Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве. Связь между сходимостью последовательности точек и сходимостью последовательностей их координат. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

Арифметическим n-мерным пространством мы называем декартову степень $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ называются **точками**, а упорядоченный набор чисел (x_i) – **координатами** точки.

Через $\mathbf{V}^n$ обозначим n-мерное **векторное=линейное пространство**, элементы которого задаются упорядоченным набором из n чисел-координат, которые записаны **столбцом**: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Согласно договоренности, координаты точки записываем строкой, а координаты вектора – столбцом. Между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{V}^n$ имеется каноническая биекция $x = (x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, которая ставит в соответствие точке ее **радиус-вектор**.

Определение 9.1.3. Точечно-векторные операции:

1) **разность точек** $y(y_i)$ и $x(x_i)$ – это вектор
$$\overrightarrow{y-x} := (y_i - x_i)^T;$$
2) **откладывание вектора от точки** – это точка
$$x(x_i) + \mathbf{a}(a_i)^T := y(x_i + a_i);$$
3) **расстояние между точками**
$$\rho(x, y) := |\overrightarrow{y-x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \ \boxtimes \qquad (9.1)$$

Определение 9.3.1. Последовательностью точек в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$. $\boxtimes$

Определение 9.3.2. Точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом** последовательности $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^k, x^0) = 0$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. $\boxtimes$

Лемма 9.3.1 (*критерии сходимости*). *Последовательность сходится к точке x^0 только тогда, когда:*

1) *геометрический критерий: в любой окрестности точки x^0 содержатся значения почти всех элементов последовательности, т. е. всех, кроме конечного их количества;*
2) *координатный критерий: $\forall i = 1, \ldots, n \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$.*

Определение 9.2.1 (***двух типов окрестностей***).

1) **Шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$U_\varepsilon(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x^0) < \varepsilon\}.$$
Шаровую ε-окрестность мы будем называть просто «окрестностью».

2) **Проколотой шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon\}. \quad \boxtimes$$

Определение 9.2.2 (***типов точек относительно подмножества***). Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется по отношению к подмножеству X

1) **внутренней**, если x^0 принадлежит X вместе с некоторой окрестностью:
$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x^0) \subset X;$$

2) **изолированной**, если она принадлежит X, и существует ее проколотая окрестность, не пересекающаяся с X:
$$x^0 \in X \ \wedge \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^0) : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^0) \cap X = \emptyset;$$

3) **предельной**, если в любой ее окрестности находятся точки из X, *отличные от* x^0 $\Leftrightarrow$ в любой ее **проколотой** окрестности находятся точки из X:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^0) \cap X \neq \emptyset;$$

4) **граничной**, если в любой ее окрестности находятся как точки из X, так и точки из дополнения X^C:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x^0) \cap X \neq \emptyset \ \wedge U_\varepsilon(x^0) \cap X^C \neq \emptyset. \quad \boxtimes$$

Изолированные точки обязательно принадлежат множеству, граничные могут не принадлежать ($(0,1) \cup \{2\}$ и концы $(0,1)$)

Лемма 9.2.1 (***о принадлежности предельных и граничных точек***). *Если точка $x^0 \in X$, то:*

1) она является предельной только в том случае, когда она не является изолированной;

2) она является граничной только в том случае, когда она не является внутренней.

Опр x_0 называется точкой прикосновения множества E, если в любой её окресности найдутся точки из множества (не проколотой).

Изолированная точка является точкой прикосновения, но не является предельной, любая предельная является изолированной.

Опр (эквивалентное) x^0 – предельная точка E, если $\exists x^m \to x^{(0)}, x^m \neq x^{(0)}$.

Определение 9.2.3. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

1) **открытым**, если все его точки внутренние;
2) **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. ⊠

Опр Область – открытое, линейно связное множество.

Опр E – линейно связное множество, если $\forall x_1, x_2 \in E$ можем соединить кривойБ принадлежащей E

Опр Компакт – ограниченное, замкнутое множество.

Опр E – ограничено, если $\exists U_\varepsilon(0) : E \subset U_\varepsilon(0)$

Лемма 9.2.2 (*о фундаментальных свойствах открытых и замкнутых подмножеств*).

1) *Дополнение к открытому (замкнутому) подмножеству замкнуто (открыто).*
2) *Пустое подмножество $\emptyset$ и всё пространство $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.*
3) *Произвольное объединение (пересечение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*
4) *Любое* ***конечное*** *пересечение (объединение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*

Определение 9.2.4 (*типов подмножеств, порожденных X*).

1) **Внутренностью** множества X называется подмножество $X^0 \subset X$ всех его внутренних точек.
2) **Границей** ∂X множества X называется совокупность всех его граничных точек.
3) **Замыканием** множества X называется объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ множества с его границей. ⊠

Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Определение 10.1.1. Функцией нескольких переменных мы называем отображение, область определения которого принадлежит n-мерному точечному пространству, а образ – числовой прямой:

$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \ \rightarrow \ \mathbb{R}^1. \boxtimes$$

Определение 10.1.3 (***предела функции по Коши***). Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x^0) \subset Def(f)$ точки x^0. Точка $y^0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y^0)$. $\boxtimes$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_1^0,\ldots,x_n^0)} f(x_1, \ldots, x_n) = y^0.$$

Терминология: предел функции нескольких переменных будем также называть n-**арным**, чтобы отличать его от различных одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 10.1.4. Последовательностью Гейне точки x^0 для функции f мы называем последовательность точек $\{x^k\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(x^0) \subset Def(f)$, которая сходится к точке x^0. $\boxtimes$

Определение 10.1.5 (***предела функции по Гейне***). Точка $y^0 \in$ $\in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x^0$, если для *любой* последовательности Гейне $x^k \to x^0$ справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = y^0$. $\boxtimes$

Определение 10.2.1 (***полярной системы координат в точке*** (x_0, y_0)). **Полярным радиусом** $\rho \geq 0$ точки (x, y) называется расстояние от точки (x, y) до точки (x_0, y_0), **полярным углом** φ – угол от положительного направления оси Ox к радиус-вектору $\mathbf{a} = (x - x_0, y - y_0)^T \neq \mathbf{0}$. Формулы перехода таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \varphi, \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} + \pi k + 2\pi m \end{cases},$$

где $x \neq x_0$ (иначе возьмем функцию arcctg), параметр $k = 0, 1$ зависит от координатной четверти и определяется знаками пары чисел $(x - x_0, y - y_0)$, целочисленный параметр $m \in \mathbb{Z}$ – произвольный. Точке $P = (x_0, y_0)$, которую называют **полюсом**, отвечает бесконечное множество пар координат $(0, \varphi)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – произвольное. $\boxtimes$

Определение 10.2.2. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0). **Пределом по направлению**, которое задается углом $\varphi_0 = const$, называется предел функции *одной* переменной ρ:

$$\lim_{\rho \to +0} f(x_0 + \rho \cos \varphi_0, y_0 + \rho \sin \varphi_0) = \lim_{\rho \to +0} \widetilde{f}(\rho, \varphi_0). \ \boxtimes$$

Для удобства будем вместо термина «предел» использовать термин **двойной предел**. К сожалению, система обозначений несовершенна, поэтому в каждом конкретном случае нужно определяться, какой предел вы ищете: двойной или по направлению.

Очевидно, что двойной предел "сильнее" предела по направлению:

Лемма 10.2.1. *Если существует двойной предел* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = t_0$*, то предел по любому направлению* φ_0 *существует и равен* t_0*.*

Определение 10.3.1. Пусть $E \subset Def(f) \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество области определения функции f. Пусть x^0 – *предельная точка* подмножества E. Точка $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом функции f по множеству E** при $x \to x^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x^0) \cap E \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x^0, x \in E} f(x) = y_0$. $\boxtimes$

Например, односторонние пределы функции одной переменной или предел по направлению функции нескольких переменных.

Определение 10.5.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется **непрерывным в точке** $x^0 \in X$, если:

1) или x^0 является изолированной точкой подмножества X;

2) или x^0 является предельной точкой подмножества X и

$$\lim_{x \to x^0,\ x \in X} f(x) = f(x^0). \quad \boxtimes$$

Лемма 10.5.1 (***покоординатный критерий непрерывности в точке***). *Отображение f непрерывно в точке x^0 только тогда, когда каждая координатная функция $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ (см. (10.1)) непрерывна в x^0.*

Понятие предела по направлению порождает понятие непрерывности по выделенной переменной.

Определение 10.5.2. Отображение f называется **непрерывным по переменной** x_i в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$, если вектор-функция одной переменной

$$\varphi(x_i) := f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

непрерывна в точке x_i^0. $\boxtimes$

Терминология. Если точка x_0 является внутренней для множества X, то непрерывность по определению 10.5.1 еще называют **непрерывностью по совокупности переменных** в точке x_0.

Лемма 10.5.2 (***необходимое условие непрерывности***). *Если отображение f непрерывно по совокупности переменных в точке x^0, то оно непрерывно по каждой переменной в отдельности. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.*

Лемма 10.5.3 (***о непрерывности операций***). *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны в точке x^0. Тогда:*

1) их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна в точке x^0;

2) если $m = 1$ (т. е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ и их частное $f(x)/g(x)$ $(g(x^0) \neq 0)$ непрерывны в точке x^0.

Лемма 10.5.4 (***о непрерывности в точке суперпозиции отображений***). *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке x^0, а отображение $g : \mathbb{R}^m \supset U_\delta(y^0) \to \mathbb{R}^p$ непрерывно в точке $y^0 = f(x^0)$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f$, заведомо определенная в некоторой окрестности точки x^0, непрерывна в этой точке.*

Определение 10.6.1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. $\boxtimes$

Ниже даются пять базовых утверждения, которые справедливы для отображений пространств произвольной размерности.

Теорема 10.6.1 (***о непрерывности операций на подмножестве***). *Пусть даны два отображения f, g с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\boldsymbol{V}^m$. Пусть эти отображения непрерывны на X. Тогда:*

1) *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также непрерывна на X;*
2) *если $m = 1$ (т. е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ непрерывно на X, и при дополнительном условии $\forall x \in X \hookrightarrow g(x) \neq 0$ их частное $f(x)/g(x)$ также непрерывно на X.*

Теорема 10.6.2 (***о непрерывности на подмножестве суперпозиции отображений***). *Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на подмножестве X, отображение $g : \mathbb{R}^m \supset Y \to \mathbb{R}^p$ непрерывно на подмножестве Y, и $f(X) \subset Y$, то суперпозиция отображений $h = g \circ f : X \to \to \mathbb{R}^p$ непрерывна на X.*

Теорема 10.6.3 (***критерий непрерывности на множестве***). *Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$, область определения которого открытое подмножество, непрерывно на X только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества из $\mathbb{R}^m$ открыт в $\mathbb{R}^n$:*

$$f \text{ непрерывно на } X = X^0 \subset \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow$$

$$\forall\, O = O^0 \subset \mathbb{R}^m \;\hookrightarrow\; f^{-1}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$