8

Contents

Задача 1: Верно ли, что компактное подмножество произвольного топологического пространства обязательно является замкнутым? Докажите или приведите контрпример.

Решение. Приведу два контрпримера.

Пример 1. Пусть X – произвольное непустое множество, тогда

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}.$$

Пусть $A \subsetneq X$, тогда $X \setminus A \notin \mathcal{T}$. Значит A не замкнуто. Из любого его покрытия можно выделить конечное подпокрытие – это просто множество X.

Пример 2. Рассмотрим $\mathbb{F}_2 \coloneqq \{0, 1\}$, введём на нём топологию:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}.$$

Тогда рассмотрим $\{0\} \subset \mathbb{F}_2$.

$$\mathbb{F}_2 \setminus \{0\} = \{1\} \notin \mathcal{T}.$$

Значит $\{0\}$ не замкнуто. Из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие – или множество $\{0\}$, или всё $\mathbb{F}_2$.

Нет. □

Contents

Задача 2: Фундаментальная последовательность (в метрическом пространстве) имеет сходящуюся подпоследовательность тогда и только тогда, когда и вся последовательность сходится. Докажите.

Решение. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальная последовательность, а $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к A. Тогда

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\exists p \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} \rho(x_n, x_{n+p}{}^{1}) < {}^{\epsilon}/_{2} \\ \rho(x_{n+p}, A) < {}^{\epsilon}/_{2} \end{cases} \implies \\ \implies \rho(x_n, A) \leqslant \rho(x_n, x_{n+p}) + \rho(x_{n+p}, A) \leqslant 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{0.1}$$

Пусть фундаментальная последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится. Тогда и подпоследовательность равная самой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится.

□

Задача 3: Рассмотрим карту Москвы. Положим на нее такую же карту, но меньшего масштаба, причем будем считать, что маленькая карта целиком помещается на большой карте. Докажите, что можно так проколоть обе карты тонкой булавкой, чтобы на обеих картах точка прокола соответствовала одной и той же точке Москвы.

Решение. Наши карты является компактными подмножествами $\mathbb{R}^2$, обозначим через M нашу изначальную карту. Существует сжимающее отображение $f: M \to M$, которое состоит из композиции гомотетии H_k с коэффициентом $k < 1$ и осевых симметрий $(\ell_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$[2]

Выберем произвольную точку $x_0 \in M$ и определим $x_1 \coloneqq f(x_0)$, следующие точки определяются аналогично.

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = k \cdot \rho(x_n, x_{n-1}) = k^n \rho(x_1, x_0). \tag{0.2}$$

Тогда последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальная:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n-1}) + \ldots + \rho(x_{m+1}, x_m) \leqslant \\ \leqslant \rho(x_1, x_0)(q^{n-1} + \ldots + q^m) \leqslant \rho(x_1, x_0)\frac{q^m}{1-q} \tag{0.3}$$

[1] Здесь x_{n+p} выбрано так, чтобы x_{n+p} было частью подпоследовательности $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
[2] Конечно же, можно сказать, что таких отражений не больше двух, но это несущественно.

Contents

Тогда в силу полноты $\mathbb{R}^2$ существует предел

$$x^\star \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = T(x^\star). \tag{0.4}$$

Точка $x^\star$ – искомая. $\square$

Задача 4: Пусть X – метрическое пространство, точками которого являются последовательности действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, такие, что $|x_n| \leqslant {}^1/_n$ для всех n, а метрика определяется формулой

$$\rho(x,y)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2.$$

Contents

Здесь x_n, y_n – это члены последовательностей x, y (соответственно) с номером n. Проверьте, что это действительно метрика. Докажите, что пространство X является полным и вполне ограниченным, а следовательно, компактным. Для всякого $\epsilon > 0$ оцените сверху минимальное количество точек в ϵ-сети пространства X.

Contents

Решение. Проверим, что это метрика. Аксиомы *тождества* и *симметричности* очевидны. Осталось проверить лишь *неравенство треугольника.*

$$
\begin{aligned}
&(\rho(x,y)+\rho(z,x))^2 = \rho(x,y)^2+\rho(z,x)^2+2\rho(x,y)\rho(z,x) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-x_n)^2+2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-x_n)^2} \geqslant \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-x_n)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)(z_n-x_n) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\big((x_n-y_n)^2+(z_n-y_n)^2+2(x_n-y_n)(z_n-x_n)\big) = \qquad (0.5)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n+z_n-x_n)^2 = \rho(z,y)^2.
\end{aligned}
$$

Неравенство КБШ

Замечание. Нужно сказать, почему мы можем использовать *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*, ведь оно верно лишь для конечных сумм. Оно верно и в этом случае, так как наши ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-x_n)^2$ сходятся[1] "примерно" как $\sum_{n=1}^{\infty} {}^1/_{n^2}$. Значит неравенство при предельном переходе сохраняется.

Функция $f: x \mapsto x^2$ на неотрицательных числах монотонно возрастает, тогда

$$\rho(x,y)+\rho(z,x) \geqslant \rho(z,y) \qquad \forall x,y,z \in X.$$

□

[1] Пропускаю тривиальное доказательство этого факта.