Содержание

1 Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве. Связь между сходимостью последовательности точек и сходимостью последовательностей их координат. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

Арифметическим n-мерным пространством мы называем декартову степень $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ называются **точками**, а упорядоченный набор чисел (x_i) – **координатами** точки.

Через $\mathbf{V}^n$ обозначим n-мерное **векторное=линейное пространство**, элементы которого задаются упорядоченным набором из n чисел-координат, которые записаны **столбцом**: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Согласно договоренности, координаты точки записываем строкой, а координаты вектора – столбцом. Между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{V}^n$ имеется каноническая биекция $x = (x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, которая ставит в соответствие точке ее **радиус-вектор**.

Определение 9.1.3. Точечно-векторные операции:

1) **разность точек** $y(y_i)$ и $x(x_i)$ – это вектор
$$\overrightarrow{y-x} := (y_i - x_i)^T;$$
2) **откладывание вектора от точки** – это точка
$$x(x_i) + \mathbf{a}(a_i)^T := y(x_i + a_i);$$
3) **расстояние между точками**
$$\rho(x, y) := |\overrightarrow{y-x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \ \boxtimes \qquad (9.1)$$

Определение 9.3.1. Последовательностью точек в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$. $\boxtimes$

Определение 9.3.2. Точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом** последовательности $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^k, x^0) = 0$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. $\boxtimes$

Лемма 9.3.1 (***критерии сходимости***). *Последовательность сходится к точке x^0 только тогда, когда:*

1) *геометрический критерий: в любой окрестности точки x^0 содержатся значения почти всех элементов последовательности, т. е. всех, кроме конечного их количества;*
2) *координатный критерий: $\forall i = 1, \ldots, n \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$.*

Определение 9.2.1 (*двух типов окрестностей*).

1) **Шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество

$$U_\varepsilon(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x^0) < \varepsilon\}.$$

Шаровую ε-окрестность мы будем называть просто «окрестностью».

2) **Проколотой шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon\}. \quad \boxtimes$$

Определение 9.2.2 (*типов точек относительно подмножества*). Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется по отношению к подмножеству X

1) **внутренней**, если x^0 принадлежит X вместе с некоторой окрестностью:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x^0) \subset X;$$

2) **изолированной**, если она принадлежит X, и существует ее проколотая окрестность, не пересекающаяся с X:

$$x^0 \in X \ \wedge \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) : \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X = \emptyset;$$

3) **предельной**, если в любой ее окрестности находятся точки из X, *отличные от* x^0 $\Leftrightarrow$ в любой ее **проколотой** окрестности находятся точки из X:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X \neq \emptyset;$$

4) **граничной**, если в любой ее окрестности находятся как точки из X, так и точки из дополнения X^C:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x^0) \cap X \neq \emptyset \ \wedge U_\varepsilon(x^0) \cap X^C \neq \emptyset. \quad \boxtimes$$

Def x_0 называется точкой прикосновения множества E, если в любой её окресности найдутся точки из множества (не проколотой).

Изолированная точка является точкой прикосновения, но не является предельной, любая предельная является изолированной.

Изолированные точки обязательно принадлежат множеству, граничные могут не принадлежать ($(0, 1) \cup \{2\}$ и концы $(0, 1)$)

Def (эквивалентное) x^0 – предельная точка E, если $\exists x^m \to x^{(0)}, x^m \neq x^{(0)}$.

Лемма 9.2.1 (***о принадлежности предельных и граничных точек***). *Если точка $x^0 \in X$, то:*

1) *она является предельной только в том случае, когда она не является изолированной;*
2) *она является граничной только в том случае, когда она не является внутренней.*

Определение 9.2.3. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

1) **открытым**, если все его точки внутренние;
2) **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. $\boxtimes$

Def (альтернативные определения замкнутого множества) M – замкнуто, если оно содержит все свои граничные точки (точки прикосновения), (дополнение $\overline{M}$ открыто)

Def **Область** – открытое, линейно связное множество.

Def E – **линейно связное множество**, если $\forall x_1, x_2 \in E$ можем соединить кривойБ принадлежащей E

Def **Компакт** – ограниченное, замкнутое множество.

Def E – ограничено, если $\exists U_\varepsilon(0) : E \subset U_\varepsilon(0)$

Лемма 9.2.2 (***о фундаментальных свойствах открытых и замкнутых подмножеств***).

1) *Дополнение к открытому (замкнутому) подмножеству замкнуто (открыто).*
2) *Пустое подмножество $\emptyset$ и всё пространство $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.*
3) *Произвольное объединение (пересечение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*
4) *Любое* ***конечное*** *пересечение (объединение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*

Определение 9.2.4 (***типов подмножеств, порожденных*** X).

1) **Внутренностью** множества X называется подмножество $X^0 \subset X$ всех его внутренних точек.
2) **Границей** ∂X множества X называется совокупность всех его граничных точек.
3) **Замыканием** множества X называется объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ множества с его границей. $\boxtimes$

2 Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Определение 10.1.1. **Функцией нескольких переменных** мы называем отображение, область определения которого принадлежит n-мерному точечному пространству, а образ – числовой прямой:

$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \to \mathbb{R}^1. \boxtimes$$

Определение 10.1.3 (***предела функции по Коши***)**.** Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x^0) \subset Def(f)$ точки x^0. Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y^0)$. $\boxtimes$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_1^0,\ldots,x_n^0)} f(x_1, \ldots, x_n) = y^0.$$

Терминология: предел функции нескольких переменных будем также называть **n-арным**, чтобы отличать его от различных одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 10.1.4. **Последовательностью Гейне** точки x^0 для функции f мы называем последовательность точек $\{x^k\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \subset Def(f)$, которая сходится к точке x^0. $\boxtimes$

Определение 10.1.5 (***предела функции по Гейне***)**.** Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если для *любой* последовательности Гейне $x^k \to x^0$ справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = y^0$. $\boxtimes$

Определение 10.2.1 (***полярной системы координат в точке*** (x_0, y_0)). **Полярным радиусом** $\rho \geq 0$ точки (x, y) называется расстояние от точки (x, y) до точки (x_0, y_0), **полярным углом** φ – угол от положительного направления оси Ox к радиус-вектору $\mathbf{a} = (x - x_0, y - y_0)^T \neq \mathbf{0}$. Формулы перехода таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \varphi, \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} + \pi k + 2\pi m \end{cases},$$

где $x \neq x_0$ (иначе возьмем функцию arcctg), параметр $k = 0, 1$ зависит от координатной четверти и определяется знаками пары чисел $(x - x_0, y - y_0)$, целочисленный параметр $m \in \mathbb{Z}$ – произвольный. Точке $P = (x_0, y_0)$, которую называют **полюсом**, отвечает бесконечное множество пар координат $(0, \varphi)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – произвольное. ⊠

Определение 10.2.2. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0). **Пределом по направлению**, которое задается углом $\varphi_0 = const$, называется предел функции *одной* переменной ρ:

$$\lim_{\rho \to +0} f(x_0 + \rho \cos \varphi_0, y_0 + \rho \sin \varphi_0) = \lim_{\rho \to +0} \widetilde{f}(\rho, \varphi_0). \ \boxtimes$$

Для удобства будем вместо термина «предел» использовать термин **двойной предел**. К сожалению, система обозначений несовершенна, поэтому в каждом конкретном случае нужно определяться, какой предел вы ищете: двойной или по направлению.

Очевидно, что двойной предел "сильнее" предела по направлению:

Лемма 10.2.1. *Если существует двойной предел* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = t_0$, *то предел по любому направлению* φ_0 *существует и равен* t_0.

Определение 10.3.1. Пусть $E \subset Def(f) \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество области определения функции f. Пусть x^0 – *предельная точка* подмножества E. Точка $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом функции f по множеству E** при $x \to x^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x^0) \cap E \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x^0, x \in E} f(x) = y_0$. ⊠

Например, односторонние пределы функции одной переменной или предел по направлению функции нескольких переменных.

Def (Скубачевский) Предел по направлению – предел по множеству E, где E – луч.

Утв $\exists \lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) \Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ существует предел по всем направлениям, и они равны.

Обратное не верно. Пример: парабола, поднятая вверх на 1 для точки (0,0).

Определение 10.5.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется **непрерывным в точке** $x^0 \in X$, если:

1) или x^0 является изолированной точкой подмножества X;
2) или x^0 является предельной точкой подмножества X и

$$\lim_{x \to x^0,\ x \in X} f(x) = f(x^0). \quad \boxtimes$$

Лемма 10.5.1 (***покоординатный критерий непрерывности в точке***)**.** *Отображение f непрерывно в точке x^0 только тогда, когда каждая координатная функция $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ (см. (10.1)) непрерывна в x^0.*

Понятие предела по направлению порождает понятие непрерывности по выделенной переменной.

Определение 10.5.2. Отображение f называется **непрерывным по переменной** x_i в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$, если вектор-функция одной переменной

$$\varphi(x_i) := f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

непрерывна в точке x_i^0. $\boxtimes$

Терминология. Если точка x_0 является внутренней для множества X, то непрерывность по определению 10.5.1 еще называют **непрерывностью по совокупности переменных** в точке x_0.

Лемма 10.5.2 (***необходимое условие непрерывности***)**.** *Если отображение f непрерывно по совокупности переменных в точке x^0, то оно непрерывно по каждой переменной в отдельности. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.*

Лемма 10.5.3 (***о непрерывности операций***). *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны в точке x^0. Тогда:*

1) *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна в точке x^0;*
2) *если $m = 1$ (т. е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ и их частное $f(x)/g(x)$ ($g(x^0) \neq 0$) непрерывны в точке x^0.*

Лемма 10.5.4 (***о непрерывности в точке суперпозиции отображений***). *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке x^0, а отображение $g : \mathbb{R}^m \supset U_\delta(y^0) \to \mathbb{R}^p$ непрерывно в точке $y^0 = f(x^0)$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f$, заведомо определенная в некоторой окрестности точки x^0, непрерывна в этой точке.*

Определение 10.6.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. $\boxtimes$

Ниже даются пять базовых утверждения, которые справедливы для отображений пространств произвольной размерности.

Теорема 10.6.1 (***о непрерывности операций на подмножестве***). *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны на X. Тогда:*

1) *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна на X;*
2) *если $m = 1$ (т. е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ непрерывно на X, и при дополнительном условии $\forall x \in X \hookrightarrow g(x) \neq 0$ их частное $f(x)/g(x)$ также непрерывно на X.*

Теорема 10.6.2 (***о непрерывности на подмножестве суперпозиции отображений***). *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на подмножестве X, отображение $g : \mathbb{R}^m \supset Y \to \mathbb{R}^p$ непрерывно на подмножестве Y, и $f(X) \subset Y$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f : X \to \to \mathbb{R}^p$ непрерывна на X.*

Теорема 10.6.3 (***критерий непрерывности на множестве***). *Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$, область определения которого открытое подмножество, непрерывно на X только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества из $\mathbb{R}^m$ открыт в $\mathbb{R}^n$:*

$$f \text{ непрерывно на } X = X^0 \subset \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow$$
$$\forall\, O = O^0 \subset \mathbb{R}^m \;\hookrightarrow\; f^{-1}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

1. Замена переменной
2. Интегрирование по частям
3. Рациональные функции
4. Метод Остроградского
5. Иррациональности
6. Дифференциальный бином
7. Подстановки Эйлера
8. Тригонометрия