Содержание

1 Последовательности, множества и точки.

Арифметическим n-мерным пространством мы называем декартову степень $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ называются **точками**, а упорядоченный набор чисел (x_i) – **координатами** точки.

Через $\mathbf{V}^n$ обозначим n-мерное **векторное=линейное пространство**, элементы которого задаются упорядоченным набором из n чисел-координат, которые записаны **столбцом**: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Согласно договоренности, координаты точки записываем строкой, а координаты вектора – столбцом. Между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{V}^n$ имеется каноническая биекция $x = (x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, которая ставит в соответствие точке ее **радиус-вектор**.

Определение 9.1.3. Точечно-векторные операции:

1) **разность точек** $y(y_i)$ и $x(x_i)$ – это вектор
$$\overrightarrow{y-x} := (y_i - x_i)^T;$$

2) **откладывание вектора от точки** – это точка
$$x(x_i) + \mathbf{a}(a_i)^T := y(x_i + a_i);$$

3) **расстояние между точками**
$$\rho(x, y) := |\overrightarrow{y-x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \ \boxtimes \qquad (9.1)$$

Определение 9.2.1 (***двух типов окрестностей***).

1) **Шаровой ε-окрестностью** $(\varepsilon > 0)$ точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$U_\varepsilon(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x^0) < \varepsilon\}.$$
Шаровую ε-окрестность мы будем называть просто «окрестностью».

2) **Проколотой шаровой ε-окрестностью** $(\varepsilon > 0)$ точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon\}. \quad \boxtimes$$

1.1 Предел последовательности точек в n-мерном пространстве.

Определение 9.3.1. Последовательностью точек в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$. $\boxtimes$

Определение 9.3.2. Точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом** последовательности $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^k, x^0) = 0$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. $\boxtimes$

1.2 Связь между сходимостью последовательности точек и сходимостью последовательностей их координат.

Лемма 9.3.1 (***критерии сходимости***). *Последовательность сходится к точке x^0 только тогда, когда:*

1) *геометрический критерий: в любой окрестности точки x^0 содержатся значения почти всех элементов последовательности, т. е. всех, кроме конечного их количества;*
2) *координатный критерий: $\forall i = 1, \ldots, n \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$.*

1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Определение 9.2.2 (***типов точек относительно подмножества***). Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется по отношению к подмножеству X

1) **внутренней**, если x^0 принадлежит X вместе с некоторой окрестностью:
$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x^0) \subset X;$$
2) **изолированной**, если она принадлежит X, и существует ее проколотая окрестность, не пересекающаяся с X:
$$x^0 \in X \ \wedge \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) : \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X = \emptyset;$$
3) **предельной**, если в любой ее окрестности находятся точки из X, *отличные от* x^0 $\Leftrightarrow$ в любой ее **проколотой** окрестности находятся точки из X:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x^0) \cap X \neq \emptyset;$$
4) **граничной**, если в любой ее окрестности находятся как точки из X, так и точки из дополнения X^C:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x^0) \cap X \neq \emptyset \ \wedge U_\varepsilon(x^0) \cap X^C \neq \emptyset. \quad \boxtimes$$

Def x_0 называется точкой прикосновения множества E, если в любой её окресности найдутся точки из множества (не проколотой).

Изолированная точка является точкой прикосновения, но не является предельной, любая предельная является изолированной.

Изолированные точки обязательно принадлежат множеству, граничные могут не принадлежать ($(0, 1) \cup \{2\}$ и концы $(0, 1)$)

Лемма 9.2.1 (***о принадлежности предельных и граничных точек***). *Если точка $x^0 \in X$, то:*

1) *она является предельной только в том случае, когда она не является изолированной;*
2) *она является граничной только в том случае, когда она не является внутренней.*

Def (эквивалентное) x^0 – предельная точка E, если $\exists x^m \to x^{(0)}, x^m \neq x^{(0)}$.

1.4 Открытые и замкнутые множества.

Определение 9.2.3. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

1) **открытым**, если все его точки внутренние;
2) **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. $\boxtimes$

Def (альтернативные определения замкнутого множества) M – замкнуто, если оно содержит все свои граничные точки (точки прикосновения), (дополнение $\overline{M}$ открыто)

Def **Область** – открытое, линейно связное множество.

Def E – **линейно связное множество**, если $\forall x_1, x_2 \in E$ можем соединить кривойБ принадлежащей E

Def **Компакт** – ограниченное, замкнутое множество.

Def E – ограничено, если $\exists U_\varepsilon(0) : E \subset U_\varepsilon(0)$

Лемма 9.2.2 (***о фундаментальных свойствах открытых и замкнутых подмножеств***).

1) *Дополнение к открытому (замкнутому) подмножеству замкнуто (открыто).*
2) *Пустое подмножество $\emptyset$ и всё пространство $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.*
3) *Произвольное объединение (пересечение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*
4) *Любое* ***конечное*** *пересечение (объединение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*

1.5 Внутренность, замыкание и граница множества.

Определение 9.2.4 (***типов подмножеств, порожденных*** X).

1) **Внутренностью** множества X называется подмножество $X^0 \subset X$ всех его внутренних точек.
2) **Границей** ∂X множества X называется совокупность всех его граничных точек.
3) **Замыканием** множества X называется объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ множества с его границей. $\boxtimes$

Summary

Внутренняя точка – лежит в множестве вместе с окрестностью

Изолированная точка – существует проколотая окрестность, не содержащая точек множества

Предельная точка – точка, в любой проколотой окрестности которой есть точки из множества или есть последовательность Гейне, принадлежащая множеству

Граничная точка – любая окрестность содержит точки из множества и дополнения.

Точка прикосновения – в любой окрестности (не проколотой) есть точки из множества.

Открытое множество – все его точки внутренние.

Замкнутое множество – содержит все предельные точки, дополнение открыто, сожержит все граничные точки, точки прикосновения.

Область – открытое множество, точки которого можно соединить кривой (не обязательно гладкой), принадлежащей множеству.

Компакт – замкнутое множество, принадлежащее некоторой окрестности нуля.

Th Пересечение конечного количества открытых множеств открыто.

Th Объединение любого количества открытых множеств открыто.

Th Аналогично с замкнутыми множествами.

Внутренность – множество всех внутренних точек.

Граница – множество всех граничных точек.

Замыкание – объединение множества с его границей.

2 Пределы, непрерывность функций нескольких переменных.

Определение 10.1.1. Функцией нескольких переменных мы называем отображение, область определения которого принадлежит n-мерному точечному пространству, а образ – числовой прямой:

$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \ \to \ \mathbb{R}^1. \boxtimes$$

2.1 Предел функции нескольких переменных.

Определение 10.1.3 (***предела функции по Коши***). Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x^0) \subset Def(f)$ точки x^0. Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y^0)$. $\boxtimes$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_1^0,\ldots,x_n^0)} f(x_1,\ldots,x_n) = y^0.$$

Терминология: предел функции нескольких переменных будем также называть n-**арным**, чтобы отличать его от различных одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 10.1.4. Последовательностью Гейне точки x^0 для функции f мы называем последовательность точек $\{x^k\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \subset Def(f)$, которая сходится к точке x^0. $\boxtimes$

Определение 10.1.5 (***предела функции по Гейне***). Точка $y^0 \in \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если для *любой* последовательности Гейне $x^k \to x^0$ справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = y^0$. $\boxtimes$

Def **Повторный предел** – сначала берём предел по одной переменной, а потом по второй, рассматривая предел по первой как функцию.

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = \emptyset$$

title

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

Определение 10.2.1 (***полярной системы координат в точке*** (x_0, y_0)**). Полярным радиусом** $\rho \geq 0$ точки (x, y) называется расстояние от точки (x, y) до точки (x_0, y_0), **полярным углом** φ – угол от положительного направления оси Ox к радиус-вектору $\mathbf{a} = (x - x_0, y - y_0)^T \neq \mathbf{0}$. Формулы перехода таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\varphi, \\ y = y_0 + \rho\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0} + \pi k + 2\pi m \end{cases},$$

где $x \neq x_0$ (иначе возьмем функцию arcctg), параметр $k = 0, 1$ зависит от координатной четверти и определяется знаками пары чисел $(x - x_0, y - y_0)$, целочисленный параметр $m \in \mathbb{Z}$ – произвольный. Точке $P = (x_0, y_0)$, которую называют **полюсом**, отвечает бесконечное множество пар координат $(0, \varphi)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – произвольное. $\boxtimes$

2.2 Предел по направлению

Определение 10.2.2. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0). **Пределом по направлению**, которое задается углом $\varphi_0 = const$, называется предел функции *одной* переменной ρ:

$$\lim_{\rho \to +0} f(x_0 + \rho \cos \varphi_0, y_0 + \rho \sin \varphi_0) = \lim_{\rho \to +0} \widetilde{f}(\rho, \varphi_0). \quad \boxtimes$$

Для удобства будем вместо термина «предел» использовать термин **двойной предел**. К сожалению, система обозначений несовершенна, поэтому в каждом конкретном случае нужно определяться, какой предел вы ищете: двойной или по направлению.

Очевидно, что двойной предел "сильнее" предела по направлению:

Лемма 10.2.1. *Если существует двойной предел* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = t_0$*, то предел по любому направлению* φ_0 *существует и равен* t_0.

2.3 Предел функции по множеству.

Определение 10.3.1. Пусть $E \subset Def(f) \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество области определения функции f. Пусть x^0 – *предельная точка* подмножества E. Точка $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом функции f по множеству E** при $x \to x^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x^0) \cap E \;\; \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x^0, x \in E} f(x) = y_0$. ⊠

Например, односторонние пределы функции одной переменной или предел по направлению функции нескольких переменных.

Def (Скубачевский) Предел по направлению – предел по множеству E, где E – луч.

Утв $\exists \lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) \Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ существует предел по всем направлениям, и они равны.

Обратное не верно. Пример: парабола, поднятая вверх на 1 для точки (0,0).

2.4 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Определение 10.5.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется **непрерывным в точке** $x^0 \in X$, если:

1) или x^0 является изолированной точкой подмножества X;
2) или x^0 является предельной точкой подмножества X и

$$\lim_{x \to x^0,\ x \in X} f(x) = f(x^0). \quad \boxtimes$$

Определение 10.6.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. $\boxtimes$

Ниже даются пять базовых утверждения, которые справедливы для отображений пространств произвольной размерности.

Пример: Исследовать $f(x, y)$ на непрерывность в точке (0,0).

$$f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

По теореме о трёх милиционерах:

$$0 \le |f(x, y)| = \left| \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{2\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\rho} \right| \le 2\rho \to 0$$

Второй милиционер не должен зависеть от φ!

2.5 Непрерывность сложной функции

Лемма 10.5.4 (***о непрерывности в точке суперпозиции отображений***)**.** *Если отображение* $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно в точке* x^0, *а отображение* $g : \mathbb{R}^m \supset U_\delta(y^0) \to \mathbb{R}^p$ *непрерывно в точке* $y^0 = f(x^0)$, *то суперпозиция отображений* $h = g \circ f$, *заведомо определенная в некоторой окрестности точки* x^0, *непрерывна в этой точке.*

2.6 Свойства функций, непрерывных на компакте – ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность.

2.7 Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

2.8 Не вошло в программу экзамена.

2.8.1 Повторный предел

Опр $f : \Pi_\varepsilon(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$. Π – Декартово произведение окрестностей x_0 и y_0.
Пусть $\forall y \in \overset{\circ}{U}(y_0) \hookrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y) \in \mathbb{R}$
Пусть $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = u_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда говорят, что существует повторный предел:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = u_0$$

.

2.9 Замечания и примеры.

2.9.1 Достаточное условие существования двойного предела.

Лемма

$$\exists\ F(\rho) : |\hat{f}(\rho, \varphi) - u_0| \le F(\rho)\ \wedge\ \lim_{\rho \to 0} F(\rho) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = u_0$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall \rho \in (0, \delta) \hookrightarrow F(\rho) < \varepsilon \Rightarrow |\hat{f}(\rho, \varphi) - u_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x, y) - u_0| < \varepsilon$$

при $\rho((x, y), (0, 0)) \in (0, \delta)$. □

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2},\ (x, y) \ne (0, 0) \\ 0,\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Если пытаться подставлять предел по направлению, получается сложно (нужно придумать ограничение сверху), значит скорее всего предела нет. Можно взять направления $y = x$ и $y = x^2$, получатся разные пределы.

3 Производные функций нескольких переменных.

3.1 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал.

Определение 11.1.1 (***дифференцируемости***).

1) Функция называется **дифференцируемой** в точке x^0, если существует такая **матрица-строка** $A = (1 \times n) = (a_1, \ldots, a_n)$, что

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot \Delta\mathbf{x} + o(|\Delta\mathbf{x}|) =$$

$$= f(x^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) + o(|\Delta\mathbf{x}|) \text{ при } x \to x^0, \quad (11.1)$$

где $o(|\Delta\mathbf{x}|)$ – некоторая функция $\varphi(\Delta\mathbf{x})$, для которой $\lim\limits_{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\varphi(\Delta\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|} = 0$.

2) Матрица-строка $A = (a_1, \ldots, a_n)$ называется **производной** функции f в точке x^0.

3) Вектор $\mathbf{grad} f(x^0) := (a_1, \ldots, a_n)^T$ называется **градиентом** функции f в точке x^0.

4) **Дифференциалом** функции f в точке x^0 называется функция, которая линейна относительно дифференциала аргумента $d\mathbf{x}$, т. е. *линейный функционал*, задаваемый матрицей-строкой A:

$$df(x^0) : \ \mathbf{V}^n \to \mathbb{R},$$

$$df(x^0, d\mathbf{x}) := A \cdot d\mathbf{x} = a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0). \boxtimes$$

Обозначим скалярное произведение скобкой: $\mathbf{ab} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Очевидна

3.2 Частные производные функции нескольких переменных.

Определение 11.2.2. **Частной производной** функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется производная функции *одной* переменной $\varphi(x_i) := f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ в точке x_i^0, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x^0) := \varphi'(x_i^0) =$$

$$= \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{x_i - x_i^0}. \boxtimes$$

Определение 11.2.1. **Производной** функции f в точке x^0 **по направлению $\mathbf{e}$** называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x^0) := \lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + t\mathbf{e}) - f(x^0)}{t}. \boxtimes$$

3.3 Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

Лемма 11.1.2 (***первое необходимое условие дифференцируемости***). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.*

Лемма 11.2.1 (***второе необходимое условие дифференцируемости***). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то у нее в этой точке существует производная по любому направлению, равная проекции градиента на выбранное направление:*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x^0) = (\boldsymbol{grad} f(x^0), \boldsymbol{e}).$$

Лемма 11.2.3 (***третье необходимое условие дифференцируемости***). *Если функция f дифференцируема в точке x^0, то у нее в этой точке существуют все частные производные, которые совпадают с соответствующими координатами градиента:*

$$\boldsymbol{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)^T. \tag{11.4}$$

Теорема 11.2.1 (***критерий дифференцируемости***). *Функция $f : U_\delta(x^0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x^0 только тогда, когда существуют все частные производные $(\partial f/\partial x_i)(x^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, а разность $f(x) - f(x^0) - \sum_{i=1}^n (\partial f/\partial x_i)(x^0)(x_i^0 - x_i) = o(|\Delta \boldsymbol{x}|)$ при $|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0$.*

3.4 Дифференцируемость сложной функции.

3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно заменных.

3.6 Градиент и производная по направлению.

3.7 Замечания и примеры

3.7.1 Треугольник диф, сущ чп, непр

1. f – дифференцируема $\Rightarrow$ f имеет частные производные.

2. f – дифференцируема $\Rightarrow$ f непрерывна.

Других логических соотношений между этими тремя фактами нет.

Контрпример 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

У неё есть частные производные и она непрерывна.

Из определения дифференцируемости:

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin 2\varphi \nrightarrow 0, \rho \to 0;$$

Значит не дифференцируема.

4 Частные производные высших порядков, формула Тейлора.

4.1 Частные производные высших порядков.

4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования.

4.3 Дифференциалы высших порядков.

4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

5 Жордан?

6 Лебег?

7 Определённые интегралы.

7.1 Свойства сумм Дарбу

7.2 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.

7.3 Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрируемость неравенств, теорема о среднем.

7.4 Свойства интеграла с переменным верхним пределом – непрерывность, дифференцируемость.

7.5 Формула Ньютона-Лейбница

7.6 Замена переменных и интегрирование по частям в определённом интеграле.

8 Неопределённые интегралы

- **Замена переменной**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{vmatrix} t = e^x - 1 \\ x = \ln(t+1) \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} = \begin{vmatrix} u = \sqrt{t} \\ t = u^2 \end{vmatrix} = \int \frac{2udu}{u(u^2+1)}$$

- **Интегрирование по частям**

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

- **Рациональные функции**

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

1. $\deg P \geq \deg Q \Rightarrow$ выделить целую часть
2. Разложтить знаменатель на неприводимые множители
3. Представить P/Q в виде суммы
4. Найти неопределённые коэффициенты
5. Проинтегрировать каждое слагаемое

- **Метод Остроградского**

$$\int \frac{P}{Q}dx = \frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2}dx$$

Q_2 произведение всех неприводимых множителей Q, $Q_1 = Q/Q_2$

$$\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Дальше дифференцируем и находим коэффициенты.

- **Иррациональности**

1. $R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = P(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)/Q(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/1_2}, \ldots\right)dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t^N = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ N = \text{НОК}(q_1, q_2, \ldots) \end{vmatrix} = \ldots$$

2. Дифференциальный бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

(a) p – целое $\Rightarrow x = t^N,\ N = \text{НОК}(\text{зн}(m), \text{зн}(n))$

(b) $(m+1)/n$ – целое $\Rightarrow ax^n + b = t^s,\ s = \text{зн}(p)$

(c) $(m+1)/n + p$ – целое $\Rightarrow a + bx^{-n} = t^s,\ s = \text{зн}(p)$

(d) В остальных случаях интеграл не берётся.

3. Подстановки Эйлера

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \pm\sqrt{a}x \pm t,\ a > 0 \\ \pm xt \pm \sqrt{c},\ c > 0 \\ (x - x_{1,2})t \end{cases}$$

4. $P(x, \sqrt{p})/Q(x, \sqrt{p})$

$$\frac{P(x, \sqrt{p})}{Q(x, \sqrt{p})} = R_1(x) + R_2(x)\frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\int \frac{\widetilde{p}(x)}{\sqrt{p}} dx = \widetilde{Q}(x)\sqrt{p} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{p}} dx$$

- **Тригонометрия**

1. $\int(\sin^n x \cdot \cos^m x) dx = |m\text{–нечёт}| = \int(\sin^n x \cdot \cos^{2k} x) d(\sin x)$

2. $$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx, \quad P, Q\text{– однородные},\ \deg Q = \deg P + 2$$

   Поделить обе части на $\cos^2 x$, прератив в тангенсы.

3. $\deg Q - \deg P = 2k \Rightarrow$ домножить на $(\cos^2 x + \sin^2 x)$

4. Сделать степени чётными, увеличив угол в два раза.

$$\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx = \begin{vmatrix} x = 2t \\ u = \operatorname{tg} t \\ u = \operatorname{tg}(x/2) \end{vmatrix} = \int \frac{1 - \dfrac{2u}{1+u^2} + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}}{1 + \dfrac{2u}{1+u^2} - \dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2}$$