#1

Источники:
Основная волна (Резерв) 2018

а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?
б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?
в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

#2

На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

#3

На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

#4

В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

#5

Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?
в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2020

#6

На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

а) Может ли их сумма составлять 282?
б) Может ли их сумма составлять 390?
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

#7

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

#8

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2014

#9

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

#10

Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

E34174

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2012
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015

#11

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Источники:

FIPI (старый банк)
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)

#12

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если набрал не менее 85 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 7 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 85, средний балл участников, сдавших тест, составил 95, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 70. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 100, а не сдавших тест – 72. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015

#13

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

#14

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2013

#15

Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?
б) Может ли это отношение быть равным 5?
в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

Источники:

Основная волна 2021
Ященко 2022 (36 вар)

#16

Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 55?
б) Может ли это отношение быть равным 87?
в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 7?

Источники:

Основная волна 2021
Ященко 2022 (36 вар)

#17

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

Источники:
Основная волна 2022

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

#18

Источники:

Основная волна 2022

С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 10, а затем к получившейся сумме прибавляют 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 224?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 314?
в) Найдите наибольшее отношение получившегося числа к исходному.

#19

Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 28000$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2971$?
в) Найдите наибольшее произведение $A \cdot S < 5997$.

Источники:
Основная волна 2021

#20

Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение, если оно больше 1503?

#21

Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

Источники:
Основная волна 2021

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2800$?
б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2491$?
в) Найдите наибольшее произведение $A \cdot S < 5997$.

#22

а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.
б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?
в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

Источники:
Основная волна 2017

#23

Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2014

а) Может ли S равняться 8?
б) Может ли S равняться 1?
в) Найдите все значения, которые может принимать S.

#24

Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй – 104, в третьей пусто. За один ход разрешается взять по камню из двух коробок и положить в оставшуюся.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 89, в третьей – 15?
б) Могло ли в третьей коробке оказаться 201 камень?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Источники:
Основная волна 2022

#25

Есть четыре коробки: в первой коробке 101 камень, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой – 4?
б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 306 камней?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

#26

Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

A738EC

Источники:

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2013

#27

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

AB0F0C

Источники:

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2017

#28

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017

#29

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 12 единиц, то можно получить сумму 147: 1+11+11+111+11+1+1=147

Источники:
FIPI (старый банк)
Основная волна 2020

а) Можно ли получить сумму 150, если $n = 60$?
б) Можно ли получить сумму 150, если $n = 80$?
в) Для скольких значений n можно получить сумму 150?

#30

В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018

#31

Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[13; 70]$. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
б) Может ли Петин результат быть ровно в 7 раз больше Васиного?
в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

Источники:
Досрочная волна 2016

#32

Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа – число A.

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?
б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?
в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

Источники:
Основная волна 2017

#33

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

#34

Последовательность a_1, a_2, …, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k — го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}6$.
б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?
в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017
Основная волна 2016

#35

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Задания для школы экспертов ЕГЭ

#36

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?
в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018
Основная волна 2015

#37

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные произведения (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

Источники:
Основная волна 2017

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?
в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

#38

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2017
Основная волна 2013

#39

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -8, -5, -4, -3, -1, 1, 4. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018 (20 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2013

#40

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

B61260

Источники:

FIPI (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2015
Досрочная волна 2013

#41

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 9 пунктов при получении трёх звёзд, на 12 пунктов при получении двух звёзд и на 15 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 50 пунктов?
б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?
в) За пройденный уровень начисляется 7000 очков при получении трёх звёзд, 6000 – при получении двух звёзд и 3000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?

#42

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2017

#43

Про некоторый набор, состоящий из 11 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 3000?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 16?
в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

Источники:
FIPI (новый банк)
Семёнов 2018
Семёнов 2015

#44

Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?
б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?
в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

Источники:
Основная волна 2020

#45

Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.
Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Основная волна 2015

#46

На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 7, а зелёные числа кратны 5. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше 2325, если на доске написаны только кратные 5 числа?
б) Может ли сумма чисел быть 1467, если только одно число красное?
в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1467.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

#47

У ювелира есть 47 полудрагоценных камней, масса каждого из которых – целое число граммов, не меньшее 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трём кучам: в первой куче n_1 камней, во второй – n_2 камней, в третьей – n_3 камней, причём $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1, во второй – S_2, а в третьей – S_3.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2022

а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?
б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 105 граммов?
в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k, для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3; 10,5 и 12,7 округляются до 9; 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 29?
б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше 100?
в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Источники:

FIPI (новый банк)
Семёнов 2015
Основная волна 2014

#49

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3; 10,5 и 12,7 округляются до 9; 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?
б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?
в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Источники:
FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

#50

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3; 10,5 и 12,7 округляются до 9; 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Голоса распределились так, что рейтинг некоторого футболиста стал равным 31. Затем Вася проголосовал за этого футболиста. Каков теперь рейтинг футболиста с учётом голоса Васи?
б) Голоса распределяют между двумя футболистами. Может ли суммарный рейтинг быть больше 100?
в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста рейтинг стал равен 9. При каком наибольшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Источники:

FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

#51

На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3; 10,5 и 12,7 округляются до 9; 11 и 13 соответственно.

Источники:
FIPI (новый банк)
Семёнов 2015
Основная волна 2014

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?
б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

#52

Последовательность (a_n) состоит из 100 натуральных чисел. Каждый следующий член последовательности, начиная со второго, либо вдвое меньше предыдущего, либо больше него на 90.

а) Может ли такая последовательность быть образована ровно четырьмя различными числами?
б) Чему может быть равно a_{100}, если $a_1 = 89$?
в) Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел в такой последовательности?

Источники:
Основная волна 2019

#53

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 34$. Найдите все возможные значения p.
б) Пусть $p + q = 22$. Найдите все возможные значения q.
в) Пусть $q^2 - p^2 = 2812$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2019

#54

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

#55

Шесть различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 39?
б) Может ли сумма этих чисел быть равной 34?
в) Какова их минимальная сумма?

Источники:

Основная волна 2019
Пробный ЕГЭ 2017

#56

а) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 17?
б) Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + mx + n$ равен 54?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 + (3m + n)x + (3n + m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?

Источники:
Основная волна (Резерв) 2020

#57

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018

#58

Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

#59

На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

#60

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?
б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?
в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018
Ященко 2019 (36 вар)

#61

Про возрастающую последовательность из десяти различных натуральных чисел известно, что каждый член последовательности больше предыдущего не более чем на 10. Среднее арифметическое пяти первых членов равно 10, а среднее арифметическое шести последних членов равно 40.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой среднее арифметическое четырёх первых членов равно 8,5.
б) Может ли в такой последовательности среднее арифметическое четырёх первых членов быть равно 9,5?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического всех членов такой последовательности.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

#62

На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Источники:

Основная волна (Резерв) 2016

#63

На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Источники:
FIPI (новый банк)
Семёнов 2018
Семёнов 2015
Досрочная волна 2014

#64

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Источники:
Основная волна 2014

#65

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество чисел меньше, чем в предыдущий день.

Источники:
Основная волна 2019

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 7. Может ли n быть больше 6?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 2,5?
в) Известно, что $n = 6$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

#66

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Источники:
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2020

#67

В школьном живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый ученик насыпает нескольким кроликам (хотя бы одному, но не всем) порцию корма. При этом первый ученик даёт порции по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, четвёртый – по 400 г, а какие-то кролики могут остаться без корма.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все кролики получили разное количество корма?
в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если известно, что каждый ученик засыпал корм ровно четырём кроликам и все кролики получили разное количество корма?

Источники:
Досрочная волна 2018

#68

В ящике лежат 65 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 982 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1024 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
б) Могло ли в ящике оказаться ровно 13 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

Источники:

Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

#69

В ящике лежит 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Источники:

Основная волна 2019
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

#70

Источники:

Досрочная волна 2022

Даны четыре последовательных натуральных числа. Каждое из чисел поделили на одну из его цифр, не равную нулю, а затем четыре полученных результата сложили.

а) Может ли полученная сумма равняться 386?
б) Может ли полученная сумма равняться 9,125?
в) Какое наибольшее целое значение может принимать полученная сумма, если известно, что каждое из исходных чисел не меньше 200 и не больше 699?

#71

Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S.

а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?

б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?

в) Найдите наибольшее целое значение S, если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

Источники:

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2022

#72

Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел разделили на свою первую цифру. Пусть S — сумма четырёх получившихся чисел.

Источники:

Досрочная волна 2022

а) Может ли S быть равной $41\frac{11}{24}$?

б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{72}$?

в) Какое наибольшее целое значение может принимать S, если известно, что 4 исходных числа не меньше 400 и не больше 999?

#73

Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой написаны натуральные числа, среднее арифметическое которых равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

Источники:
Основная волна 2019

а) Может ли быть 10 синих карточек?
б) Может ли быть 10 красных карточек?
в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

#74

Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

Источники:
Досрочная волна 2016

а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?

#75

Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2016

#76

Источники:
Основная волна (Резерв) 2014

а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?
б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?
в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

#77

На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?
в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

Источники:

Основная волна 2021
Ященко 2022 (36 вар)

#78

Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?
б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?
в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася.

Источники:
Досрочная волна 2019

Источники:
Досрочная волна 2019

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?
б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?
в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причём в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше, чем другой?

#80

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за пять дней?
б) Могло ли получиться так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за десять дней?
в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причём в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а через 7 дней Петя решил задач больше, чем Вася?

#81

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?
б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трёх дней?
в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300?

Источники:
Досрочная волна 2019

#82

Сорок гирек массой 1 г, 2 г, …, 40 г разложили по двум кучам, в каждой куче хотя бы одна гирька. Масса каждой гирьки выражается целым числом граммов. Затем из второй кучи переложили в первую одну гирьку. После этого средняя масса гирек в первой куче увеличилась на 1 г.

а) Могло ли такое быть, если первоначально в первой куче лежали только гирьки массой 6 г, 10 г и 14 г?
б) Могла ли средняя масса гирек в первой куче первоначально равняться 8,5 г?
в) Какое наибольшее число гирек могло быть первоначально в первой куче?

#83

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 13.
б) Может ли после 200 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 400?
в) Сделали 513 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

#84

Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Источники:
Основная волна 2016

#85

На доске написано число 2045 и ещё несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?
б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?
в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2015

#86

Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму – целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма – это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов – это различные целые числа.

Источники:
Основная волна 2014

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?
б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?
в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

#87

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Источники:

FIPI (новый банк)
СтатГрад 21.12.2017
Ященко 2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2014
Материалы для экспертов ЕГЭ

#88

Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, …, 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — четвёртое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных семи чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\frac{3}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.

Источники:

FIPI (новый банк)
Семёнов 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2014

#89

Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, …, 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?
б) Может ли число k быть равным 11?
в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Источники:
Основная волна 2014

#90

На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Источники:

FIPI (старый банк)
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015
Демо 2014
Демо 2013
Демо 2012
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2011

#91

Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Источники:

FIPI (старый банк)
Ященко 2018
Основная волна (Резерв) 2012

#92

Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящий из трёхзначных натуральных чисел, равен 128. Известно, что в прогрессии не меньше трёх чисел.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2021

а) Может ли число 686 являться членом такой прогрессии?
б) Может ли число 496 являться членом такой прогрессии?
в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

#93

На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018

#94

На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2015
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

#95

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2012

#96

Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

Источники:
Основная волна 2011

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?
б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?
в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

#97

На доске написано несколько различных натуральных чисел. Дробная часть среднего арифметического этих чисел равна 0,32 (то есть если вычесть из среднего арифметического этих чисел 0,32, то получится целое число).

Источники:
Основная волна (Резерв) 2022

а) Могло ли на доске быть написано меньше 100 чисел?
б) Могло ли на доске быть написано меньше 20 чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического этих чисел.

#98

Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

C1042A

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013
Основная волна 2014

#99

Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N?

08279D

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Семёнов 2015

#100

Каждое из чисел a_1, a_2, …, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350}$,
$S_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots + {a_{350}}^2$,
$S_3 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \dots + {a_{350}}^3$,
$S_4 = {a_1}^4 + {a_2}^4 + \dots + {a_{350}}^4$.

Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4, если ещё известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.
б) Может ли $S_4 = 4857$?
в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

#101

В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» - процент побед, округлённый до целого, «ничьи» - процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
б) Может ли после выигранной партии увеличится показатель «поражений»?
в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

Источники:
Основная волна 2016

#102

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
СтатГрад 16.02.2022
СтатГрад 21.09.2017
Сергеев 2018
Ященко 2018
Ященко 2016 (36 вар)
Досрочная волна 2015

#103

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Источники:

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2015

#104

а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \leq n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$.

Источники:

Основная волна 2018

Основная волна (Резерв) 2018

#105

По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 425. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.

Источники:

Основная волна 2022

а) Может ли N быть равным 280?
б) Может ли N быть равным 149?
в) Найдите наибольшее значение N.

#106

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы – цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Источники:

FIPI (старый банк)
Основная волна 2020
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)

#107

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.
б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

Источники:
Основная волна 2016

#108

В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?
б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?
в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

Источники:
Досрочная волна 2021

#109

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512, и

а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Источники:

FIPI (старый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2011

#110

Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

а) Могло ли получиться так, что склад объёмом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?
б) Могло ли получиться так, что на складе объёмом 400 невозможно разместить 133 контейнера?
в) Какой наибольший процент объёма любого склада объёмом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019

#111

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?
б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?
в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

#112

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?
б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?
в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

#113

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 18. Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?
б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?
в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

#114

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 42. Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?
б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?
в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

#115

Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.
б) Могло ли значение S быть равным 5?
в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 10 студентов?

#116

Каждый из 32 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 14. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 14$.
б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 11$?
в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 11$?

Источники:
Основная волна 2017

#117

По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы два мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа четверть всех своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек – одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

а) Могло ли мальчиков быть столько же, сколько и девочек?
б) Могло ли мальчиков быть больше, чем девочек?
в) Пусть девочек вдвое больше, чем мальчиков. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет?

Источники:
Основная волна (резерв) 2020

#118

а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m^2}{n^2}-2\right| \leq \frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом из которых значение выражения $\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$ будет наименьшим.

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2018

#119

На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b, таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$, и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

Источники:
Основная волна 2022

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18, 19 и 20?
б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равно 25?
в) Найдите наибольшее значение N.