Задача 1: Существует ли отношение эквивалентности на отрезке, факторпространство по которому гомеоморфно объединению 3 отрезков с общим концом? Строго обоснуйте ответ.

Решение. На отрезке AE выберем точки B, C, D так, чтобы $AB \subset AC \subset AD \subset AE$. Введем такое отображение

$$f : AE \to AE, \qquad \begin{aligned} AB &\mapsto AB \\ BC &\mapsto BC \\ CD &\mapsto BC \\ DE &\mapsto DE \end{aligned}$$

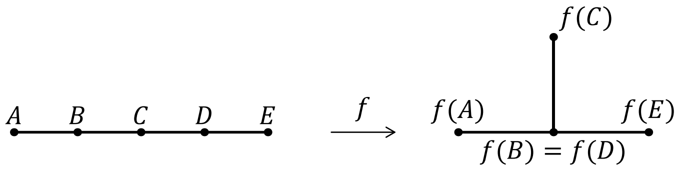

Рис. 1: Отрезок AE и $f(AE)$.

Такое отображение является непрерывной сюръекцией[1]. Отрезок AE является компактом, а $f(AE)$ хаусдорфово. Тогда

$$\frac{AE}{\sim_f} \cong \text{объединение 3 отрезков с общим концом.}$$

Ответ: Да. $\square$

Задача 2: Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ вкладывается в проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ следующим образом: точке из $\mathbb{R}P^1$ с однородными координатами $[x_0 : x_1]$ соответствует точка $[x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2$. Докажите, что дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартной топологией.

Решение. $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_2 \neq 0\}$. Тогда рассмотрим

$$f : \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow R^2, \quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)^{2}.$$

Проверим что оно является сюръективным и инъеквтиным, а следовательно биективным.

(i) *Инъективность.* Пусть $f([x_0 : x_1 : x_2]) = f([\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2])$. Тогда

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{x}_2} = \frac{\lambda\tilde{x}_0}{x_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{\lambda\tilde{x}_1}{x_2}, \qquad \exists\lambda \in \mathbb{R} : \quad \lambda\tilde{x}_2 = x_2.$$

Ну и понятно, что

$$[x_0 : x_1 : x_2] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2].$$

(ii) *Сюръективность.*

$$f^{-1}((a, b)) \ni [a : b : 1].$$

Осталось проверить существование и непрерывность обратного.

Определим отображение

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1, \quad (a, b) \mapsto [a : b : 1].$$
$$(f \circ g)(a, b) = f([a : b : 1]) = (a, b).$$
$$(g \circ f)([a : b : 1]) = g(a, b) = [a : b : 1].$$

Получаем, что f и g обратны друг другу, а также f, g являются непрерывными. Таким образом f – гомеоморфизм пространств $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{R}^2$. $\square$

[1] Прообразами откртых являются либо одно, либо два открытых множества в AE; а объединение двух открытых множеств открыто.
[2] Отображение f корректно определено, так как $x_2 \neq 0$.