

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ											
#20 из видеокурса				#20 из видеокурса				#104 из видеокурса			
$\begin{array}{r} 1105 \overline{)5} \\ 221 \overline{)221} \\ 1 \end{array}$ $221 \cdot 5 = 1105$				$\begin{array}{r} 1106 \overline{)2} \\ 553 \overline{)7} \\ 79 \overline{)79} \\ 1 \end{array}$ $1106 = 2 \cdot 7 \cdot 79$				$\begin{array}{r} 100 \overline{)2} \\ 50 \overline{)2} \\ 25 \overline{)5} \\ 5 \overline{)5} \\ 1 \end{array}$ $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$			

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА
<p>Простые числа – это целые положительные числа, которые делятся только на себя и на единицу (2; 3; 5; 7; 11; ...)</p> <p>Составные числа – это целые положительные числа, у которых существует ещё хотя бы один делитель, кроме себя и единицы (4; 6; 8; 9; ...)</p> <p>1 – это не простое и не составное число</p> <p>2 – это единственные чётное простое число (все остальные чётные являются составными)</p>

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА
<p>Взаимно простые числа – это числа, у которых нет общих делителей, кроме единицы (11 и 12; 15 и 8; 100 и 99; ...)</p>

НОД
<p>НОД (Наибольший Общий Делитель) – это наибольшее число, на которое данные числа делятся без остатка</p> <p>НОД (16; 30; 12) = 2</p> <p>НОД (21; 15; 48) = 3</p>

НОК
<p>НОК (Наименьшее Общее Кратное) – это наименьшее число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел</p> <p>НОК (2; 3) = 6</p> <p>НОК (75; 60) = 300</p>

ДЕЛИТЕЛЬ И КРАТНОЕ
<p>Делитель – на него делится число</p> <p>Кратное – оно делится на число</p> <p>1; 2; 5; 10; 25; 50 – это делители числа 50</p> <p>50; 100; 150; 200; ... – это кратные 50 числа</p>

ВИДЫ ЧИСЕЛ
<p>N (натуральные числа) – это положительные целые (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; ...)</p> <p>Z (целые числа) – это числа из множества (0; 1; -1; 2; -2; ...)</p> <p>Q (рациональные числа) – это числа вида <math>\frac{m}{n}</math>, где <math>m</math> – целое число, а <math>n</math> – натуральное (<math>\frac{2}{7}</math>; 1; <math>5\frac{2}{5}</math>; 6,7; ...)</p> <p>R (действительные числа) – это объединение рациональных и иррациональных чисел</p> <p>∅ – это пустое множество или «нет решений»</p>

ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ЧИСЛА
<p>Чётные числа – это числа, которые делятся на 2 (0; 2; 4; 6; ...)</p> <p>Нечётные числа – это числа, которые не делятся на 2 (1; 3; 5; 7; ...)</p>

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ
<p>Среднее арифметическое = <math>\frac{\text{Сумма чисел}}{\text{Количество чисел}}</math></p>

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ		
<p>Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (например, 2; 5; 8; 11; 14; ...)</p> <p><math>a_1</math> – это первый член прогрессии</p> <p><math>a_n</math> – это <math>n</math> –ый член прогрессии</p> <p><math>S_n</math> – это сумма первых <math>n</math> членов прогрессии</p> <p><math>d</math> – это разность прогрессии (то самое число, которое всё время прибавляется)</p> <p><math>a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)</math></p> <p><math>S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n</math></p>		
#2 из видеокурса	#2 из видеокурса	#3 из видеокурса
Чему равно 3+13+23+33+43+53+63+73?	Чему равно 2+4+6+...+52+54?	Чему равна сумма 100 первых натуральных чисел?
$S = \frac{3 + 73}{2} \cdot 8 = 304$	$S = \frac{2 + 54}{2} \cdot 27 = 756$	$S = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
<p>Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число (например, 2; 6; 18; 54; ...)</p> <p><math>b_1</math> – это первый член прогрессии</p> <p><math>b_n</math> – это <math>n</math> –ый член прогрессии</p> <p><math>q</math> – это знаменатель прогрессии (то самое число, на которое всё время умножается)</p>

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛА		
Десятичная запись числа – это сумма степеней десятков с коэффициентами		
#13 из видеокурса	#17 из видеокурса	#18 из видеокурса
Дано трёхзначное натуральное число. Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82? $\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 82$	С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3. Могло ли в результате такой операции получиться число 300? $\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c - a - b - c}{3} = 300$	С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 10, а затем к получившейся сумме прибавляют 3. Могло ли в результате такой операции получиться число 224? $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c + b \cdot 10 + 3 = 224$

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ			
Признак делимости на 2	Признак делимости на 3	Признак делимости на 4	Признак делимости на 5
Число делится на 2, если его последняя цифра чётная (0 или 2, или 4, или 6, или 8)  1268 делится на 2, т.к. последняя цифра 8 является чётной	Число делится на 3, если его сумма цифр также делится на 3  201432 делится на 3, т.к. 2+0+1+4+3+2=12 также делится на 3	Число делится на 4, если две его последние цифры нули или составляют число, которое делится на 4  18394735980274372 делится на 4, т.к. последние две цифры составляют число 72, которое делится на 4	Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5  32557245 делится на 5, т.к. последняя цифра 5
Признак делимости на 8	Признак делимости на 9	Признак делимости на 10	Признак делимости на 11
Число делится на 8, если три его последние цифры нули или составляют число, которое делится на 8  18394735980274160 делится на 8, т.к. последние три цифры составляют число 160, которое делится на 8	Число делится на 9, если его сумма цифр также делится на 9  261432 делится на 9, т.к. 2+6+1+4+3+2=18 также делится на 9	Число делится на 10, если его последняя цифра 0  32557240 делится на 10, т.к. последняя цифра 0	Число делится на 11, если сумма цифр (стоящих на чётных местах) равна сумме цифр (стоящих на нечётных местах), либо разность этих сумм делится на 11  1232 делится на 11, т.к. 1+3=2+2 1925 делится на 11, т.к. (9+5)-(1+2)=11
#1 из видеокурса		#7 из видеокурса	#11 из видеокурса
Делится ли число 134568 на 72?  Число 134568 делится на 8, т.к. последние три цифры составляют число 568, которое делится на 8  Число 134568 делится на 9, т.к. 1+3+4+5+6+8=27 также делится на 9  Значит число 134568 делится на 72		Делится ли число 9167169 на 11?  9167169 делится на 11, т.к. (9+6+1+9)-(1+7+6)=11	Делится ли число 30240 на 11?  30240 не делится на 11, т.к. (3+2+0)-(0+4)=1

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ	
Если $a < b$ $c < d$  то $a + c < b + d$	Если $a > b$ $c > d$  то $a + c > b + d$
#60 из видеокурса	#60 из видеокурса
$a_1 \geq 1$ $a_2 \geq 2$ $a_3 \geq 3$ $a_4 \geq 4$ $a_5 \geq 5$  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 15$	$a_6 - a_5 \geq 1$ $a_6 - a_4 \geq 2$ $a_6 - a_3 \geq 3$ $a_6 - a_2 \geq 4$ $a_6 - a_1 \geq 5$  $5a_6 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ $5a_6 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \geq 15$

УРАВНЕНИЕ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ		
Решить уравнение в целых числах – значит подобрать такие целые $x$ и $y$ , которые бы дали верное равенство		
#12 из видеокурса	#13 из видеокурса	#64 из видеокурса
<p>Найдите наименьшее возможное <math>N</math></p> $\begin{cases} 3N = 5a \\ 5N = 7b \\ a = \frac{3N}{5} \\ b = \frac{5N}{7} \end{cases}$ <p><math>\Rightarrow N</math> должно быть кратно 5 и 7 одновременно  <math>\Rightarrow N \geq 35</math></p>	<p><math>2a = 8b + 9c</math>, где <math>a, b</math> и <math>c</math> – цифры трёхзначного числа</p> <p>При  <math>a = 4</math>  <math>b = 1</math>  <math>c = 0</math>  Получаем верное равенство</p>	<p><math>14y = 3x</math></p> <p>При  <math>x = 14</math>  <math>y = 3</math>  Мы получим верное равенство, есть и другие решения в целых числах</p>

СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ		
Если каждое слагаемое делится на число, то сумма должна делиться на это число		
#8 из видеокурса	#17 из видеокурса	#18 из видеокурса
<p><math>a_1</math> и <math>d</math> – натуральные числа. Чему равны <math>a_1</math> и <math>d</math>, если <math>2a_1 + 4d = 99</math>?  Левая часть уравнения кратна 2, а правая нет, значит равенство невозможно</p> <p>Можно доказать и так:  <math>2a_1 + 4d = 99</math>  <math>a_1 + 2d = 49,5</math>  НО сумма целых чисел не может быть дробным числом</p>	<p><math>a</math> и <math>b</math> – цифры. Чему равны <math>a</math> и <math>b</math>, если <math>33a + 3b = 151</math>?  Левая часть уравнения кратна 3, а правая нет, значит равенство невозможно</p> <p>Можно доказать и так:  <math>33a + 3b = 151</math>  <math>11a + b = \frac{151}{3}</math>  НО сумма целых чисел не может быть дробным числом</p>	<p><math>a</math> и <math>b</math> – цифры. Чему равны <math>a</math> и <math>b</math>, если <math>100a + 20b = 310</math>?  Левая часть уравнения кратна 20, а правая нет, значит равенство невозможно</p> <p>Можно доказать и так:  <math>100a + 20b = 310</math>  <math>5a + b = 15,5</math>  НО сумма целых чисел не может быть дробным числом</p>

КАК МИНИМИЗИРОВАТЬ ИЛИ МАКСИМИЗИРОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЯ		
#8 из видеокурса	#59 из видеокурса	#60 из видеокурса
<p>Найдите наибольшее возможное целое <math>n</math></p> $n = \frac{13 - 2a_1}{d} + 1$ <p>Для максимизации <math>n</math> нужно брать <math>a_1</math> и <math>d</math> как можно меньшими, т.е. <math>a_1 = 1</math> и <math>d = 1</math></p> $n \leq \frac{13 - 2 \cdot 1}{1} + 1$ $n \leq 12$	<p>Найдите наименьшую возможную сумму чисел</p> $S = 168 - (a_6 + a_7)$ <p><math>S</math> будет наименьшей при наибольшем возможном значении <math>(a_6 + a_7)</math></p> <p>Учитывая, что <math>(a_6 + a_7) \leq 27</math></p> <p>Получаем <math>S \geq 168 - 27</math></p> $S \geq 141$	<p>Найдите наибольшее возможное <math>S - B</math></p> $S - B = \frac{120 - 12B}{11}$ <p><math>S - B</math> будет наибольшим при наименьшем возможном <math>B</math></p> <p>Учитывая, что <math>B \geq 8</math></p> <p>Получаем</p> $S - B \leq \frac{120 - 12 \cdot 8}{11}$ $S - B \leq \frac{24}{11}$

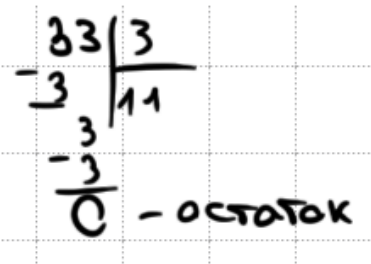
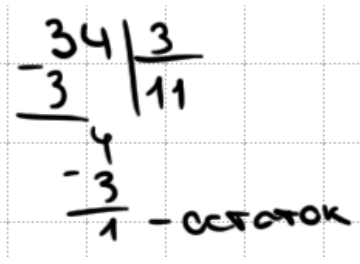
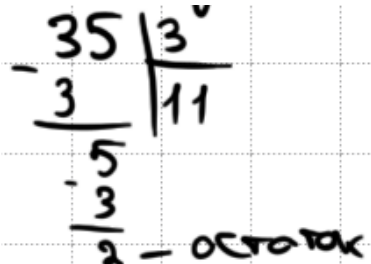
МИНИМАЛЬНАЯ СУММА		
#2 из видеокурса	#3 из видеокурса	#6 из видеокурса
<p>Сумма 35 различных натуральных чисел равна 1062. Может ли на доске быть 8 чисел, заканчивающихся на три и 27 чётных чисел?</p> <p>Сумма восьми чисел, зак. на три <math>\geq \frac{3 + 73}{2} \cdot 8</math></p> <p>Сумма восьми чисел, зак. на три <math>\geq 304</math></p> <p>Сумма 27 — ми чётных чисел <math>\geq \frac{2 + 54}{2} \cdot 27</math></p> <p>Сумма восьми чисел, зак. на три <math>\geq 756</math></p> <p>Сумма всех 35 чисел <math>\geq 304 + 756</math></p> <p>Сумма всех 35 чисел <math>\geq 1060</math></p> <p>=&gt; Может</p>	<p>На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120. Может ли оказаться среди них число 230?</p> <p>Сумма 230 и 99 наим. чисел <math>\geq 230 + \frac{1 + 99}{2} \cdot 99</math></p> <p>Сумма 230 и 99 наим. чисел <math>\geq 5180</math></p> <p>=&gt; Не может</p>	<p>На доске написано 5 различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4. Может ли их сумма составлять 390?</p> <p><math>S \geq 24 + 54 + 84 + 114 + 144</math></p> <p><math>S \geq 420</math></p> <p>=&gt; Не может</p>

ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЫРАЖЕНИЯ		
#13 из видеокурса	#15 из видеокурса	#18 из видеокурса
<p>Найдите наибольшее возможное целое <math>k</math></p> $\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = k$ $\frac{a + b + c}{a + b + c} + \frac{99a + 9b}{a + b + c} = k$ $1 + \frac{99a + 9b}{a + b + c} = k$ <p>Мы ищем наибольшее значение левой части уравнения, поэтому минимизируем знаменатель. Пусть <math>c = 0</math></p> $1 + \frac{99a + 9b}{a + b} \geq k$ $1 + \frac{9a + 9b}{a + b} + \frac{90a}{a + b} \geq k$ $10 + \frac{90a}{a + b} \geq k$ <p><math>b</math> и <math>c</math> не могут быть нулями одновременно, поэтому пусть <math>b = 1</math></p> $10 + \frac{90a}{a + 1} \geq k$ <p>Теперь левая часть принимает наибольшее значение при <math>a = 9</math></p> $k \leq 91$	<p>Найдите наибольшее возможное целое <math>k</math></p> $\frac{700 + 10b + c}{7 + b + c} = k$ $\frac{7 + b + c}{7 + b + c} + \frac{693 + 9b}{7 + b + c} = k$ $1 + \frac{693 + 9b}{7 + b + c} = k$ <p>Попробуем выделить не 1, а не 10</p> $\frac{70 + 10b + 10c}{7 + b + c} + \frac{630 - 9c}{7 + b + c} = k$ $10 + \frac{630 - 9c}{7 + b + c} = k$ <p>Если увеличивать <math>b</math> или <math>c</math>, то <math>k</math> уменьшается, поэтому для каждого значения <math>b + c</math>, начиная с наименьших, будем искать <math>b</math> и <math>c</math> такие, чтобы <math>k</math> было целым</p> <p>Если <math>b + c = 0</math>, то это противоречит условию</p> <p>Если <math>b + c = 1</math>, то целого <math>k</math> не будет</p> <p>Если <math>b + c = 2</math>, то <math>k = 80</math> — наибольшее при <math>b = 2</math> и <math>c = 0</math></p> $k \leq 80$	<p>Найдите наибольшее возможное <math>k</math></p> $\frac{100a + 10b + c + 10b + 3}{100a + 10b + c} = k$ $\frac{100a + 10b + c}{100a + 10b + c} + \frac{10b + 3}{100a + 10b + c} = k$ $1 + \frac{10b + 3}{100a + 10b + c} = k$ <p>Для максимизации <math>k</math> надо минимизировать <math>c</math> и <math>a</math></p> <p>Учитывая, что <math>1 \leq a \leq 9</math> и <math>0 \leq c \leq 9</math></p> $k \leq 1 + \frac{10b + 3}{10b + 100}$ $k \leq 1 + \frac{10b + 100}{10b + 100} - \frac{97}{10b + 100}$ $k \leq 2 - \frac{97}{10b + 100}$ <p>Для максимизации <math>k</math> надо минимизировать дробь, а для этого надо максимизировать <math>b</math></p> <p>Учитывая, что <math>0 \leq b \leq 9</math></p> $k \leq 2 - \frac{97}{190}$ $k \leq \frac{283}{190}$

## ОСТАТКИ

Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как и само число

Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 9, как и само число

		
#5 из видеокурса	#77 из видеокурса	
На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6. Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021?	На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго. Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?	
Все слагаемые, которые можно использовать, при делении на 5 дают остаток 1	Сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как и само число	
1021 при делении на 5 тоже даёт остаток 1	=> все три числа на доске имеют одинаковый остаток при делении на 3, т.е. 0 0 0 или 1 1 1 или 2 2 2	
1 слагаемое использоваться нельзя, т.к. 1021 не подходит 2 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 2 3 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 3 4 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 4 5 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 0 6 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 1	=> итоговая сумма точно кратна 3, т.е. не может быть 2021	
=> число слагаемых $\geq 6$		