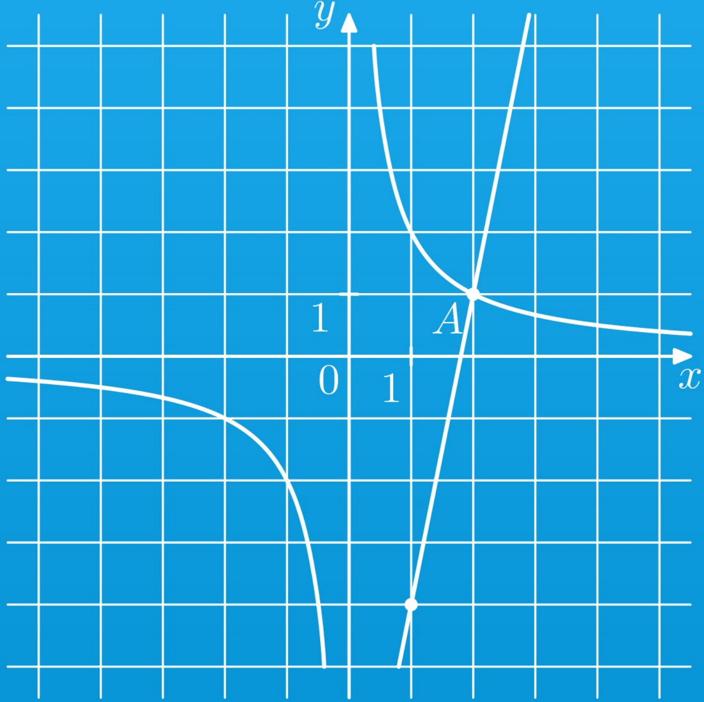
Wild Mathing

ЕГЭ Модуль 1



$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

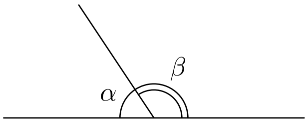
Содержание

§1. Домашняя работа

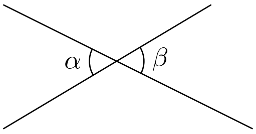
Справочные материалы

Основные факты планиметрии

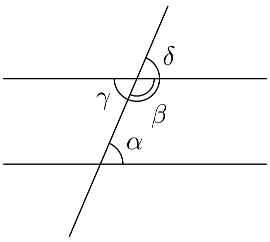
1) Свойство смежных углов:
$\alpha + \beta = 180^\circ$



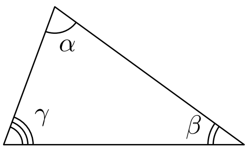
2) Свойство вертикальных углов:
$\alpha = \beta$



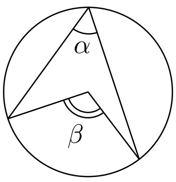
3) Свойства углов при параллельных прямых и секущей:
$\alpha + \beta = 180^\circ$ — односторонние
$\alpha = \gamma$ — накрест лежащие
$\alpha = \delta$ — соответственные



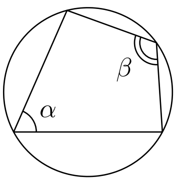
4) Сумма углов треугольника: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



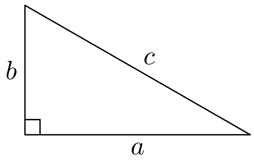
5) Свойство вписанного угла: $\alpha = \dfrac{1}{2}\beta$



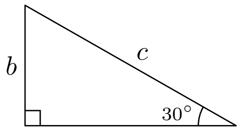
6) Свойство вписанного четырехугольника:
$\alpha + \beta = 180^\circ$



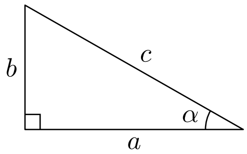
7) Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$



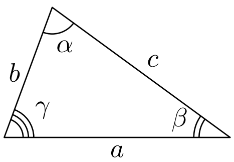
8) Свойство катета, лежащего напротив угла в тридцать градусов: $b = \frac{1}{2}c$



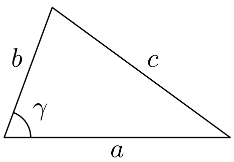
9) Определения тригонометрических функций:
$\sin\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{b}$



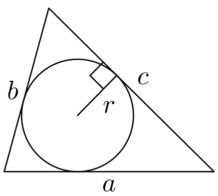
10) Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$



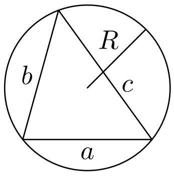
11) Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



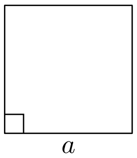
12) Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{S}{p}$



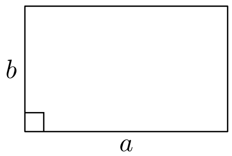
13) Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{abc}{4S}$



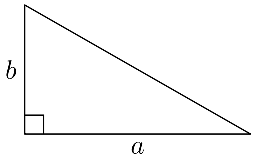
14) Площадь квадрата: $S = a^2$



15) Площадь прямоугольника: $S = ab$



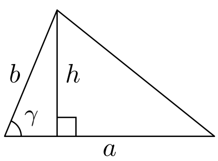
16) Площадь прямоугольного треугольника:
$S = \frac{1}{2}ab$



17) Площадь треугольника:

$S = \frac{1}{2}ah$

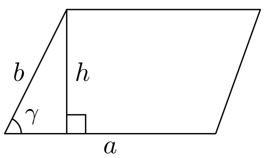
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$



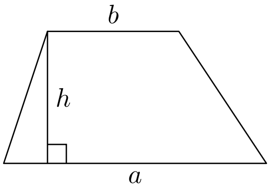
18) Площадь параллелограмма:

$S = ah$

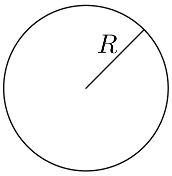
$S = ab\sin\gamma$



19) Площадь трапеции: $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

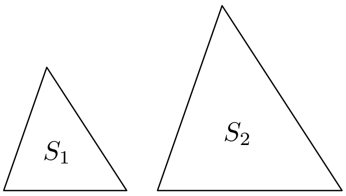


20) Площадь круга: $S = \pi R^2$



21) Отношение площадей подобных фигур:

$\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$ (k — коэффициент подобия)



Векторы

1) В математике направленный отрезок и вектор различаются, но в школьном курсе для упрощения эти термины означают одно и то же. Вектором будем называть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая концом.

2) Для удобства любую точку плоскости будем также называть нулевым вектором.

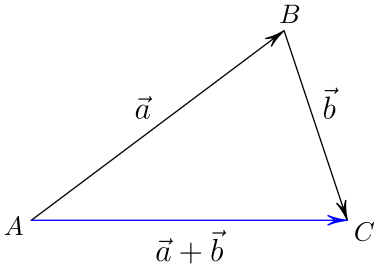
3) Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Будем обозначать ее так: $|\overrightarrow{AB}|$.

4) Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

5) Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными, во втором — противоположно направленными.

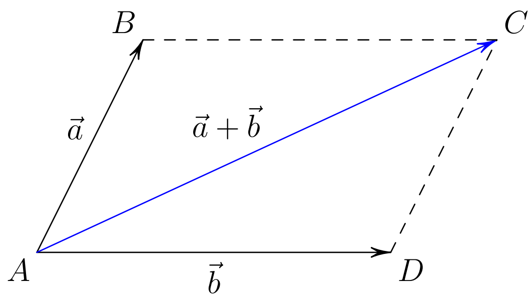
6) Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

7) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется правилом треугольника.



8) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:
- а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон),
- б) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).

9) Для сложения двух неколлинеарных векторов, кроме правила треугольника, существует правило параллелограмма. Чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a}+\vec{b}$.



10) Вектор $\vec{a}_1$ называется противоположным ненулевому вектору $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ имеют равные длины и противоположно направлены.

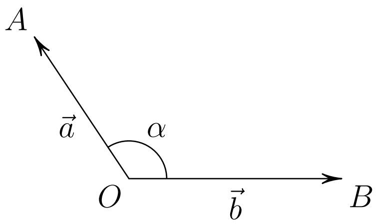
11) Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geqslant 0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

12) Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$. Тогда (x_2-x_1, y_2-y_1) — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

13) Пусть даны два вектора $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$, а также произвольное число k, тогда:

а) координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны (x_1+x_2, y_1+y_2),
б) координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны (x_1-x_2, y_1-y_2),
в) координаты вектора $k\cdot\vec{a}$ равны (kx_1, ky_1).

14) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB. Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α. Ясно, что α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $0°$.



15) Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

16) В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ также выражается формулой

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Дополнительно

1) Справочник по геометрии

2) Понятие угла. Смежные и вертикальные углы

3) Признаки равенства треугольников

4) Параллельность. Сумма углов треугольника

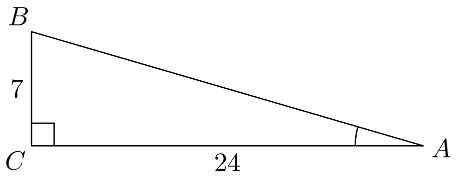
5) Окружность. Параллелограмм. Трапеция

6) Площадь

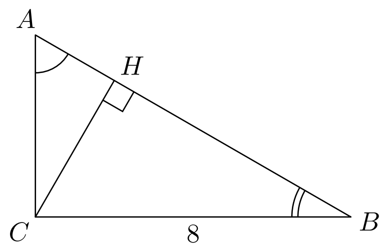
7) Подобие треугольников

Планиметрия

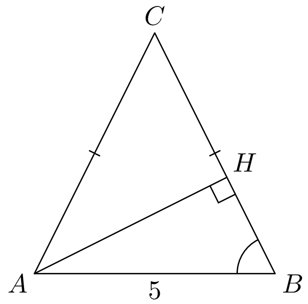
1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 24$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$.



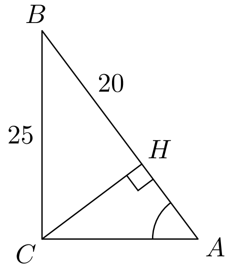
2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 8$, $\cos A = 0{,}5$. Найдите высоту CH.



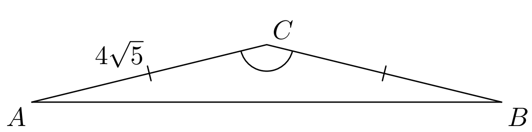
3. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $AB = 5$, $\sin BAC = \frac{7}{25}$. Найдите BH.



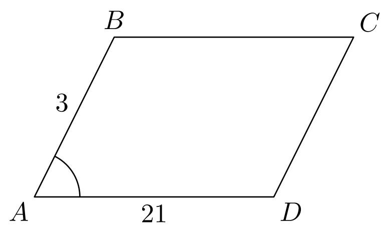
4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 25$, $BH = 20$. Найдите $\cos A$.



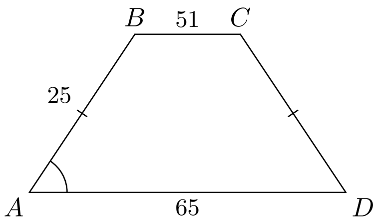
5. В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 4\sqrt{5}$, высота AH равна 4. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.



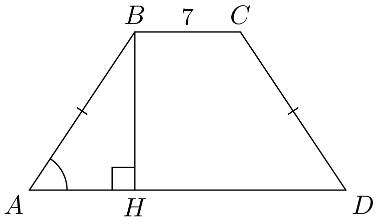
6. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $AD = 21$, $\sin A = \frac{6}{7}$. Найдите большую высоту параллелограмма.



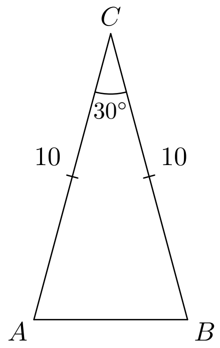
7. Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.



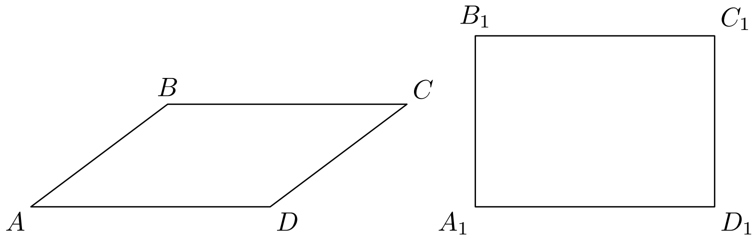
8. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 51. Тангенс острого угла равен 5/11. Найдите высоту трапеции.



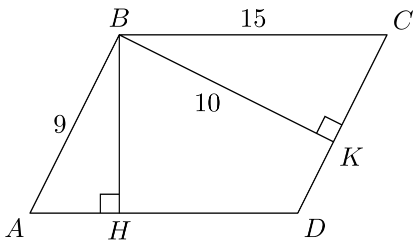
9. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.



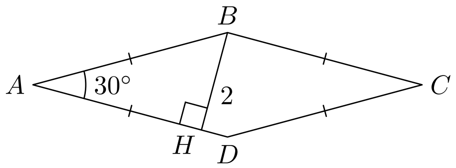
10. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



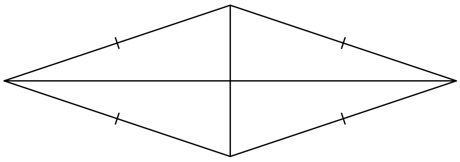
11. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



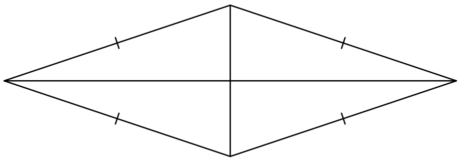
12. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол — 30°.



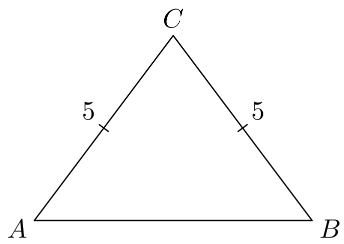
13. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.



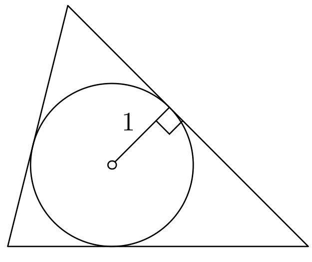
14. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.



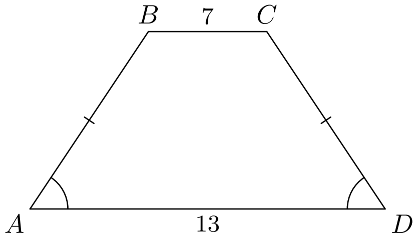
15. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.



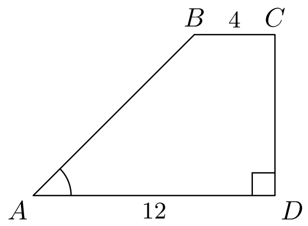
16. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



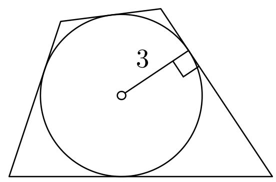
17. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.



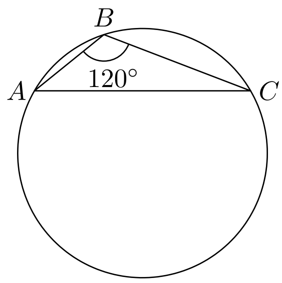
18. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



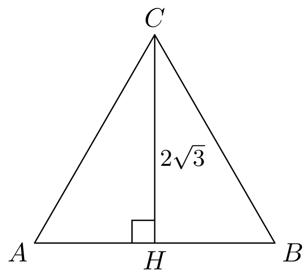
19. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.



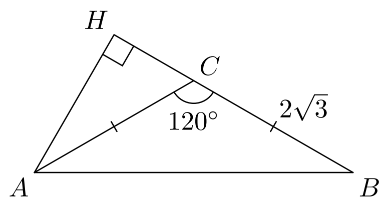
20. Найдите хорду, на которую опирается угол $120°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



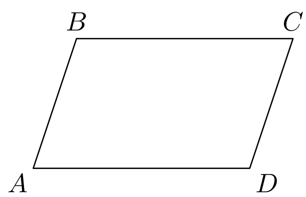
21. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите AB.



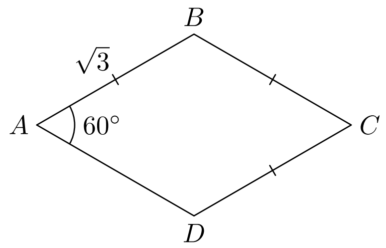
22. В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен $120°$. Найдите высоту AH.



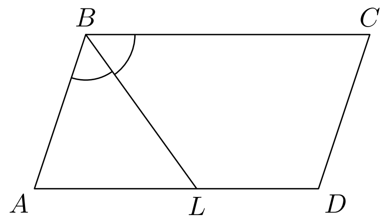
23. Один угол параллелограмма на $70°$ больше другого. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.



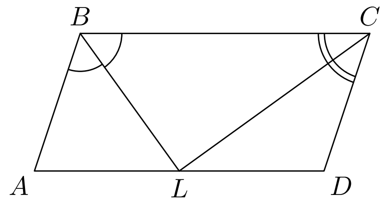
24. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.



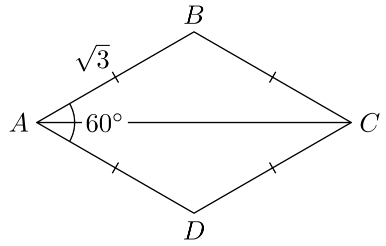
25. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $4 : 3$, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



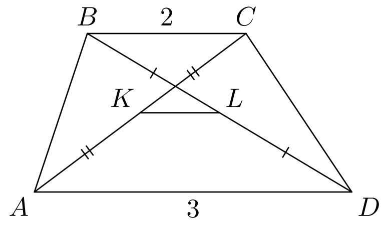
26. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



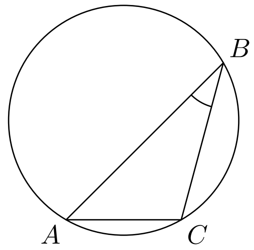
27. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.



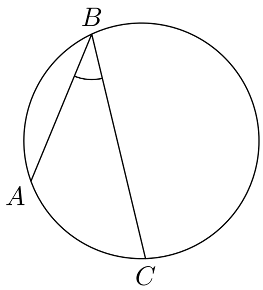
28. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



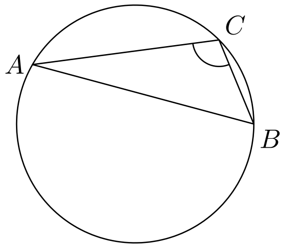
29. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.



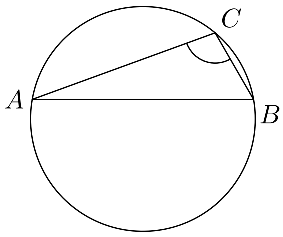
30. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $1/5$ длины окружности. Ответ дайте в градусах.



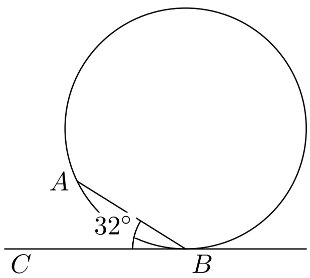
31. Хорда AB делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как $5 : 7$. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



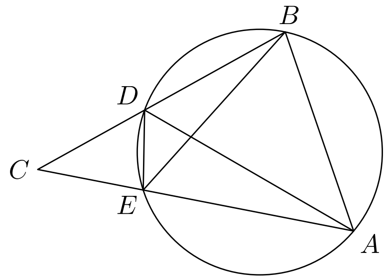
32. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные меры которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



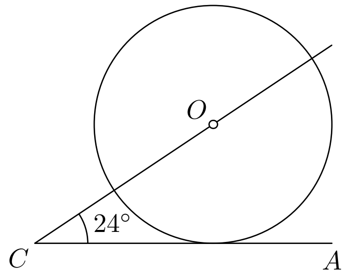
33. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен $32°$. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.



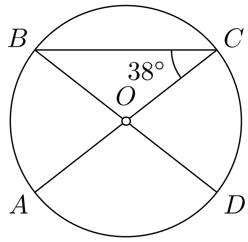
34. Четырехугольник $BDEA$ вписан в окружность, причем углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные меры которых равны соответственно 118° и 38°. Прямые BD и AE пересекаются в точке C. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



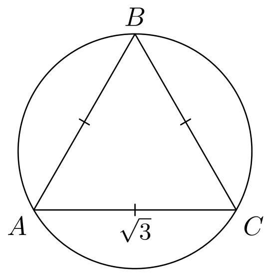
35. Угол ACO равен 24°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Найдите градусную меру большей дуги окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



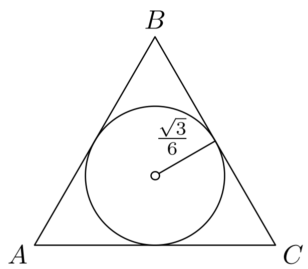
36. AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 38°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



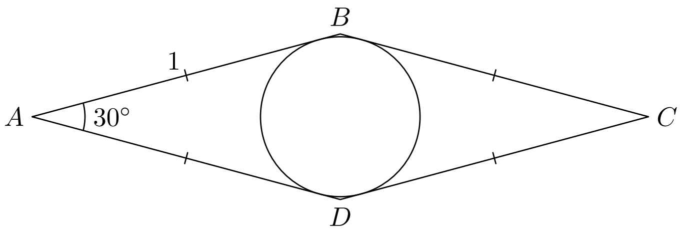
37. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



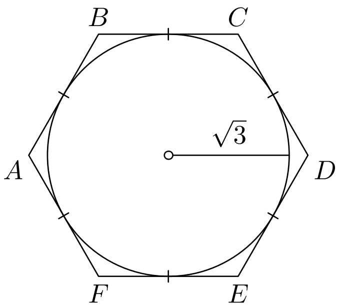
38. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.



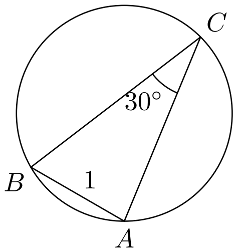
39. Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



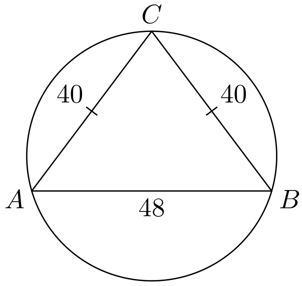
40. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



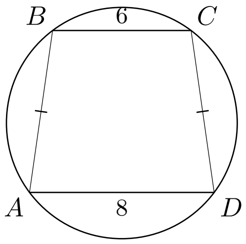
41. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



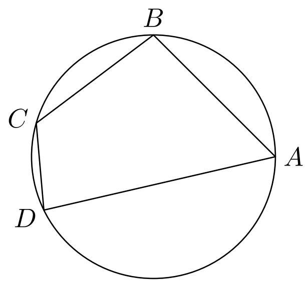
42. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



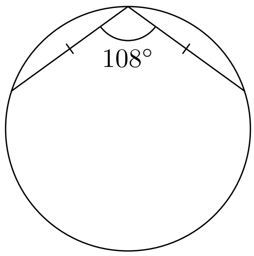
43. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной около нее окружности равен 5. Найдите высоту трапеции, если известно, что она больше 1.



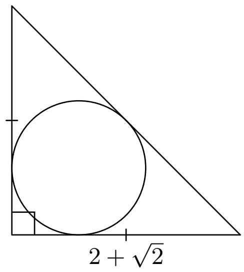
44. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



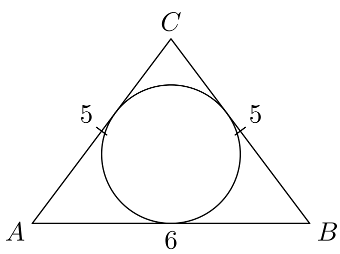
45. Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 108° . Найдите число вершин многоугольника.



46. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2+\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

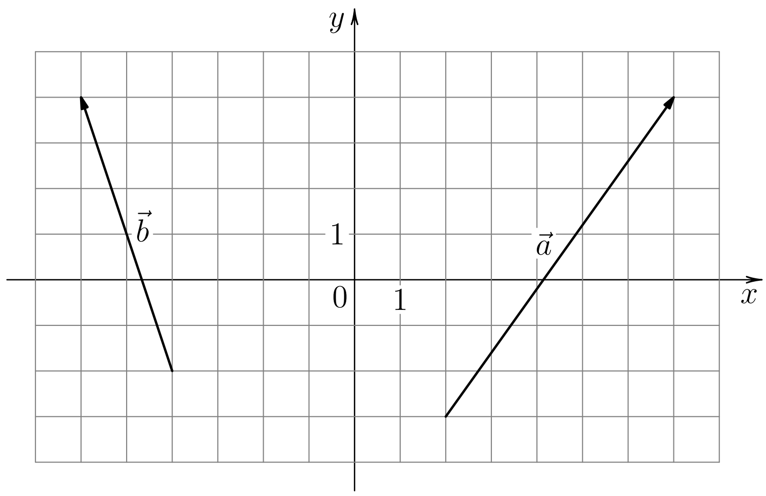


47. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

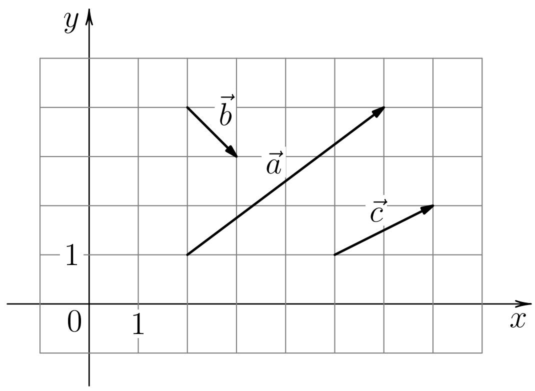


Векторы

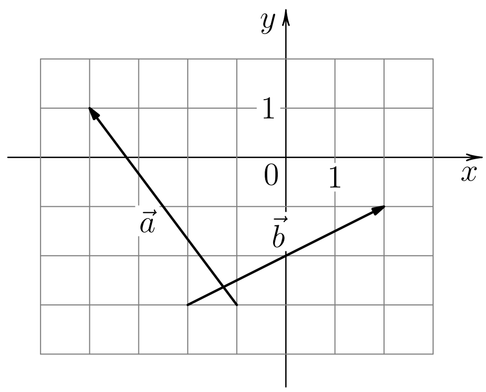
1. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. В ответе укажите сумму координат вектора $\vec{c}$.



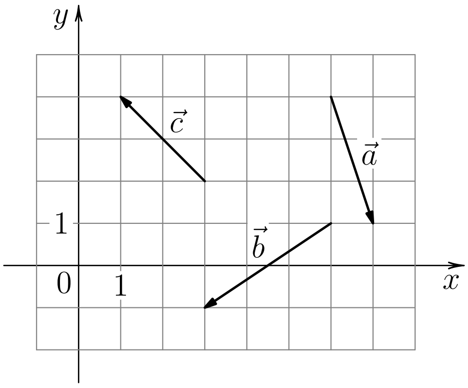
2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите координаты вектора $\vec{d}$, если $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. В ответе укажите сумму координат вектора $\vec{d}$.



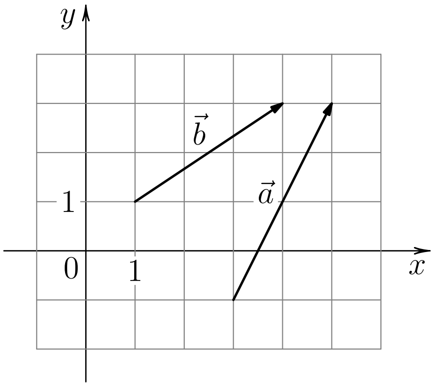
3. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$. В ответе укажите сумму координат вектора $\vec{c}$.



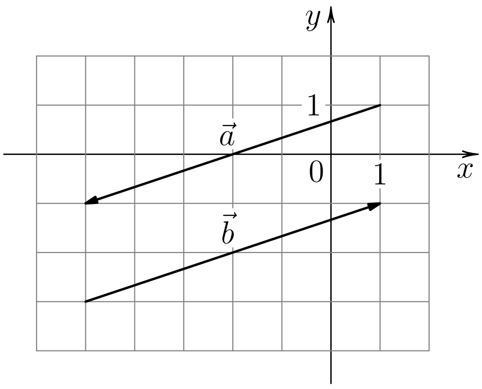
4. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{d}$, если $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



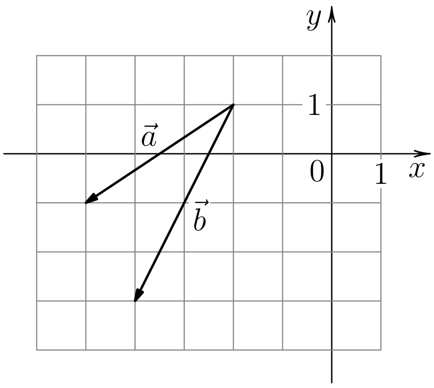
5. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



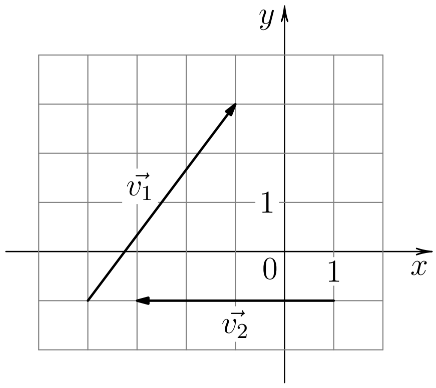
6. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



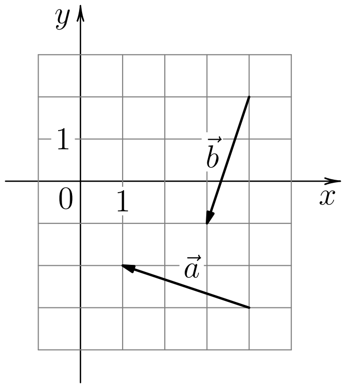
7. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



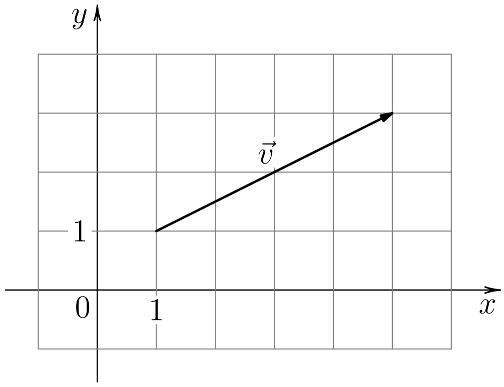
8. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$. Найдите косинус угла между этими векторами.



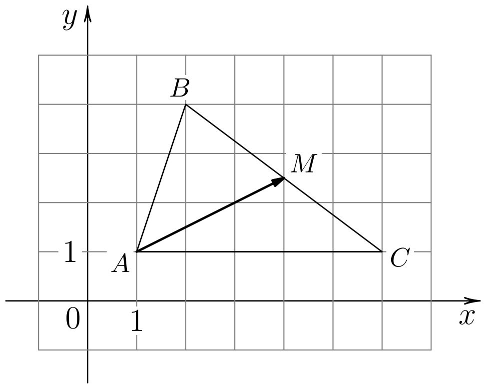
9. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите синус угла между этими векторами.



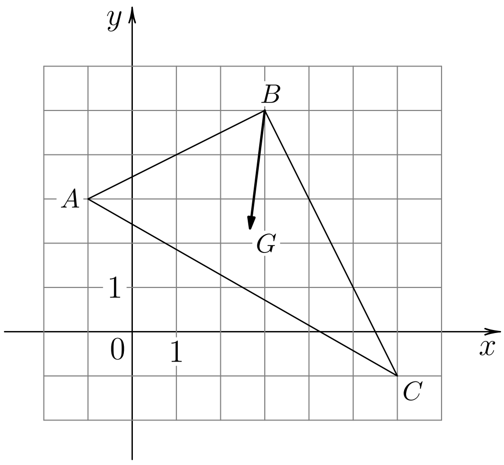
10. На координатной плоскости изображен вектор $\vec{v}$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{u}$, который сонаправлен с вектором $\vec{v}$. В ответе укажите произведение координат вектора $\vec{u}$.



11. На координатной плоскости изображен треугольник ABC. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$, где M — середина отрезка BC. В ответе укажите сумму координат вектора $\overrightarrow{AM}$.



12*. На координатной плоскости изображен треугольник ABC. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BG}$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC. В ответе укажите сумму координат вектора $\overrightarrow{BG}$.



Подсказки

Планиметрия

1. Чему равна гипотенуза AB? Синус угла A — это отношение каких сторон?

2. Верно ли равенство $\cos A = \sin B$?

3. Что можно сказать про углы A и B треугольника ABC? А про синусы этих углов?

4. Можете ли вы найти синус угла HBC? Как он связан с косинусом угла BAC?

5. Как вычислить тангенс угла, смежного с искомым?

6. Можем ли мы найти площадь этого параллелограмма?

7. Как найти высоту этой трапеции?

8. Проведите высоты из концов меньшего основания к большему.

9. Какие формулы площади треугольника приходят на ум?

10. Смелее вводите переменные.

11. Попробуйте записать площадь параллелограмма двумя способами.

12. Ромб — это частный случай параллелограмма. Как здесь поможет свойство катета, лежащего напротив угла в $30°$ градусов?

13. Под каким углом пересекаются диагонали ромба?

14. Если меньшая диагональ x, то чему равна большая?

15. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, совпадает с медианой.

16. Воспользуйтесь формулой радиуса окружности, вписанной в треугольник.

17. Можно ли найти высоту трапеции?

18. Проведите высоту трапеции из конца меньшего основания и попробуйте найти катеты получившегося прямоугольного треугольника.

19. Формула $S = pr$ применима для любого описанного многоугольника.

20. Воспользуйтесь теоремой синусов.

21. Чему равен угол правильного треугольника? Напомню, что CH также является медианой треугольника ABC.

22. Чему равен угол HCA?

23. Вспомните свойство внутренних односторонних углов.

24. Попробуйте записать площадь ромба двумя способами.

25. Сумели найти внутренние накрест лежащие углы?

26. Докажите, что в этой конструкции присутствует два равнобедренных треугольника.

27. Для разнообразия попробуйте теорему косинусов.

28. Задача решается очень просто, если найти средние линии двух треугольников. Каких?

29. Соедините концы хорды с центром окружности.

30. Будем считать, что градусная мера дуги, составляющая всю окружность, равна $360°$. Чему тогда равна меньшая дуга AB?

31. В задаче спрашивают угол ACB.

32. Обозначьте градусные меры упомянутых дуг за x, $3x$, $5x$. Чему равен x?

33. Используйте свойство угла между касательной и хордой, проведенной в точку касания.

34. Рассмотрите треугольник CAD и задайтесь вопросом: чему равен угол ADC?

35. Пусть A — точка касания. Чему равен центральный угол AOC? А смежный с ним угол?

36. Что примечательного в четырехугольнике $ABCD$?

37. Кроме явной формулы, можно воспользоваться тем, что центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения медиан, у которой есть замечательное свойство.

38. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

39. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Как это связано с высотой ромба?

40. Соедините центр окружности с двумя соседними вершинами правильного шестиугольника. Что можно сказать о полученном треугольнике?

41. Воспользуйтесь теоремой синусов.

42. Воспользуйтесь формулой радиуса описанной окружности треугольника или следствием из теоремы синусов.

43. Где лежит центр описанной окружности многоугольника? Попробуйте провести отрезок, соединяющий середины оснований.

44. Чему равна сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность?

45. Как можно найти сумму углов правильного многоугольника? А один из его углов?

46. Обозначьте стороны треугольника за a, a и $\sqrt{2}a$ и воспользуйтесь формулой радиуса вписанной окружности треугольника. Либо же выведите свою за счет равенства отрезков касательных.

47. Чему равна площадь треугольника? Чему равен его полупериметр?

Векторы

1. Вектор $\vec{a}$ «смотрит» на 5 клеток вправо и на 7 вверх, поэтому его координаты $(5;7)$. Вектор $\vec{b}$ «смотрит» на 2 клетки влево и на 6 вверх, поэтому его координаты $(-2,6)$. Говоря формально, чтобы найти координаты вектора, нужно вычесть из координат его конца координаты начала.

2. Удобно сложить, например, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, пользуясь правилом треугольника, а затем найти разность $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$.

3. Противоположным к вектору $\vec{v}(x_0,y_0)$ является вектор $\vec{v_1}(-x_0,-y_0)$. В то время как скалярное умножение вектора $\vec{v}(x_0,y_0)$ на число на 2 дает вектор $\vec{v_2}(2x_0,2y_0)$.

4. Для сложения векторов удобно воспользоваться правилом треугольника. Длина вектора $\vec{d}(x_0,y_0)$ определяется формулой $|\vec{d}|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

5. Для векторов $\vec{v}(x_1,y_1)$ и $\vec{v}(x_2,y_2)$ скалярное произведение $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}$ можно найти как $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$.

6. Удобно найти скалярное произведение по определению: $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$. Т. е. оно равно произведению длин векторов на косинус угла между ними. В нашем случае векторы коллинеарны, но противоположно направлены. Напомню, что угол между прямыми не бывает тупым, в то время как угол между векторами — бывает.

7. Как и в №5, попробуйте найти сумму произведений соответственных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8. Видите египетский треугольник?

9. Чему равно скалярное произведение этих векторов? Можно ли, зная его, найти угол между этими векторами?

10. Единичный означает, что длина вектора равна 1. Припомните определение коллинеарных векторов, а затем сонаправленных векторов.

11. Пусть $B(x_1,y_1)$ и $C(x_2,y_2)$ — концы отрезка BC, тогда координаты середины этого отрезка $M(x_3,y_3)$ определяются равенствами $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ и $y_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

12. Середина отрезка AB имеет координаты $(1,4)$. Теперь вспомните свойство точки пересечения медиан треугольника: она делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины. Существует и более простой путь: среднее арифметическое абсцисс трех вершин треугольника даст абсциссу точки G, аналогично — с ординатой.

§2. Домашняя работа

Справочные материалы

Общая теория

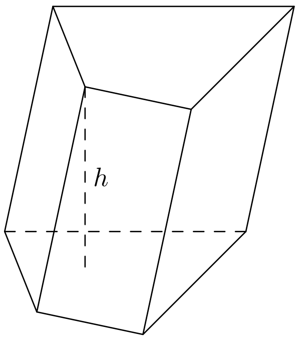
Основные определения и теоремы стереометрии

Объемы и площади поверхностей тел

1) Призма: $V = Sh$

S — площадь основания

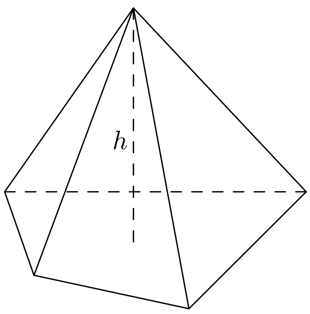
h — высота пирамиды



2) Пирамида: $V = \frac{1}{3}Sh$

S — площадь основания

h — высота



3) Цилиндр:

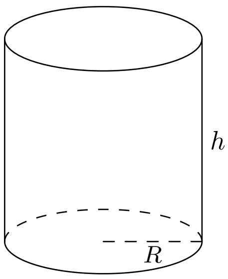
$V = Sh$

$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$

S — площадь основания

h — высота

R — радиус основания



4) Конус:

$V = \frac{1}{3}Sh$

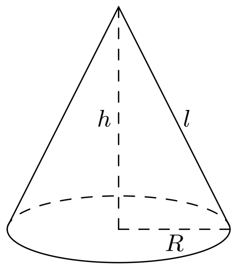
$S_{\text{бок}} = \pi Rl$

S — площадь основания

h — высота

R — радиус основания

l — образующая

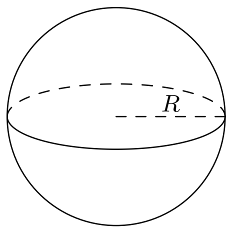


5) Шар:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

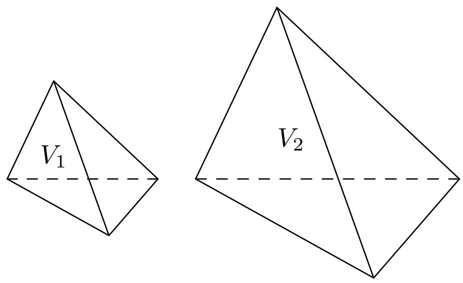
$S_{\text{пов}} = 4\pi R^2$

R — радиус шара



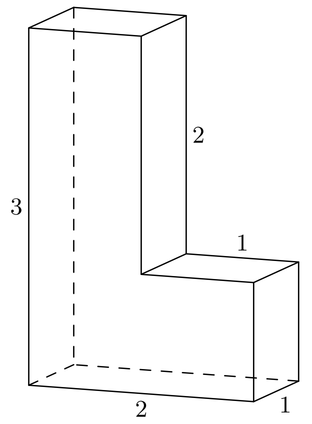
6) Отношение объемов подобных тел: $\frac{V_1}{V_2} = k^3$

k — коэффициент подобия

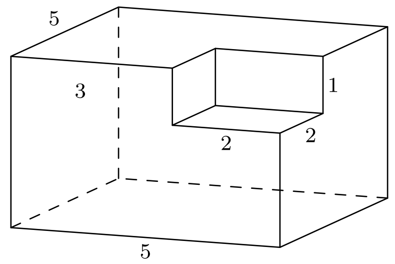


Стереометрия

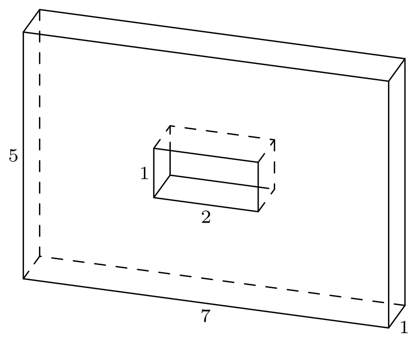
1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



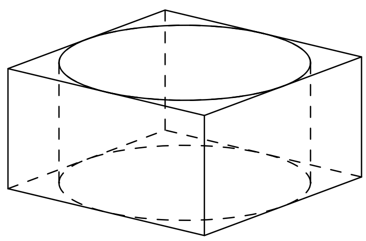
2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



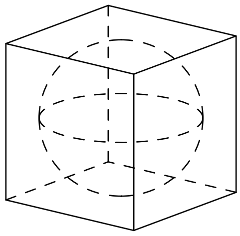
3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



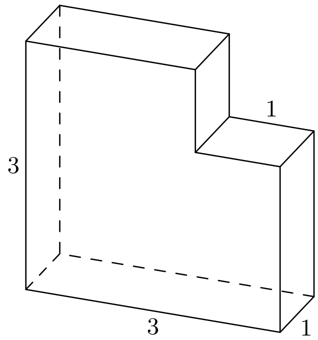
4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



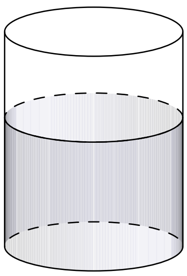
5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.



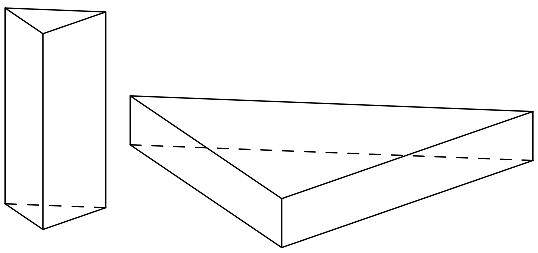
6. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



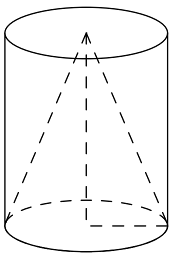
7. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.



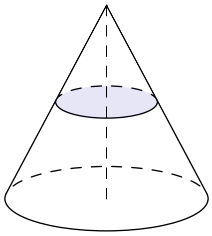
8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.



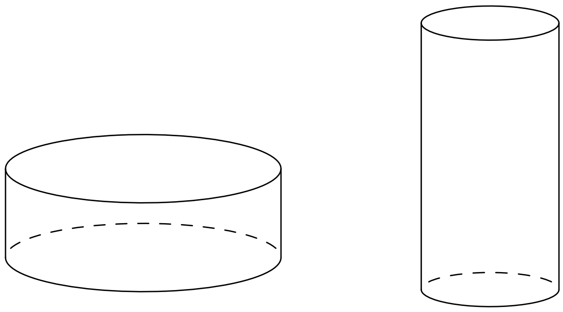
9. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.



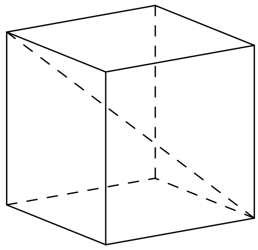
10. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



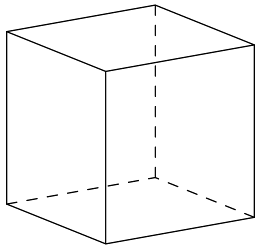
11. Объем первого цилиндра равен 12 м^3. Высота второго цилиндра в три раза больше, а радиус его основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.



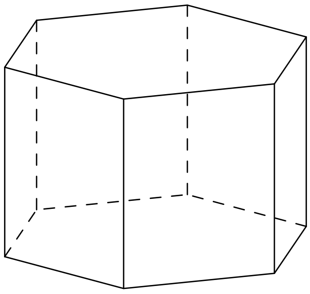
12. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.



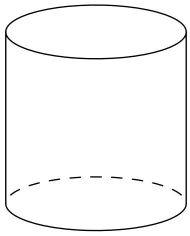
13. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.



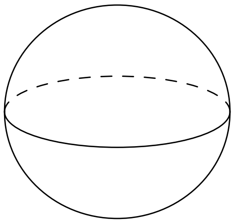
14. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



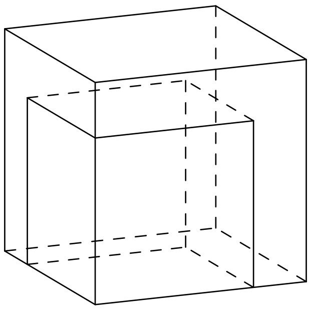
15. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.



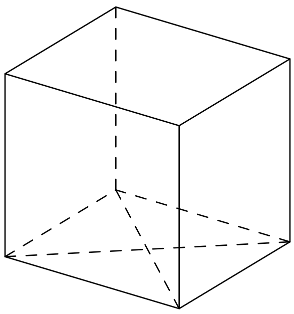
16. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



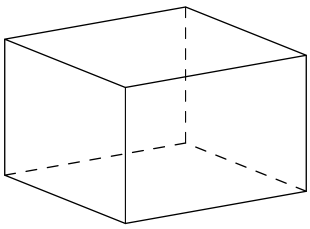
17. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.



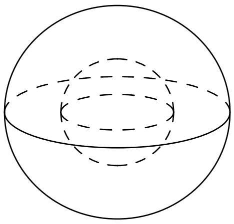
18. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



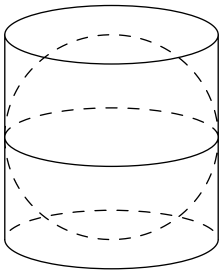
19. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.



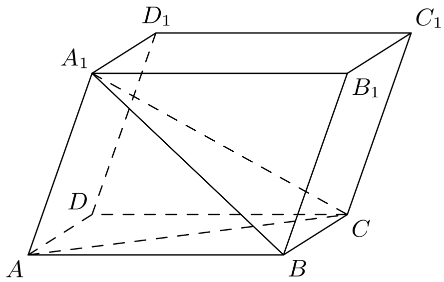
20. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?



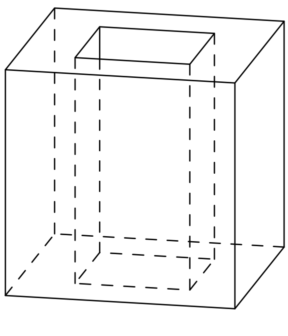
21. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



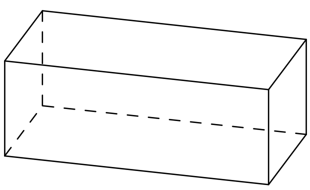
22. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.



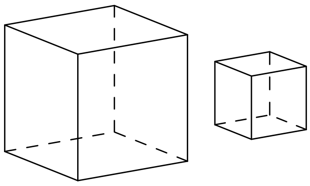
23. Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



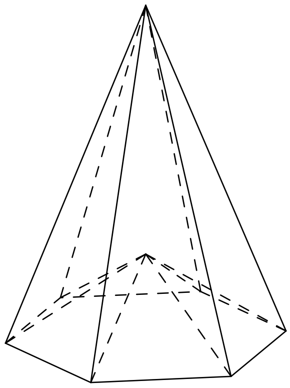
24. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



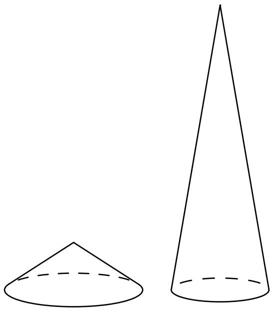
25. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в три раза?



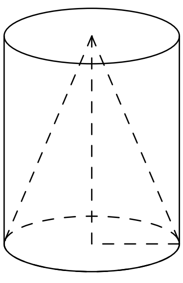
26. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



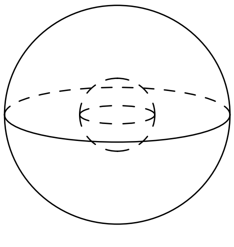
27. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 6 раз, а радиус основания увеличится в $\sqrt{2}$ раз?



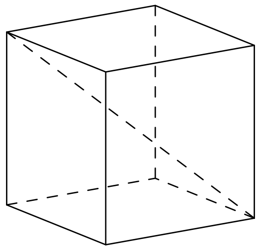
28. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.



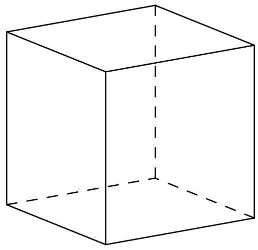
29. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?



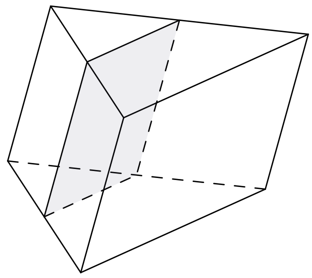
30. Объем куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.



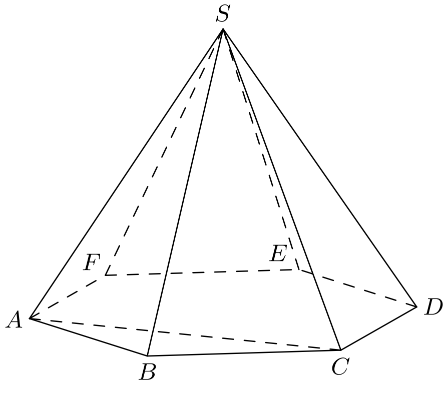
31. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.



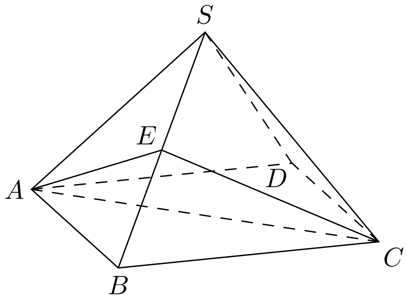
32. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



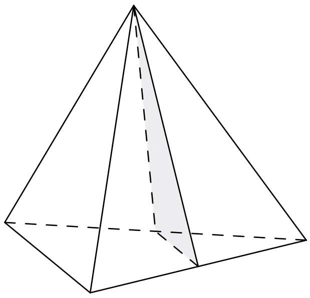
33. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



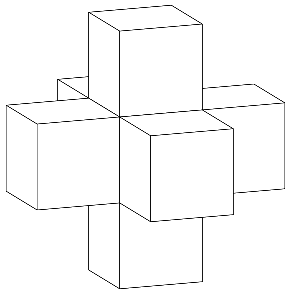
34. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E — середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



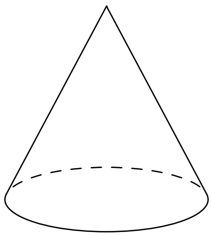
35. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



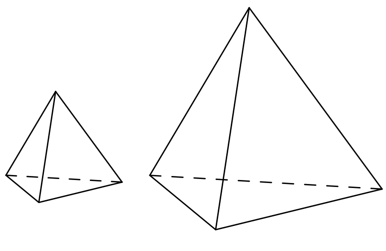
36. Найдите объем пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.



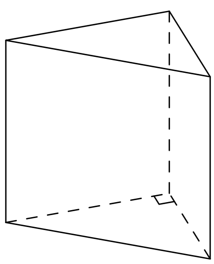
37. Во сколько раз увеличится объем конуса, если длину окружности его основания увеличить в три раза?



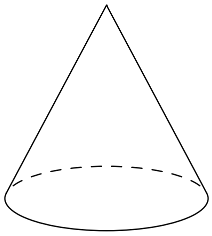
38. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



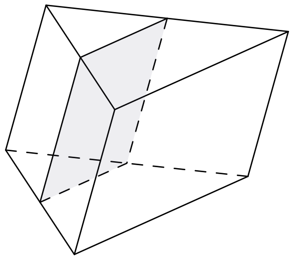
39. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.



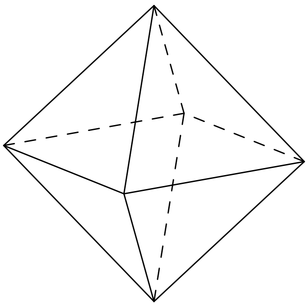
40. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



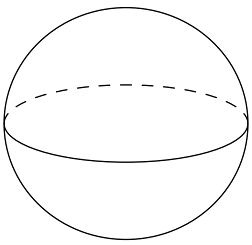
41. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



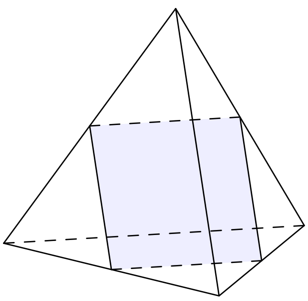
42. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



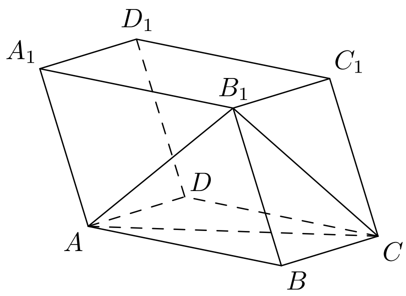
43. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



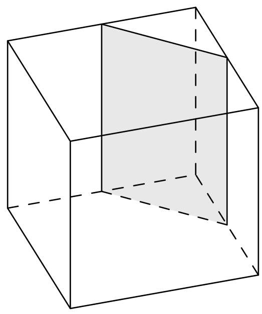
44. Ребра правильного тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



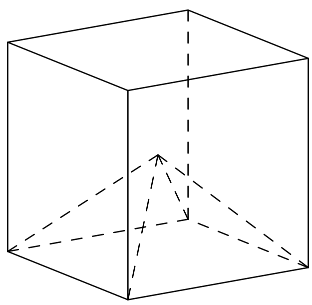
45. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.



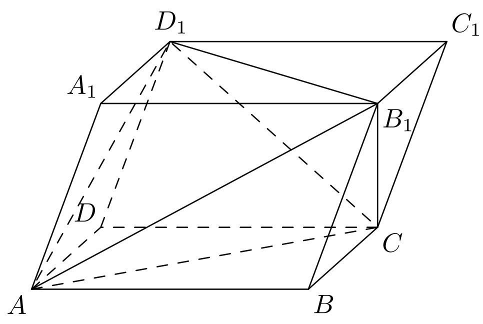
46. Объем куба равен 12. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



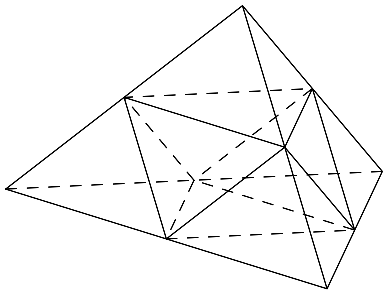
47. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



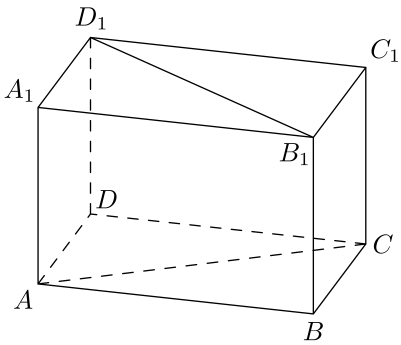
48. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



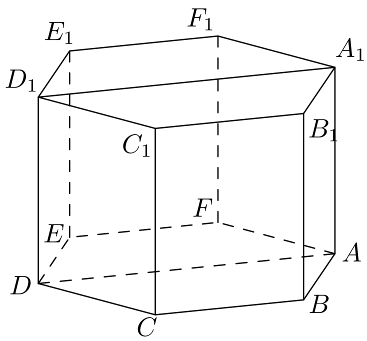
49. Объем тетраэдра равен 19. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.



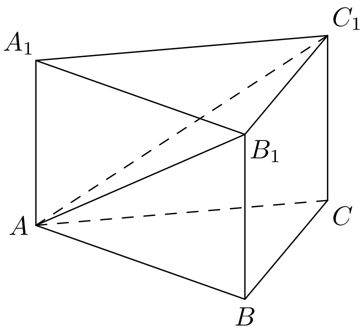
50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором известны длины ребер $AA_1 = 18$, $AD = 3$, $AB = 2$. Чему равно расстояние между прямыми AC и B_1D_1?



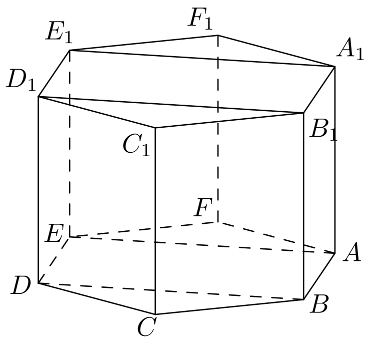
51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма объема 12. Найдите объем многогранника, вершинами которого служат точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1.



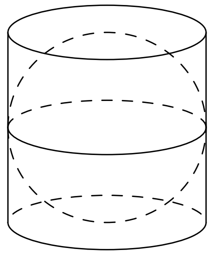
52. Найдите объем многогранника, вершинами которого служат точки A, B, C, C_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с площадью основания 2 и боковым ребром 3.



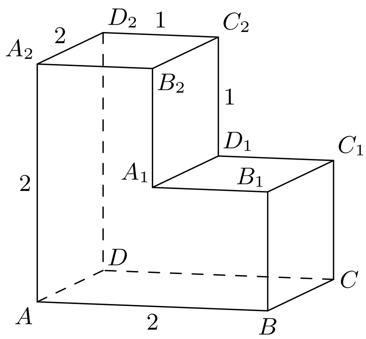
53. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма с площадью основания 6 и боковым ребром 2. Найдите объем многогранника, вершинами которого служат точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1.



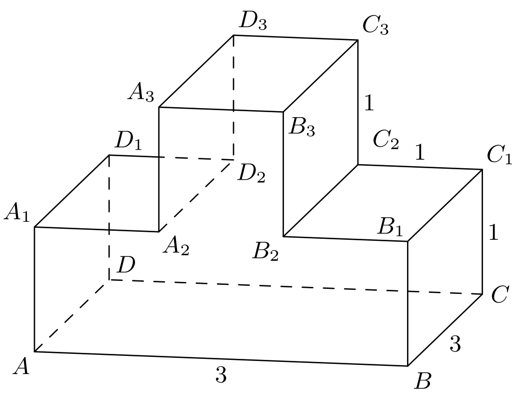
54. Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.



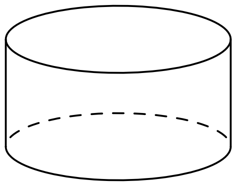
55. Найдите расстояние между вершинами многогранника A и C_2. Все двугранные углы многогранника прямые.



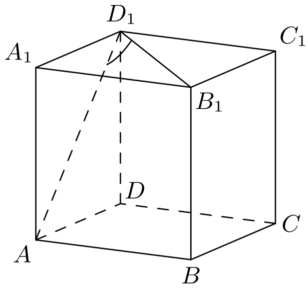
56. Найдите квадрат расстояния между вершинами многогранника B и D_2. Все двугранные углы многогранника прямые.



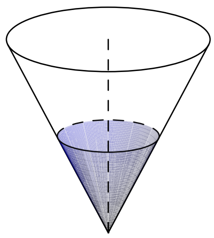
57. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а высота — 1. Найдите диаметр основания.



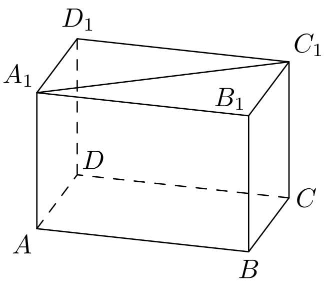
58. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D_1. Ответ дайте в градусах.



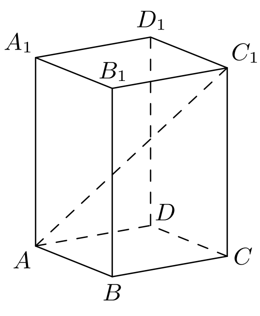
59. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает половины высоты. Объем жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 21$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1.



61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, причем $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



Подсказки

1. Что такое площадь поверхности многогранника? Все грани представляют собой прямоугольники, а все ли стороны этих прямоугольников известны?

2. При поиске объема можно было бы вычесть из объема ограничивающего параллелепипеда объем «откусанного». Но при поиске площади этот подход не работает.

3. Рецепт прежний: аккуратно суммируем площади всех-всех граней.

4. В любой ли прямоугольник можно вписать окружность?

5. Что особого в прямоугольном параллелепипеде, описанном около сферы? Формальное доказательство основывается на том, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

6. Можно ли разбить многогранник на два параллелепипеда?

7. Помните историю про Архимеда, который открыл одноименный закон?

8. По какой формуле можно найти объем призмы? Какая величина в этой формуле претерпит изменения, если мы увеличиваем сторону основания?

9. Записали формулы объемов конуса и цилиндра? Есть ли в них что-нибудь общее?

10. Попробуйте использовать непосредственно формулу объема конуса, проследив, чем исходный и отсеченный отличаются друг от друга. При этом полезно помнить, что отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

11. Обозначим радиус основания второго цилиндра за R, тогда радиус основания первого цилиндра равен $2R$. Из этого следует, что $S_1 = \pi R^2$ и $S_2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$ — площади оснований отличаются в четыре раза. А что по поводу высот?

12. Площадь поверхности представляет собой сумму площадей шести равных квадратов. Если сумеете найти ребро куба, то по теореме Пифагора найдется искомая диагональ.

13. Формулу объема куба сложно забыть.

14. Здесь площадь боковой поверхности — это сумма площадей шести прямоугольников.

15. Представьте себе бумажный цилиндр. Уберем у него верхнее и нижнее основания, разрежем боковую поверхность по образующей и развернем на своем столе — какая фигура получится?

16. Центр большего круга шара совпадает с центром самого шара.

17. Попробуйте составить уравнение по условию задачи, взяв ребро исходного куба за a.

18. Стоит учесть, что в основании — ромб, а вовсе не квадрат.

19. Что лежит в основании правильной четырехугольной призмы по определению? Что представляют собой боковые грани?

20. Пробовали работать с формулой $S = 4\pi R^2$? Если не получилось, вспомните факт: отношение площадей поверхностей подобных тел равна квадрату коэффициента подобия. Благо, что все шары между собой подобны.

21. Как соотносятся высота цилиндра и радиус шара?

22. Что общего у обозначенных параллелепипеда и пирамиды? Что отличается и во сколько раз?

23. Попробуйте аккуратно просуммировать все нужные площади граней.

24. Формула объема параллелепипеда?

25. Представьте себе куб $3 \times 3 \times 3$. Из скольких единичных кубиков он состоит?

26. Если меняется только высота, то основание остается прежним, верно? Присмотритесь к соответствующей формуле, и все получится.

27. По-честному работаем с формулой. Кстати, какой? Основание, будучи кругом, дает площадь πR^2, но это до увеличения.

28. Какая высота у конуса, а какая у цилиндра? Какое основание у конуса, а какое у цилиндра?

29. Все шары между собой подобны, и это самый короткий путь. Но и формулу $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ полезно вспомнить.

30. Не бойтесь выражений в духе $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, пробуйте считать до конца.

31. Вы уже устали от кубиков, но здесь интересна не стереометрия, а алгебра, которая за ней стоит.

32. Давайте, как в старые добрые времена, рассмотрим основание и проведем все три его средние линии?

33. Какую часть площадь треугольника ABC составляет от площади правильного шестиугольника $ABCDEF$?

34. Площадь квадрата $ABCD$ вдвое больше площади треугольника ABC. А во сколько раз отличаются высоты соответствующих пирамид, проведенные из вершин S и E?

35. Во сколько раз уменьшилась площадь основания? Изменилась ли высота?

36. Сколько кубов составляют такой многогранник? Вовсе не шесть, правильно?

37. Как изменится радиус основания конуса?

38. Помните, что площади поверхностей подобных фигур относятся как коэффициент подобия в квадрате? А коэффициент подобия — это просто отношение соответствующих ребер.

39. Можем ли найти площадь каждой из пяти граней?

40. Вспомните формулу $S_б = \pi Rl$.

41. Попробуйте уловить, во сколько раз отличаются площади соответствующих граней этих призм.

42. Октаэдр — на рисунке. Если увеличить все ребра в три раза — вновь получим октаэдр, который подобен исходному. Как слово «подобный» подсказывает метод решения?

43. Можно ли установить, во сколько раз отличаются радиусы этих шаров?

44. Интуитивно понятно, что в сечении — квадрат. А как это доказать формально?

45. Что общего, а в чем различия?

46. Высоты куба и призмы совпадают. Во сколько раз отличаются площади их оснований? У задачи есть и более красивое решение. Соедините центр куба с остальными четырьмя его вершинами.

47. Чем отличается формула объема пирамиды от формулы объема призмы? Как соотносятся высоты этих многогранников?

48. Найдите искомый объем как разность объема параллелепипеда и четырех «лишних» пирамид.

49. Давайте вновь отсечем из «глыбы» все лишнее.

50. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к этим прямым.

51. Правильный шестиугольник симметричен относительно большей диагонали.

52. Вспомните, как мы выводили формулу объема треугольной пирамиды.

53. Изобразите отдельно правильный шестиугольник $ABCDEF$. Чему равен угол ABD?

54. Почему высота описанного цилиндра совпадает с диаметром шара?

55. Найдите предварительно A_2C_2, используя теорему Пифагора.

56. Диагональю какого параллелепипеда является отрезок BD_2?

57. Зная радиус, легко найти диаметр.

58. Что примечательного в треугольнике AB_1D_1?

59. Если избегать формулы объемов, то вновь вспомните, как относятся объемы подобных тел.

60. Поскольку $DC \parallel D_1C_1$, то угол между прямыми DC и A_1C_1 равен углу между прямыми D_1C_1 и A_1C_1.

61. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.

§3. Домашняя работа

Справочные материалы

Теория вероятностей

1) Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение благоприятствующих исходов к общему числу (равновероятных) исходов:

$$P(A) = \frac{n}{m}$$

2) Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

3) Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

4) Элементарные исходы для бросков двух игральных кубиков

11	21	31	41	51	61
12	22	23	24	25	26
13	23	33	34	35	36
14	24	34	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ — вероятность события A при условии, что произошло событие B. Определяется как отношение вероятности одновременного выполнения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Пример. Игральный кубик бросили дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы раз выпало число 3, если известно, что сумма очков на двух кубиках равна 8.

Решение. Пусть при двух бросках игрального кубика событие A состоит в том, что хотя бы раз выпало число 3, а событие B — сумма очков равна 8. Тогда $P(AB)$ — вероятность того, что при двукратном броске хотя бы раз выпала тройка, причем сумма очков равна восьми. Из 36 элементарных равновероятных исходов событию B удовлетворяют исходы $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$. Событию AB удовлетворяют исходы $(3, 5)$, $(5, 3)$. Значит,

$$P(A|B) = P(AB) : P(B) = \frac{2}{36} : \frac{5}{36} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Замечание. В сущности, мы свели задачу к классическому определению вероятности. По условию задачи каждый из исходов $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ равновероятен. Из них только исходы $(3, 5)$, $(5, 3)$ являются благоприятными. Отсюда

$$P(A|B) = \frac{n}{m} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать n способами, и при любом выборе a элемент b можно выбрать m способами, то пару (n, m) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример 1. В классе учится 20 человек. Учитель предлагает одному из учеников решить у доски домашнюю задачу, а другому — доказать новую теорему. Сколькими способами учитель может это сделать?

Решение. Существует 20 способов, как можно выбрать ученика для решения домашней задачи. На каждый из них приходится 19 вариантов выбора ученика для доказательства теоремы. Значит, общее количество способов — $20 \cdot 19 = 380$.

Пример 2. Игральный кубик бросили четыре раза. Обозначим за a, b, c, d результаты этих бросков. Чему равно количество элементарных равновероятных исходов вида (a, b, c, d)?

Решение. Обобщая правило произведения, получаем $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ исходов.

Перестановки

Количество перестановок из n различных элементов равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Пример. На уроке физкультуры команда из 6 человек выстраивается в одну шеренгу. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В условии речь идет о шести различных объектах (людях). Значит, можно воспользоваться формулой количества перестановок: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 6 = 720$ способов.

Сочетания

Количество способов выбрать k различных элементов из n равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Пример. В группе туристов 5 человек: А, Б, В, Г, Д (по первой букве имени). Сколькими способами можно выбрать двух из них?

Решение. Поскольку пары $\{А, Б\}$ и $\{Б, А\}$ для нас неразличимы (считаются за одну), то можно воспользоваться формулой числа сочетаний:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Дополнительно

Хорошая книга по теории вероятностей

Теория вероятностей

1. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

3. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 8 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

6. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

7. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

8. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

9. Вася, Петя, Коля и Леша бросили жребий, кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

10. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

11. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

12. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

13. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

14. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

15. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

16. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

17. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

18. На клавиатуре телефона 10 цифр: от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет четной?

19. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

20. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А. пойдет в магазин?

21. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

22. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «$A =$ сумма очков равна 5»?

23. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орел, во второй — решка).

24. На рок-фестивале выступают группы – по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

25*. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Какое наименьшее количество выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

26. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

27. На борту самолета 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолете 300 мест.

28. В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

29. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

30. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 66,99 мм, или больше, чем 67,01 мм.

31*. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

32. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

33. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

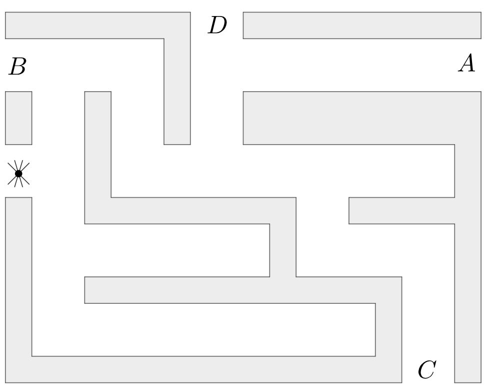
34. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

35. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

36. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

37. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

38. На рисунке изображен лабиринт, в который заползает паучок. Развернуться и ползти назад он не может, поэтому на каждом разветвлении паучок выбирает один из путей, по которому еще не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паучок придет к выходу D.



Вероятность, комбинаторика и статистика

1. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

2. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

3. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

4. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».

5. В одном ресторане в г. Тамбов администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

6*. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет четных чисел, а нечетные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

7. Симметричную игральную кость бросили три раза. Какова вероятность того, что в сумме выпало 4 очка? Результат округлите до сотых.

8. Симметричную игральную кость бросили три раза. Какова вероятность того, что в сумме выпало 15 очков? Результат округлите до сотых.

9. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

10. Симметричную игральную кость бросили четыре раза. Какова вероятность того, что произведение очков — нечетное число? Результат округлите до тысячных.

11*. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось три броска? Ответ округлите до сотых.

12*. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

13. Симметричную монету бросили трижды. Какова вероятность того, что результат первого броска совпадает с результатом второго или третьего бросков?

14. Симметричную монету бросили трижды. Известно, что в результате выпало хотя бы две решки. Какова вероятность того, что решки выпали все три раза?

15. Симметричную монету бросили четыре раза. Какова вероятность того, что орлов выпало не меньше, чем решек?

16. Симметричную монету бросили пять раз. Сколько исходов удовлетворяют событию «выпало хотя бы 4 орла»?

17. Симметричную монету бросили семь раз. Сколько исходов удовлетворяют событию «выпало ровно 5 решек»?

18*. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

19. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают четырех человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А. пойдет в магазин?

20. В группе альпинистов 6 человек. С помощью жребия они выбирают трех человек, которые должны остаться в лагере. Альпинист В. хотел бы остаться в лагере, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что В. останется в лагере?

21. В школьном кружке 10 учеников. Среди них выбирают двух. Сколькими способами это можно сделать?

22. Ученицы Анна, Белла, Владислава и Галина вносят свои имена в журнал: в итоге получается список из четырех различных имен. Какова вероятность того, имена учениц следуют в алфавитном порядке? Ответ округлите до сотых.

23. Алексей, Богдан, Владимир, Гавриил и Даниил случайным образом становятся в очередь. Сколькими способами они это могут сделать?

24. В математическом турнире соревнуются 3 команды. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из турнира, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первой игре победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет и второй раунд? Ответ округлите до сотых.

25. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвертый раунд?

26. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

27. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

28. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

29. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

30. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

31. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

32. В городе 48% взрослого населения мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для проведения исследования социологи случайным образом выбрали взрослого мужчину, проживающего в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Подсказки

Теория вероятностей

1. Сколькими способами можно получить в сумме 8 очков?

2. Давайте перечислим все исходы? ОО, ОР, РО, РР.

3. Когда говорят «на» один синий карандаш приходится два красных — это значит, что всего имеется три карандаша, не так ли? (Карандаши — лишь для примера, в задаче речь, конечно, про сумки)

4. Сколько докладов планируется на последний день конференции?

5. Сам с собой Руслан Орлов играть не планирует. Так сколько же спортсменов могут попасть в пару с ним?

6. Все просто: классическое определение вероятности случайного события.

7. Так и просится граф (тот, что с ребрами и вершинами): стекла могут быть как с первой фабрики, так и со второй. У каждой фабрики стекла могут оказаться бракованными или, напротив, пригодными.

8. В любом случае гроссмейстер А. сыграет один раз белыми и один раз черными.

9. Всего четыре кандидата. А сколько у нас Петь? Петя, разумеется, один.

10. Сколько всего карточек? Сколько карточек удовлетворяют требуемому условию?

11. Точно не умножать. Может быть, делить? (Шутка.)

12. Если найти вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, пользуясь правилом произведения, получим: $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 \neq 0{,}12$. Стало быть, события зависимые, и о правиле произведения стоит забыть. Но можно вспомнить круги Эйлера.

13. Чему равна вероятность промаха? Как вычислить вероятность одновременного выполнения независимых событий?

14. «Хотя бы один» означает, что либо первый работает, а второй нет; либо второй работает, а второй нет; либо оба работают. Удобно идти от противоположного события: какова вероятность того, что оба автомата не работают?

15. Присмотритесь — задача аналогична предыдущей.

16. Включает ли событие «прослужит больше года» в себя событие «прослужит больше двух лет»?

17. Вновь рисуем граф. Пусть первая фабрика выпускает $x\%$ всех яиц. Тогда сколько процентов выпускает вторая?

18. Является ли ноль четным? Если он делится (без остатка) на два, то да. В ином случае — нет. Этой задаче посвящена очень забавная пьеса.

19. Есть два типа людей: одни рисуют граф в таких задачах, другие совершают ошибку. Вы рисуете?

20. Сколькими способами можно выбрать двух человек из пяти?

21. Можно для определенности считать, что при выпадении орла начинать будет «Физик». Монету подбросили трижды, какова же искомая вероятность?

22. На всякий случай: $(2; 3)$ и $(3; 2)$ — это разные исходы.

23. Вы сильные, вы справитесь.

24. Утрируя, есть только три страны, которые располагаются в любом порядке. В скольких случаях датчане окажутся после шведов и норвежцев?

25. Проще всего будет оттолкнуться от противоположного события и подсчитывать вероятности промахов за то или иное количество выстрелов. Но можно и по-другому: вероятность попадания за один выстрел 0,4, и это меньше 0,98. Значит, одного не хватит. Если первый выстрел обернется промахом, но при этом будет еще одна попытка в запасе, то вероятность попадания считается так: $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

26. Какова вероятность ничьи? Какие исходы позволят команде пробиться в следующий круг?

27. Сколько в целом удобных мест?

28. Не теряя общности, пусть самым первым определили Андрея в какой-либо класс. Сколько еще мест останется в этом классе? А сколько всего мест во всех классах?

29. «На сколько» — это просто-напросто разность.

30. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, согласны?

31. Русский и математику предстоит сдать успешно в обязательном порядке (особенно математику). Какова вероятность того, что это произойдет? Далее — самое интересное. Какова вероятность того, что абитуриент сдаст хотя бы один из двух предметов: обществознание/иностранный язык.

32. Как насчет правила произведения?

33. Как слово «независимо» из условия задачи путь ее решения?

34. Одно событие включает другое. Где-то уже было, да?

35. Рисуем граф. Какие ветви соответствуют отличной погоде 6 июля?

36. Представьте, что весь циферблат — это дуга в $360°$? Какова градусная мера меньшей дуги, концы которой точно на отметках 1 и 10 часов?

37. Пусть одна самая юркая девочка первой присела на стул, а вторая выбирает место. Сколько исходов, подходящих под условие?

38. Сколько раз паучок должен сделать верный поворот, чтобы прийти к выходу D? Происходят ли эти повороты случайно и независимо?

Вероятность, комбинаторика и статистика

1. Сколько элементарных равновероятных исходов благоприятствуют событию «сумма очков равна 8»? В скольких из них на второй позиции встречается цифра 3?

2. Присмотритесь к таблице 6×6 из справочных материалов. Аккуратно выберите из нее благоприятствующие исходы.

3. Каждый из исходов $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$ равновероятен. В скольких из них встречается цифра 5 (на любой позиции)?

4. В таблице из 36 элементарных равновероятных исходов вычеркните третий столбец и третью строку. Какие из оставшихся исходов дают сумму 8 очков?

5. Удобно сначала найти вероятность того, что комбинация $(5,6)$ или $(6,5)$ не выпадет ни разу. А затем, вычитая эту вероятность из единицы, получим ответ.

6. Вероятность того, что кидали первый кубик — $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что в результате двух бросков наступит исход $(3,5)$ или $(5,3)$, равна $\frac{1}{18}$. Вероятность того, что кидали второй кубик — также $\frac{1}{2}$. А какова вероятность того, что в результате его бросков наступит исход $(3,5)$ или $(5,3)$? И главное — что делать со всеми этими числами?

7. Общее число элементарных равновероятных исходов — $6^3 = 216$. А сколько из них благоприятных?

8. Сколько существует перестановок из трех элементов? Ровно столько упорядоченных троек вида $(6,5,4)$. Еще три исхода вида $(6,6,3)$. Есть ли другие?

9. Мы уже знаем, что в сумме выпало шесть очков. Каждый из исходов $(1,1,4)$, $(1,4,1)$, $\ldots$, $(1,2,3)$ равновероятен. Сколько из них благоприятствуют событию из условия?

10. Если хотя бы один из сомножителей четный, то и произведение будет четным.

11. Какими могли быть первые два броска, если третьим сумма очков превысила три? $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$. Давайте рассмотрим вместе первый случай, а остальные два останутся за вами. В первый бросок должна выпасть единица, и это возможно с вероятностью $\frac{1}{6}$. Во второй бросок также должна быть единичка, что вновь произойдет с вероятностью $\frac{1}{6}$. При третьем броске сумма очков превысит 3, если выпадет 2, 3, 4, 5 или 6, что бывает с вероятностью $\frac{5}{6}$. Броски кубика происходит независимо, стало быть, вероятность в этом случае можно вычислить с помощью произведения: $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

12. Обратите внимание, что исходы (4) и $(1,1,1,1)$ неравновероятны. Вероятность получить четыре очка одним броском — $\frac{1}{6}$, а четырьмя бросками — $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$. Посмотрите решение похожей задачи.

13. Выпишите аккуратно все восемь элементарных равновероятных исходов, а затем выберите из них благоприятные.

14. Каждый из исходов ОРР, РОР, РРО, РРР равновероятен. Сколько из них благоприятствуют событию «решки выпали все три раза»?

15. Запишите дважды элементарные исходы для трех бросков монет, поставив первым восьми в начале орла, а оставшимся восьми — решку. Так вы получите все 16 элементарных исходов для четырех бросков монет, из которых легко будет выбрать благоприятные. Другой способ решения основан на том, что для четырех бросков монет верны равенства $P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = 1$ и $P(0) = P(4)$, $P(1) = P(3)$, где P — вероятность, а цифрами указано количество выпавших орлов.

16. Сколько существует исходов с четырьмя орлами и одной решкой? Не забудьте, что исход ООООО — также благоприятный.

17. Сколькими способами можно выбрать пять элементов из семи? На этот вопрос отвечает формула числа сочетаний.

18. И вновь предлагаю воспользоваться формулой числа сочетаний, а также классическим определением вероятности события. Следствием такого подхода является формула Бернулли. Аналогичное задание вы можете найти здесь

19. Перефразируем задачу: туристы выбирают случайным образом одного человека из пяти, который не пойдет в магазин. Какова вероятность того, что им не окажется А.?

20. Представьте себе шесть спичек: 3 коротких (обломанных), 3 целых. И альпинистам случайным образом вручают эти спички. Какова вероятность того, что альпинисту В. достанется обломанная спичка?

21. И вновь формула числа сочетаний. В процессе преобразований 8! можно сократить.

22. Чему равно количество перестановок из четырех элементов?

23. Чему равно количество перестановок из пяти элементов?

24. Можно воспринимать этот сюжет так: каждой из трех команд присвоили номер от 1 до 3, причем номера не повторяются. При встрече команд выигрывает та, чей номер больше. Если команда А выиграла первую встречу, то ее номер либо 2, и тогда номер ее соперника 3; либо команде А был присвоен номер 3. Какой номер может быть у ее соперника во втором случае?

25. Каждой из команд выдаем случайным образом одно из чисел от 1 до 6 без повторений. В сущности, элементарными равновероятными исходами здесь служат перестановки, коих в общей сложности 6!. Но попробуйте сфокусировать свое внимание на тех из них, для которых номер команды А равен 4, 5 или 6. Какой номер и с какой вероятностью может быть у соперника команды А. в новом раунде?

26. Вероятность успешной отправки с первой попытки — 0,4. Предположим, первая попытка была неудачной: с какой вероятностью это может быть и какова вероятность того, что вторая попытка при этом окажется удачной?

27. Изобразите граф: две ветви — пациент либо объективно болен, либо нет. В первом случае тест может как подтвердить болезнь, так и опровергнуть ее по ошибке. Во втором случае тест может либо ложно показать наличие болезни, либо подтвердить ее отсутствие. Не забудьте о правиле произведения независимых событий.

28. Давайте идти от вероятности противоположного события? Стрелок промахнется первый раз с вероятностью 0,8. Промахнется дважды подряд с вероятностью $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$. Какова вероятность трех промахов подряд? Четырех? В какой момент такая вероятность станет меньше 0,4?

29. Требуемое событие произойдет, только если в первый раз будет вытащен красный фломастер. Затем снова красный. И только на третий раз — синий. Обратите внимание, что фломастеры обратно в ящик не кладут. Разбор похожей задачи.

30. Поскольку имеется две попытки, то вероятность сбить отдельно взятую мишень равна $0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}84$.

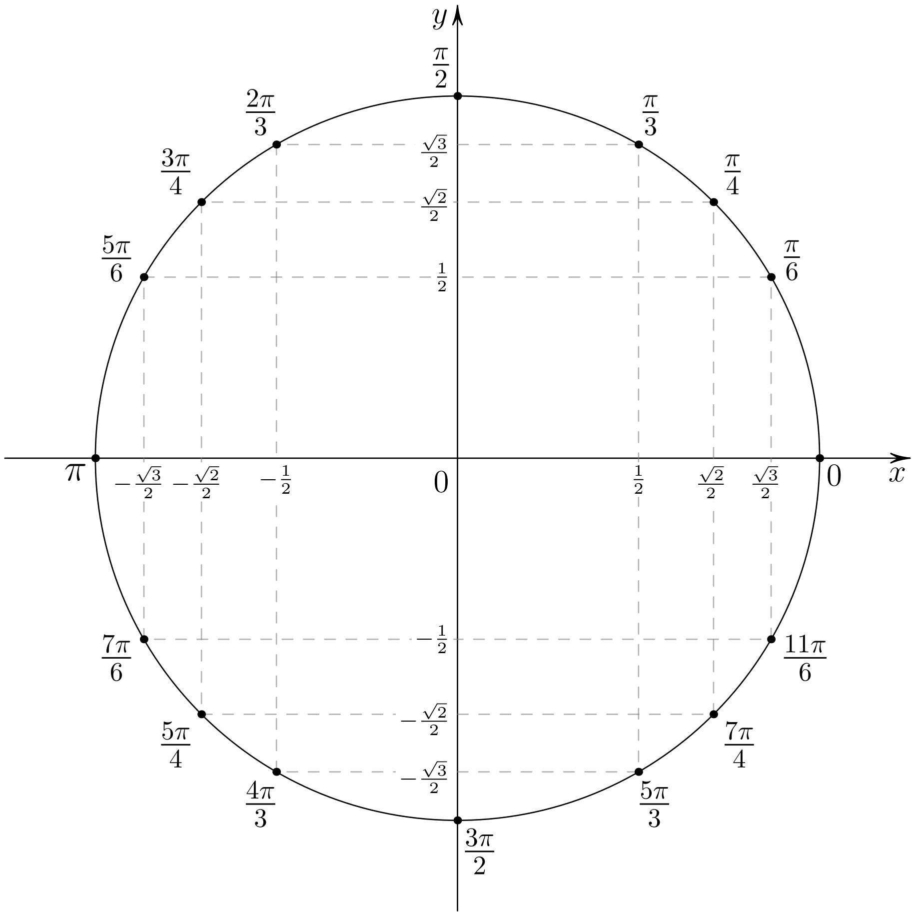
31. Задача аналогична №29, но в этот раз синий и красный фломастеры можно вытащить в любом порядке.

32. Представьте город, в котором проживает 100000 взрослых людей. Сколько из этих взрослых мужчин, а сколько женщин? Сколько из них пенсионеров? Сколько из них женщин пенсионного возраста?

§4. Домашняя работа

Справочные материалы

Тригонометрическая окружность



Равносильные преобразования уравнений

1) $f^2(x) = g^2(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = \pm g(x)$

2) $f^3(x) = g^3(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = g(x)$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

4) $\sqrt{f(x)} = g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

5) $a^{g(x)} = a^{f(x)} \;\Leftrightarrow\; f(x) = g(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

6) $\log_a f(x) = b \;\Leftrightarrow\; f(x) = a^b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

7) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

8) $\sin t = a \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi n \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.,\ n \in \mathbb{Z}$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$

9) $\cos t = a \;\Leftrightarrow\; t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$

10) $\operatorname{tg} t = a \;\Leftrightarrow\; t = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

11) $\operatorname{ctg} t = a \;\Leftrightarrow\; t = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$

4) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right)$

5) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$

6) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$

Формулы суммы и разности аргументов

7) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

8) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

9) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

10) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

11) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\left(\alpha, \beta, (\alpha+\beta) \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

12) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\left(\alpha, \beta, (\alpha-\beta) \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

Формулы двойных аргументов

13) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

14) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

15) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

16) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

17) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ $\left(\alpha \notin \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

Определение и свойства логарифма

1) $\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \quad (b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

2) $b^{\log_b a} = a$ $(a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$

3) $\log_a a = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

4) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$

5) $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$

6) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

7) $k \cdot \log_a b = \log_{a^{1/k}} b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ k \neq 0)$

Свойства и определение степени

1) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

4) $(a^m)^n = a^{mn}$

5) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$

7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$

9) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$

10) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1,\ m \in \mathbb{Z})$

Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Свойства квадратного (арифметического) корня и определение модуля числа

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|} \quad (ab \geqslant 0)$

3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$

4) $\sqrt{a^2} = |a|$

5) $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

Дополнительно

1) Прекрасное пособие по тригонометрии

2) Тригонометрическая окружность

3) Синус и косинус. Тангенс и котангенс

4) ОТТ. Формулы приведения.

5) Простейшие тригонометрические уравнения

6) Аркфукнции

7) Формулы двойных аргументов

Простейшие уравнения

Решите уравнения

1. $\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}$

2. $\frac{x-119}{x+7} = -5$

3. $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$

4. $(x-1)^3 = 8$

5. $\sqrt{15-2x} = 3$

6. $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0{,}2$

7. $\sqrt{-3x+4} = x$

8. $\sqrt[3]{x-4} = 3$

9. $2^{4-2x} = 64$

10. $5^{x-7} = \frac{1}{125}$

11. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$

12. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$

13. $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}$

14. $\log_2(4-x) = 7$

15. $\log_5(4+x) = 2$

16. $\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$

17. $\log_2(15+x) = \log_2 3$

18. $\log_7(5+x) = \log_7(2x-1)$

19. $\log_{x-2} 25 = 2$

20. $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$

21. $\log_5(7-x) = \log_5(3-x)+1$

22. $\log_8 2^{8x-4} = 4$

23. $3^{\log_9(5x-5)} = 5$

Замечание: каждое из вышеприведенных уравнений имеет единственный корень.

24. $x = \frac{6x-15}{x-2}$

Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

25. $\sqrt{8+14x} = -2x$

Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

26. $\log_{1-x} 36 = 2$

Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

27. $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$

Если оно имеет более одного корня, укажите меньший из них.

28. $\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$

В ответе укажите наименьший положительный корень.

29. $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

В ответе укажите наибольший отрицательный корень.

30. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$

В ответе укажите наибольший отрицательный корень.

31. $\operatorname{ctg}\frac{\pi(x+2)}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

В ответе укажите наименьший положительный корень.

32. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi x}{3}\right) = -1$

В ответе укажите наибольший отрицательный корень.

33. $\cos\frac{2\pi x}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

В ответе укажите наибольший отрицательный корень.

34. $\operatorname{tg}\frac{\pi(1-x)}{2} = 0$

В ответе укажите наименьший положительный корень.

35. $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{27} = \sqrt{3}$

В ответе укажите наименьший положительный корень.

Преобразования выражений

Найдите значения выражений

1. $\sqrt{65^2-56^2}$

2. $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$

3. $\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$

4. $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$

5. $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}$

6. $\dfrac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$

7. $x+\sqrt{x^2-4x+4}$ при $x\leqslant 2$

8. $\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}$ при $6\leqslant a\leqslant 10$

9. $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ при $m>0$

10. $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^{10}$

11. $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}$ при $ab\neq 0$

12. $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}:5^{-3,7}$

13. $7^{2x-1}:49^x:x$ при $x=\dfrac{1}{77}$

14. $a\left(36a^2-25\right)\left(\dfrac{1}{6a+5}-\dfrac{1}{6a-5}\right)$
при $a=36{,}7$

15. $\dfrac{a+15b+24}{a+3b+8}$, если $\dfrac{a}{b}=3$

16. $2x+y+6z$, если $4x+y=5$, $12z+y=7$

17. $\dfrac{p\left(b\right)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p\left(b\right)=\left(b+\dfrac{3}{b}\right)\left(3b+\dfrac{1}{b}\right)$
при $b\neq 0$

18. $2p(x-7)-p(2x)$, если $p(x)=x-3$

19. $2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-300^\circ\right)$

20. $\dfrac{12\sin 150^\circ\cdot\cos\left(-840^\circ\right)}{\operatorname{ctg}\left(-225^\circ\right)}$

21. $\dfrac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)}$

22. $\dfrac{12\sin 11^\circ\cdot\cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$

23. $\dfrac{24\left(\sin^2 17^\circ-\cos^2 17^\circ\right)}{\cos 34^\circ}$

24. $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$

25. $\dfrac{5\operatorname{tg}163^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ}$

26. $\dfrac{6}{\cos^2 23^\circ+\cos^2 113^\circ}$

27. $\dfrac{3\cos\left(\pi-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\beta+3\pi\right)}$

28. $\dfrac{7\left(\sin^5\left(7\pi-\alpha\right)\right)^6+11\left(\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^{10}}{\left(3\cos^{15}\left(-\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2}$

29. $5\operatorname{tg}\left(5\pi-\gamma\right)-\operatorname{tg}\left(-\gamma\right)$, если $\operatorname{tg}\gamma=7$

30. $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};\,2\pi\right)$

31. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha\in\left(\pi;\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

32. $-\sqrt{0{,}3}\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right)$

33. $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}2$

34. $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$

35. $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6$

36. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{5\sin\alpha-3\cos\alpha+2}{2\cos\alpha+3\sin\alpha-8}=-\dfrac{1}{4}$

37. $\sqrt{3}\cos^2\dfrac{5\pi}{12}-\sqrt{3}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$

Подсказки

Простейшие уравнения

1. Переведите смешанную дробь в неправильную (уберите целую часть долой).

2. При $x \neq -7$ получим $(x - 119) = -5(x + 7)$.

3. Можно квадрат суммы, а можно и разность квадратов.

4. Поскольку функция $y = x^3$ является возрастающей, то уравнение вида $f^3(x) = g^3(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, то есть множества решений этих уравнений совпадают.

5. Поскольку обе части уравнения неотрицательны, то их можно обоюдно возвести в квадрат. Необходимо ли в этом уравнении находить ОДЗ?

6. Зачем ноль-два? Лучше один к пяти.

7. Возводить в квадрат обе части уравнения можно, только если они неотрицательны. Отсюда равносильный переход $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \bigl(f(x) = g^2(x)$ и $g(x) \geqslant 0\bigr)$. При этом условие $f(x) \geqslant 0$ выполнено «автоматически», присмотритесь.

8. Мы уже обсуждали, почему $f^3(x) = g^3(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = g(x)$. Нельзя ли этот переход применить справа налево, то есть возвести обе части уравнения в куб?

9. Поскольку показательная функция $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ является монотонной, то уравнение $2^{f(x)} = 2^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

10. Самое главное сказано выше, остается лишь добавить к этому $\frac{1}{125} = 5^{-3}$.

11. Три — это тоже в какой-то степени девять.

12.. $8^3 = 512$.

13. Легко угадать корень, но как доказать единственность? Если $f(x)$ — монотонная функция, то уравнение вида $f(x) = 0{,}4$ может иметь не более одного решения, и в этом весь секрет.

14-19. Присмотритесь к равносильным переходам в справочных материалах.

20. Преобразуйте правую часть, используя свойства логарифмов: $2\log_5 3 = \log_5 9$.

21. Представьте единичку в виде $\log_3 3$ и подумайте, какое свойство выручит следующим шагом.

22. Используя определение логарифма, перейдем к равносильному уравнению $2^{8x-4} = 8^4$. Вот и еще один подход: $\log_8 2^{8x-4} = (8x - 4)\log_8 2 = (8x - 4) \cdot \frac{1}{3}$.

23. $\log_9(5x - 5) = \log_{3^2}(5x - 5) = \frac{1}{2}\log_3(5x - 5) = \log_3(5x - 5)^{\frac{1}{2}} = \log_3\sqrt{5x - 5}$.

24. При $x \neq 2$ получим $x(x - 2) = 6x - 15$.

25. См. подсказку к задаче 7.

26. Вот очень простой способ: $\log_{1-x} 6^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 2\log_{1-x} 6 = 2 \;\Leftrightarrow\; \log_{1-x} 6 = 1$.

27. Можно сыграть на том, что числители равны. Более стандартный подход: при $5x + 7 \neq 0$ и $7x + 5 \neq 0$ получим $(x + 8)(7x + 5) = (x + 8)(5x + 7)$, после чего легко вынести общий множитель за скобки.

28. Пусть $\frac{\pi x}{3} = t$. Как решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$? Формулы вы найдете в справочных материалах, а здесь напомню суть. На оси ординат в плоскости xOy отметим точку $\frac{1}{2}$ и проведем через нее горизонтальную прямую. В каких точках эта прямая пересекает (единичную) тригонометрическую окружность? $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. С учетом периодичности получаем

$$\left[\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ t &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}\right., \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Остается сделать обратную замену и найти требуемый икс.

29. Поскольку в левой части уравнения косинус, изобразим вертикальную прямую, все точки которой имеют абсциссу $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Она пересекает тригонометрическую окружность в точках $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, предстоит работать с уравнениями

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ &\frac{\pi(x-7)}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}\right., \ n \in \mathbb{Z}.$$

Рекомендую преобразовывать их по отдельности. Давайте первое возьму на себя, а второе останется за вами. Поделим обе части уравнения на π, а затем домножим обе его части на 3:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{1}{4} + 2n \ \Leftrightarrow \ x - 7 = \frac{3}{4} + 6n \ \Leftrightarrow \ x = 7\frac{3}{4} + 6n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

30. На оси тангенсов отметим точку -1. Проведем через нее и начало координат прямую. Она пересечет тригонометрическую окружность в точках $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Стало быть,

$$\frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Кстати, как же найти наибольший отрицательный корень? Все просто:

$$\frac{x}{4} = -\frac{1}{4} + n \quad \Leftrightarrow \ x = -1 + 4n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

При всяком целом n получается свой x, и чем больше n, тем больше x. В общем, эти решения в виде упорядоченного множества выглядят так: $\{\ldots - 9, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$. Теперь уже легко дать ответ.

31. На оси котангенсов отметим точку $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Проведем через нее и начало координат прямую. Она пересечет тригонометрическую окружность в точках $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. Именно поэтому

$$\frac{\pi(x+2)}{12} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

.

32-35. Аналогичны номерам, рассмотренным выше. Пробуйте!

Преобразования выражений

1. Используйте формулу разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2. Даже не пробуйте. С этой задачей справится только квантовый компьютер.

3. Вновь формула разности квадратов делает свое дело.

4. Представьте смешанные дроби в виде неправильных.

5. Напомню формулу квадрата суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

6. Если запятые мешают, представьте десятичные дроби в виде обыкновенных.

7. Важное свойство: $\sqrt{t^2} = |t|$. Поэтому $x + \sqrt{(x-2)^2} = x + |x-2|$. Остается раскрыть модуль с учетом условия $x \leqslant 2$.

8. Аналогично предыдущему номеру появляются модули. При $6 \leqslant a \leqslant 10$ выражение $(a-6)$ неотрицательно, поэтому модуль следует раскрыть со знаком плюс: $|a-6| = a-6$. А что по поводу второго модуля?

9. Девятью два — восемнадцать, так что в числителе $\sqrt[18]{m}$.

10. Свойства степеней в деле: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$, $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$, $(a^n)^m = a^{mn}$ (при $a > 0$, $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$).

11. Возводим каждый из сомножителей: $(5a^2)^3 = 125a^6$.

12. Удобно сделать небольшое преобразование: $35^{-4{,}7} = 5^{-4{,}7} \cdot 7^{-4{,}7}$.

13. На случай если запутались с делением: $a : b = \frac{a}{b}$, выполняйте действия слева направо.

14. Не спешите подставлять значение a — попробуйте привести дроби к общему знаменателю.

15. Из условия следует, что $a = 3b$.

16. Отмечу главное: $5 + 7 = 12$.

17. Всюду вместо аргумента b внедряем $\frac{1}{b}$ — получим $p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 3 : \frac{1}{b}\right)\left(3 \cdot \frac{1}{b} + 1 : \frac{1}{b}\right)$.

18. Первого беру на себя: $2p(x-7) = 2((x-7)-3) = 2x - 20$. Второй за вами!

19. Удобно использовать периодичность: $\operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg}(-300^\circ + 360^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ$.

20. Иногда удобно использовать (не)четность функций: $\cos(-840^\circ) = \cos 840^\circ$, $\operatorname{ctg}(-225^\circ) = -\operatorname{ctg} 225^\circ$.

21. Вновь работает периодичность: $\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{27\pi}{4} + 8\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{4}$. Попробуйте так же уменьшить аргумент косинуса.

22. Примените формулу синуса двойного угла.

23. А здесь формулу косинуса двойного угла.

24. Работают формулы приведения: $\cos 29^\circ = \cos(90^\circ - 61^\circ) = \sin 61^\circ$.

25. Вновь попробуйте сыграть на формулах приведения и том, что $163^\circ + 17^\circ = 180^\circ$.

26. Используйте равенство $113^\circ = 90^\circ + 23^\circ$. Возможно, пригодится основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

27. Присмотритесь к формулам приведения. Но и альтернативы не забывайте:

$$\cos(\pi - \beta) = \cos\pi \cdot \cos\beta + \sin\pi \cdot \sin\beta = -1 \cdot \cos\beta + 0 \cdot \sin\beta = -\cos\beta.$$

В этой и последующих задачах в условии не уточняется, но подразумевается, что аргументы β и α таковы, что знаменатель дроби не обращается в ноль.

28. Кроме формул приведения, выручит периодичность: $\sin(7\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

29. Если γ — острый угол, то точка $5\pi - \gamma$, как и $\pi - \gamma$ находится во второй четверти, стало быть, тангенс отрицателен. Также не забываем свойство нечетности: $\operatorname{tg}(-\gamma) = -\operatorname{tg}\gamma$.

30. Как, зная косинус, найти синус? На каком шаге применяется то условие, что альфа лежит в четвертой четверти?

31. Зная синус и косинус аргумента, тангенс найдет по определению.

32. Если позабыли формулу, разделите обе части тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha \neq 0$.

33. Одна из вариаций формул косинуса двойного аргумента выглядит так: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

34. Другая вариация так: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

35. Если $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, то чему равно $6 \cdot 1$?

36. В каких точках знаменатель дроби обращается в ноль? На самом деле ни в каких — используйте правило «крест-накрест».

37. Третий вариант формулы самый популярный: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

§5. Домашняя работа

Справочные материалы

Определение и свойства логарифма

1) $\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \quad (b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

2) $b^{\log_b a} = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$

3) $\log_a 1 = 0 \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

4) $\log_a a = 1 \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

5) $\log_a a^m = m \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Действия с логарифмами

6) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc) \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$

7) $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right) \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$

8) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

9) $k \cdot \log_a b = \log_{a^{1/k}} b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ k \neq 0)$

10) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$

11) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$

Связь функции и ее производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале $(a; b)$. Тогда верны следующие теоремы:

1) $f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ f(x)$ возрастает

2) $f'(x) < 0 \ \Rightarrow \ f(x)$ убывает

3) $f(x)$ возрастает $\ \Rightarrow \ f'(x) \geqslant 0$

4) $f(x)$ убывает $\ \Rightarrow \ f'(x) \leqslant 0$

Геометрический смысл производной

5) Производная функция в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Формулы дифференцирования

6) $(C)' = 0$

7) $(kx)' = k$

8) $(x^2)' = 2x$

9) $\left(x^3\right)' = 3x^2$

10) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Правила дифференцирования

11) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

12) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Физический смысл производной

13) Пусть $x(t)$ — закон прямолинейного движения тела. Тогда производная выражает мгновенную скорость в момент времени t, то есть $x'(t) = v(t)$.

Определение первообразной

14) Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если на этом промежутке функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению $F'(x) = f(x)$.

Геометрический смысл определенного интеграла и формула Ньютона–Лейбница

15) Пусть $y = f(x)$ — ограниченная функция, определенная на некотором отрезке $[a; b]$, принимает только неотрицательные значения. Тогда

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где S — площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Дополнительно

Замечательная статья о производной

Преобразования логарифмических выражений

Найдите значения выражений

1. $\log_{0,25} 2$

2. $\log_4 8$

3. $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$

4. $6\log_7 \sqrt[3]{7}$

5. $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$

6. $\log_4 \log_5 25$

7. $\log^2_{\sqrt{7}} 49$

8. $7 \cdot 5^{\log_5 4}$

9. $36^{\log_6 5}$

10. $5^{3+\log_5 2}$

11. $\log_5 60 - \log_5 12$

12. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

13. $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$

14. $\dfrac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$

15. $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$

16. $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$

17. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$

18*. $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$

19. $\dfrac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$

20. $\log_a \dfrac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$

21. $\log_a \left(a^2 b^3\right)$, если $\log_a b = -2$

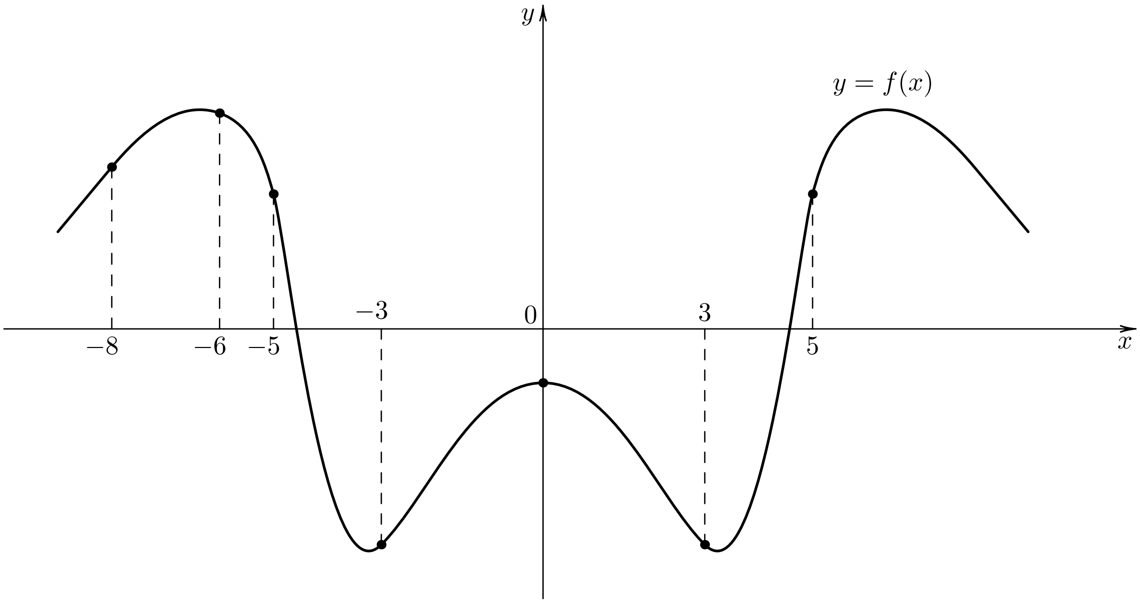
Производная и первообразная

1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек.

а) В скольких точках производная функции $y = f(x)$ положительна?

б) В какой точке значение производной функции $y = f(x)$ наибольшее?

в) В какой точке значение производной функции $y = f(x)$ наименьшее?

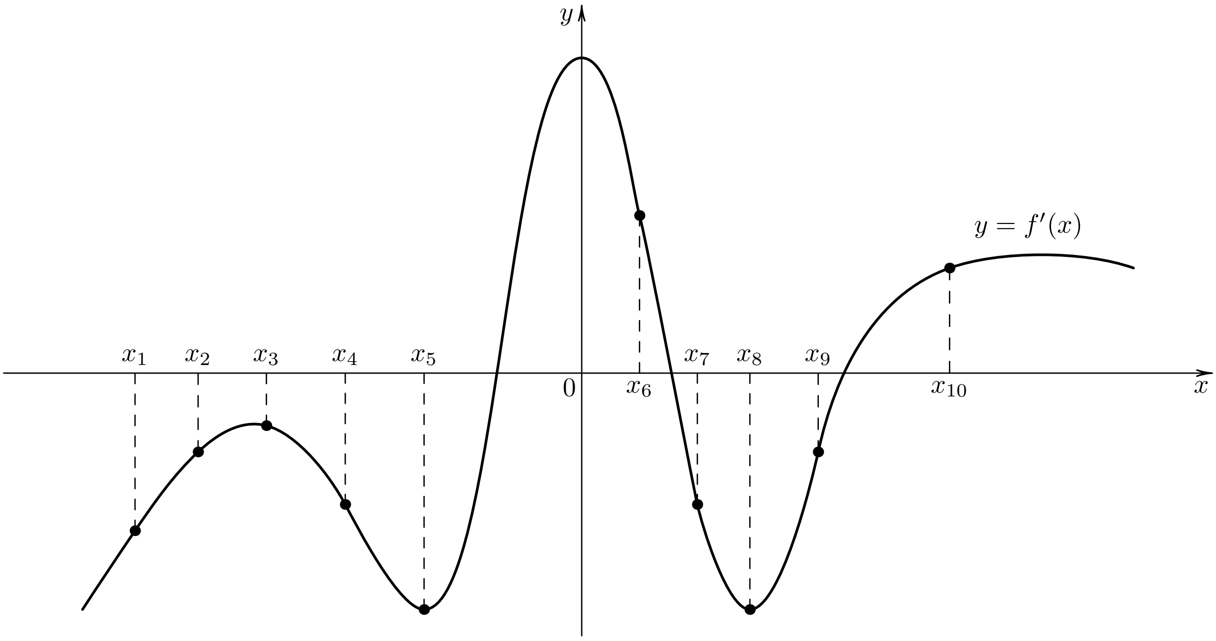


2. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, а также отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$.

а) Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $y = f(x)$?

б) Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $y = f(x)$?

в) Сколько из этих точек являются точками экстремума функции $y = f(x)$?

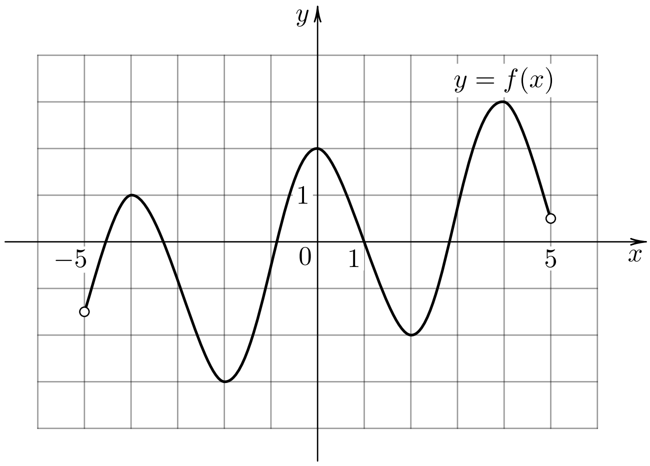


3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$.

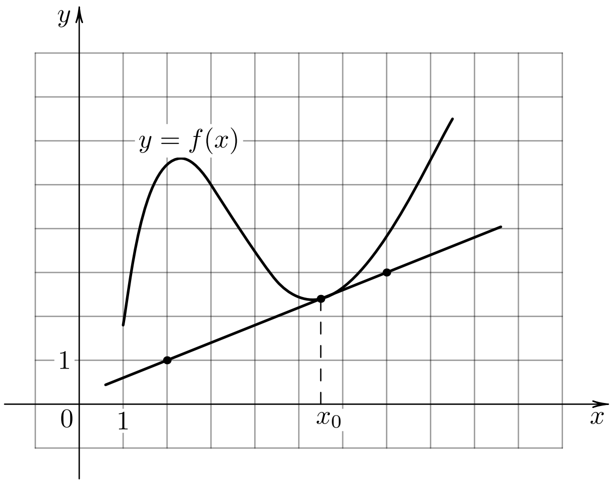
а) Определите количество целых точек, в которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна.

б) Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 7$ или совпадает с ней.

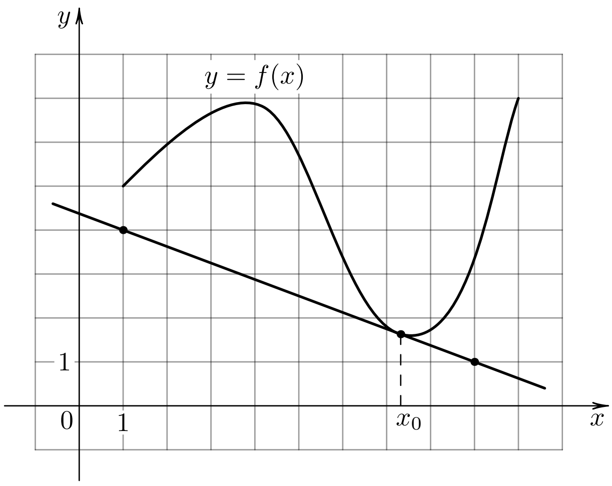
в) Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.



4. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$.

а) Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

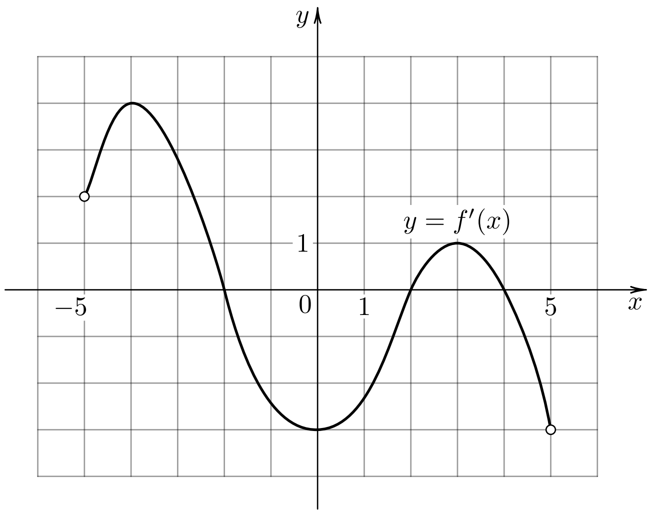
б) Найдите сумму целых точек, входящих в промежутки возрастания функции $f(x)$.

в) Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-3; 1]$.

г) Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.

д) В какой точке отрезка $[-1; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

е) В какой точке отрезка $[-4; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$.

а) Найдите количество точек минимума функции $f(x)$.

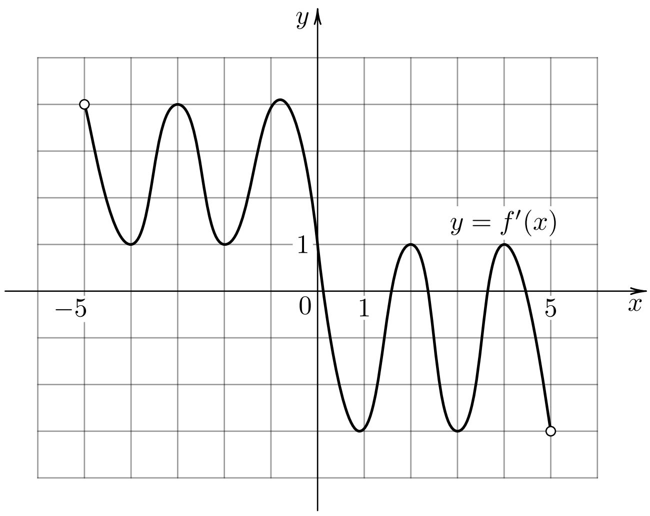
б) Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 1]$.

в) Найдите количество точек, в которых касательная графику функции $f(x)$, параллельна прямой $y = 3x - 1$ или совпадает с ней.

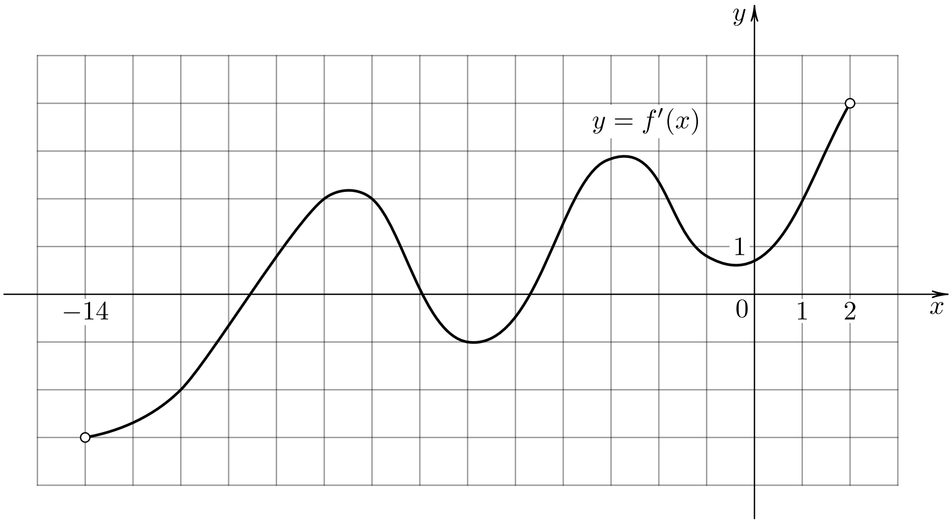
г) Найдите количество решений уравнения $f'(x) = -1$.

д) В какой точке отрезка $[-3; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

е) В какой точке отрезка $[-4; -2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 17$ или совпадает с ней.

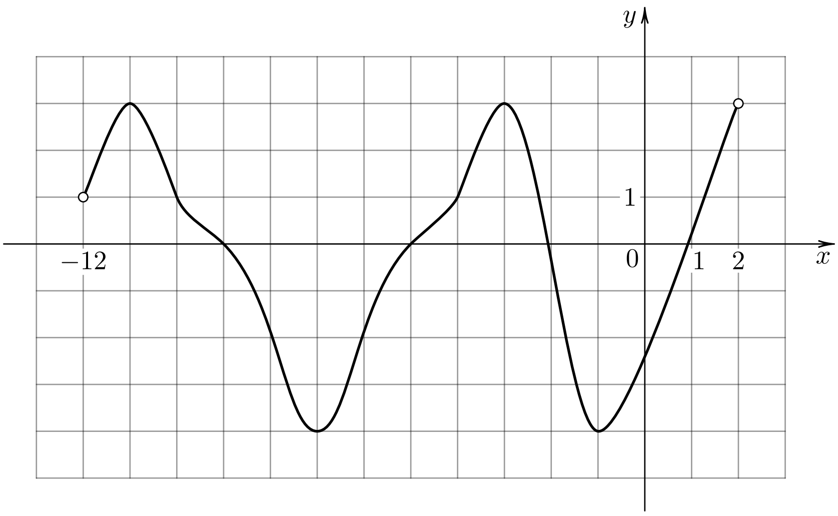


9. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-12; 2)$.

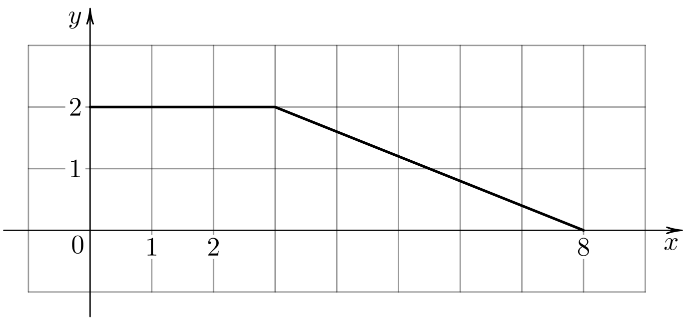
а) Определите количество решений уравнения $f(x) = 0$.

б) Найдите количество целых точек, в которых функция $y = f(x)$ принимает положительные значения.

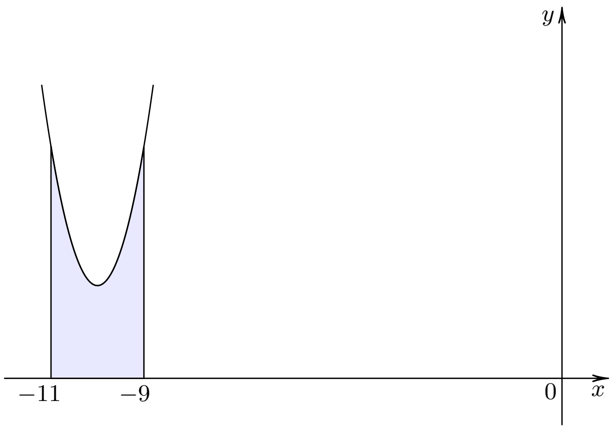
в) Найдите сумму точек экстремума функции $y = F(x)$ на отрезке $[-10; 1]$.



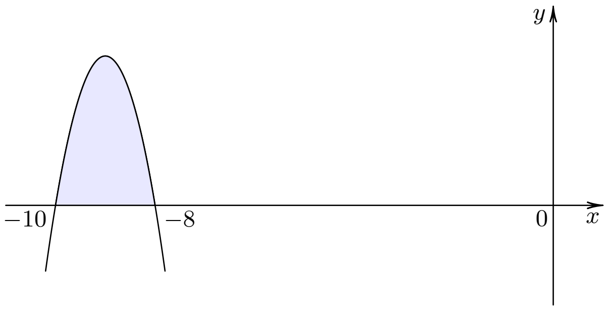
10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$.



11*. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - 15/8$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



13. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

14. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

15. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

16. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания положительна.

17. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

18. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

19. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

20. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Подсказки

Преобразования логарифмических выражений

1. В какую степень возвести $\frac{1}{4}$, чтобы получить 2?

2. Иными словами, пусть $\log_4 8 = a$, тогда по определению $4^a = 8 \;\Leftrightarrow\; 2^{2a} = 2^3$. Чему равно a?

3. В какую степень возвести $\frac{1}{13}$, чтобы получить $\sqrt{13}$?

4. Кроме явного счета, можно задействовать свойства: $\log_7 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_7 7$.

5. Шестью шесть — тридцать шесть.

6. Чему равен $\log_5 25$? Это число служит аргументом логарифма по основанию четыре.

7. Если запутались, запишите в виде произведения: $\log^2_{\sqrt{7}} 49 = \log_{\sqrt{7}} 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 49$.

8. По основному логарифмическому тождеству $5^{\log_5 4} = 4$.

9. Задачу легко свести к предыдущей: $36^{\log_6 5} = 6^{\log_6 5} \cdot 6^{\log_6 5}$.

10. Либо $a^{m+n} = a^n \cdot a^m$, либо $3 + \log_5 2 = \log_5 125 + \log_5 2 = \log_5 250$.

11. Разность логарифмов по одному основанию равна логарифму частного.

12. Сумма логарифмов по одному основанию равна логарифму произведения.

13. По формуле перехода к новому основанию такая дробь в точности равна $\log_5 25$.

14. Преобразуйте знаменатель: $\log_{49} 13 = \log_{7^2} 13 = \frac{1}{2}\log_7 13$.

15. При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются, а основание остается прежним.

16. Основная идея — формула перехода к новому основанию: $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 3 = 1$.

17. Аналогично задаче выше приведите первый логарифм к основанию три.

18. $1 - \log_2 12 = \log_2 2 - \log_2 12 = \log_2 \frac{2}{12} = \log_2 \frac{1}{6}$.

19. Представьте двоечку в виде $\log_3 9$.

20. Можно так: $b = a^5$ по определению логарифма, тогда $\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a \frac{a}{a^{15}}$.

21. А можно этак: $\log_a \left(a^2 b^3\right) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3\log_a b$. Это преобразование равносильно с учетом того, что $\log_a b$ существовал, то есть $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$.

Производная и первообразная

1. Мысленно проведите касательные в каждой точке и воспользуйтесь геометрическим смыслом производной.

2. Присмотритесь к справочным материалам, посвященным связи функции и ее производной. В пункте а) нас интересуют только те отмеченные точки, что расположены выше оси абсцисс.

3. И вновь работает связь функции с ее производной. Напомню, что точками экстремума называют точки минимума и точки максимума.

4. В чем состоит геометрический смысл производной? Возьмите на вооружение две отмеченные точки, отличные от точки касания.

5. Продлим прямую до пересечения с осью абсцисс — получим две пары вертикальных углов. Интересующий угол — тупой.

6. Под «точками» в пункте б) здесь и на экзамене понимаются абсциссы точек графика. Для пунктов д) и е) важно определить промежутки монотонности функции по графику производной. Например, на отрезке $[-1; 2]$ производная принимает отрицательные значения (ее график ниже оси абсцисс) всюду, кроме точки $x = 2$, в которой производная равна нулю. Значит, функция $f(x)$ на этом промежутке является убывающей. А в какой точке отрезка $[-1; 2]$ убывающая функция принимает наименьшее значение?

7. Задача аналогична предыдущей, но небольшое новшество содержит пункт в). Стоит понимать, что если графики функций $g(x)$ и $h(x)$ представляют собой параллельные прямые, то угловые коэффициенты этих прямых равны. Поэтому, используя геометрический смысл производной, задача перефразируется так: пользуясь графиком производной, найдите количество точек, в которых эта самая производная равна 3 — угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 1$.

8. Подсказка выше актуальна и для этого номера, просто спрашивают не количество точек, а абсциссу единственной точки.

9. Задача станет простой, если вчитаться в определение первообразной. Упрощенно говоря, «По графику $F(x)$ сделайте вывод об $f(x)$» — это точно такая же задача, как «По графику $f(x)$ сделайте вывод об $f'(x)$».

10. Здесь работает геометрический смысл определенного интеграла. Какую фигуру ограничивают ось абсцисс, вертикальные прямые $x = 2$, $x = 8$ и график функции $f(x)$? Можем ли мы найти площадь этой фигуры?

11. Попробуйте по-честному выполнить все вычисления, связанные с геометрическим смыслом определенного интеграла. Чему равно $F(-11)$? Чему равно $F(-9)$? Счет станет намного проще, если проявить смекалку: $F(x) = (x + 10)^3 + 2x - 1000 - 15/8$.

12. Можно ли еще ловчее решить задачу такого типа? Продифференцируем первообразную:

$$F'(x) = f(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3(x^2 + 18x + 81) + 3 = -3(x + 9)^2 + 3.$$

График именно этой функции изображен на рисунке. Давайте перенесем его параллельно оси абсцисс вправо на 9 единиц — получим функцию $f_2(x) = -3x^2 + 3$, причем площадь под ее графиком равна искомой. Проинтегрируем найденную функцию (то есть найдем ее первообразную): $F_2(x) = -x^3 + 3x + C$. Остается найти $F_2(1) - F_2(-1)$.

13. Как мы помним из пункта в) задачи 7, для выполнения условия производная квадратичной функции должна равняться угловому коэффициенту прямой $y = 7x - 5$.

14-17. В этих задачах общая идея, и рецепт незатейливый. Пусть $g(x)$ является касательной к графику функции $f(x)$. Во-первых, можно ручаться, что в точке касания выполнено равенство $f(x) = g(x)$. В самом деле, ведь точка касания является общей точкой двух графиков. А во-вторых, верно равенство $f'(x) = g'(x)$. Оно представляет собой геометрический смысл производной с учетом того, что угловой коэффициент прямой $g(x)$ совпадает с $g'(x)$. Решите систему из двух уравнений — получите ответ! В качестве альтернативы отмечу: квадратичная является выпуклой — это означает, что касательная к параболе имеет с ней ровно общую точку. Чувствуете связь с дискриминантом?

18. Если вдруг вы не сильны в дифференцировании, можем потренироваться:

$$\left(\frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t\right)' = \left(\frac{1}{2}t^3\right)' + \left(-3t^2\right)' + (2t)'.$$

Здесь мы применили правило дифференцирования: разбили производную суммы на сумму производных. А дальше работает правило $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$. Например:

$$\left(\frac{1}{2}t^3\right)' = \frac{1}{2}\left(t^3\right)' = \frac{1}{2} \cdot 3t^2 = \frac{3}{2}t^2.$$

19. Как вы понимаете, в прошлой, нынешней и последующей задачах работает физический смысл производной: $x'(t) = v(t)$. Для дифференцирования четвертой и любой другой степени используйте формулу $(t^n)' = n \cdot t^{n-1}$.

20. Какой из корней уравнения $\left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3\right)' = 2$ имеет смысл, а какой нет?

§6. Домашняя работа

Справочные материалы

Проценты

1) Процент — это сотая часть числа.

2) Чтобы вычислить $r\%$ от числа A, удобно использовать произведение $r \cdot \frac{A}{100}$.

3) Если величина A составляет $n\%$ от B, то верна пропорция

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{100}.$$

4) Если увеличить число A на $r\%$, получим

$$A + r \cdot \frac{A}{100} = A\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

5) Если уменьшить число A на $r\%$, получим

$$A - r \cdot \frac{A}{100} = A\left(1 - \frac{r}{100}\right).$$

Дополнительно

Как извлекать корни в столбик

Задачи прикладного содержания

1. При температуре 0° рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = 5t^2,$$

где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

3. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

4. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью (в м/с) надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см?

5. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

6. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле

$$F_A = \rho g l^3,$$

где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

7. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4) — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в Кельвинах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в Кельвинах.

8. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \text{ (Гц)},$$

где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

9. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой

$$\mu = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

где T_1 — температура нагревателя в Кельвинах, T_2 — температура холодильника (в Кельвинах). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в Кельвинах.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километра?

11. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 40$ мг. Период его полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

12. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением

$$pV^{1{,}4} = const,$$

где p (атм) — давление в газе, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

13. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 20\,^{\circ}C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_B = 60\,^{\circ}C$. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T\,(C^{\circ})$, причем

$$x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_B - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}},$$

где $c = 4200\ \dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^{\circ}C}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^{\circ}C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

14. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что $g = 10$ м/с^2.

15. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота подъема мячика, выраженная в метрах, определяется формулой

$$H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha),$$

где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

16. Скейтбордист массой $m = 80$ кг прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}\cdot v\cos\alpha\ (\text{м/с}),$$

где $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -2 до 2. Рейтинг определяется формулой

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 30?

Текстовые задачи

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

3. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

5. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

6. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

7. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

8. Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой.

9. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

10. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

11. Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 8 км. Турист прошел путь из A в B за 5 часов. Время его движения на спуске составило 1 час. С какой скоростью турист шел на спуске, если скорость его движения на подъеме меньше скорости движения на спуске на 3 км/ч?

12. В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

13. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

14. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

15. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

16. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

17. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

18. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

19. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

20*. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

21. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

22. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей составила прибыль Бубликова за 2003 год?

23. Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

24*. Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

25. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

26. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

27. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

28. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

29. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч, а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

30. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

31. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

32. Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

33. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

34. Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

35. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

36. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от места отправления. Один идет со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

37. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

38. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяженностью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришел раньше второго на 10 минут. Чему равнялась скорость второго гонщика (в км/ч), если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Считайте, что гонщики движутся с постоянной скоростью.

Подсказки

Задачи прикладного содержания

1. Вы хорошо разобрались, что означает величина $l(t^\circ)$? Вовсе не удлинение, верно? Не забудьте привести единицы измерения в порядок.

2. Изменилось на 0,2 с означает, что оно станет $(0{,}6 + 0{,}2)$ с или $(0{,}6 - 0{,}2)$ с?

3. Как, используя $q = 100 - 10p$, можно переписать формулу $r(p) = q \cdot p$?

4. Давление должно быть неотрицательным, то есть $P \geqslant 0$. Масса m здесь заведомо положительна, согласны?

5. Высота стены восемь метров да еще хотя бы метром выше должен лететь камень. Какие в итоге значения y нас устроят?

6. Достаточно разобраться с формулой, подставив известные значения. Как решать простейшие кубические уравнение, не забыли?

7. Аккуратно поработайте со степями числа 10. Если не нравятся запятые, то $5{,}7 \cdot 10^{-8} = 57 \cdot 10^{-9}$, а $9{,}12 = 912 \cdot 10^{23}$.

8. Правая часть основной формулы должна быть не меньше 450.

9. Если это придаст моральных сил, то закорючка в формуле — греческая буква «эта».

10. Воспользуйтесь формулой дважды.

11. Попробуйте выразить t, решив показательное уравнение. Задача имеет и более простое решение. Если масса после полураспада уменьшается вдвое, сколько будет весить изотоп через 10 минут? А еще через 10 минут?

12. Формула станет удобнее в виде $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$.

13. Преобразуйте уравнение до вида $\log_2 f(T) = A$.

14. Решите неравенство $2\nu_0 \sin\alpha \geqslant 3g$.

15. Подставив числовые данные из условия, получим

$$5 = \frac{20^2}{4 \cdot 10}\,(1 - \cos 2\alpha) \;\Leftrightarrow\; \cos 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

16. Чтобы решить неравенство $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, отметьте на тригонометрической окружности все точки, абсциссы которых не меньше $\frac{1}{2}$. Получили дугу от $-\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3}$? Какой же наибольший угол возьмем?

17. «Каким должно быть число А, чтобы издание, у которого *все показатели наибольшие*, получило рейтинг 30?»

Текстовые задачи

1. Как помогает составить уравнение слово «одновременно» из условия? Попробуйте обозначить путь за $2S$.

2. «Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист», — речь о времени, пути или же все-таки скорости?

3. «Первый пришел к финишу на час раньше второго» означает, что если мы первому велосипедисту дадим штрафной час, то оба велосипедиста финишируют одновременно. На языке математики: $t_1 + 1 = t_2$. Как найти время?

4. Против течения плыть труднее, по течению — проще. Иными словами,

$$\frac{S}{v - x} = \frac{S}{v + x} + 6.$$

5. Структура незатейливая: $t_1 + 10 + t_2 = 40$. Время — частное пути и скорости. Загляните сюда, если будут сложности с движением по воде.

6. Вновь «одновременно» — одно время.

7. Заказ в виде 110 деталей здесь выступает в роли пути, который преодолевается со скоростью, выраженной — почему бы и нет — в деталях/час. Все как в задачах на движение, правда?

8. Сколько раз часовая и минутные стрелки повстречаются в период с 8:00 до 9:00? В период с 9:00 до 10:00?

9. Первый рабочий выполняет за два дня такую же часть работы, какую второй за три дня. Так кто же из них быстрей работает и во сколько раз?

10. Какой путь в виде литров преодолевает первая труба? Вторая труба? Что возьмем за переменную?

11. Запишите время движения туриста на каждом участке по отдельности.

12. Можно ли сложить 8% и 9%? Конечно, нет: эти проценты даны относительно разных чисел.

13. Попробуйте разобраться с этой самостоятельной работой — пригодится.

14. Сколько процентов составляет стоимость одной рубашки от стоимости куртки?

15. Сколько процентов от семейного бюджета составляет зарплата мужа?

16. Что такое концентрация? Каков объем нового раствора?

17. 15% от 4 литров — это $15 \cdot \frac{4}{100} = \frac{3}{5}$ литра. 25% от 6 литров — это $25 \cdot \frac{6}{100} = \frac{3}{2}$ литра.

18. Есть ли что-нибудь постоянное в сочном винограде и сухом изюме, что никуда не испаряется? Если да, приравняйте массу этого «сухого вещества» в винограде к массе «сухого вещества» в изюме.

19. Если масса первого сплава x кг, то масса второго — $(200 - x)$ кг.

20. Первое предложение позволяет составить полноценное уравнение. Возьмем за переменные объем первого и второго растворов. Какова масса итоговой смеси? Какая масса кислоты содержится в каждом растворе? Какое уравнение можно записать? Что меняется в ситуации, описанной вторым предложением?

21. Вспомните формулу суммы n членов арифметической прогрессии.

22. Чтобы увеличить число на 300%, умножать его нужно вовсе не на три.

23. Какова относительная скорость автомобилей? Проще говоря, «скорость сближения»?

24. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а y км/ч — скорость велосипедиста. Составьте систему из двух уравнений.

25. На сколько км/ч товарный поезд уступает скорому по скорости?

26. Какое расстояние кольцевой трассы разделяет гонщиков на старте? Как применить относительную скорость в этой задаче?

27. Попробуйте использовать определение: средняя скорость — это отношение всего пути $(S + S)$ на время, за которое этот путь был пройден.

28. Удобно длину всей трассы принять за $3S$, например. Тогда за какое время была пройдена первая треть? Вторая треть? Последняя треть? Несложно понять, почему в этой ситуации можно использовать среднее гармоническое.

29. Как найти весь пройденный путь? За какое время он был пройден?

30. Как связан пройденный путь с длиной поезда? Переведите 36 секунд в часы.

31. Попробуйте иллюстрировать: сначала поезда поравнялись локомотивами, а затем (через 36 секунд), хвостовой вагон первого поезда оказался позади хвостового вагона второго. Как связан пройденный путь с длинами поездов?

32. Можно ли сложить указанное время каждого? Что бы получилось в результате и почему это не может являться ответом? Складывать можно скорости: такой суммой мы отразим, что они работают вместе, «помогают» друг другу.

33. Рекомендую пойти против системы и принять путь (объем работы) не за единицу, а за 36. Можете воспринимать это как 36 метров забора, который предстоит покрасить трем ребятам.

34. Если принять объем работы за единицу, ввести x и y в качестве скоростей (пропускных способностей) труб, то получится замечательное уравнение. Разве что стоит учесть 6 минут из условия задачи.

35. Давайте сделаем аналогию с задачами на движение. Что у нас в роли пути? А в роли скоростей?

36. Обозначьте расстояние от опушки до места встречи за переменную.

37. Введем коэффициент $k = 1 + \frac{r}{100}$, который будет отвечать за начисление процентов, причем r % — это как раз искомая ставка вклада. Например, вклад в 7700 рублей через год (после начисления процентов) станет равным $7700k$ рублей, еще через год — $7700k^2$ рублей. А как обстоят дела со вторым вкладом?

38. Какова протяженность 60 кругов в километрах? Переведите минуты в часы.

§7. Домашняя работа

Справочные материалы

Преобразования графиков функций

Пусть c, b, k — положительные числа

1) График функции $y = f(x) + c$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на c единиц вверх.

2) График функции $y = f(x) - c$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на c единиц вниз.

3) График функции $y = f(x + b)$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на b единиц влево.

4) График функции $y = f(x - b)$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на b единиц вправо.

5) График функции $y = -f(x)$ можно получить зеркальным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

6) График функции $y = k \cdot f(x)$ при $k > 1$ можно получить растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат в k раз.

7) График функции $y = k \cdot f(x)$ при $0 < k < 1$ можно получить сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат в $1/k$ раз.

Свойства графиков функций

8) Через любые две различные точки проходит единственная прямая, заданная уравнением $y = kx + b$.

9) Через любые три различные точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит единственная парабола (ось симметрии которой параллельна оси Oy), заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

10) Если парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, то абсциссу ее вершины можно найти по формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

11) Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$.

12) Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Формулы дифференцирования

1) $(C)' = 0$

2) $(kx)' = k$

3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $(a^x)' = a^x \ln a$

6) $(e^x)' = e^x$

7) $(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

8) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

13) $(u+v)' = u' + v'$

14) $(u-v)' = u' - v'$

15) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

16) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

17) $(k \cdot u)' = k \cdot u'$

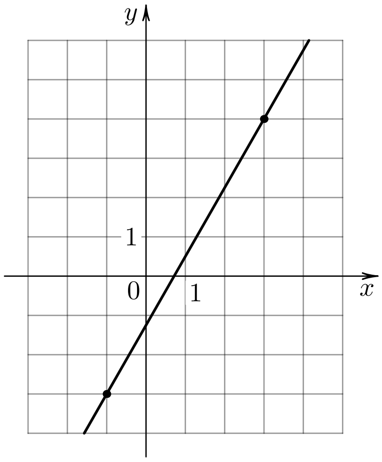
18) $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$

Дополнительно

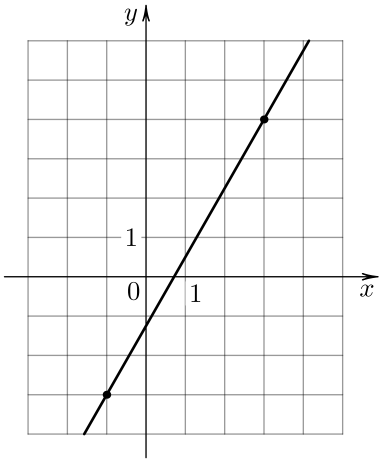
Замечательная статья о производной

Функции и их графики

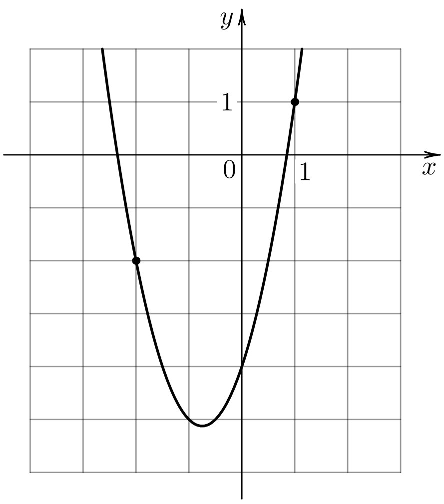
1. На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-5)$.



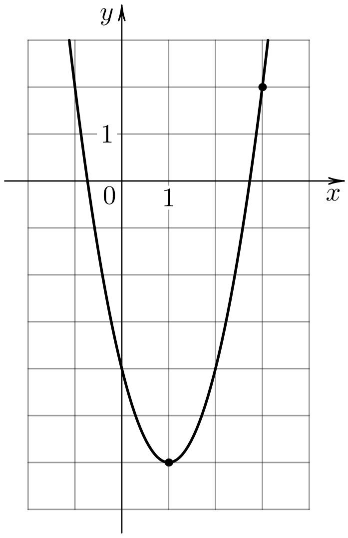
2. На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -13,5$.



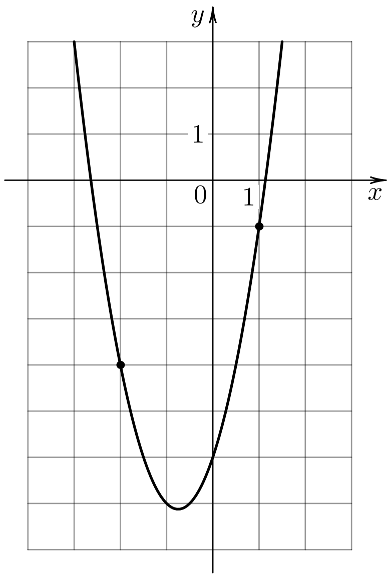
3. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$.



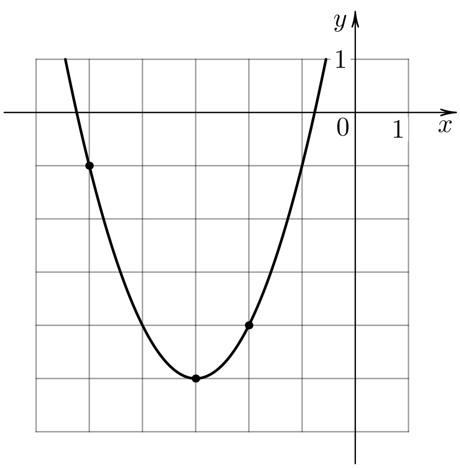
4. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 4x + c$. Найдите $f(-3)$.



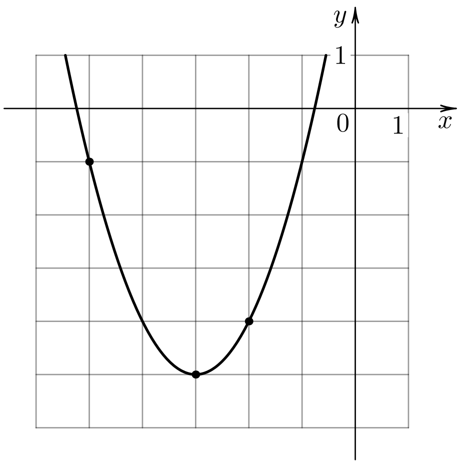
5. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



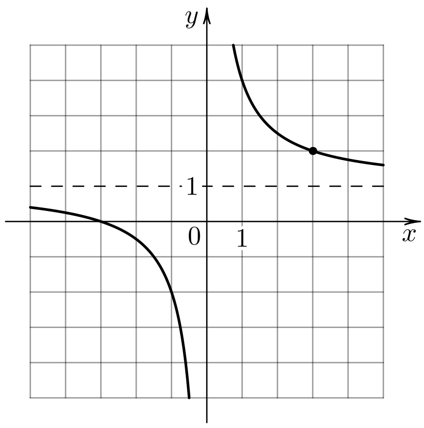
6. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



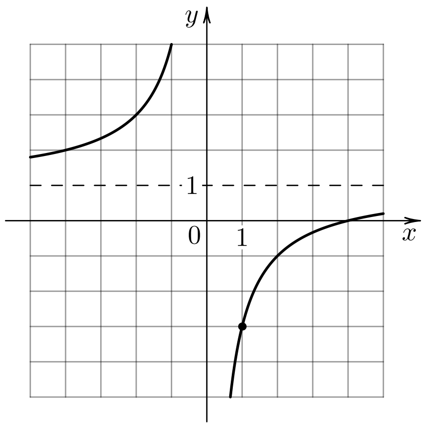
7. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(1)$.



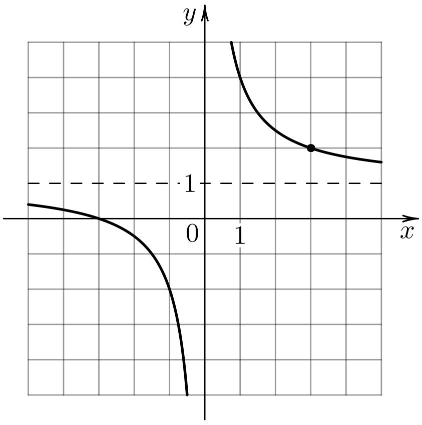
8. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.



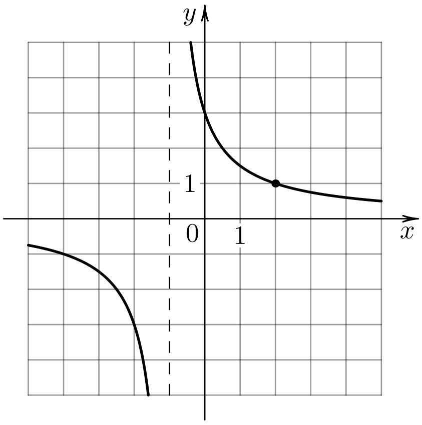
9. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,75.



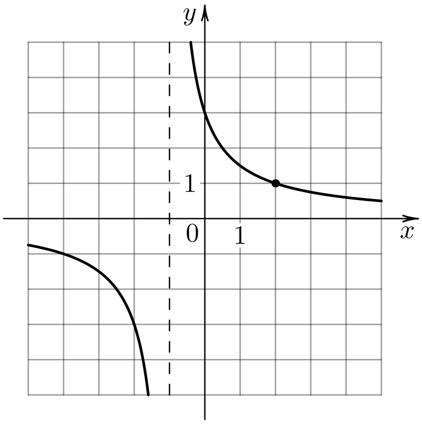
10. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



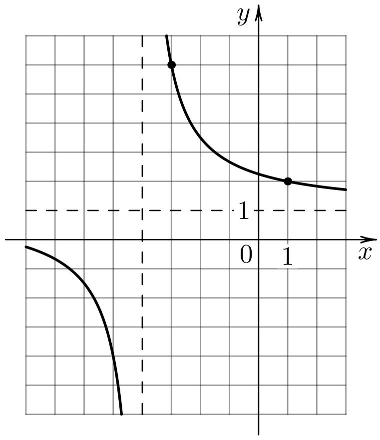
11. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(19)$.



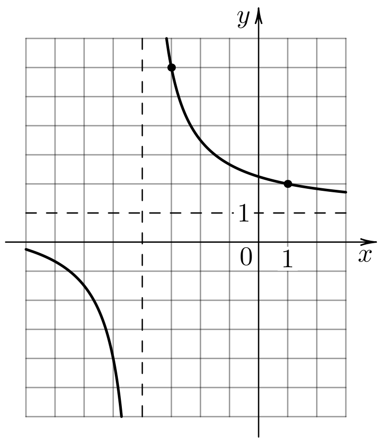
12. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 0{,}2$.



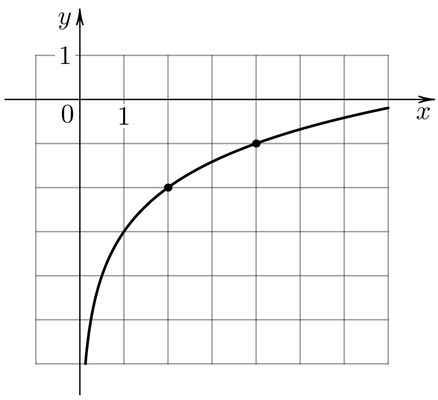
13. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



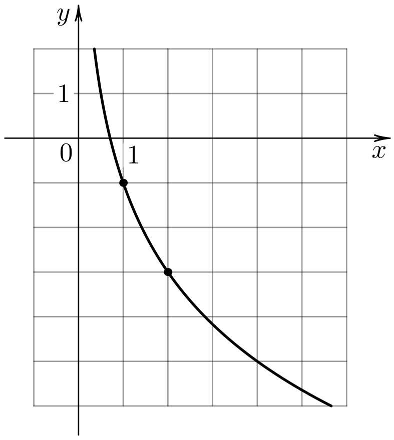
14. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите a.



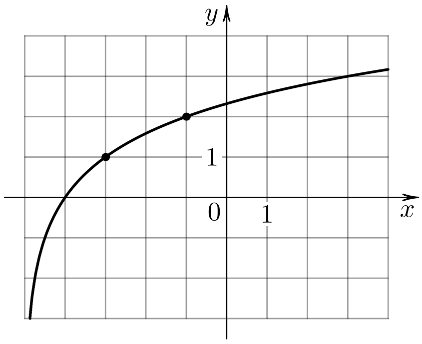
15. На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\,(32)$.



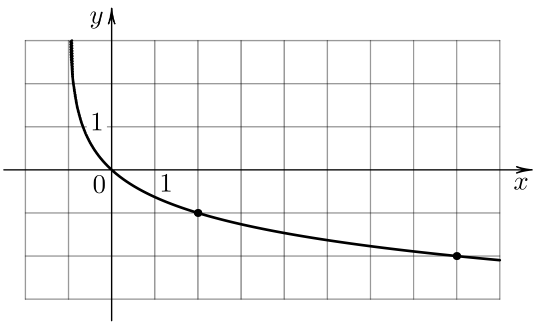
16. На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 3$.



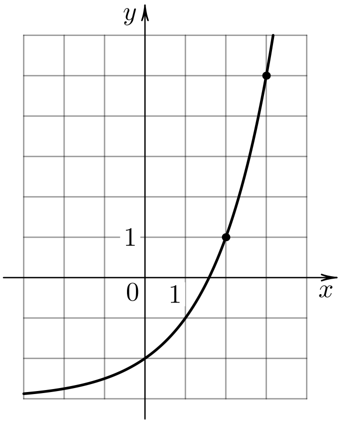
17. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a (x + b)$. Найдите $f\,(11)$.



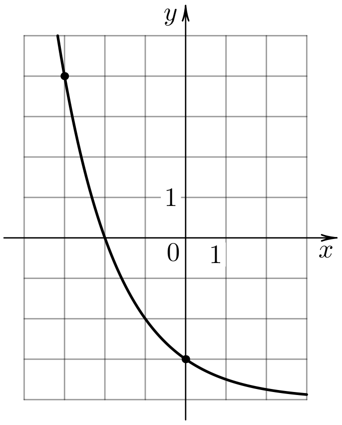
18. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a (x + b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -4$.



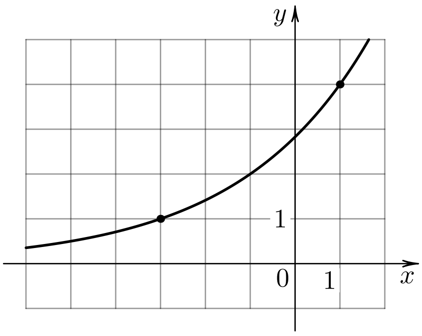
19. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f\,(6)$.



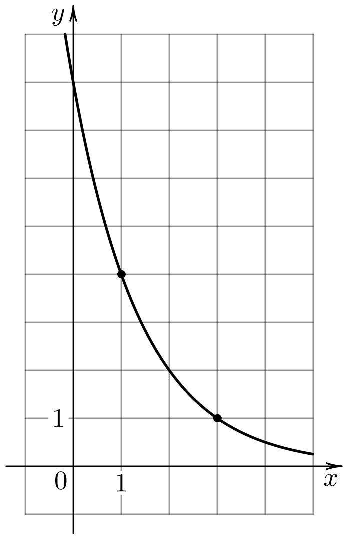
20. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 12$.



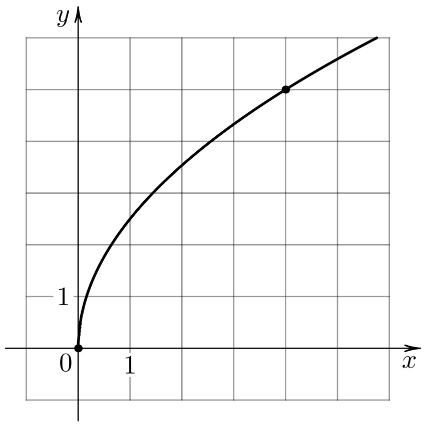
21. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f\,(-7)$.



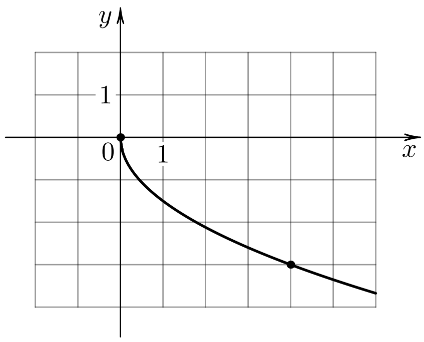
22. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 64$.



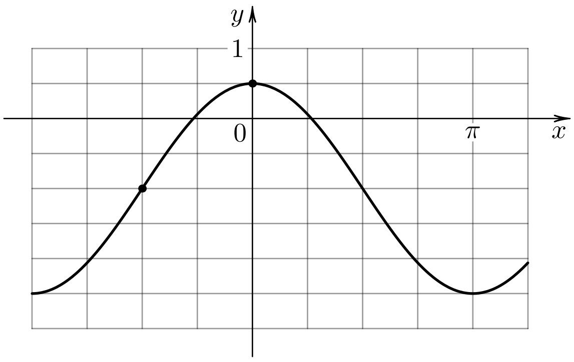
23. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f\,(6,76)$.



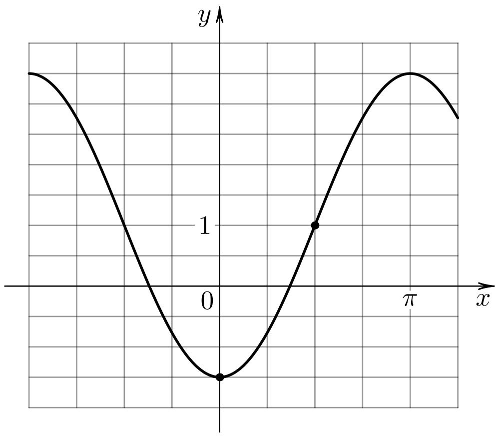
24. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -12$.



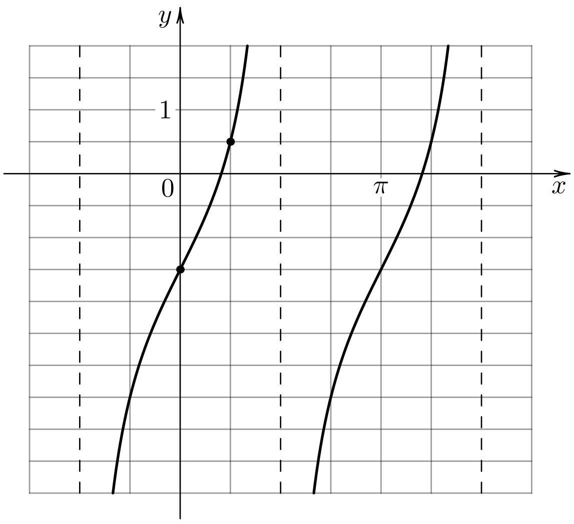
25. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.



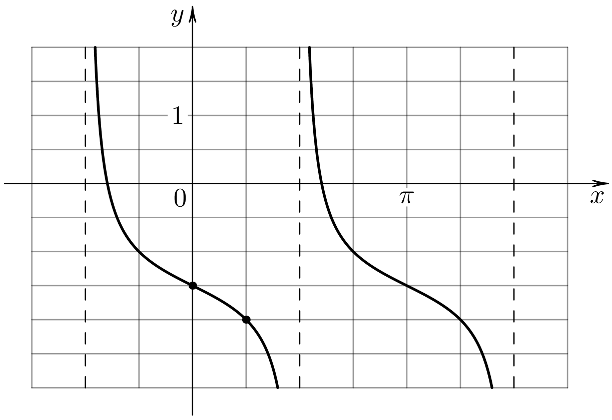
26. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.



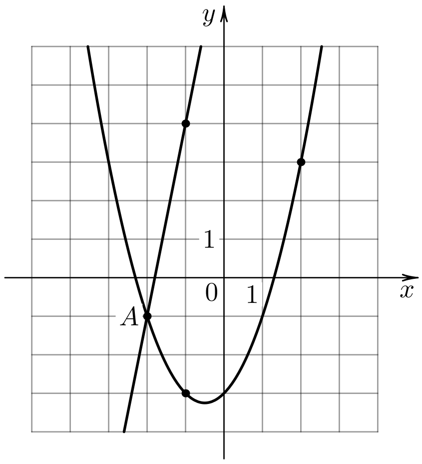
27. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



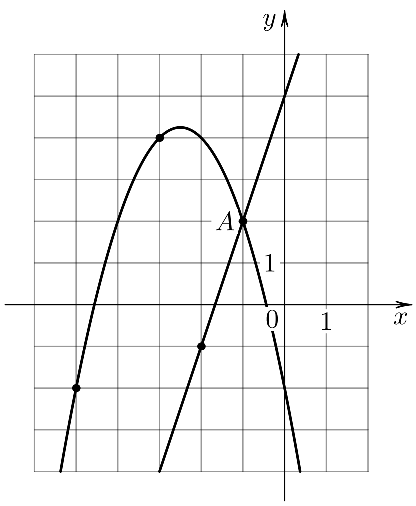
28. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\operatorname{tg} x + b$. Найдите b.



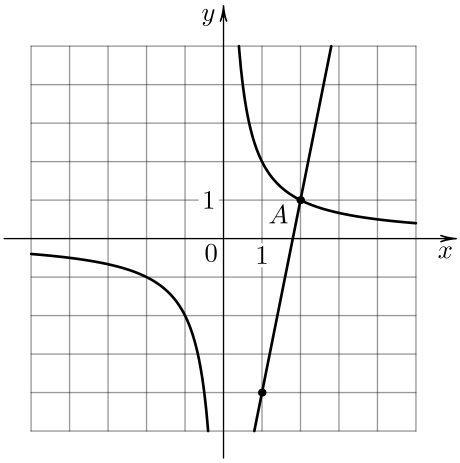
29. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



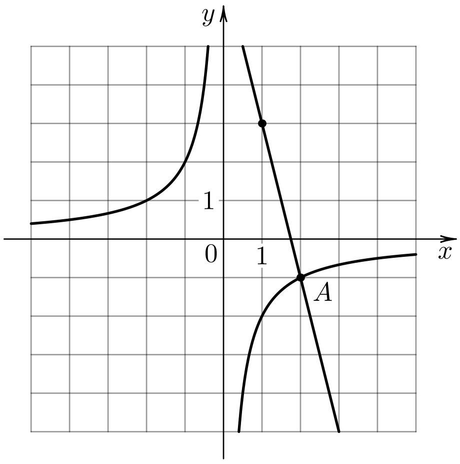
30. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 3x + 5$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



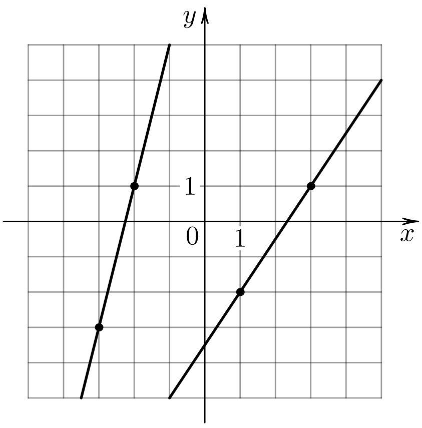
31. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



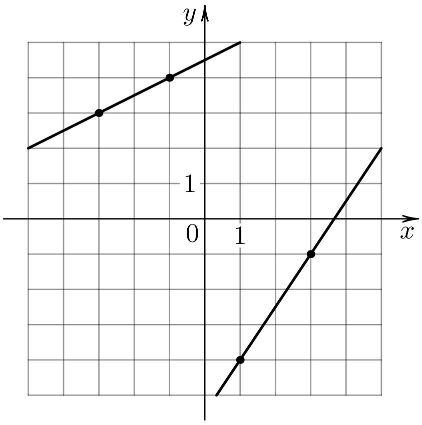
32. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



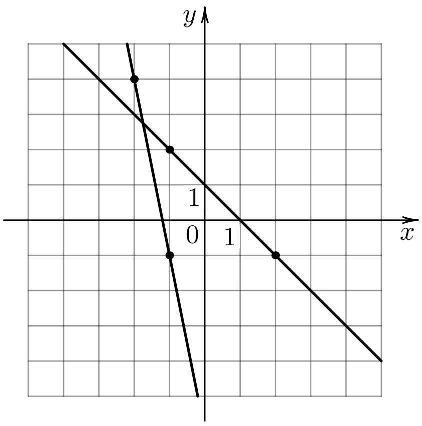
33. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



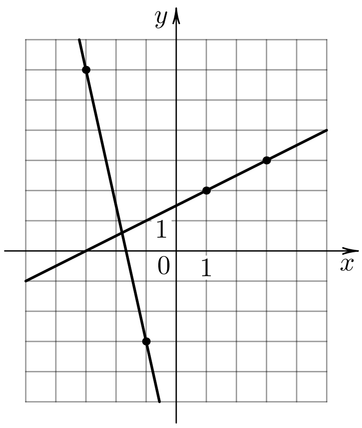
34. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



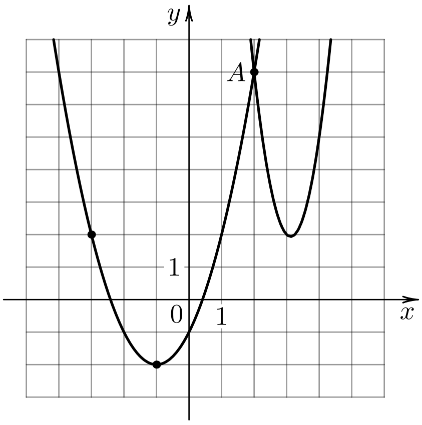
35. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



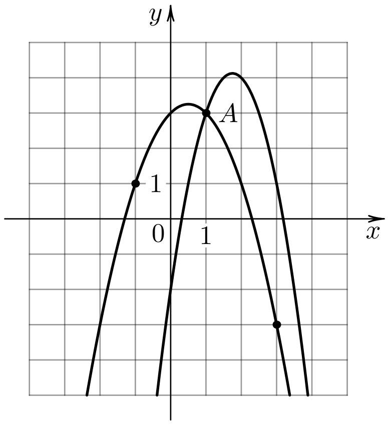
36. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



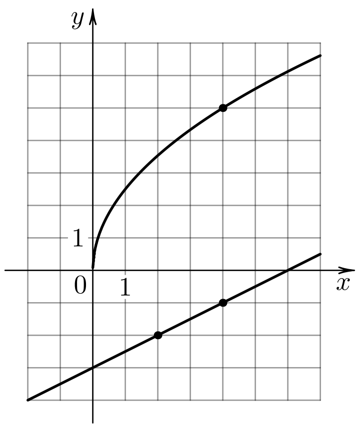
37. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



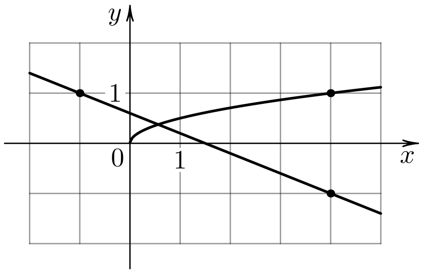
38. На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



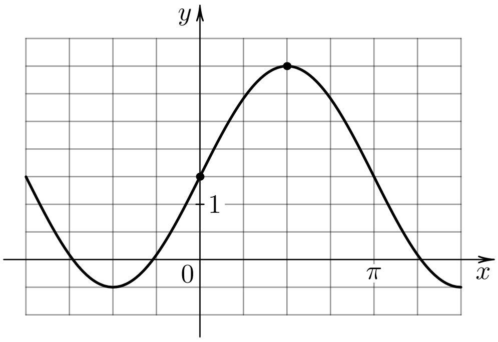
39. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



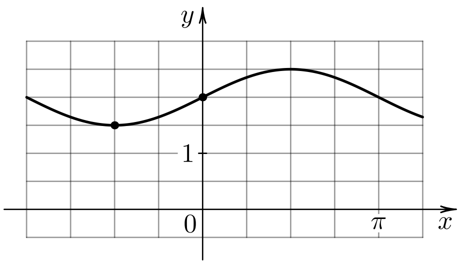
40. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



41. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a.



42. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b.



Исследование функций с помощью производной

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;\ 8]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}\cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$.

5. Найдите точку минимума функции $y = (3-x)e^{3-x}$.

6. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5;\ 0]$.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\ \frac{15}{14}\right]$.

8. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

9. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

10. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

11. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - x^2 - 40x + 3$ на отрезке $[0;\ 4]$.

12. Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 9x - 7$.

13. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$.

14. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$.

15. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 289}{x}$.

16. Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{16}{x} + x + 3$.

17. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5;\ -1]$.

18. Найдите точку минимума функции $y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x$ из интервала $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 25}$.

20. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$.

21. Найдите точку минимума функции $y = \log_7(x^2 - 6x + 12) + 2$.

22. Найдите точку максимума функции $y = 11^{6x - x^2}$.

23. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.

24. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1;\ 2]$.

25. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-6;\ 1]$.

Подсказки

Функции и их графики

1. Определите коэффициенты k и b в уравнении прямой, подставив точки с координатами $(-1,-3)$ и $(3,4)$.

2. Кроме явной подстановки координат целых точек, можно определить коэффициент k с помощью тангенса угла наклона прямой: рассмотрите прямоугольный треугольник с катетами 7 и 4.

3. Чтобы определить оба неизвестных коэффициента, можно подставить координаты двух точек в уравнение параболы. Заметьте, что при подстановке $(x,y) = (0,-4)$ мы сразу получаем значение c, и это общее правило. Свободный коэффициент равен ординате точки пересечения графика функции с осью Oy.

4. Видите три целые точки, принадлежащие графику функции? В этой задаче полезно помнить формулу абсциссы вершины параболы $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

5. Поочередно подставьте в функцию координаты точек $(-2,-4)$ и $(1,-1)$.

6. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная парабола (ось симметрии которой параллельна оси ординат). Несложно получить систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Но чуть проще будет подметить, что наш график получен параллельным переносом параболы $y = x^2$.

7. Представьте параболу $y = x^2$. Если все ее точки перенести на три клетки влево и на пять клеток вниз, получится исходная парабола. Вспомните тему преобразования графиков функции, и тогда станет ясно, что $f(x) = (x+3)^2 - 5$.

8. Прямая $y = a$ для функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$ является горизонтальной асимптотой. И как раз она изображена штриховой линией.

9. Вновь не забудьте про горизонтальную асимптоту, а затем поработайте с точкой $(1,-3)$.

10. Задача аналогична предыдущей. На финальной стадии требуется решить уравнение $\frac{k}{x} + a = \frac{4}{5}$ относительно x.

11. Прямая $x = -a$ является вертикальной асимптотой графика функции.

12. Формально говоря, вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$ служит такая прямая $x = t$, что $\lim\limits_{x\to t-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to t+0} f(x) = \pm\infty$.

13. Прямые $y = 1$ и $x = -4$ — горизонтальная и вертикальная асимптоты графика функции. Остается подключить точку с координатами $(1,2)$.

14. Задача аналогична предыдущей.

15. Используя координаты целых точек, получаем систему $(-2 = b + \log_a 2)$ и $(-1 = b + \log_a 4)$.

16. Целые точки заботливо отмечены на графике — поработайте с ними. Убедитесь, что у вас получилось $0 < a < 1$: перед нами график убывающей функции.

17. Уравнения вида $\log_a(-1+b) = 2$ можно решить по определению логарифма: $a^2 = -1+b$, причем $a > 0,\ a \neq 1,\ -1+b > 0$.

18. Используйте то, что график проходит через начало координат.

19. Вновь удобно подставить координаты точки, которая не отмечена на графике: $(0,-2)$.

20. Начните с того, что $-3 = a^0 + b \;\Leftrightarrow\; b = -4$. Полезно знать, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x) = a^x + b$.

21. Все по-прежнему: подставьте координаты двух отмеченных точек в функцию — получится система из двух уравнений.

22. Если проявить смекалку, то можно заметить, что график изображенной функции совмещается с графиком функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ параллельным переносом.

23. Рецепт прежний: работаем с отмеченной точкой. Напомню, что $26^2 = 676$.

24. $-3 = k \cdot \sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{3}{2}$.

25. Коэффициент a отвечает за растяжение графика вдоль оси ординат. Впрочем, отмеченные точки также сослужат службу.

26. Присмотритесь внимательнее к масштабу по оси ординат: единичный отрезок отмечен. Коэффициент b отвечает за смещение графика вдоль оси ординат.

27. Начнем с целой точки на оси ординат: $-\frac{3}{2} = a \cdot \operatorname{tg} 0 + b \;\Leftrightarrow\; b = -\frac{3}{2}$.

28. Точь-в-точь как в прошлом номере.

29. Определите коэффициенты a, b, c и решите систему уравнений.

30. График $g(x)$ пересекает ось ординат в точке $(0, -2)$. Значит, $c = -2$. Точки параболы с абсциссами -3 и -2 имеют одинаковые ординаты. Значит, абсцисса вершины параболы равна $-2,5$. Из соответствующей формулы получаем $b = 5a$.

31. Угловой коэффициент прямой $g(x)$ равен 5 (тангенс угла наклона). Уравнение гиперболы определяется подстановкой координат точки A.

32. Коэффициент k в этом задании отличается от предыдущего лишь знаком минус.

33. Знаете, как получить уравнение прямой без подстановки координат? Угловой коэффициент первой (левой) прямой равен 4. Причем график получен параллельным переносом прямой $y = 4x - 3$ на три единицы влево. Отсюда $f(x) = 4(x+3) - 3$, то есть $f(x) = 4x + 9$ — интересующая функция.

34. Пусть $y = kx + b$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(-3, 3)$ и $(-1, 4)$. Тогда верны соотношения $3 = -3k + b$ и $4 = -1k + b$.

35. Кроме очевидных способов, можно подключить геометрию. Соедините отрезком точки $(-1, 2)$ и $(-1, -1)$, а затем точки $(-3, 4)$ и $(-2, 4)$. Видите два подобных треугольника?

36. И здесь есть две пары целых точек, которые дают вертикальные отрезки и подобие треугольников.

37. Заметьте, что график функции $g(x)$ получен параллельным переносом параболы $y = x^2$ на вектор $\vec{a}(-1, -2)$. Отсюда $g(x) = (x+1)^2 - 2$.

38. Понимаете, где изображен график $f(x)$, а где $g(x)$? Это очевидно, если вспомнить формулу абсциссы вершины параболы $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

39. Угловой коэффициент прямой $g(x)$ равен $\frac{1}{2}$, а ордината точки пересечения с осью Oy равна -3. Значит, $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

40. Дело техники: $1 = a \cdot \sqrt{4} \;\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

41. Чему равна область значений изображенной функции? $E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$. А область значений функции $g(x) = \sin x$ — отрезок $[-1; 1]$. Во сколько же раз нужно растянуть (а затем сместить) вдоль оси ординат график $g(x)$, чтобы получить $f(x)$?

42. Синусоида $g(x) = \sin x$ проходит через начало координат. А график $f(x)$ пересекает ось ординат двумя единицами выше. Чему же равно b?

Исследование функций с помощью производной

1. Используйте правило дифференцирования произведение: $(uv)' = u'v + v'u$.

2. $-2\sqrt{3}\pi + 6$ — это константа, производная равна нулю.

3. Поскольку выражение $15 - 3\cos x$ всегда положительно, функция y является возрастающей.

4. Давайте вместе найдем и преобразуем производную функции:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 x} - 3 = \frac{3 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3\operatorname{tg}^2 x.$$

5. Не прозевайте правило дифференцирования сложной функции: $(e^{3-x})' = e^{3-x} \cdot (3-x)' = -e^{3-x}$.

6. Если не удается найти производную «в лоб», то попробуйте так: $\ln(x+3)^3 = 3\ln(x+3)$.

7. Не забывайте при чистовом оформлении подобных задач, что областью определения исходной функции служат только положительные числа, то есть $D(y) = (0; +\infty)$. Это стоит отразить на числовой прямой при исследовании знаков производной.

8. Легко найти нули производной, если сгруппировать слагаемые:

$$y' = (6x - 36)e^{x-36} + (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36} = e^{x-36}(6x - 36 + 3x^2 - 36x + 36).$$

9. Кстати, помните, что подразумевают, когда говорят «точки минимума/максимума»? Исключительно абсциссы (иксы).

10. Если вы не хотите исследовать функцию на монотонность, то с учетом дифференцируемости функции можно вычислить $f(-3)$, $f(3)$ и $f(x_0)$, где x_0 — точка экстремума, принадлежащая отрезку $[-3; 3]$. А затем выбрать наибольшее из этих трех чисел. Впрочем, задачу можно красиво решить и без производной, используя «оценку + пример»: вынесите x^2 за скобки.

11. Звоните Ньютону: без него не управимся!

12. Не забудьте, что $\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot x^3$.

13. Используем правило дифференцирования степенной функции: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

14. Легко миновать правило дифференцирования произведения, поскольку $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$.

15. Есть ли возможность избежать правила частного в этом номере?

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x} = -\frac{x^2}{x} - \frac{289}{x} = -x - 289 \cdot x^{-1}.$$

Интересно, что задачи с такими (и похожими) дробно-рациональными функциями можно решить и без производной: покажу в чистовых разборах.

16. Присмотритесь к преобразованиям в подсказке выше. У задачи

17. Все по-старому, разве что $\left((x+3)^2\right)' = 2(x+3)$. Задачу можно очень красиво решить без производной, если заметить, что левая часть всегда неотрицательна — этот факт служит оценкой. Остается привести пример.

18. Если аккуратно применить правило произведения, то косинусы взаимно уничтожаются.

19. Чему быть, того не миновать:

$$y' = -\frac{(x)' \cdot (x^2 + 25) - x \cdot (x^2 + 25)'}{(x^2 + 25)^2} = -\frac{1 \cdot (x^2 + 25) - x \cdot 2x}{(x^2 + 25)^2} = \frac{x^2 - 25}{(x^2 + 25)^2}.$$

Впрочем, миновать можно, поделюсь в чистовых разборах.

20. Эту задачу можно решить и без производной. Поскольку функция $f(t) = \sqrt{t}$ — возрастающая, точка максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$ совпадает с точкой максимума квадратичной функции $y = 4 - 4x - x^2$. И этой точкой является абсциссой вершины параболы.

21. Поскольку функция $f(t) = \log_7(t)$ возрастает, точка минимума исходной функции совпадает с абсциссой вершины параболы $y_2 = x^2 - 6x + 12$, ветви которой направлены вверх.

22. Можно ли применить рассуждения из подсказок выше для этой задачи?

23. Если нет желания связываться с правилом произведения, можете раскрыть скобки. Задачу также можно решить фантастически красиво, если вспомнить определением точки (локального) минимума.

24. Попробуйте исследовать функцию $f(t) = t^2 - 6t + 3$.

25. Все просто: $y' = 5x^4 - 15x^2 - 20 = 5(x^4 - 3x^2 - 4) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 5(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$.

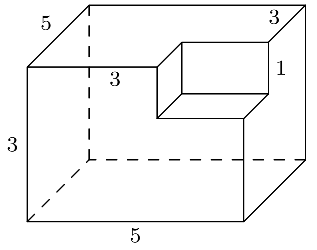
§8. Домашняя работа

Вариант I

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 4$, $\operatorname{tg} A = 0{,}75$. Найдите AC.

2. Найдите длину вектора $\vec{a}(-9, -12)$.

3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



4. Фабрика выпускает сумки. В среднем 3 сумки из 25 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

5. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

6. Решите уравнение $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3} - \sqrt{12}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$.

8. Прямая, заданная уравнением $y = -4x - 11$, является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

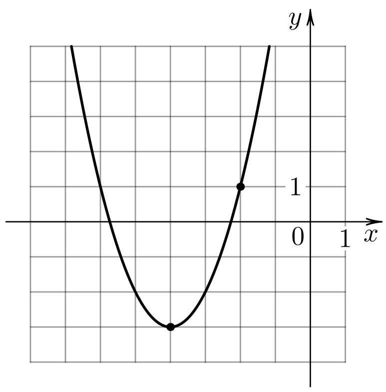
9. Деревенский трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

10. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-12)$.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Вариант II

1. В треугольнике STK угол S равен $90°$, SH — перпендикуляр к TK, $\cos K = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $SK = 14$. Найдите SH.

2. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что их скалярное произведение равно 14, $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 10$.

3. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 3. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды равна 2.

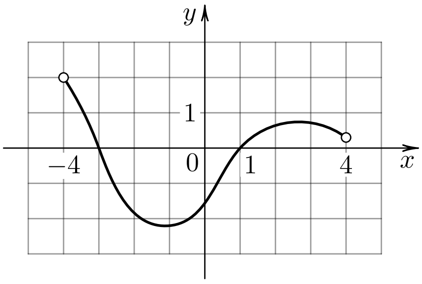
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

6. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = 2$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{21}{3^{\log_3 7}} + \dfrac{6}{7^{\log_7 3}}$.

8. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 4)$. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



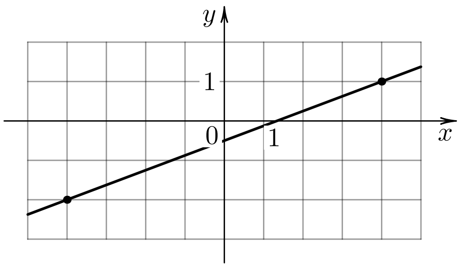
9. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой

$$h(t) = -t^2 + 14t,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска. Определите, сколько секунд камень находился на высоте выше 48 метров.

10. Пассажирский электропоезд «Ласточка» длиной 300 м движется со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 600 м со скоростью 80 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(12)$.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-4; 1]$.

Вариант III

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Какова длина AB?

2. Даны векторы $\vec{a}(-2, 1)$, $\vec{b}(-6, 5)$, $\vec{c}(-3, -3)$. Найдите сумму координат вектора $\vec{d}$, если $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите площадь его поверхности.

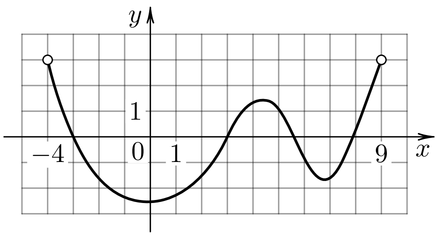
4. Ваня любит математику. Изучая собственные результаты пробных экзаменов, он установил, что решит на очередном пробном ЕГЭ более 16 задач с вероятностью $0,76$, а более 15 задач — с вероятностью $0,88$. Какова, согласно этим данным, вероятность того, что он решит ровно 16 задач?

5. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? Ответ округлите до сотых.

6. Решите уравнение $8^{9-x} = 64^x$.

7. Вычислите значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе напишите длину наибольшего из них.



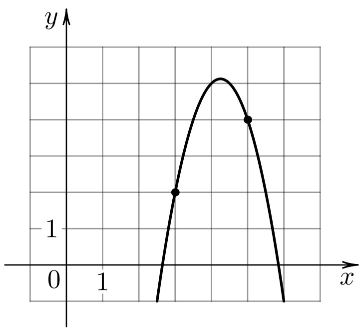
9. Катапульта метает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{110}$ м$^{-1}$, $b = \frac{13}{11}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y(м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 19 метров нужно расположить катапульту, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

10. Первый насос наполняет бак за 19 минут, второй — за 57 минут, а третий — за 1 час и 16 минут. За сколько минут они наполнят бак, работая одновременно?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx - 31$. Найдите $f\,(2)$.

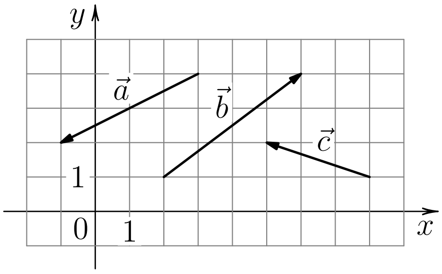


12. Найдите точку максимума функции $y = (60 - x)e^{x+60}$.

Вариант IV

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH, $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $AC = 4$. Найдите $2\sqrt{5}AH$.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите координаты вектора $\vec{d}$, если $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. В ответе укажите сумму координат вектора $\vec{d}$.



3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 5$, $AD = \sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1.

4. Вероятность того, что чайник, заказанный с «AliExpress», прослужит хотя бы 3 года, равна 0,47. Какова вероятность того, что он прослужит меньше трех лет?

5. Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» меньше вероятности события «выпадет ровно 5 орлов»?

6. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = 13$.

7. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} + 1$.

8. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - c$. Найдите c.

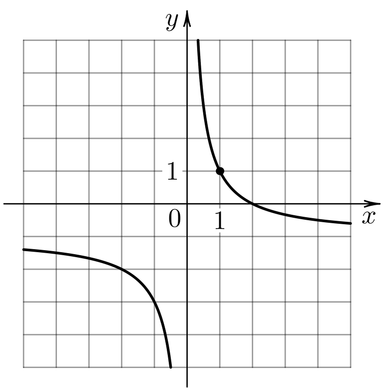
9. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ укажите в тыс. руб.

10. Знакомый нам электропоезд «Ласточка», двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину электропоезда, ответ выразите в метрах.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите $f(20)$.



12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 576}{x}$.

Вариант V

1. Периметр равнобедренной трапеции равен 40. А ее основания равны 12 и 18. Найдите площадь трапеции.

2. Даны векторы $\vec{a}(-4,2)$ и $\vec{b}(3,-7)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 20 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему же равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

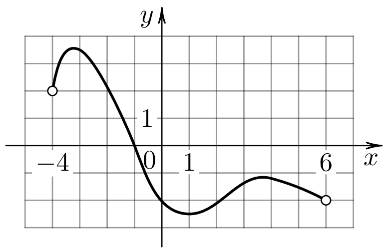
4. Василий выигрывает у своего телефона на сложном уровне с вероятностью 0,65, если играет белыми фигурами, и 0,6 — черными. Какова вероятность того, что он выиграет две партии подряд, если после каждой партии цвет фигур меняется?

5. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

6. Решите уравнение $0{,}5^{x-6}=8^x$.

7. Вычислите значение $\dfrac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{16-\sqrt{60}}$.

8. На рисунке изображен график функции $f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



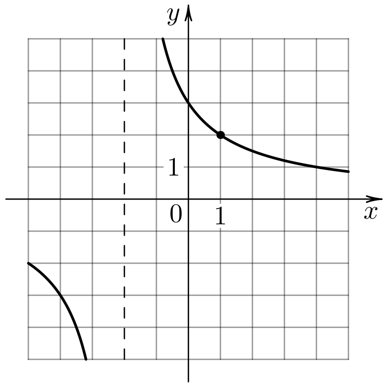
9. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется формулой

$$t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 2,3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=23$ м/с? Примите $g=10$ м/с^2.

10. Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

11. На рисунке изображен график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x)=-0,3$.



12. Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+4)^9-9x$ на отрезке $[-3{,}5;0]$.

Вариант VI

1. Площадь параллелограмма равна 36, две его стороны равны 12 и 24. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

2. Даны векторы $\vec{a}(12, 5)$ и $\vec{b}(24, 7)$. Найдите разность $|\vec{a}| - |\vec{b}|$.

3. Найдите угол AC_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 8$, $AD = 15$, $AA_1 = 17$. Ответ дайте в градусах.

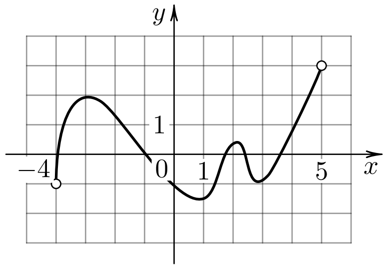
4. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из США, 16 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

5. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 5 очков.

6. Решите уравнение $(x-3)^3 = 8$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{18}\cos^2\dfrac{7\pi}{8} - \sqrt{18}\sin^2\dfrac{7\pi}{8}$.

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



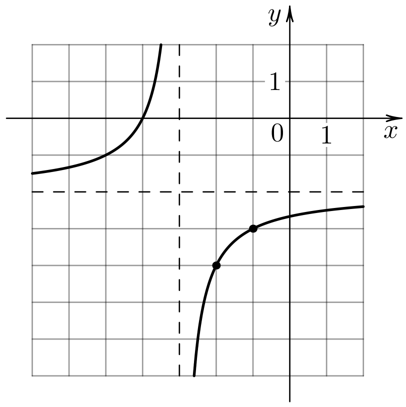
9. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 108$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого обогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задается формулой

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\ (\text{Ом}),$$

а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 60 Ом. Ответ выразите в омах.

10. Расстояние между городами A и B равно 510 км. Из A в B со скоростью 70 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из B выехал со скоростью 80 км/ч второй. На каком расстоянии (в км) от города A они встретятся?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите k.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = -8x + 4\operatorname{tg} x + 2\pi + 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

§9. Домашняя работа

Вариант VII

1. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 12, $AD = 13$. Найдите $13 \sin B$.

2. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что их скалярное произведение равно -6, $|\vec{a}| = 3$, а вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(1, \sqrt{15})$. Ответ дайте в градусах.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

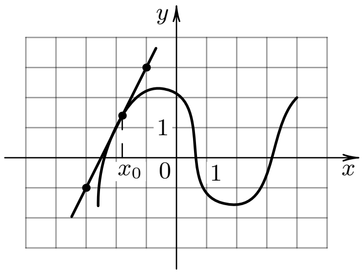
4. Стрелок стреляет в мишень три раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все три раза.

5. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 2 очка?

6. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\dfrac{1}{289}\right)^x$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



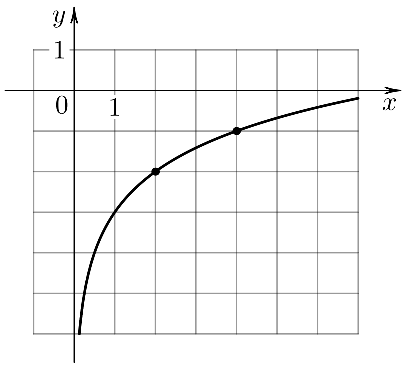
9. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2} \text{ (м)}.$$

Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

10. Теперь автомобиль из предыдущей задачи двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7\ln(x + 5) + 3,8$ на отрезке $[-4,9; 0]$.

Вариант VIII

1. Центральный угол на 27° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите $|\overrightarrow{AC_1}|$.

3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем цилиндра равен 36. Чему равен объем конуса?

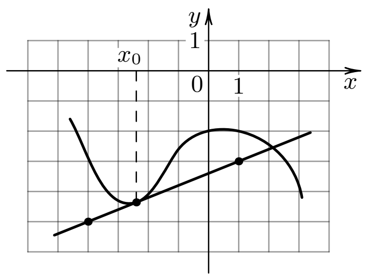
4. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

5. Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 10».

6. Решите уравнение $\log_8(x^2+x) = \log_8(x+1)$. Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Найдите значение выражения $3^{3\sqrt{7}-2} \cdot 3^{5+3\sqrt{7}} : 3^{6\sqrt{7}}$.

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



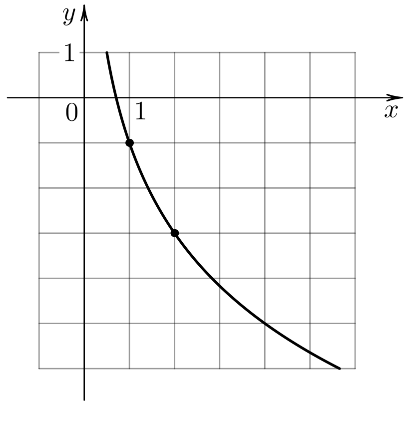
9. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах.

10. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй — 22 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 3$.



12. Найдите наибольшее значение функции $y = 20\sin x - 23x + 24$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант IX

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 16$, $\cos B = 0{,}6$. Найдите CH.

2. Найдите сумму координат вектора $\vec{v}$, если $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, а ABC — некоторый треугольник.

3. Объем треугольной пирамиды $SACE$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

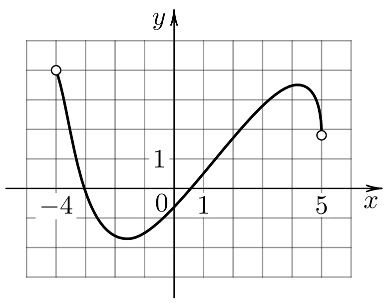
4. Доля брака при производстве часов составляет 0,4%. Найдите вероятность того, что только что выпущенные с конвейера часы окажутся исправными.

5. В одном ресторане в г. Тамбов администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

6. Решите уравнение $\log_2(x + 1) = 4$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{5}{3^{\log_3 5}}$.

8. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



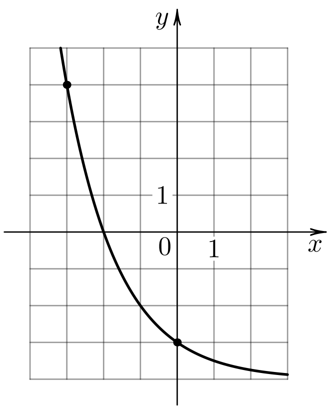
9. При нормальном падении света длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением

$$d \sin\varphi = k\lambda.$$

Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

10. Бригада оптимистичных рабочих должна изготовить 200 деталей. Изготавливая ежедневно на 5 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 2 дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение заказа?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(-5)$.

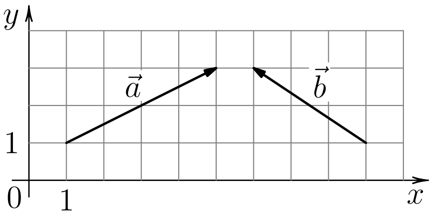


12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[-2; 2]$.

Вариант X

1. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 25, угол C равен $30°$. Найдите отрезок AC.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$. В ответе укажите сумму координат вектора $\vec{c}$.



3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

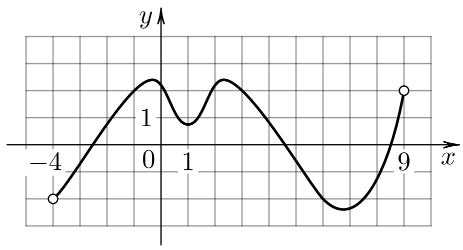
4. Игральную кость бросают трижды. Найдите вероятность того, что в сумме за три попытки выпадет менее 17 очков. Ответ округлите до сотых.

5. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

6. Решите уравнение $(x - 9)^2 = -36x$.

7. Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7° \cdot \operatorname{tg} 83°$.

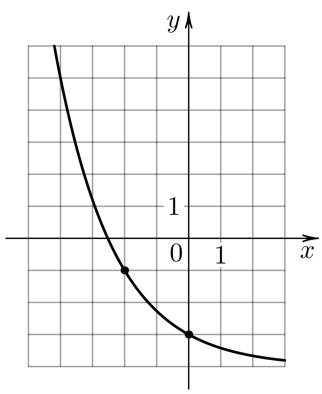
8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 6]$.



9. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч^2. Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

10. Баржа вышла в 10:00 из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 23$.



12. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 5x + 5)e^{7-x}$.

Вариант XI

1. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 13 : 23. Ответ дайте в градусах.

2. Длина стороны правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Найдите $|\vec{v}|$, если

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE}.$$

3. В конусе проведено два сечения плоскостями α и β, параллельными плоскости основания конуса. Высота конуса делится точками пересечения с плоскостями α и β на три равных отрезка. Найдите объем средней части конуса, если объем нижней части равен 38.

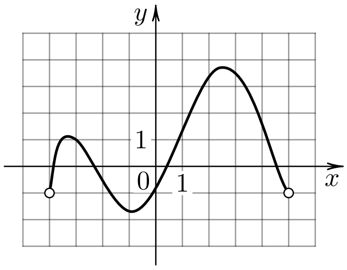
4. Завод выпускает холодильники. В среднем на 1000 качественных холодильников приходится 89 со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

5. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,7. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

6. Решите уравнение $(2x-1)^2 = (1-x)^2$. Если оно имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Вычислите значение выражения $3^{2+\log_9 16}$.

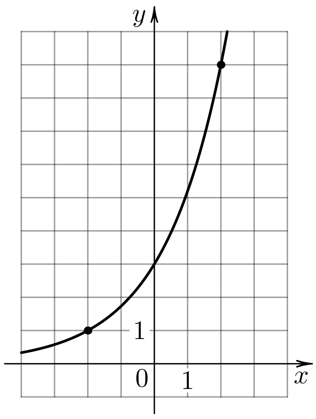
8. На рисунке изображен график $y = F(x)$ — некоторой первообразной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество нулей функции $f(x)$ на интервале $(-2; 3)$.



9. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^{\alpha} = \mathrm{const}$, где p (Па) — давление в газе, V — объем газа в кубических метрах, α — положительная константа. При каком наименьшем значении константы α уменьшение в 2 раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

10. В сосуд, содержащий 8 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 2 литра воды. Какова концентрация получившегося раствора? Ответ дайте в процентах.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(6)$.

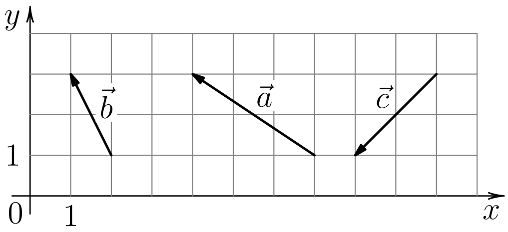


12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + 11$.

Вариант XII

1. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна $\sqrt{2}$. Найдите сторону квадрата, описанного около этой же окружности.

2. Найдите координаты вектора $\vec{d}$, если $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. В ответе укажите длину вектора $\vec{d}$.



3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 16, боковые ребра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

4. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных стекол, вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

5. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 13% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

6. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{15-2x}} = \dfrac{1}{3}$.

7. Вычислите значение выражения $6\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$.

8. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания неотрицательна.

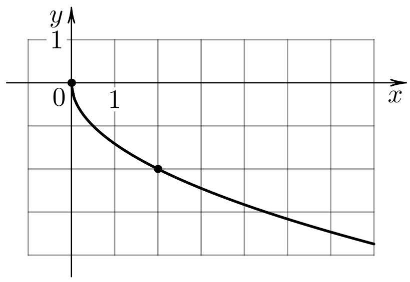
9. При температуре 0° рельс имеет длину $l_0 = 12{,}5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

10. Восемь литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества смешали с двенадцатью литрами 40-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f\,(12, 5)$.



12. Найдите точку минимума функции $y = -18x^2 - x^3 + 77$.

§10. Домашняя работа

Вариант XIII

1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 58°. Найдите угол между биссектрисой и медианой этого треугольника, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

2. Даны векторы $\vec{a}\,(3,2)$, $\vec{b}\,(-2,-1)$ и $\vec{c}\,(-5,4)$. Найдите значение выражения $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.

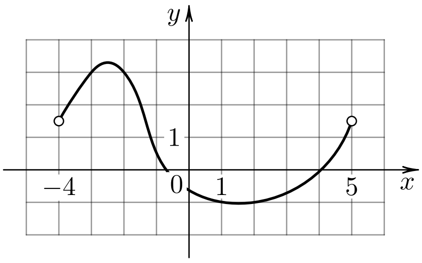
4. Соня бросила два игральных кубика. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что на одном из кубиков выпало 5 очков.

5. В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

6. Решите уравнение $\log_{25}(x+6)=\log_5 2$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{3^{6+2\sin^2(\pi+3)}}{9^{2-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+3\right)}}$.

8. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-4;5)$ и дифференцируема на нем. График производной функции изображен ниже. Определите точки, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна или совпадает с прямой $y=3x-1$. В ответе укажите наибольшую из абсцисс этих точек.



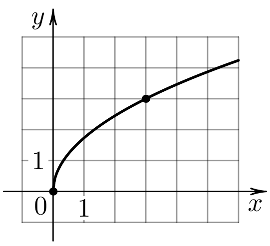
9. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение будет четким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

10. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась в полтора раза, общий доход семьи вырос бы на 26%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вчетверо, общий доход сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода составляет зарплата жены?

11. На рисунке изображен график функции $f(x)=k\sqrt{x}$. Найдите значение x, при котором $f(x)=9$.



12. Найдите точку максимума функции $y=(4-x)^5\cdot(4+x)^3$.

Вариант XIV

1. В треугольнике ABC угол C прямой, $AB = \sqrt{74}$, $\sin A = \dfrac{5}{\sqrt{74}}$. Найдите AC.

2. Даны векторы $\vec{a}(3,7)$ и $\vec{b}(8,9)$. Найдите длину вектора $1{,}2\vec{a} - 0{,}7\vec{b}$.

3. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 30. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 10.

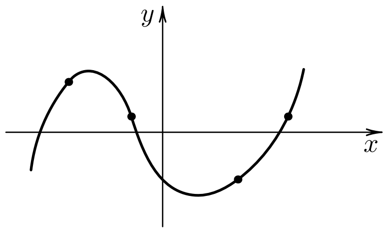
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

5. В коробке 9 синих, 4 красных и 12 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

6. Решите уравнение $\sin \dfrac{\pi x}{13} = 0$. В ответе укажите наименьший положительный корень.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}\right)^{30}}{90}$.

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены 4 точки. Найдите среди них количество точек, в которых производная функции $y = f(x)$ положительна.



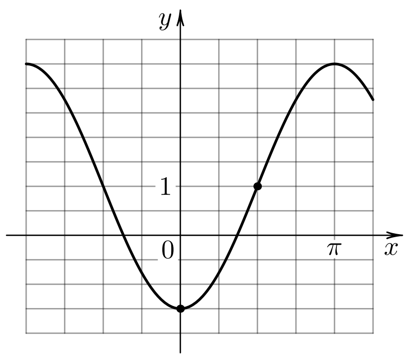
9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

10. Из двух поселков, расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу вышли два пешехода. Через сколько часов они встретятся, если их скорости равны 3,5 км/ч и 4,5 км/ч?

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.

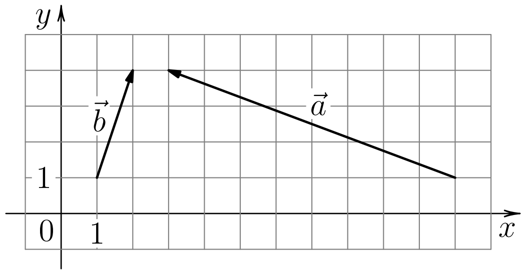


12. Найдите наибольшее значение функции $y = 27x - 13\sin x + 11$ на отрезке $[-4\pi; 0]$.

Вариант XV

1. Основания равнобедренной трапеции равны 114 и 186, а ее высота равна 45. Найдите котангенс острого угла трапеции.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.



3. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите ребро куба в см.

4. Вероятность того, что Андрей сдаст ЕГЭ по математике, равна 0,99, а вероятность того, что он сдаст ЕГЭ по русскому языку, равна 0,98. Найдите вероятность того, что Андрей сдаст оба этих экзамена.

5. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечетных чисел, а четные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

6. Решите уравнение $0{,}25^{1-2x} = 64$.

7. Вычислите значение выражения $\log_2 7^9 \cdot \log_7 \sqrt[5]{2}$.

8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - 13t + 37$ где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах (измеренное от начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

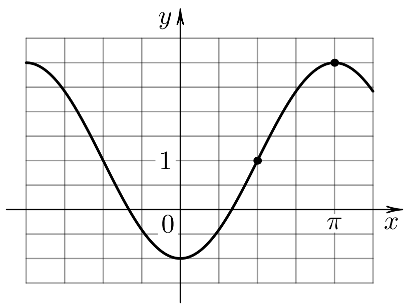
9. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R},$$

где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 8 ампер. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать.

10. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.



12. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_9 (2 - x^2 + 2x) + 4$.

Вариант XVI

1. В треугольнике BCF угол F равен $90°$, $\cos B = \frac{5}{7}$, $FC = 2\sqrt{6}$. Найдите BC.

2. Даны векторы $\vec{a}(3,-1)$, $\vec{b}(2,0)$, $\vec{c}(4,y)$. Найдите y, если $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 4π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

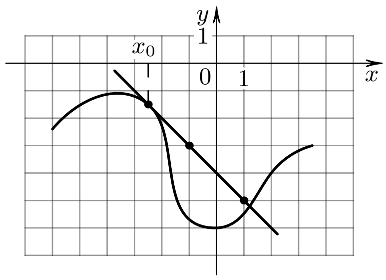
4. Одновременно бросают две монеты. Найдите вероятность того, что на одной монете выпадет орел, а на другой — решка.

5. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть шесть разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца?

6. Решите уравнение $\sqrt{4x-3}=15$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

8. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



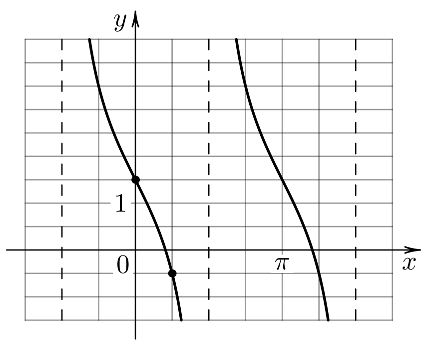
9. При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

10. Улитка ползет от одного дерева к другому. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

11. На рисунке изображен график функции $f(x)=a\operatorname{tg}x+b$. Найдите a.



12. Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{\pi}{3}x-\cos x-3$ на отрезке $[0;\pi]$.

Вариант XVII

1. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 15$, высота AH равна 12. Найдите синус угла ACB.

2. Даны векторы $\vec{a}(-2, 4)$ и $\vec{b}(2, -1)$. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{c}|$, а векторы $\vec{c}(x, y)$ и $\vec{b}$ сонаправленные. Найдите $x + y$.

3. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в 7 раз?

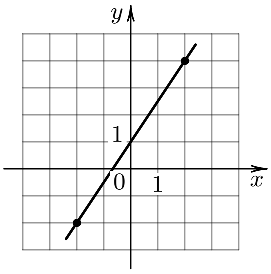
4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 28 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5. В городе 38% взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 18,8% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

6. Решите уравнение $\frac{1}{7}x^2 = 9\frac{1}{7}$. Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Вычислите значение выражения $\sqrt{146^2 - 110^2}$.

8. Прямая, изображенная на рисунке, является графиком одной из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите $f(2)$.



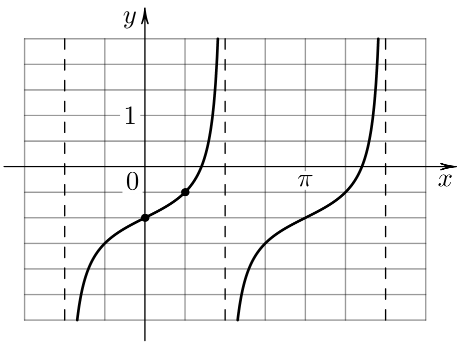
9. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.

10. Из городов A и B, расстояние между которыми 270 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились на расстоянии 140 км от A. Найдите скорость автобуса (в км/ч), выехавшего из пункта B, если автобусы встретились через 2,5 часа после отправления.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите b.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 10x + 106}$.

Вариант XVIII

1. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

2. Найдите угол между векторами $\vec{a}\left(-\sqrt{3},1\right)$ и $\vec{b}\left(-\sqrt{8},-\sqrt{8}\right)$. Ответ дайте в градусах.

3. Объем цилиндра равен π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр основания равен 1.

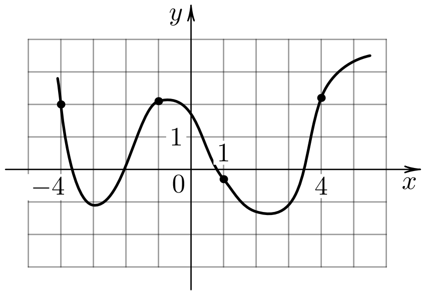
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы 1 раз.

5. Буквы в слове ДАР смешали и затем выложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится слово РАД? Результат округлите до сотых.

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+6x}=x$. В ответе укажите наименьший неотрицательный корень.

7. Вычислите значение выражения $2^{3-7\sqrt{2}}\cdot 8^{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$.

8. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки: -4, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



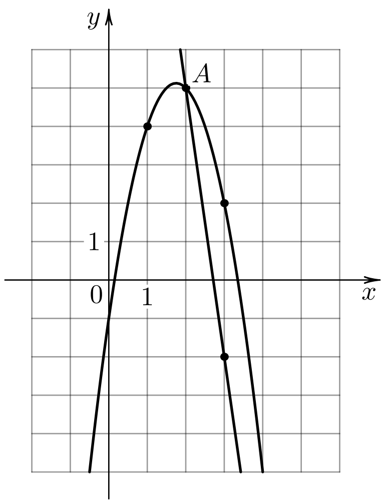
9. К источнику с ЭДС $\varepsilon=55$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой

$$U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$$

. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в Омах.

10. 3 килограмма яблок стоят столько же, сколько 4 килограмма бананов. На сколько процентов 10 килограммов бананов дешевле 10 килограммов яблок?

11. На рисунке изображены графики функций $f(x)=-7x+19$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-11)e^{x-10}$ на отрезке $[9;14]$.

§11. Домашняя работа

Вариант XIX

1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

2. В треугольнике ABC катет AC равен $\sqrt{7}$, $\angle BCA = 90^\circ$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.

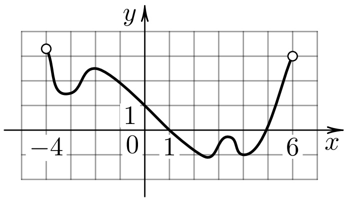
4. В сборнике по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по теме «Производная». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Производная».

5. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв Н, А, У, К, А, если каждую из указанных букв нужно использовать, причем ровно один раз? Словом считается любая последовательность букв, необязательно осмысленная с точки зрения русского языка.

6. Решите уравнение $\sqrt{3} = 9^{x+\frac{19}{4}}$.

7. Вычислите значение выражения $(2 + \log_3 4)(1 - \log_6 2)$.

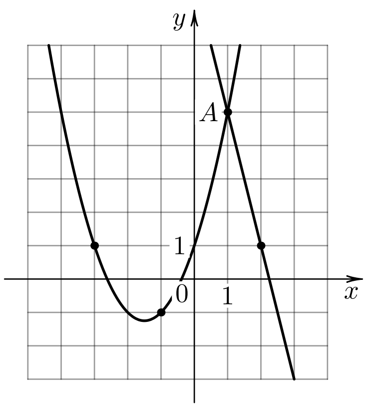
8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$, производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 6)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



9. В боковой стенке цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 6$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{150}$ м/мин^2 и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

10. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 80 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

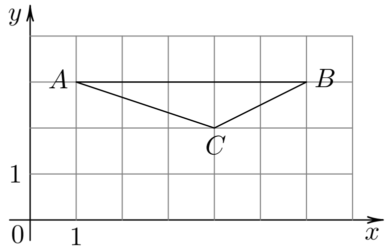


12. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 76$.

Вариант XX

1. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 18. Найдите площадь этого треугольника.

2. На координатной плоскости изображен треугольник ABC. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$. Ответ дайте в градусах.



3. Объем куба равен 512. Найдите площадь его поверхности.

4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

5. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А первый, если известно, что Б не последний. Ответ округлите до сотых.

6. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\frac{\pi x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

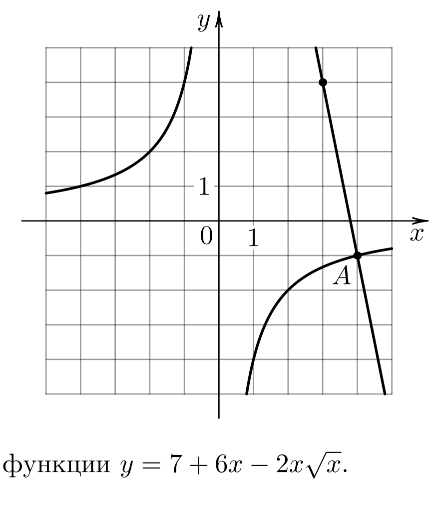
7. Вычислите значение выражения $5\operatorname{tg}48° \cdot \operatorname{tg}42°$.

8. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

9. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,3 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

10. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 525 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}$.

Вариант XXI

1. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

2. Сторона правильного треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $3\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.

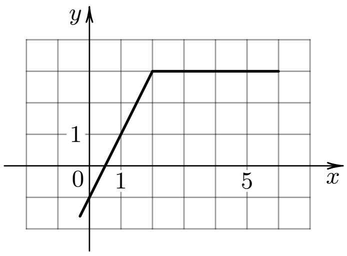
4. В уездном городе N есть три фабрики, выпускающие автомобильные шины. Первая фабрика выпускает 30% этих шин, вторая — 45%, третья — 25%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных шин, вторая — 6%, третья — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине шина не окажется бракованной.

5. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 (включительно) делится на 3, при условии, что оно делится на 4?

6. Найдите корень уравнения $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ принадлежащий отрезку $[13; 17]$.

7. Вычислите значение выражения $7 + \log_2\left(\sin\dfrac{5\pi}{12}\right) + \log_2\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

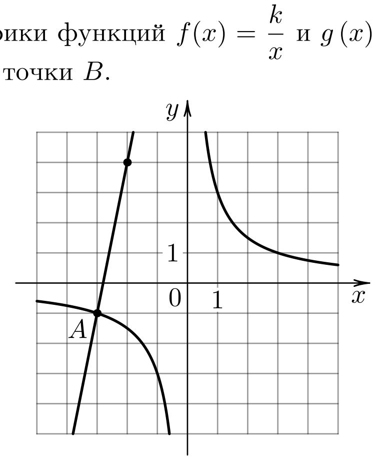
8. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$.



9. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \alpha\rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ выразите в метрах.

10. Моторная лодка прошла по реке против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

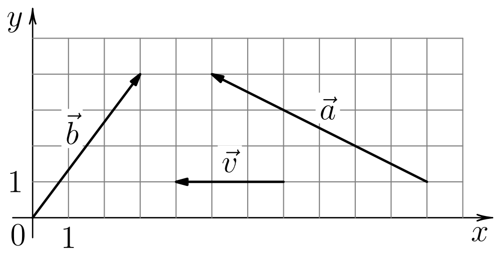


12. Найдите точку максимума функции $y = (x + 4)^2 e^{2-x}$.

Вариант XXII

1. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите площадь этого треугольника.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{v}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}(x, y)$, если известно, что он сонаправлен с вектором $\vec{a} - \vec{v}$, причем $|\vec{c}| = 2 \cdot |\vec{b}|$. В ответе укажите $x \cdot y$.



3. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 17,1 раз, а радиус основания останется прежним?

4. В большой партии насосов в среднем на каждые 2472 исправных приходится 28 неисправных насосов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

5. Опыт состоит в бросании трех монет и подсчета числа выпавших орлов; это число считают результатом опыта. Каково будет среднее арифметическое результатов большой серии опытов, если все 8 комбинаций орлов и решек на трех монетах считать равновероятными?

6. Найдите количество корней уравнения $6 \operatorname{tg} \dfrac{\pi(x+7)}{6} = 2\sqrt{3}$ на отрезке $[-10; 10]$.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{4^{7,8} \cdot 9^{9,8}}{36^{8,8}}$.

8. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

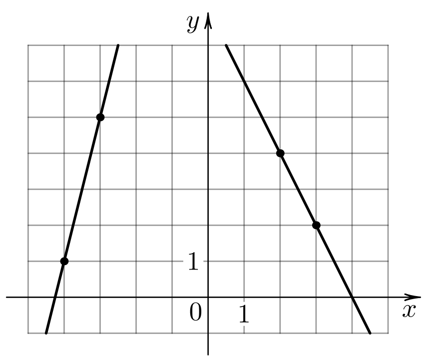
9. Рейтинг интернет-магазинов рассчитывается по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+3)^m}, \quad \text{где} \quad m = \frac{0{,}04K}{r_{\text{пок}} + 0{,}2},$$

$r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 13, их средняя оценка равна 0,84, а оценка экспертов равна 0,24.

10. Смешав 40-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 100 кг чистой воды, получили 24-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 100 кг воды добавили 100 кг 52-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 50-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 40-процентного раствора использовали для получения смеси?

11. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+100x+2503}$.

Вариант XXIII

1. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

2. Дан вектор $\vec{v}(9, 12)$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{u}$, который противоположно направлен с вектором $\vec{v}$. В ответе укажите сумму его координат.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L и M — соответственно середины ребер AA_1, A_1B_1 и A_1D_1. Найдите угол MLK. Ответ дайте в градусах.

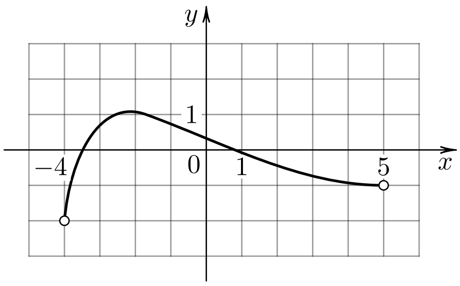
4. Какова вероятность, что случайно выбранное трехзначное число делится на 195? Ответ округлите до тысячных.

5. Бросают две несимметричные монеты — медную и серебряную, причем для каждой из них вероятность выпадения орла равна 0,3. Какова вероятность, что выпадет ровно один орел?

6. Решите уравнение $8x^3 = (x - 8)^3$.

7. Найдите $\dfrac{a}{b}$, если $\dfrac{2a + 5b}{5a + 2b} = 1$.

8. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



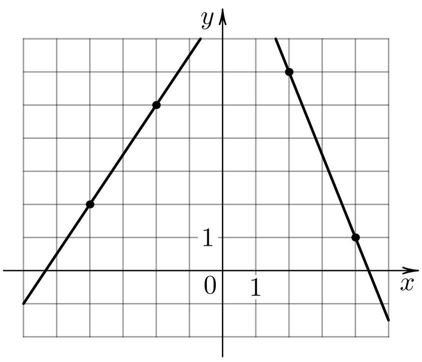
9. Скорость в см/с колеблющегося на пружине груза меняется по закону

$$v(t) = 5 \sin \pi t,$$

где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

10. Андрей при подготовке к ЕГЭ поставил себе задачу — решать каждый день на 5 задач больше, чем в предыдущий. За первый день он решил 7 задач, а за последний 37 задач. Сколько задач он решил всего?

11. На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



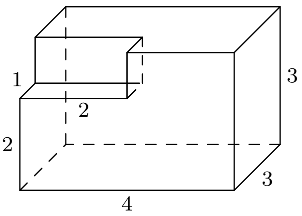
12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{4x} - 5e^{2x} + 11$ на отрезке $[0; 2]$.

Вариант XXIV

1. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 61°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

2. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно 12, причем $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Найдите $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}$.

3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



4. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

5. Симметричную игральную кость бросили четыре раза. Какова вероятность того, что произведение очков — четное число? Результат округлите до тысячных.

6. Решите уравнение $\log_{x-2}100=2$. Если оно имеет два корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Вычислите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)^2}{72+8\sqrt{65}}$.

8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

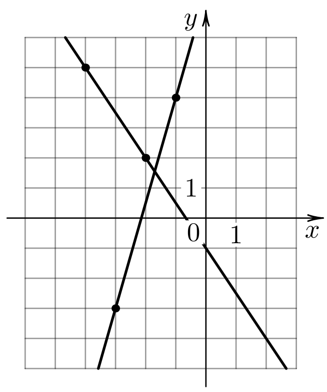
9. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 495 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле

$$v=c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0},$$

где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с.

10. Заказ на изготовление 221 детали первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей изготавливает второй рабочий за час, если известно, что первый за час изготавливает на 4 детали больше?

11. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



12. Найдите наибольшее значение функции $y=7\operatorname{tg}x-7x+5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

Список используемой литературы

Большинство заданий этой книги составлены на основе «Открытого банка задач»:

[1] Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.fipi.ru

[2] Открытый банк математических задач ЕГЭ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://mathege.ru