

Физический маятник, математический маятник, маятник Капицы. Симуляция движения

Введение

Физическим маятником называется твёрдое тело, которое может качаться вокруг неподвижной оси. Точка A пересечения её с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется точкой подвеса маятника. Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения от положения равновесия θ .

Уравнение моментов для физического маятника относительно точки подвеса для движения под действием силы тяжести:

$$I\ddot{\theta} = -mgr \sin \theta \quad (1)$$

где I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса, r – расстояние от точки подвеса до центра масс.

Разложив $\sin \theta$ по формуле Тейлора до $o(\theta^3)$, можно привести дифференциальное уравнение к стандартному виду (гармонические колебания):

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{I} \theta = 0 \quad (2)$$

Оно имеет решение:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t) \quad (3)$$

где $\omega = \sqrt{mgr/I}$

Период таких колебаний находится по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}} \quad (4)$$

Предельным случаем физического маятника является математический маятник. Так называется маятник, вся масса которого сосредоточена в центре масс. В этом случае $r = l$, $I = mr^2$, где l – длина маятника. Тогда формула (4) переходит в:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

Сравнение результатов, полученных с учётом приближения с реальными.

Маятник Капицы

До этого рассматривались только системы, в которых точка подвеса неподвижна. Если точка подвеса будет двигаться по гармоническому закону вдоль вертикальной оси, получится система, называемая маятником Капицы. При определённых значениях частоты движения точки подвеса достигаются достаточно интересные результаты, которые будут рассмотрены далее.

Общее уравнение

Пусть точка подвеса движется по гармоническому закону:

$$h(t) = h_0 \sin(\nu t) \quad (6)$$

$$\ddot{h}(t) = -h_0 \nu^2 \sin(\nu t) \quad (7)$$

Будем рассматривать движение маятника в неинерциальной системе отсчёта, связанной с точкой подвеса. Тогда помимо силы тяжести будет действовать:

$$F_{\text{ин}}(t) = -\ddot{h}(t)m = mh_0 \nu^2 \sin(\nu t) = m\nu^2 h(t) \quad (8)$$

приложенная к центру масс.

$$I\ddot{\theta} = -mgr \sin \theta + [mh_0\nu^2 \sin(\nu t)] \sin \theta \quad (9)$$

Для математического маятника с подвижной точкой подвеса:

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{h_0\nu^2 \sin(\nu t)}{r^2} - \frac{g}{r} \right) \sin \theta \quad (10)$$

Это уравнение используется для численного интегрирования в симуляции.

Аналитическое решение

Из симуляции можно видеть, что при определённых частотах колебаний точки подвеса, маятник обретает второе положение равновесия в верхней точке. Чтобы объяснить этот феномен, сделаем оценку средних за период значений моментов вращения сил, действующих на маятник.

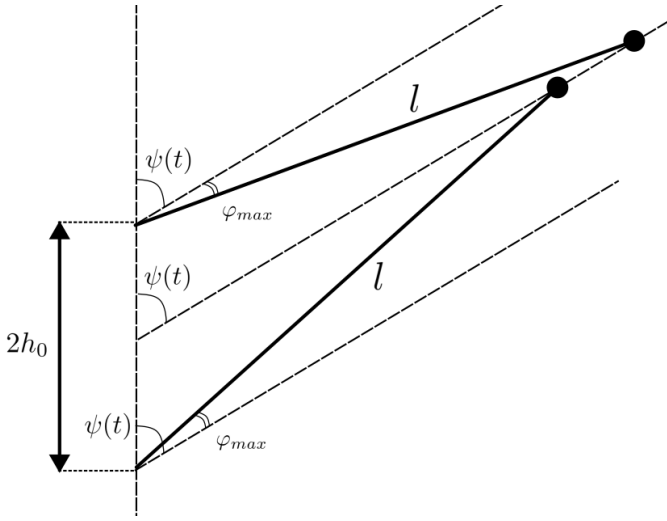


Рис. 1: В лабораторной системе отсчёта

Движение маятника можно разделить на две компоненты: быструю и медленную. Маятник будет быстро колебаться, меняя угол $\varphi(t)$ относительно некоторого временного положения равновесия, которое направлено под углом $\psi(t)$ к вертикали (этот угол за малое время периода колебаний подвеса считаем постоянным, но он будет медленно изменяться с течением времени из-за разницы между усреднёнными моментами сил тяжести и инерции). В каждый момент времени на маятник действуют 2 силы: сила инерции и сила тяжести. С помощью теоремы синусов можно заметить:

$$\frac{\sin \varphi(t)}{h(t)} = \frac{\sin \psi(t)}{l}$$

С учётом малости угла $\varphi(t)$ (малая амплитуда колебаний):

$$\varphi(t) = \frac{h(t)}{l} \sin \psi(t) \quad (11)$$

Момент силы инерции относительно точки подвеса равен:

$$\begin{aligned} M(t) &= F(t)l \sin(\psi(t) + \varphi(t)) = [F_{\text{ин}}(t) + mg] l \sin(\psi(t) + \varphi(t)) = [F_{\text{ин}}(t) + mg] l \{ \cos \psi(t) \sin \varphi(t) + \sin \psi(t) \cos \varphi(t) \} \approx \\ &\approx [F_{\text{ин}}(t) + mg] l \varphi(t) \cos \psi(t) + [F_{\text{ин}}(t) + mg] l \sin \psi \end{aligned}$$

С учётом (11) и (8):

$$\begin{aligned} M(t) &\approx [-m\nu^2 h(t) + mg] l \cos \psi(t) \frac{h(t)}{l} \sin \psi(t) + [-m\nu^2 h(t) + mg] l \sin \psi(t) = \\ &= -m\nu^2 h^2(t) \sin \psi(t) \cos \psi(t) - m\nu^2 h(t) l \sin \psi(t) + mg \cos \psi(t) h(t) \sin \psi(t) + mgl \sin \psi(t) = \\ &= -\frac{1}{2} m\nu^2 h_0^2 \sin^2(\nu t) \sin 2\psi(t) - m\nu^2 h_0(t) \sin(\nu t) l \sin \psi(t) + mg \cos \psi(t) h_0 \sin(\nu t) \sin \psi(t) + mgl \sin \psi(t) \end{aligned}$$

Усреднив за время периода, получаем:

$$\langle M(t) \rangle = -\frac{1}{4} m h_0^2 \nu^2 \sin 2\psi + mgl \sin \psi(t)$$

Если считать, что колебания происходят вблизи нового положения равновесия ($\psi(t) \ll 1$), то:

$$\langle M(t) \rangle \approx -\frac{1}{2} m h_0^2 \nu^2 \psi(t) + mgl \psi(t)$$

Получаем, что новое положение равновесия в верхней точке появляется при частотах колебания подвеса, удовлетворяющих оценке:

$$\nu > \frac{\sqrt{2gl}}{h_0} \quad (12)$$