Задача 1: Существует ли отношение эквивалентности на отрезке, факторпространство по которому гомеоморфно объединению 3 отрезков с общим концом? Строго обоснуйте ответ.

Решение. На отрезке AE выберем точки B, C, D так, чтобы $AB \subset AC \subset AD \subset AE$. Введем такое отображение

$$f : AE \to AE, \quad \begin{aligned} AB &\mapsto AB \\ BC &\mapsto BC \\ CD &\mapsto BC \\ DE &\mapsto DE \end{aligned}$$

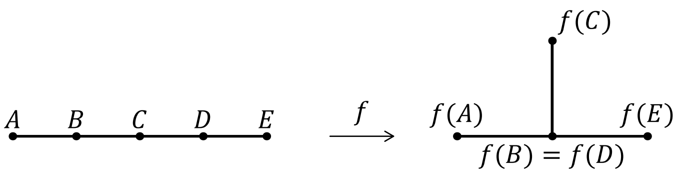

Рис. 1: Отрезок AE и $f(AE)$.

Такое отображение является непрерывной сюръекцией [1]. Отрезок AE является компактом, а $f(AE)$ хаусдорфово. Тогда

$$\frac{AE}{\sim_f} \cong \text{объединение 3 отрезков с общим концом.}$$

Ответ: Да. □

[1] Прообразами открытых являются либо одно, либо два открытых множества в AE; а объединение двух открытых множеств открыто.

Задача 2: Факторпространство топологического пространства по некоторому отношению эквивалентности является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда любые два класса эквивалентности обладают непересекающимися насыщенными открытыми окрестностями. Докажите.

Останется ли данное утверждение верным, если удалить слово "открытыми"?

Напомним, что окрестность подмножества $A \subset X$ топологического пространства X — это такое подмножество $O \subset A$, в котором есть открытое подмножество $U \supset A$, так что $A \subset U \subset O \subset X$.

Решение. $\boxed{\implies}$ Пусть $\frac{X}{\sim}$ хаусдорфово. Тогда докажем, что для любых двух классов эквивалентности, существуют две непересекающиеся, насыщенные открытые окрестности.

По определению хаусдорфовости ${}^{X}/_{\sim}$ для любых $[x_1], [x_2]$ существуют открытые U, V такие, что

$$U \ni [x_1], V \ni [x_2], \quad U \cap V = \emptyset, \quad U, V \in \mathcal{T}_{X/_\sim}.$$

И пусть $\pi\colon X \to {}^{X}/_{\sim}$ есть каноническая проекция на факторпространство. Тогда докажем, что $\pi^{-1}(U)$ и $\pi^{-1}(V)$ – подходящие окрестности.

(i) *Открытость.* Следует из непрерывности π

$$U, V \in \mathcal{T}_{X/_\sim} \implies \pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

(ii) *Пустое пересечение.* Пусть $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \ni x$. Тогда $\pi(x) \in U$ и $\pi(x) \in V$. Получаем противоречие с $U \cap V = \emptyset$.

(iii) *Насыщенность.* Пусть $a \in \pi^{-1}(U)$ и $a \sim b$. Тогда

$$\underbrace{\pi(a)}_{=\pi(b)} \in U \implies \pi^{-1}(U) \ni b.$$

Аналогичное рассуждение проделывается для V.

$\boxed{\impliedby}$ Пусть x_1 и x_2 обладают непересекающимися открытыми насыщенными окрестностями U, V соответственно. Докажем, что $[x_1]$, $[x_2]$ обладают непересекающимися открытыми окрестностями. Докажем, что $\pi(U)$, $\pi(V)$ подходят.

(i) *Открытость.* Следует из определения фактортопологии.

(ii) *Пустое пересечение.* Пусть $x \in \pi(U) \cap \pi(V)$ Тогда $\pi^{-1}(x) \in U \cap V$, что противоречит $U \cap V = \emptyset$.

Таким образом ${}^{X}/_{\sim}$ хаусдорфово, так как $[x_1] \in pi(U)$, $[x_2] \in \pi(V)$.

Утверждение задачи не останется верным. Существует контрпример. □

Задача 3: Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ вкладывается в проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ следующим образом: точке из $\mathbb{R}P^1$ с однородными координатами $[x_0 : x_1]$ соответствует точка $[x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2$. Докажите, что дополнение $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартной топологией.

Решение. $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_2 \neq 0\}$. Тогда рассмотрим

$$f : \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow R^2, \quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)^{1}.$$

Проверим что оно является сюръективным и инъеквтиным, а следовательно биективным.

(i) *Инъективность.* Пусть $f([x_0 : x_1 : x_2]) = f([\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2])$. Тогда

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{x}_2} = \frac{\lambda\tilde{x}_0}{x_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{\lambda\tilde{x}_1}{x_2}, \qquad \exists\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \lambda\tilde{x}_2 = x_2.$$

Ну и понятно, что

$$[x_0 : x_1 : x_2] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2].$$

(ii) *Сюръективность.*

$$f^{-1}((a, b)) \ni [a : b : 1].$$

[1]Отображение f корректно определено, так как $x_2 \neq 0$.

Осталось проверить существование и непрерывность обратного.

Определим отображение

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1, \quad (a,b) \mapsto [a:b:1].$$

$$(f \circ g)(a,b) = f([a:b:1]) = (a,b).$$

$$(g \circ f)([a:b:1]) = g(a,b) = [a:b:1].$$

Получаем, что f и g обратны друг другу, а также f, g являются непрерывными. Таким образом f – гомеоморфизм пространств $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{R}^2$.

$\square$