Wild Mathing

ОЛИМПИАДЫ

Содержание

Занятие 11. Тригонометрия. Уравнения

Домашняя работа

Easy

1. (*«Межведомственная олимпиада», 2018*) Решите уравнение $x^2 - 2x \cdot \sin(xy) + 1 = 0$.

2. (*«ОММО», 2011*) Решите уравнение $2|x-1|\sin x = x - 1$.

3. (*«Ломоносов», 2013*) Решите уравнение $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

4. (*«Росатом», 2017*) При каких натуральных n уравнение $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx = 0$ имеет не менее 10 решений на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$?

5. (*«Росатом», 2014*) Найдите сумму первых 128 неотрицательных решений уравнения

$$3(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x) + 4\sin x = 0.$$

6. (*«ПВГ», 2019*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{y}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Normal

7. (*«Всесибирская олимпиада», 2018*) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$.

8. (*«Росатом», 2016*) При каких целых n число $x = \frac{\pi}{4}$ является решением уравнения

$$\cos\frac{nx}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{3}\right)?$$

9. (*«Росатом», 2015*) Найдите все пары чисел (x, y) в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \sin^3 x - 4\sin^2 x\cos y + 5\sin x\cos^2 y - 2\cos^3 y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos y = 0. \end{cases}$$

10. (*«Росатом», 2014*) Найдите наибольшее число $l > 0$, для которого существует интервал длины l числовой оси, не содержащий решений уравнения $32\sin^6 x - 48\sin^4 x + 22\sin^2 x - 3 = 0$.

11. (*«ПВГ», 2017*) Определите, при каких значениях n и k уравнение

$$\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$$

является следствием уравнения

$$x + y = \frac{\pi n}{48}.$$

12. (*«Физтех», 2020*) Решите уравнение

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}.$$

13. (*«Физтех», 2016*) Решите уравнение $(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

14. (*«Физтех», 2015*) Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

15. (*«Физтех», 2014*) Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{7\cos^2 x + 5\sin^2 x - 6} + \frac{\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{6 - 5\cos^2 x - 7\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}.$$

16. (*«Физтех», 2013*) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + 4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x.$$

17. (*«ОММО», 2020*) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$4\sin(3x) + 13\cos(3x) = 8\sin(x) + 11\cos(x).$$

18. (*«ОММО», 2012*) Найдите сумму различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

19. (*«Физтех», 2018*) Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3$ и $2\sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Hard

20. (*«ПВГ», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

21. (*«Ломоносов», 2017*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

1) уравнение $\cos(\cos x) + \sin(\sin x) = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; \pi]$;
2) уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$ имеет хотя бы один корень.

22. (*«ПВГ», 2014*) Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3\operatorname{tg} a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos 3a \cdot \cos x + 3\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0$$

меньше либо равно $\frac{\pi}{2}$.

Ответы

1. $\left(\pm 1; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$

2. $1,\ \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{6} - 2\pi n,\ \pm\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{N}_0.$

3. $\pm\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4. $n \geqslant 11.$

5. $4096\pi.$

6. $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right).$

7. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

8. $-9 + 24m,\ 1 + 8m,\ m \in \mathbb{Z}.$

9. $\left(0; -\dfrac{\pi}{2}\right), \left(\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right), \left(\arcsin\dfrac{1}{4}; -\arccos\dfrac{1}{8}\right), \left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{4}; -\arccos\dfrac{1}{8}\right), \left(\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{3}\right).$

10. $\dfrac{\pi}{3}.$

11. $(n, k) = (96m, 0),\ m \in \mathbb{Z}.$

12. $\dfrac{\pi}{44} + \dfrac{2\pi n}{11},\ n \neq 11m + 4,\ n, m \in \mathbb{Z}.$

13. $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

14. $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

15. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

16. $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

17. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{13} - \operatorname{arctg}\dfrac{8}{11}\right).$

18. $\dfrac{11\pi}{5}.$

19. $\dfrac{3}{2}.$

20. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi k\right),\ n, k \in \mathbb{Z}.$

21. $\left[-\dfrac{1}{2};\ \cos 1\right) \cup \left(\dfrac{3}{2};\ 1 + \sin 1\right).$

22. $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Подсказки и решения

1. Рассмотрите уравнение $x^2 - 2x \cdot a + 1$. При каких a оно имеет решения? Решение (стр. 1, задача 1).

2. Раскройте модуль по определению: всякий раз удастся вынести $(x-1)$ за скобки.

3. Используйте метод вспомогательного аргумента. Решение (стр. 1, задача 2).

4. Чем больше сомножителей (синусов), тем больше корней, поэтому достаточно определить, когда впервые уравнений будет иметь не менее 10 решений на данном отрезке.

5. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{2 \sin x \cos x}$. Решение (стр. 13, задача 2).

6. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ при $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Решение (стр. 2, задача 1).

7. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, а далее попробуйте преобразовать сумму косинусов в произведение. Решение (стр. 1, задача 11.2).

8. Можно сразу подставить $x = \frac{\pi}{4}$ в уравнение, но в любом случае напомню, что $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, а уравнение такого вида мы решали на занятии. Решение (стр. 11, задача 2).

9. Если $\cos y \neq 0$, то обе части первого уравнения можно смело разделить на $\cos^3 y$. Но это именно «если». Решение (стр. 6, задача 2).

10. $t = \frac{1}{2}$ служит решением уравнения $32t^3 - 48t^2 + 22t - 3 = 0$. Решение (стр. 4, задача 2).

11. Если множество решений уравнения A содержится в множестве решений уравнения B, то $A \Rightarrow B$. То есть B является следствием A.

12. Общий знаменатель дробей представляет собой $\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x$, а в числителе удается свернуть формулы синуса и косинуса разности аргументов. Решение (стр. 26, задача 2).

13. Правая часть никак не меньше 16, а левая — не больше, чем... Решение (стр. 13, задача 2).

14. Раскрываем модуль в два случая и преобразуем сумму (разность) косинусов в произведение. Решение (стр. 13, задача 1).

15. Равенство $5\sin^2 x + 5\cos^2 x = 5$ позволяет привести знаменатели к $\cos 2x$ $(= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x)$. Решение (стр. 1, задача 2).

16. Если правая часть отрицательна, то решений нет. А если неотрицательна, то обе части уравнения можно возвести в квадрат. Решение (стр. 10, задача 3).

17. Дважды метод вспомогательного аргумента. Решение (стр. 3, задача 6).

18. Домножьте обе части уравнения на $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, а затем преобразуйте все произведения синусов в разность косинусов. Первое решение (стр. 2, задача 5), второе решение.

19. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y}$ — хорошее начало! Решение (стр. 10, задача 4).

20. Обозначим $a = \sin x$, $b = \cos y$. Рассмотрите квадратные уравнения относительно a. Решение (стр. 2, задача 5).

21. Что можно сказать о характере монотонности функции $f(x) = \cos(\cos x) + \sin(\sin x)$ на отрезках $[0; \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2}; \pi]$? Решение (стр. 2, задача 7).

22. Рассмотрите квадратное уравнение относительно $\cos x$. Решение (стр. 2, задача 5).

Дополнительные материалы

[1] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 1-7).

[2] И. М. Гельфанд и др. Тригонометрия.

[3] М. И. Сканави. Сборник задач для поступающих в ВУЗы (раздел «Тригонометрия»).

Занятие 12. Тригонометрия. Неравенства, аркфункции, преобразования

Домашняя работа

Easy

1. (*Савватеев, 2018*) Докажите, что

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

2. (*«ПВГ», 2018*) Решите уравнение

$$\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5}\right) \cdot x + \pi = 2 \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

3. (*«ПВГ», 2016*) Сравните числа $\sin 1 + \cos 1$ и $\dfrac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

4. (*«ПВГ», 2017*) Решите неравенство $3 \sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geqslant 5 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right)$.

Normal

5. (*«ПВГ», 2015*) Что больше:

$$2 \sin \frac{5\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16}$$

или сумма корней уравнения

$$|3 \cdot \arccos x| = |\arcsin x|?$$

6. (*«Ломоносов», 2019*) Найдите решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

7. (*«ПВГ», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x).$$

8. (*«ПВГ», 2017*) Решите неравенство $\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)^7 > 1$.

9. (*«Росатом», 2017*) Решите уравнение $\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos 2x))$.

10. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

11. (*«Ломоносов», 2016*) Решите уравнение $\operatorname{arcctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

12. (*«Ломоносов», 2020*) Решите неравенство $\operatorname{tg} \arccos x \leqslant \sin \operatorname{arctg} x$.

13. (*«ОММО», 2017*) Сравните числа $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

14. (*«ОММО», 2016*) Вычислите $2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \dfrac{4}{5}$.

15. (*«ОММО», 2015*) Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2 3(x) + \ldots + \cos^2(nx).$$

16. (*«ПВГ», 2019*) Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|) \geqslant \arccos|\cos 2x|$.

17. (*«ПВГ», 2012*) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2\sin x + 3\cos x| + |\sin x - 3\cos x| \leqslant 3\sin x.$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

18. (*«ПВГ», 2012*) Решите неравенство

$$\arccos(4x^2 - 8x + 3) + 2\arcsin(x - 1) < 0.$$

Hard

19. (*«ОММО», 2018*) Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$\left(y^2 - \arccos^2(\cos x)\right) \cdot \left(y^2 - \arccos^2(\cos(x + \pi/3))\right) \cdot \left(y^2 - \arccos^2(\cos(x - \pi/3))\right) < 0.$$

20. (*«ОММО», 2019*) Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3\arcsin x - 2\arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

21. (*«ПВГ», 2019*) При всех значениях $a \in \mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) + (x - a)^2 \leqslant 2\operatorname{arctg} x.$$

22. (*«ММО», 2014*) Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x + b\sin 2x| \leqslant 1$.

23. (*«САММАТ», 2016*) Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{2\arccos x - \arccos y} \cdot (|x| + |y| - 1) = 0, \\ \sqrt{2\arccos y - \arccos x} \cdot (|x + y| + |x - y| - 1) = 0. \end{cases}$$

Ответы

2. $x \in \mathbb{R}$.

3. Первое больше.

4. $\frac{3\pi}{4} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Первое больше.

6. $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

7. $\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup \left[\pi + 2\pi k; \frac{17\pi}{12} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

8. $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

9. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

10. $\frac{\pi}{3}$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. $\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right]$.

13. Второе больше.

14. π.

15. $\frac{n-1}{2}$.

16. $\{\pm\pi k\} \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3} - 2\pi k; -\frac{\pi}{3} - 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{N}_0$.

17. $2 \operatorname{arctg} \frac{9}{7}$.

18. $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

20. $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

21. При $a < 0$ решение нет, при $a \geqslant 0$ единственное решение $x = a$.

22. $(a, b) = \left(\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}; \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

23. $\left(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\right),\ (-1; 0),\ (0; -1),\ (1; 1),\ \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Подсказки и решения

1. Рассмотрите тангенсы левой и правой частей. Будет ли такой переход равносильным? Решение.

2. Нарисуйте египетский треугольник: выразите синус угла, который лежит напротив катета длины 3. Затем выразите его косинус и тангенс. Решение (стр. 15, задача 1).

3. Что можно сказать о монотонности функции $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$? Решение (стр. 1, задача 1).

4. Оцените возможные значения левой и правой частей неравенства по отдельности, и задача станет устной. А здесь решение с помощью замены (стр. 6, задача 1).

5. Произведение синуса на косинус можно преобразовать в сумму синусов. А для поиска корней уравнения припомните тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

6. Исследуйте функцию $f(t) = t^{2018} + t^{-2019}$ на монотонность. Решение (стр. 4, задача 6.1).

7. Сгруппируйте слагаемые в правой части да сверните синус двойного угла в левой. Решение (стр. 3, задача 4).

8. Изобразите графики функций $f(t) = \sqrt{t}$ и $g(t) = t^2$ да не забудьте про основное тригонометрическое тождество. Решение (стр. 7, задача 2).

9. Используйте формулу приведения: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Решение (стр. 15, задача 2).

10. Найдите $D(y)$ — область определения функции y, она позволит получить оценку на значение периода. Решение (стр. 1, задача 2).

11. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Решение (стр. 1, задача 2).

12. Похожую задачку мы обсудили на занятии. Идея проста: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Решение (стр. 2, задача 3).

13. Либо поработайте с производной, либо приведите дроби к общему знаменателю и преобразуйте произведение синусов в разность косинусов. Решение.

14. Попробуйте изобразить прямоугольный треугольник с катетами 2 и 1, отразите его симметрично относительно гипотенузы, длина которой $\sqrt{5}$, опишите окружность около полученного дельтоида, и ответ станет очевидным. Естественно, есть и более стандартное решение и даже еще одно.

15. Первое — с последним, второе — с предпоследним и так далее. Решение (стр. 3, задача 6).

16. Да хоть графически! Ведь достаточно рассмотреть любой отрезок длины 2π. Решение (стр. 8, задача 3).

17. $|a| + |b| = a + b \quad\Leftrightarrow\quad (a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0)$. Решение (стр. 4, задача 3).

18. Для начала удобно сделать замену $t = x - 1$. Решение (стр. 2, задача 2).

19. Эта задачка на закрепление: вместе сделали с арксинусами! Решение (стр. 9, задача 6).

20. Начало очевидное: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Далее нужно аккуратно рассмотреть все значения α на отрезке $[0; 2\pi]$. Решение (стр. 3, задача 6).

21. Докажите формулу $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{arctg} x$, взяв косинусы левой и правой частей. Решение (стр. 10, задача 3).

22. Попробуйте использовать то, что в точке $x = \frac{\pi}{3}$ верно равенство $\sin x = \sin 2x$. Решение.

23. Решите систему графически. Для того, чтобы изобразить множество точек, заданных уравнением $|x+y|+|x-y| = 1$, раскройте модули, используйте метод областей. А в случае с $2\arccos x = \arccos y$ удобно взять косинусы левой и правой частей (будет ли это равносильным преобразованием?). Решение (стр. 2, задача 5).

Дополнительные материалы

[1] И. В. Яковлев. Введение в аркфункции.

[2] И. В. Яковлев. Обратные тригонометрические функции.

[3] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (урок 7).

[4] И. М. Гельфанд и др. Тригонометрия.

Занятие 13. Планиметрия. Окружности

Домашняя работа

Easy

1. (*«ПВГ», 2014*) Окружность радиуса $2\sqrt{3}$ проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 6$, $MK = 2\sqrt{3}$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 10 от точки C.

2. (*«ПВГ», 2015*) Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
а) Найдите отношение BC к BD.
б) Найдите отношение радиуса окружности к BD.

3. (*«ПВГ», 2018*) В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6 : 1$ и $2 : 3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

4. (*«ПВГ», 2015*) В четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырехугольника.

5. (*«ПВГ», 2015*) Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (т. е. точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

6. (*«Ломоносов», 2020*) Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиуса 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.

Normal

7. (*«Ломоносов», 2011*) Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, причем $AL = 10$. Найдите BL, если $AK : BK - 2 : 5$.

8. (*«Ломоносов», 2017*) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые, касающиеся этой окружности в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

9. (*«ПВГ», 2013*) В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен $2\arccos\frac{3}{4}$. Окружность радиуса 4 с центром в середине основания AC пересекает прямую AB в точках K и L, а прямую BC в точках M и N, причем отрезки KM и LN пересекаются. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, L и N.

10. (*«ПВГ», 2013*) В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN. При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC, а прямая BN — через середину F отрезка AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

11. (*«Физтех», 2018*) Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1, AL = 4$. Найдите $\angle ACB, MK, AB$ и площадь треугольника CMN.

12. (*«Физтех», 2017*) В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная l к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

13. (*«Физтех», 2016*) Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причем $AB = BC = 2, CD = 1, DE = 3$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

14. (*«Физтех», 2014*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали AC, касается орезков BC, AB и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $AC = 4\sqrt{5}$, а четырехугольник $KOCD$ вписан в окружность Ω. Найдите угол BOC, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

15. (*«Физтех», 2013*) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причем $AN = 11, BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

16. (*«Физтех», 2012*) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью — A и B, с большей окружностью C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = \frac{24}{5}, AC = 12$.

17. (*«ОММО», 2020*) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Найдите длину DB, если $AE = 6$, а $BE = 2$.

18. (*«ОММО», 2018*) В трепецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16, DK = 4$ и $CD = 6$.

Hard

19. (*«Всесибирская олимпиада», 2018*) Пусть A и B — две различных фиксированных точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.

20. (*«ОММО», 2016*) Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

21. (*«Высшая проба», 2018*) Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нем проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

22. (*«Высшая проба», 2016*) Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

23. (*«Высшая проба», 2017*) Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть M — середина стороны BC, K — середина B_1C_1. Докажите, что окружность, проходящая через K, H и M, касается AA_1.

Ответы

1. $22\sqrt{3}$ **2.** а) $\sqrt{3}$ б) $\sqrt{\frac{10}{13}}$ **3.** $\sqrt{26}$ **4.** $2\sqrt{30}$ **5.** $R_1 = \dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $R_2 = \dfrac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ **6.** 10 **7.** 25 **8.** $\frac{5}{2}$ **9.** $\frac{8}{\sqrt{7}}$ **10.** $\frac{72}{5}$ **11.** 120°, 3, $\frac{5\sqrt{7}}{2}$, $\frac{45\sqrt{3}}{28}$ **12.** 5, $\frac{32}{7}$, $\frac{16}{\sqrt{7}}$ **13.** $8\sqrt{\frac{3}{11}}, 5\sqrt{\frac{3}{11}}$ **14.** 90°, $30\sqrt{10}$ **15.** $60\sqrt{6}$, $\frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$ **16.** 3, 12 **17.** 2 **18.** 432 **20.** $\sqrt{5}$.

Подсказки и решения

1. Используйте подобие треугольников ABC и KMC.

2. Свойство касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности. Решение.

3. Соедините центр окружности O с серединами хорд. Решение (стр. 11, задача 4).

4. Проще всего использовать формулу Брахмагупты. Здесь решение без нее.

5. Используйте теорему косинусов. Решение (стр. 3, задача 2).

6. Докажите, что $\angle BOQ = 90^\circ$. Решение (стр. 2, задача 4.1).

7. Приведите касательную в точке K, а также соедините точку Q с точкой пересечения AK и меньшей окружности. Решение (стр. 2, задача 5).

8. Используйте подобие треугольников MAB и MDA. Решение (стр. 1, задача 4).

9. В конечном счете выручает следствие из теоремы синусов. Решение (стр. 1, задача 3).

10. Используйте теорему о равенстве произведений отрезков пересекающихся хорд. Решение (стр. 1, задача 3).

11. Вычислите угол OCK, а затем сам собой найдется $\angle LOK = 60^\circ$. Решение (стр. 10, задача 5).

12. Используйте расширенную теорему синусов. Напомню, что угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине градусной меры дуги, которую высекает. Решение (стр. 10, задача 4).

13. Если обозначить центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно, опустить перпендикуляр QH из точки Q на прямую AE, то четырехугольник $CHQO$ окажется прямоугольной трапецией. Решение (стр. 14, задача 4).

14. Биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны. Решение (стр. 1, задача 4).

15. Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая. Решение (стр. 11, задача 5).

16. Пусть окружности касаются в точке K. Проведя общую касательную в этой точке, докажите, что трапеция $ABCD$ — равнобокая. Это также можно объяснить симметрией относительно линии центров. Далее счет углов, и ответ получен. Другой подход в официальном решение (стр. 1, задача 4).

17. Используйте свойство медианы прямоугольно треугольника, проведенной из вершины прямого угла. Решение. (стр. 3, задача 4)

18. Вновь полезно вспомнить, что биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны. Решение (стр. 3, задача 4).

19. Докажите, что при движении точки C по большей дуге AB окружности точка P будет также двигаться по некоторой окружности. Для этого достаточно показать, что угол APB при таком движении не меняется. Решение (стр. 3, задача 5).

20. Счет углов и в конечном счете — $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. Равенство $\angle ABC = \angle DBA$ — уже половина дела! Решение (стр. 3, задача 4).

21. Не забудьте признак вписанного четырехугольника и то, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной около него окружности. Решение (стр. 3, задача 11-3).

22. Вновь напомню: угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине градусной меры дуги, которую высекает. Решение (стр. 4, задача 2).

23. Докажите, что четырехугольник BCB_1C_1 вписанный, из этого последует подобие треугольников BCH и C_1B_1H. Решение (стр. 7, задача 11-6).

Дополнительные материалы

[1] Р. К. Гордин. Планиметрия. Задачник 7-9 классы.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия. Том 1.

[4] «Дополнительные главы по геометрии» за 7–9 классы. Бесплатный онлайн-курс на платформе «Сириус».

Занятие 14. Планиметрия. Многоугольники

Домашняя работа

Easy

1. (*«ПВГ», 2014*) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

2. (*«ПВГ», 2014*) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

3. (*«ПВГ», 2016*) На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1$, $CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырехугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

4. (*«ПВГ», 2017*) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC известно, что $\angle ABC = \pi/9$. На стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла DCB (в радианах) и сравните ее с 0,18.

5. (*«ПВГ», 2017*) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK.

6. (*«ПВГ», 2016*) Серединами оснований BC и AC трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно. что $AD = 10BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты точки M и N так, что прямая MN параллельна осованиям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей.

7. (*«ОММО», 2012*) Длина медианы AD треугольника ABC равна 3, длины сторон AB и AC — 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

8. (*«ОММО», 2011*) Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 см и 12 см. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении $1 : 3$, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

Normal

9. (*«ПВГ», 2019*) В треугольнике ABC $\angle A = 2\alpha$, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольнике DEI, если сумма длин отрезков DI и EI равна $2d$.

10. (*«ПВГ», 2019*) Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 3$, $AD = 4$, $AC = 6$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

11. (*«Росатом», 2020*) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найдите расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен 30°.

12. (*«Ломоносов», 2014*) Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 2. Найдите острый угол ромба.

13. (*«Ломоносов», 2016*) Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно треугольника ABC. Найдите длину стороны AC, если

$$3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1} = (2; 1).$$

14. (*«ОММО», 2013*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

15. (*«ОММО», 2014*) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $30°$. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

16. (*«ОММО», 2016*) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

17. (*«Всесибирская олимпиада», 2017*) Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P, отличную от O — центра описанной окружности треугольника ABC, и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA. Доказать, что угол APO — прямой.

18. (*«Всесибирская олимпиада», 2013*) Периметр треугольника ABC равен 24, а отрезок, соединяющий точку пересечения его медиан с точкой пересечения его биссектрис, параллелен стороне AC. Найдите длину AC.

Hard

19. (*«Высшая проба», 2014*) Через вершины правильного шестиугольника проведены 6 различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

20. (*«ММО», 2017*) Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где F — середина отрезка BE.

21. (*«Турнир городов», 2015*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

22. (*«Олимпиада СПбГУ», 2020*) На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P, не лежащая на диагонали AC. На луче AP взята такая точка Q, что $AP = PQ$. Через точку Q провели прямую, параллельную стороне AB, она пересекла сторону BC в точке R. Затем через точку Q провели прямую, параллельную стороне AD, она пересекла прямую CD в точке S. Найдите угол PRS.

Ответы

1. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$ **2.** $9:2$ **3.** 28% **4.** $\angle DCB = \frac{\pi}{18} < 0{,}18$ **5.** 12 **6.** $19:17$ **7.** $6\sqrt{6}$ **8.** $4\sqrt{3}$
9. $\frac{d\sqrt{2(1+\sin\alpha)}}{2\cos\alpha}$ **10.** $8\sqrt{5}$ **11.** $5\sqrt{3}$ **12.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ **13.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **14.** 2013 **15.** $\sqrt{3}$ **16.** 224 **18.** 8
19. Да **22.** $180°$.

Подсказки и решения

1. Вспомните, как мы в конце занятия выводили формулу для биссектрисы. Решение.

2. Эту задачку можно решить в одну строчку — приободритесь. Решение в закрепленном комментарии.

3. Используйте теорему об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол. Решение.

4. Отметьте внутри треугольника ABC точку O так, чтобы треугольник AOC был равносторонним. Решение (стр. 2, задача 4).

5. Используйте подобие треугольников. Решение (стр. 8, задача 3).

6. Здесь стоит по-честному записать площади треугольников, рассмотреть функцию. Для того, чтобы выразить длину NM через основания, отметье на стороне AD точку W так, чтобы $BC = WD$. Пусть $BW \cap MN = P$, тогда $MN = MP + PN$, и первый отрезок можно найти из подобных треугольников, а $PN = BC$. Решение (стр. 3, задача 3).

7. Используйте удвоение медианы. Решение (стр. 2, задача 4).

8. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Решение (стр. 3, задача 5).

9. Сам радиус удается выразить по следствию из теоремы синусов, а для оценки можно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Решение (стр. 10, задача 4).

10. Докажите, что AD делит отрезок BD пополам. Решение (стр. 13, задача 4).

11. Заметьте, что сумма углов QAB и BAN равна прямому углу. Решение (стр. 8, задача 6).

12. Введите переменные и запишите функцию для площади. Решение (стр. 1, задача 3).

13. Чему равна сумма $\overrightarrow{BB_1} + 2 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ по условию? Решение (стр. 3, задача 4).

14. Докажите, что $MKNL$ — прямоугольник. Решение (стр. 2, задача 4).

15. Используйте подобие треугольников. Решение (стр. 2, задача 7).

16. Используйте свойство биссектрисы треугольника. Решение (стр. 3, задача 4).

17. Докажите, что четырехугольник $BOPC$ — вписанный. Решение (стр. 2, задача 11.3).

18. Используйте свойство биссектрисы и теорему о пропорциональных отрезках. Решение (стр. 2, задача 11.3).

19. Ответ положительный, и стоит подумать о построении примера. Рассмотрите проекции всех вершин шестиугольника на прямую AD. Решение (стр. 4, задача 11.2).

20. Используйте поворот на $90°$. Решение.

21. Докажите, что $QC = QX = QY$. Решение.

22. Докажите, что если $AB \cap SQ = T$, $QR \cap AD = M$, $QR \cap BD = N$, то отрезок TM делится точкой P пополам. Решение.

Дополнительные материалы

[1] Р. К. Гордин. Планиметрия. Задачник 7-9 классы.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия. Том 1.

[4] «Дополнительные главы по геометрии» за 7–9 классы. Бесплатный онлайн-курс на платформе «Сириус».

Занятие 15. Задачи с параметром. Графический метод

Домашняя работа

Easy

1. (*«Росатом», 2014*) При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x-y=a, \\ \sin x = \sin(x+2y) \end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ -\pi \leqslant y \leqslant 0? \end{cases}$$

2. (*«Росатом», 2014*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} |\sin x| = \cos y, \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

3. (*«Ломоносов»*) При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y-4)^2=a? \end{cases}$$

4. (*«Росатом», 2016*) Найти a, при которых пара целых чисел (x,y), удовлетворяющая неравенствам $x-y>a-3,\ 2x+y<2a+3,\ y>1,\ x^2+y^2<9$, единственная.

Normal

5. (*«Ломоносов», 2012*) Найдите все значения $a>0$, при каждом из которых из неравенства $x^2+y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x|+3)(|y|+3) \leqslant 25$.

6. (*«ОММО», 2012*) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x|+|y|+||x|-|y||=6, \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

7. (*Wild, 2020*) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-y=\pi x-\frac{\pi^2}{4}, \\ b\cdot \arcsin(\sin x)=y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. (*«ОММО», 2014*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|\ln|x||=ax$ имеет три решения.

9. (*«Innopolis Open», 2018*) Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство

$$\left|x^2 + ax + b\right| \leqslant \frac{1}{8}$$

выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$.

10. (*«Innopolis Open», 2017*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{6x - x^2 - 4} + a - 2\right) \cdot ((a-2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет два различных действительных корня.

11. (*«Физтех», 2019*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такие, что расстояние между точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ равно 10.

12. (*«Физтех», 2016*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+9| + |x+2| - 2)\left(x^2 + y^2 - 3\right) = 0, \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

13. (*«Физтех», 2015*) Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдется число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y).

14. (*«Физтех», 2013*) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 36) \geqslant 0, \\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leqslant a? \end{cases}$$

15. (*«Физтех», 2012*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leqslant 6x - 4y - 13, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leqslant 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

16. (*«Росатом», 2019*) При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(4x + 3y - 25) = 0, \\ (x - 6\cos a)^2 + (y - 6\sin a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

17. (*«Росатом», 2019*) При каких b система уравнений

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-a+b)^2=2, \\ (x-y+3)(x-y-1)=0 \end{cases}$$

имеет решения при любых a?

18. (*«Росатом», 2015*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x-a+3|+|y-a|=1, \\ |x+a^2-1|+|y-a^2|=1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Hard

19. (*«ОММО», 2015*) При каких значениях параметра a уравнение $\ln(x+a)-4(x+a)^2+a=0$ имеет единственный корень?

20. (*«Физтех», 2017*) Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a-y\sin a-3\leq 0, \\ x^2+y^2-8x+2y-b^2-6b+8=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

21. (*«Росатом», 2018*) При каких a система уравнений

$$\begin{cases} |x\cos a+y\sin a-\frac{3}{\sqrt{2}}|+|y\cos a-x\sin a|=\frac{3}{\sqrt{2}}, \\ |x-y|+|x+y|=8 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

22. (*Wild, 2020*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sin\left(x^2-2x+2a^2-4a-3\right)=\arcsin\left(x^2-2x+2a^2-4a-3\right), \\ \min\left(x^2+3x+4, a\right)>2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы

1. $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{N}_0$.

3. $9;\ 49$.

4. $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 3)$.

5. $(0; 8]$.

6. $(3; 6)$.

7. 0.

8. $\left(-\frac{1}{e}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{e}\right)$.

9. $(a, b) = \left(-1; \frac{1}{8}\right)$.

10. $\left\{2 - \sqrt{5};\ 0;\ 1\right\} \cup \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

11. $\frac{\pi}{10} \pm \frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + \frac{2\pi n}{5},\ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$.

12. $9;\ 23 + 4\sqrt{15}$.

13. $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

14. $[4; 8)$.

15. $-\frac{11}{3};\ 3$.

16. $\left(\arccos \frac{8-3\sqrt{5}}{15} + 2\pi k; -\arccos \frac{8+3\sqrt{5}}{15} + 2\pi(k+1)\right) \cup \left\{\arccos \frac{4}{5} + 2\pi k\right\},\ k \in \mathbb{Z}$.

17. $[-5; 3]$.

18. $\left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$.

19. $\frac{3\ln 2 + 1}{2}$.

20. $\left(-\infty; -\sqrt{17}\right] \cup \left[\sqrt{17} - 6; +\infty\right)$.

21. $\pm \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

22. $(2; 1 + \sqrt{3}]$.

Подсказки и решения

1. Уравнение $\sin\alpha = \sin\beta$ равносильно совокупности $\alpha = \beta + 2\pi n$ или $\alpha = \pi - \beta + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Решение (стр. 6, задача 5).

2. График второго уравнения симметричен относительно осей Ox и Oy. Постройте график $x+y = a$ в первой координатной четверти (то есть при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$), а затем отразите его зеркально. Решение (стр. 20, задача 5).

3. Единственное решение возможно только при касании соответствующих окружностей. Здесь реализуется как внешний, так и внутренний случаи.

4. Используйте метод областей. Каждое из трех первых неравенств задает полуплоскость, а их пересечение — треугольник. На что влияет параметр a? Решение (стр. 13, задача 5).

5. Напомню, что если множество решений неравенства B включает в себя множество решений неравенства A, то из A следует B.

6. Уравнение $|x| = |y|$ равносильно $y = \pm x$. Эти прямые разбивают плоскость xOy на четыре области и являются осями симметрии для графика первого уравнения системы. В правой области имеем $|x| \geqslant |y|$, значит, исходное уравнение принимает вид $2|x| = 6$, и дальше все просто. Решение (стр. 3, задача 9).

7. В первой строчке — уравнение параболы, которая является симметричной относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Такой же симметрией обладает и график второго уравнения. Решение.

8. График функции $f_2(x) = \ln|x|$ получается отражением точек графика $f_1(x) = \ln x$ с отрицательными ординатами относительно оси абсцисс, все прочие точки при этом неподвижны. Аналогичным преобразованием получаем и график функции $f_3(x) = |\ln|x||$. Решение (стр. 3, задача 8).

9. Наибольшее значение функции $f(x) = |x^2 + ax + b|$ на отрезке $x \in [0; 1]$ может достигаться на концах этого отрезка или же в вершине параболы. Решение (стр. 3, задача 4).

10. Эта задача легко решается графически в плоскости xOt, где $t = a - 2$. $\sqrt{6x - x^2 - 4} = t$ равносильно системе $t \geqslant 0$ и $6x - x^2 - 4 = t^2$. Сравните этот подход с официальным решением (стр. 3, задача 4).

11. Расстояние между точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ находится по формуле $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Если две окружности радиуса 13 пересекаются и $PQ = 10$ — их общая хорда, то каким должно быть расстояние между центрами окружностей? Решение (стр. 8, задача 6).

12. Попробуйте, не используя метод областей и симметрию, преобразовать знакомый график $|y| + |x| = 2$ в график уравнения $|y+9|+|x+2| = 2$. Все остальное просто, но если запутались, подвигайте ползунок параметра. А здесь полное решение (стр. 14, задача 6).

13. Воспринимайте x в первом уравнении как функцию, зависящую от аргумента y, тогда станет ясно, почему графиком служит прямой угол. Чему равны координаты вершины этого угла? Решение (стр. 14, задача 6).

14. Решения уравнения $x^2 - xy + y^2 = 0$ легко заметить, если выделить полный квадрат (или найти дискриминант).Чтобы изобразить множество решений второго неравенства системы, используйте метод областей. Решение (стр. 11, задача 6).

15. Когда радиусы кругов зависят от параметра, очень удобно использовать метод координат: расстояние между центрами кругов приравниваем к сумме радиусов. Решение (стр. 1, задача 3).

16. Как определить всевозможные центры (x_0, y_0) окружностей, заданных вторым уравнением системы? $x_0 = 6\cos a,\ y_0 = 6\sin a \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = 6$. Решение (стр. 5, задача 5).

17. И вновь важно понять, как устроена линия центров окружностей, заданных первым уравнением. $x_0 = a,\ y_0 = a - b \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 - b$, и эта прямая параллельна прямым $y = x + 3,\ y = x - 1$. Решение (стр. 3, задача 5).

18. После №12 уже нетрудно уловить, на что влияет параметр a при построении квадратов — графиков первого и второго уравнений. На всякий случай оставлю графики в Desmos, а здесь официальное решение (стр. 8, задача 5).

19. Найдите точку, в которой прозводные логарифмической и квадратической функций поравняются. Может, это и есть точка касания графиков функций? Решение (стр. 4, задача 8).

20. Докажите, что семейство прямых $x\cos a + y\cos a = 3$ — это множество всех касательных к окружности с центром в начале координат и радиуса 3. Решение (стр. 16, задача 6).

21. Бродский писал: «Братик, нарисуй на бумаге простой квадратик» (приблизительная цитата). Решение (стр. 19, задача 5).

22. Уравнение $\sin t = \arcsin t$ решается очень легко, если вспомнить, что на общей области определения синус и арксинус являются взаимно обратными. То есть их графики симметричны относительно прямой $y = t$ в плоскости tOy. Стало быть, пересечения возможны только на оси симметрии, отсюда $\sin t = \arcsin t \quad\Leftrightarrow\quad \sin t = t$ при $-1 \leqslant t \leqslant 1$. А это уравнение уже совсем безобидное, особенно если подумать о функции $f(t) = \sin t - t$.

Дополнительные материалы

[1] А. И. Козко, В. С. Панфёров и др. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи.

[2] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 26 и 42).

[3] С. А. Шестаков. ЕГЭ 2021 Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень).

Занятие 16. Задачи с параметром. Аналитические методы

Домашняя работа

Easy

1. (*«Росатом», 2016*) При каких значениях a график функции $y = x^3 + 6x^2 + ax + 11$ касается прямой с уравнением $x + y = 3$? Найти абсциссы точек касания.

2. (*«Росатом», 2015*) Найдите все значения x, при которых найдется число a, для которого

$$\cos a - \cos 2a = \frac{16x^2 - 75x + 5}{16(x^2 - 4)}.$$

3. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + 4a$ равна 3.

4. (*«ПВГ», 2018*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a \cdot 4^{1/x-1} + (a-1) \cdot 2^{1/x} - a^3 + 3a - 2 = 0$$

не имеет корней.

Normal

5. (*«ОММО», 2020*) При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ имеет три действительных различных корня, образующих геометрическую прогрессию?

6. (*«ОММО», 2019*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2 (2x^2 + (2a+1)x - 2a) - 2\log_4 (x^2 + 3ax + 2a^2) = 0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4?

7. (*«ОММО», 2018*) При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

8. (*«ОММО», 2016*) При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет единственное решение?

9. (*«ОММО», 2013*) При каких значениях параметра a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

10. (*«ПВГ», 2015*) Найдите все значения a, при которых сущестует целое число n, удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2.$$

11. (*«ПВГ», 2017*) Найдите все целочисленные значения a, b, c, для которых существуют три различных корня уравнения

$$x^3 + (8+b)x^2 + (b+4)x + (c+3) = 0,$$

являющиеся корнями уравнения $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

12. (*«ПВГ», 2018*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно, пустое) решений неравенства $\log_2(x^2+4ax+4a^2-a) < 2$, меньше 2.

13. (*«Ломоносов», 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13\cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

14. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x-a) > 2x^2 - x - b$$

совпадает с промежутком $(0; 1)$.

15. (*«ПВГ», 2019*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^2+1)^3 + (x^3+1)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

16. (*«ПВГ», 2019*) Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x - 2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right| + \left|x - 2^{-4\operatorname{tg}(3a)}\right| + a\left(a + \frac{\pi}{12}\right)^2\left(a - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

17. (*«Ломоносов», 2019*) Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$4a^2 + 3x\lg x + 3\lg^2 x = 13a\lg x + ax$$

имеет единственное решение?

18. (*«ПВГ», 2014*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a-1) = (a^2 - 5a + 6)(x-3)^6 + \sqrt{(x-3)^2}, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19. (*«ПВГ», 2017*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{3|y|}, \\ x^2 + 9y^2 + a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Hard

20. (*«ПВГ», 2014*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} + a^2 - 4 = 2a\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

имеет единственное решние.

21. (*«Ломоносов», 2013*) Функция f с областью определения $D(f) = [1; +\infty)$ удовлетворяет равенству

$$f\left(\frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого $y \geqslant 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ решите неравенство

$$f\left(\frac{a}{x + 2a}\right) \leqslant 1.$$

22. (*«ОММО», 2017*) При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x - a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

23. (*«Высшая проба», 2012*) При каком значении параметра a график многочлена

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$$

симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c?

Ответы

1. 1) $a = -16,\ x = 1$ 2) $a = 11,\ x = -2$.

2. $\left(-\infty; -\frac{77}{2}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\frac{123}{48}; +\infty\right)$.

3. $-\frac{1}{2}$.

4. $[-2; 0] \cup \left\{1; \frac{3}{2}; \frac{-7+\sqrt{41}}{4}\right\}$.

5. 42.

6. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

7. 1.

8. $(-\infty; -8) \cup \left(-\frac{20}{3}; \frac{61}{8}\right)$.

9. $0,\ \pm 1,\ \pm\frac{5}{2}$.

10. $1;\ 1 + \log_3 \frac{16+5\sqrt{7}}{9}$.

11. $(a, b, c) = (5, -5, -6)$.

12. $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

13. $(-\infty; 13\sqrt{5} - 5)$.

14. $\left(-\frac{1}{2013}; \log_{2014} 2013\right)$.

15. $-\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1$.

16. При $a = -\frac{\pi}{12}$: $x = 16$. При $a \neq -\frac{\pi}{12}$: решений нет.

17. 2.

18. 1; 4.

19. $-1; -\frac{1}{8}$.

20. 0; .

21. При $a > 0$: $x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right]$. При $a < 0$: $x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right]$.

22. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$.

23. -9.

Подсказки и решения

1. Вспомните геометрический смысл производной. Решение (стр. 10, задача 1).

2. Найдите область значений функции $f(t) = -2t^2 + t + 1$. Решение (стр. 13, задача 2).

3. Используйте теорему Виета. Решение (стр. 1, задача 1).

4. Если дискриминант квадратного трехчлена относительно $2^{1/x}$ отрицателен, то решений нет. Но и в ином случае решений может не быть, ведь показательная функция ограничена снизу: уравнение вида $2^{1/x} = -1$ действительных корней не имеет. Решение (стр. 15, задача 5).

5. Используйте теорему Виета для кубического уравнения. Решение. А здесь немного другой подход (стр. 10, задача 7).

6. Уравнение $\log_2(f(x)) = \log_2(g(x))$ равносильно системе $f(x) = g(x)$ и $g(x) > 0$. То есть неравенство $f(x) > 0$ будет выполнено само собой в ходе решения системы. Решение (стр. 4, задача 8).

7. Выделите полные квадраты вида $(x-a)^2$, чтобы заметить симметрию. Не забывайте проверять достаточность в подобного рода задачах (нет ли других корней при найденных значениях параметра?). Решение.

8. Рассмотрите параметр a как функцию от аргумента x и исследуете ее на монотонность. Решение (стр. 4, задача 8).

9. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно переменной a. Решение (стр. 3, задача 8).

10. Сгруппируйте слагаемые, чтобы получить произведение, равное $\frac{16n}{3}$. Какие целые значения могла бы принимать переменная n? Решение (стр. 1, задача 5).

11. Из теоремы Безу следует, что если $x = a$ — корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на $(x-a)$ без остатка. Решение (стр. 1, задача 5).

12. Если ветви параболы — графика квадратичной функции $f(x)$ — направлены вверх, то при отсутствии нулей функции множество решений неравенства $f(x) < 0$ пусто. А какое условие должно быть выполнено для x_1, x_2 (нулей $f(x)$), чтобы сумма длин интересующих промежутков была меньше двух? Решение (стр. 11, задача 5).

13. Первым делом решите уравнение системы, а уже затем подумайте о неравенстве: в нем удобно предварительно выделить полный квадрат.

14. Подумайте о выпуклости графиков функций левой и правой частей и поработайте с граничными значениями данного интервала. Решение (стр. 1, задача 3).

15. Уравнение инвариантно относительно замены x на $\frac{1}{x}$. Решение (стр. 2, задача 5).

16. Если $a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a-\frac{\pi}{12}\right) < 0$, то исходное уравнение не имеет решений, верно? В остальных случаях удается либо явно решить простейшее уравнение с модулем, либо оценить значения этих самых модулей и сделать соответствующий вывод. Решение (стр. 8, задача 5).

17. Сгруппируйте слагаемые — получите совокупность из двух уравнений. Далее останется подумать об области значений логарифмической функции и о ее непрерывности. Решение (стр. 5, задача 7.1).

18. Фраза «ровно одно решение» намекает на использование симметрии. Если неочевидно какой, то сделайте замену $t = x - 3$ — увидите всюду четные функции от аргумента t. Решение (стр. 4, задача 5).

19. Подумайте о графике уравнения $u^4 + v^4 = a$ при $a > 0$ в плоскости uOv, используйте симметрию. Решение (стр. 4, задача 5).

20. И вновь уравнение инвариантно относительно замены $x \to \frac{1}{x}$. Значит, для единственности решение необходимо условие $x = \frac{1}{x}$. Но необходимо — не значит достаточно! Решение (стр. 12, задача 5).

21. Докажите, что функция $g(y) = \frac{4^y+4^{-y}}{2}$ является возрастающей. А коли так, то что можно сказать о монотонности функции $f(t)$? Решение (стр. 2, задача 5).

22. Самое главное в этой задаче — получить уравнение вида $f(t) = f(s)$.
Решение (стр. 3, задача 8).

23. Если $x = c$ — ось симметрии исходного графика, то удобно сделать замену $t = x - c$. Новый график уже симметричен относительно оси ординат, и можно порассуждать о четности соответствующей функции. Решение (стр. 3, задача 11.3).

Дополнительные материалы

[1] А. И. Козко, В. С. Панфёров и др. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи.

[2] П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Задачи с параметрами.

[3] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 35-38).

[4] С. А. Шестаков. ЕГЭ 2021 Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень).

Занятие 17. Стереометрия. Тела вращения

Домашняя работа

Easy

1. (*«Ломоносов», 2011*) Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную пирамиду с ребром основания 14 и апофемой 12?

2. (*«Ломоносов», 2017*) В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объем этого шара, если он в 3 раза меньше объема конуса.

3. (*«ОММО», 2015*) В конус вписан цилиндр объема 9. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 63. Найдите объем исходного конуса.

4. (*«Ломоносов», 2019*) Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли ее объем быть равным 3,25?

5. (*«ПВГ», 2015*) Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объем меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен $60°$.

Normal

6. (*«Ломоносов», 2015*) Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом $30°$ и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

7. (*«ПВГ», 2016*) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если вершины основания принадлежат сфере?

8. (*«ПВГ», 2018*) Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

9. (*«Ломоносов», 2014*) В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан щар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины ребер BB_1 и CC_1.

10. (*«Физтех», 2018*) Ребро AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается ребер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK = 9, KD = 1$.

а) Найдите длину ребра AA_1.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

11. (*«Физтех», 2013*) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трех ее боковых ребер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфера ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB = \arccos \frac{1}{4}$. Найдите объем пирамиды $SABC$.

12. (*«САММАТ», 2018*) Три равных шара радиусом 1 лежат на одной плоскости и попарно касаются друг друга. Конус с углом 60° в вершине осевого сечения стоит основанием на той же плоскости и касается боковой поверхности каждого шара. Найдите радиус основания конуса.

13. (*«САММАТ», 2017*) Если поверхность треугольной пирамиды разрезать вдоль ребер, выходящих из вершины, то ее развертка на плоскости основания является квадратом. Найдите отношение поверхностей сфер, вписанной и описанной около этой пирамиды.

Hard

14. (*«ПВГ», 2014*) На основании прямого кругового конуса расположены три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвертый шар того же радиуса касается первых трех и боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвертым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

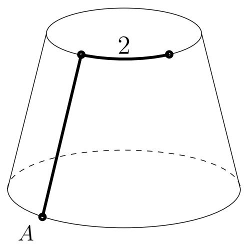
15. (*«Ломоносов», 2020*) Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба (ось луча содержит главную диагональ). Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

16. (*«Физтех», 2019*) На ребрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причем $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырехугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причем окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы Φ_1 и Φ_2 с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причем вершина P конуса Φ_1 лежит на ребре AB, а вершина Q конуса Φ_2 лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$

б) Найдите длину отрезка CQ.

17. (*«ОММО», 2019*) Назовем *горой* усеченный прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонен под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъем по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



18. (*«САММАТ», 2020*) В конус вписаны две касающиеся между собой сферы a и b (каждая сфера касается поверхности конуса по окружности). Существует n равных сфер, касающихся a и b, поверхности конуса и таких, что каждая из них касается еще двух из этих n сфер. Какие значения может принимать число n?

Ответы

1. $7\sqrt{2}$ **2.** $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}$ **3.** 64 **4.** Нет **5.** 3π **6.** $2\sqrt{7}$ **7.** $\frac{5}{8}$ **8.** $14+2\sqrt{35}$ и $10+2\sqrt{35}$ **9.** $\frac{12\pi}{5}$ **10.** а) 18 б) 1944, $3\sqrt{10}$ **11.** а) 0 б) $1:2$ в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{5}{\sqrt{3}}$ **13.** $1:24$ **14.** $\frac{\pi}{6}\left(3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3$ **15.** $\sqrt{3}(3+\pi)$ **16.** а) $\arccos\frac{1}{6}$ б) $\frac{52}{3}$ **17.** $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ **18.** $7, 8, 9$.

Подсказки и решения

1. В шаре точно должен помещаться квадрат со стороной 14. Какой радиус необходим для этого? Будет ли его достаточно? Решение (стр. 1, задача 3).

2. Главное не забыть формулы: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара через радиус, $V=\frac{1}{3}Sh$ — объем конуса через площадь основания и высоту. Решение (стр. 2, задача 6).

3. Удобно использовать формулу объема усеченного конуса $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$. Решение (стр. 4, задача 10).

4. Оцените значение объема сверху, используя описанный конус. Решение (стр. 5, задача 8.1).

5. Докажите, что искомый объем равен объему цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и высотой 1.

6. Докажите, что наименьший радиус достигается, если пересечение α и AB совпадает с центром окружности пересечения сферы и α. Решение (стр. 2, задача 5).

7. Из условия задачи следует, что плоскость (ABC) разбивает сферу на две полусферы. Решение (стр. 7, задача 4).

8. Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле $S_{бок}=\pi Rl$, где l — образующая конуса, а R — радиус его основания. Решение (стр. 6, задача 5.1).

9. Высота призмы — $2\sqrt{2}$, ребро основания — $2\sqrt{6}$. Используйте то, что ось цилиндра перпендикулярна плоскости сечения, проходящего через середины ребер BB_1, CC_1 и точку A. Решение (стр. 2, задача 7).

10. Докажите, что грань BCC_1B_1 является квадратом. Не забудьте про свойство отрезков касательных. Решение (стр. 12, задача 7).

11. Центр описанной сферы около произвольной треугольной пирамиды $SABC$ удобно определять так: отметим точку Q — центр описанной окружности треугольника ABC. Проведем через точку Q прямую l, перпендикулярную плоскости (ABC). Веберем на прямой l точку O, равноудаленную от вершин S и A — вот он, центр описанной сферы. Когда в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, построение становится тривиальным. Решение (стр. 12, задача 7).

12. Изобразите правильную треугольную пирамиду: центры шаров задают основание, вершина же совпадает с вершиной конуса. Почему она является правильной? Решение (стр. 1, задача 2).

13. В общем случае разверткой треугольной пирамиды служит шестиугольник. При каком условии угол развертки может вырождаться в прямую? Только если сумма трех плоских углов при вершине основания равна развернутому углу. Напомню, что радиус сферы, вписанной в многогранник, можно найти по формуле $r=\frac{3V}{S}$, где V — объем многогранника, а S — площадь его поверхности.

14. Радиус шара, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной (в нашем случае — образующей конуса). А центры четырех шаров задают правильный тетраэдр. Решение (стр. 8, задача 5).

15. Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости (B_1D_1C). В этой задаче также помогает теорема о площади ортогональной проекции. Решение (стр. 4, задача 7).

16. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причем $KL||AB$. Решение (стр. 8, задача 7).

17. Рассмотрите развертку конуса, используйте неравенство ломанной. Решение (стр. 5, задача 10).

18. Рассмотрите сечение конуса, проходящее через центры сфер a и b, а также одной из n сфер. Решение (стр. 10, задача 6).

Дополнительные материалы

[1] А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин. Геометрия. 10-11 классы.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия: Том 2. Стереометрия.

[4] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 43-45, 48).

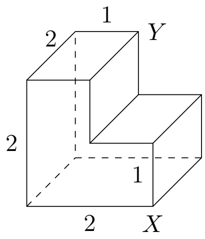
[5] Wild Mathing. Задачи по стереометрии из вступительных испытаний в МГУ.

Занятие 18. Стереометрия. Многогранники

Домашняя работа

Easy

1. (*«ОММО», 2011*) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



2. (*«Всесибирская олимпиада», 2017*) Докажите, что ребра произвольного тетраэдра можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин ребер тетраэдра в этих парах.

3. (*«Межведомственная олимпиада», 2020*) Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.

4. (*«ПВГ», 2019*) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

5. (*«Росатом», 2017*) На боковых ребрах EA, EB, EC правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ расположены точки M, N, K соответственно, причем $EM : EA = 1 : 2$, $EN : EB = 2 : 3$, $EK : EC = 1 : 3$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки M, N, K?

Normal

6. (*«Росатом», 2018*) Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол 45° с боковой гранью SBC. Найдите объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = 5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

7. (*«ПВГ», 2014*) В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA, SB, SC не длиннее чем $3, 4, 5$ соответственно, а площади граней SAB, SAC, SBC не меньше, чем $6, \frac{15}{2}, 10$ соответственно. Найдите объем пирамиды $SABC$.

8. (*«ПВГ», 2015*) Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, и делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = 2$?

9. (*«ПВГ», 2016*) Боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды $SABC$ при этих условиях?

10. (*«Росатом», 2017*) Через ребро AB основания правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая ребра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объем пирамиды в отношении $V_{EABMN} : V_{EABCD} = 5 : 9$. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN} : S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 5$.

11. (*«Росатом», 2014*) Три кубика с ребрами $1, 2$ и 3 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной 4. Проведите плоскость в пространстве так, чтобы она пересекала кубы и делила их на две равновеликие части. Найдите двугранный угол, образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

12. (*«ПВГ», 2017*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковое ребро $AA_1 = 2$.

а) Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.

б) Найдите объем наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B, A_1 и E.

13. (*«Ломоносов», 2012*) По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 25 и площадью основания 60 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 2 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 15 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

14. (*«Ломоносов», 2013*) В пирамиде $FABC$ выполнены равенства $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1 : 3$. Некоторая плоскость, параллельная AB, делит ребро FC в отношении $1 : 4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найдите отношение объемов многогранников, н которые эта плоскость делит пирамиду $FABC$.

15. (*«Физтех», 2016*) Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны B_1D и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно — точки пересечения плоскостей α и β с диагональю B_1D, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плокостей α и β. Найдите отрезок B_1D и объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Hard

16. (*«Росатом», 2018*) Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3$. Найдите двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

17. (*«Физтех», 2017*) Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC. Объем пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а ее высота, проведенная из вершины D, равна 3. Точка M — середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

18. (*«Ломоносов», 2016*) Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

19. (*«ОММО», 2018*) Точки M, N и K расположены на боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды $MNKP$, если объем призмы равен 16.

Ответы

1. Нет **3.** $\frac{S(r_1+r_2)}{3}$ **4.** $\frac{\pi}{8}$ или $\frac{3\pi}{8}$ **5.** $5:58$ **6.** 3 **7.** 10 **8.** $16:119$ **9.** 27 **10.** $5:9$
11. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$ **12.** $\frac{\pi(10\sqrt{5}-14)}{15\sqrt{5}}$ **13.** 120 **14.** $5:11$ или $1:19$ **15.** а) $2:1$ б) $3(1+\sqrt{13})$, $108\sqrt{6+2\sqrt{13}}$
16. $60°$ **17.** а) $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$ б) $\frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$ или $3\sqrt{13}$ **18.** 72 **19.** 4.

Подсказки и решения

1. Изобразте развертку многогранника. Решение (стр. 4, задача 9).

2. Используйте неравенство треугольника. Решение (стр. 2, задача 11.4).

3. Искомый объем удобно записать как сумму объемов пирамид $TBCD$ и $TABD$, причем первый из них, считайте, известен, если смотреть на вершину B и основание TCD. Решение (стр. 3, задача 6).

4. Если SH — высота пирамиды, то $\angle SAH = \angle SBH$ по условию. Отсюда следует равенство одноименных треугольников по катету и острому углу, а там уж и $AH = BH$. Что хорошего это дает? Решение (стр. 7, задача 4).

5. Проще всего разбить четырехугольную пирамиду на две треугольные, а затем использовать теорему об отношении объемов треугольных пирамид, имеющих общий трехгранный угол. Мы ее доказали на прошлом занятии, а также пожно посмотреть задачу 5 из урока 44 пособия В. В. Ткачука. Здесь же другое решение (стр. 13, задача 6).

6. В условии имеется в виду, что $SN = SK = SM$, $NM = KN = MK$. Тогда в пирамиде с учетом данного угла в 45° можно найти $\angle ASC$. Он поможет записать площадь треугольника ASC, и останется разобраться с высотой пирамиды $SABC$, проведенной из вершины B. Решение (стр. 11, задача 6).

7. Докажите, что угол ASB прямой. Решение (стр. 4, задача 4).

8. По свойству биссектрисы треугольника ASB получаем $AD : DB = SA : SB = 2 : 1$. Если данная плоскость пересекает ребра SB и SC в точках L и M, то отношения $SL : LB$ и $SM : MC$ находятся в одно действие по теореме Ван-Обеля, которую доказали в этом ролике. Решение (стр. 4, задача 4).

9. Опустите перпендикуляры из точки D на плоскости тех граней, которые являются прямоугольными треугольниками. Для оценки объема снизу используйте неравенство Коши. Решение (стр. 2, задача 5).

10. $\frac{V_{EABD}}{V_{EABM}} = \frac{EA\cdot EB\cdot ED}{EA\cdot EB\cdot EM}$, затем аналогичная теорема для $V_{EBCD} : V_{EBMN}$ — так удастся реализовать данное отношение $5 : 9$ и найти отношения $EM : MD = EN : NC$. Решение (стр. 3, задача 6).

11. Куб — центрально-симметричная фигура. Решение (стр. 11, задача 6).

12. а) Докажите, что расстояние от центра призмы до боковой грани равно половине длины бокового ребра. б) Радиус шара известен, так что самое главное — найти расстояние от его центра до плоскости (BA_1E). Решение (стр. 6, задача 5).

13. После первого среза объем нижней части можно свести к объему параллелепипеда с площадью основания 60 и высотой 12,5.

14. И вновь всемогущая теорема об отношении объемов треугольных пирамид, имеющих общий трехгранный угол. Решение (стр. 4, задача 8).

15. а) Докажите, что плоскость α проходит также через точку C. Тогда удобно сделать выносной рисунок прямоугольника BB_1D_1D и изобразить оротогональные проекции середины отрезка AC и точки $D1$ на диагональ B_1D. б) Плоскости α и β параллельны, значит, расстояние между ними равно диаметру сферы. Решение (стр. 15, задача 7).

16. Плоскости P и Q разбивают пирамиду $SABCD$ на две усеченные пирамиды и одну правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S. Докажите, что не только в один из этих многогранников можно вписать сферу (известно по условию), но и в два других. Решение (стр. 4, задача 6).

17. Докажите равенство площадей треугольников ABC и ABD, опираясь на данное равенство радиусов сфер. Решение (стр. 10, задача 7).

18. Рассмотрите параллелепипед, диагонали граней которого являются ребрами исходной пирамиды. Для оценки объема используйте неравенство Коши. Решение (стр. 5, задача 7).

19. Проведем через точку P плоскость α, параллельную плоскости (MKN). Тогда объем пирамиды $PMKN$ не изменяется при движении точки P по плоскости α. Решение (стр. 5, задача 10).

Дополнительные материалы

[1] А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин. Геометрия. 10-11 классы.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии.

[3] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия: Том 2. Стереометрия.

[4] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 43-47).

[5] Wild Mathing. Задачи по стереометрии из вступительных испытаний в МГУ.

Занятие 19. Математический анализ

Домашняя работа

Easy

1. (*«Росатом», 2015*) При каких y выражение $\dfrac{\log_{4y}\frac{y}{2}}{\log_2 y+2}$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

2. (*«Росатом», 2020*) При каких целых n функция $f(x)=\sin(nx)\cdot\cos\frac{6x}{n+1}$ имеет период $T=5\pi$?

3. (*«Ломоносов», 2012*) Найдите область значений фукнции

$$f(x)=\log_2 x\cdot\log_2\frac{64}{x}\cdot\sqrt{\log_3(27-3x)\cdot\log_3\frac{9}{27-3x}}.$$

4. (*«Физтех», 2018*) Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — две параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3\left(g(x)\right)^2+2f(x)$, если наименьшее значение функции $3\left(f(x)\right)^2+2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

5. (*«Курчатов», 2015*) $f(x)=x^3-9x,\quad g(x)=x^3-5x^2+1$. Докажите, что если $b>0$, то у многочлена $f+bg$ есть не менее трех различных действительных корней.

Normal

6. (*«Курчатов», 2017*) Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\sqrt{3}?$$

7. (*«ПВГ», 2018*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases}3^{\sqrt{x}}-3^{2\sqrt{y}}\geqslant 2\sqrt{y}-\sqrt{x},\\ x^2+y^2\leqslant 9+2xy.\end{cases}$$

8. (*«САММАТ», 2016*) Сколько существует натуральных пар чисел $(m;k)$ таких, что последовательность чисел, заданных рекурсивным соотношением

$$x_{n+2}+\frac{1}{x_{n+1}}=x_n,\ x_1=k,\ x_2=m,$$

состоит ровно из 100 чисел?

9. (*«Всесибирская олимпиада», 2020*) Найдите максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y=x^3-x$.

10. (*«Innopolis Open», 2017*) Пусть $f(x)=x^2+6x+6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f\ldots(f}_{2017}(x)\ldots))=2017.$$

11. (*«Innopolis Open», 2016*) Непостоянная функция $f(x)$ для всех действительных значений x удовлетворяет равенству

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{3}f(x).$$

Докажите, что $f(x)$ периодична и приведите пример такой функции.

12. (*«Межведомственная олимпиада», 2019*) Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям:
1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$;
2) $f(1) = 1$;
3) $f(a+b)\cdot(f(a)+f(b)) = 2f(a)\cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

13. (*«ОММО», 2011*) Функция f такова, что $f(2x-3y) - f(x+y) = -2x+8y$ для всех x, y. Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(5t)-f(t)}{f(4t)-f(3t)}$.

14. (*«ОММО», 2012*) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству $f(x+3) = x+2-f(x)$ а при $x \in [-3; 0)$ задается формулой $f(x) = x^2$. Найдите $f(2012)$.

15. (*«ОММО», 2013*) Пусть $S_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$. Найдите S_{2013} для $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

16. (*«ОММО», 2014*) Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0{,}5f(x-\pi) = \sin x$$

при всех x.

17. (*«ОММО», 2019*) Обозначим $f(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

18. (*«ОММО», 2020*) Про функции $p(x)$ и $q(x)$ известно, что $p(0) = q(0) > 0$ и $p'(x)\sqrt{q'(x)} = \sqrt{2}$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $p(x) + 2q(x) > 3x$.

Hard

19. (*«Росатом», 2016*) На отрезке $[1; e^2]$ найдите x, для которого

$$2\int_1^x \frac{2\ln t + 1}{t}dt = \int_x^{e^2} \frac{2\ln t + 1}{t}dt.$$

20. (*«Курчатов», 2020*) Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n, что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ и $B_n = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;
- последовательность $C_n = \dfrac{1}{\max(a_1, b_1)} + \dfrac{1}{\max(a_2, b_2)} + \ldots + \dfrac{1}{\max(a_n, b_n)}$ ограничена.

21. (*«Ломоносов», 2018*) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin\sin x.$$

22. (*«Межведомственная олимпиада», 2019*) Докажите, что для всех $x \in \left(0; \frac{3\pi}{8}\right)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x}.$$

Указание: воспользуйтесь выпуклостью вниз графика функции $f(t) = \frac{1}{\sin t}$ на интервале $(0; \pi)$.

Ответы

1. $16;\ \frac{1}{12}$ **2.** $\{-31, -16, -11, -7, -6, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29\}$ **3.** $[0; 9]$ **4.** $\frac{5}{2}$ **6.** 6 **7.** $\frac{3}{2}$
8. 6 **9.** 2 **10.** $-3 \pm \sqrt[2^{2017}]{2020}$ **11.** $f(x) = \cos\frac{\pi x}{6} + \sin\frac{\pi x}{6}$ **12.** $f(x) = x$ **13.** 4 **14.** 1005
15. 1007 **16.** $f(x) = \frac{2}{3}\sin x$ **17.** $-1;\ \frac{2}{9};\ \frac{-3\pm\sqrt{13}}{6}$ **19.** e **21.** $\frac{\pi-2}{\sqrt{2}}$.

Подсказки и решения

1. Используйте формулу перехода к новому основанию, а далее исследуйте соответствующую функцию с помощью производной. Решение (стр. 12, задача 1).

2. Решите уравнение $f(x) = f(x + 5\pi)$. Решение (стр. 2, задача 2).

3. Если обозначить $t = \log_3(27 - 3x)$, то подкоренное выражение принимает вид $t(2 - t)$. А при $s = \log_2 x$ произведение $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x}$ преобразуется до $s(6 - s)$.

4. Из параллельности графиков $f(x)$ и $g(x)$ следует равенство угловых коэффициентов в соответствующих уравнениях. Смело введите переменные и запишите два квадратных многочлена, указанных в условии задачи. Решение (стр. 9, задача 2).

5. Теорема о промежуточном значении утверждает, что если непрерывная функция, определённая на вещественном промежутке, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними. И если вам удастся показать, что многочлен $f + bg$ принимает разные по знаку значения, например, на концах отрезка $[0; 3]$, то можно ручаться, что существует действительный корень многочлена на этом отрезке. Решение (стр. 10, задача 2).

6. Найдите область значений функции $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$. Решение (стр. 1, задача 1).

7. Если функция $y = f(x)$ монотонна на множестве X и точки x_1, x_2 принадлежат множеству X, то $f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$. Решение (стр. 5, задача 3.1).

8. Рассмотрите вспомогательную последовательность $a_n = x_n \cdot x_{n+1},\ a_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_{n+2}$. Решение (стр. 3, задача 8).

9. Перефразируя задачу, какое наибольшее расстояние может быть между двумя действительными корнями уравнения $x^3 + x + c = 0$? Решение (стр. 2, задача 11.3).

10. Выделите полный квадрат и подумайте, как всякий раз преобразуется аргумент функции. Решение (стр. 2, задача 2).

11. Рассмотите исходное функциональное равенство в системе с ним же, но домноженным на $\sqrt{3}$. Решение (стр. 1, задача 1).

12. Какую информацию даст пара $(a, b) = (1, 0)$? Для каких пар (a, b) третье условие принимает вид $f(a) \cdot f(-a) = -a^2$? Решение (стр. 1, задача 1).

13. Подставьте $y = -x$. Решение (стр. 3, задача 6).

14. Рассмотрите исходное равенство в системе с тем, что получится при подстановке $x \to x + 3$. Решение (стр. 3, задача 7).

15. Докажите, что $f(x) + f(1 - x) = 1$ Решение (стр. 2, задача 6).

16. Докажите, что период интересующих функций может быть равен только $2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Решение (стр. 2, задача 6).

17. В этой задаче можно миновать уравнение четвертой степени, записав систему вида $f(x) = y$ и $f(y) = x$. Решение (стр. 3, задача 5).

18. Докажите, что на отрезке $x \in [0; 1]$ производная функции $p(x) + 2q(x) - 3x$ неотрицательна. Решение (стр. 5, задача 9).

19. Такие задачи, как правило, не рассматриваются в школьном курсе и на олимпиадах — исключение. Если обозначить $u = \ln t$, то $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow du = \frac{1}{t}dt$. Это просто дифференциальная запись того факта, что $(\ln t)' = \frac{1}{t}$. Теперь неопределенный интеграл $\int \frac{2\ln t+1}{t}dt = \int \frac{2\ln t}{t}dt + \int \frac{1}{t}dt$ можно представить как $\int (2u)du + \int \frac{1}{t}dt$ — первый интеграл мы переписали с учетом замены, а второй и так табличный. В итоге сумма интегралов равна $u^2 + \ln t + c$, и, сделав обратную замену $u = \ln t$, заключаем, что $\int \frac{2\ln t+1}{t} = \ln^2 t + \ln t + c$. Остается поработать с аналогичными определенными интегралами: эта часть уже освещена в решении (стр. 11, задача 3).

20. Вспомните анекдот про бармена, бесконечное количество математиков и сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$ — именно так можно ограничить последовательность C_n. Решение (стр. 5, задача 6).

21. Преобразуйте сумму первых двух синусов в произведение. Решение (стр. 3, задача 7).

22. Неравенство Йенсена в частном случае утверждает, что если $f(x)$ — выпуклая вниз функция на некотором промежутке X и $x_1, x_2 \in X$, то $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Чтобы доказать выпуклость вниз функции $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ на интервале $x \in (o; \pi)$, покажите, что на этом интервале верно неравенство $f''(x) \geqslant 0$. Решение (стр. 3, задача 7).

Дополнительные материалы

[1] И. В. Яковлев. Производная.

[2] А. А. Андреев и др. Функциональные уравнения.

[3] А. Д. Блинков. Последовательности.

[4] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 22-25).

[5] В. А. Зорич. Математический анализ (том 1).

Занятие 20. Алгебра

Домашняя работа

Easy

1. (*«ПВГ», 2014*) Решите неравенство $\sqrt{9-x}\cdot|x^2-1|\leqslant\sqrt{9-x}\cdot|x^2-10x+13|$.

2. (*«ПВГ», 2013*) Решите неравенство

$$4x+2+\sqrt{4-x}>x^2+\sqrt{x^2-5x+2}.$$

3. (*«Ломоносов», 2019*) Найдите целую часть числа $a+\frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная части числа $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$.

4. (*«Ломоносов», 2017*) Что больше: $11^{\lg 121}$ или $10\cdot 10^{\lg^2 11}+11$?

5. (*«Ломоносов», 2013*) Решите неравенство

$$\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2\cdot\log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3\leqslant 0.$$

Normal

6. (*«ПВГ», 2015*) Можно ли представить выражение

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax-bz)^2-(by-cx)^2-(cz-ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a,b,c,x,y,z?

7. (*«ПВГ», 2015*) Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\ldots+x^{10})=(1+x+x^2+\ldots+x^6)^2.$$

8. (*«ПВГ», 2018*) Найдите сумму

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

если известно, что три различных действительных числа x,y и z удовлетворяют условиям

$$x^3+1009=2018x,\ y^3+1009=2018y,\ z^3+1009=2018z.$$

9. (*«ОММО», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}26x^2+42xy+17y^2=10,\\10x^2+18xy+8y^2=6.\end{cases}$$

10. (*«ОММО», 2020*) Дан многочлен $F(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+100x^{99}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нем, получить многочлен $G(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_{99}x^{99}$ такой, что для всех натуральных чисел $k\geqslant 2$ разность $F(k)-G(k)$ не кратна 100?

11. (*«ОММО», 2014*) Решите уравнение

$$(y(x-1))^2+(x-1)^2+y^2+1-4y|x-1|=0.$$

12. (*«ОММО», 2018*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 3, \\ y^2 = (z-x)^2 - 7, \\ z^2 = (x-y)^2 + 21. \end{cases}$$

13. (*«Курчатов», 2016*) Дан квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$. Докажите, что найдется такой иррациональный x, при котором значение $x^2 + bx + c$ — рационально.

14. (*«Росатом», 2015*) Найдите многочлен $P(x)$ степени 3, удовлетворяющий тождеству $P(x+2) - 2P(x+1) + P(x) = x$ по переменной x, делящийся на $(x-1)$ без остатка, для которого $P(2) = 1$.

15. (*«Росатом», 2015*) Известно, что для любого натурального n сумма квадратов первых n чисел $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ является значением многочлена $P_3(x)$ третьей степени. Найдите его коэффициенты и сумму квадратов 25 первых членов арифметической прогрессии a_m с первым членом $a_1 = -2$ и разностью $d = 3$.

16. (*«Физтех», 2011*) Решите неравенство

$$\frac{10 - 2|x|}{|x^2 + 9x + 11| - 3} \leqslant 1.$$

17. (*«Физтех», 2017*) Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$.

18. (*«Физтех», 2017*) Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

Hard

19. (*«САММАТ», 2020*) Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что

$$x^2 + y^2 = 19451945.$$

20. (*«Высшая проба», 2020*) На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_j = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?

21. (*«Высшая проба», 2020*) Найдите все вещественные c, при которых сумма девятых степеней корней уравнения $x^2 - x + c = 0$ равна нулю и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексные.

22. (*«ММО», 2017*) Пусть a — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а b — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3a$.

а) Сравните a и b.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|a - b|$.

Ответы

1. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right] \cup [2; 3] \cup \{9\}$.

2. $\left(2-\sqrt{6}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$.

3. 12.

4. Первое.

5. $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}; -2+\sqrt{2}\right) \cup [2; 3)$.

6. Да.

7. $-1; 0$.

8. 2.

9. $(-1, 2), (-11, 14), (11, -14), (1, -2)$.

10. Нет.

11. $(0, 1), (2, 1)$.

12. $(-1, -3, -5), (1, 3, 5)$.

14. $\frac{1}{6}(x-1)(x^2-2x+6)$.

15. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, 1552.

16. $(-\infty; -8) \cup (-7; -3] \cup (-2; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{129}-11}{2}\right)$.

17. Увеличится на $\frac{3}{2}$.

18. $\left(0; 3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right] \cup \{1\} \cup \left[3^{\sqrt{\log_3 2}}; +\infty\right)$.

19. $(4397; 344)$.

20. Да.

21. $\frac{1}{3}$.

22. а) $a > b$, б) 0.

Подсказки и решения

1. Если $x = 9$, то неравенство верно; а если $x > 9$, то его обе части можно разделить на положительное выражение $\sqrt{x-9}$, причем знак неравенства сохранится. Напомню, что неравенство $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ равносильно совокупности $f(x) \geqslant g(x)$ или $f(x) \leqslant -g(x)$, что легко показать возведением обеих частей в квадрат. Решение (стр. 4, задача 1).

2. Найдите ОДЗ и используйте домножение на сопряженное к выражению $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$. Решение (стр. 1, задача 3).

3. Подкоренное выражение можно представить в виде $49 - 42\sqrt{3} + 27$ — видите квадрат разности? Решение (стр. 1, задача 2.1).

4. Удобно сделать замену $t = 11^{\lg 11}$. Решение (стр. 1, задача 3).

5. Используйте метод рационализации, не забывая об ОДЗ. Здесь решение с помощью обобщенного метода интервалов: рекомендую в чистовом оформлении явно указывать, как были определены знаки на промежутках (стр. 1, задача 3).

6. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.

7. Домножьте обе части уравнения на $(1-x)^2$. Равносильно ли это преобразование? Решение (стр. 4, задача 1).

8. Поскольку числа x, y, z различны, то все они образуют множество решений уравнения $t^3+1009 = 2018t$. Используйте теорему Виета. Решение (стр. 5, задача 2-1).

9. Как при сложении двух строк, так и при вычитании из первой строки второй удается собрать полные квадраты. Решение (стр. 3, задача 5).

10. Если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для целых чисел a и b таких, что $a \neq b$, число $P(b) - P(a)$ делится на $b - a$. Решение (стр. 1, задача 1).

11. Приведите левую часть к произведению двух выражений вида $(t+\frac{1}{t})$, для которых можно будет записать неравенство Коши о средних. Решение (стр. 1, задача 5).

12. Используйте в каждой строке формулу разности квадратов. Решение (стр. 3, задача 5).

13. Рассмотрите квадратный трехчлен $x^2 + bx + c_2$, у которого имеется два действительных корня. Используйте теорему Виета. Решение (стр. 6, задача 6).

14. Начните с замены $t = x + 1$ и поработайте с функциональным уравнением. Решение (стр. 7, задача 3).

15. Вы знаете, чему равны значения $P(0), P(1), P(2), P(3)$? Решение (стр. 14, задача 4).

16. Используйте обобщенный метод интервалов.

17. Введите переменные для коэффициентов квадратного трехчлена $f(x)$, а затем запишите явно наименьшие значения каждого из интересующих многочленов. Решение (стр. 9, задача 1).

18. Сгруппируйте слагаемые, а затем используйте метод рационализации. Решение (стр. 9, задача 2).

19. Самый короткий путь — использовать равенство $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, где $i^2 = -1$, а также разложение $19451945 = 1945 \cdot 10001$. Решение (стр. 1, задача 1).

20. Ответ положительный, и достаточно привести пример. Попробуйте составить систему так, чтобы для любого действительного числа t упорядоченный набор $(2t, 2t, -t, -t, -t, -t)$ служил бы ее решением. Решение (стр. 1, задача 1).

21. Рассмотрите произведение $(x_1^9 + x_2^9)(x_1^6 + x_2^6)$. Решение (стр. 2, задача 3).

22. а) Докажите, что $a > 1$ и $b > 1$. б) Используйте неравенство Бернулли. Решение.

Дополнительные материалы

[1] И. В. Яковлев. Метод рационализации.

[2] В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу.

[3] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (уроки 8-12, 18-21).