.

12. (*«Физтех», 2017*) Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

13. (*«Физтех», 2016*) В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из звездочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

14. (*«Физтех», 2015*) Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

15. (*«Физтех», 2014*) Есть семь карточек с цифрами $0, 1, 2, 3, 3, 4, 5$. Сколько существует различных шестизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

16. (*«Физтех», 2013*) Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

17. (*«Физтех», 2012*) Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 700, 1 \leq b \leq 700$, сумма $a + b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) считаются различными.)

18. (*«Физтех», 2012*) На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

19. (*«Межведомственная олимпиада», 2020*) Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1 и 2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Hard

20. (*«ММО», 2017*) Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один – преступник, еще один – свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

21. (*«Всерос»*) Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x. При этом дается ответ «Да» или «Нет»). Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

22. (*«Турнир городов»*) Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100, и в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру А передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

Ответы

1. 12, 4 **2.** 153 **3.** 3^7 **4.** 1120 **6.** Не представимых в таком виде **7.** 1280 **8.** 220 **9.** Не сможет **10.** 267903 **11.** 5111 **12.** 22100 **13.** 13122 **14.** 19594 **15.** 276 **16.** 216 **17.** 25200 **18.** 2556 **19.** $\frac{4^{50}+2}{3}$ **20.** Да **21.** Нет.

Подсказки и решения

1. $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101,\ 2021 = 43 \cdot 47$. Формулу количества делителей обсудили на занятии.

2. Сколькими способами можно выбрать 2 элемента из 18? Решение.

3. Берите монеты поочередно и всякий раз вопрошайте: в какой карман могу ее положить? А дальше правило произведения сделает свое дело. Решение.

4. $16875 = 3^3 \cdot 5^4$, затем вспомните перестановки с повторениями (задача про «метаматематику»). Решение (стр. 7, задача 1).

5. Доказательство в одну строчку, просто напишите определение. Но оно весьма полезное: мы его использовали при решении задачи с монетками, а еще оно объясняет симметрию при разложении бинома Ньютона.

6. Определите сначала количество точных квадратов и точных кубов по отдельности в первом миллионе натуральных чисел. Решение.

7. Сколькими способами можно выбрать первую вершину? А вторую? Решение.

8. Первым делом выясните, сколько должно быть троек, сколько должно быть четверок в этом числе — решите диофантово уравнение. Решение (стр. 2, задача 3).

9. Сколько различных треугольников можно отметить по условию задачи? Сколько треугольников можно «ранить» одним выстрелом? Решение (стр. 1, задача 3).

10. Удобно разбить все числа на три множества: $\{1\}, \{2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{103}\}, \{3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{103}\}$. Поскольку требуется делимость на 6, нельзя использовать только двойки или только тройки. Рассмотрите карточки, на которых есть и двойки, и тройки. Не забудьте отдельно посчитать комбинации с единичкой. Решение (стр. 6, задача 3).

11. Если x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, то его можно представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$. Решение (стр. 26, задача 3).

12. Число делится на 495 тогда и только тогда, когда оно делится на 5, на 9 и на 11 одновременно. Вспомните соответствующие признаки делимости (занятие 3). Решение (стр. 22, задача 5).

13. Задание аналогично предыдущему. С последней цифрой — все сразу ясно. Единственное, что остается понять: первые четыре цифры можно выбрать произвольно, а уже пятую взять так, чтобы число делилось на 9. Решение (стр. 14, задача 5).

14. $5x^2-6xy+y^2 = 5x^2-5xy-xy+y^2 = 5x(x-y)-y(x-y) = (x-y)(5x-y)$. Решение (стр. 27, задача 5).

15. Какой может быть последняя цифра числа, полученного из карточек? А какой должна быть сумма всех его цифр? Решение (стр. 14, задача 5).

16. Знаю-знаю: вы устали уже от этой делимости на 15, но что поделать! Решение (стр. 10, задача 4).

17. Если произведение ab делится на простое число 5, то один из множителей кратен 5. Решение (стр. 3, задача 8).

18. Рассмотрите сначала доску меньшего размера, например, 9×10, а затем обобщите. Решение (стр. 15, задача 8).

19. Первые 98 цифр вы можете выбрать произвольно, а уже затем сбалансировать число последними двумя цифрами для делимости на 3. Решение (стр. 1, задача 3).

20. Сколько существует четырехзначных чисел в троичный системе счисления, начиная от 0000 и заканчивая 2222? Решение.

21. Обозначим гири A, B, C, D, E. Чему равно количество перестановок из пяти элементов, то есть способов упорядочить массы $m(A), m(B), m(C), m(D), m(E)$? Решение.

22. Сложность в этой задаче только одна: нужно оценить количество всех возможных расстановок и количество расстановок, которые не удовлетворяют условию. А уж дальше вывод последует сам собой. Решение.

Дополнительные материалы

[1] Н. Я. Виленкин. Комбинаторика.

[2] И. В. Яковлев. Комбинаторика — олимпиаднику.

[3] А. М. Райгородский. «Основы комбинаторики». Бесплатный онлайн-курс на платформе «Открытое образование».

Занятие 5. Индукция

Домашняя работа

Easy

1. Докажите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, используя индукцию:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

2. Докажите равенство $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

3. Для каких натуральных n выполнены неравенства?
а) $n! > 2^n$,
б) $2^n > n^2$?

4. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n-1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти. Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

5. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц?

6. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполнено неравенство $n^n > (n+1)^{n-1}$.

7. Докажите, что если плоскость разбита на части прямыми и окружностями, то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

Normal

8. (*Малая теорема Ферма*) Докажите по индукции, что если p — простое число, то для любого натурального a справедливо сравнение $a^p \equiv a \pmod{p}$.

9. Для всех ли натуральных $n \geqslant 6$ можно разрезать данный правильный треугольник на n правильных треугольников?

10. (*Свойство суммы модулей*) Докажите, что для любых действительных чисел верно неравенство

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \geqslant |x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n|.$$

11. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

12. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

13. (*«ММО»*) Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

14. (*«Турнир городов», 2015*) Назовём натуральное число ровным, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

15. (*«Турнир городов», 2017*) Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

16. (*«Турнир городов», 2011*) Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

Hard

17. (*«ММО», 2012*) Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от x.

18. (*Формула Бине*) Докажите по индукции, что $F_n = \dfrac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$, где F_n — число Фибоначчи с номером n, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение, $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — сопряженное к золотому сечению.

19. (*«Турнир городов», 2010*) Обозначим через $[n]!$ произведение $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot 11\ldots11$ — всего n сомножителей, в последнем — n единиц. Докажите, что $[n+m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$.

20. (*Бином Ньютона*) Докажите по индукции равенство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\ n \in \mathbb{N}.$$

21. (*«СПбОШ», 2019*) Даны натуральные числа a, b и c, причем $c \geqslant b$. Докажите, что

$$a^b (a+b)^c > c^b a^c.$$

Ответы

3. а) $n > 3$, б) $n = 1, n > 4$ **4.** Ошибка, конечно же, есть **5.** На n-ую **9.** Да **11.** $1+\frac{1}{2}n(n+1)$
15. 100 **16.** Да.

Подсказки и решения

1. При $n = 1$ верность равенства не вызывает сомнений. Остается доказать, что если равенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$ — верно, то из него следует равенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k+1)$.

2. Вновь начинаем с базы индукции ($n = 1$), затем аккуратно доказываем шаг индукции: опираясь на истинность равенства при некотором k, доказываем верность для $k + 1$.

3. Первые несколько значений проверьте непосредственно — станет ясно, что в какой-то момент одна из функций «растет быстрей». Дальше самое время выдвинуть гипотезу и доказать ее по индукции. Решение.

4. Пройдитесь внимательно по доказательству шага индукции, рассмотрев $n = 2$. Заметьте, что из утверждения «Любые две лошади одной масти» действительно следует утверждение «Все лошади одной масти».

5. Присмотритесь к ответу в этой задаче и постарайтесь доказать его по индукции. Решение.

6. Проверьте $n = 2$, затем докажите следствие: $\left(k^k > (k+1)^{k-1}\right) \Rightarrow \left((k+1)^{k+1} > (k+2)^k\right)$. Решение.

7. Если провести одну окружность или прямую, то утверждение верно. Предположите теперь, что проведено $k+1$ окружностей и прямых. Как раскрасить такую плоскость, если при удалении одной прямой (окружности) вы знаете требуемую раскраску? Решение.

8. Арифметику сравнений разбирали в рамках занятия по теории чисел, так что, надеюсь, формулировка ясна. Проведите индукцию по a: для единички, очевидно, верно. А для доказательства шага индукции припомните формулу Бинома Ньютона. Решение.

9. Помните вместе делали похожую задачу про квадраты? Проведите средние линии треугольника и подумайте, как получить разбиение на $3k + 1$ треугольников при любых натуральных $k \geqslant 2$. Дальше сами, оставлю лишь такой намек $2 : 1$.

10. При $n = 1$, очевидно, верно. Давайте покажу доказательство для двух чисел: оно поможет при обосновании шага индукции.

$$|x_1| + |x_2| \geqslant |x_1 + x_2| \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| + x_2^2 \geqslant x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1 \cdot x_2| \geq x_1x_2.$$

Обе части исходного неравенства были неотрицательны, так что возведение в квадрат — равносильная операция. После приведения подобных слагаемых получаем неравенство, которое, очевидно, всегда верно ($|t| \geqslant t$).

11. Одна прямая делит плоскость на две полуплоскости. Две прямых дают разбиение на четыре части. Три прямых — на семь. Сделайте эти построения, выдвините гипотезу. Ну а каким метод ее доказывать — дело известное! Решение.

12. Если из каждой вершины n-угольника выходит ровно две диагонали, то сколько различных диагоналей проведено? Решение.

13. Используйте монотонное возрастание числовой последовательности, определение и, конечно, метод математической индукции. Решение.

14. Возьмите произвольное натуральные число a, затем поработайте с наименьшим *ровным* репьюнитом (числом вида $\underbrace{111\ldots1}_{n}$), который был бы больше a. Решение.

15. У каждого медвежонка останется хотя бы одна ягода — отсюда делаем оценку: ответ на вопрос задачи не может быть меньше ста. И эта оценка оказывается точна, что можно подтвердить индукцией. Решение.

16. Рациональным называется число вида $\frac{k}{l}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$. Если Петя сможет разделить отрезок на $m = k + l$ частей, то ответ на вопрос задачи положительный. Решение.

17. Обратите внимание, что слова написаны в алфавитном порядке и суммируются именно первые слова, поэтому при $n = 1$ (база индукции) можно получить либо $f_1(x) = x$ — возрастающую функцию, либо $f_2(x) = x + (1 - x) = 1$ — константу. Шаг индукции реализуется сложней обычного: рассмотрите несколько случаев. Решение.

18. Индукция, естественно. Напомню, что числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ служат корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Решение.

19. Проверьте базу индукции, а для понимания шага индукции попробуйте сначала отдельно решить задачу для $(n, m) = (3, 2)$. Решение.

20. Для наглядности распишите подробнее сумму ряда. Конечно, формальные выкладки могут выглядеть громоздко, но в сущности нужно лишь понять, что происходит после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых вот здесь $\left(a^n + n \cdot a^{n-1}b + \ldots + n \cdot ab^{n-1} + b^n\right) \cdot (a + b)$. Решение.

21. Если вы только что одолели бином Ньютона, то можно попробовать применить его здесь. Более актуальный вариант: индукция по c, а затем индукция по b.

Дополнительные материалы

[1] А. Шень. Математическая индукция.

[2] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел.

[3] В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу.

Занятие 6. Теория графов

Домашняя работа

Easy

1. В трех вершинах пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагоналям в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

2. В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соедининены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?

3. В тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно с пересадками).

4. Петя выбрал несколько точек на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, и соединил каждые две точки отрезком. Мог ли он нарисовать ровно 44 отрезка?

5. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

6. Дима нарисовал на доске семь графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

7. В графе 100 вершин, причём степень каждой из них не меньше 50. Доказать, что граф связен.

8. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует такая команда C, что A выиграла у C, а C — у B.

а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех.

б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

Normal

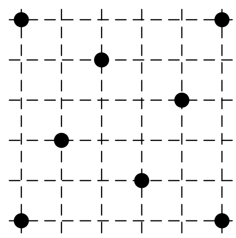
9. (*«САММАТ», 2020*) а) Можно ли занумеровать ребра куба числами $1, 2, \ldots, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё ребер была одной и той же?

б) Можно ли вычеркнуть одно из чисел $1, 2, \ldots, 12, 13$ и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

10. Любой ли связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?

11. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.

12. (*«ММО», 2012*) Кузнечик умеет прыгать только ровно на 50 см. Он хочет обойти 8 точек, отмеченных на рисунке (сторона клетки равна 10 см). Какое наименьшее количество прыжков ему придётся сделать? (Разрешается посещать и другие точки плоскости, в том числе не узлы сетки. Начинать и заканчивать можно в любых точках.)



13. (*«Турнир городов», 2011*) В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

а) Одна запись стёрлась. Всегда ли можно однозначно восстановить её по остальным?

б) Пусть стёрлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стёршиеся записи?

14. (*«Всерос»*) В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причём из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из каждого города можно долететь до любого другого.

15. (*«Всерос», 2017*) В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)

16. (*«Турнир городов», 2011*) В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

17. (*«Высшая проба», 2017*) В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

Hard

18. (*«Турнир городов», 2017*) В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?

19. (*«Высшая проба», 2019*) Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

20. (*«ОММО», 2020*) В кружок ходит 10 человек, некоторые из которых между собой дружат. Может ли так быть, что в этом кружке один участник дружит с 9 другими, один участник — с 7 другими, один участник — с 6 другими, два участника — с 5 другими каждый, два участника — с 3 другими каждый, один участник — с 2 другими, два участника — с 1 другим каждый?

Very hard

21. (*«ММО», 2016*) В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно три языка, причём для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}m$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.

Ответы

1. Нет **2.** 200 **4.** Нет **5.** Да **9.** а) Нет б) Да **10.** Да **12.** 8 **13.** а) Нет б) 96 **18.** 3^{12}
19. 6 при $n = 1$, $2n + 6$ при $n \geq 2$. **20.** Нет.

Подсказки и решения

1. Нарисуйте пятиконечную звезду.

2. Компьютеры — вершины графа, кабели — ребра. Вспомните, как, зная степени вершин, вычислить количество ребер (обсуждали на занятии).

3. Вспомните следствие из леммы о рукопожатиях: количество нечетных вершин в графе всегда четно. Если предположить, что из столицы нельзя добраться до Дальнего, то граф не является связным. Чему это противоречит? Решение.

4. Петя нарисовал ни что иное, как полный граф. Может ли количество ребер полного графа равняться 44?

5. Занумеруйте клетки поля и сопоставьте им вершины графа, ребра же будут отражать возможность переместиться из одной клетки в другой одним ходом. Тогда построить пример будет гораздо проще. Решение.

6. Говоря простым языком, два графа изоморфны, если можно занумеровать их вершины так, чтобы ребра в обоих графах соединяли пары вершин с одними и теме жи номерами. Решение.

7. Эта задача на повторение: мы решили ее в общем виде на трансляции. Решение.

8. (б) $\Rightarrow$ (а), причем (б) несложно доказать от противного. Решение.

9. Сколько вершин у куба? Подключите (не)делимость. Решение (стр. 15, задача 11.8).

10. Замените каждое ребром двумя параллельными. Решение вспомогательной задачи.

11. От противного: предположим, после удаления 98 ребер у графа оказалось две или более компоненты связности. Опирясь на принцип Дирихле, выберите ту компоненту связности, где вершин меньше, и посчитайте количество ребер в ней. Решение.

12. Докажите, что за 7 прыжков и менее это невозможно. А на 8 прыжков существует пример. Решение.

13. а) Симметрия, как один из типов движения, не меняет расстояния между точками. б) Можно доказать по индукции, что для $n \geqslant 4$ городов $k = n - 4$. Решение.

14. Рассмотрите авиакомпанию, которая не закрыла ни одного рейса. Решение.

15. Рассмотрите город, для которого доступно наибольшее количество городов: для него как раз все города и будут доступны, что можно доказать от противного. Решение.

16. Перед вами связный граф. Рассмотрите все возможные пары городов и соединяющие их пути, а затем подумайте о том, сколько раз входит отдельное ребро (дорога) в какие-либо пути. Решение.

17. Изобразите октаэдр. Решение. (стр. 1, задача 11-1).

18. 12 непересекающихся групп по 3 человека в каждой. Решение.

19. Выручает формула Эйлера $F - E + V = 2$. Решение. (стр. 3, задача 11-3).

20. Участников можно отразить вершинами, а их дружбу — ребрами. Далее, конечно же, нужно поработать со степенями вершин. Решение. (стр. 12, задача 10).

21. Эту задачу сочинил Райгородский, ничто не поможет ее решить. Решение 1, решение 2.

Дополнительные материалы

[1] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки.

[2] А. М. Райгородский. «Теория графов». Бесплатный онлайн-курс на платформе «Открытое образование».

[3] Математика в задачах. Сборник материалов выездных школкоманды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского [и др.].

[4] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике.

[5] О. Оре. Теория Графов.

Занятие 7. Логика и алгоритмы

Домашняя работа

Easy

1. Три гнома — Пили, Ели и Спали — нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз (каждый нашел что-то одно). У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашел таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашел алмаз. Кто что нашел?

2. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в спортивных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Волейболист старше Пети и Димы, но учится с ними в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

3. Если Элен не должна выполнить поручение, его выполняет Ванда. Утверждения «Элен должна» и «Камилла не может» не могут быть истинными одновременно. Если Ванда выполняет поручение, то Элен должна, а Камилла может выполнить его. Верно ли заключение: «Камилла Всегда может выполнить поручение»?

4. Из трех жителей K, M и P острова правдолюбцев и лжецов двое сказали следующее.

K: «Мы все лжецы».

M: «Ровно один из нас лжец».

Кем является P — правдолюбцем или лжецом?

5. Каждый из 7 (рыцарей или лжецов) сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько рыцарей за столом на самом деле?

6. Перед вами трое — лжец, рыцарь и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? Вопросы можно задавать в любом количестве любому из троих?

7. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

8. Лиса Алиса и Кот Базилио — фальшивомонетчики. Базилио делает монеты тяжелее настоящих, а Алиса — легче. У Буратино есть 15 одинаковых по внешнему виду монет, но какая-то одна — фальшивая. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь Буратино может определить, кто сделал фальшивую монету — Кот Базилио или Лиса Алиса?

9. Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

Normal

10. (*«ОММО», 2017*) Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Андрей: «Я не был ни первым, ни последним».

Максим: «Я не был последним».

Игорь: «Я был первым».

Коля: «Я был последним».

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

11. (*«ОММО», 2012*) На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека довольным, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9?

12. Перед вами четверо — лжец, рыцарь и два хитреца (все четвера знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

13. (*«Wild», 2020*) Требуется узнать пятизначный пароль, задавая вопросы, на которые возможен ответ «да» или «нет». Первые два символа пароля — английские буквы, одна из которых может быть заглавной, а последующие три символа — цифры. За какое наименьшее число вопросов удастся гарантированно определить пароль?

14. Шесть незнакомых между собой жителей острова лжецов и рыцарей поужинали за круглым столом при свечах, так что каждый из них разглядел и запомнил только двух своих соседей по столу. На следующий день одному из них — Артуру — захотелось узнать, кто сидел напротив него. Он может за один вопрос узнать у любого про любого другого (кроме себя), спросив: «Сидел ли тот рядом с тобой за ужином?» Хватит ли Артуру четырех вопросов?

15. (*«Всерос»*) На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы говорят только правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

16. (*«Высшая проба», 2015*) В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$), и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелке, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например, одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов, а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например, обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrow \mathcal{E}$ и $\$ \leftrightarrow$ Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните как. Если нет — докажите.

17. (*«Всерос»*) На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья — рыцари», либо фразу «Все мои друзья — лжецы», причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец.

18. (*«Турнир Ломоносова», 2015*) В зоопарке жили 200 попугаев. Однажды они по очереди сделали по одному заявлению. Начиная со второго, все заявления были «Среди сделанных ранее заявлений ложных — более 70%». Сколько всего ложных заявлений сделали попугаи?

19. (*«Турнир городов», 2013*) Из 239 неотличимых на вид монет две — одинаковые фальшивые, а остальные — одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

20. (*«ММО», 2020*) За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

Hard

21. (*«Высшая проба», 2018*) В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

22. (*«Всесибирская олимпиада», 2020*) За одну операцию к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда N является степенью двойки.

23. (*«Турнир городов», 2015*) Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

24. (*«Всерос»*) Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трёх цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?

Ответы

1. Спали нашел медный таз, Ели — топаз, Пили — алмаз. **2.** Петя занимается баскетболом, Гена — волейболом, Дима — гимнастикой, а Вова — легкой атлетикой. **3.** Да **4.** Рыцарь **5.** 0 **9.** Да **10.** Игорь **11.** Да **13.** 21 **14.** Да **15.** 8 **16.** Может **17.** 50 **18.** 140 **20.** 7 **21.** n **24.** 99.

Подсказки и решения

1. Кто мог найти медный таз? Если обратить внимание на цвет капюшона, то точно не Ели. А если учесть длину бороды?

2. Отразите условие в таблице — так будет удобнее.

3. Удобно обозначить через A, B и C высказывания «Элен должна», «Ванда выполняет», «Камилла может выполнить поручение», а через A', B' и C' их отрицание.

4. Вначале докажите, что K — лжец.

5. Докажите, что рыцари должны сидеть парами.

6. Задайте каждому вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?»

7. Как взвесить три яблока за три взвешивания? Решение.

8. Попробуйте первым делом положить 5 монет на одну чашу весов и пять — на другую. Решение.

9. $2^{10} = 1024 > 1000$, и это наводит на положительный ответ. Нужно лишь придумать, как скорректировать массы до 1 кг ровно.

10. Правдивые высказывания от Игоря и Коли однозначно задают их места — с этого начать проще. Решение (стр. 2, задача 2).

11. Это позволяет сделать расскадка мужчин парами. Решение (стр. 2, задача 1).

12. Хитрецы могут договориться так, что один из них будет «псевдорыцарем», а другой «псевдолжецом».

13. Определите количество всех возможных паролей, а дальше подключите двоичную систему счисления.

14. Артур не видел только трех человек, вопросы лучше всего задавать именно им.

15. Попробуйте доказать, что меньше 8 лжецов не может быть, пользуясь принципом Дирихле. Решение.

16. Начните с $\$ \to$ К $\to \mathcal{E}$. Решение (стр. 2, задача 2).

17. Оценка + пример. Выгодней всего оказываются пары рыцарь+лжец, которые дружат только друг с другом. Решение.

18. Аккуратно проследите первые 10 утверждений, а затем обобщите. Решение.

19. Припомните опыт 8-ой задачи из этой же домашней работы. Удобно начать с 60, 60, 60, 59. Решение.

20. Пример незатейливый: ббббчбчббччбччч. Самое же интересное — доказать, что больше не может: то есть всегда найдется такой поворот стола, при котором будет не больше 7 совпадений. Решение (стр. 39, задача 3).

21. Для поиска самой «проблемной» расстановки направьте всех гномиков к одному и мудрецу. Решение (стр. 5, задача 11-4).

22. Для доказательства необходимости удобно рассмотреть следующую начальную раскладку: две кучки, в одной из которых 1 камень, а в другой — $N-1$. Решение (стр. 14, задача 11.5).

23. Выберите одного отдельного волшебника и спросите 2014 других о том, добрый ли он. Решение.

24. Последний мудрец в колонне выкрикнет цвет первым. По его цвету, видя 98 колпаков впереди себя, предпоследний мудрец должен суметь определить цвет своего колпака.

Дополнительные материалы

[1] И. В. Раскина, Д. Э. Шноль. Логические задачи.

[2] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике.

[3] А. В. Шаповалов. И. В. Ященко. Вертикальная математика для всех.

Занятие 8. Игры, раскраски, инварианты

Домашняя работа

Easy

1. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что из оставшуюся фигуру нельзя разрезать на «домино» из двух клеток.

2. В каждой клетке доски 5×5 сидел жук. Затем каждый жук переполх на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка.

3. (*«Росатом», 2016*) Петя и Вова играют в кости на деньги. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4 и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдает Вове 1 рубль, выиграв — получает от Вовы k рублей. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой.

4. Есть куча из n спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких n выигрывает начинающий?

5. (*«ОММО», 2011*) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:
- прибавить по баллу за каждый экзамен;
- за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

6. Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие бы цифры Вася не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.

7. Имеются две кучки камней: в одной — 30, в другой — 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет?

Normal

8. (*«Турнир городов»*) Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Есть ли у какого-либо игрока выигрышная стратегия?

9. (*«ММО»*) На окружности расставлены 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Есть ли у какого-либо игрока выигрышная стратегия?

10. (*«Турнир Ломоносова»*) Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся 3 точки A, B, C одного цвета такие, что $AB = BC$.

11. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому, который имеет с предыдущим общую грань. Может ли мышка съесть весь куб, кроме среднего кубика?

12. Двое выписывают k-значное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если число разделится нацело на 11, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — другой. Кто победит? Рассмотрети случаи: а) k — четно; б) k — нечетно, больше 1.

13. Даны числа 32, 46, 52, 66. За один ход разрешается написать четыре новых числа, заменив каждое из исходных чисел средним арифметическим трех других. Докажите, что за несколько таких ходов нельзя получить набор а) 36, 45, 50, 56; б) 29, 44, 58, 65.

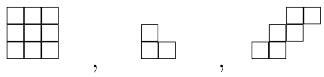
14. (*«ММО», 2020*) Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

15. (*«ММО», 2017*) Все натуральные числа, б´ольшие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

16. (*«Курчатов», 2018*) Вершины правильного 100-угольника раскрашены случайным образом в два цвета: 50 вершин — в белый цвет, 50 — в черный. Докажите, что можно разбить все вершины на 25 групп по 4 вершины так, чтобы в каждой группе было по две вершины каждого цвета, и вершины каждой группы являлись вершинами некоторого прямоугольника.

17. (*«Высшая проба», 2018*) Прямоугольник 13×9 составлен из трех типов фигур

Тип A Тип B Тип C



(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

18. (*«Высшая проба», 2018*) Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k-1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

Hard

19. (*«Всесибирская олимпиада», 2015*) Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21-угольника, каждая вершина окрашена в один из трѐх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.

20. (*«ММО», 2019*) Каждая точка плоскости раскрашена в один из трех цветов. Обязательно ли найдется треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?

21. (*«ММО», 2019*) Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

22. (*«ММО», 2018*) В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные — в чёрный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10, все клетки которого белые, и квадрат 10×10, все клетки которого чёрные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10, в котором количество чёрных и белых клеток отличается не больше чем на d?

23. (*«Турнир городов», 2019*) Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

Ответы

3. 5 **4.** При $n \neq 11k,\ k \in \mathbb{N}$ **5.** Нет **7.** Первый **8.** Да, у первого **9.** Да, у первого **11.** Нет **12.** а) Заканчивающий выигрывает; б) заканчивающий проигрывает **14.** 23 **15.** Красного **17.** 6 **18.** Да **20.** Да **21.** Да **22.** 10.

Подсказки и решения

1. Вырезанные клетки имеют одинаковый цвет?

2. При шахматной раскраске количество белых клеток не равно количеству черных.

3. Сумма очков не превосходит 4 для следующих элементарных равновероятных исходов: $(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)$. А чему равно общее число исходов? Решение (стр. 2, задача 4).

4. Рассмотрите отдельно небольшие значения n. Например, $n=11, n=22$ и несколько других.

5. Если у Вани какие-то два экзамена будут на 100 баллов, то разница между ними окажется равна 0. А как меняет разницу баллов двух экзаменов золотая рыбка? Решение (стр. 2, задача 2).

6. Если последние две цифры числа A образуют число, которое делится на 4, то и само число A делится на 4.

7. Может ли первый игрок сделать такой ход, чтобы потом всякий раз действовать симметрично ходам второго?

8. После каждого разламывания количество кусочков увеличивается на 1. Решение.

9. Придумайте такой первой ход, который в дальнейшем обеспечит симметричную стратегию.

10. Используйте принцип Дирихле и симметрию. Решение.

11. Кроме центрального кубика есть 26 других. Сколько из них окажутся черного цвета, а сколько белого при шахматной раскраске?

12. Если разность суммы цифр числа A, стоящих на четных позициях, и суммы цифр, стоящих на нечетных позициях, делится на 11, то и само число A делится на 11. Например, $8239 \vdots 11$, поскольку $((8+3)-(2+9)) \vdots 11$. При любых k у одного из игроков есть симметричная стратегия.

13. Меняется ли сумма чисел при таком преобразовании? Можно ли получить число, которое будет превосходить любое из начального набора?

14. В худшей ситуации 9 вырезанных клеток из 10 имеют одинаковый цвет. Дальше нужно сделать оценку и подкрепить ее примером. Решение (стр. 1, задача 4).

15. Если число 1024 — синее, то какие еще числа заведомо синие? Решение (стр. 1, задача 2).

16. Диагонали прямоугольника равны, пересекаются и точкой пересечения (центром окружности) делятся пополам. Решение (стр. 2, задача 2).

17. Для начала посмотрите ответ к этой задачке и попробуйте оптимистично привести подобающий пример. А для доказательства того, что меньшее количество фигурок типа B использовать не получится, используйте раскраску в три цвета. Решение (стр. 5, задача 10-4).

18. Рассмотрите отдельно фонари, которые освещены другими фонарям и которые не освещены другими фонарями. Решение (стр. 1, задача 11-2).

19. Центр описанной окружности около остроугольного треугольника всегда лежит внутри этого треугольника. Решение (стр. 7, задача 10-5).

20. Можно придумать конструкцию из нескольких треугольников, которая позволит реализовать принцип Дирихле. Решение (стр. 1, задача 4).

21. Отталкивайтесь от карточки с наибольшим произведением. Решение (стр. 3, задача 5).

22. Если сдвигать параллелько («по клеткам») границу квадрата 10×10, то за один шаг количество чёрных клеток, содержащихся внутри квадрата, изменяется не более чем на 10. Решение (стр. 1, задача 2).

23. Одно из возможных решений: рассмотреть центры клеток и поработать с расстояниями от них до пограничной прямой l, проходящей через центры ровно двух клеток фигуры M. Решение (стр. 2, задача 4).

Дополнительные материалы

[1] А. Х. Шень. Игры и стратегии с точки зрения математики.

[2] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике.

[3] А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи.

Занятие 9. Неравенства о средних

Домашняя работа

Easy

1. (*Wild, 2020*) Четыре музыкальных критика оценивают новый альбом. Каждый из них выставляет одну оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Рейтинг альбома определяется формулой

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4}}$$

на основе выставленных оценок x_1, x_2, x_3, x_4. Найдите наименьшее возможное значение рейтинга альбома, если известно, что сумма всех выставленных оценок равна 36.

2. (*«Росатом», 2017*) Отрезок $[2;29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z$.

3. (*«Турнир Ломоносова», 2016*) Имелось 2016 чисел, ни одно из которых не равно нулю. Для каждой пары чисел записали их произведение. Докажите, что среди выписанных произведений не менее трети положительны.

4. (*Wild, 2020*) Всегда ли верно неравенство

$$a+b+c \geqslant \frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

а) если числа a, b, c положительны?
б) если числа a, b положительны, а c отрицательно?

Normal

5. (*«САММАТ», 2016*) Найдите наименьшее значение функции $f(x)=2^{\sin x}+2^{\cos x}$.

6. (*«Гранит науки», 2020*) Докажите, что для α и β, принадлежащих интервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, верно неравенство

$$(\sin\alpha)^{\sin\alpha}+(\sin\beta)^{\sin\beta}>\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

7. (*«Олимпиада СПбГУ», 2018*) Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения

$$A=\left(\frac{a+b}{c}\right)^4+\left(\frac{b+c}{d}\right)^4+\left(\frac{c+d}{a}\right)^4+\left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

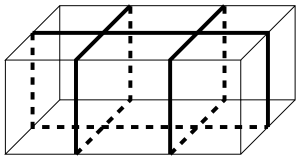
8. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}.$$

9. (*«ОММО», 2013*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

10. (*«ОММО», 2012*) Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперек (см. рис.).



Можно ли отправить посылку объема 37 дм^3, имея 3,6 м веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?

11. (*Wild, 2020*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x,y,z) = \left(2+\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\left(4+\frac{y}{z}\right)^{\frac{3}{3}}\left(1+\frac{z}{x}\right)^{\frac{5}{3}},$$

если известно, что ее аргументами служат только положительные тройки чисел (x,y,z).

12. (*«САММАТ», 2017*) Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}+\ldots+\sqrt{x_{2017}-1}$, если $x_1, x_2, \ldots, x_{2017} \geqslant 1$ и $x_1+x_2+\cdots+x_{2017}=4034$.

13. (*«САММАТ», 2014*) Найдите сумму всех значений параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(|x|+1)|y+1||x+y+a|=27,\\ |x|+|y+1|+|x+y+a|=8\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

14. (*«Росатом», 2017*) Найдите наибольшее значение выражения $|x|+|y|+|z|$ для троек $(x;y;z)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x+y+z)=0,\\ x^2+y^2+z^2=\frac{\pi^2}{3}.\end{cases}$$

Найдите тройки $(x;y;z)$, для которых наибольшее значение достигается.

15. (*«Всерос»*) Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{x_2}=4,\\ x_2+\frac{1}{x_3}=1,\\ x_3+\frac{1}{x_4}=4,\\ \ldots\ldots\ldots\\ x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=4,\\ x_{100}+\frac{1}{x_1}=1.\end{cases}$$

16. (*«Всерос»*) Докажите, что если a,b,c — положительные числа и $ab+bc+ca>a+b+c$, то $a+b+c>3$.

17. (*«Всерос»*) Докажите, что для любого $x>0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1+x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

Hard

18. (*«Олимпиада СПбГУ», 2020*) Даны числа $x, y, z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt[3]{\sin x \cos y} + \sqrt[3]{\sin y \cos z} + \sqrt[3]{\sin z \cos x}.$$

19. (*«Олимпиада СПбГУ», 2019*) Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

20. (*«Высшая проба», 2017*) Числа $P_1, \ldots, P_n$ являются перестановкой набора чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \ldots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

21. (*«СПбОШ», 2019*) Даны натуральные числа a, b и c, причем $c \geqslant b$. Докажите, что

$$a^b (a+b)^c > c^b a^c.$$

22. (*«Олимпиада СПбГУ», 2017*) Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \ldots + \cos x_n).$$

23. (*«Олимпиада СПбГУ», 2016*) Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leqslant 1$. Докажите неравенство $x^{12} - y^{12} + 2x^6 y^6 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

24. (*«Высшая проба», 2020*) Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geqslant (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

Неравенства о средних

Для положительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ верны неравенства

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Ответы

1. 9 **2.** 6 **4.** а) да б) нет **5.** $2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **7.** 64 **9.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi l\right),\ n,k,l\in\mathbb{Z}$
10. Нет **11.** $\frac{15\sqrt[3]{25}}{2}$ **12.** 2017 **13.** 2 **14.** π при $(x,y,z)=\pm\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\pm\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\pm\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$
15. $(2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},\ldots,2,\frac{1}{2})$ **18.** $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **19.** $\sqrt{3}$ **22.** $\frac{n^2}{2}$.

Подсказки и решения

1. Используйте неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим. Решение.

2. $\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z=\log_3(xyz)\leqslant\log_3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=3\log_3\left(\frac{27}{3}\right)=6$ — решение в одну строчку, остается лишь привести пример соответствующей тройки (x,y,z). Оцените преимущество такого подхода по сравнению с официальным решением (стр. 15, задача 1).

3. Среднее геометрическое натуральных чисел n и $2016-n$ не больше их среднего арифметического. При желании с квадратичной функцией, конечно, можно управиться и другими способами. Решение.

4. а) Среднее арифметическое трех положительных чисел не меньше их среднего гармонического; б) Для того, чтобы опровергнуть утверждение, достаточно привести хотя бы один контрпример — дерзайте!

5. $2^{\sin x}+2^{\cos x}\geqslant 2\sqrt{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}}=2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}}$. Кстати, сумму $\sin x+\cos x$ тоже можно удачно оценить используя неравенство о средних — обязательно попробуйте сами да не забудьте, что и синус, и косинус могут принимать отрицательные значения. А здесь решение с оценкой через метод вспомогательного аргумента (стр. 10, задача 1).

6. $0<\sin\alpha<1$ при $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $(\sin\alpha)^{\sin\alpha}>\sin\alpha$. Решение (стр. 31, задача 2).

7. Начните с того, что $A=(x)^4+(y)^4+(z)^4+(w)^4\geqslant 4xyzw$. Решение (стр. 1, задача 2).

8. Мы сделали похожую задачу на занятии — припомните. Один из возможных подходов: обозначим $S=a+b+c+d$, тогда неравенство примет вид $\frac{a}{S-a}+\frac{b}{S-b}+\frac{c}{S-c}+\frac{d}{S-d}\geqslant\frac{4}{3}$. Далее выделяем целую часть в каждой дроби и приговариваем: «Арифметика не хуже гармонии». Здесь решение обобщенного неравенства.

9. Присмотритесь к первому уравнению и попробуйте сыграть на том, что $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$ при $x\neq\frac{\pi n}{2},n\in\mathbb{Z}$. Решение (стр. 2, задача 5).

10. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, конечно, популярнее всех других. Решение (стр. 3, задача 10).

11. Неравенство Коши нужно применять к каждой из трех скобок, но для какого числа слагаемых? Для такого, чтобы в конечном счете получить $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$. Присмотритесь к решению аналогичной задачи. Не забудьте, что, используя такие оценки, необходимо предъявлять пример конкретной тройки (x,y,z), для которой полученное неравенство обращается в равенство.

12. Среднее арифметическое 2017 чисел вида $\sqrt{x_i-1}$ не больше их среднего квадратического. А здесь немного другое решение (стр. 3, задача 7).

13. Условия $(abc=27)$ и $(a+b+c=9)$ располагают к неравенствам о средних, не так ли? Решение (стр. 18, задача 8).

14. $|x|+|y|+|z|\leqslant 3\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=\sqrt{9\cdot\frac{\pi^2}{9}}=\pi$ — остается лишь подумать о синусах при условии $|x|=|y|=|z|$. Но поучительным оказывается и геометрическое решение (стр. 5, задача 2).

15. Первый из ста шагов к успеху выглядит так: $x_1 + \frac{1}{x_2} \geqslant 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$. Решение.

16. Начните с того, что $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$. Решение.

17. Дважды неравенство Коши для двух чисел: $1 + x^{n+1} \geqslant 2\sqrt{x^{n+1}}$ и $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$. Решение.

18. На занятии мы обсуждали величину

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + x_3^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

называемую средним степенным. Для фиксированных неотрицательных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ она тем больше, чем больше p (точнее говоря, она неубывает с ростом p). В частности при $p = 1$ и $p = 3$ для неотрицательных чисел a, b, c получаем

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b+c)^3 \leqslant 9(a^3+b^3+c^3).$$

Попробуйте воспользоваться этим неравенством и неравенством Коши. Решение.

19. Для максимизации положительной дроби необходим наибольший числитель и наименьший знаменатель — это две отдельные задачи. Раскрыв скобки в числителе, попробуйте трижды записать тот факт, что среднее геометрическое двух чисел не больше их среднего арифметического. А в знаменателе — среднее квадратическое трех чисел не меньше их среднего арифметического. Решение.

20. В левой части исходного неравенства $n-1$ дробей — найдите их среднее арифметическое и запишите, что оно не меньше их среднего гармонического. Решение (стр. 5, задача 11-5).

21. Мы уже решали эту задачу двумя способами: по индукции и с помощью бинома Ньютона. Настал черед неравенств о средних! Докажем более сильное неравенство: $a^b(a+b)^c \geqslant (a+c)^b a^c$. Поделите обе его части на a^b и попробуйте использовать неравенство Коши.

22. Идея состоит в том, чтобы реализовать тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Начните с неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим двух здоровенных скобок, а затем вспомните про среднее квадратическое для $2n$ чисел. Решение (стр. 1, задача 3).

23. Эту задачку можно решить по-разному. Для неравенства Коши удобно сделать замены $u = x^6$, $v = y^6$. Обязательно посмотрите и другие решения (стр. 1, задача 2).

24. Главное, разобраться с множествами, их пересечениями и количеством элементов в этих пересечениях. Тогда рано или поздно доберетесь до неравенства между средним кубическим и средним арифметическим, которое уже встречалось в №18. Решение (стр. 5, задача 7).

Дополнительные материалы

[1] Г. И. Фалин, А. И. Фалин. Неравенства для средних.

[2] Ю. П. Соловьев. Неравенства.

[3] И. В. Яковлев. Доказательство неравенств.

Занятие 10. Планиметрия

Домашняя работа

Easy

1. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4. Прямая l пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите площадь треугольника ABD, если известно, что все точки прямой l равноудалены от сторон угла ACB, градусная мера которого равна $120°$.

2. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Как относятся площади треугольников BPA_1 и BPC, если $AC_1 : AB = 1 : 2$, $AB_1 : AC = 1 : 3$?

3. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC выбраны точки Z, X, Y соответственно, причем отрезок AX проходит через S — точку пересечения чевиан BY и CZ. Найдите отношение $XS : SA$, если AZ вдвое меньше BZ, а AY втрое больше YC.

4. Точки D и K лежат на сторонах AC, BC треугольника ABC, при этом $BD : DC = 2 : 5$, $AK : KC = 3 : 2$. В каком отношении прямая BK делит AD?

5. В треугольнике ABC на продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки C_1 и A_1 соответственно. Точка B_1 принадлежит отрезку AC, при этом выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{C_{B1}}{B_1A} = 1.$$

Верно ли, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке?

6. (*«Турнир Ломоносова»*) M_a, M_b, M_c — середины сторон, H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC площади S. Докажите, что из отрезков M_aH_b, M_bH_c, M_cH_a можно составить треугольник, и найдите его площадь.

Normal

7. (*«Ломоносов», 2012*) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

8. (*«Ломоносов», 2019*) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки EE и K, причем точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причем $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.

9. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$. Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

10. (*Точка Нагеля*) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке.

11. Докажите, что биссектрисы двух внутренних углов треугольника и биссектриса внешнего угла, не смежного с ними, пересекают прямые, содержащие соответственные стороны треугольника в трех коллинеарных точках (то есть лежащих на одной прямой).

12. (*«Турнир городов»*) Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

13. Пусть O — центр описанной окружности радиуса R треугольника ABC, I_a — центр вневписанной окружности радиуса r_a, касающейся стороны BC. Докажите, что $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, где $d_a = OI_a$.

14. Окружность γ вписана в треугольник ABC и касается его сторон AC и AB в точках K_2 и K_3 соответственно. Окружность γ_1 вписана в треугольник AK_2K_3. Докажите, что точка X, — центр окружности γ_1, — лежит на окружности γ.

Hard

15. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

16. (*Теорема Паскаля*) Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

17. (*«Всерос»*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность — также с центром O, пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F — соответственно ее точки пересечения со сторонами AB и BC, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 — точки пересечения со стороной AC, причем B_1 — ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

18. (*«Всерос»*) В треугольнике ABC $(AB < BC)$ точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

19. (*«ММО», 2013*) Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

20. (*«Высшая проба», 2019*) Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Ответы

1. $12\sqrt{3}$ **2.** $1:3$ **3.** $2:7$ **4.** $21:4$, считая от точки A **5.** Нет **6.** $\frac{S}{4}$ **7.** $2\arccos\frac{1}{8}$
8. $11:45$ **9.** 1.

Подсказки и решения

1. Надеюсь, вы распознали биссектрису. И если так, то не забудьте про лемму о трезубце!

2. Площади треугольников, имеющих равную высоту, относятся как длины соответствующих оснований. А до этого, конечно, стоит применить теорему Чевы.

3. Проще всего воспользоваться теоремой Ван-Обеля.

4. Здесь выручит теорема Менелая, например.

5. Это внешний случай теоремы Чевы. В такой ситуации прямые могут не только пересекаться в одной точке, но еще и быть параллельными!

6. Медиана треугольника, проведенная из вершины прямоуго угла, равна половине гипотенузы. Решение.

7. Лемма о трезубце дает равенство $AD = OD = DC$. Найдите угол ADC, и тогда $\angle ABC = 180° - \angle ADC$.

8. Используйте теорему Менелая. Решение (стр. 3, задача 4.4).

9. По ЕГЭ — так по ЕГЭ! Решение.

10. Если будет выполнено условие теоремы Чевы, то утверждение доказано. Почему оно будет выполнено? Используйте свойство равенства отрезков касательных. Доказательство ключевого факта можно посмотреть здесь.

11. Используйте свойство биссектрисы и теорему Менелая. Свойство биссектрисы внешнего угла доказали на занятии.

12. Помогает отношение площадей треугольников, имеющих равную высоту, а также теорема Менелая. Решение.

13. На трансляции мы доказали формулу Эйлера $d^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$, опираясь на лемму о трезубце. Доказательство для внешнего случая очень похожее — пробуйте! Решение (стр. 123, задача 5.12 б).

14. И вновь лемма о трезубце! Решение.

15. Освежите в памяти теорему о прямой Эйлера, а затем попробуйте доказать утверждение задачи от противного. Решение.

16. Примените несколько раз теорему Менелая. Решение. Стоит отметить, что существует очень похожая теорема, в которой шестиугольник «вписан» в две прямые — теорема Паппа.

17. Равенство прямоугольных треугольников + теорема Менелая. Решение.

18. Пусть NP — диаметр описанной окружности, тогда треугольник API является равнобедренным по лемме о трезубце. Дальше самое главное — доказать подобие треугольников PMI и PIN. Решение.

19. На занятии мы кратко обсудили понятие степени точки и радикальной оси. Радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через их общую хорду и перпендикулярна линии центров окружностей. Нам даже довелось применить красивейший факт: если три окружности попарно пересекаются, то соответствующие три радикальны оси пересекаются в одной точке. Нынешняя задача содержит те же самые идеи — пробуйте! Решение.

20. Теорема Чевы, тригонометрия и немного оптимизма — вот оно и решение.

Дополнительные материалы

[1] «Дополнительные главы по геометрии» за 7–9 классы. Бесплатный онлайн-курс на платформе «Сириус».

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия. Том 1.