ДОКАЖИТЕ, ЧТО СЕЧЕНИЕ ИЛИ ГРАНЬ ЯВЛЯЕТСЯ … (ПУНКТ А)

1

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M − середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM − равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL : LC = 1 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая рёбра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что сечение AFC_1E − параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E − ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

5 (дз)

нет аналога

14 Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
б) Найдите угол между прямыми DE и BD_1.

нет аналога

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса – треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ − квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

10 (дз)
нет аналога

Докажите, что плоскость проходит через конкретную точку (пункт а)

1

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 6:1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB = 3:4$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 5:3$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB = 5:11$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 3$, а на ребре B_1C_1 – точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 3:2$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB = 2:3$, а на ребре B_1C_1 − точка T так, что $B_1T:TC_1 = 2:1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

Докажите, что пирамида - правильный тетраэдр или что пирамида правильная (пункт а)

1

14 Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

14 Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче DB_1 отмечена точка P так, что $DP = 4\sqrt{11}$.

а) Докажите, что PA_1BC_1 — правильный тетраэдр.
б) Найдите длину отрезка AP.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.
б) Найдите объём B_1KLM.

Отношение отрезков (пункт а)

1

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

а) Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
б) Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

а) Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
б) Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

14

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD, проведённые к стороне BD, имеют общее основание.
б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

14 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и L — центры граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C.
б) Пусть M — середина ребра CD. Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL, если известно, что $AB = 2AA_1$.

4 (дз)
нет аналога

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

14

Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1.

а) Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1. Докажите, что C_1 — середина отрезка CM.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра призмы равны a.

14

В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EK_1 = 1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α, параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

7 (дз)
нет аналога
8

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

14

Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1 в отношении 1:7, считая от вершины D_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1, и плоскостью основания призмы.

10 (дз)
нет аналога
11

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

14

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AA_1 отмечена точка K, причём $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина ребра DD_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK:KA_1 = 1:2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM:MD_1 = 2:1$.
б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1Q = 3$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

14 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины C_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α, если он прямой, его основание $ABCD-$ ромб с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$, а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.
б) Точка N – середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

14 Плоскость γ, содержащая диагональ BD грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, пересекает ребро B_1C_1 и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

а) Докажите, что плоскость γ делит ребро B_1C_1 в отношении 2:1, считая от вершины B_1.
б) В каком отношении плоскость γ делит объём куба?

16 (дз)
нет аналога

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 1:2, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

20 (дз)

нет аналога

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14 Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M − середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

22 (дз)

нет аналога

14

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M середина ребра C_1D_1, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α, параллельная прямой BD и пересекающая диагональ A_1C в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ A_1C в отношении $A_1O : OC = 3 : 5$.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC), если дополнительно известно, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

14

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка F середина ребра AB, а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE:ED_1 = 6:1$. Через точки F и E проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая диагональ B_1D в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO:OB_1 = 2:3$.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC), если дополнительно известно, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

14

Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD. Боковые стороны равны меньшему основанию CD, а их продолжения пересекаются под углом $60°$.

а) Плоскость CA_1D_1 пересекает ребро AB в точке M. Докажите, что прямая D_1M проходит через середину диагонали A_1C.

б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью CA_1D_1, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

24 (дз)
нет аналога

Угол между прямыми (пункты а и б)

1

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90°.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

1 (дз)
нет аналога

14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$.

а) Докажите, что угол между прямыми BC_1 и AC равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 − образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

14 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и L — центры граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C.

б) Пусть M — середина ребра CD. Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL, если известно, что $AB = 2AA_1$.

14

Точки O и O_1 − центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка K − середина отрезка OO_1. На окружности верхнего основания взяты точки A и B, не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B соответственно относительно точки K.

а) Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1, если радиус основания равен 5, $AB = 6$, а высота цилиндра равна 8.

8 (дз)
нет аналога
9

14 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.

а) Докажите, что прямые B_1D_1 и AC_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и AC_1, если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

14

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что диагональ A_1C куба и диагональ DC_1 грани DD_1C_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние от точки M — середины ребра AA_1, до плоскости BC_1D, если ребро куба равно $2\sqrt{3}$.

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos\angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

14 Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$. Известно, что $AB_1 = 10$, $DB_1 = 8$ и $AD = 6$.

а) Докажите, что прямые DB и BC перпендикулярны.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды B_1ABD, если $B_1C = 6\sqrt{2}$.

нет аналога

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

13 (дз)

нет аналога

14 Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
б) Найдите угол между прямыми DE и BD_1.

14 (дз)
нет аналога

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 4 .

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10 .

14

Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D, а боковые грани призмы – квадраты.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

17 (дз)
нет аналога

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковое рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

нет аналога

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ угол между диагоналями A_1C и B_1D равен $60°$.

а) Докажите, что диагонали A_1C и AC_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости BMD, где точка M — середина ребра CC_1, если сторона основания призмы равна 8.

Угол между прямой и плоскостью (пункты а и б)

1

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

2 (дз)

нет аналога

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.
б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

14

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.
б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA − высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

14

Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB = 6$, $BC = 8$ и $SC = 5\sqrt{2}$.

14

Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB = 4$, $BC = 6$ и $SC = 4\sqrt{2}$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

14

Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD. Боковые стороны равны меньшему основанию CD, а их продолжения пересекаются под углом 60°.

а) Плоскость CA_1D_1 пересекает ребро AB в точке M. Докажите, что прямая D_1M проходит через середину диагонали A_1C.

б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью CA_1D_1, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

7 (дз)
нет аналога
8

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Угол между плоскостями (пункты а и б)

1

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD, проведённые к стороне BD, имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

1 (дз)

нет аналога

14

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45°.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

14

В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EK_1 = 1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α, параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

3 (дз)
нет аналога
4

14

Основание пирамиды $PABCD$ − трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

14

Дана пирамида $PABCD$, в основании – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.

б) Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

14

Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1 в отношении 1:7, считая от вершины D_1.
б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1, и плоскостью основания призмы.

5 (дз)
нет аналога
6

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.
б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

14

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.
б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

14 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На рёбрах AB, AC и AD соответственно отмечены точки M, N и K, такие, что $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $AK = \frac{5}{2}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC.

14

В правильной треугольной пирамиде $BMNK$ с основанием MNK сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах MN, MK и MB соответственно отмечены точки F, E и P, такие, что $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $MP = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости FEP и NBK параллельны.
б) Найдите расстояние от точки P до плоскости NBK.

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ − квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ − квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

11 (дз)

нет аналога

14

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M середина ребра C_1D_1, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и M проведена плоскость α, параллельная прямой BD и пересекающая диагональ A_1C в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ A_1C в отношении $A_1O:OC = 3:5$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC), если дополнительно известно, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − куб.

14

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка F середина ребра AB, а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE:ED_1 = 6:1$. Через точки F и E проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая диагональ B_1D в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO:OB_1 = 2:3$.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC), если дополнительно известно, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 3:1$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB = 1:3$, а на ребре B_1C_1 − точка T так, что $B_1T:TC_1 = 1:2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 3:2$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB = 2:3$, а на ребре B_1C_1 − точка T так, что $B_1T:TC_1 = 2:1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

Расстояние от точки до плоскости (пункты а и б)

1

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что диагональ A_1C куба и диагональ DC_1 грани DD_1C_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние от точки M – середины ребра AA_1, до плоскости BC_1D, если ребро куба равно $2\sqrt{3}$.

2 (дз)
нет аналога

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1Q = 3$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA − высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

нет аналога

14 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На рёбрах AB, AC и AD соответственно отмечены точки M, N и K, такие, что $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $AK = \frac{5}{2}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC.

14

В правильной треугольной пирамиде $BMNK$ с основанием MNK сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах MN, MK и MB соответственно отмечены точки F, E и P, такие, что $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $MP = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости FEP и NBK параллельны.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости NBK.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ угол между диагоналями A_1C и B_1D равен 60°.

а) Докажите, что диагонали A_1C и AC_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости BMD, где точка M — середина ребра CC_1, если сторона основания призмы равна 8.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, высота $SO = 4$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и D.

а) Докажите, что расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка C, а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 16$, высота $SO = 6$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 8$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и A.

а) Докажите, что расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B, а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ.

Расстояние между прямыми (пункт б)

1

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90°.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

1 (дз)
нет аналога

14 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.

а) Докажите, что прямые B_1D_1 и AC_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и AC_1, если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

14

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

14

Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D, а боковые грани призмы – квадраты.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

3 (дз)

нет аналога

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

нет аналога

Найти отрезок (пункт б)

1

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L – середина ребра MB. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

а) Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.
б) Найдите высоту данной пирамиды.

1 (дз)
нет аналога
2

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M − середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM − равнобокая трапеция.
б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M – середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM – равнобокая трапеция.
б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

14 Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

14

Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче DB_1 отмечена точка P так, что $DP = 4\sqrt{11}$.

а) Докажите, что PA_1BC_1 − правильный тетраэдр.
б) Найдите длину отрезка AP.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

4 (дз)

нет аналога

14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 1:2, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

14 Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

6 (дз)
нет аналога

Периметр или площадь (пункт б)

1

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

а) Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.

б) Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

а) Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
б) Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K — середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

14

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 − образующая цилиндра, а AC − диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$.

а) Докажите, что угол между прямыми BC_1 и AC равен 60°.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

14

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45°.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

14

Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1.

а) Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1. Докажите, что C_1 — середина отрезка CM.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра призмы равны a.

14

Точки O и O_1 — центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка K — середина отрезка OO_1. На окружности верхнего основания взяты точки A и B, не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B соответственно относительно точки K.

а) Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.
б) Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1, если радиус основания равен 5, $AB = 6$, а высота цилиндра равна 8.

9 (дз)
нет аналога
10

14 Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$. Известно, что $AB_1 = 10$, $DB_1 = 8$ и $AD = 6$.

а) Докажите, что прямые DB и BC перпендикулярны.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды B_1ABD, если $B_1C = 6\sqrt{2}$.

10 (дз)
нет аналога

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AA_1 отмечена точка K, причём $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M – середина ребра DD_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая рёбра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что сечение AFC_1E — параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

12 (дз)

нет аналога

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 6:1$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB = 3:4$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

14 Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 4 .

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.
б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10 .

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса – треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

нет аналога

14 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины C_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α, если он прямой, его основание $ABCD$ − ромб с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$, а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковое рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

17 (дз)

нет аналога

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Объём (пункт б)

1

14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

1 (дз)
нет аналога
2

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.
б) Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.

2 (дз)
нет аналога

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

14

Основание пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

14

Дана пирамида $PABCD$, в основании – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.

б) Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 8. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos\angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.
б) Найдите объём B_1KLM.

нет аналога

14 Плоскость γ, содержащая диагональ BD грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, пересекает ребро B_1C_1 и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

а) Докажите, что плоскость γ делит ребро B_1C_1 в отношении 2:1, считая от вершины B_1.

б) В каком отношении плоскость γ делит объём куба?

9 (дз)

нет аналога

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N − середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, высота $SO = 4$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и D.

а) Докажите, что расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ.
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка C, а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 16$, высота $SO = 6$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 8$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и A.

а) Докажите, что расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B, а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.