Лабораторная работа 1.4.1
Изучение физического маятника

1 Аннотация

Измеряем период колебаний физического маятника, оцениваем погрешность полученного значения. По нему вычисляем ускорение свободного падения g и убеждаемся в справедливости формулы для периода свободных колебаний.

2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс.

2.1 Понятие о законе вращательного движения и моменте инерции

Закон, описывающий вращательное движение твёрдого тела вокруг фиксированной оси, аналогичен второму закону Ньютона. Получим его для простейшего случая точечной массы.
Уравнение Ньютона:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

где $p = mv$ — импульс, v — скорость тела.
Рассмотрим точечную массу, движущуюся по окружности фиксированного радиуса r с угловой скоростью ω. Умножая уравнение Ньютона с обеих сторон на r, получим следующее уравнение вращательного движения точки:

$$Fr = \frac{d}{dt}(mr^2\omega)$$

$$M = \frac{dL}{dt} \tag{1}$$

где M - момент силы и введено обозначение $L = mr^2\omega$. Величину $I = mr^2$ называют моментом инерции точечного тела.
При постоянном I можно записать:

$$M = I\frac{d\omega}{dt} \tag{2}$$

В случае твёрдого тела, состоящего из совокупности материальных точек уравнение сохраняет свой вид, но $I = \sum\limits_i m_i r_i^2$. Для тонкого стержня, вращающегося вокруг центра масс можно посчитать:

$$I_C = \frac{ml^2}{12}$$

А если он вращается вокруг оси на расстоянии a от центра масс, то по теореме Штейнера:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \tag{3}$$

В частности, если он подвешен за один из концов:

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

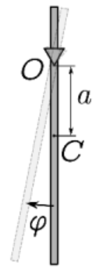

Рис. 1: Стержень как физический маятник

2.2 Стержень как физический маятник

Маятник подвешен в точке O на расстоянии a до центра масс C. При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть стержень в исходное положение. Плечо этой силы, приложенной к точке C, относительно оси подвеса O равно $a \sin \varphi$ поэтому при небольших углах отклонения $\varphi \ll 1$ возвращающий момент равен:

$$M = -mg \sin \alpha \approx -mga\varphi \tag{4}$$

Таким образом, на маятник действует возвращающий момент сил, пропорциональный величине его отклонения от равновесия. Отсюда можно сделать вывод, что при малых амплитудах отклонения движение свободного физического маятника будет иметь характер гармонических колебаний, аналогично колебаниям груза на пружине или математического маятника. Период таких колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \tag{5}$$

По аналогии с пружинным маятником.
Для стержня длиной l, подвешенного на расстоянии a от центра масс получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \tag{6}$$

Определим так называемую приведённую длину физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{7}$$

Смысл этой длины в том, что физический маятник длиной l, подвешенный в точке a, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_{\text{пр}}$.
С понятием «приведённой длины» связана следующая теорема (Гюйгенса). Рассмотрим точку O' , отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{\text{пр}}$ вдоль стержня (эту точку иногда называют центром качания физического маятника). Оказывается, если маятник подвесить за точку O', то период его качания не изменится.

2.3 Гармонические колебания

Формулу для периода колебаний маятника (5) можно получить из анализа дифференциального уравнения гармонических колебаний. Воспользуемся основным уравнением вращательного движения и подставим в него момент импульса в виде $L = I\omega$, выражение для момента возвращающей силы, а также учтём, что $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$ – угловое ускорение. Получим дифференциальное уравнение:

$$I\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \tag{8}$$

Оно имеет решение в виде:

$$\varphi(t) = A \sin(\Omega t + \alpha) \tag{9}$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ – угловая частота колебаний, A – амплитуда, α – начальная фаза колебаний.
Амплитуда и фаза определяются начальными условиями. При этом угловая частота (и период) малых колебаний не зависит ни от фазы, ни от амплитуды. Однако при достаточно больших амплитудах последнее утверждение нарушается. Оно справедливо в той мере, в которой справедливо приближение $\sin \varphi \approx \varphi$

3 Методика измерений и оборудоварние

Тонкий стальной стержень подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника.
Возможны две схемы реализации установок.
Установка А. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя длину a — расстояние от центра масс до точки подвеса. Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера. Установка Б. Подвесная призма остаётся неподвижной ($a = const$), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня.
Расстояния во всех установках измеряются линейками и штангенциркулем. Положение центра масс маятника может быть определено с помощью балансирования маятника на вспомогательной Т -образной подставке с острой верхней гранью.

3.1 Измерение периода колебаний

Измерение периода колебаний маятника (и любых других промежутков времени) с помощью секундомера неизбежно сопровождается погрешностью из-за конечного времени реакции человека. Как правило, время реакции составляет 0,1 – 0,2 с. Однако это время различно для разных людей и зависит от большого числа субъективных факторов (состояние человека, тренированность, время суток, освещённость и т.п.). Для планирования эксперимента и для корректной оценки его погрешностей следует иметь более точное значение погрешности измерения времени. Найти случайную погрешность из-за времени реакции (а также из-за других сопутствующих случайных факторов) нетрудно экспериментально. Для этого достаточно несколько раз повторить опыт по измерению одного и того же числа колебаний маятника. По полученному набору результатов $t_1, t_2, ..., t_N$ определить среднее значение $\bar{t}$ и среднеквадратичное отклонение отдельного измерения:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2}$$

Кроме того, у каждого секундомера возможна систематическая погрешность $\sigma_t^{\text{сист}}$, максимальная величина которой устанавливается производителем.
Полная погрешность: $\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\left(\sigma_t^{\text{сист}}\right)^2 + \left(\sigma_t^{\text{случ}}\right)^2}$

3.2 Учёт влияния подвесной призмы

Формула (6) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (6) может привести к систематической погрешности результата. Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ст}} + I_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}}$$

где $I_{\text{пр}}$, $m_{\text{пр}}$ и $a_{\text{пр}}$ — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы (знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится выше оси подвеса).

3.3 Стержень как физический маятник

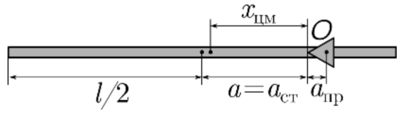

Рис. 2: Смещение центра масс из-за подвесной призмы

На практике учесть влияние призмы можно следующим образом. Поскольку расстояние $a_{\text{пр}}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, измеряя положение центра масс всей системы. Пусть

$x_ц$ — расстояние от центра масс системы до точки подвеса. По определению имеем

$$x_ц = \frac{m_{ст}a_{ст} - m_{пр}a_{пр}}{m_{ст} + m_{пр}}$$

(«минус» учитывает положение призмы). Исключая отсюда $a_{пр}$, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\left(1 + \frac{m_{пр}}{m_{ст}}\right)x_ц}} \tag{10}$$

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Систематические погрешности приборов

- **Линейка:** $\sigma_{лин} = \pm 0.5$ мм, $\varepsilon_{лин} = 0.5\%$
- **Секундомер:** ± 0.0005 с, $\varepsilon_{сек} = 0.00125\%$

4.2 Измерение длины стержня l, масс штанги и призмы

Погрешность измерений масс, проводимых с помощью электронных весов, пренебрежимо мала.

1	2	3	4	Ср. знач	$\sigma^{сист}$	$\sigma^{случ}$	$\sigma^{полн}$
100.0	99.9	100.1	100.0	100.0	0.05	0.035	0.06

Таблица 1: Результаты измерений длины стержня, см

Итоговые значения:
$m_{пр} = 79.7$ г
$m_{ст} = 870.0$ г
$l = 100.00 \pm 0.06$ см

4.3 Определение положения центра масс пустого стержня

1	2	3	4	Ср. знач	$\sigma^{сист}$	$\sigma^{случ}$	$\sigma^{полн}$
50.2	50.0	49.9	50.1	50.05	0.05	0.056	0.08

Таблица 2: Результаты измерений положения центра масс стержня, см

$X_{C_0} = 50.05 \pm 0.08$ см

4.4 Измерение периода колебаний маятника

№ опыта	a, см	$x_ц$, см	t, с				$\bar{t}$, с	$\sigma_t^{сист}$, с	$\sigma_t^{случ}$, с	$\sigma_t^{полн}$, с
			1	2	3	4				
1	37	33.6	31.05	31.11	30.91	30.95	31.005	0.0005	0.079	0.079
2	32	29.2	30.48	30.40	30.35	30.43	30.415	0.0005	0.047	0.047
3	27	24.6	30.55	30.65	30.49	30.52	30.552	0.0005	0.060	0.060
4	47	42.9	32.07	32.13	32.23	32.20	32.157	0.0005	0.062	0.062
5	20	19.7	31.37	31.41	31.33	31.29	31.350	0.0005	0.045	0.045
6	10	9.2	38.48	38.56	38.75	38.87	38.657	0.0005	0.163	0.163
7	43	39.5	31.92	31.75	31.63	31.62	31.730	0.0005	0.121	0.121

Таблица 3: Результаты измерений времени 20 колебаний маятника при различных положениях штанги

Для каждого опыта рассчитаем ускорение свободного падения g. Результаты занесём в табл. 4

№ опыта	g по формуле (6)	g по формуле (10)
1	9.78	9.86
2	9.91	9.95
3	9.79	9.84
4	9.88	9.92
5	9.91	9.61
6	9.86	9.82
7	9.78	9.76

Таблица 4: Значение g для каждого опыта, м/с^2

4.5 Эквивалентность физического маятника и математического маятника с длиной нити $l_{\text{пр}}$

Для 7 опыта из табл. 3 вычислим $l_{\text{пр}}$:
$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} = 60.6$ см
Измерим период колебаний математического маятника с такой длиной нити:

1	2	3	4	Ср. знач	$\sigma^{\text{сист}}$	$\sigma^{\text{случ}}$	$\sigma^{\text{полн}}$
31.65	31.56	31.61	31.69	31.627	0.0005	0.048	0.048

Таблица 5: Результаты измерений времени 20 колебаний, с

Результаты совпадают в пределах погрешности.

4.6 Получим окончательные результаты вычисления g

4.6.1 Для формулы 6

Среднее значение: 9.84 м/с^2
Систематическая погрешность: $\sigma_g^{\text{случ}} = g\sqrt{\left(2\varepsilon_l^{\text{сист}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_a^{\text{сист}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_t^{\text{сист}}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_m^{\text{сист}}\right)^2} = 0.11$ м/с^2
Случайная погрешность: $\sigma_g^{\text{случ}} = g\sqrt{\left(2\varepsilon_l^{\text{случ}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_a^{\text{случ}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_t^{\text{случ}}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_m^{\text{случ}}\right)^2} = 0.075$ м/с^2
Полная погрешность: $\sigma_g^{\text{сист}} = \sqrt{\left(\sigma_g^{\text{случ}}\right)^2 + \left(\sigma_g^{\text{сист}}\right)^2} = 0.13$ м/с^2
Итоговое значение: $g = 9.84 \pm 0.13$ м/с^2

4.6.2 Для формулы 10

Среднее значение: 9.79 м/с^2
Систематическая погрешность: $\sigma_g^{\text{случ}} = g\sqrt{\left(2\varepsilon_l^{\text{сист}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_a^{\text{сист}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_t^{\text{сист}}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_m^{\text{сист}}\right)^2} = 0.10$ м/с^2
Случайная погрешность: $\sigma_g^{\text{случ}} = g\sqrt{\left(2\varepsilon_l^{\text{случ}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_a^{\text{случ}}\right)^2 + \left(2\varepsilon_t^{\text{случ}}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_m^{\text{случ}}\right)^2} = 0.07$ м/с^2
Полная погрешность: $\sigma_g^{\text{сист}} = \sqrt{\left(\sigma_g^{\text{случ}}\right)^2 + \left(\sigma_g^{\text{сист}}\right)^2} = 0.12$ м/с^2
Итоговое значение: $g = 9.79 \pm 0.12$ м/с^2

4.7 Графический метод

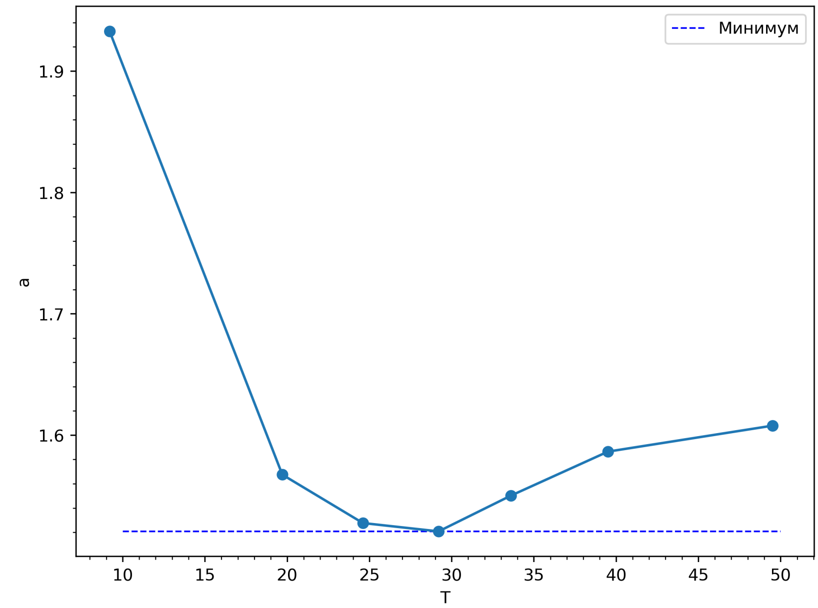

Рис. 3: Зависимость периода от положения призмы

Взяв производную функции (6) можно вычислить, что она имеет минимум в точке $a = 28.9$ см, что совпадает с графиком.

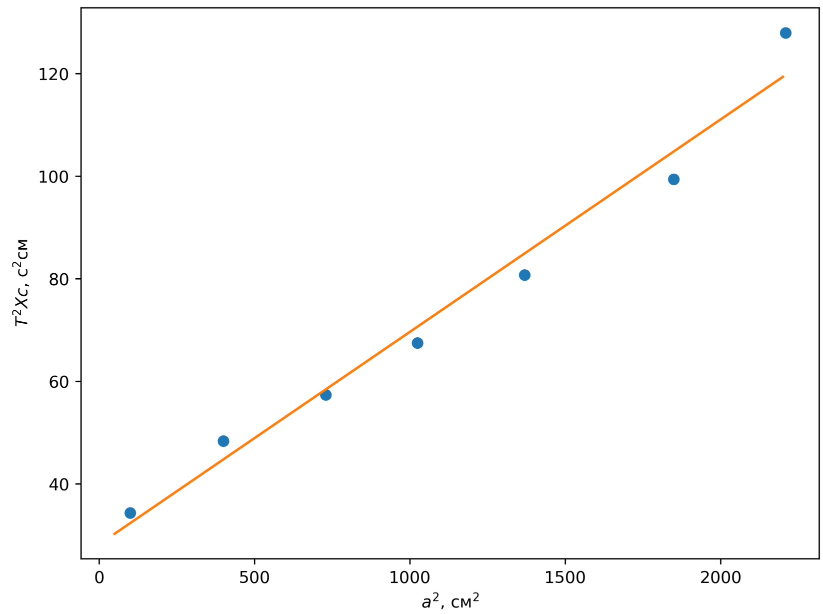

Рис. 4: Вычисление g методом наименьших квадратов

Коэффициент k для этой зависимости:

$$k = \frac{4\pi^2}{g}$$

Рассчитываем его по методу наименьших квадратов и находим: $g = 9.87$ м/с^2

Случайная погрешность k: $\sigma_k^{\text{случ}} = 0.02$

Систематическая погрешность k: $\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2 x_c}\right)^2 + \left(\varepsilon_a\right)^2} = 0.03$

Полная погрешность k: $\sigma_k^{\text{полн}} = \sqrt{\left(\sigma_k^{\text{сист}}\right)^2 + \left(\sigma_k^{\text{случ}}\right)^2} = 0.04$

Погрешность g: $\sigma_g^{\text{полн}} = g * \varepsilon_k = 0.10$ м/с^2

Итоговое значение: $g = 9.87 \pm 0.10$ м/с^2

5 Обсуждение результатов и выводы

Удалось получить такие результаты:

$g = 9.87 \pm 0.10$ м/с^2 – по методу наименьших квадратов

$g = 9.84 \pm 0.13$ м/с^2 – по формуле (6)

$g = 9.79 \pm 0.12$ м/с^2 – по формуле (10)

Все они совпадают с табличным в пределах погрешности. Использование точной формулы не имеет смысла при таких систематических погрешностях.

Удалось проверить справедливость формул периода колебаний физического маятника и физического смысла $l_{\text{пр}}$.