

# ДОКАЖИТЕ, ЧТО СЕЧЕНИЕ ИЛИ ГРАНЬ ЯВЛЯЕТСЯ ... (ПУНКТ А)

1  
14

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $5\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{14}$ . Точка  $K$  – середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$  параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

1 (дз)

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $3\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{7}$ . Точка  $K$  – середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$  параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

2

14

В правильной треугольной призме  $ABC A_1B_1C_1$  стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ .

2 (дз)

14

В правильной треугольной призме  $ABC A_1B_1C_1$  стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ .

3

14

В треугольной пирамиде  $SABC$  известны боковые рёбра:  $SA = SB = 7, SC = 5$ . Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$ . Эта высота равна 4.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды  $SABC$ .

3 (дз)

14

В треугольной пирамиде  $SABC$  известны боковые рёбра:  $SA = SB = 13, SC = 3\sqrt{17}$ . Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$ . Эта высота равна 12.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды  $SABC$ .

4

**14**

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 12. Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  – середина ребра  $AS$ , точка  $L$  лежит на ребре  $BC$  так, что  $BL:LC = 1:2$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $S_1LM$  – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

4 (дз)

**14**

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 6. Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  – середина ребра  $AS$ , точка  $L$  лежит на ребре  $BC$  так, что  $BL:LC = 1:2$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $S_1LM$  – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

5

**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведена секущая плоскость, содержащая диагональ  $AC_1$  и пересекающая рёбра  $BB_1$  и  $DD_1$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно.

- Докажите, что сечение  $AFC_1E$  – параллелограмм.
- Найдите площадь сечения, если известно, что  $AFC_1E$  – ромб и  $AB = 3$ ,  $BC = 2$ ,  $AA_1 = 5$ .

5 (дз)  
нет аналога**14**

Точка  $E$  – середина ребра  $AA_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что сечение куба плоскостью  $DEB_1$  является ромбом.
- Найдите угол между прямыми  $DE$  и  $BD_1$ .

6 (дз)  
нет аналога**14**

Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса – треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $2\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

7 (дз)  
нет аналога**14**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

8 (дз)

**14**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 10$ ,  $AB = 12$ .

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{6}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

9 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона основания  $AB = 6$ , а боковое ребро  $AA_1 = 4\sqrt{3}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

10

**14**

В правильной треугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{2}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = B_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

10 (дз)

нет аналога

**Докажите, что плоскость проходит через конкретную точку (пункт а)**

1

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 6:1$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 3:4$ , а точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 30$ ,  $AA_1 = 35$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

1 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 5:3$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 5:11$ , а точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 6\sqrt{2}$ ,  $AD = 10$ ,  $AA_1 = 16$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

2

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:1$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 1:3$ , а на ребре  $B_1C_1$  – точка  $T$  так, что  $B_1T:TC_1 = 1:2$ . Известно, что  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA_1 = 4$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

2 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:2$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 2:3$ , а на ребре  $B_1C_1$  – точка  $T$  так, что  $B_1T:TC_1 = 2:1$ . Известно, что  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA_1 = 5$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

**Докажите, что пирамида – правильный тетраэдр или что пирамида правильная (пункт а)**

**14**

Длина диагонали куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равна 3. На луче  $A_1C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1P = 4$ .

- Докажите, что  $PBDC_1$  – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка  $AP$ .

1 (дз)

**14**

Длина диагонали куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равна  $3\sqrt{11}$ . На луче  $DB_1$  отмечена точка  $P$  так, что  $DP = 4\sqrt{11}$ .

- Докажите, что  $PA_1BC_1$  – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка  $AP$ .

2

**14**

Ребро куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равно 6. Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  – центры граней  $ABCD$ ,  $AA_1D_1D$  и  $CC_1D_1D$  соответственно.

- Докажите, что  $B_1KLM$  – правильная пирамида.
- Найдите объём  $B_1KLM$ .

2 (дз)  
нет аналога

**Отношение отрезков (пункт а)**

**14**

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно  $\pi\sqrt{2}$ .
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

1 (дз)

**14**

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна  $6\sqrt{2}$ , а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно  $\pi\sqrt{2}$ .
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

2

**14**

Дана треугольная призма  $ABC A_1 B_1 C_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BC_1$  параллельно прямой  $AB_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AC$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если призма правильная, сторона её основания равна  $2\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 1.

2 (дз)  
нет аналога  
3**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  известны рёбра  $AB = 35$ ,  $AD = 12$ ,  $CC_1 = 21$ .

- Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1BD$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1DB$ .

3 (дз)  
нет аналога  
4**14**

Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $K$  и  $L$  – центры граней  $BB_1C_1C$  и  $A_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что точка пересечения прямой  $KL$  с плоскостью основания  $ABCD$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .
- Пусть  $M$  – середина ребра  $CD$ . Найдите котангенс угла между прямыми  $MD_1$  и  $KL$ , если известно, что  $AB = 2AA_1$ .

4 (дз)  
нет аналога  
5**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E = 4EA$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 16$ ,  $AA_1 = 20$ .

- Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 3:2.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

5 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E = 6EA$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 14$ .

- Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 4:3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

6

**14**

Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и середину ребра  $B_1C_1$ .

- Пусть  $M$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $CC_1$ . Докажите, что  $C_1$  – середина отрезка  $CM$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если все рёбра призмы равны  $a$ .

6 (дз)  
нет аналога

7

**14**

В правильной четырехугольной призме  $KLMNK_1L_1M_1N_1$  точка  $E$  делит боковое ребро  $KK_1$  в отношении  $KE:EK_1 = 1:3$ . Через точки  $L$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $KM$  и пересекающая ребро  $NN_1$  в точке  $F$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $NN_1$  пополам.
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью грани  $KLMN$ , если известно, что  $KL = 6$ ,  $KK_1 = 4$ .

7 (дз)  
нет аналога

8

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 60, а боковое ребро  $SA$  равно 37. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

8 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 30, а боковое ребро  $SA$  равно 28. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

9

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 7. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 4$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 1:3$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

9 (дз)

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 5. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 1:2$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

10

**14**

Основание прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = 12$ ,  $AD = \sqrt{31}$ . Расстояние между прямыми  $AC$  и  $B_1D_1$  равно 5.

- Докажите, что плоскость, проходящая через точку  $D$  перпендикулярно прямой  $BD_1$  в отношении 1:7, считая от вершины  $D_1$ .
- Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку  $D$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ , и плоскостью основания призмы.

10 (дз)

нет аналога

11

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 5. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 4$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 3:1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .

11 (дз)

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 2:1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .

12

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  на ребре  $AA_1$  отмечена точка  $K$ , причём  $AK:KA_1 = 1:3$ . Через точки  $K$  и  $B$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  – середина ребра  $DD_1$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 5$ ,  $AA_1 = 4$ .

12 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $K$  делит боковое ребро  $AA_1$  в отношении  $AK:KA_1 = 1:2$ . Через точки  $B$  и  $K$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DM:MD_1 = 2:1$ .
- Найдите площадь сечения, если известно, что  $AB = 4$ ,  $AA_1 = 6$ .

13

**14**

На рёбрах  $DD_1$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 10$ , а  $B_1Q = 4$ . Плоскость  $A_1PQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $A_1PQ$ .

13 (дз)

**14**

На рёбрах  $DD_1$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 8 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 7$ , а  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $A_1PQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $A_1PQ$ .

14

**14**

Дан параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BA_1$  параллельно прямой  $CB_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины  $C_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ , если он прямой, его основание  $ABCD$  – ромб с диагоналями  $AC = 24$  и  $BD = 10$ , а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

14 (дз)  
нет аналога  
15**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна боковому ребру  $SA$ . Медианы треугольника  $SBC$  пересекаются в точке  $M$ .

- Докажите, что  $AM = AD$ .
- Точка  $N$  – середина  $AM$ . Найдите  $SN$ , если  $AD = 6$ .

15 (дз)  
нет аналога  
16**14**

Плоскость  $\gamma$ , содержащая диагональ  $BD$  грани куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , пересекает ребро  $B_1C_1$  и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

- Докажите, что плоскость  $\gamma$  делит ребро  $B_1C_1$  в отношении 2:1, считая от вершины  $B_1$ .
- В каком отношении плоскость  $\gamma$  делит объём куба?

16 (дз)  
нет аналога  
17**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием – сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

17 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 30, а боковое ребро  $SA$  равно 28. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием – сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

18

**14**

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.

- Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит апофему грани  $ASB$  в отношении 1:2, считая от вершины  $S$ .
- Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .

18 (дз)  
нет аналога  
19

**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $AA_1 = 2$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $A_1B_1$  и  $CC_1$  соответственно. Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $B_1C_1$  в точке  $U$ .

а) Докажите, что  $B_1U:UC_1 = 2:1$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $APQ$ .

19 (дз)  
нет аналога  
20**14**

На рёбрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 4$ , а  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

20 (дз)  
нет аналога  
21**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 4. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

21 (дз)  
нет аналога  
22**14**

Дана правильная призма  $ABC A_1B_1C_1$ , у которой стороны основания  $AB = 4$ , а боковое ребро  $AA_1 = 9$ . Точка  $M$  – середина ребра  $AC$ , а на ребре  $AA_1$  взята точка  $T$  так, что  $AT = 5$ .

а) Докажите, что плоскость  $BB_1M$  делит отрезок  $C_1T$  пополам.

б) Плоскость  $BTC_1$  делит отрезок  $MB_1$  на две части. Найдите длину меньшей из них.

22 (дз)  
нет аналога  
23**14**

В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $M$  середина ребра  $C_1D_1$ , а точка  $K$  делит ребро  $AA_1$  в отношении  $AK:KA_1 = 1:3$ . Через точки  $K$  и  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD$  и пересекающая диагональ  $A_1C$  в точке  $O$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $A_1C$  в отношении  $A_1O:OC = 3:5$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – куб.

23 (дз)

**14**

В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $F$  середина ребра  $AB$ , а точка  $E$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DE:ED_1 = 6:1$ . Через точки  $F$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая диагональ  $B_1D$  в точке  $O$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $DO:OB_1 = 2:3$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

24

**14**

Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – равнобедренная трапеция с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Боковые стороны равны меньшему основанию  $CD$ , а их продолжения пересекаются под углом  $60^\circ$ .

- Плоскость  $CA_1D_1$  пересекает ребро  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $D_1M$  проходит через середину диагонали  $A_1C$ .
- Найдите угол между боковым ребром  $BB_1$  и плоскостью  $CA_1D_1$ , если призма прямая, а  $AA_1:AD = \sqrt{3}:2$ .

24 (дз)  
нет аналога**Угол между прямыми (пункты а и б)****14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BD_1$ .

1 (дз)  
нет аналога

2

**14**

Основанием прямой треугольной призмы  $ABC A_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 15 и 9 соответственно,  $AB = 13$ .

- Докажите, что треугольник  $B A_1 C_1$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $AA_1C_1B$ .

2 (дз)  
нет аналога

3

**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $BC_1$  и  $AC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3 (дз)

**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 4$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4

**14**

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является ромб  $ABCD$ ,  $AB = AA_1$ .

- Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.
- Найдите объём призмы, если  $A_1C = BD = 2$ .

4 (дз)  
нет аналога

5

**14**

Дана правильная четырёхугольная пирамида  $MABCD$  с основанием  $ABCD$ , стороны основания которой равны  $5\sqrt{2}$ . Точка  $L$  – середина ребра  $MB$ . Тангенс угла между прямыми  $DM$  и  $AL$  равен  $\sqrt{2}$ .

- Пусть  $O$  – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые  $AO$  и  $LO$  перпендикулярны.
- Найдите высоту данной пирамиды.

5 (дз)  
нет аналога  
6**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 8$ ,  $BB_1 = 6$ ,  $B_1C_1 = 15$ .

6 (дз)

**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания – точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  – образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 8$ .

7

**14**

Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $K$  и  $L$  – центры граней  $BB_1C_1C$  и  $A_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что точка пересечения прямой  $KL$  с плоскостью основания  $ABCD$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .
- Пусть  $M$  – середина ребра  $CD$ . Найдите котангенс угла между прямыми  $MD_1$  и  $KL$ , если известно, что  $AB = 2AA_1$ .

7 (дз)  
нет аналога  
8**14**

Точки  $O$  и  $O_1$  – центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка  $K$  – середина отрезка  $OO_1$ . На окружности верхнего основания взяты точки  $A$  и  $B$ , не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки  $A_1$  и  $B_1$ , симметричные точкам  $A$  и  $B$  относительно точки  $K$ .

- Докажите, что прямые  $AB_1$  и  $BA_1$  параллельны.
- Найдите площадь четырёхугольника  $ABA_1B_1$ , если радиус основания равен 5,  $AB = 6$ , а высота цилиндра равна 8.

8 (дз)  
нет аналога  
9**14**

В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 10$  и  $BD = 24$ .

- Докажите, что прямые  $B_1D_1$  и  $AC_1$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми  $B_1D_1$  и  $AC_1$ , если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

9 (дз)

**14**

В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 16$  и  $BD = 12$ .

- Докажите, что прямые  $BD_1$  и  $AC$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми  $BD_1$  и  $AC$ , если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

10

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что диагональ  $A_1C$  куба и диагональ  $DC_1$  грани  $DD_1C_1C$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние от точки  $M$  – середины ребра  $AA_1$ , до плоскости  $BC_1D$ , если ребро куба равно  $2\sqrt{3}$ .

10 (дз)

нет аналога

11

**14**

В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 13$ ,  $PB = 15$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

11 (дз)

**14**

В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 17$ ,  $PB = 10$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

12

**14**

Основанием прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является параллелограмм  $ABCD$ . Известно, что  $AB_1 = 10$ ,  $DB_1 = 8$  и  $AD = 6$ .

- Докажите, что прямые  $DB$  и  $BC$  перпендикулярны.
- Найдите площадь полной поверхности пирамиды  $B_1ABD$ , если  $B_1C = 6\sqrt{2}$ .

12 (дз)

нет аналога

13

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{21}$ ,  $SB = \sqrt{85}$ ,  $SD = \sqrt{57}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .

13 (дз)

нет аналога

14

**14**

Точка  $E$  – середина ребра  $AA_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что сечение куба плоскостью  $DEB_1$  является ромбом.
- Найдите угол между прямыми  $DE$  и  $BD_1$ .

14 (дз)

нет аналога

15

**14**

Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $B_1P$  и  $QB$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной прямой  $BQ$ , если ребро куба равно 4.

15 (дз)

**14**

Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $B_1P$  и  $QB$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной прямой  $BQ$ , если ребро куба равно 10.

16

**14**

Основание прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – ромб  $ABCD$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $D$ , а боковые грани призмы – квадраты.

- Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна  $8\sqrt{3}$ .

16 (дз)

нет аналога

17

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BC_1$ .

17 (дз)

нет аналога

18

**14**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  стороны основания равны 5, а боковое рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $C_1D_1$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $C$ ,  $A_1$  и  $F_1$ .

18 (дз)

нет аналога

19

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  угол между диагоналями  $A_1C$  и  $B_1D$  равен  $60^\circ$ .

- Докажите, что диагонали  $A_1C$  и  $AC_1$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до плоскости  $BMD$ , где точка  $M$  – середина ребра  $CC_1$ , если сторона основания призмы равна 8.

19 (дз)

нет аналога

20

### Угол между прямой и плоскостью (пункты а и б)

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{11}$ ,  $SB = 3\sqrt{3}$ ,  $SD = 2\sqrt{5}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .

21 (дз)

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = \sqrt{5}$  и  $BC = 2$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{7}$ ,  $SB = 2\sqrt{3}$ ,  $SD = \sqrt{11}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .

2

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{21}$ ,  $SB = \sqrt{85}$ ,  $SD = \sqrt{57}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .

2 (дз)  
нет аналога

3

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AD_1C_1$  и  $A_1D_1C$ .

3 (дз)

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что прямая  $B_1D$  перпендикулярна плоскости  $A_1BC_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AB_1C_1$  и  $A_1B_1C$ .

4

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 12$  и  $BC = 5\sqrt{3}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 5$ ,  $SB = 13$ ,  $SD = 10$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ .

4 (дз)

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 3$ ,  $SB = 5$ ,  $SD = 3\sqrt{5}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ .

5

**14**

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$ , причём  $A$  и  $C$  диаметрально противоположны. Точка  $M$  – середина  $BC$ .

- Докажите, что прямая  $SM$  образует с плоскостью  $ABC$  такой же угол, как и прямая  $AB$  с плоскостью  $SBC$ .
- Найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ , если  $AB = 6$ ,  $BC = 8$  и  $SC = 5\sqrt{2}$ .

5 (дз)

**14**

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$ , причём  $A$  и  $C$  диаметрально противоположны. Точка  $M$  – середина  $BC$ .

- Докажите, что прямая  $SM$  образует с плоскостью  $ABC$  такой же угол, как и прямая  $AB$  с плоскостью  $SBC$ .
- Найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ , если  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  и  $SC = 4\sqrt{2}$ .

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 8, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $BK = C_1L = 2$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$ .

6 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $BK = 4$ ,  $C_1L = 5$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $AC_1$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите расстояние от точки  $B_1$  до плоскости  $\gamma$ .

7

**14**

Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – равнобедренная трапеция с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Боковые стороны равны меньшему основанию  $CD$ , а их продолжения пересекаются под углом  $60^\circ$ .

- Плоскость  $CA_1D_1$  пересекает ребро  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $D_1M$  проходит через середину диагонали  $A_1C$ .
- Найдите угол между боковым ребром  $BB_1$  и плоскостью  $CA_1D_1$ , если призма прямая, а  $AA_1:AD = \sqrt{3}:2$ .

7 (дз)

нет аналога

8

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 5, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{5}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $CK = 2$ , а  $C_1L = 1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка  $A_1$ , а основание – сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

8 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $CK = 4$ , а  $C_1L = 1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка  $A_1$ , а основание – сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**Угол между плоскостями (пункты а и б)**

1

**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  известны рёбра  $AB = 35$ ,  $AD = 12$ ,  $CC_1 = 21$ .

- Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1BD$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1DB$ .

1 (дз)

нет аналога

2

**14**

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

- Докажите, что угол между плоскостью  $SAC$  и плоскостью, проходящей через вершину  $S$  этой пирамиды, середину стороны  $AB$  и центр основания, равен  $45^\circ$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $SAC$ .

2 (дз)

нет аналога

3

**14**

В правильной четырехугольной призме  $KLMNK_1L_1M_1N_1$  точка  $E$  делит боковое ребро  $KK_1$  в отношении  $KE:EK_1 = 1:3$ . Через точки  $L$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $KM$  и пересекающая ребро  $NN_1$  в точке  $F$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $NN_1$  пополам.
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью грани  $KLMN$ , если известно, что  $KL = 6$ ,  $KK_1 = 4$ .

3 (дз)

нет аналога

4

**14**

Основание пирамиды  $PABCD$  – трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

- Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды  $PKBC$ , если  $AB = BC = CD = 3$ , а высота пирамиды равна 8.

4 (дз)

**14**

Дана пирамида  $PABCD$ , в основании – трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Известно, что сумма углов  $BAD$  и  $ADC$  равна 90 градусов, а плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны основанию, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

- Докажите, что плоскость  $PAB$  перпендикулярна плоскости  $PCD$ .
- Найдите объём  $PKBC$ , если  $AB = BC = CD = 2$ , а  $PK = 12$ .

5

**14**

Основание прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = 12$ ,  $AD = \sqrt{31}$ . Расстояние между прямыми  $AC$  и  $B_1D_1$  равно 5.

- Докажите, что плоскость, проходящая через точку  $D$  перпендикулярно прямой  $BD_1$  в отношении 1:7, считая от вершины  $D_1$ .
- Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку  $D$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ , и плоскостью основания призмы.

5 (дз)  
нет аналога  
6**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 5. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 4$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 3:1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .

6 (дз)

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 2:1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .

7

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AD_1C_1$  и  $A_1D_1C$ .

7 (дз)

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что прямая  $B_1D$  перпендикулярна плоскости  $A_1BC_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AB_1C_1$  и  $A_1B_1C$ .

8

**14**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  все рёбра равны 1.

- Докажите, что плоскости  $AA_1D_1$  и  $DB_1F_1$  перпендикулярны.
- Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1F_1$ .

8 (дз)

нет аналога

9

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $DABC$  с основанием  $ABC$  сторона основания равна  $6\sqrt{3}$ , а высота пирамиды равна 8. На рёбрах  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  соответственно отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , такие, что  $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  и  $AK = \frac{5}{2}$ .

- Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $DBC$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $DBC$ .

9 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $BMNK$  с основанием  $MNK$  сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах  $MN$ ,  $MK$  и  $MB$  соответственно отмечены точки  $F$ ,  $E$  и  $P$ , такие, что  $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$  и  $MP = \frac{7}{4}$ .

- Докажите, что плоскости  $FEP$  и  $NBK$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $P$  до плоскости  $NBK$ .

10

**14**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

10 (дз)

**14**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 10$ ,  $AB = 12$ .

11

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона  $AB$  основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах  $AB$ ,  $CD$  и  $AS$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = DN = 4$  и  $AK = 3$ .

- Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $SBC$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SBC$ .

11 (дз)

нет аналога

12

**14**

В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $M$  середина ребра  $C_1D_1$ , а точка  $K$  делит ребро  $AA_1$  в отношении  $AK:KA_1 = 1:3$ . Через точки  $K$  и  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD$  и пересекающая диагональ  $A_1C$  в точке  $O$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $A_1C$  в отношении  $A_1O:OC = 3:5$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – куб.

12 (дз)

**14**

В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $F$  середина ребра  $AB$ , а точка  $E$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DE:ED_1 = 6:1$ . Через точки  $F$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая диагональ  $B_1D$  в точке  $O$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $DO:OB_1 = 2:3$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

13

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:1$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 1:3$ , а на ребре  $B_1C_1$  – точка  $T$  так, что  $B_1T:TC_1 = 1:2$ . Известно, что  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA_1 = 4$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

13 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:2$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 2:3$ , а на ребре  $B_1C_1$  – точка  $T$  так, что  $B_1T:TC_1 = 2:1$ . Известно, что  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA_1 = 5$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

### Расстояние от точки до плоскости (пункты а и б)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 60, а боковое ребро  $SA$  равно 37. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

1 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 30, а боковое ребро  $SA$  равно 28. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

2

**14**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

- Докажите, что диагональ  $A_1C$  куба и диагональ  $DC_1$  грани  $DD_1C_1C$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние от точки  $M$  – середины ребра  $AA_1$ , до плоскости  $BC_1D$ , если ребро куба равно  $2\sqrt{3}$ .

2 (дз)

нет аналога

3

**14**

На рёбрах  $DD_1$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 10$ , а  $B_1Q = 4$ . Плоскость  $A_1PQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $A_1PQ$ .

3 (дз)

**14**

На рёбрах  $DD_1$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 8 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 7$ , а  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $A_1PQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $A_1PQ$ .

4

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 12$  и  $BC = 5\sqrt{3}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 5$ ,  $SB = 13$ ,  $SD = 10$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ .

4 (дз)

**14**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 3$ ,  $SB = 5$ ,  $SD = 3\sqrt{5}$ .

- Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ .

5

**14**

На рёбрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 4$ , а  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

5 (дз)  
нет аналога

6

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $DABC$  с основанием  $ABC$  сторона основания равна  $6\sqrt{3}$ , а высота пирамиды равна 8. На рёбрах  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  соответственно отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , такие, что  $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  и  $AK = \frac{5}{2}$ .

- Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $DBC$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $DBC$ .

6 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $BMNK$  с основанием  $MNK$  сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах  $MN$ ,  $MK$  и  $MB$  соответственно отмечены точки  $F$ ,  $E$  и  $P$ , такие, что  $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$  и  $MP = \frac{7}{4}$ .

- Докажите, что плоскости  $FEP$  и  $NBK$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $P$  до плоскости  $NBK$ .

7

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  угол между диагоналями  $A_1C$  и  $B_1D$  равен  $60^\circ$ .

- Докажите, что диагонали  $A_1C$  и  $AC_1$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до плоскости  $BMD$ , где точка  $M$  – середина ребра  $CC_1$ , если сторона основания призмы равна 8.

7 (дз)  
нет аналога

8

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона  $AB$  основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах  $AB$ ,  $CD$  и  $AS$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = DN = 4$  и  $AK = 3$ .

- Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $SBC$  параллельны.
- Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SBC$ .

8 (дз)  
нет аналога

9

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 8, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $BK = C_1L = 2$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$ .

9 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $BK = 4$ ,  $C_1L = 5$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $AC_1$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите расстояние от точки  $B_1$  до плоскости  $\gamma$ .

10

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB = 6$ , высота  $SO = 4$ . На апофеме  $ST$  грани  $BSC$  отмечена точка  $K$  так, что  $SK = 2$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BC$  и содержит точки  $K$  и  $D$ .

- Докажите, что расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$  равно расстоянию от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка  $C$ , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью  $\gamma$ .

10 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB = 16$ , высота  $SO = 6$ . На апофеме  $ST$  грани  $BSC$  отмечена точка  $K$  так, что  $SK = 8$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BC$  и содержит точки  $K$  и  $A$ .

- Докажите, что расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$  равно расстоянию от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка  $B$ , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью  $\gamma$ .

### Расстояние между прямыми (пункт б)

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BD_1$ .

1 (дз)

**14**

В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 10$  и  $BD = 24$ .

а) Докажите, что прямые  $B_1D_1$  и  $AC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $B_1D_1$  и  $AC_1$ , если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

2 (дз)

**14**

В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 16$  и  $BD = 12$ .

а) Докажите, что прямые  $BD_1$  и  $AC$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $BD_1$  и  $AC$ , если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

3

**14**

Основание прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – ромб  $ABCD$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $D$ , а боковые грани призмы – квадраты.

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна  $8\sqrt{3}$ .

3 (дз)

нет аналога

4

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BC_1$ .

4 (дз)

нет аналога

5

### Найти отрезок (пункт б)

1

**14**

Дана правильная четырёхугольная пирамида  $MABCD$  с основанием  $ABCD$ , стороны основания которой равны  $5\sqrt{2}$ . Точка  $L$  – середина ребра  $MB$ . Тангенс угла между прямыми  $DM$  и  $AL$  равен  $\sqrt{2}$ .

а) Пусть  $O$  – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые  $AO$  и  $LO$  перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

1 (дз)

нет аналога

2

**14**

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 12. Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  – середина ребра  $AS$ , точка  $L$  лежит на ребре  $BC$  так, что  $BL:LC = 1:2$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $S_1LM$  – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

2 (дз)

**14**

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 6. Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  – середина ребра  $AS$ , точка  $L$  лежит на ребре  $BC$  так, что  $BL:LC = 1:2$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $S_1LM$  – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

3

**14**

Длина диагонали куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равна 3. На луче  $A_1C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1P = 4$ .

- Докажите, что  $PBDC_1$  – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка  $AP$ .

3 (дз)

**14**

Длина диагонали куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равна  $3\sqrt{11}$ . На луче  $DB_1$  отмечена точка  $P$  так, что  $DP = 4\sqrt{11}$ .

- Докажите, что  $PA_1BC_1$  – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка  $AP$ .

4

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна боковому ребру  $SA$ . Медианы треугольника  $SBC$  пересекаются в точке  $M$ .

- Докажите, что  $AM = AD$ .
- Точка  $N$  – середина  $AM$ . Найдите  $SN$ , если  $AD = 6$ .

4 (дз)

нет аналога

5

**14**

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.

- Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит апофему грани  $ASB$  в отношении 1:2, считая от вершины  $S$ .
- Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .

5 (дз)

нет аналога

6

**14**

Дана правильная призма  $ABC A_1B_1C_1$ , у которой стороны основания  $AB = 4$ , а боковое ребро  $AA_1 = 9$ . Точка  $M$  – середина ребра  $AC$ , а на ребре  $AA_1$  взята точка  $T$  так, что  $AT = 5$ .

- Докажите, что плоскость  $BB_1M$  делит отрезок  $C_1T$  пополам.
- Плоскость  $BTC_1$  делит отрезок  $MB_1$  на две части. Найдите длину меньшей из них.

6 (дз)

нет аналога

## Периметр или площадь (пункт 6)

1

**14**

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно  $\pi\sqrt{2}$ .
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

1 (дз)

**14**

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна  $6\sqrt{2}$ , а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно  $\pi\sqrt{2}$ .
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

2

**14**

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $5\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{14}$ . Точка  $K$  – середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$  параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

2 (дз)

**14**

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $3\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{7}$ . Точка  $K$  – середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$  параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

3

**14**

Дана треугольная призма  $ABC A_1B_1C_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BC_1$  параллельно прямой  $AB_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AC$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если призма правильная, сторона её основания равна  $2\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 1.

3 (дз)

нет аналога

4

**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $BC_1$  и  $AC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4 (дз)

**14**

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания – точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  – образующая цилиндра, а  $AC$  – диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 4$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5

**14**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ .

5 (дз)

**14**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $A_1, B_1$  и середину ребра  $BC$ .

6

**14**

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

- Докажите, что угол между плоскостью  $SAC$  и плоскостью, проходящей через вершину  $S$  этой пирамиды, середину стороны  $AB$  и центр основания, равен  $45^\circ$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $SAC$ .

6 (дз)

нет аналога

7

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E = 4EA$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 16$ ,  $AA_1 = 20$ .

- Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 3:2.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

7 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E = 6EA$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 14$ .

- Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 4:3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

8

**14**

Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  и середину ребра  $B_1C_1$ .

- Пусть  $M$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $CC_1$ . Докажите, что  $C_1$  – середина отрезка  $CM$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если все рёбра призмы равны  $a$ .

8 (дз)

нет аналога

9

**14**

Точки  $O$  и  $O_1$  – центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка  $K$  – середина отрезка  $OO_1$ . На окружности верхнего основания взяты точки  $A$  и  $B$ , не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки  $A_1$  и  $B_1$ , симметричные точкам  $A$  и  $B$  соответственно относительно точки  $K$ .

а) Докажите, что прямые  $AB_1$  и  $BA_1$  параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника  $ABA_1B_1$ , если радиус основания равен 5,  $AB = 6$ , а высота цилиндра равна 8.

9 (дз)  
нет аналога  
10**14**

Основанием прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является параллелограмм  $ABCD$ . Известно, что  $AB_1 = 10$ ,  $DB_1 = 8$  и  $AD = 6$ .

а) Докажите, что прямые  $DB$  и  $BC$  перпендикулярны.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды  $B_1ABD$ , если  $B_1C = 6\sqrt{2}$ .

10 (дз)  
нет аналога  
11**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  на ребре  $AA_1$  отмечена точка  $K$ , причём  $AK:KA_1 = 1:3$ . Через точки  $K$  и  $B$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что точка  $M$  – середина ребра  $DD_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 5$ ,  $AA_1 = 4$ .

11 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $K$  делит боковое ребро  $AA_1$  в отношении  $AK:KA_1 = 1:2$ . Через точки  $B$  и  $K$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DM:MD_1 = 2:1$ .

б) Найдите площадь сечения, если известно, что  $AB = 4$ ,  $AA_1 = 6$ .

12

**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведена секущая плоскость, содержащая диагональ  $AC_1$  и пересекающая рёбра  $BB_1$  и  $DD_1$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что сечение  $AFC_1E$  – параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что  $AFC_1E$  – ромб и  $AB = 3$ ,  $BC = 2$ ,  $AA_1 = 5$ .

12 (дз)  
нет аналога  
13**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 6:1$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 3:4$ , а точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 30$ ,  $AA_1 = 35$ .

а) Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

13 (дз)

**14**

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 5:3$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 5:11$ , а точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 6\sqrt{2}$ ,  $AD = 10$ ,  $AA_1 = 16$ .

- Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

14

**14** Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $B_1P$  и  $QB$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной прямой  $BQ$ , если ребро куба равно 4.

14 (дз)

**14** Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $B_1P$  и  $QB$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку  $P$  и перпендикулярной прямой  $BQ$ , если ребро куба равно 10.

15

**14**

Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса – треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $2\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

15 (дз)

нет аналога

16

**14**

Дан параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BA_1$  параллельно прямой  $CB_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины  $C_1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ , если он прямой, его основание  $ABCD$  – ромб с диагоналями  $AC = 24$  и  $BD = 10$ , а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

16 (дз)

нет аналога

17

**14**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $C_1D_1$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $C, A_1$  и  $F_1$ .

17 (дз)

нет аналога

18

**14**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  известны длины рёбер:  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $AA_1 = 2$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины рёбер  $A_1B_1$  и  $CC_1$  соответственно. Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $B_1C_1$  в точке  $U$ .

- Докажите, что  $B_1U:UC_1 = 2:1$ .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $APQ$ .

18 (дз)  
нет аналога  
19**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 4. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

19 (дз)  
нет аналога  
20**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{6}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

20 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона основания  $AB = 6$ , а боковое ребро  $AA_1 = 4\sqrt{3}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

21

**14**

В правильной треугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{2}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = B_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  – точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $MNKL$  – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

21 (дз)  
нет аналога

## Объём (пункт б)

**14**

Основанием прямой треугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 15 и 9 соответственно,  $AB = 13$ .

- Докажите, что треугольник  $BA_1C_1$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $AA_1C_1B$ .

1 (дз)

**14**

Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является ромб  $ABCD$ ,  $AB = AA_1$ .

- Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.
- Найдите объём призмы, если  $A_1C = BD = 2$ .

**14**

В треугольной пирамиде  $SABC$  известны боковые рёбра:  $SA = SB = 7$ ,  $SC = 5$ . Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$ . Эта высота равна 4.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды  $SABC$ .

**14**

В треугольной пирамиде  $SABC$  известны боковые рёбра:  $SA = SB = 13$ ,  $SC = 3\sqrt{17}$ . Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$ . Эта высота равна 12.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды  $SABC$ .

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 7. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 4$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 1:3$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

**14**

В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 5. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1P:PB_1 = 1:2$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

**14**

Основание пирамиды  $PABCD$  – трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

- Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды  $PKBC$ , если  $AB = BC = CD = 3$ , а высота пирамиды равна 8.

**14**

Дана пирамида  $PABCD$ , в основании – трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Известно, что сумма углов  $BAD$  и  $ADC$  равна 90 градусов, а плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны основанию, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

- Докажите, что плоскость  $PAB$  перпендикулярна плоскости  $PCD$ .
- Найдите объём  $PKBC$ , если  $AB = BC = CD = 2$ , а  $PK = 12$ .

**14**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  все рёбра равны 8. На рёбрах  $AA_1$  и  $CC_1$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM = 3$ ,  $CN = 1$ .

- Докажите, что плоскость  $MNB_1$  разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- Найдите объём тетраэдра  $MNBB_1$ .

6 (дз)

**14**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  все рёбра равны 6. На рёбрах  $AA_1$  и  $CC_1$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM = 2$ ,  $CN = 1$ .

- Докажите, что плоскость  $MNB_1$  разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- Найдите объём тетраэдра  $MNBB_1$ .

7

**14**

В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 13$ ,  $PB = 15$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

7 (дз)

**14**

В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 17$ ,  $PB = 10$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

8

**14**

Ребро куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равно 6. Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  – центры граней  $ABCD$ ,  $AA_1D_1D$  и  $CC_1D_1D$  соответственно.

- Докажите, что  $B_1KLM$  – правильная пирамида.
- Найдите объём  $B_1KLM$ .

8 (дз)

нет аналога

9

**14**

Плоскость  $\gamma$ , содержащая диагональ  $BD$  грани куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , пересекает ребро  $B_1C_1$  и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

- Докажите, что плоскость  $\gamma$  делит ребро  $B_1C_1$  в отношении 2:1, считая от вершины  $B_1$ .
- В каком отношении плоскость  $\gamma$  делит объём куба?

9 (дз)

нет аналога

10

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием – сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

10 (дз)

**14**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 30, а боковое ребро  $SA$  равно 28. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием – сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

11

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB = 6$ , высота  $SO = 4$ . На апофеме  $ST$  грани  $BSC$  отмечена точка  $K$  так, что  $SK = 2$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BC$  и содержит точки  $K$  и  $D$ .

- Докажите, что расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$  равно расстоянию от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка  $C$ , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью  $\gamma$ .

11 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB = 16$ , высота  $SO = 6$ . На апофеме  $ST$  грани  $BSC$  отмечена точка  $K$  так, что  $SK = 8$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BC$  и содержит точки  $K$  и  $A$ .

- Докажите, что расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\gamma$  равно расстоянию от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка  $B$ , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью  $\gamma$ .

12

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 5, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{5}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $CK = 2$ , а  $C_1L = 1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка  $A_1$ , а основание – сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

12 (дз)

**14**

В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  сторона  $AB$  основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{2}$ . На рёбрах  $BC$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $CK = 4$ , а  $C_1L = 1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- а) Докажите, что прямая  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка  $A_1$ , а основание – сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .