目　　录

第一章　行　列　式

§1.1　二阶行列式

我们在中学里曾经学过如何解二元一次方程组和三元一次方程组.在许多实际问题中,我们还会遇到未知数更多的一次方程组,通常称之为线性方程组.一般来说,具有下列形状的方程组我们称为 n 元线性方程组的标准式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}, $b_i(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数,$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$是未知数,方程组中所有未知数都是一次的.注意在一般的线性方程组中,m 和 n 可以不相等,即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等.凡是经过有限次移项、合并同类项可以变为(1.1.1)式形状的方程组都称为线性方程组.求解线性方程组是线性代数的一个重要任务,我们在这一章中主要讨论当 $m = n$,即方程式个数等于未知数个数时如何来解上述线性方程组.

我们首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组的方法.先看一个简单的例子.

例 1.1.1　*求解二元一次方程组:*

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

解　用代入消去法,在第一个方程式中解出 y 用 x 表示的式子:

$$y = 2x - 5.$$

代入第二个方程式中得到

$$3x+2(2x-5)=11.$$

整理后得

$$7x=21.$$

解得 $x=3$,代入 $y=2x-5$ 求得 $y=1$. 于是上述线性方程组有唯一组解:

$$\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组.比如对一个含 10 个未知数的方程组,利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式,于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了.再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组等等.一直做到只含 1 个未知数.解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数.这个办法在理论上似乎是可行的,但是当未知数个数很多时(在许多实际问题中,未知数的个数可能有成千上万个),运算将变得难以想象的复杂.另外,用代入法无法得出一个规范化的公式,这对于从理论上分析线性方程组的解不能不说是个很大的缺陷.我们现在希望给出线性方程组解的一个公式.这样的公式真的存在吗?我们首先来考察二元一次方程组的解,设有二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

用 a_{22} 乘第一式的两边,用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2=-b_2a_{12}. \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

于是

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1,解得:

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到二元一次方程组的两个解都可以表示为分数的形状，其中分母仅和未知数的系数有关. 二元一次方程组解的公式是有了，但是这个公式不太好记忆.

如果我们引进二阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

则上述解可用行列式表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

在用行列式表示的解公式(1.1.4)中，我们发现解的表达有一定的规律：

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列，第二列由 x_2 的系数组成，因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数项而得. 这个规则对 x_2 的分子行列式也适用.

显而易见，这样的解的公式一目了然而且很容易记忆. 我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解. 在做这件事之前，我们先来研究二阶行列式的性质，这将启发我们如何定义一般的 n 阶行列式.

设有二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|A|$ 的值根据定义为 $a_{11}a_{22}$. 我们称上述行列式为上三角行列式，元素 a_{11}，a_{22} 为行列式的对角线元素(或主对角元素)，于是我们得到行列式的第一个性质.

性质 1　*上三角行列式的值等于其对角线元素之积.*

性质 2　*行列式某行或某列全为零，则行列式的值等于零.*

比如若第一行全为零,则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也类似可验证.

性质 3　用常数 c 乘以行列式的某一行或某一列,得到的行列式的值等于原行列式的值的 c 倍.

比如将 c 乘以 $|A|$ 的第一行,我们有

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ca_{11})a_{22} - (ca_{12})a_{21} = c\,|\,A\,|.$$

其他几种情形读者可自己验证.

性质 4　交换行列式不同的两行(列),行列式的值改变符号.

证明也很容易:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 5　行列式两行或两列成比例,则行列式的值等于零,特别,若行列式两行或两列相同,则行列式的值等于零.

对列成比例的情形我们可证明如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形.

性质 6　若行列式中某行(列)元素均为两项之和,则行列式可表示为两个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易,只需按照行列式定义计算等式两边的值即可.需要注意的是下面的等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

请读者想一想为什么?上式左边的行列式应该等于什么?

性质 7 行列式的某一行(列)乘以某个数加到另一行(列)上,行列式的值不变.

比如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+ka_{21})-a_{21}(a_{12}+ka_{11})$$

$$= a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

设有二阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|A|$的值根据定义为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 我们称下列行列式为$|A|$的转置:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

记为$|A'|$. 注意$|A'|$的第一列就是$|A|$的第一行,$|A'|$的第二列就是$|A|$的第二

行. 根据定义$|A'|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,我们发现它就等于行列式$|A|$的值. 于是我们得到行列式的又一个性质.

性质 8　行列式和其转置具有相同的值.

注　从性质 1 到性质 7 我们发现行列式性质具有行和列的对称性,即对行成立的性质,对列也成立. 这是因为性质 8 在起作用. 转置将行变成了相应的列,既然行列式转置后值不改变,那么同样的性质对列也成立.

现在我们试着用行列式性质来解二元一次方程组(1.1.3).

将 b_1,b_2 代入下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

由性质 7,在右边的行列式中用$-x_2$ 乘以第二列加到第一列上,行列式值应该不变,即上式等于

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2-a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2-a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

再由性质 3,

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

综上所述,

$$x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同理,通过计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

我们得到

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

从这里我们得到启发,既然用二阶行列式性质(注意我们没有用到性质 8)就可以求解二元一次方程组,那么只要从性质着手定义出一般的 n 阶行列式,我们就可以求出 n 元线性方程组的解.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 计算下面两个行列式并和性质 3 比较:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 计算下面 3 个行列式并和性质 6 比较(第一个行列式的第二行等于后两个行列式第二行之和):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. 比较下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. 计算下面两个行列式并和性质 8 比较:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. 举例说明下列等式不成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

问:根据性质 6,行列式 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$ 应等于什么?

§1.2 三阶行列式

我们遵循上一节的思路来定义三阶行列式,设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.2.1}$$

称$|A|$是一个三阶行列式.我们要定义三阶行列式的值,使得行列式具有上节中所述的 8 个性质.我们不妨倒过来,假定行列式已经定义且适合 8 个性质,那么行列式$|A|$的值应该等于什么?

根据行列式性质 6,上述行列式$|A|$可以表示成为 3 个行列式之和:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

对于上述和式中的第二个行列式,利用性质 4,将其第二行和第一行对换,就可将它化为与和式中第一个行列式相同的类型.同理,和式中第三个行列式也可以通过行对换化为和第一个行列式具有相同的类型.因此,现在的问题是,行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

应该等于什么?我们利用性质 7 可以将上面这个行列式化为上三角行列式:将$-a_{22}^{-1}a_{32}$乘以第二行加到第三行上,由性质 7,行列式值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-a_{22}^{-1}a_{32}a_{23} \end{vmatrix}.$$

再根据性质 1,有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-a_{22}^{-1}a_{32}a_{23} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}(a_{33}-a_{22}^{-1}a_{32}a_{23}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

再由性质 4 和上面的结果,我们得到

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

现在我们引进几个名词.如果将上述行列式$|A|$划去某个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$所在的一行和一列,则剩下的元素按原来的次序组成一个二阶行列式,我们称这个二阶行列式为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

比如$|A|$中元素 a_{11} 的余子式为 $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 元素 a_{12} 的余子式为 $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, 元素 a_{23} 的余子式为 $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, 等等.

根据上面的分析,我们有理由作出如下的定义.

定义(1.2.1)式中行列式$|A|$的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}.$$

例 1.2.1 计算下列三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,行列式值为

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

例 1.2.2 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} a & a^2+a+1 & 1 \\ 0 & -a & a-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由定义得此行列式值为

$$a\times\begin{vmatrix} -a & a-1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ -a & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= a^3+a-1.$$

从三阶行列式的定义,我们可以容易地证明所有三阶行列式都满足§1.1中的8条性质.但我们将这个任务交给读者来完成.

现在我们要用三阶行列式性质来解三元一次方程组.设有下列三元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

和第一节的做法类似,我们计算行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

将上述右边行列式的第二列乘以$-x_2$加到第一列上,再将第三列乘以$-x_3$加到第一列上,根据行列式性质7,得到的行列式的值等于原行列式的值,即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

再由行列式性质3,可将上式右边第一列中的x_1提出来,即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

于是得到x_1的解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

同理,可得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

可见,三元一次方程组有着和二元一次方程组类似的公式解.这里行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.2.2)的系数行列式,即未知数的系数组成的行列式.

习 题 1.2

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & -2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x & x^2+1 & -1 \\ 0 & -x & e^x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. 解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$; (2) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

5. 用行列式解下列三元一次方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 5y - 3z = 10, \\ 4x + 8y + 2z = 4. \end{cases}$

§1.3 n 阶行列式

有了二阶行列式和三阶行列式的概念,定义 n 阶行列式就不困难了.

我们先介绍 n 阶行列式及其相关概念.我们称下面用两条竖线围起来的由 n 行 n 列元素组成的式子为一个 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.3.1}$$

它由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成,第 i 行上元素全体称为行列式 $|A|$ 的第 i 行,第 j 列上元素全体称为行列式 $|A|$ 的第 j 列.第 i 行第 j 列交点上的元素 a_{ij} 称为行列式 $|A|$ 的第 (i, j) 元素.元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为 $|A|$ 的主对角线,因为如果把行列式看成一个正方形,这些元素恰在正方形的对角线上.

定义 1.3.1 *定义元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 为由行列式 $|A|$ 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行与 $n-1$ 列元素组成的行列式:*

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们注意到三阶行列式的值是用二阶行列式来定义的,因此 n 阶行列式值可以用 $n-1$ 阶行列式来定义.即我们可以用归纳法来定义上述行列式 $|A|$ 的值.

定义 1.3.2 当 $n=1$ 时,(1.3.1)式的值定义为 $|A|=a_{11}$. 现假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义了它们的值,则对任意的 i, j, M_{ij} 的值已经定义,定义 n 阶行列式 $|A|$ 的值为

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.3.2}$$

对于任一自然数 n,(1.3.2)式给出了一个计算 n 阶行列式的方法:将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶行列式,再化 $n-1$ 阶行列式为 $n-2$ 阶,…,最后便可求出 $|A|$ 的值.(1.3.2)式又称为行列式 $|A|$ 按第一列展开的展开式.

为了使(1.3.2)式的形状更好些,我们引进代数余子式的概念.

定义 1.3.3 在行列式 $|A|$ 中,a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

用代数余子式(1.3.2)式可写为如下形状:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \tag{1.3.3}$$

注 我们的定义与二阶、三阶行列式的定义是一致的.以二阶行列式为例,设有二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

a_{11} 的余子式 $M_{11}=a_{22}$, a_{21} 的余子式 $M_{21}=a_{12}$, 故 $A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}=a_{22}$, $A_{21}=(-1)^{2+1}a_{12}=-a_{12}$. 而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

恰好和二阶行列式的定义一致.

例 1.3.1 设有五阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$|A|$ 的第(1, 1)元素 $a_{11}=1$, 它的余子式等于

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2&-5&4&1\\-2&-1&1&0\\0&2&1&3\\3&-1&5&1\end{vmatrix}.$$

a_{11}的代数余子式为 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$.

$|A|$的第(3, 4)元素 $a_{34}=1$，它的余子式为

$$M_{34}=\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\0&2&-5&1\\0&0&2&3\\1&3&-1&1\end{vmatrix}.$$

代数余子式 $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}$.

$|A|$的第(4, 1)元素 $a_{41}=0$，它的余子式为

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&-1&3&1\\2&-5&4&1\\-2&-1&1&0\\3&-1&5&1\end{vmatrix}.$$

代数余子式 $A_{41}=(-1)^{4+1}M_{41}=-M_{41}$.

n 阶行列式同样适合前二节中二阶行列式和三阶行列式适合的 8 条性质，因为我们是用归纳法定义的行列式，自然地，这些性质的证明也要用归纳法.

性质 1　若$|A|$是一个 n 阶行列式，且

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\text{或}\ |A|=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明　我们称上式中左边的行列式为上三角行列式(这时 $a_{ij}=0$ 对一切 $i>j$ 成立)；右边的行列式为下三角行列式(这时 $a_{ij}=0$ 对一切 $i<j$ 成立). 现在用归纳法分别证明上述结论. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 对上三角行列式，由定义，有

$$|A|=a_{11}M_{11}.$$

但 M_{11} 仍是一个上三角行列式，故由归纳假设 $M_{11}=a_{22}\cdots a_{nn}$ 即知 $|A|=$

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

对下三角行列式，由定义，有

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.3.4}$$

对 $M_{i1}(i>1)$，它仍是一个下三角行列式且 M_{i1} 主对角线上的元素至少有一个为 0，故由归纳假设 $M_{i1}=0\ (i>1)$. 对 M_{11}，由归纳假设等于 $a_{22}\cdots a_{nn}$，于是 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 证毕.

性质 2 **若 n 阶行列式 $|A|$ 的某一行或某一列的元素全为 0，则 $|A|=0$.**

证明 仍用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定结论对 $n-1$ 阶行列式成立. 先设 $|A|$ 中第 i 行元素全为 0，则

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1},$$

其中每个 $M_{j1}(j\neq i)$ 都有一行元素全为 0，故由归纳假设 $M_{j1}=0$. 另外，$a_{i1}=0$，故 $a_{i1}M_{i1}=0$，从而 $|A|=0$.

再设 $|A|$ 中第 i 列全为 0. 若 $i=1$，显然 $|A|=0$. 若 $i>1$，在展开式中每个 M_{j1} 都有一列元素全为 0，由归纳假定 $M_{j1}=0$，故 $|A|=0$. 证毕.

性质 3 **将行列式 $|A|$ 的某一行或某一列乘以一个常数 c，则得到的行列式 $|B|=c|A|$.**

证明 对行列式的阶用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定 $|B|$ 中第 i 行的每个元素等于 $|A|$ 中第 i 行的每个元素乘以 c，而其他行元素与 $|A|$ 完全相同. 由定义可知，

$$|B| = a_{11}N_{11} - \cdots + (-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}, \tag{1.3.5}$$

其中 N_{r1} 为 $|B|$ 的第 r 行第一列元素的余子式. 由题意及归纳假设知道

$$N_{r1} = cM_{r1}\ (r\neq i),\ N_{i1} = M_{i1},$$

其中 M_{r1}, M_{i1} 均为 $|A|$ 相应的余子式. 由(1.3.5)式即知 $|B|=c|A|$.

对列的情形也不难证明. 若 $|B|$ 的第一列元素都是 $|A|$ 的第一列元素的 c 倍，则将 $|B|$ 按定义展开即可得结论. 若 $|B|$ 的第 $i\ (i>1)$ 列元素是 $|A|$ 的第 i 列元素的 c 倍，利用展开式及归纳假设即可得到结论. 证毕.

性质 4 **对换行列式 $|A|$ 的任意不同的两行，则行列式的值改变符号（绝对值不变）.**

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=2$ 时已知成立，假定结论对 $n-1$ 阶行列式也成立. 对 n 阶行列式 $|A|$，先证明特殊情形，即对换行列式的相邻两行，其值改变符号. 设 $|B|$ 由 $|A|$ 对换第 r 行及第 $r+1$ 行而得. 记 N_{ij} 为 $|B|$ 的第 i 行第 j 列元素

的余子式,将$|B|$按行列式定义展开并注意到$|B|$由$|A|$对换第r行及第$r+1$行而得:

$$|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r+1,1}N_{r1} + (-1)^{r+2}a_{r,1}N_{r+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}.$$

若$i \neq r,\ r+1$,则由归纳假定$N_{i1} = -M_{i1}$,而$N_{r1} = M_{r+1,1}$,$N_{r+1,1} = M_{r1}$,由此即知$|B| = -|A|$.

现来考虑一般情形.要将$|A|$的两行对换,不妨设所换两行为第i行及第j行,且$j > i$.我们可先将第i行与第$i+1$行对换,再与第$i+2$行对换,一直到与第j行对换.然后再将第$j-1$行经过不断与相邻行的对换换到原来第i行的位置.这样一共换了$2(j-i)-1$次,因此仍有$|B| = -|A|$.证毕.

性质 5　*若行列式$|A|$的两行成比例,则$|A| = 0$.特别若行列式的两行相同,则行列式的值等于零.*

证明　先证明特例,设行列式$|A|$有两行相同,将这两行对换可得$|A| = -|A|$,因此$|A| = 0$.再证明一般情形,设$|A|$有两行成比例,则由性质3,将比例因子提出后得到的行列式有两行相同,值等于零,故$|A| = 0$.证毕.

性质 6　*设$|A|$,$|B|$,$|C|$是3个n阶行列式,它们的第(i,j)元素分别记为a_{ij},b_{ij},c_{ij}.$|A|$,$|B|$,$|C|$的第r行元素适合条件:*

$$c_{rj} = a_{rj} + b_{rj}\ (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.3.6}$$

而其他元素相同,即$c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}\ (i \neq r,\ j = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$|C| = |A| + |B|.$$

证明　对n用数学归纳法.当$n=1$时结论显然成立.设结论对$n-1$阶行列式成立.将$|C|$按定义展开:

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}(a_{r1} + b_{r1})Q_{r1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}, \tag{1.3.7}$$

其中Q_{ij}为C的余子式.若$i \neq r$,则Q_{i1}仍适合(1.3.6)式,由归纳假设得$Q_{i1} = M_{i1} + N_{i1}$.这里M_{i1},N_{i1}分别是A,B的余子式.若$i = r$,则$Q_{r1} = M_{r1} = N_{r1}$.因此(1.3.7)式为

$$|C| = a_{11}(M_{11} + N_{11}) - a_{21}(M_{21} + N_{21}) + \cdots + (-1)^{r+1}(a_{r1}M_{r1} + b_{r1}N_{r1}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}(M_{n1} + N_{n1})$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) \\
&\quad + (a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}) \\
&= |A| + |B|.
\end{aligned}
$$

证毕.

性质 6 可用行列式具体表示如下:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{r1}+b_{r1} & a_{r2}+b_{r2} & \cdots & a_{rn}+b_{rn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

性质 7 *将行列式的一行乘以某个常数 c 加到另一行上,行列式的值不变,即*

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

证明 由性质 6 可将上式左边分拆成两个行列式之和,一个等于右边的行列式,另一个利用性质 3 将 c 提出,再由性质 5 知其值应为零. 证毕.

上面我们对行证明了性质 4 至性质 7. 实际上这些性质对列也成立.

性质 5′ *若行列式 $|A|$ 的两列成比例,则 $|A|=0$. 特别若两列相同,则行列式值等于零.*

证明 先证明若 $|A|$ 有两列相同,则值等于零. 假设 $|A|$ 中相同的两列都不是第一列,则将 $|A|$ 展开并用归纳法即可得 $|A|=0$. 因此我们不妨设 $|A|$ 的第

一列与第 r 列相同. 这时如果第一列元素全为 0,则 $|A|=0$. 故假设$|A|$的第一列元素至少有一个不等于零,比如 $a_{s1}\neq 0$. 将$|A|$的第一行与第 s 行对换,仅改变 $|A|$ 的符号,由于 $-|A|=0$ 即意味着 $|A|=0$, 因此我们不妨设 $a_{11}\neq 0$, 这时 $|A|$ 的形状为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots \end{vmatrix}.$$

将$|A|$的第一行乘以$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$加到第 i 行上去 $(i=2,3,\cdots,n)$, 则得到一个新的行列式$|C|$,它的形状为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ 0 & * & 0 & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix}.$$

由性质 7 知 $|C|=|A|$, 将$|C|$按定义展开, $|C|=a_{11}Q_{11}$. 而 Q_{11} 是一个有一列全为 0 的 $n-1$ 阶行列式,故 $Q_{11}=0$, 即有 $|C|=0$,于是 $|A|=0$. 一般情形的证明和行性质证明相同,证毕.

性质 6′　$|A|$, $|B|$, $|C|$是 3 个 n 阶行列式,$|C|$的第 r 列元素等于$|A|$的第 r 列元素与 B 的第 r 列元素之和:

$$c_{ir}=a_{ir}+b_{ir}(i=1,2,\cdots,n),$$

当 $j\neq r$ 时,$c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}$, 则

$$|C|=|A|+|B|.$$

证明　若 $r=1$, 用行列式定义展开$|C|$即可得到结论. 若 $r>1$, 将 $|C|$ 展开:

$$C=a_{11}Q_{11}-a_{21}Q_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1},$$

每个 Q_{i1} 由归纳假设得:

$$Q_{i1}=M_{i1}+N_{i1},$$

其中 Q_{i1}, M_{i1}, N_{i1}分别是$|C|$, $|A|$, $|B|$的余子式. 代入可得

$$|C|=|A|+|B|.$$

证毕.

性质 7′ 将行列式的一列乘以常数 c 加到另一列上,行列式的值不变.

证明 类似性质 7 的证明. 利用性质 6′,性质 3 及性质 5′即可证明. 证毕.

性质 4′ 交换行列式的两列,行列式的值改变符号.

证明 设 $|B|$ 由 $|A|$ 交换第 r 列及第 s 列得到,即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

作行列式 $|C|$,它的第 r 列及第 s 列相同,都等于 $|A|$ 的第 r 列及第 s 列之和,则

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |A| + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+|B|+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

除$|A|$，$|B|$外的两个行列式各自都有两列相同，因此值为0.而$|C|$也有两列相同，值也等于0.于是$|B|=-|A|$，证毕.

行列式的第8个性质我们将在下一节证明.

现在我们的任务是利用行列式性质，求出n元线性方程组的公式解.设有n个未知数n个方程式的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

记方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

用$-x_2$乘以右边行列式的第二列加到第一列上，再用$-x_3$乘以第三列加到第一列上，…，最后将$-x_n$乘以第n列加到第一列上，由行列式性质知道行列式值不变，即

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

于是

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

同理,通过计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可得

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

不断做下去,得

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

上述结论通常称为Cramer(克莱姆)法则,我们把它写成如下定理.

定理 1.3.1(Cramer 法则)　设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

记这个方程组的系数行列式为$|A|$,若$|A| \neq 0$,则方程组有且仅有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

其中$|A_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$是一个n阶行列式,它由$|A|$去掉第i列换上方程组的常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$组成的列而成.

注　当系数行列式$|A| = 0$时,方程组的解比较复杂,我们将在第三章讨论这个问题.

习　题　1.3

1. 求下列行列式中第(1, 2),第(3, 1)及第(3, 3)元素的余子式和代数余子式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

§1.4 行列式的展开和转置

行列式的定义通常称为行列式按第一列展开的展开式,那么行列式是否也可以按其他列展开呢?

我们可这样考虑(仍用上一节中的行列式$|A|$):先交换第r列与第$r-1$列,再交换第$r-1$列与第$r-2$列,等等,经过$r-1$次这样的交换便可将$|A|$的第r列换到第一列,再按定义展开行列式.记$|B|$是经过这样变换以后的行列式,则

$$\begin{aligned}(-1)^{r-1}\,|A| = |B| &= a_{1r}N_{11} - a_{2r}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1} \\ &= a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}M_{nr},\end{aligned}$$

因此

$$|A| = (-1)^{1+r}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{2+r}a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr}. \tag{1.4.1}$$

上面N_{i1}, M_{i1}分别表示$|B|$及$|A|$的余子式.利用代数余子式可将上式改写为

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}, \tag{1.4.2}$$

其中$A_{ir} = (-1)^{i+r}M_{ir}$是$A$的代数余子式.

定理 1.4.1 设$|A|$是n阶行列式,第i行第j列元素a_{ij}的代数余子式记为A_{ij},则对任意的$r(r=1, 2, \cdots, n)$有展开式:

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}.$$

又对任意的$s \neq r$,有

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0.$$

证明 只需证明后一结论.注意下面的行列式,由于其第r列与第s列相同,其值应为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

将这个行列式按第 s 列展开,便有

$$a_{1r}A_{1s}+a_{2r}A_{2s}+\cdots+a_{nr}A_{ns}=0.$$

证毕.

行列式可以按列展开,是否也可以按某一行展开呢?我们先看看能否按第一行展开,看一个特例.

例 1.4.1

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2s} & a_{2,s+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{ns} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1s}A_{1s}.$$

证明　由定理 1.4.1 将上述行列式按第 s 列展开,得

$$|A|=a_{1s}A_{1s}+a_{2s}A_{2s}+\cdots+a_{ns}A_{ns}.$$

除了 A_{1s}外, $A_{is}(i>1)$ 中都有一行等于零,因此 $A_{is}=0$. 此即 $|A|=a_{1s}A_{1s}$, 证毕.

引理 1.4.1　若

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.4.3}$$

则

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}. \tag{1.4.4}$$

证明　由行列式的性质 6′及上面的结论得:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

证毕.

定理 1.4.2　设$|A|$是如(1.4.3)式所示的行列式,则

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.4.5)$$

证明　由引理以及性质4,采用与定理1.4.1的证明类似的方法即得.证毕.

我们现在来证明行列式的性质8.

定义 1.4.1　设$|A|$是如(1.4.3)式所示的行列式,令

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即$|A'|$的第一行为$|A|$的第一列,$|A'|$的第二行为$|A|$的第二列,…,$|A'|$的第n行为$|A|$的第n列,则称$|A'|$是$|A|$的转置.换言之,$|A'|$可由$|A|$将行变成列、列变成行得到.

性质8　行列式转置后的值不变,即$|A'| = |A|$.

证明　对行列式的阶用数学归纳法.当$n=1$时显然成立.设M_{ij}及N_{ij}分别是$|A|$及$|A'|$的余子式,则N_{ij}等于M_{ji}的转置.由归纳假设,$N_{ij} = M_{ji}$.将$|A'|$按第一行展开:

$$\begin{aligned} |A'| &= a_{11}N_{11} - a_{21}N_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{1n} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

证毕.

习　题　1.4

1. 通过计算证明下列行列式按第一行展开的值等于按第一列展开的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & -1 \\ 5 & -11 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. 将下列行列式分别按第二行及第三列展开求值并比较其结果:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -7 \end{vmatrix}.$$

3. 设$|A|$是n阶行列式,若$|A|$的第(i, j)元素a_{ij}与第(j, i)元素a_{ji}适合关系式:

$$a_{ij}=-a_{ji},$$

则称$|A|$是一个反对称行列式.求证:当n是奇数时,n阶反对称行列式的值等于零.

4. 求证n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}b_1b_2\cdots b_n.$$

5. 求下列关于x的多项式中一次项的系数:

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

§1.5 行列式的计算

我们已经看到,线性方程组可以用行列式求解.但是当未知数个数很多时,行列式的阶将很大,用行列式的定义来计算高阶行列式是非常麻烦的.有没有好办法使得行列式的计算简单一些?这是这一节要研究的问题.

我们先来看下面一个例子.

例 1.5.1 设有行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即$|A|$的第一列除了第一个元素外都等于零,则$|A|=a_{11}M_{11}$.

注意M_{11}是一个$n-1$阶行列式.这个命题启发我们,如果能设法把一个行列式变成上例中行列式的形状,那么我们就可以将这个行列式"降阶处理".不断地重复这个过程,就可以将高阶行列式的值计算出来.如何做到这一点?我们来看下面的例子.

例 1.5.2 计算下列行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 我们的目的首先是设法将$|A|$的第一列中的第二、第三及第四行的元素变为零. 为此,先将$|A|$的第一行乘以-2加到第二行上去,由性质7可知$|A|$的值不变,我们用下列记号来表示这个过程:

$$\begin{array}{l}(-2)\\ \searrow\end{array}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\2&-1&1&0\\1&0&0&3\\-1&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\1&0&0&3\\-1&0&2&1\end{vmatrix}.$$

再将第一行乘以-1后加到第三行上,即

$$\begin{array}{l}(-1)\end{array}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\1&0&0&3\\-1&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\-1&0&2&1\end{vmatrix}.$$

再将第一行加到第四行上去:

$$\begin{array}{l}(1)\end{array}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\-1&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\0&0&4&2\end{vmatrix}.$$

这样就把$|A|$的第一列除第一行外的元素全化为零,于是可将行列式降阶处理:

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}-1&-3&-2\\0&-2&2\\0&4&2\end{vmatrix}.$$

在上面的三阶行列式中,第一列元素除-1外都是零,又可作降阶处理:

$$|A|=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&2\\4&2\end{vmatrix}.$$

对二阶行列式可直接用定义计算出它的值:

$$|A|=(-1)(-4-8)=12.$$

我们详细分析了求$|A|$值的过程. 在实际运算过程中,常把上述运算简写为

$$\begin{array}{c} \\ (-2) \\ (-1) \\ (1) \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-8) = 12.$$

上面的方法是基于行列式可按列展开这一事实. 同理,由于行列式也可按行展开,也可采用将第一行除第一个元素都消为零的办法来求行列式的值. 仍以上面的行列式为例,采用行消去法:

$$\begin{array}{cccc} & & (-2) & (-1) \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

这时再按列展开即可.

究竟何时用行消去法,何时用列消去法,要具体分析,看用哪种方法能较顺利地降阶. 在计算一个行列式中可以交叉地使用这两种方法.

有时会出现这样的情形,行列式的第一行第一列的元素等于零,这时可用其他非零元素来消去别的行或列,再将行列式降阶.

例 1.5.3　计算行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

解　这时可将第二行乘以 -3 加到第三行上去再按定义展开:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -14 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -14 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-20+56) = -72.$$

有时为了方便，我们不必拘泥于消去第一行的或第一列的元素，要看哪行(列)消为零方便就消去该行(列).

例 1.5.4 计算行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix}7&3&1&-5\\2&6&-3&0\\3&11&-1&4\\-6&5&2&-9\end{vmatrix}.$$

解 这时若消去第一列将出现分数运算. 因此我们采用消去第三列的方法：

$$\begin{array}{c}\\(3)\\(1)\\(-2)\end{array}\begin{vmatrix}7&3&1&-5\\2&6&-3&0\\3&11&-1&4\\-6&5&2&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&3&1&-5\\23&15&0&-15\\10&14&0&-1\\-20&-1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&(1)\end{array}\\\begin{vmatrix}23&15&-15\\10&14&-1\\-20&-1&1\end{vmatrix}\end{array}=\begin{vmatrix}23&15&0\\10&14&13\\-20&-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+3}\cdot 13\cdot\begin{vmatrix}23&15\\-20&-1\end{vmatrix}=-13(-23+300)=-3\ 601.$$

如果一个行列式中某一行或某一列有公因子，则可根据性质 3 可以将它提出来，这样往往能简化计算.

例 1.5.5 计算行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}.$$

解 先将第一行中的公因子析出：

$$A=3\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}.$$

再计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -9 & -18 \end{vmatrix} = 54,$$

因此，$|A| = 3 \times 54 = 162$.

上面详细介绍了计算行列式的方法.在实际计算过程中不必拘泥于固定的步骤，可以根据不同的情况灵活运用行列式的性质，较快地计算出行列式的值.其原则是尽可能多地使行列式的元素变为零，尽可能快地将行列式降阶处理.

下面举几个文字行列式的例子.

例 1.5.6　计算 n 阶 Vander Monde(范德蒙)行列式：

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解　我们采用行消去法.将第 $n-1$ 列乘以 $-x_n$ 后加到第 n 列上，再将第 $n-2$ 列乘以 $-x_n$ 加到第 $n-1$ 列上.这样一直做下去，直至将第一列乘以 $-x_n$ 加到第二列上为止.每次这样变形后行列式的值不改变，于是

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \cdots & x_1^{n-2} - x_1^{n-3} x_n & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3} x_n & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}.$$

将上式中各行公因子析出后得到一个 $n-1$ 阶行列式恰好是一个 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n-1$ 阶 Vander Monde 行列式，我们记之为 V_{n-1}. 于是

$$V_n = (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}.$$

我们得到了递推公式：

$$V_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}.$$

于是

$$V_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

这里$\prod$表示连乘积. i, j 在保持 $j < i$ 的条件下遍历 1 到 n. 例如,

$$V_4 = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

$$V_5 = (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)V_4.$$

例 1.5.7 求下列行列式的值：

$$F_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开并注意到以下两点：一是 a_n 的余子式是一个上三角行列式,故其值等于 $(-1)^{n-1}$；二是 λ 的余子式是与 F_n 相类似的 $n-1$ 阶行列式,我们记之为 F_{n-1}, 于是

$$F_n = \lambda F_{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}a_n = \lambda F_{n-1} + a_n.$$

利用递推关系不难求得

$$F_n = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n.$$

例 1.5.8 计算下列 n 阶行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将第二行、第三行直至第 n 行都加到第一行上, $|A|$ 的值不变：

$$|A|=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

再将第一行乘以 $-a$ 分别加到第二行、第三行,直至第 n 行上,得:

$$|A|=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 1.5.9　计算

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

解　设 $|A|=f(x)$,将所有行加到第一行上可以提出因子 $x+y+z+w$. 将第二行乘以 1,将第三行、第四行乘以 -1 加到第一行上可提出因子 $x+y-z-w$. 同理可知 $|A|$ 有因子 $x+z-y-w$, $x+w-y-z$. 又将 $|A|$ 看成为 x 的函数是四次的,首项系数为 1,故

$$|A|=(x+y+z+w)(x+y-z-w)(x+z-y-w)(x+w-y-z).$$

一般说来,文字行列式的计算往往需要较高的技巧.但在实际问题中人们大量遇到的是数字行列式,这类行列式现在已可借助计算机进行计算,但是懂得行列式的计算原理及行列式的性质对正确应用计算机计算行列式是有益的.

习 题 1.5

1. 用行列式性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

2. 设 $b_{jk}=(a_{j1}+a_{j2}+\cdots+a_{jn})-a_{jk}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 计算 n 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

*4. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = 1$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n$.

5. 利用 Vander Monde 行列式计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

* 6. 设 $f_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式,求证:对任意的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

提示:设法证明下列行列式的值恒为零:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

§1.6　行列式的等价定义

设有行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们已经知道如何用归纳法求它的值,但是读者也许仍觉得不满意. 能否将 $|A|$ 的值直接表示出来呢? 我们可以这样考虑:利用行列式性质,将 $|A|$ 分拆成若干个简单的行列式之和,然后设法将这些简单的行列式计算出来再求和.

首先,为了叙述方便,我们做一些约定. 将行列式的第 j 列简记为 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1, 2, \cdots, n)$. $|A|$ 写为 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|$. 又用 $\boldsymbol{e}_1$ 表示由 n 个数组成的列,其中第一个数为 1,其余为零,即

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

为了防止混淆,我们把这一列数用括号括起来. 类似地定义 $\boldsymbol{e}_i$ 为由 n 个数组成的列,其第 i 行为 1,其余行为 0. 定义一个数 a 与 $\boldsymbol{e}_i$ 的乘积仍为一个由 n 个数组成的列,其第 i 行元素为 a,其余为零. 定义 $a\boldsymbol{e}_i+b\boldsymbol{e}_j$ 为这样的一个由 n 个数组成的列,其第 i 行为 a,第 j 行为 b,其余为零. 如果 $i=j$,则第 i 行为 $a+b$,其余行为零. 这样,行列式 $|A|$ 的第一列可写为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\boldsymbol{e}_i.$$

同样,第 j 列写为

$$\boldsymbol{\alpha}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+a_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_i.$$

由行列式性质 6 及性质 3,有

$$\begin{aligned}|A|&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\right|\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\,|\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|.\end{aligned}$$

对行列式 $|\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|$,由 $\boldsymbol{\alpha}_2=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k2}\boldsymbol{e}_k$ 得

$$|\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|=\sum_{k=1}^{n}a_{k2}\,|\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|.$$

于是

$$|A|=\sum_{i,\ k}a_{i1}a_{k2}\,|\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n|.$$

不断做下去即可得:

$$|A|=\sum_{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}\,|\boldsymbol{e}_{k_1},\ \boldsymbol{e}_{k_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{k_n}|.$$

注意行列式 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\ \boldsymbol{e}_{k_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{k_n}|$,当 $\boldsymbol{e}_{k_i}=\boldsymbol{e}_{k_j}$ 时其值为零. 因此不为零的行列式 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\ \boldsymbol{e}_{k_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{k_n}|$ 必须适合条件: $k_i\neq k_j$,即 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 是数 $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的一个全排列或称 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ 是 $(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的一个置换. 这时候,行列式 $|\boldsymbol{e}_{k_1},\ \boldsymbol{e}_{k_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{k_n}|$ 是一个每一行和每一列都有且只有一个元素等于 1、其余元素

都为零的行列式.显然,经过若干次行或列的对换,这样的行列式可以化为下列形状:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

上面行列式的值等于 1,因此行列式 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}|$ 的值或等于 1 或等于 -1.故 $|A|$ 的展开式一共有 $n!$ 项,每一项的值为

$$(-1)^{\varepsilon}a_{k_1,1}a_{k_2,2}\cdots a_{k_n,n},$$

其中 ε 只与排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 有关.

为了决定行列式中每一项的符号,我们引进逆序数的概念.我们称 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $(1, 2, \cdots, n)$ 为常序排列.即数字从小到大的排列为常序排列.如果在一个排列中 $j > i$ 但是 j 排在 i 之前,则称这是一个逆序排列.一个逆序排列的所有逆序的总个数称为这个排列的逆序数.逆序数的求法是:设排列为 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$,先看 k_1 后面有多少个数小于 k_1,不妨记为 m_1,再看 k_2 后有多少个数小于 k_2,设为 m_2,…一直做到 k_{n-1} 为止.和 $m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$ 就是排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数.常序排列 $(1, 2, \cdots, n)$ 的逆序数为零.

例 1.6.1　试确定 $(4, 1, 3, 2)$ 的逆序数.

解　$m_1 = 3$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$,故这个排列的逆序数为 4.

定义 1.6.1　若排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数是一个偶数(包括零),则称之为偶排列;若 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数是一个奇数,则称之为奇排列.

引理 1.6.1　设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是一个 n 个数的排列,若将其中 k_i 与 k_j 的位置对换,其余数不动,则排列的奇偶性改变.即奇排列变为偶排列,偶排列变为奇排列.

证明　首先我们考虑相邻两个数的对换.若是 $k_i > k_{i+1}$,则对换后逆序数减少了 1;若 $k_i < k_{i+1}$,则对换后逆序数增加了 1,无论哪种情形,奇偶性都改变了.再考虑一般情形.k_i 与 k_j 的对换可通过相邻数的对换来实现:不妨设 $i < j$,将 k_i 与 k_{i+1} 对换,再与 k_{i+2} 对换,…,换了 $j-i$ 次后再将 k_j 与 k_{j-1} 对换,再与 k_{j-2} 对换,…,换了 $j-i-1$ 次后,k_j 到了 k_i 原来的位置,k_i 到了 k_j 原来的位置.这样一共换了 $2(j-i)-1$ 次,因此改变了奇偶性.证毕.

引理 1.6.2　在 $n!$ 个不同的 n 个数的全排列中,奇排列与偶排列各占一半.

证明　设奇排列有 p 个，偶排列有 q 个. 将每个奇排列的头两个数对换一下，则所有的奇排列变成了偶排列，因此 $p \leqslant q$. 同理 $q \leqslant p$，故 $p = q$. 证毕.

现在我们来计算行列式 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}|$. 若 $k_i = i$，即 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (1, 2, \cdots, n)$，则该行列式的值等于 1，设 n 在第 i 位置，即 $n = k_i$，其逆序数为 m_i(这时 $m_i = n - i$). 将 k_i 与 k_{i+1} 对换，再与 k_{i+2} 对换，…，经过 m_i 次对换，n 就到了最末一位. 对 $n-1$ 进行类似的处理，经过 m_j(m_j 为 $n-1$ 的逆序数)次对换，$n-1$ 到了末尾第二位. 依次类推，正好经过 m 次对换以后 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 变成了 $(1, 2, \cdots, n)$. 这里 m 是 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数. 因此 $|e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}|$ 的值等于 $(-1)^m$，其中 m 为 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数. 这样，我们就求得了行列式的值.

$$|A| = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{N(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}, \tag{1.6.1}$$

其中 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 表示排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的逆序数.

注　我们也可以将上式作为行列式值的定义，从而推出行列式的诸性质. 事实上，有不少教科书就是采用这种方法来定义行列式的. 读者不妨自己做一尝试.

习　题　1.6

1. 写出二阶、三阶行列式的展开式并与(1.6.1)式进行比较.
2. 试求定义(1.6.1)式中项 $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-3}\cdots a_{n1}$ 所带的符号.
3. 试用(1.6.1)式来证明行列式的诸性质.
4. 根据(1.6.1)式证明行列式转置后值不变，因此行列式 $|A|$ 的值还可以这样定义：

$$\sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{N(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

5. 若一个 n 阶行列式中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个，证明这个行列式的值等于零.
6. 设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数，

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

求证：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} F_j(t)$，其中

$$F_j(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

7. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 x 是未知数，a_{ij} 是常数，证明：$f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式，且其 $n-1$ 次项的系数等于 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

*§1.7 Laplace 定理

我们已经知道，行列式可以按任一列或任一行展开. 现在我们要将这个结论作进一步推广.

首先引进 k 阶子式的概念. 设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式，$k<n$. 又 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 是两组自然数且适合条件：

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n;\quad 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n.$$

取行列式 $|A|$ 中第 i_1 行，第 i_2 行，…，第 i_k 行以及第 j_1 列，第 j_2 列，…，第 j_k 列交点上的元素，按原来 $|A|$ 中的相对位置构成一个 k 阶行列式，我们称之为 $|A|$ 的一个 k 阶子式，记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \tag{1.7.1}$$

把这个子式写出来就是：

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

在行列式$|A|$中去掉第i_1行,第i_2行,…,第i_k行以及第j_1列,第j_2列,…,第j_k列以后剩下的元素按原来的相对位置构成一个$n-k$阶行列式.这个行列式称为子式(1.7.1)的余子式,记为

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \tag{1.7.2}$$

若令$p=i_1+i_2+\cdots+i_k$, $q=j_1+j_2+\cdots+j_k$, 记

$$\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=(-1)^{p+q}M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}, \tag{1.7.3}$$

称之为子式(1.7.1)的代数余子式.我们这一节主要证明如下的Laplace(拉普拉斯)定理.

定理 1.7.1(Laplace 定理) 设$|A|$是n阶行列式,在$|A|$中任取k行(列),那么含于这k行(列)的全部k阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于$|A|$.即若取定k个行:$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,则

$$|A|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \tag{1.7.4}$$

同样若取定k个列:$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$,则

$$|A|=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \tag{1.7.5}$$

在证明Laplace定理之前,我们先举一个例子以弄清子式、代数余子式的含义以及Laplace定理的内容.例如,设有下列四阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

若固定其第二行、第三行,则共有$C_4^2(=6)$个二阶子式:

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&2\\4&1\end{vmatrix},\ A\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}5&2\\6&1\end{vmatrix}.$$

这 6 个子式相对应的代数余子式为

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+1+2}\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix},$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix},$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix},$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+2+3}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix},$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+2+4}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix},$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=(-1)^{2+3+3+4}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}.$$

于是 Laplace 定理说

$$\begin{aligned}A&=\begin{vmatrix}7&0\\-2&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}7&5\\-2&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7&2\\-2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}\\&\quad+\begin{vmatrix}0&5\\4&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&2\\4&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&2\\6&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\\&=28\times(-7)-52\times(-1)+11\times5+(-20)\times(-2)\\&\quad-(-8)\times3+(-7)\times(-1)\\&=-18.\end{aligned}$$

通过行列式计算,我们也得到原行列式的值为-18.读者还可固定其列,比如第三列、第四列来验证 Laplace 定理.

为了证明 Laplace 定理,我们可这样考虑:n 阶行列式按照(1.6.1)式共有 $n!$ 项,其中每一项如不考虑符号都由 n 个元素的积组成,A 中的每一行及每一列有且仅有一个元素在这一项中.若固定 A 的 k 行(或列),则一共有 C_n^k个不同的子式,每一个子式完全展开后均含有 $k!$ 项,相应的余子式也有 C_n^k个,每个余

子式完全展开后含有$(n-k)!$ 项. 因此在 Laplace 定理中,(1.7.4)式(或(1.7.5)式)右端一共有

$$k!(n-k)!C_n^k = n!$$

项. 所以如果我们能够证明每个 k 阶子式与其代数余子式之积中的每一项都属于 A 的展开式,那么就证明了 Laplace 定理.

引理 1.7.1 **n 阶行列式 $|A|$ 的任一 k 阶子式与其代数余子式之积的展开式中的每一项都属于 $|A|$ 的展开式.**

证明 先证明一个特殊情形: $i_1=1,\ i_2=2,\ \cdots,\ i_k=k$; $j_1=1,\ j_2=2,\ \cdots,\ j_k=k$. 这时 $|A|$ 可写为

$$\begin{vmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{vmatrix}, \tag{1.7.6}$$

其中

$$A_1 = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \tag{1.7.7}$$

$$A_2 = \hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.7.8}$$

(1.7.7)式中的任一项具有形式:

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_k)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k},$$

其中 $N(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 是排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 的逆序数. (1.7.8)式中的任一项具有形式:

$$(-1)^{N(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)} a_{j_{k+1},k+1} a_{j_{k+2},k+2} \cdots a_{j_n,n},$$

所以

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

中的任一项具有下列形式:

$$(-1)^{\sigma} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k} a_{j_{k+1},k+1} \cdots a_{j_n n}, \tag{1.7.9}$$

其中 $\sigma = N(j_1, \cdots, j_k) + N(j_{k+1}, \cdots, j_n)$. 注意 $(j_1, \cdots, j_k)$ 是 $(1, \cdots, k)$ 的一

个排列,$(j_{k+1}, \cdots, j_n)$是$(k+1, \cdots, n)$的一个排列,因此

$$N(j_1, \cdots, j_k) + N(j_{k+1}, \cdots, j_n) = N(j_1, \cdots, j_k, j_{k+1}, \cdots, j_n).$$

这就是说(1.7.9)式是$|A|$中的某一项.

再对一般情况进行证明.设

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n; \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n.$$

显然,经过 i_1-1 次相邻两行的对换,可把第 i_1 行调到第一行.同理,经过 i_2-2 次对换,可把第 i_2 行调至第二行,…,经过了 $(i_1+\cdots+i_k)-\frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换即可把第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行调至前 k 行.同理,经过 $(j_1+\cdots+j_k)-\frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换,可将第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列调至前 k 列.因此,$|A|$经过 $(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)-k(k+1)$ 次行列的对换,得到了一个新的行列式:

$$|C| = \begin{vmatrix} D & * \\ * & B \end{vmatrix},$$

其中

$$D = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

显然,$|C| = (-1)^{p+q}|A|$, $p = i_1+\cdots+i_k$, $q = j_1+\cdots+j_k$. B 是子式 D 在 C 中的余子式(也是代数余子式).由刚才讨论过的情形知道 DB 中的任一项都是 C 中的项.但是显然

$$\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q}B,$$

因此

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \tag{1.7.10}$$

中的任一项都是 $(-1)^{p+q}C = A$ 中的项.证毕.

现在我们来完成 Laplace 定理的证明.

证明　只需证明(1.7.4)式,(1.7.5)式同理可得.由引理 1.7.1 可知,(1.7.10)式中的任一项均属于$|A|$的展开式.当 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 固定时,对不同的 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$,由(1.7.10)式展开得到的项是没有重复的,且一共

有 $n!$ 项. $|A|$的展开式中也有 $n!$ 项,因此(1.7.4)式成立. 证毕.

Laplace 定理通常用来做理论分析,也可以用来计算一些特殊的行列式. 下面就是两个简单的例子.

例 1.7.1 计算行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}.$$

解 因为第一列、第三列含有较多的零,因此在这两列上作 Laplace 展开得:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &\quad+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &\quad+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &=(-3)\times(-11)+(-3)\times 32+3\times(-23)\\ &=-132.\end{aligned}$$

例 1.7.2 设 n 阶行列式前 k 行和后 $n-k$ 列的交点上的元素都是零,即

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0\\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

计算其值.

解 由 Laplace 定理(按前 k 行展开)立即得到

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

习　题　1.7

1. 写出下列行列式第一行、第三行的所有子式及相应的代数余子式，并用 Laplace 定理计算其值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 设 ω 是 1 的虚立方根，即

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

试求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\ a_3 & b_3 & 1 & \omega & c_3 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 证明：在确定代数余子式的符号时，可以不利用该子式的行和列的号码和，而利用该子式的余子式的号码和.

4. 利用行列式及 Laplace 定理，证明下列恒等式：

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

5. 求 $2n$ 阶行列式的值(空缺处都是零)：

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \unicode{x22F0} & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \unicode{x22F0} & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

复 习 题 一

1. 求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{vmatrix}.$$

2. 求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. 解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 已知 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为常数，若$|A|$的值为 c，求下列行列式$|B|$的值：

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{vmatrix}.$$

5. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若将$|A|$的第一列移到最后一列，其余各列依次保持原来次序向左移动，求得到的行列式的值.

6. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若将$|A|$的所有元素改变符号，求得到的行列式的值.

7. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若将$|A|$的每个第(i, j)元素 a_{ij} 换到第 $(n-i+1, n-j+1)$ 位置上，求得到的行列式的值.

8. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若将$|A|$的每个元素 a_{ij} 换成 $(-1)^{i+j}a_{ij}$，求得到的行列式的值.

9. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若将$|A|$的每个元素 a_{ij} 换成 $b^{i-j}a_{ij}$ $(b \neq 0)$，求得到的行列式的值.

10. n 阶行列式$|A|$的值为 c，若从第二列开始每一列加上它前面的一列，同时对第一列

加上$|A|$的第 n 列,求得到的行列式的值.

11. 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

12. 计算行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

13. 计算行列式$|A|$的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

14. 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

15. 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

16. 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

17. 设行列式

$$|A_n|=\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

求证:

$$|A_n|=a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

18. 设 $f_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$,求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

19. 设 t 是一个参数,

$$|A(t)|=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix},$$

求证:

$$|A(t)|=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A(0)|$ 中的代数余子式.

*20. 若存在从 n 阶行列式集合到数集的映射 f 满足下列条件:

(1) 若 A 是对角行列式且主对角线上元素全是 1,则 $f(A)=1$;

(2) A 是任意一个 n 阶行列式,将 A 的任意两列对换得到 B,则有 $f(B)=-f(A)$;

(3) A 是任意一个 n 阶行列式,将 A 的任意一列乘以常数 k 得到 B,则 $f(B)=kf(A)$;

(4) 若 n 阶行列式 A 的第 i 列可表示为另外两个行列式 B 和 C 的第 i 列之和,而 B 和 C 的其他列都与 A 的相应列完全相同,则 $f(A)=f(B)+f(C)$.

求证:$f(A)$就是行列式 A 的值.

第二章　矩　　阵

§2.1 矩阵的概念

矩阵是什么？它有什么用处？

在上一章我们学习了 n 阶行列式的概念. 一个 n 阶行列式从形式上看无非是 n^2 个元素排成 n 行与 n 列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

在许多实际问题中，还会碰到由若干个数排成行与列的长方形数组. 在研究问题时常常需要把它作为一个整体来处理，这就需要我们引进矩阵的概念.

定义 2.1.1 由 mn 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称为 $m \times n$ 矩阵（或 $m \times n$ 阵）.

矩阵常用大写英文字母来表示，且为了写得紧凑便于分辨，往往用括弧将上述矩阵括起来. 比如上面定义中的矩阵可记为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

有时为了简单起见，就记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 这里 m 写在前面表示共有 m 行，n 写在后面表示共有 n 列.

$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 称为矩阵 A 的元素，前一个足标 i 表示这个元素在第 i 行，后一个足标 j 表示这个元素在第 j 列. a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素，或简称为 A 的第(i, j)元素. 矩阵的元素通常用英文小写字母表示或直接用数字表示.

如果矩阵 A 的元素全是实数，则称 A 为实矩阵；如果 A 的元素为复数，则称之为复矩阵. 所有元素均为零的矩阵，叫零矩阵，记为 0. 但是必须注意这个 0 不是一个数，而是一个矩阵. 有时为了强调这是一个 $m\times n$ 阵，可写为 $0_{m\times n}$.

若矩阵的行列数相等，则称之为方阵. 含有 n 行及 n 列的矩阵称为 n 阶方阵（亦称为 n 阶矩阵），行列数不相等的矩阵称为长方阵. 方阵在矩阵理论中占有特别重要的位置. 若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，则元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为 A 的主对角线. 若一个方阵除了主对角线上的元素外其余元素都等于零，就称之为对角阵. 对角阵的形状为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上述对角阵可简记为 $\mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$. 若进一步有 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称这个矩阵为单位阵. n 阶单位阵通常记为 I_n：

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

一个 n 阶方阵，如果它的主对角线以下的元素都等于零，即它具有下列形状：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 A 为上三角阵. 同样地，若 A 的主对角线上面的元素全为零，则称 A 为下三角阵. 下三角阵的形状为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们定义了矩阵的概念. 从定义可以看出,矩阵可以是各种各样的. 为了判断其异同,我们必须说明什么叫两个矩阵相等. 简单地说,两个矩阵相等要求它们"完全一样". 即若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{s\times t}$,则 $A=B$ 当且仅当 $m=s$, $n=t$,且 $a_{ij}=b_{ij}$ 对所有 i, j 都成立. 换言之,两个矩阵相等要求它们含有相同数目的行及相同数目的列,且第(i, j)个元素都对应相等.

矩阵相等的概念并不复杂,但有时也会产生混淆. 比如下面两个矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是零矩阵且常用同一个符号表示,但它们不相等. 因为一个是 2×2 矩阵,另一个是 2×3 矩阵. 下面两个矩阵也不相等,虽然它们都是 2 阶矩阵且都含有两个 0 与两个 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的每一行称为这个矩阵的一个行向量,同样它的每一列称为它的一个列向量. 一个 $1\times n$ 矩阵:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 n 维行向量;一个 $n\times 1$ 矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为 n 维列向量.

读者可能会问,矩阵和行列式有什么不同? 从上面的定义我们可以看出,矩阵就是矩形数组,而行列式(注意仅对方阵而言)是指这个方阵所对应的一个数值. 若 A 是 n 阶方阵,则我们用 $|A|$ 或 $\det A$ 表示矩阵 A 的行列式. 注意对长方阵而言,谈论其行列式显然没有意义.

§2.2 矩阵的运算

初等代数研究的是数,但是数不仅仅是数字的集合,它们之间还可以进行运算.因此,初等代数可以说是研究数及其运算的学科.现在我们要研究矩阵,即数组.数组之间也可以定义运算,研究矩阵及其运算规律是高等代数的基本任务.读者要注意,矩阵的代数运算是应实际需要引进的而不是数学家的随意创造.在这一节里我们将介绍矩阵的加、减、数乘、乘法(包括乘方)、转置与共轭.这些运算有些与通常数字的运算相似,有些则有很大的差别.读者务需熟练掌握这些概念.

一、矩阵的加减法

定义 2.2.1 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 定义 $A+B$ 是一个 $m\times n$ 矩阵且 $A+B$ 的第 (i,j) 元素等于 $a_{ij}+b_{ij}$, 即

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}).$$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在进行矩阵加法时需特别注意,相加的两个矩阵的行数与列数必须分别对应相等.凡不满足这个条件的矩阵是不可以相加的.

一个 $m\times n$ 矩阵 A 与一个 $m\times n$ 零矩阵相加显然仍等于 A,即

$$A+0=A.$$

因此零矩阵在矩阵加法中的作用与数字 0 在数的加法中的作用类似.

矩阵的减法可以看做是矩阵加法的逆运算,因此行数与列数分别相等的两个矩阵才可以相减.若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 则

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij}).$$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

两个相等的矩阵相减为零矩阵,即若 $A=B$, 则

$$A-B=0.$$

我们还可以定义负矩阵,设 $A=(a_{ij})$,定义 $-A=(-a_{ij})$. 显然

$$A+(-A)=0.$$

矩阵加减法运算规则　矩阵的加减法运算适合下列规则:

(1) 交换律: $A+B=B+A$;

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $0+A=A+0=A$;

(4) $A+(-B)=A-B$.

这些规则的验证是十分容易的,请读者自己完成.

二、矩阵的数乘

定义 2.2.2　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, c 是一个数,定义 $cA=(ca_{ij})_{m\times n}$. cA 称为数 c 与矩阵 A 的数乘.

上述定义告诉我们:一个数与一个矩阵的数乘等于将这个数乘以矩阵的每一项(即每个元素)所得的矩阵. 例如:

$$3\cdot\begin{pmatrix}1&1\\3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\9&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的负矩阵也可以看成是 -1 与 A 的数乘.

矩阵数乘运算规则　矩阵的数乘运算适合下列规则:

(1) $c(A+B)=cA+cB$;

(2) $(c+d)A=cA+dA$;

(3) $(cd)A=c(dA)$;

(4) $1\cdot A=A$;

(5) $0\cdot A=0$.

注意,在运算规则(5)中,左边的零表示数字零,右边的零则表示一个行数、列数分别与 A 相同的零矩阵.

三、矩阵的乘法

下面要定义的矩阵乘法是矩阵运算中最复杂也是最重要的一种运算. 矩阵乘法的概念是从实际需要中产生出来的,读者以后会看到这一点.

定义 2.2.3 设有 $m\times k$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times k}$,以及 $k\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})_{k\times n}$. 定义 A 和 B 的乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵且 AB 的第(i, j)元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}.$$

为了使读者看得更清楚,我们写出矩阵乘积的表达式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{r=1}^{k} a_{1r}b_{r1} & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{1r}b_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{1r}b_{rn} \\ \sum\limits_{r=1}^{k} a_{2r}b_{r1} & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{2r}b_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{2r}b_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{r=1}^{k} a_{mr}b_{r1} & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{mr}b_{r2} & \cdots & \sum\limits_{r=1}^{k} a_{mr}b_{rn} \end{pmatrix}.$$

为了掌握这个定义,我们需要注意以下两个要点:

第一,A 和 B 只有在 A 的列数等于 B 的行数时才可以相乘,这时的积写为 AB(注意不能写为 BA). 得到的积矩阵 AB 的行数等于 A 的行数,列数等于 B 的列数. 我们用下列式子来帮助记忆:

$$\begin{array}{cccc} A & B & \rightarrow & AB, \\ m\times k & k\times n & \rightarrow & m\times n, \end{array}$$

即 AB 的行列数只需把 A 与 B 的行列数合并去掉中间的两个 k 就可以了.

第二,A 与 B 的积 AB 的第(i, j)元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}.$$

上式中只涉及 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素. 也就是说 c_{ij} 等于将 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素分别相乘以后再求和的结果.

例 2.2.1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB.

解 A 是 2×3 矩阵,B 是 3×4 矩阵. 因此 AB 是 2×4 矩阵. 若令

$$C=(c_{ij})=AB,$$

则

$$c_{11}=1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot(-1)=0,$$

$$c_{12}=1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0=0,$$

$$c_{13}=1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot(-1)=0,$$

$$c_{14}=1\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 0=1,$$

$$c_{21}=2\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot(-1)=3,$$

$$c_{22}=2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0=1,$$

$$c_{23}=2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot(-1)=4,$$

$$c_{24}=2\cdot 1+1\cdot(-1)+0\cdot 0=1.$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\3&1&4&1\end{pmatrix}.$$

在这个例子中,如果把 A, B 的次序倒过来,则由于 B 的列数等于 4,A 的行数等于 2,B 与 A 不能相乘或者说它们的乘法无意义. 从这里可以看出,矩阵的乘法一般不满足交换律,即一般来说 $AB\neq BA$. 对于某些矩阵 A, B,即使 AB 与 BA 都有意义,它们也未必相等.

例 2.2.2

$$A=(1,\ 0,\ 4),\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

解

$$AB=(1,\ 0,\ 4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0=1,$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}(1,\ 0,\ 4)=\begin{pmatrix}1&0&4\\1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

从上面可以看出,AB 是一个 1×1 矩阵(我们通常把 1×1 矩阵就看成 为一个

数,不必加括号),而 BA 是一个 3×3 矩阵,显然 $AB\neq BA$.

例 2.2.3

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

在这个例子中,A, B 都是二阶方阵,但 AB 是零矩阵,BA 不是零矩阵,因此 $AB\neq BA$. 由于矩阵乘法不适合交换律,因此读者在进行运算时千万要注意,不能把乘积的次序搞错.

矩阵的乘法比通常人们所熟悉的数的乘法要复杂得多. 读者也许会问:为什么要这样来定义矩阵乘法? 当 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 时,定义 A 与 B 之积为矩阵 $(a_{ij}\cdot b_{ij})_{m\times n}$ 不是更简单吗? 我们说矩阵乘法的定义是出于实际需要. 将 A 与 B 的积定义成 $(a_{ij}\cdot b_{ij})_{m\times n}$ 在历史上也有过,但是这种乘法比起我们刚才定义的乘法来,用处要小得多. 矩阵乘法虽然比较复杂,但只要多练习,是不难掌握的. 下面我们举例来说明矩阵乘法的用途.

例 2.2.4 设有 n 个未知数 m 个方程式的线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{2.2.1}$$

令

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

注意到 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}$ 是一个 $n\times 1$ 矩阵,因此 $A\boldsymbol{x}$ 是一个 $m\times 1$ 矩阵. 方程组(2.2.1)用矩阵乘法就可简写为

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}. \tag{2.2.2}$$

这种写法不仅节省了篇幅,更重要的是可以用矩阵的方法来处理线性方程组.

矩阵乘法运算规则　矩阵乘法运算适合下列规则:

(1) 结合律: $(AB)C=A(BC)$;

(2) 分配律: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$;

(3) $c(AB)=(cA)B=A(cB)$, 这里 c 是一个数;

(4) 对任意的 $m\times n$ 阶矩阵 A, $I_mA=A=AI_n$, 其中 I_m 和 I_n 分别是 m 阶和 n 阶单位阵. 即单位阵在矩阵乘法运算中起的作用和数 1 在数字运算中起的作用类似.

证明　(1) 结合律.

首先我们注意到,由于 A 与 B 可相乘,B 与 C 也可相乘,因此可设 A 是 $m\times n$ 阵,B 是 $n\times p$ 阵,C 是 $p\times q$ 阵. 于是,AB 是一个 $m\times p$ 阵,$(AB)C$ 是一个 $m\times q$ 阵. 另一方面,BC 是一个 $n\times q$ 阵, $A(BC)$是一个 $m\times q$ 阵. 因此只需验证两个 $m\times q$ 阵的任意第(i, j)个元素对应相等就可以了. 现设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{p\times q}$. 矩阵$(AB)C$ 的第(i, j)元素可以看成是 AB 的第 i 行元素与 C 的第 j 列元素对应相乘之和,而 AB 的第 i 行的元素为

$$\left(\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{r1},\ \sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{r2},\ \cdots,\ \sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rp}\right),$$

C 的第 j 列为

$$\begin{pmatrix}c_{1j}\\c_{2j}\\\vdots\\c_{pj}\end{pmatrix},$$

因此,$(AB)C$ 的第(i, j)元素为

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{r1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{r2}\right)c_{2j}+\cdots+\left(\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rp}\right)c_{pj}\\&=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rk}c_{kj}.\end{aligned}$$

另一方面,用同样办法可以求得 $A(BC)$的第(i, j)元素为

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{rk}c_{kj}\right)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ir}b_{rk}c_{kj}.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ir}b_{rk}c_{kj},$$

因此有

$$(AB)C=A(BC).$$

(2) 分配律.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{n\times p}$,则 $B+C=(b_{ij}+c_{ij})_{n\times p}$. 因此 $A(B+C)$ 的第(i, j)元素为

$$\begin{aligned}&a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})+\cdots+a_{ip}(b_{pj}+c_{pj})\\=&(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj})+(a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{ip}c_{pj}).\end{aligned}$$

显然这就是 $AB+AC$ 的第(i, j)元素,

(3)与(4)都很容易,请读者自己验证. 证毕.

由矩阵乘法的结合律,我们今后将$(AB)C$或$A(BC)$直接写为 ABC,中间不再加括号. 利用结合律还可将若干个矩阵的乘积简写为 $A_1A_2\cdots A_m$,中间无需加任何括号.

我们还可以定义同一矩阵的乘方(即幂). 记

$$A^2=A\cdot A,$$

$$A^3=A\cdot A\cdot A,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^k=A\cdot A\cdot\cdots\cdot A(k\text{ 个 }A).$$

要使 A 的乘方有意义,A 的行数必须等于列数,也就是说 A 必须是方阵.

方阵幂的运算规则

(1) $A^rA^s=A^{r+s}$;

(2) $(A^r)^s=A^{rs}$.

由于矩阵的乘法不满足交换律,因此一般来说若 $r>1$,则$(AB)^r\neq A^rB^r$. 只有当 $AB=BA$ 时才有 $(AB)^r=A^rB^r$. 虽然矩阵乘法不可交换,但对于某些特殊的矩阵,乘法仍是可以交换的. 比如由矩阵乘法的运算规则(4)知 I_n 可以与任一 n 阶方阵相交换;事实上,若 c 是某个数,则 cI_n 与任一 n 阶方阵乘法可以交

换.当 $AB=BA$ 时,不难验证"二项式定理"也成立:

$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\cdots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n.$$

矩阵乘法除了不可交换是它的一个特点外,还有一个特点是两个非零矩阵相乘其积可能为零矩阵.这一点由前面的例子我们已经看到.由于这个缘故,对矩阵的乘法来说,消去律一般不成立.即若 $AB=AC$, $A\neq 0$, 我们不能推出 $B=C$. 何时可用消去律,我们将在后面讨论.

四、矩阵的转置

矩阵的转置与行列式的转置定义是类似的.

定义 2.2.4　设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,定义 A 的转置 A' 为一个 $n\times m$ 矩阵,它的第 k 行正好是矩阵 A 的第 k 列 $(k=1,2,\cdots,n)$;它的第 r 列是 A 的第 r 行 $(r=1,2,\cdots,m)$.

例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&3&0&5\\\sqrt{2}&1&-2&0\end{pmatrix},$$

则

$$A'=\begin{pmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\2&3&1\\1&0&-2\\0&5&0\end{pmatrix}.$$

矩阵转置运算规则

(1) $(A')'=A$;

(2) $(A+B)'=A'+B'$;

(3) $(cA)'=cA'$;

(4) $(AB)'=B'A'$.

证明　上述(1)～(3)是显然的,现来证明(4).设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, 又设 $C=AB$,且 $C=(c_{ij})_{m\times p}$, 则 C 的第 (i,j) 元素为

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}.$$

因此,C' 的第 (j,i) 元素为 c_{ij}. 再看 $B'A'$,它的第 (j,i) 元素等于 B' 的第 j 行元

素与A'的第i列元素对应相乘之和. 但B'的第j行元素等于B的第j列元素，A'的第i列元素等于A的第i行元素. 它们对应元素相乘之和恰为

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=c_{ij}.$$

另外，显然C'与$B'A'$的行、列数分别相等，因此$C'=B'A'$，证毕.

一个矩阵经转置以后得到的矩阵一般来说与原矩阵不同. 如果一个方阵转置后仍与原矩阵相同，即$A'=A$，则称这样的矩阵为对称矩阵. 例如下列矩阵为对称矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&5\\0&5&-1\end{pmatrix}.$$

若一个方阵经转置后等于原矩阵的负矩阵，就称它是一个反对称矩阵，例如下列矩阵为反对称矩阵：

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&0&-5\\-1&5&0\end{pmatrix}.$$

对称矩阵特别是实对称矩阵我们今后还要进行仔细研究. 读者不难看出，对称矩阵的元素以主对角线为对称线，即$a_{ij}=a_{ji}$；反对称矩阵主对角线上的元素皆为零，且$a_{ij}=-a_{ji}$.

五、矩阵的共轭

复矩阵还有一种运算，称为共轭运算. 设z是一个复数，$z=a+bi$，我们用$\bar{z}$表示z的共轭复数$a-bi$.

定义 2.2.5 **设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是一个复矩阵，则A的共轭矩阵$\overline{A}$是一个$m\times n$复矩阵，且**

$$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}.$$

这就是说，A的共轭矩阵的每个第(i,j)元素是A的第(i,j)元素的共轭复数. 例如

$$A=\begin{pmatrix}1+i&0&1+\sqrt{2}i\\2i&-1&-4i\\-4-i&\sqrt{3}i&i\end{pmatrix},$$

则

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 0 & 1-\sqrt{2}\mathrm{i}\\ -2\mathrm{i} & -1 & 4\mathrm{i}\\ -4+\mathrm{i} & -\sqrt{3}\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

矩阵共轭运算规则

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{cA}=\overline{c}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(4) $(\overline{A'})=(\overline{A})'$.

这些规则很容易验证,请读者自己完成.

习　题　2.2

1. 计算:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $3\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ 0 & -4\end{pmatrix}$;

(3) $2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 8 & 0\end{pmatrix}$.

2. 计算:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\\ 3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

试求 AB 与 BA.

4. 计算:

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^5$;　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$;　(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$.

5. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶对称矩阵,$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $1\times n$ 矩阵, 试求:XAX'.

6. 试证:上(下)三角阵的和、差、数乘及乘积仍是上(下)三角阵.

7. 若 A 是 n 阶方阵且 $A^n=0$, 则

$$(I_n-A)(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I_n.$$

8. 若 A 是下列 n 阶方阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

求证: $A^n=0$.

9. 设 A 是实对称矩阵,若 $A^2=0$,求证:$A=0$.

10. 证明:任一 n 阶方阵均可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

11. 若 $A=\operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B=\operatorname{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 则

$$AB=\operatorname{diag}\{a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n\}.$$

12. 求与矩阵 A 乘法可交换的所有矩阵:

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;　(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. 求证:

(1) 若 A, B 为 n 阶对称矩阵,则 AB 为对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

(2) 若 A 为对称矩阵,B 为同阶反对称矩阵,则 AB 为反对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

14. 求证:

(1) 与所有 n 阶对角阵乘法可交换的矩阵也必是 n 阶对角阵;

(2) 与所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵是形如 cI_n 的对角阵(这种矩阵称为纯量阵).

15. 设 A 是 n 阶复矩阵,若 $\overline{A'}=A$ (即转置共轭矩阵等于自身),则称 A 是一个 Hermite (厄米特)矩阵. 若 $\overline{A'}=-A$, 称 A 是斜 Hermite 矩阵. 求证:任一复 n 阶矩阵均可表示为一个 Hermite 矩阵与一个斜 Hermite 矩阵之和.

§2.3 方阵的逆阵

我们已经介绍了矩阵的加减法、数乘、乘法等运算,读者会问:矩阵有除法吗? 我们知道,在数字运算中,除法是乘法的逆运算,它可以通过求倒数来实现.即若求数 a 除以 $b(b\neq 0)$ 的商,则只需求出 $b^{-1}=\dfrac{1}{b}$,于是 $\dfrac{a}{b}=ab^{-1}$. 对矩阵我们也可以这样做,先定义矩阵的逆阵,然后将矩阵的除法归结为一个矩阵和另外一个矩阵的逆阵之积. 但是现在有一个问题:矩阵的乘法一般是不可交换的,因此对矩阵逆的定义要有更严格的要求.

定义 2.3.1　*设 A 是 n 阶方阵,若存在一个 n 阶方阵 B,使得*

$$AB=BA=I_n,$$

则称 B 是 A 的逆阵,记为 $B=A^{-1}$. 凡有逆阵的矩阵称为可逆阵或非奇异阵(简称非异阵),否则称为奇异阵(简称奇异阵).

矩阵的求逆运算有它自己的特点,我们必须注意:

(1) 根据上述定义,只有方阵才有逆阵,长方阵没有逆阵.

(2) 并非任一非零方阵都有逆阵. 比如,矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

就没有逆阵. 因为对任一 $B=(b_{ij})_{2\times 2}$,有

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}\\0&0\end{pmatrix}.$$

AB 不可能是单位阵.

注　从这里我们可以发现,若某个矩阵有一行元素全等于零,则这个矩阵一定不是可逆阵. 同理不难证明,若某个矩阵的一列全等于零,则该矩阵也必不是可逆阵.

(3) 由于矩阵的乘法一般不满足交换律,因此一般来说,$AB^{-1}\neq B^{-1}A$. 即右除不一定等于左除.

一个 n 阶方阵 A 若有逆阵,则逆阵唯一吗? 设 B, C 是 n 阶方阵,且都是 A 的逆阵,即

$$AB=BA=I_n,\ AC=CA=I_n,$$

则

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

因此只要矩阵可逆,其逆阵必唯一.

矩阵求逆运算规则

(1) 若 A 是非异阵,则 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) 若 A, B 都是 n 阶非异阵,则 AB 也是 n 阶非异阵且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(3) 若 A 是非异阵,c 是非零数,则 cA 也是非异阵且 $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$;

(4) 若 A 是非异阵,则 A 的转置 A' 也是非异阵且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

证明 (1) 因为 $(A^{-1})A = A(A^{-1}) = I_n$, 故 A 是 A^{-1} 的逆阵.

(2) 我们有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

同理 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

(3) 显然.

(4) 由 $AA^{-1} = I_n$, 两边转置并注意到 $I_n' = I_n$, 得:

$$(AA^{-1})' = I_n.$$

但由转置的性质知

$$(AA^{-1})' = (A^{-1})'A'.$$

因此

$$(A^{-1})'A' = I_n.$$

同理

$$A'(A^{-1})' = I_n.$$

证毕.

需要提请读者注意的是法则(2): $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 一般来说 $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$, 只有当 $AB = BA$ 时才有 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

用数学归纳法我们易证明:

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},$$

其中每个 A_i 都是可逆阵.

如何求逆阵? 我们介绍一个方法.

设 A 是 n 阶方阵,这个方阵决定了一个 n 阶行列式记为 $|A|$ 或 $\det A$. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定义 2.3.2 设 A 是 n 阶方阵,A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中第$(i,\ j)$元素 a_{ij} 的代数余子式,则称下列矩阵为矩阵 A 的伴随矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

A 的伴随矩阵通常记为 A^*.

定理 2.3.1 若 $|A|\neq 0$, 则 A 是一个非异阵,且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

证明 令 $B=\frac{1}{|A|}A^*$,只要验证 $AB=BA=I_n$ 即可.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式中两个矩阵乘积的第$(i,\ j)$元素为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

由第一章定理 1.4.1 知道,当 $i=j$ 时上式为$|A|$,当 $i\neq j$ 时上式等于零. 因此

$$AB = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = I_n.$$

同理可证

$$BA = I_n.$$

因此 $B = A^{-1}$. 证毕.

注 我们在以后将证明若 A 是非异阵,则 $|A| \neq 0$. 因此上述定理提供了计算逆阵的一般方法.但是用这个定理计算逆阵必须计算所有的 A_{ij},计算量一般是相当大的.我们将在 § 2.5 中介绍一种比较简单的计算方法.

利用逆阵来解线性方程组将显得特别简单.由 § 2.2 知道一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

可写成矩阵形式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta},$$

其中 $A = (a_{ij})$. 若 $|A| \neq 0$, 则 A^{-1} 必存在,因此

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{\beta},$$

即

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

将上式中的矩阵写出来就是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) = \frac{|A_1|}{|A|},$$

其中

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同理可得其余的 x_i. 显然,这就是 Cramer(克莱姆)法则.

习　题　2.3

1. 求下列矩阵的逆阵:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} (a_i \neq 0)$.

2. 用求逆阵的方法解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11. \end{cases}$$

3. 若 A 是非异阵,求证:对任一 $k > 0$, 有

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

4. 若 A 是非异阵,则消去律成立,即从 $AB = AC$, 可推出 $B = C$,从 $BA = CA$ 也可推出 $B = C$.

5. 求证:有一行元素(或一列元素)全为零的 n 阶方阵必是奇异阵.

6. 若 n 阶方阵 A 是幂零阵,即存在 $m > 0$,使 $A^m = 0$. 求证:$I_n - A$ 是非异阵.

7. 设 A, B 及 $A + B$ 都是非异阵,求证:$A^{-1} + B^{-1}$ 也是非异阵.

8. 一个 n 阶方阵 A 如果适合条件: $A^2 = I_n$, 则称 A 为对合阵. 若 A 是对合阵且 $I_n + A$ 是非异阵,求证:$A = I_n$.

9. 已知 A 是 n 阶幂等矩阵,即 $A^2 = A$. 求证:$A + I_n$ 必是非异阵.

10. 设 A 适合条件 $A^2 - A - 3I_n = 0$,求证:$A - 2I_n$ 是非异阵.

§2.4　矩阵的初等变换与初等矩阵

一、Gauss(高斯)消去法与矩阵的初等变换

用 Gauss 消去法来解线性方程组是一种简便常用的方法,特别当未知数个

数不太多时，人们乐意采用这种方法在计算机上解线性方程组. 我们举例来说明这种方法.

例 2.4.1　用消去法求解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

解　将上述方程组中的第一式与第二式对调得：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

将得到的方程组的第一式乘以 $-\frac{3}{2}$ 加到第三式上：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -\dfrac{7}{2}x_2 - 4x_3 = -\dfrac{17}{2}. \end{cases}$$

将上面的第二式乘以 $\frac{7}{2}$ 加到第三个方程式上：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -\dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

将得到的第三式两边乘以 -2：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

将上面的最后一式分别乘以 -1，-2 加到第二式及第一式：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

最后将上面的第二式乘以-3加到第一式上,两边再乘以$\frac{1}{2}$就得到方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

上述求解过程可以用矩阵的变换来代替.将原方程组的系数及常数列排成一个矩阵,称为系数矩阵的增广矩阵,用$\widetilde{A}$表示:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

现在将求解过程用矩阵来描写如下.

将$\widetilde{A}$的第一行与第二行对换得:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

将上面矩阵的第一行乘以$-\frac{3}{2}$加到第三行上:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -4 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以$\frac{7}{2}$加到第三行上:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

将第三行乘以-2得:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

再将第三行再乘以-1加到第二行上,将第三行乘以-2加到第一行上得到:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

将第二行乘以-3加到第一行上并将所得结果再乘以$\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

从上面的分析可以看出,用 Gauss 消去法解线性方程组的过程可以归结为对矩阵的变换.这不仅简化了解方程组的过程,更重要的是为彻底弄清线性方程组解的理论提供了工具.上面例子适用于求解一般的线性方程组,我们把这种矩阵形式的 Gauss 消去法归结如下:

第一步:将线性方程组写成标准形式并写出系数矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$.

第二步:将$\widetilde{A}$中某一行调到第一行,使第一行第一列的元素不为零.

第三步:将得到的矩阵的第一行乘以某个数加到第二行上去消去第二行第一列的元素.重复这一方法,直到消去第一列除第一行以外的所有元素.

第四步:重复上述步骤,使第二行第二列的元素不为零并消去第二列上其余元素.不断用这个方法,将系数矩阵变成对角阵.

第五步:在每一行乘以适当的非零数使系数矩阵变为单位阵,从而写出线性方程组的解.

在上述步骤中,我们对矩阵施行了以下 3 种变换:

(1) 两行对换;

(2) 以某一非零数乘以某一行;

(3) 以某一数乘以某一行后加到另一行上去.

这 3 种变换并不改变线性方程组的解.也就是说,对应的新方程组与原方程组总是同解的.

定义 2.4.1 下列 3 种矩阵变换分别称为矩阵的第一类、第二类、第三类初等行(列)变换:

(1) 对调矩阵中某两行(列)的位置;

(2) 用一非零常数乘以矩阵的某一行(列);

(3) 将矩阵的某一行(列)乘以数 c 后加到另一行(列)上去.

上述 3 种变换统称为矩阵的初等变换.

显而易见,我们在上面对方程组的增广矩阵实施了矩阵的行初等变换.

定义 2.4.2　如果一个矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B,则称 A 与 B 是等价的,或 A 与 B 相抵,记为 $A\sim B$.

用初等变换可以将一个矩阵化简到什么程度?下面的定理回答了这个问题.

定理 2.4.1　一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 必相抵于下面形式的 $m\times n$ 矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

上面的矩阵中前 r 行及前 r 列交点处有 r 个 1,其余元素皆为零.换言之,任一 $m\times n$ 阵均与一个主对角线上元素等于 1 或 0 而其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵相抵.

证明　若 $A=0$,则结论显然成立.

现设 $A\neq 0$,即 A 至少有一个元素 $a_{ij}\neq 0$.如果 a_{ij} 不在第(1, 1)位置,那么可将它所在的行与第一行对换,再将它所在的列与第一列对换就可将 a_{ij} 调至第(1, 1)位置.所以我们不妨设 $a_{11}\neq 0$.接下去将第一行依次乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上去 $(i=2, 3, \cdots, m)$,于是第一列元素除 a_{11} 外都变成了零.再将第一列元素乘以 $-a_{11}^{-1}a_{1j}$ 后加到第 j 列上去 $(j=2, 3, \cdots, n)$,则第一行元素除了 a_{11} 外都变成零.再用 a_{11}^{-1} 乘以第一行,就得到第(1, 1)元素等于 1 而第一行及第一列其他元素都是零的矩阵,其形状如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

再对第二行第二列采用与上面相同的步骤使第(2, 2)位置的元素不等于 0,并用同样办法消去除第(2, 2)元素外第二行及第二列的所有元素.显然,在进行上述过程中第一列及第一行的元素保持不变.这样不断做下去,直到变成(2.4.1)式的形状为止.证毕.

注　在这个定理中,对给定的矩阵 A,无论进行怎样的初等变换,最后得到的对角形矩阵中的 r 总是不变的这一重要事实将在第三章予以证明. 矩阵(2.4.1)称为矩阵 A 的相抵标准型.

例 2.4.2　用初等变换将下列矩阵化为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to {}^{(-2)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

化到这一步接下去可将第一列分别乘以 -2、乘以 2、乘以 -4 后加到第二列、第三列、第四列上去,使第一行中除第(1, 1)元素外其余都等于零. 但是这时由于第一列除第一个元素外其余都为零,因此在整个过程中第二列、第三列、第四列的元素除处在第一行的元素外都不变,因此我们不必再写出具体过程而直接写出结果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

接下去再继续进行初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

这一步是为了避免分数运算.

$${}^{(4)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -9 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在进行初等变换时,有些步骤可并在一起以节省篇幅.

例 2.4.3　用初等变换化下列矩阵为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} (2)\ (3) & \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} & (2) \\ (-1) & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们在进行初等变换的过程中,通常需要同时用行变换和列变换,如果将初等变换仅限制为行变换,定理 2.4.1 还成立吗?

考虑下面的 1×3 矩阵:

$$(0,1,2).$$

显然,我们仅用行变换无论如何也不能将它化为标准型.

但是我们可以用行初等变换将矩阵化为所谓的阶梯形(上阶梯形). 若一个矩阵的非零元素组成一个阶梯,我们就称之为阶梯矩阵. 上三角阵是阶梯矩阵的特例. 下面几个矩阵是阶梯形矩阵的例子:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 & 20 & -\sqrt{2} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 31 & 21 & -1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面几个矩阵不是阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

定理 2.4.2 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵,则经过若干次初等行变换,A 可以化为阶梯形矩阵.

证明 假定 A 的第一列元素全为零,则初等变换从第二列开始. 现设 A 的第一列元素不全为零,则用行对换将非零元素换到第(1, 1)位置. 再用第三类行初等变换即可将第一列其余元素消为零. 再看第二列,如果这时从第(2, 2)位置(包括第(2, 2)元素)以下全为零,则移至下一列. 若否,用行对换将非零元素换到第(2, 2)位置,再用第三类初等变换消去这一列第(2, 2)位置以下的元素. 就这样不断做下去即可得到一个阶梯形矩阵. 证毕.

二、初等矩阵

矩阵的初等变换能否通过矩阵的运算来实现?为此我们引进初等矩阵的概念.

定义 2.4.3　对单位阵 I_n 施以第一类、第二类、第三类初等变换后得到的矩阵分别称为第一类、第二类及第三类初等矩阵.

3 类初等矩阵的形状如下.

第一类初等矩阵　第一类初等矩阵 P_{ij} 表示将单位阵的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵:

$$P_{ij}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}.$$

注　P_{ij} 也可由单位阵的第 i 列与第 j 列对换而得.

第二类初等矩阵　第二类初等矩阵 $P_i(c)$ 等于将常数 $c(c\neq 0)$ 乘以单位阵的第 i 行(或 i 列)而得到的矩阵:

$$P_i(c)=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

第三类初等矩阵　第三类初等阵 $T_{ij}(c)$ 表示将单位阵的第 i 行(第 j 列)乘以 c 后加到第 j 行(第 i 列)上得到的矩阵:

$$T_{ij}(c)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&c&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}.$$

下面的定理揭示了初等变换与初等矩阵的密切联系.

定理 2.4.3 *设 A 是一个 $m\times n$ 阵，则对 A 作一次行初等变换后得到的矩阵等于用一个 m 阶相应的初等矩阵(即第一类初等变换相应于第一类初等矩阵，第二类初等变换相应于第二类初等矩阵，等等)左乘 A 后得到的积. 矩阵 A 作一次列初等变换后得到的矩阵等于用一个 n 阶相应的初等矩阵右乘 A 后所得到的积.*

证明 我们只对行初等变换进行证明，对列的证明类似可得. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 由实际计算得：

$$P_{ij}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这等于将 A 的第 i 行与第 j 行对换.

$$P_i(c)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这等于将 A 的第 i 行乘以 c. 而

$$T_{ij}(c)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1}+a_{j1} & ca_{i2}+a_{j2} & \cdots & ca_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这等于将 A 的第 i 行乘以 c 后加到第 j 行上去. 证毕.

注 我们通常用“行左列右”来表示定理中初等矩阵与初等变换的关系.

推论 2.4.1 初等矩阵都是非异阵且其逆阵仍是同类初等矩阵：

$$P_{ij}^{-1}=P_{ij},\ P_i(c)^{-1}=P_i\left(\frac{1}{c}\right),\ T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c).$$

证明 由定理立即可得. 证毕.

推论 2.4.2 非异阵经初等变换后仍是非异阵，奇异阵经初等变换后仍是奇异阵.

证明 因为初等矩阵都是可逆阵，可逆阵和可逆阵之积仍可逆，所以第一个结论成立. 又设 A 是奇异阵，P 是初等矩阵，假定 PA 是非异阵，注意到 P^{-1} 也是初等矩阵，故 $A=P^{-1}(PA)$ 将是非异阵，矛盾，因此 PA 必是奇异阵. 同理 AP 也是奇异阵. 证毕.

推论 2.4.3 3 类初等矩阵的行列式如下：

$$|P_{ij}|=-1,\ |P_i(c)|=c,\ |T_{ij}(c)|=1.$$

证明 因为单位阵的行列式等于 1，故交换单位阵两行而得到的矩阵 P_{ij} 的行列式等于 -1. 其余结论显然，证毕.

定理 2.4.4 矩阵的相抵关系适合下列性质：

(1) $A\sim A$；

(2) 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 若 $A\sim B$, $B\sim C$，则 $A\sim C$.

证明 (1) 显然单位阵 I 也是初等矩阵，而 $IA=A$ 表明 $A\sim A$.

(2) 由 $A\sim B$ 可知，存在初等矩阵 $P_1, \cdots, P_m$ 以及初等矩阵 $Q_1, \cdots, Q_s$，使

$$P_m\cdots P_1AQ_1\cdots Q_s=B.$$

于是

$$P_1^{-1}\cdots P_m^{-1}BQ_s^{-1}\cdots Q_1^{-1}=A.$$

但是初等矩阵的逆阵仍是初等矩阵，因此 $B\sim A$.

(3) 由 $A\sim B, B\sim C$，可设

$$B=P_m\cdots P_1AQ_1\cdots Q_k,\ C=S_s\cdots S_1BT_1\cdots T_t,$$

其中 P_i, Q_i, S_i, T_i 都是初等矩阵. 于是

$$C=S_s\cdots S_1P_m\cdots P_1AQ_1\cdots Q_kT_1\cdots T_t.$$

因此 $A\sim C$. 证毕.

习　题　2.4

1. 用初等变换将下列矩阵化为对角阵：

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 12 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & -9 \\ 26 & 21 & 26 & -10 & -51 \\ 15 & 14 & 13 & -15 & -54 \end{pmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否相抵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. 求证：n 阶方阵 A 非异的充分必要条件是它和 I_n 相抵.

4. 求证：对任意的 $m\times n$ 矩阵，总存在可逆 m 阶矩阵 P 和可逆 n 阶矩阵 Q 使得 PAQ 是相抵标准型.

§2.5　矩阵乘积的行列式与用初等变换法求逆阵

一、矩阵乘积的行列式

我们在上一节中证明了任意一个矩阵 A 都可以通过初等变换化为相抵标准型，我们还证明了如果限制只用行变换，则可以将矩阵化为阶梯形. 如果矩阵 A 是一个 n 阶可逆阵，我们是否能够只用行变换就将它化为标准型呢？

引理 2.5.1　*设 A 是一个 n 阶可逆阵（即非异阵），则仅用行初等变换或仅用列初等变换就可以将它化为单位阵 I_n.*

证明　我们先证明仅用行初等变换可以将 A 化为主对角元素全不等于零的上三角阵. 因为 A 可逆，所以它没有整行或整列元素全为零. 因此 A 的第一列至少有一个非零元素，通过行初等变换可以将它换到第(1, 1)位置. 用这个非零元素经过第三类行初等变换就可以将第一列元素(除第(1, 1)元素)全化为零. 于是我们不妨假定

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们现在要说明 a_{22}, $\cdots$, a_{n2}不全为零.若否,则通过第三类列初等变换用 a_{11} 可以消去 a_{12},于是非异阵 A 经过初等变换将化为一个第二列全为零的矩阵,即化为一个奇异阵,这与上一节的结论矛盾.既然 a_{22}, $\cdots$, a_{n2}不全为零,我们又可以通过行初等变换将非零元素换到第(2, 2)位置上,再消去第二列第(2, 2)位置以下的元素.不断这样做下去,即可将 A 化为上三角阵且主对角元素全不为零.

假定我们得到的上三角阵为

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

则因为 $b_{nn}\neq 0$, 用行变换即可消去 $b_{jn}(j=1,\ \cdots,\ n-1)$. 接下去,再用 $b_{n-1,\ n-1}$ 消去 $b_{j,\ n-1}(j=1,\ \cdots,\ n-2)$ 等等.于是我们得到了一个主对角元素全不为零的对角阵.最后用第二类行初等变换即可将之化为单位阵 I_n.同理可证明仅用列初等变换也可以将非异阵 A 化为单位阵 I_n. 证毕.

推论 2.5.1　*任一 n 阶非异阵均可表示成有限个初等矩阵的积.*

证明　由上面的引理知道,存在有限个初等矩阵 P_1, $\cdots$, P_m,使得

$$P_m\cdots P_1A=I_n,$$

因此

$$A=P_1^{-1}\cdots P_m^{-1}.$$

而初等矩阵的逆阵仍是初等矩阵,故结论成立. 证毕.

下面我们要讨论这样一个问题:若 A,B 都是 n 阶矩阵,它们积的行列式 $|AB|$ 和 $|A|$, $|B|$ 有什么关系? 先讨论简单的情形,即 A,B 中至少有一个是初等矩阵的情形.由行列式性质,我们很容易得到下面的引理.

引理 2.5.2　*设 A 是一个 n 阶方阵,Q 是一个 n 阶初等矩阵,则*

$$|QA|=|Q||A|=|AQ|.$$

证明　若 $Q=P_{ij}$, 则 QA 为 A 的第 i 行及第 j 行对换后所得之矩阵,其行列式的值等于 $-|A|$. 但 $|P_{ij}|=-1$, 因此 $|P_{ij}A|=-|A|=|P_{ij}||A|$. 若

$Q = P_i(c)(c \neq 0)$，同样不难验证 $|P_i(c)A| = c|A| = |P_i(c)||A|$. 最后，$|T_{ij}(c)A| = |A|$，$|T_{ij}(c)| = 1$，故 $|T_{ij}(c)A| = |T_{ij}(c)||A|$. 当 Q 作用在 A 右侧时也可类似证明. 证毕.

定理 2.5.1 一个 n 阶方阵 A 为非异阵的充分必要条件是它的行列式的值不等于零.

证明 由定理 2.3.1 知道若 $|A| \neq 0$，则 A 是非异阵，故只需证明若 A 非异，则 $|A| \neq 0$. 但由推论 2.5.1，非异阵 A 等于有限个初等矩阵之积，设 $A = P_1P_2\cdots P_t$，则从上面的引理知道，$|A| = |P_1||P_2|\cdots|P_t|$. 由于初等矩阵的行列式不等于零，故 $|A| \neq 0$. 证毕.

现在我们可以证明下述重要的行列式乘法定理.

定理 2.5.2 设 A,B 都是 n 阶矩阵，则

$$|AB| = |A||B|.$$

证明 分两种情形. 第一种情形，设 A 是非异阵. 则存在若干个初等矩阵 $Q_1, \cdots, Q_m$，使 $A = Q_1\cdots Q_m$，故

$$\begin{aligned}|AB| &= |Q_1\cdots Q_mB| = |Q_1|\cdots|Q_m||B| \\ &= |Q_1\cdots Q_m||B| = |A||B|.\end{aligned}$$

第二种情形，设 A 为奇异阵，这时 $|A| = 0$，故只需证明 $|AB| = 0$. 因为 A 是奇异阵，故存在初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s; Q_1, \cdots, Q_r$，使得

$$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_r = D,$$

其中 D 是 A 的相抵标准型，它是一个对角阵，主对角元素为 1 或 0. 因为 A 奇异，所以 D 也是奇异阵，至少最后一行全为零. 又

$$P_s\cdots P_1A = DQ_r^{-1}\cdots Q_1^{-1}.$$

由矩阵乘法知道，因为 D 的第 n 行元素全为零，所以 $DQ_r^{-1}\cdots Q_1^{-1}$ 从而 $P_s\cdots P_1A$ 的第 n 行等于零. 于是 $P_s\cdots P_1AB$ 的第 n 行也等于零. 故

$$|P_s|\cdots|P_1||AB| = |P_s\cdots P_1AB| = 0,$$

其中 $|P_i| \neq 0(i = 1, \cdots, s)$，于是 $|AB| = 0 = |A||B|$. 证毕.

推论 2.5.2 一个奇异阵与任一同阶方阵之积仍为奇异阵，两个非异阵之积仍为非异阵.

证明 由定理 2.5.2 及定理 2.5.1 即得. 证毕.

推论 2.5.3 若 A 是非异阵，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

证明 $|AA^{-1}|=|I_n|=1$,而 $|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$,由此即得 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$. 证毕.

推论 2.5.4 若 A, B 都是 n 阶方阵且 $AB=I_n$(或 $BA=I_n$),则 $BA=I_n$(或 $AB=I_n$),即 $B=A^{-1}$.

证明 因为 $|A||B|=|AB|=|I_n|=1$,所以 $|A|\neq 0$, 即 A 是非异阵. 设 C 是 A 的逆阵,则 $CA=I_n$,而 $B=I_nB=(CA)B=C(AB)=CI_n=C$,因此 $B=A^{-1}$. 同理若 $BA=I_n$,也可推出 $AB=I_n$. 证毕.

例 2.5.1 计算下列 $n+1$ 阶矩阵 A 的行列式:

$$A=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n\\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n\end{pmatrix}.$$

解 将 A 分解为两个矩阵之积:

$$A=\begin{pmatrix}1 & C_n^1a_0 & C_n^2a_0^2 & \cdots & a_0^n\\ 1 & C_n^1a_1 & C_n^2a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & C_n^1a_n & C_n^2a_n^2 & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0^n & b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n\\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

上式左边矩阵的行列式每一列提出公因子后就是一个 Vander Monde 行列式. 右边矩阵的行列式也可以化为 Vander Monde 行列式并求出其值,于是

$$|A|=C_n^1C_n^2\cdots C_n^n\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)(b_j-b_i).$$

例 2.5.2 计算行列式:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & w\\ y & -x & w & -z\\ z & -w & -x & y\\ w & z & -y & -x\end{vmatrix}.$$

解 设该行列式代表的矩阵为 A,则

$$AA'=\begin{pmatrix}x & y & z & w\\ y & -x & w & -z\\ z & -w & -x & y\\ w & z & -y & -x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z & w\\ y & -x & -w & z\\ z & w & -x & -y\\ w & -z & y & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & 0 & 0 & 0\\ 0 & u & 0 & 0\\ 0 & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & u\end{pmatrix},$$

其中 $u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. 因此

$$|A|^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^4.$$

令 $x = 1,\ y = z = w = 0$,显然 $|A| = -1$, 故

$$|A| = -(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2.$$

二、初等变换法求逆阵

我们知道,用伴随求非异阵的逆阵是非常麻烦的,有没有更加简单的方法?

由引理 2.5.1 知道,任意一个可逆阵都可以只用行初等变换将它化为单位阵. 若 A 是可逆阵,则存在初等矩阵 $Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_t$,使得

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t A = I_n.$$

故

$$A^{-1} = Q_1 Q_2 \cdots Q_t = Q_1 Q_2 \cdots Q_t I_n.$$

这两个式子启发我们可以这样来求逆阵:

作一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(A,\ I_n)$. 这个矩阵的前 n 列为 A,后 n 列为单位阵 I_n. 对矩阵 $(A,\ I_n)$ 进行行初等变换把 A 变成 I_n,这时右边的 I_n 就变成了 A^{-1}. 我们下面举例来说明这个方法.

例 2.5.3 求下列非异阵 A 的逆阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解

$$(A,\ I_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

对 $(A,\ I_3)$ 进行行初等变换:

$$\begin{array}{c}(-1)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$
\begin{array}{c}\\(3)\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\ \\(3)\ (1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\to
$$

$$
\begin{array}{c}\\(-2)\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&-14&3&9\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\ \\(-1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\to
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right).
$$

于是

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.
$$

注　在用初等变换法求逆阵的整个过程中,对$(A,\ I_n)$只能用行初等变换而不能用列初等变换. 请读者考虑这样一个问题:

如果我们只用列初等变换,如何来求已知可逆阵的逆阵?

例 2.5.4　**求解下列矩阵方程:**

$$
\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}.
$$

解　因为

$$
\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{vmatrix}\neq 0,
$$

故

$$
X=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}.
$$

我们用初等变换与求逆阵类似的方法求 X:

$$(-2)(1)\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\to(1)\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2\end{array}\right)\to$$

$$(-1)\ (-2)\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right).$$

因此

$$X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

习　题　2.5

1. 用初等变换法求下列矩阵的逆阵：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$；　　(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

2. 求下列 n 阶方阵的逆阵：

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

3. 求下列矩阵方程的解：

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

4. 求下列矩阵方程的解：

$$X\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

5. 设

$$S=\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix},$$

其中 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. 计算$|S|$并证明 $|S| \geqslant 0$ 对一切实数 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 成立.

*6. 利用行列式乘法证明下列循环行列式之值等于 $f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$,其中 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$,而 $\varepsilon_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 1 的全体 n 次复根:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

*7. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

§2.6　分块矩阵

矩阵运算是一种比较复杂的运算. 为了简化这种运算,我们引进分块矩阵及其运算的概念. 读者务必注意,分块矩阵及其运算不是新的运算,而是矩阵运算的简化形式.

什么叫矩阵的分块? 简单地说就是用横虚线与竖虚线将一个矩阵分成若干块,这样得到的矩阵就称为"分块矩阵". 例如:

$$A=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ \hdashline 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

是一个分块矩阵,若记

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=(3\quad 1\quad -1),\ A_{22}=(3),$$

则 A 可表示为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

这是一个分了 4 块的矩阵.

一般地,对 $m\times n$ 矩阵 A,若先用若干条横虚线把它分成 r 块,再用若干条竖虚线把它分成 s 块,我们就得到了一个 rs 块分块矩阵,可记为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}.$$

注意,这里 A_{ij} 代表一个矩阵,A_{ij} 常称为 A 的第$(i,\ j)$块. A 也可记为 $A=(A_{ij})$,但需注明这是分块矩阵.

一个矩阵可以有各种各样的分块方法,究竟怎么分比较好,要看具体需要而定. 例如:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc:c}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

记

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_3=(1),$$

则

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{pmatrix}.$$

A 作为分块矩阵看,是一个对角阵. 这种矩阵称为分块对角阵,尽管它本身并不是对角阵. 需要注意的是 A 中的 0 都表示零矩阵.

两个分块矩阵 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 及 $B=(B_{ij})_{l\times k}$ 称为相等,若 $r=l,\ s=k$,且

$A_{ij}=B_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$. 因此两个分块矩阵相等,不仅它们的分块方式相同,而且每一块也相等. 显然,这时 A 与 B 作为普通矩阵也相等.

下面我们依次来研究分块矩阵的运算.

一、分块矩阵的加减法

设有 $m\times n$ 矩阵 A 及 B,它们具有相同的分块,即

$$A=(A_{ij})_{r\times s},\ B=(B_{ij})_{r\times s},$$

且 A_{ij} 与 B_{ij} 作为矩阵其行数与列数分别相等,则

$$A+B=(A_{ij}+B_{ij}),\ A-B=(A_{ij}-B_{ij}).$$

显然,两个分块矩阵之和(或差)仍是一个分块矩阵,且这个和(或差)与 A,B 作为普通矩阵之和(或差)是一致的.

二、分块矩阵的数乘

分块矩阵 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 与常数 c 的数乘为

$$cA=(cA_{ij})_{r\times s}.$$

三、分块矩阵的乘法

分块矩阵的乘法与普通矩阵的乘法在形式上类似,只是在处理块与块之间的乘法时必须保证符合矩阵相乘的条件. 因此,对分块的情况要特别予以注意. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$, $B=(B_{ij})_{s\times t}$ 是两个分块矩阵(注意:A 的列分成 s 块而 B 的行也分成 s 块). 又设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & A_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}.$$

上述分块矩阵适合如下条件:在 A 中,第$(1,1)$块 A_{11} 的行数为 m_1,列数为 n_1,第$(1,2)$块 A_{12} 的行数为 m_1,列数为 n_2, $\cdots$,第(i,j)块 A_{ij} 的行数为 m_i,列数为 n_j. B 中第(i,j)块 B_{ij} 的行数为 n_i,列数为 l_j. 这样的分块方式保证了分块相乘有意义. 若记分块矩阵 A 与 B 的积为

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

则 C_{ij} 是一个 $m_i \times l_j$ 矩阵,且

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}.$$

例 2.6.1

$$A=\left(\begin{array}{cc:c:cc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right), B=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & 1 & 3 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

求 AB.

解 将 A, B 写成下列分块形状:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij}, B_{ij} 是 A, B 中相应的块. 容易看出这两个分块矩阵符合相乘的条件. 设 $C=AB$, 则 C 也是分块矩阵. 因为 A 是 2×3 分块,B 是 3×2 分块,故 C 是 2×2 分块. 不难看出

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}.$$

将各块代入,得到

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(-1,1) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

同理

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & -2\end{pmatrix},$$

$$C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32}=\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}.$$

于是

$$C=\left(\begin{array}{cc:c}-1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & 6\\ \hdashline -3 & 4 & 8\\ 5 & -2 & -3\end{array}\right).$$

读者也许感到,上述例子似乎比不分块更麻烦.现在来看几个例子,它们表明了分块运算的优越性.

例 2.6.2　设有两个分块对角阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_k\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_k\end{pmatrix},$$

其中 A_i 与 B_i 都是同阶方阵,因此 A 与 B 可按分块矩阵相乘,

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_kB_k\end{pmatrix}.$$

这个例子表明,分块对角阵相乘时只需将主对角线上的块相乘即可.

例 2.6.3　A 是一个分块对角阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_k\end{pmatrix},$$

其中每块 A_i 都是非异方阵,求证:A 也是非异方阵.

证明　设 A_i 之逆为 A_i^{-1},则显然

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^{-1} \end{pmatrix}.$$

证毕.

又如,设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,B 是一个 $n\times r$ 矩阵,将 B 的每一列分成一块(即 B 的每个列向量作为一块),记为 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,r)$,则

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r).$$

又将 A 看成为只分成一块的矩阵,则 AB 可按分块矩阵相乘,且

$$AB=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_r).$$

同样,可对 A 作行分块,即将 A 的每个行向量分作一块,记为 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,m)$,则

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

将 B 看成是只有一块的矩阵,于是

$$AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 B \\ \boldsymbol{\alpha}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m B \end{pmatrix}.$$

四、分块矩阵的转置

设有分块矩阵 $A=(A_{ij})_{r\times s}$,则 A 的转置为 $s\times r$ 分块矩阵:

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{pmatrix}.$$

五、分块矩阵的共轭

设 A 是一个分块复矩阵，$A=(A_{ij})_{r\times s}$，则 A 的共轭矩阵也是一个 $r\times s$ 分块矩阵，且

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1s}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \cdots & \overline{A}_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{A}_{r1} & \overline{A}_{r2} & \cdots & \overline{A}_{rs}\end{pmatrix}.$$

对分块矩阵而言，我们也有分块初等变换和分块初等矩阵的概念. 它们是处理分块矩阵问题的有用工具.

所谓分块初等变换和普通的初等变换类似，包含 3 类：

第一类：对调分块矩阵的两块行或两块列；

第二类：以某个可逆阵左乘以分块矩阵的某一块行，或右乘以某块列；

第三类：以某个矩阵左乘以分块矩阵的某块行后加到另一块行上去，或以某个矩阵右乘以分块矩阵的某块列后加到另一块列上去.

我们假定上面所提到的运算都是可以进行的.

和普通矩阵一样，我们也有分块初等矩阵的概念，它和分块初等变换的关系与普通矩阵类似.

记 $I=\mathrm{diag}\{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$ 是分块单位阵，定义下列 3 种矩阵为 3 类分块初等矩阵：

(1) 对调 I 的第 i 块行(列)与第 j 块行(列)得到的矩阵；

(2) 以可逆阵 C 左(右)乘以 I 的第 i 块行(列)得到的矩阵；

(3) 以矩阵 B 左(右)乘以 I 的第 i 块行(列)后加到第 j 块行(列)上后得到的矩阵.

易知分块初等矩阵是可逆阵，其中第三类分块初等阵的行列式值等于 1. 又矩阵的分块行(列)初等变换相当于用同类分块初等矩阵左(右)乘以被变换的矩阵.

注 由上面的结论知道，进行第三类分块初等变换不改变矩阵的行列式的值. 更一般地，进行分块初等变换不改变矩阵的秩(秩的概念将在下一章介绍).

引理 2.6.1 设 A, C 分别是 m, n 阶方阵，则对分块上(下)三角行列式有：

$$G=\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & C\end{vmatrix}=|A||C|,\ H=\begin{vmatrix}A & 0\\ B & C\end{vmatrix}=|A||C|.$$

证明 本命题可以用 Laplace 定理立即得到，但是我们采用另外一种方法

来证明. 只对第一式进行证明,第二式同理可得. 对 A 的阶 m 用归纳法, $m=1$ 时,结论显然. 假定对左上角是 $m-1$ 阶矩阵的分块上三角行列式结论为真. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

将 G 按第一列展开(注意到第一列从第 $m+1$ 行起的元素全为零):

$$|G|=a_{11}G_{11}+a_{21}G_{21}+\cdots+a_{m1}G_{m1},$$

其中 G_{i1} 是 a_{i1} 在 G 中的代数余子式. 与每个 G_{i1} 相应的余子式是一个左上角为 $m-1$ 阶矩阵的分块上三角行列式,由归纳假设可得

$$G_{i1}=A_{i1}\,|C|,$$

其中 A_{i1} 是元素 a_{i1} 在 A 中的代数余子式. 因此

$$|G|=a_{11}A_{11}\,|C|+a_{21}A_{21}\,|C|+\cdots+a_{m1}A_{m1}\,|C|=|A|\,|C|.$$

证毕.

例 2.6.4 *若 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵, C 为 $n\times m$ 矩阵,则*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\,|D-CA^{-1}B|.$$

若 D 可逆(这时 A 不必假定可逆),则有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|D|\,|A-BD^{-1}C|.$$

证明 用第三类块初等变换,以 $-CA^{-1}$ 左乘以第一行加到第二行上得到

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

第三类初等变换不改变行列式的值,由引理即得结论. 另一结论类似可证. 证毕.

注 当 A 和 D 都是可逆阵时,我们得到等式

$$|D|\,|A-BD^{-1}C|=|A|\,|D-CA^{-1}B|.$$

这个等式称为行列式的降阶公式. 因为当 D 和 A 的阶不等时,可以利用它把高

阶行列式的计算化为低阶行列式的计算.

例 2.6.5 计算下列矩阵的行列式值:

$$M=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

解　将 M 化为

$$M=-I_n+\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由降阶公式得到

$$|M|=|I_2|^{-1}|-I_n|\left|I_2+\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(-I_n)^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$=(-1)^n\left|I_2-\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix}\right|$$

$$=(-1)^n\left[(1-n)\left(1-\sum_{i=1}^n a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right].$$

例 2.6.6 已知 A 和 D 是可逆阵,求下列分块矩阵的逆阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

解　设 A, D 分别是 m, n 阶矩阵. 对下列分块矩阵进行初等变换,即将第二行左乘以 $-BD^{-1}$ 加到第一行上去:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} A & B & I_m & 0 \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc} A & 0 & I_m & -BD^{-1} \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right),$$

再用 A^{-1} 和 D^{-1} 分别乘以第一行及第二行得到：

$$\left(\begin{array}{cc:cc} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & D^{-1} \end{array}\right).$$

因此原矩阵的逆阵为

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

习　题　2.6

1. 计算下列分块矩阵的乘法：

(1) $$\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ \hdashline -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right);$$

(2) $$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. 试写出下列分块矩阵的积，假定其中相乘的分块矩阵都符合相乘的条件：

(1) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}$.

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求证：

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \ (k = 1, 2, \cdots, n).$$

4. 验证：分块矩阵的乘法所得的结果与作为普通矩阵的乘法所得的结果是一致的.

5. 设有分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$, 其中 A, B 为可逆阵,求 C 的逆阵.

6. 若 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是方阵,证明:

$$\begin{vmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_m\end{vmatrix}=|A_1||A_2|\cdots|A_m|.$$

7. 设 A, B 为 n 阶方阵,求证:

$$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|.$$

*8. 设 $AB=BA$, 求证:

$$\begin{vmatrix}A & -B\\ B & A\end{vmatrix}=|A^2+B^2|.$$

*§2.7 Cauchy-Binet 公式

我们在本章第五节中,证明了方阵乘积的行列式等于各方阵行列式之积. 现在的问题是:如果 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,AB 是 n 阶方阵,则行列式 $|AB|$ 应该等于什么? Cauchy-Binet(柯西-毕内)公式回答了这个问题. 它可以看成是矩阵乘法的行列式定理的推广.

定理 2.7.1 (Cauchy-Binet 公式) 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵. $A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_s\\ j_1 & \cdots & j_s\end{pmatrix}$ 表示 A 的一个 s 阶子式,它由 A 的第 i_1, $\cdots$, i_s 行与第 j_1, $\cdots$, j_s 列交点上的元素按原次序排列组成的行列式. 同理定义 B 的 s 阶子式,则

(1) 若 $m>n$, 必有 $|AB|=0$;

(2) 若 $m\leqslant n$, 必有

$$|AB|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n}A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}.$$

证明 令 $C=\begin{pmatrix}A & 0\\ -I_n & B\end{pmatrix}$. 我们将用不同的方法来计算行列式 $|C|$.

首先,对 C 进行第三类分块初等变换得到矩阵 $M=\begin{pmatrix}0 & AB\\ -I_n & B\end{pmatrix}$. 事实上,

M 可写为

$$M=\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} C,$$

因此 $|M|=|C|$. 用 Laplace 定理来计算$|M|$,按前 m 行展开得

$$\begin{aligned} |M| &= (-1)^{(n+1+n+2+\cdots+n+m)+(1+2+\cdots+m)}\ |-I_n|\,|AB| \\ &= (-1)^{n(m+1)}\ |AB|. \end{aligned}$$

再来计算$|C|$,用 Laplace 定理按前 m 行展开. 这时若 $m>n$, 则前 m 行中任意一个 m 阶子式都含有至少一列全为零,因此行列式值等于零,即 $|AB|=0$. 若 $m\leqslant n$, 由 Laplace 定理得

$$|C|=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

其中 $C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}$是 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}$在矩阵 C 中的代数余子式. 显然

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)+(j_1+j_2+\cdots+j_m)}\ |-\boldsymbol{e}_{i_1}, -\boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, -\boldsymbol{e}_{i_{n-m}}, B|,$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-m}$ 是 C 中前 n 列去掉 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 列后余下的列序数, $\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ 是相应的 n 维标准单位列向量(标准单位向量定义参见本章复习题 1). 记

$$|N|=|-\boldsymbol{e}_{i_1}, -\boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, -\boldsymbol{e}_{i_{n-m}}, B|,$$

现来计算$|N|$. $|N|$用 Laplace 定理按前 $n-m$ 列展开. 注意只有一个子式非零,其值等于 $|-I_{n-m}|=(-1)^{n-m}$. 而这个子式的余子式为

$$B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

因此

$$|N|=(-1)^{(n-m)+(i_1+i_2+\cdots+i_{n-m})+(1+2+\cdots+n-m)} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

注意到 $(i_1+i_2+\cdots+i_{n-m})+(j_1+j_2+\cdots+j_m)=1+2+\cdots+n$, 综合上面的结论,通过简单计算不难得到

$$|AB| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}.$$

证毕.

下面的定理是 Cauchy-Binet 公式的进一步推广,它告诉我们如何求矩阵乘积的 r 阶子式.

定理 2.7.2 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵,r 是一个自然数且 $r\leqslant m$, 则

(1) 若 $r>n$, 则 AB 的任意一个 r 阶子式等于零;

(2) 若 $r\leqslant n$, 则 AB 的 r 阶子式

$$AB\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n} A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}.$$

证明 设 $C=AB$,则 $C=(c_{ij})$ 是 m 阶矩阵且

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

因此

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n}\\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{1j_1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r}\\ b_{2j_1} & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{nj_1} & b_{nj_2} & \cdots & b_{nj_r}\end{vmatrix}.$$

由上述定理可知: 当 $r>n$ 时, $C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}=0$;当 $r\leqslant n$ 时,

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n} A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}.$$

证毕.

矩阵 A 的子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

如果满足条件 $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $\cdots$, $i_r = j_r$，则称之为主子式.

推论 2.7.1 设 A 是实数矩阵，则矩阵 AA' 的任一主子式都非负.

证明 由上面的定理得到

$$AA'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}^2 \geqslant 0.$$

证毕.

下面介绍 Cauchy-Binet 公式的两个重要应用. 它们分别是著名的 Lagrange 恒等式和 Cauchy-Schwarz(柯西-许瓦兹)不等式. 这两个结论也可以用其他方法证明，但用矩阵方法显得非常简洁.

例 2.7.1 证明 Lagrange 恒等式 ($n \geqslant 2$)：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

证明 左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

证毕.

用 Cauchy-Binet 公式得

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

例 2.7.2 设 a_i, b_i 都是实数，证明 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2.$$

证明　由上例,恒等式右边总非负,即得结论. 证毕.

习　题　2.7

1. 证明复数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)\geqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i\right|^2,$$

其中 a_i, b_i 都是复数,n 是大于 2 的自然数.

2. 设 A 是 n 阶方阵且 $AA'=I_n$. 求证:若 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$, 则

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|^2=1.$$

3. 设 A, B 是 n 阶方阵,r 是小于 n 的自然数. 求证:AB 和 BA 的所有 r 阶主子式之和相等.

4. 设 A,B 都是 $m\times n$ 实矩阵,求证:

$$|AA'||BB'|\geqslant|AB'|^2.$$

复　习　题　二

1. n 维标准单位列向量是指下面 n 个 n 维列向量:

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

向量组 $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n'$则被称为 n 维标准单位行向量. 求证标准单位向量有下列基本性质:

(1) 若 $i\neq j$ 则 $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{e}_j=0$,而 $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{e}_i=1$.

(2) 若 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $A\boldsymbol{e}_i$ 是 A 的第 i 个列向量;$\boldsymbol{e}_i'A$ 是 A 的第 i 个行向量.

(3) 若 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{e}_i'A\boldsymbol{e}_j=a_{ij}$.

2. n 阶基础矩阵(又称初级矩阵)是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij},(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\}$. 这里 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵,它的第$(i,\ j)$元素等于 1,其他元素全为 0. 基础矩阵也可以看成是标准单位向量的积:

$$E_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j'.$$

证明基础矩阵的下列性质：

(1) 若 $j \neq k$，则 $E_{ij}E_{kl} = 0$；

(2) 若 $j = k$，则 $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$；

(3) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$，则

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij};$$

(4) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$，则 $E_{ij}A$ 将 A 的第 j 行变为第 i 行，将其他元素全变为 0；

(5) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$，则 AE_{ij} 将 A 的第 i 列变为第 j 列，将其他元素全变为 0；

(6) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$，则 $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

3. 求证：和所有 n 阶可逆阵乘法可交换的矩阵必是数量矩阵 kI_n.

4. 设 A 是 n 阶上三角阵且主对角线上元素全为零，求证：$A^n = 0$.

5. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，则 A 主对角线上元素之和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

称为矩阵 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A$. 设 A,B 是 n 阶矩阵，k 是常数，求证：

(1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$；

(2) $\mathrm{tr}(kA) = k(\mathrm{tr}A)$；

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

6. 设 f 是数域 F 上 n 阶矩阵集合到 F 的一个映射，它满足下列条件：

(1) 对任意的 n 阶矩阵 A, B, $f(A+B) = f(A) + f(B)$；

(2) 对任意的 n 阶矩阵 A 和 F 中数 k, $f(kA) = kf(A)$；

(3) 对任意的 n 阶矩阵 A, B, $f(AB) = f(BA)$；

(4) $f(I_n) = n$.

求证：f 就是迹，即 $f(A) = \mathrm{tr}A$ 对一切 F 上 n 阶矩阵 A 成立.

7. 设 A, B 是 n 阶方阵，求证：不存在 n 阶方阵 A,B，使 $AB - BA = I_n$.

8. 求证：

(1) 上(下)三角阵的逆阵也是上(下)三角阵；

(2) 对称矩阵的逆阵也是对称矩阵；

(3) 反对称矩阵的逆阵也是反对称矩阵.

9. 设 A 是 n 阶方阵且 $A^2 = A$，求证：$I_n - 2A$ 是可逆阵.

10. 求证：不存在 n 阶奇异阵 A，使 $A^2 + A + I_n = 0$.

11. 设 A 是奇数阶矩阵 $|A| > 0$，又 $AA' = I_n$，求证：$I_n - A$ 是奇异阵.

12. 若 A, B 是 n 阶矩阵，$I_n + AB$ 可逆，求证：$I_n + BA$ 也可逆.

13. 设 A 是 4 阶矩阵，$|A| = 2$. 求 $|4(A)^{-1} - A^*|$ 的值.

14. 设 A, B 为方阵，A^*，B^* 分别是它们的伴随，求分块对角阵 C 的伴随：

$$C=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

*15. 对 n 阶矩阵 A, B,求证:$(AB)^*=B^*A^*$.

16. 求证:若 $n>2$,则$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

17. 计算:$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k$.

18. 求证:n 阶实方阵 A 是反对称矩阵的充分必要条件是:对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$,有

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}=0.$$

19. 求证:n 阶方阵 A 是奇异阵的充分必要条件是存在不为零的方阵 B,使 $AB=0$.

20. 设矩阵 A 是 n 阶可逆阵,求证:只用第三类初等变换就可以将 A 化为如下形状:

$$\mathrm{diag}\{1,1,\cdots,|A|\}.$$

21. 求下列 n 阶矩阵的逆阵:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

22. 设 A 是一个 n 阶复方阵,求证:必有无穷多个复数 λ,使矩阵 λI_n+A 是非异阵.

23. 若 $n\geqslant 3$,求证下列行列式的值为零:

$$\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

*24. 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵,求证:

$$M=\begin{vmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\\ C & D & A & B\\ D & C & B & A\end{vmatrix}=|A+B+C+D||A+B-C-D||A-B+C-D||A-B-C+D|.$$

*25. 求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1\end{vmatrix}.$$

第三章　线性空间

§3.1　数　域

读者已经在中学里学到过各种数集.如整数集、有理数集、实数集及复数集.这些数集不仅是一些数字符号的集合,更重要的是在其上定义了运算.常见的运算有:加、减、乘、除.我们常记整数集为 $\mathbf{Z}$,有理数集为 $\mathbf{Q}$,实数集为 $\mathbf{R}$,复数集为 $\mathbf{C}$.则 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 都是 $\mathbf{C}$ 的子集,即 $\mathbf{C}$ 的一部分.我们注意到,在整数集 $\mathbf{Z}$ 中,任意两个元素相加、相减或相乘以后仍属于 $\mathbf{Z}$.但是两个整数相除(除数不为零)则并不一定属于 $\mathbf{Z}$,它可能是一个分数.这就是说,整数集 $\mathbf{Z}$ 在加法、减法与乘法下封闭,但在除法下不封闭.在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中,加、减、乘、除都是封闭的.在实数集及复数集中也如此.我们把数集的这些特性抽象出来,作如下的定义.

定义 3.1.1　*设 $\mathbf{K}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的子集且至少有两个不同的元素,如果 $\mathbf{K}$ 中任意两个数的加法、减法、乘法及除法(除数不为零)仍属于 $\mathbf{K}$,则称 $\mathbf{K}$ 是一个数域.*

根据这个定义,有理数集、实数集及复数集都是数域,而整数集不是数域.通常我们把在加法、减法、乘法下封闭(不一定除法封闭)的数集称为数环,因此整数集是数环但不是数域.

数域是一个比较广泛的概念.除了已知的有理数域、实数域及复数域外,还有没有其他数域即在四则运算下封闭的数集?我们来看下面的例子.

所有形如

$$a+b\sqrt{2}$$

的数,其中 a, b 都是有理数,构成一个数域.这个数域通常用 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 来表示.现在我们来验证它确是一个数域.首先注意到:

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}.$$

由于两个有理数的和与差仍是有理数,同此 $(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.也就

定理 3.1.1 告诉我们,有理数域是一个“最小”的数域.

习 题 3.1

1. 判断下列数集是不是数域并说明理由:

(1) 所有偶数的全体;

(2) 所有形如 $a+b\sqrt{3}$ 的数的全体,其中 a, b 为有理数;

(3) 所有形如 $a+b\sqrt{-1}$ 的数的全体,其中 a, b 为有理数;

(4) 所有形如 $a\sqrt[3]{2}$的数的全体,其中 a 为有理数.

2. 验证:所有形如(3.1.1)式所示的数的全体构成一个数域.

3. 验证:所有形如 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ 的数构成一个数域,其中 a, b,c 是有理数.

§3.2 行向量和列向量

读者已经学过平面直角坐标系的概念. 在一个平面上,如果建立了一个直角坐标系,那么平面上任一点 C 均可以用两个有序实数(a, b)来表示,其中 a 称为点 C 的横坐标, b 称为点 C 的纵坐标. 反过来,给定两个有序实数(a, b),必有平面上一点与之对应. 这样平面上的点与有序实数偶之间可建立起一个一一对应. 读者还学过向量(或称矢量)的概念. 所谓平面上的向量是指平面上的一根有向线段,其中一端称为起点,另一端称为终点. 如图 3.1 所示,若将点 O 与点 C 连起来并用一个箭头表示这根线段的方向,则$\overrightarrow{OC}$就是一个向量,它的起点为 O,终点为 C.

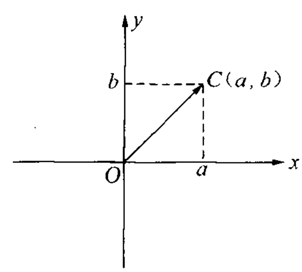

图 3.1

现在我们把平面上所有以原点 O 为起点的向量组成的集合记为 V. 显然 V 与平面 xOy 上的点之间有一个一一对应:平面 xOy 上的任一点 C 对应于向量$\overrightarrow{OC}$,反之,任一以 O 为起点的向量对应于平面上一点,即该向量的终点. 起点为 O 而终点也为 O 的向量称为零向量,它对应于原点 O. 我们刚才已经提到,平面上的点与有序实数偶之间有一个一一对应关系,因此不难看出,平面上任一以原点 O 为始点的向量均可对应一个实数偶,即向量$\overrightarrow{OC}$可以用点 C 的坐标(a, b)来唯一确定. 这样,我们可以用实数偶来代替平面上以原点为始点的全体向量. 或者更直接地,把实数偶(a, b)就定义为平面上的以原点为始点的向量. 这种把向量“代数化”的方法有着明显的好处:一是可以用代数的工具来研究几何对象;

二是它可以推广到更一般的情形,即所谓的 n 维向量. 这种推广不仅是形式上的,它对于数学的发展及应用起着极其重要的作用. 下面我们就抛开向量的几何形象,来定义 n 维向量的概念.

定义 3.2.1 *设 $\mathbf{K}$ 是一个数域, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $\mathbf{K}$ 中的元素,由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为数域 $\mathbf{K}$ 上的一个 n 维行向量.*

对这个定义,我们需要说明以下几点:

第一,我们称 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $\mathbf{K}$ 上 n 维行向量. 当然也有 $\mathbf{K}$ 上 n 维列向量的概念. 如果把 $\mathbf{K}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 依次排成一列,就称为 $\mathbf{K}$ 上的 n 维列向量:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

注意,我们不要把行向量与列向量混为一谈. 即使一个行向量中的元素与一个列向量中的元素对应相等,我们也不认为它们是一回事. 当然我们将会看到,行向量与列向量有相同的性质,这种相似性的本质我们将在后面加以阐明. 在不引起混淆的情况下,行向量、列向量统称为向量.

第二,两个行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 仅当 $a_i=b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 时相等. 如二维向量 $(1, 2)$ 与 $(2, 1)$ 是两个不同的向量,虽然它们都由 1, 2 两个数组成. 因此两个向量相等不仅要求它们的元素相同,而且要求元素出现的次序也相同.

第三,读者可能已经看出, n 维行向量也可以看成一个 $1\times n$ 矩阵. n 维列向量可以看成是一个 $n\times 1$ 阵. 事实上我们确实可以这样看. 对一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, 我们在上一章中已经定义过它的第 i 行为第 i 行向量,第 j 列为第 j 列向量. 用矩阵的观点来看上面的两点说明,那就是不言而喻的了.

对数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量(或 n 维列向量),我们可以定义加法、减法及数乘. 这些定义与矩阵的相应运算的定义相同.

若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 定义

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n),$$

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n).$$

若 $k\in\mathbf{K}$, 定义

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

由于 $\mathbf{K}$ 是数域,因此不难看出 $\mathbf{K}$ 上 n 维行向量的和、差及数乘(该数取自 $\mathbf{K}$)仍然是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量.对列向量的加法、减法与数乘也可类似定义.从这里可以看出,如果把向量看成矩阵,其运算就是相应的矩阵运算.

若一个 n 维向量的所有元素都等于零,就称之为零向量,记为 $\mathbf{0}$.但需注意一个 n 维行(列)零向量指的是一个 $1\times n(n\times 1)$ 零矩阵.又若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,记 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$,称 $-\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

向量运算规则

(1) 加法交换律:$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) 加法结合律:$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\ k\in\mathbf{K}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha},\ k, l\in\mathbf{K}$;

(8) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$.

上述规则也可以看成是矩阵的相应运算规则.

作为例子,我们来看一下二维实向量的加法与数乘的几何意义.设在平面直角坐标系内有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2)$.如图 3.2 所示,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$.这和用平行四边形法则求两个向量之和的结果完全一致.

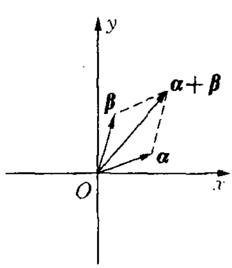

图 3.2

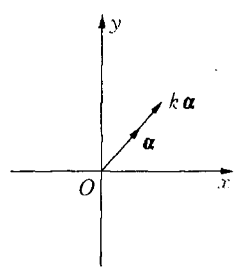

图 3.3

再看图 3.3.设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)$, k 是一个实数,则 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2)$ 表示将 $\boldsymbol{\alpha}$ 伸长 k 倍.当 $k>0$ 时表示在原方向上伸长 k 倍,当 $k<0$ 时表示在反方向上伸长 k 倍.

对实三维向量,也有类似的几何意义.

数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量全体组成的集合称为域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量空间.$\mathbf{K}$ 上的 n 维列向量全体组成的集合称为 $\mathbf{K}$ 上的 n 维列向量空间.实数域 $\mathbf{R}$ 上的二维空间与三维空间就是我们所熟悉的平面及三维空间.

习　题　3.2

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0,-1)$, $\boldsymbol{\beta}=(-2,1,0,0)$, $\boldsymbol{\gamma}=(-1,-2,0,1)$, 试求下列向量:

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma};\ 3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma}.$$

2. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{\gamma}=(1,1,-1)$, 求解下列向量方程:

$$3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}.$$

§3.3　线性空间

在上一节中,我们定义了行向量空间及列向量空间的概念,它们可以看成是现实的实二维空间与实三维空间的推广. 现在我们要做进一步的抽象,引进一般的向量空间的概念.

定义 3.3.1　设 $\mathbf{K}$ 是一个数域, V 是一个集合, 在 V 上定义了一个加法"+",即对 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$,总存在 V 中唯一的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应,记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 在数域 $\mathbf{K}$ 与 V 之间定义了一种运算,称为数乘,即对 $\mathbf{K}$ 中任一数 k 及 V 中任一元 $\boldsymbol{\alpha}$,在 V 中总有唯一的元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与之对应,记为 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$. 若上述加法及数乘满足下列运算规则:

(1) 加法交换律: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) 加法结合律: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) 在 V 中存在一个元素 $\mathbf{0}$,对于 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 对于 V 中每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,存在元素 $\boldsymbol{\beta}$,使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$, $k\in\mathbf{K}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$, $k,l\in\mathbf{K}$;

(8) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$.

在上述规则中, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意的元素, k, l 是 $\mathbf{K}$ 中任意的数. 适合上述条件的集合 V 称为数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间或向量空间. V 中的元素称为向量, V 中适合(3)的元素 $\mathbf{0}$ 称为零向量. 对 V 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 适合 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 的元素 $\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

读者可能要问:为什么要引进抽象的线性空间?我们先看几个线性空间的例子.

例 3.3.1 上一节中数域 $\mathbf{K}$ 上 n 维行向量集合(列向量集合)是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,这个空间我们记之为 $\mathbf{K}^n(\mathbf{K}_n)$. 我们以后将看到这种线性空间具有普遍的代表性.

例 3.3.2 系数取自数域 $\mathbf{K}$ 上的一元多项式全体,记为 $\mathbf{K}[x]$,按照通常的方式定义两个多项式的加法(同次项系数相加)及一个数与一个多项式系数的乘法(将此数乘以多项式的每个系数),则不难验证 $\mathbf{K}[x]$ 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 在 $\mathbf{K}[x]$ 中,取次数小于 n 的多项式全体,记这个集合为 $\mathbf{K}_n[x]$,则 $\mathbf{K}_n[x]$ 也是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间.

例 3.3.3 闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数全体记为 $C[0, 1]$,将函数的加法及数乘定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x);\ (kf)(x)=kf(x),$$

则 $C[0, 1]$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 3.3.4 数域 $\mathbf{K}$ 上 $m\times n$ 矩阵全体在矩阵的加法与数乘下也构成一个 $\mathbf{K}$ 上的线性空间.

例 3.3.5 复数域 $\mathbf{C}$ 可看成是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 这时 $\mathbf{C}$ 上向量的加法就是复数的加法. $\mathbf{R}$ 中元素对 $\mathbf{C}$ 中向量(即复数)的乘法就是通常的数的乘法. 一般来说,若两个数域 $\mathbf{K}_1\subseteq\mathbf{K}_2$, 则 $\mathbf{K}_2$ 可以看成是 $\mathbf{K}_1$ 上的线性空间. 向量就是 $\mathbf{K}_2$ 中的数,向量的加法就是数的加法,数乘就是 $\mathbf{K}_1$ 中的数乘以 $\mathbf{K}_2$ 中的数. 特别,数域 $\mathbf{K}$ 也可以看成是 $\mathbf{K}$ 自身上的线性空间.

我们称实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间为实空间,称复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间为复空间.

从上面的例子可以看出,抽象线性空间概念的引入使我们扩大了视野,它把众多不同研究对象的共同特点用线性空间这一概念加以概括,从而极大地扩大了代数学理论的应用范围. 在这一章里,我们将用线性空间的理论来进一步讨论线性方程组的解. 线性空间的理论是线性代数的核心.

现在我们来研究线性空间的一些最基本的性质.

命题 3.3.1 零向量是唯一的.

证明 假设 $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中的两个零向量,则

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2.$$

这就证明了唯一性,证毕.

命题 3.3.2 负向量也是唯一的.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的向量, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 也是 V 中的向量,且

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0},$$

则

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_1+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}_2$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1)+\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2.$$

这说明负向量是唯一的,证毕.

命题 3.3.3　对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$,有

(1) 从 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 可推出 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$,即加法消去律成立;

(2) $0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,这里左边的 0 表示数零,右边的 $\mathbf{0}$ 表示零向量;

(3) $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(4) $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;

(5) 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $k=0$.

证明　(1) $(-\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(-\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})$,再由结合律得

$$((-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}=((-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\gamma},$$

即

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma},$$

于是 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$.

(2) $0\cdot\boldsymbol{\alpha}=(0+0)\boldsymbol{\alpha}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}$,再由(1)两边消去 $0\cdot\boldsymbol{\alpha}$ 即得 $\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

(3) $k\boldsymbol{\alpha}+k\cdot\mathbf{0}=k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})=k\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}$,两边消去 $k\boldsymbol{\alpha}$ 即得 $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=[1+(-1)]\boldsymbol{\alpha}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,因此

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}.$$

(5) 假定 $k\neq 0$ 且 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 k^{-1} 存在,故

$$\boldsymbol{\alpha}=(k^{-1}\cdot k)\boldsymbol{\alpha}=k^{-1}(k\boldsymbol{\alpha})=k^{-1}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

证毕.

注　(1) 在 V 中我们定义减法为

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\beta}.$$

由于消去律成立,V 中元素的等式可以进行“移项”,因此,如若

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma - \boldsymbol{\beta},$$

或

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

等等.在形式上与数的加减法运算完全一样.

(2) 由于 V 中元素适合加法结合律, $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$, 我们可以不用括号.直接把上述元素写为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. 一般地,几个向量相加,我们也可以不用括号,因为从结合律非常容易推出当几个向量相加时,相加的先后次序不影响最后的结果.比如 4 个向量做加法时,有

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{\alpha}_3)+\boldsymbol{\alpha}_4 &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)\\ &= \boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{\alpha}_2+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)).\end{aligned}$$

上述向量可写为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$.

习 题 3.3

1. 判断下列集合是否是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间:

(1) 次数等于 $n(n \geqslant 1)$ 的实系数多项式全体构成的集合, $\mathbf{K}$ 为实数域,加法、数乘的定义同例 3.3.2 中所述;

(2) 全体 $n \times n$ 实上三角阵(即矩阵的元素为实数)在矩阵的加法及数乘下,这里 $\mathbf{K}$ 为实数域;

(3) $[0, 1]$区间上可导函数全体在函数的加法及数乘下,这里 $\mathbf{K}$ 是实数域;

(4) 设 V 是以 0 为极限的实数数列全体:

$$V = \{\{a_n\} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\},$$

定义两个数列的加法及数乘为

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \ k\{a_n\} = \{ka_n\}.$$

这里数域 $\mathbf{K}$ 为实数域.

2. 求证在线性空间中下列等式成立:

(1) $-(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$;

(2) $-(k\boldsymbol{\alpha}) = (-k)\boldsymbol{\alpha} = k(-\boldsymbol{\alpha})$;

(3) $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}$.

§3.4 向量的线性关系

设有 n 个未知数 m 个方程式的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

这个方程组我们曾经用矩阵来表示过.现在我们要用向量来表示该方程组,设方程组的增广矩阵为

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

分别用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n; \boldsymbol{\beta}$ 表示上述矩阵的列向量,即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组(3.4.1)等价于下列向量形式的方程式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}. \tag{3.4.2}$$

定义 3.4.1 *设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均是 V 中的向量,若存在 $\mathbf{K}$ 中 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使*

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合或 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

显而易见,方程组(3.4.1)有解当且仅当向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.

再看齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

这个方程组等价于下列向量形式的方程式:

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}. \tag{3.4.4}$$

定义 3.4.2　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中 n 个向量，若存在 $\mathbf{K}$ 中 n 个不全为零的数 k_1，k_2，…，k_n，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，反之若 $\mathbf{K}$ 中不存在不全为零的数 k_1，k_2，…，k_n 使上式成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关或线性独立.

于是，方程组(3.4.3)有非零解(即在解中至少有一个数不等于零)的充分必要条件是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

在线性空间理论中，线性相关、线性无关及线性组合是向量之间最基本的关系，统称为向量的线性关系. 对向量的线性关系，我们需要做如下说明：

(1) 在线性相关、线性无关的定义中，数 k_1，k_2，…，k_n 必须取自数域 $\mathbf{K}$. 举例来说，若把复数看成是实数域上的线性空间，那么 1 与 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是两个线性无关的向量，因为不存在实数 a，b 它们不全为零且使 $a+b\mathrm{i}=0$. 但是如果允许 a，b 取复数，取 $a=1$，$b=\mathrm{i}$，就有 $a+b\mathrm{i}=0$.

(2) 线性无关还可这样等价地定义：若存在 k_1，k_2，…，$k_n\in\mathbf{K}$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

接下去，我们要探讨向量线性关系最基本的性质.

定理 3.4.1　若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性相关的向量，则任一包含这组向量的向量组必线性相关. 又若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性无关的向量，则从这一组向量中任意取出一组向量必线性无关.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是含 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一组向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 k_1，k_2，…，k_m，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

令 $k_{m+1}=\cdots=k_r=0$，则仍有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. 另一个论断显然和已证明的结论是等价的. 证毕.

定理 3.4.2　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 中的向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 k_1，k_2，…，

k_m,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 其中有某个 $k_i\neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-k_i^{-1}k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_i^{-1}k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-k_i^{-1}k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-k_i^{-1}k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

反过来,若

$$\boldsymbol{\alpha}_i=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+b_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+b_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则

$$b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_i+b_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+b_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 证毕.

定理 3.4.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m;\boldsymbol{\beta}$ 是 K 上线性空间 V 中的向量. 已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则表示唯一的充分必要条件是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明 假定向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且另外有一个表示:

$$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则将已知的两个表示式相减得到:

$$(b_1-k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(b_2-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(b_m-k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 故 $b_1-k_1=0,\ b_2-k_2=0,\ \cdots,\ b_m-k_m=0$, 即 $b_1=k_1,\ b_2=k_2,\ \cdots,\ b_m=k_m$. 也就是说 $\boldsymbol{\beta}$ 只能用唯一一种方式表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

反之,若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,即存在不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$,使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则除了已知的表示外, $\boldsymbol{\beta}$ 还有另外一个不同的表示:

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+c_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+c_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m+c_m)\boldsymbol{\alpha}_m.$$

证毕.

注 由上述定理知道,方程式(3.4.2)或方程组(3.4.1)有唯一解的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例 3.4.1 设 V 是三维行向量空间,下列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 2), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 2, 4)$$

适合关系式

$$2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 3.4.2　设 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 是 n 个 n 维行向量(即 n 维标准单位行向量),则它们必线性无关.

证明　假定

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0},$$

则$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \mathbf{0}$,因此 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 这 n 个向量线性无关. 证毕.

注　对 n 维标准单位列向量也有同样的结论,即它们必线性无关.

例 3.4.3　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,若 S 是只含一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组,则 S 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 又若 S 是含有零向量的向量组,则 S 必线性相关.

证明　从 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 及 $k \neq 0$ 可推出 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,反之亦然. 因此单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

设 $\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一个向量组,则

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

即这组向量线性相关. 证毕.

例 3.4.4　若 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是两个 n 维行向量,则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充分必要条件是 a_i, b_i 成比例.

证明　假定 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则存在 k_1, k_2 不全为零,使 $k_1\boldsymbol{\alpha} = k_2\boldsymbol{\beta}$,不妨假定 $k_2 \neq 0$,令 $k = k_1/k_2$, 则

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

因此 $ka_i = b_i$, 显然 a_i, b_i 成比例.

反之, 若 $ka_i = b_i$,则若 $k = 0$,则 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 由例 3.4.3, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 必线性相关. 若 $k \neq 0$,则 $k\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 也线性相关. 证毕.

请读者思考下面两个问题:

(1) 在三维几何空间中, 3 个以原点为始点的向量线性相关、线性无关的几何意义是什么? 在 Descartes(笛卡儿)平面上,两个以原点为始点的向量线性相关的几何意义又是什么? 在 Descartes 平面上, 3 个以原点为始点的向量是否一

定线性相关?

(2) 我们先看下面的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

这个方程组的第三个方程式是多余的,因为它可以由第一个方程式乘以 2 加上第二个方程式得到. 用向量的语言来说,就是方程组增广矩阵

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.4.5}$$

的第三个行向量可以表示为第一个和第二个行向量的线性组合. 现假设有线性方程组(3.4.1),其增广矩阵的行向量线性相关,你能得到什么结论?

习　题　3.4

1. 试决定下列实三维向量是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1), (2, 1, 0), (1, 4, 1)$;

(2) $(2, 3, 0), (-1, 4, 0), (0, 0, 2)$.

2. 问 a 取何值时,下列实向量

$$\left(a, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, a, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, a\right)$$

线性相关?

3. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关,问 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ 是否必线性相关?

4. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}$ 是另外一个向量,问 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}$ 是否必线性无关?

5. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性无关的向量, c 是非零数,问 $c\boldsymbol{\alpha}_1, c\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_m$ 是否线性无关?

6. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 是 3 个 n 维行向量,若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,问 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 是否必线性无关?

7. 设 A 组向量中任一向量可用 B 组向量中若干个向量的线性组合来表示, B 组向量中任一向量也可用 C 组向量中的若干个向量的线性组合来表示. 求证: A 组向量中任一向量必可用 C 组向量中的若干个向量的线性组合来表示.

8. 设线性空间 V 中向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta} \in V$. 考虑向量组 $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$,求证或者该向量组线性无关,或者 $\boldsymbol{\beta}$ 可以用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$ 线性表示.

9. 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, A 为 n 阶可逆阵,求证: $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots,$

$A\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

10. 设$\{\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})(i = 1, 2, \cdots, r)\}$是一组 n 维向量,称向量$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的 $t(t < n)$ 维缩短向量. 若$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \cdots, a_{ij_t})$,求证: 如果$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_r$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关.

11. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不能由其中任何一个个数少于 m 的部分向量线性表示, 求证: 这 m 个向量线性无关.

12. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵,B 是 $m \times n$ 矩阵. 若 $AB = I_n$, 求证: B 的 n 个列向量线性无关.

§3.5 向量组的秩

在上一节最后,我们在思考题(2)中发现,矩阵(3.4.5)的 3 个行向量线性相关,第三个行向量可以用其余两个行向量线性表示. 这表明原线性方程组的第三个方程式是多余的. 我们也不难证明第一和第二两个行向量是线性无关的,因此如果将原方程组的第三个方程式去掉以后,剩下的两个方程式再也不能去掉了,否则得到的方程组将和原方程组不同解. 一般来说,给定一组向量,如果线性相关,这时必有某个向量可以用其余向量线性表示,我们将它去掉. 不断地重复这个过程直到剩下的向量线性无关为止,剩下的向量就称为原向量组的极大无关组. 我们给它下一个严格的定义.

定义 3.5.1　*设在线性空间 V 中有一族向量 S(其中可能只有有限个向量,也可能有无限多个向量),如果在 S 中存在一组向量$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$适合如下条件:*

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2) 这族向量中的任意一个向量都可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

那么称$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$是向量族 S 的极大线性无关组,简称极大无关组.

注　上述定义(2)表明若将 S 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 加入$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$,则向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}\}$一定线性相关. 正是在这个意义上,我们称$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$为极大无关组.

给定有限个向量组成的向量族,除了只含一个零向量的极端情形,显然极大无关组总是存在的. 一个向量族的极大无关组唯一吗? 我们来看一个简单的例子. 设有向量组 $S = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. 这 3 个向量线性相关,但是 S 的 3 个子集 $\{(1, 0), (0, 1)\}$; $\{(1, 0), (1, 1)\}$ 以及$\{(0, 1), (1, 1)\}$ 不难验证都是 S 的极大无关组. 因此一般来说,向量族的极大无关组并不唯一. 但是我们发现,虽然极大无关组不唯一,但是在 S 中,每个极大无关组所含向量的个数是相同的. 我们要问: 这个结论对一般向量组还对吗?

我们不妨来分析一下：假定已知向量族 S 有两个极大无关组 A, B. 由极大无关组的定义，A 和 B 都是线性无关的向量组且 A 中每个向量可以用 B 中向量线性表示，B 中每个向量也可以用 A 中向量线性表示. 我们希望证明：两个线性无关的向量组如果能够互相线性表示，则它们含有相同个数的向量. 这只需证明：如果 A, B 是两个向量组，A 有 r 个向量，B 有 s 个向量，若 A 线性无关且 A 组向量中任一向量均可表示为 B 组向量的线性组合，则 $r \leqslant s$. 我们现在来证明这个命题的等价命题.

引理 3.5.1　设 A, B 是 V 中两组向量且 A 含有 r 个向量，B 含有 s 个向量. 如果 $r > s$ 且 A 中每个向量均可用 B 组中向量线性表示，则 A 中向量必线性相关.

证明　我们用反证法. 设

$$A = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\},$$

$$B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}.$$

假定 A 组向量线性无关.

由已知，A 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 B 组向量的线性组合来表示，即存在数 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_s，使

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\beta}_s. \tag{3.5.1}$$

因为 A 中向量线性无关，因 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$，故 λ_i 中至少有一个不为零，不妨假定 $\lambda_1 \neq 0$. 由(3.5.1)式解出 $\boldsymbol{\beta}_1$：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_1}\boldsymbol{\beta}_s. \tag{3.5.2}$$

但对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 2, 3, \cdots, r)$，已知 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 的线性组合表示，将(3.5.2)式代入 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的表示式，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 的线性组合表示. 这样，我们可将 B 组向量中的 $\boldsymbol{\beta}_1$ 换成 $\boldsymbol{\alpha}_1$，这时 A 组中任一向量仍可用 B 组中向量的线性组合来表示.

现在我们用归纳法，设 B 组向量已经换成 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k; \boldsymbol{\beta}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$，且 A 中任一向量都可以用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k; \boldsymbol{\beta}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 的线性组合表示，假设 $k < r$，则 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{\alpha}_k + \mu_{k+1}\boldsymbol{\beta}_{k+1} + \cdots + \mu_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

其中至少有一个 $\mu_i (i = k+1, \cdots, s)$ 不为零. 这是因为若 $\mu_{k+1} = \cdots = \mu_s = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 将可用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$ 线性表示，这与 A 组向量线性无关矛盾. 不失一般性，

可设 $\mu_{k+1}\neq 0$. 用与上述相同的论证,又可将 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 换成 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$,得到向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}; \boldsymbol{\beta}_{k+2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$,且 A 组向量中任一向量均可表示为这组向量的线性组合. 这一事实表明,我们可将 A 中向量依次换入 B. 但 $r>s$, 因此可将 A 中 s 个向量换入 B 组. 不妨设 B 经调换以后的向量组为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$,则 A 组向量中 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 也可用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的线性组合来表示,从而向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性相关,引出矛盾. 证毕.

为了记住这个命题,我们用一句话来概括引理 3.5.1: **“多”若可以用“少”来线性表示,则“多”线性相关.**

引理 3.5.2 若 A,B 是两组向量且都是线性无关的向量组. 又假定 A 中的任一向量可用 B 中向量的线性组合来表示,B 中任一向量也可用 A 中向量的线性组合来表示,则这两组向量所包含的向量个数相等.

证明 设 A 有 r 个向量,B 有 s 个向量. 由引理 3.5.1 得 $r\leqslant s$. 同理又有 $s\leqslant r$,故 $r=s$, 证毕.

定理 3.5.1 设 B_1 与 B_2 都是向量族 A 的极大线性无关组,假定它们是有限集,则 B_1 与 B_2 均含有相同个数的向量.

证明 由定义及引理 3.5.2 即得. 证毕.

定义 3.5.2 向量族 S 的极大无关组所含的向量个数称为 S 的秩,记做 $\mathrm{rank}(S)$或 $r(S)$.

向量族的秩可以看成是向量族线性无关程度的度量.

定义 3.5.3 设向量组 A 和 B 可以互相线性表示,则称这两个向量组等价.

定理 3.5.2 等价的向量组有相同的秩.

证明 设 $r(A)=r, r(B)=s$. A_1 和 B_1 分别是 A 和 B 的极大无关组,则 A_1 有 r 个向量,B_1 有 s 个向量. 因为 A 中向量均可用 A_1 中向量线性表示,所以 B_1 中向量均可用 A_1 中向量线性表示,于是 $s\leqslant r$. 同理 A_1 中向量均可用 B_1 中向量线性表示,故 $r\leqslant s$,于是 $r=s$. 证毕.

如果我们考虑的向量族是整个的线性空间,其极大无关组就是所谓的基.

定义 3.5.4 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间,若在 V 中存在线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$,使 V 中任一向量均可表示为这组向量的线性组合,则称 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是 V 的一组基,线性空间 V 称为 n 维线性空间(具有维数 n). 如果不存在有限个向量组成 V 的一组基,则称 V 是无限维线性空间.

注 对任一无限维空间,也有基的概念. 无限维线性空间基的存在性证明超出了本课程的范围.

显然,V 中的一组极大线性无关组就是 V 的一组基. n 维线性空间任一组基都含有 n 个向量. 如果 V 是 n 维线性空间,则记之为 $\dim V=n$.

推论 3.5.1　n 维线性空间中任一组超过 n 个向量的向量组必线性相关.

证明　若 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且 $m > n$, n 维线性空间的基为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合来表示,由引理 3.5.1 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,证毕.

例 3.5.1　已知 V 是 n 维向量空间, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 中 n 个向量. 若它们适合下列条件之一,则 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基.

(1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

(2) V 中的向量均可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示.

证明　(1) 因为 V 中任意 $n+1$ 个向量一定线性相关,故对任意 V 中向量 $\boldsymbol{v}$,向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{v}$ 线性相关. 于是存在不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, c$,使

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n + c\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

其中 $c \neq 0$. 事实上若 $c = 0$,因为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关,将导致 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c = 0$,与假设矛盾. 由 $c \neq 0$, 可得

$$\boldsymbol{v} = -\frac{a_1}{c}\boldsymbol{e}_1 - \frac{a_2}{c}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{a_n}{c}\boldsymbol{e}_n.$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 可用向量组 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 线性表示,即 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是一组基.

(2) 只需证明 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 线性无关. 假设 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组基,则由已知条件,这组基可由向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示. 假定 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的极大无关组所含向量个数为 $r < n$,则 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 可由这 r 个向量线性表示(参见定义 3.5.1 下面的注). 由引理 3.5.1 将有 $n \leqslant r$, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关. 证毕.

例 3.5.2　设 V 是 n 维向量空间, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 是 V 中 $m(m < n)$ 个线性无关的向量,又假定 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的基,则必可在 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 中选出 $n-m$ 个向量,使之和 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 一起组成 V 的一组基.

证明　将 $\boldsymbol{e}_i(i = 1, \cdots, n)$ 依次放入 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$,则必有一个 $\boldsymbol{e}_i$,使 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_i$ 线性无关. 这是因为若任一 $\boldsymbol{e}_i$ 加入 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 后线性相关,则每个 $\boldsymbol{e}_i$ 可用 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 线性表示, 将和引理 3.5.1 的结论矛盾. 现不妨设 $i = m+1$. 若 $m+1 < n$,又可从 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中找到一个向量, 加入进去以后仍线性无关. 不断这样做下去,便可将 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 扩张成为 V 的一组基. 证毕.

注　例 3.5.2 通常称为基扩张定理,常用的形式是: n 维线性空间 V 中任意 $m(m < n)$ 个线性无关的向量均可扩张为 V 的一组基,或 V 的任意一个子空间(子空间的概念见 § 3.7)的基均可扩张为 V 的一组基.

习 题 3.5

1. 设线性空间 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,已知有序向量组 $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性相关,求证:最多只有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以表示为前面向量的线性组合.

2. 设 V 是实数域上次数不超过 n 的多项式全体所成的实线性空间,求证:$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 是 V 的一组基.又 $\{1, x+1, (x+1)^2, \cdots, (x+1)^n\}$ 也是 V 的一组基.

3. 设 V 是由数域 $\mathbf{K}$ 上次数小于 n 的多项式全体构成的线性空间,$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个互不相同的 $\mathbf{K}$ 中数,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, $f_i(x)=f(x)/(x-a_i)$,求证:$\{f_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)\}$ 组成 V 的一组基.

4. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 中 n 个向量,若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的线性组合来表示,求证:$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 也是 V 的一组基.

5. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 中的向量,且 V 中任一向量均可用唯一的方法表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合,求证:$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基.

6. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上 $m\times n$ 矩阵组成的线性空间,令 $E_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 是第 (i, j) 元素为 1、其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵,求证:全体 E_{ij} 组成了 V 的一组基,因而 V 是 mn 维线性空间.

7. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上 n 阶上三角阵全体组成的线性空间,求 V 的维数.

8. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上 n 阶对称矩阵的集合,证明:在矩阵的加法及数乘下 V 是线性空间,试求 V 的维数.

9. 若将复数域 $\mathbf{C}$ 看成是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,求证其维数为 2.

10. 设 $V=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\}$,其中 a, b, c 均是有理数,证明 V 是有理数域上的线性空间并求其维数.

§3.6 矩阵的秩

定义 3.6.1 *设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 A 的 m 个行向量的秩称为它的行秩;A 的 n 个列向量的秩称为 A 的列秩.*

注 我们很快将证明矩阵的行秩等于它的列秩.

我们在本节开始时,从线性方程组引出了向量秩的概念.我们注意到,交换线性方程组中的方程式,用非零常数乘以某一个方程式以及某个方程式乘以一个常数加到另外一个方程式上去这样 3 种变换并不改变线性方程组的同解性.所以我们有理由猜想:矩阵的行秩和列秩在初等变换下是不变的.

定理 3.6.1 *矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.*

证明 我们分两步走.第一步证明矩阵的行秩在行初等变换下不变,列秩在

列初等变换下不变.第二步证明列秩在行初等变换下不变,行秩在列初等变换下不变.

第一步,设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,为简单起见将它写成分块的形状:

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$ 是 A 的第 i 个行向量.对换 A 的任意两行并不改变 A 的行向量组,因此也不改变 A 的行秩.这表明 A 在第一种行初等变换下行秩不变.又若以一个非零常数 k 乘以 A 的第 i 行,则 A 变成:

$$A_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ k\boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}.$$

显然,A_1 的 m 个行向量可用 A 的 m 个行向量的线性组合来表示.反之 A 的 m 个行向量也可用 A_1 的行向量的线性组合来表示,因此 A 的行秩与 A_1 的行秩相等.接下来再看第三种行初等变换.将矩阵 A 的第 i 行乘以 k 后加到第 j 行上去,矩阵 A 变成了下列矩阵:

$$A_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ k\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}.$$

显然,A_2 的向量是 A 中向量的线性组合.反之,

$$\boldsymbol{\alpha}_j=(-k)\boldsymbol{\alpha}_i+(k\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j).$$

因此 A 中向量也是 A_2 中向量的线性组合,从而 A 与 A_2 的行秩相等.这就证明了 A 的行秩在行初等变换下不变.同理,A 的列秩在列初等变换下也不变.

第二步,我们证明 A 的列秩在行初等变换下不变.由于 A 的行初等变换等价于用一个初等矩阵左乘以 A,我们只需证明对任一初等矩阵 Q, QA 与 A 的列秩相等就可以了.现把 A 写成列向量形状:

$$A = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是 A 的第 j 个列向量.由分块矩阵的乘法得

$$QA = (Q\boldsymbol{\beta}_1, Q\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, Q\boldsymbol{\beta}_n).$$

设 A 的列向量的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$,这样的假定不失一般性,因为交换任意两列均不改变矩阵的列秩,我们经过若干次的交换后总可将极大线性无关组换到前 t 个.现在我们要证明 $\{Q\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, Q\boldsymbol{\beta}_t\}$ 是 QA 的极大线性无关组.

先证明 $Q\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, Q\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t \in \mathbf{K}$,使

$$\lambda_1 Q\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2 Q\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_t Q\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0},$$

则

$$Q(\lambda_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_t \boldsymbol{\beta}_t) = \mathbf{0}.$$

但 Q 是非异阵,在上式两边左乘 Q^{-1} 即得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_t \boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.$$

再由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关即得 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0$.这就证明了 $\{Q\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, Q\boldsymbol{\beta}_t\}$ 是一组线性无关的向量.

再证明任一 $Q\boldsymbol{\beta}_j$ 均可表示为 $Q\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, Q\boldsymbol{\beta}_t$ 的线性组合.由于 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组,故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \mu_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mu_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \mu_t \boldsymbol{\beta}_t.$$

上式两边作用 Q 即得:

$$Q\boldsymbol{\beta}_j = \mu_1 Q\boldsymbol{\beta}_1 + \mu_2 Q\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \mu_t Q\boldsymbol{\beta}_t.$$

由上面的论证知道,A 与 QA 的极大线性无关组都有相同个数的向量,因此 A 与 QA 的列秩相等.同理可证明 A 的行秩在列初等变换下不变.证毕.

推论 3.6.1　任一矩阵的行秩等于列秩.

证明　任一矩阵 A 经初等变换后均可变成下列分块对角阵:

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6.1}$$

其中 B 是分块矩阵，I_r 为 r 阶单位阵. 显然，B 的行秩与列秩都等于 r，因此 A 的行秩与列秩都等于 r. 证毕.

有了这个推论，我们今后不再讲行秩与列秩，统称为秩. 矩阵 A 的秩用 $r(A)$ 或 rank A 来表示.

例 3.6.1　求下列上三角阵的秩：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

解　用初等变换不难把 A 化为对角阵：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $r(A)=r$.

由定理 3.6.1 及上例，我们得到求一个矩阵秩的方法：用初等变换将一个矩阵化为像例 3.6.1 A 那样的上三角阵(下三角阵也可以)，则 A 的秩等于主对角线上非零元的个数. 更一般地，如果我们通过初等变换将矩阵化为阶梯形，则非零行组成的阶梯数就是该矩阵的秩.

推论 3.6.2　任一矩阵 A 的转置 A' 与 A 有相同的秩.

推论 3.6.3　任一矩阵与一非异阵相乘，其秩不变.

证明　任一非异阵均可化为有限个初等矩阵的积，由此即有结论. 证毕.

推论 3.6.4　n 阶非异阵的秩等于 n.

由这个推论，非异阵又称为满秩阵.

推论 3.6.5　n 阶方阵 A 的 n 个行向量(或列向量)线性无关的充分必要条件是 $|A|\neq 0$，即 A 的行列式不为零.

证明　n 阶方阵经初等变换后变成下列对角阵：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $r=n$，则 $|A|\neq 0$；若 $r<n$，则 $|A|=0$. 因此，$|A|\neq 0$ 意味着 A 的行向量的极大线性无关组有 n 个向量，即 A 的行向量线性无关. 而 $|A|=0$ 意味着 A 的行向量必线性相关. 对列的结论同样证明. 证毕.

推论 3.6.6 两个 $m\times n$ 矩阵等价的充分必要条件是它们具有相同的秩.

证明 设矩阵 A,B 秩都等于 r，则它们都等价于(3.6.1)式的矩阵，因此 A 和 B 等价. 反之，由于矩阵秩在初等变换下不变，从 A 和 B 等价可知它们的秩相同. 证毕.

推论 3.6.7 对任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 A，总存在可逆 m 阶矩阵 P 和可逆 n 阶矩阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们已经知道，一个 n 阶方阵秩等于 n 的充分必要条件是该矩阵的行列式不等于零. 这个结论很容易被推广到秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵上. 从上面的推论我们发现，在 PAQ(它的秩等于 r)中，有一个 r 阶子行列式 I_r 其值不等于 0，而没有值不等于 0 的超过 r 阶的子行列式. 这个结论对一般的矩阵还对吗?

我们先解释一下子式的概念. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 任取 A 的 k 行与 k 列，位于这些行与这些列的交叉处的元素按原来的顺序构成一个 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

例如，在矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

中取第一行，第二行及第一列、第三列得到的 2 阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

取第二行、第三行及第一列、第五列得到的 2 阶子式为

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

定理 3.6.2 设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 有一个 r 阶子式不等于零，且 A 中任意 $r+1$ 阶子式(如存在)都等于零，则 $r(A)=r$. 反之，若 $r(A)=r$，则 A 中必有一个 r 阶子式不等于零，而所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

证明　设 $r(A)=r$，则 A 中任意 $r+1$ 行都线性相关，因此 A 的任意 $r+1$ 阶子式的行向量也线性相关，由推论 3.6.5 可知这些 $r+1$ 阶子式的值均为零. 再证明 A 至少有一个 r 阶子式不等于零. 因为 A 的秩为 r，A 中有 r 行线性无关. 不失一般性，设为前 r 行. 把这 r 行取出得到一个矩阵：

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

显然 $r(B)=r$，因此 B 有 r 列线性无关，同样不妨设为前 r 列，则由 B 的前 r 列组成的行列式不等于零，即 A 有一个 r 阶子式不等于零.

反之，设 A 有一个 r 阶子式不为零而 A 的所有 $r+1$ 阶子式全等于零. 这时由行列式的定义可知，A 的所有高于 r 阶的子式均等于零. 设 $r(A)=t$，则由前面的论述可知 $t\geqslant r$，否则 A 的 r 阶子式无一不为零. 但 t 也不能大于 r，否则 A 就要有一个大于 r 阶的子式不等于零而与假定矛盾，因此 $t=r$. 证毕.

例 3.6.2　设 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，求证：$r(C)=r(A)+r(B)$.

证明　设 A,B 的秩分别为 r_1,r_2，则存在可逆阵 P_1，Q_1 和可逆阵 P_2，Q_2，使

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2AQ_2=\begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & 0 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $r(C)=r_1+r_2$. 证毕.

例 3.6.3　求证：$r(AB)\leqslant\min\{r(A),\ r(B)\}$.

证明　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵. 将矩阵 B 按列分块，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_s)$，则 $AB=(A\boldsymbol{\beta}_1,\ A\boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\beta}_s)$. 若 B 列向量的极大无关组为 $\{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\ \boldsymbol{\beta}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{i_r}\}$，则 B 的任一列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 均可用 $\{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\ \boldsymbol{\beta}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{i_r}\}$ 线性表示. 于是任一 $A\boldsymbol{\beta}_j$ 也可用 $\{A\boldsymbol{\beta}_{i_1},\ A\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ \cdots,\ A\boldsymbol{\beta}_{i_r}\}$ 来线性表示. 因此向量组 $\{A\boldsymbol{\beta}_1,\ A\boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\beta}_s\}$ 的秩不超过 r，即 $r(AB)\leqslant r(B)$. 同理，对矩阵 A 用行分块的方法可以证明

$r(AB) \leqslant r(A)$. 证毕.

例 3.6.4 求证：n 阶矩阵 A 是幂等矩阵（即 $A^2 = A$）的充分必要条件是：

$$r(A) + r(I_n - A) = n.$$

证明 在下列矩阵的分块初等变换中矩阵秩保持不变：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

因此

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

即 $r(A) + r(I-A) = r(A-A^2) + n$. 由此即得结论. 证毕.

对矩阵求秩的方法也可以用来求向量组的秩，方法是将向量组拼成一个矩阵，用初等变换求出矩阵的秩. 由于矩阵的秩就是其行向量组或列向量组的秩，我们就得到了向量组的秩.

例 3.6.5 求向量组的秩：

$$\{(1, 2, 3, 4), (0, -1, -2, -3), (2, 3, 4, 5)\}.$$

解 将上述向量拼成矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行行初等变换将其化为阶梯阵：

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到矩阵的秩显然为 2，所以向量组的秩也等于 2.

要判断向量组是否线性相关，用定义来做将是一件很麻烦的事. 现在我们可以用求矩阵的秩的方法来判断. 具体来说，我们将要判断的向量组拼成一个矩阵，然后求出矩阵的秩. 若矩阵的秩（实际上也是向量组的秩）等于向量的个数，则向量组线性无关；若其秩小于向量的个数，则向量组线性相关.

例 3.6.6 判定下列向量组是否线性无关：

$$\{(-1,3,1),(2,1,0),(1,4,1)\}.$$

解　将向量组拼成矩阵并用初等变换求秩：

$$\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&1&0\\1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&7&2\\0&7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&7&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

矩阵的秩等于 2,小于向量组中向量的个数,因此向量组线性相关.

注　如果用向量组拼成的矩阵是一个方阵,则也可用行列式法来判断这个矩阵的秩是否等于向量组中向量的个数. 比如计算出上面矩阵的行列式后我们发现它等于零,因此矩阵的秩小于 3,即向量组线性相关.

例 3.6.7　判断下列向量是否线性相关：

$$(1,2,-1),(0,2,2),(2,1,3).$$

解　计算这 3 个向量组成的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&2&2\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&2&2\\0&-3&5\end{vmatrix}=16\neq 0.$$

所以这 3 个向量线性无关.

习　题　3.6

1. 用初等变换法求下列矩阵的秩：

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-1&2&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\3&4&7\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&2&1&0\\1&-2&-1&0\\-1&0&1&1\\-2&0&2&2\end{pmatrix}.$$

2. 用矩阵的初等变换法求下列向量组的秩：

(1) $(2,1,3,0,4),(-1,2,3,1,0),(3,-1,0,-1,4)$;

(2) $(1,2,3,4),(0,-1,2,3),(2,3,8,11),(2,3,6,8)$.

3. 用矩阵初等变换方法判断下列向量组是否线性相关：

(1) $(5,1,2),(-3,1,3),(2,2,3)$;

(2) $(1,2,3),(3,6,9),(2,1,1)$;

(3) $(1,-2,2,3),(-2,4,-1,3),(0,6,2,3)$.

4. 已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)\}$. 用矩阵初等变换方法求该向量组的一个极大无关组.

5. 证明下列矩阵秩的公式：

(1) $r(A \mid B) \leqslant r(A) + r(B), r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leqslant r(A) + r(B)$;

(2) 若 $k \neq 0$，则 $r(kA) = r(A)$;

(3) $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$, $r(A-B) \leqslant r(A) + r(B)$;

(4) $r(A-B) \geqslant |r(A) - r(B)|$.

6. 证明：一个矩阵添加一行或一列，其秩不变或增加 1.

7. 举例说明秩相同的两个 n 维向量组未必等价. 证明：两个 n 维向量组 A, B 等价的充分必要条件是它们的秩相同且向量组 A 可用向量组 B 线性表示.

8. 设 A 是 n 阶方阵，求证：$A^2 = I_n$ 的充分必要条件是

$$r(I_n + A) + r(I_n - A) = n.$$

9. 设 A 是 n 阶矩阵，求证：$r(A) + r(I_n + A) \geqslant n$.

10. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times t$ 矩阵，求证：

$$r(AB) \geqslant r(A) + r(B) - n.$$

11. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵且 $r(A) = n$，求证：必存在秩为 n 的 $n \times m$ 矩阵 B，且适合

$$BA = I_n.$$

12. 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵，则

$$A = BC,$$

其中 B 是一个 $m \times r$ 矩阵且 $r(B) = r$，C 是一个 $r \times n$ 矩阵且 $r(C) = r$.

§3.7 坐标向量

读者已经学过解析几何. 解析几何就是用代数工具来研究几何问题，做到这一点最根本的是要建立坐标系，将平面(或空间)上的点和有序实数组对应起来. 我们在线性空间中引进基的目的就是为了要在其中引进“坐标”.

引理 3.7.1 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，且

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n,$$

则 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

证明 由假设得：

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

但 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关，因此 $a_i - b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，即 $a_i = b_i$. 证毕.

这个引理表明，如果取定 V 中的一组基，则 V 中任一向量可以而且只可以

用一种方式表示为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合. 如果我们固定基向量的次序为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 唯一地对应 $\mathbf{K}$ 中的一组有序数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 我们称这组有序数为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量,其中 a_i 称为第 i 个坐标. 反过来, $\mathbf{K}$ 中的任一组有序的 n 个数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 也唯一地对应一个 V 中的向量 $a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$. 我们把坐标向量看成是 n 维行向量,于是在 V 与 $\mathbf{K}^n$ 之间存在一个一一对应的映射 φ:

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \to (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

我们知道,V 不仅是一个集合,而且在其中存在着一个代数结构,即向量之间有加减法与数乘. 同样道理, $\mathbf{K}^n$ 也是一个向量空间,其向量之间也有着运算关系. 我们希望知道上述一一对应和这两个线性空间中向量的运算有着什么样的联系.

先来看加法. 设

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n,$$

$$\boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\boldsymbol{e}_n.$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 对应于

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

当我们把 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 看成行向量空间 $\mathbf{K}^n$ 中的向量时,

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

因此

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(\boldsymbol{\beta}).$$

这里需要注意的是 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 中的“+”是在 V 中的加法,而 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(\boldsymbol{\beta})$ 中的“+”是 $\mathbf{K}^n$ 中的加法.

另一方面,若 $k \in \mathbf{K}$,则

$$k\boldsymbol{\alpha} = ka_1\boldsymbol{e}_1 + ka_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + ka_n\boldsymbol{e}_n,$$

因此

$$\varphi(k\boldsymbol{\alpha}) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) = k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).$$

上面的分析表明，当我们在 V 中引进一组基后，可以建立起 V 中的向量与 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量空间之间的一一对应. 这个对应保持了线性运算，即

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta});\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).$$

定义 3.7.1　设 V, U 是数域 $\mathbf{K}$ 上的两个线性空间，若存在 V 到 U 上一个一一对应的映射 φ，使得对任意 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 以及 $\mathbf{K}$ 中的数 k，均有

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta});\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}),$$

则称 V 与 U 这两个线性空间同构，记为 $V\cong U$.

上面的论证可归结为下列定理.

定理 3.7.1　数域 $\mathbf{K}$ 上的任一 n 维线性空间均与 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量空间同构.

同构的线性空间顾名思义其代数结构是相同的，那么它们中向量的线性关系应该是一致的. 事实上同构的线性空间有如下定理所表述的性质.

定理 3.7.2　(1) 设 V, U 同构，同构映射为 φ，则

$$\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0};$$

(2) φ 将线性相关的向量组映成线性相关的向量组，将线性无关的向量组映成线性无关的向量组；

(3) 同构关系是一个等价关系，即

(i) $V\cong V$;

(ii) 若 $V\cong U$，则 $U\cong V$;

(iii) 若 $V\cong U$,$U\cong W$，则 $V\cong W$;

(4) 数域 $\mathbf{K}$ 上的两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们具有相同的维数.

证明　(1) 显然有

$$\varphi(\mathbf{0})=\varphi(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\varphi(\mathbf{0})+\varphi(\mathbf{0}).$$

消去一个 $\varphi(\mathbf{0})$就有 $\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中线性相关向量，则存在不全为零的数 k_1, k_2, $\cdots$, k_m，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

于是由(1)，有

$$\varphi(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0}.$$

上式左端为

$$\varphi(k_1\boldsymbol{\alpha}_1)+\varphi(k_2\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\varphi(k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$$
$$=k_1\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m\varphi(\boldsymbol{\alpha}_m).$$

因此 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_m)$是一组线性相关的向量.

另一方面,若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且如果 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_m)$在 U 中线性相关,则存在一组不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$,使

$$c_1\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+c_2\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+c_m\varphi(\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0}.$$

但上式左端等于

$$\varphi(c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m).$$

由于 φ 是一一对应的映射且已证明 V 中的零向量与 U 中的零向量对应,因此

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

但 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,这就引出了矛盾,故 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_m)$必线性无关.

(3) (i) 显然 V 与自身同构,这时取 φ 为恒同映射,即

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

(ii) 设 φ 是 $V\to U$ 上的一一对应. φ^{-1}是其逆对应:$U\to V$. φ^{-1}也是一一对应. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是 U 中的向量,由于 φ 是一一对应,故存在 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in V$,使

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x},\ \varphi(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{y},$$

也就是

$$\boldsymbol{\alpha}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\beta}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}).$$

由 φ 是同构可知

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \varphi(k\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{x},$$

因此

$$\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})+\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}),$$
$$\varphi^{-1}(k\boldsymbol{x})=k\boldsymbol{\alpha}=k\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}).$$

这表明 φ^{-1}是 $U\to V$ 上的同构,故 $U\cong V$.

(iii) 若 φ 是 $V\to U$ 上的同构, ψ 是 $U\to W$ 上的同构. 令 $\xi=\psi\varphi$, 即对任意

的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有

$$\xi(\boldsymbol{\alpha}) = \psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha})),$$

则 ξ 是 $V \to W$ 的一一对应,且

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= \psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})) = \psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta})) \\ &= \psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha})) + \psi(\varphi(\boldsymbol{\beta})) \\ &= \xi(\boldsymbol{\alpha}) + \xi(\boldsymbol{\beta}), \\ \xi(k\boldsymbol{\alpha}) &= \psi(\varphi(k\boldsymbol{\alpha})) = \psi(k\varphi(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= k\psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha})) = k\xi(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

这就是说 ξ 是 $V \to W$ 上的同构.

(4) 设 V 与 U 是 $\mathbf{K}$ 上的两个线性空间, $V \cong U$. 设 $\dim V = n$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基,则 $\{\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\}$ 是 U 的一组线性无关的向量. 又若 $\boldsymbol{x} \in U$,则由于 φ 是一一对应,因此存 在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,使 $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{\alpha})$. 设

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n,$$

则

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + k_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + k_n\varphi(\boldsymbol{e}_n).$$

即 U 中任一向量可表示为 $\{\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\}$ 的线性组合,故 $\{\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\}$ 是 U 的一组基. 因此 $\dim U = n = \dim V$.

反之,若 $\dim U = \dim V = n$, 则 U 与 V 皆同构于 n 维行向量空间 $\mathbf{K}^n$,由(3)可知 V 和 U 同构. 证毕.

由同构的定义我们可以看出,两个同构的线性空间不仅元素之间有一个一一对应关系,而且这个对应保持了线性关系. 因此,在一个线性空间中由线性关系获得的性质在与之同构的线性空间中也成立. 又由上述定理知道,数域 $\mathbf{K}$ 上的任一 n 维线性空间同构于 $\mathbf{K}^n$. $\mathbf{K}^n$ 是 $\mathbf{K}$ 上的行向量空间,它比较具体,容易捉摸,它是一般 n 维空间的"模型". 我们常常通过对 $\mathbf{K}^n$ 的研究来探讨一般 n 维空间的性质. 显然,上述讨论也适用于 n 维列向量空间,即 $\mathbf{K}_n$ 也是一个合适的模型. 我们可视讨论的方便采用合适的模型. 在本教程中,我们将比较多地采用列向量空间 $\mathbf{K}_n$. 如果 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$, 我们称列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$下的坐标向量.

既然同构保持了向量的线性关系,那么向量组的秩在同构关系下也应该保持,即我们有下面的推论.

推论 3.7.1 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是线性空间 V 的基, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中向量. 它们在这组基下的坐标向量依次为 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$, 则向量组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 有相同的秩.

证明 同构映射将$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$的极大无关组映为$\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m\}$的极大无关组,所以这两组向量的秩相同. 证毕.

这个推论可以使我们将一般的线性空间中向量组的求秩问题归结为行向量或列向量的求秩问题,我们已经知道它可以用矩阵来处理. 特别,判断向量组是否线性相关也可以这样做.

例 3.7.1 设$\{e_1, e_2, e_3\}$是线性空间 V 的基,又

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = 2e_1 - e_2 - 3e_3, \\ \boldsymbol{\alpha}_1 = e_1 - 3e_2 - 6e_3, \end{cases}$$

求向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$的秩并判断它们是否线性相关.

解 因为矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

的秩等于 2,所以向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$的秩等于 2. 这 3 个向量线性相关.

习 题 3.7

1. 求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 在基

$$\{\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, \cdots, 1, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (1, 1, \cdots, 1, 0), \cdots, \boldsymbol{\beta}_n = (1, 0, \cdots, 0, 0)\}$$

下的坐标.

2. 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是线性空间 V 的一组基,问: $\{e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+e_2+\cdots+e_n\}$是否也是 V 的基?

3. 已知向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}(s>1)$是线性空间 V 的一组基,设 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$. 讨论向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

4. 设$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$是线性空间 V 的一组基,已知

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = - e_1 - 3e_2 + 5e_3 + e_4, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + 4e_4, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 = - 2e_1 - 6e_2 + 10e_3 + 2e_4, \end{cases}$$

求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.

5. 设 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个不同的实数，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是实线性空间 V 的一组基，已知

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_1^{n-1} e_n, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_2^{n-1} e_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n = e_1 + a_n e_2 + \cdots + a_n^{n-1} e_n, \end{cases}$$

求证：$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 也是 V 的一组基.

§3.8 基变换与过渡矩阵

我们在上一节中引进了基与坐标的概念. 我们将在这一节中考虑这样一个问题：如果线性空间的基发生了变动，同一个向量的坐标将发生怎样的变化？

设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 的一组基，$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是另一组基，若 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 可用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的下列线性组合表示：

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{f}_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{cases} \tag{3.8.1}$$

上述表示式中 $\boldsymbol{e}_i$ 的系数组成了一个元素在 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵. 这个矩阵的转置

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵.

现设

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \mu_1\boldsymbol{f}_1 + \mu_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{f}_n,$$

将(3.8.1)式代入得：

$$\boldsymbol{\alpha}=\mu_1\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\boldsymbol{e}_j\right)+\mu_2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\boldsymbol{e}_j\right)+\cdots+\mu_n\left(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\boldsymbol{e}_j\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{i1}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{i2}\right)\boldsymbol{e}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{in}\right)\boldsymbol{e}_n.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$，故

$$\lambda_j=\mu_1 a_{1j}+\mu_2 a_{2j}+\cdots+\mu_n a_{nj}\,(j=1,2,\cdots,n).\tag{3.8.2}$$

上式可用矩阵来表示：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}.\tag{3.8.3}$$

上式表明了同一个向量在不同基下的坐标向量之间的关系.

反之，若 V 中向量在$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$下的坐标向量$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)'$和 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$下的坐标向量$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$适合如(3.8.3)式的关系. 注意到 $\boldsymbol{f}_1$ 在$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$下的坐标向量为$(1,0,\cdots,0)'$，由(3.8.3)式可知它在$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$下的坐标向量为$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})'$，这即是说

$$\boldsymbol{f}_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{e}_n.$$

同理，对 $\boldsymbol{f}_i$ 有

$$\boldsymbol{f}_i=a_{i1}\boldsymbol{e}_1+a_{i2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{e}_n.$$

因此，矩阵 A 就是从基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$到基$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$的过渡矩阵.

我们已经知道如果(3.8.1)式中的系数矩阵(或等价于它的转置即过渡矩阵 A)可逆，那么向量组$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$必线性无关，从而是线性空间 V 的一组基. 那么反过来，过渡矩阵它是否一定可逆？另外一个问题是：如果已知从基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$到基$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$的过渡矩阵为 A，则从$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$到$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$的过渡矩阵是什么？我们有理由猜想：过渡矩阵必是可逆阵，且从$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$到$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$的过渡矩阵就是 A^{-1}. 现设

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=b_{11}\boldsymbol{f}_1+b_{12}\boldsymbol{f}_2+\cdots+b_{1n}\boldsymbol{f}_n,\\ \boldsymbol{e}_2=b_{21}\boldsymbol{f}_1+b_{22}\boldsymbol{f}_2+\cdots+b_{2n}\boldsymbol{f}_n,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{e}_n=b_{n1}\boldsymbol{f}_1+b_{n2}\boldsymbol{f}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{f}_n.\end{cases}\tag{3.8.4}$$

令

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

即矩阵 B 是从基$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$到基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$的过渡矩阵.

定理 3.8.1　*上述 n 阶方阵 A，B 互为逆阵，即*

$$B=A^{-1}.$$

证明　设

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n=\mu_1\boldsymbol{f}_1+\mu_2\boldsymbol{f}_2+\cdots+\mu_n\boldsymbol{f}_n,$$

则

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

但 λ_i 可取 $\mathbf{K}$ 中任意数，因此

$$AB=I_n.$$

证毕.

接下去一个问题是：我们假定从基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$到基$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$的过渡矩阵为 A. 从$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$到$\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$的过渡矩阵为 B，那么从

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$到$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$的过渡矩阵是什么?

假定从基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$到基$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$的过渡矩阵是$C$. 又假定

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \\ &= \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_n f_n \\ &= \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \cdots + \xi_n g_n,\end{aligned}$$

则

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

这就是说AB是基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$到基$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$的过渡矩阵.

例 3.8.1　设在$\mathbf{K}^3$中有两组基$f_1=(1,0,-1)$, $f_2=(2,1,1)$, $f_3=(1,1,1)$和$g_1=(0,1,1)$, $g_2=(-1,1,0)$, $g_3=(1,2,1)$. 求从$\{f_1, f_2, f_3\}$到$\{g_1, g_2, g_3\}$的过渡矩阵.

解　这道题如果我们直接做,将面临解一个九元一次方程组,非常麻烦. 我们利用上面的结论可以很快得到所要求的结果.

设$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, 则从$\{e_1, e_2, e_3\}$到$\{f_1, f_2, f_3\}$的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

从$\{e_1, e_2, e_3\}$到$\{g_1, g_2, g_3\}$的过渡矩阵为

$$B = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则从$\{f_1, f_2, f_3\}$到$\{g_1, g_2, g_3\}$的过渡矩阵为$A^{-1}B$. 用第二章例 2.5.4 的方法求矩阵$A^{-1}B$:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

因此从基$\{f_1, f_2, f_3\}$到基$\{g_1, g_2, g_3\}$的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

注 我们在(3.8.3)式中采用的坐标向量是列向量. 如果我们采用行向量，也可有类似的坐标变换公式,但在形式上略有不同. 我们把结论列出如下,而把证明留给读者. 这时(3.8.2)式的矩阵表示应改为

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们注意到上式正好是(3.8.3)式的转置.

习 题 3.8

1. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在下列基下的坐标,$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$是 $\mathbf{K}^4$ 的基:

(1) $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1, 3)$, $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 0, -1)$, $e_4 = (1, 1, 1, 1)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, -1, -1)$.

2. 求从基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$到基$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4\}$的过渡矩阵:

(1) $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \\ \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \\ \boldsymbol{e}_4 = (0, 0, 0, 1); \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0, 1), \\ \boldsymbol{f}_2 = (0, 0, 1, -1), \\ \boldsymbol{f}_3 = (2, 1, 0, 3), \\ \boldsymbol{f}_4 = (-1, 0, 1, 2); \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 0, 1), \\ \boldsymbol{e}_2 = (2, 1, 3, 0), \\ \boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 0, 0), \\ \boldsymbol{e}_4 = (0, 1, -1, -1); \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0, 1), \\ \boldsymbol{f}_2 = (0, 0, 1, -1), \\ \boldsymbol{f}_3 = (2, 1, 0, 3), \\ \boldsymbol{f}_4 = (-1, 0, 1, 2). \end{cases}$

3. 求向量$\boldsymbol{\alpha}$在第 2 题中两组基下的坐标:

(1) $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0, 1)$;　　　　(2) $\boldsymbol{\alpha} = (3, -1, 0, 2)$.

4. 设V是次数不超过n的实多项式全体组成的线性空间,求从基$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$到基$\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\}$的过渡矩阵并以此证明多项式的 Taylor(泰勒)公式:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

其中$f^{(n)}(x)$表示$f(x)$的n次导数.

§3.9　子　空　间

在空间解析几何中,读者已经知道,通常的三维空间中任一经过原点的平面有这样的性质:任意以原点为始点、终点在该平面内的向量之和仍在该平面内;平面内任一向量的数乘也仍在该平面内,即这个平面关于向量的线性组合封闭.这样的平面称为三维空间的子空间.我们把这一概念推广到一般线性空间.

定义 3.9.1　设V是数域$\mathbf{K}$上的线性空间,V_0是V的非空子集,且对V_0中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$及$\mathbf{K}$中任一数$k$,总有$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_0$及$k\boldsymbol{\alpha} \in V_0$,则称$V_0$是$V$的线性子空间,简称子空间.

命题 3.9.1　定义 3.9.1 中的V_0在V的加法及数乘下是数域$\mathbf{K}$上的线性空间.

证明　我们要证明V_0适合定义 3.3.1 中的 8 条规则.因为V_0是V的子集,因此V_0中向量的加法适合定义规则(1),(2).由于V_0非空,$\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha} + (-1)\boldsymbol{\alpha}$,因此规则(3)成立.又$-\boldsymbol{\alpha} = (-1)\boldsymbol{\alpha}$,因此规则(4)也成立.规则(5)～(8)显然对$V_0$成立,因此$V_0$是$\mathbf{K}$上的线性空间.证毕.

由上述命题,我们称定义 3.9.1 中的V_0为线性子空间是合理的.由定义我们不难证明,对V_0中的任意有限个向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,它们的任意线性组合

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

仍属于 V_0.

任一线性空间 V 至少有两个子空间,一是零向量 $\{\mathbf{0}\}$ 组成的子空间,称为零子空间(维数规定为 0);另一个是 V 自身.这两个子空间通常称为平凡子空间.

如果 V 是 n 维线性空间,则由推论 3.5.1 知道,V 的任一子空间的维数不超过 n. 若 V_0 是 V 的非平凡子空间,则

$$0<\dim V_0<\dim V=n.$$

事实上,若 $\dim V_0=n$,则 V_0 有一组由 n 个元素组成的基.但任意 n 个线性无关的向量均可组成 V 的一组基,因此这时 $V_0=V$,与 V_0 是非平凡子空间矛盾.

在通常的三维空间中,通过原点的平面是二维子空间,过原点的直线是一维子空间.反之,二维子空间必是过原点的平面,一维子空间必是过原点的直线.

定义 3.9.2　若 V_1,V_2 是 V 的子空间,定义它们的交为既在 V_1 又在 V_2 中的全体向量所成的集合 $V_1\cap V_2$. 定义它们的和为

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\ \boldsymbol{\beta}\in V_2\},$$

即所有形如 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的向量的集合,其中要求 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$, $\boldsymbol{\beta}\in V_2$.

命题 3.9.2　$V_1\cap V_2,V_1+V_2$ 都是 V 的子空间.

证明　按定义 3.9.1 直接验证即可,证毕.

类似地,可以定义 m 个子空间的交:

$$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_m$$

为属于所有 $V_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的向量全体组成的子集,它也是 V 的子空间.定义 m 个子空间的和:

$$V_1+V_2+\cdots+V_m=\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\mid\boldsymbol{\alpha}_i\in V_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\},$$

$V_1+V_2+\cdots+V_m$ 也是 V 的子空间.

定义 3.9.3　设 S 是线性空间 V 的子集,记 $L(S)$ 为 S 中向量所有可能的线性组合构成的子集,则由定义 3.9.1 不难看出,$L(S)$ 是 V 的一个子空间,称之为由集合 S 生成的子空间,或称之为由 S 张成的子空间.

定理 3.9.1　设 S 是线性空间 V 的子集,$L(S)$ 为由 S 张成的子空间,则

(1) $S\subseteq L(S)$ 且若 V_0 是包含集合 S 的子空间,则 $L(S)\subseteq V_0$,也即 $L(S)$ 是包含 S 的 V 的最小子空间;

(2) $L(S)$ 的维数等于 S 中极大无关组所含向量的个数,且若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 S 的极大无关组,则

$$L(S)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

证明　(1) 显然 $S\subseteq L(S)$. 设 $\boldsymbol{\beta}\in L(S)$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 是 S 中若干个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

因为 $S\subseteq V_0$,由子空间的定义可知 $\boldsymbol{\beta}\in V_0$,因此 $L(S)\subseteq V_0$.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 S 的极大无关组,则 S 中任一向量都是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合,即

$$S\subseteq L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

因此

$$L(S)\subseteq L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

另一方面,显然有

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m)\subseteq L(S),$$

因此

$$L(S)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

$L(S)$的维数等于 m. 证毕.

例 3.9.1　在实三维几何空间中,一个非零向量生成的子空间为这个向量所在的直线. 不在同一条直线上的两个向量生成的子空间为这两个向量所在的平面. 3 个不在同一平面内的向量生成的子空间即为整个空间.

例 3.9.2　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,则 $L(V_1\cup V_2)=V_1+V_2$.

证明　由生成的定义,对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in L(V_1\cup V_2)$, 故 $V_1+V_2\subseteq L(V_1\cup V_2)$. 另一方面,因为 $V_1\subseteq V_1+V_2$,$V_2\subseteq V_1+V_2$, 由定理 3.9.1(1), $L(V_1\cup V_2)\subseteq V_1+V_2$. 于是 $L(V_1\cup V_2)=V_1+V_2$. 证毕.

注　一般地,我们不难证明: 若 V_1,V_2, $\cdots$, V_m 是 V 的子空间,则

$$L(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m)=V_1+V_2+\cdots+V_m.$$

在子空间的和中,有一类和特别重要.

定义 3.9.4　设 V_1,V_2, $\cdots$, V_m 是线性空间 V 的子空间且对一切 i($i=1$, 2, $\cdots$, m),

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m)=\mathbf{0},$$

则称和 $V_1+V_2+\cdots+V_m$ 为直接和，简称直和. 记为

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m.$$

定理 3.9.2 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是线性空间 V 的子空间，则下列命题等价：

(1) 和 $V_1+V_2+\cdots+V_m$ 是直和；

(2) 对任意的 i，

$$V_i\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{i-1})=\mathbf{0};$$

(3) 若记 $V_0=V_1+V_2+\cdots+V_m$，则 V_0 中的元素表示为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 中元素之和时其表示唯一，这就是说若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_0$ 且

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_m,$$

其中 $\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{u}_i\in V_i$，则 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,m)$；

(4) $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_m)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m$.

证明 (1)⇒(2)：显然.

(2)⇒(3)：若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_m$，则

$$\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{u}_m=(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{v}_2)+\cdots+(\boldsymbol{u}_{m-1}-\boldsymbol{v}_{m-1}).$$

上式的左边属于 V_m，右边属于 $V_1+V_2+\cdots+V_{m-1}$，因此

$$\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{u}_m\in V_m\cap(V_1+\cdots+V_{m-1})=\mathbf{0},$$

于是 $\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{u}_m$，消去 $\boldsymbol{v}_m$ 得：

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_{m-1}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_{m-1}.$$

再用同样办法可得 $\boldsymbol{v}_{m-1}=\boldsymbol{u}_{m-1},\cdots,\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1$.

(3)⇒(4)：设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的基依次为

$$\boldsymbol{e}_{11},\cdots,\boldsymbol{e}_{1n_1};\boldsymbol{e}_{21},\cdots,\boldsymbol{e}_{2n_2};\cdots;\boldsymbol{e}_{m1},\cdots,\boldsymbol{e}_{mn_m},\tag{3.9.1}$$

则若

$$\lambda_{11}\boldsymbol{e}_{11}+\cdots+\lambda_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1}+\lambda_{21}\boldsymbol{e}_{21}+\cdots+\lambda_{2n_2}\boldsymbol{e}_{2n_2}+\cdots+\lambda_{m1}\boldsymbol{e}_{m1}+\cdots+\lambda_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m}=\mathbf{0},$$

因为

$$\lambda_{11}\boldsymbol{e}_{11}+\cdots+\lambda_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1}\in V_1,\ \lambda_{21}\boldsymbol{e}_{21}+\cdots+\lambda_{2n_2}\boldsymbol{e}_{2n_2}\in V_2,$$

$$\cdots,\ \lambda_{m1}\boldsymbol{e}_{m1}+\cdots+\lambda_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m}\in V_m,$$

故有

$$\lambda_{11}e_{11}+\cdots+\lambda_{1n_1}e_{n1_n}=\mathbf{0},$$

$$\lambda_{21}e_{21}+\cdots+\lambda_{2n_2}e_{n2_n}=\mathbf{0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{m1}e_{m1}+\cdots+\lambda_{mn_m}e_{mn_m}=\mathbf{0}.$$

但是 $e_{11},\cdots,e_{n1_n}$ 为 V_1 的基,因此 $\lambda_{11}=\cdots=\lambda_{1n_1}=0$.

同理

$$\lambda_{21}=\cdots=\lambda_{2n_2}=0,\ \cdots,\ \lambda_{m1}=\cdots=\lambda_{mn_m}=0.$$

这证明了(1)式中的向量线性无关,因此构成了 $V_1+V_2+\cdots+V_m$ 的一组基.显然

$$\dim(V_1+V_2+\cdots+V_m)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m.\quad(3.9.2)$$

(4)⇒(1):仍设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的基依次如(3.9.1)式,于是 $V_1+\cdots+V_m$ 中任一向量均可由(3.9.1)式中向量的线性组合来表示,但由于这时(3.9.2)式成立,故(3.9.1)式中诸向量线性无关.对任一 $i(i=1,2,\cdots,m)$,若

$$\boldsymbol{\beta}\in V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m),$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\lambda_{i1}e_{i1}+\cdots+\lambda_{in_i}e_{in_i}\\&=\lambda_{11}e_{11}+\cdots+\lambda_{1n_1}e_{1n_1}+\cdots\\&\quad+\lambda_{i-1,1}e_{i-1,1}+\cdots+\lambda_{i-1,n_{i-1}}e_{i-1,n_{i-1}}\\&\quad+\lambda_{i+1,1}e_{i+1,1}+\cdots+\lambda_{i+1,n_{i+1}}e_{i+1,n_{i+1}}+\cdots\\&\quad+\lambda_{m1}e_{m1}+\cdots+\lambda_{mn_m}e_{mn_m}.\end{aligned}$$

由(3.9.1)式中向量的线性无关性,即得 $\lambda_{ij}=0$. 因此

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m)=\mathbf{0}.$$

证毕.

若 V 是 V_1 与 V_2 的直和,由上面的定理知道 $\dim V=\dim V_1+\dim V_2$. 对一般的和,我们有如下定理所述的维数公式.

定理 3.9.3　设 $V=V_1+V_2$,则

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \tag{3.9.3}$$

证明 设 $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $\dim V_1 \cap V_2 = m$. 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, 由于 $V_1 \cap V_2$ 是 V_1 的子空间, 故可添上 V_1 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_1}$, 使 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_1}\}$ 是 V_1 的一组基. 同样道理, 可添上 $\boldsymbol{\beta}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_2}$, 使 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_2}\}$ 成为 V_2 的一组基. 由于 $V = V_1 + V_2$, V 中向量均可由下列向量组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_1}, \boldsymbol{\beta}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_2} \tag{3.9.4}$$

的线性组合给出. 如能证明上式中的向量线性无关, 则它们构成 V 的一组基, 由此即可推出所要的结论. 现假定

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + \lambda_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1} + \cdots + \lambda_{n_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_1} + \mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1} + \cdots + \mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2} = \boldsymbol{0},$$

则

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + \lambda_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1} + \cdots + \lambda_{n_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_1} = -(\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1} + \cdots + \mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2}).$$

上式左端属于 V_1, 右端属于 V_2, 故

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1} + \cdots + \mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2} \in V_1 \cap V_2,$$

即存在 $\xi_1, \cdots, \xi_m \in \mathbf{K}$, 使

$$\mu_{m+1}\boldsymbol{\beta}_{m+1} + \cdots + \mu_{n_2}\boldsymbol{\beta}_{n_2} = \xi_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \xi_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

但 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_2}$ 是 V_2 的基, 因此 $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_{n_2} = \xi_1 = \cdots = \xi_m = 0$. 再由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_1}$ 线性无关得 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{n_1} = 0$. 证毕.

习 题 3.9

1. 判断 n 维实行向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的下列子集是否是子空间:

(1) $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$;

(2) $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1\}$;

(3) $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 = 0\}$;

(4) $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 = a_2 = \cdots = a_n\}$;

(5) $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \geqslant 0\}$.

2. 试求 $\mathbf{R}^3$ 中下列子空间的维数：

(1) $V_0 = \{(a, 0, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$；

(2) $V_0 = \{(a, 2a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$；

(3) $L((1, 0, 1), (1, 2, 3))$；

(4) $L((1, 2, -1), (3, 6, -3))$.

3. 若 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V_1 \subseteq V_2$. 若 V_1 与 V_2 的维数相等，求证 $V_1 = V_2$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性空间 V 中的向量，若它们两两线性无关但全体线性相关，求证：$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = L(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$.

5. 设 U, V 是两个 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$W = U \times V$ 是 U 和 V 的积集合，即 $W = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V\}$. 现在 W 上定义加法和数乘：

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), \quad k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v}),$$

验证 W 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间(这个线性空间称为 U 和 V 的外直和).

又若设 $U' = \{(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) \mid \boldsymbol{u} \in U\}$, $V' = \{(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$，则 U', V' 是 W 的子空间且 U' 和 U 同构，V' 和 V 同构 且 $W = U' \oplus V'$.

6. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是 V 的子空间，且在子空间 $V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ 中零向量的表示是唯一的，即若 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{v}_i \in V_i (i = 1, \cdots, m)$，则必有 $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. 求证：

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_m = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

7. 若 $V = U \oplus W$，且 $U = U_1 \oplus U_2$，求证：

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus W.$$

8. 求证：每一个 n 维线性空间均可表示为 n 个一维子空间的直和.

9. 若 V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间，且 $V_1 \cap V_2 = 0, V_2 \cap V_3 = 0, V_1 \cap V_3 = 0$，问：$V_1 + V_2 + V_3$ 是否为直和？

10. 设 $V = M_n(C)$ 是复数域上的 $n \times n$ 矩阵组成的复空间，A 是 $n \times n$ 复方阵，求证：全体与 A 乘法可交换的矩阵组成 V 的子空间. 又若 T 是 V 的子集，则全体与 T 中任一矩阵乘法可交换的矩阵也构成 V 的子空间且其维数不为零.

*11. 设 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ 是数域且 $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \subseteq \mathbf{K}_3$，若将 $\mathbf{K}_2$ 看成是 $\mathbf{K}_1$ 上的线性空间其维数为 m，又将 $\mathbf{K}_3$ 看成是 $\mathbf{K}_2$ 上的线性空间其维数为 n，求证：如将 $\mathbf{K}_3$ 看成是 $\mathbf{K}_1$ 上的线性空间，则其维数为 mn.

*12. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 是 V 的 m 个非平凡子空间，证明：在 V 中必存在一个向量，它不属于任何一个 V_i.

§3.10　线性方程组的解

用矩阵秩的概念我们很容易给出一般线性方程组解的判定定理.

定理 3.10.1　设有 n 个未知数 m 个方程式组成的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.10.1}$$

它的系数矩阵记为 A,增广矩阵记为 $\widetilde{A}$,即

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

则有下列结论:

(1) 若 $\widetilde{A}$ 与 A 的秩都等于 n,则该方程组有且只有唯一一组解;

(2) 若 $\widetilde{A}$ 与 A 的秩相等但小于 n,即 $r(\widetilde{A}) = r(A) < n$,则该方程组有无穷多组解;

(3) 若 $\widetilde{A}$ 与 A 的秩不相等,则该方程组无解.

证明　(1) 首先我们证明方程组(3.10.1)有解的充分必要条件是

$$r(\widetilde{A}) = r(A).$$

如同第 4 节那样把方程组(3.10.1)写成向量形式就是

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}, \tag{3.10.2}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为矩阵 A 的第 i 个列向量, $\boldsymbol{\beta}$ 为常数项向量. 方程组(3.10.1)有解等同于 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合. 因此 $r(\widetilde{A}) = r(A)$.

反过来, 若 $r(\widetilde{A}) = r(A)$, 则 A 的列向量的极大线性无关组就是 $\widetilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组. 因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 A 的列向量的线性组合,即方程组(3.10.2)有解.

若再有 $r(\widetilde{A}) = r(A) = n$, 此时 A 的 n 个列向量线性无关,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 只有唯一种方法表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合,即方程组只有唯一组解.

(2) 若 $r(\widetilde{A}) = r(A) = r < n$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,即存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

这时对任意的数 k,

$$kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+kk_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+kk_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

因此若 $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \cdots,\ x_n=c_n$ 是方程组的解,则 $x_1=kk_1+c_1,\ x_2=kk_2+c_2,\ \cdots,\ x_n=kk_n+c_n$ 都是解,显然这样的解有无穷多组. 证毕.

当线性方程组(3.10.1)有无穷多组解时,我们能否用有限组解来把握所有的解,这是我们要解决的问题. 我们先研究最简单的情形,即所谓齐次线性方程组的解.

定义 3.10.1 线性方程组(3.10.1)称为齐次线性方程组,若其所有常数项 b_i 都为零,否则就称为非齐次线性方程组.

齐次线性方程组的矩阵形式为

$$Ax=\mathbf{0}.\tag{3.10.3}$$

显然 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 总是方程组(3.10.3)的解. 齐次线性方程组中 $\widetilde{A}$ 的秩与 A 的秩显然相等. 若 $r(A)<n$, 则方程组(3.9.3)有无穷多组解; 当 $r(A)=n$ 时只有零解,这时,我们称方程组(3.10.3)只有平凡解. 我们的目的是在方程组有非平凡解时找出所有的解.

从向量空间的观点来看方程组(3.10.3),它的一个解可以看成是 n 维列向量空间中的一个元素. 若 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ 是方程组(3.10.3)的解, 即 $A\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\ A\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 则 $A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$. 对任意的数 k, $A(k\boldsymbol{\alpha})=kA\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 因此, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 及 $k\boldsymbol{\alpha}$ 均是方程组(3.10.3)的解. 这一事实表明方程组(3.10.3)的全部解构成 n 维列向量空间的一个子空间. 这个子空间称为齐次线性方程组(3.10.3)的解空间. 这个解空间的维数是多少呢? 我们如何来求出该子空间的一组基(这时可将方程组的任意一组解表示为基向量的线性组合,从而达到用有限多组解表示无穷多组解的目的)?

设 $r(A)=r<n$, 则 A 有 r 个行向量线性无关,因此剔除了多余的方程式以后,还剩 r 个方程式,不妨就设为前 r 个方程式. 同样不失一般性,我们可假定这 r 个方程式系数矩阵的前 r 个列向量线性无关,将(3.10.3)式化为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n.\end{cases}\tag{3.10.4}$$

将上述方程组看成为 r 个未知数的线性方程组,注意到它的系数行列式不等于零. 用 Cramer 法则将方程组(3.10.4)解出来,其解含有 $n-r$ 个参数,不妨设为

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3.10.5}$$

其中 x_{r+1}, $\cdots$, x_n可取任何数. 依次取

$$\begin{cases} x_{r+1} = 1,\ x_{r+2} = 0,\ \cdots,\ x_n = 0, \\ x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ \cdots,\ x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 0,\ \cdots,\ x_n = 1, \end{cases}$$

便得到 $n-r$ 个解:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} c_{1,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

不难看出 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

我们希望这 $n-r$ 个解向量就是解空间的基. 为此,我们只需证明方程组的任意一个解可以表示为这 $n-r$ 个解的线性组合即可. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组(3.10.3)的任一解向量,且设

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

则 a_1, a_2, $\cdots$, a_n必须适合(3.10.5)式,即

$$a_1 = c_{1,r+1}a_{r+1} + \cdots + c_{1n}a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_r = c_{r,r+1}a_{r+1} + \cdots + c_{rn}a_n.$$

于是

$$\boldsymbol{\eta} = a_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{r+2}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\eta}_{n-r}.$$

这即表明方程组(3.10.3)的任一解均可表示为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的线性组合,因此 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$ 是方程组(3.10.3)解空间的一组基. 由此即知方程组(3.10.3)的解空间维数为 $n-r$. 一个齐次线性方程组解空间的基又称为该方程组的基础解系. 我们把上面的论证总结为如下定理.

定理 3.10.2 设有齐次线性方程组

$$Ax = \mathbf{0}, \tag{3.10.6}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵. 若 $r(A)=r<n$,则上述方程组有非零解. 它的解构成 n 维列向量空间的一个 $n-r$ 维子空间. 也就是说,存在 $n-r$ 个向量构成的基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$, 使方程组(3.10.6)的任一组解均可表示为 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$ 的线性组合.

现在我们转而考虑非齐次线性方程组,它的矩阵形式为

$$Ax = \boldsymbol{\beta}. \tag{3.10.7}$$

称齐次方程组

$$Ax = \mathbf{0} \tag{3.10.8}$$

为方程组(3.10.7)的相伴齐次线性方程组(或导出组). 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 是方程组(3.10.7)的一个解,如 $\boldsymbol{\alpha}$ 是其相伴齐次线性方程组的解,则

$$A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}) = A\boldsymbol{\alpha} + A\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}.$$

因此相伴齐次线性方程组的任一解与方程组(3.10.7)的解之和仍是方程组(3.10.7)的解. 现固定方程组(3.10.7)的一个解 $\boldsymbol{\gamma}$,称之为方程组(3.10.7)的一个特解,我们要找出方程组(3.10.7)的一切解. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是方程组(3.10.7)的任一解,则

$$A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\gamma},$$

于是

$$A(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\gamma}$ 是相伴齐次线性方程组解. 因此只要知道方程组(3.10.7)的一个特解和相伴的齐次线性方程组的一切解,那么它的任一解都可以知道了. 由定理 3.10.2,相伴齐次方程组(3.10.8)有一组基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$,因此方程组(3.10.7)的解可表示为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r} + \boldsymbol{\gamma},$$

于是我们得到了非齐次线性方程组解的结构定理.

定理 3.10.3　设有非齐次线性方程组(3.10.7)，它的系数矩阵 A 及其增广矩阵 $\widetilde{A}$ 的秩都等于 r，$r<n$. 又假定方程组(3.10.7)的相伴齐次方程组有基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}\}$，又 $\boldsymbol{\gamma}$ 是方程组(3.10.7)的任一特解，则其所有解均可表示为如下形状：

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r} + \boldsymbol{\gamma}, \tag{3.10.9}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 可取任何数.

注　我们在讨论线性方程组解时并没有特别强调在哪个数域中求解. 事实上，如果我们限定在数域 $\mathbf{K}$ 中求解方程组(3.10.7)(这时 $\widetilde{A}$ 中元素当然必须属于 $\mathbf{K}$)，那么(3.10.9)式中的 k_i 就必须取自 $\mathbf{K}$ 中.

我们已经从理论上完全解决了求解线性方程组的问题，现在我们将举例说明如何具体地求解一个线性方程组. 我们用初等变换的方法来做.

例 3.10.1　求解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 5, \\ 4x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 5x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$$

解　对方程组的增广矩阵作如下初等变换：

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 8 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 16 & -16 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 16 & -16 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -16 & 16 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -2 & -8 & 4 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 4 & \frac{71}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 4 & \frac{71}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解 $\boldsymbol{\gamma}$ 及相伴齐次方程组的基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$ 如下：

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{71}{2} \\ -11 \\ -\frac{9}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的全部解为 $\boldsymbol{\gamma} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$.

上例中我们只用行初等变换就把增广矩阵的左半部分化为对角形. 但有时光靠行初等变换不一定能做到这一点,这时我们可用列的对换. 注意列的对换仅改变未知数的次序而不影响方程组的解,因此是允许的. 通常我们不必用其他两类列变换就可求出解来.

例 3.10.2　求解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

解　对增广矩阵进行初等变换

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-5&2&-1&-7\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&2&-1&3\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&2\end{array}\right).$$

在上面做初等变换的过程中,我们进行了两次列对换,即第二列和第四列对换及第三列和第五列对换,这相当于未知数作了如下的变换:

$$\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_4,\\x_3=y_5,\\x_4=y_2,\\x_5=y_3.\end{cases}$$

根据最后一个矩阵,我们可取一组特解 $\boldsymbol{\gamma}$ 以及相伴齐次方程组的基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\}$ 为(关于 y_i 的):

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

将 y_i 换成 x_i,得到特解 $\boldsymbol{\delta}$ 及基础解系 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$ 为

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

原线性方程组的解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\delta},$$

或

$$\begin{cases}x_1=-2k_1+k_2+3,\\x_2=k_1,\\x_3=k_2,\\x_4=-1,\\x_5=2.\end{cases}$$

现在我们把求一般线性方程组解的办法总结如下.

第一步：对增广矩阵 $\widetilde{A}$ 进行行初等变换及第一类列初等变换(列对换),注意用虚线将常数列隔开且不允许常数列与其他列对换. 经过若干次初等变换后将 $\widetilde{A}$ 化成下列形状：

$$\left(\begin{array}{ccccccc:c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
 & & & & & & & *
\end{array}\right).$$

上述矩阵空白部分全为零,若 * 部分有元素不等于零,则表示 $r(\widetilde{A}) > r(A)$, 因此原方程组无解;若 * 部分所有元素全为零,则原方程组有解.

第二步：写出特解(注意：若有列变换,这还不是原方程组的特解)及相伴齐次线性方程组的基础解系(若有列变换,这也不是原方程组相伴齐次线性方程组的基础解系)：

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第三步：根据列对换情况,调整 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的各分量,得到原方程组的特解 $\boldsymbol{\delta}$ 以及原方程组相伴齐次线性方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 最后写出原方程组的解：

$$\boldsymbol{\delta} + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 为参变数.

习　题　3.10

1. 解下列齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4-x_5=0, \\ -x_1-x_2-3x_3+3x_4+42x_5=0. \end{cases}$

2. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=7, \\ 2x_1-2x_2+2x_3-4x_4=12, \\ -x_1+x_2-x_3+2x_4=-4, \\ -3x_1+x_2-8x_3-10x_4=-29; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+6x_3-2x_4=-7, \\ -2x_1-5x_2-10x_3+3x_4=10, \\ x_1+2x_2+4x_3=0, \\ x_2+2x_3-3x_4=-10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+6x_4+24x_5+48x_6=112, \\ 2x_1+2x_2+6x_3+13x_4+52x_5+104x_6=241, \\ x_3+2x_4+8x_5+16x_6=37, \\ -x_1-x_2-4x_3-7x_4-29x_5-58x_6=-136, \\ x_1+2x_2+5x_3+11x_4+42x_5+84x_6=197. \end{cases}$

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是某个齐次线性方程组的基础解系，问 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否也是这个齐次线性方程组的基础解系？为什么？

4. 判定下列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示：

(1) $\boldsymbol{\beta}=(5,4,-2,4)$；$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-2,1,1)$；

(2) $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1,1)$；$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,0,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,0,0)$.

5. 讨论下列方程组的解，在有解的情形将解求出来：

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda^2, \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda^3, \end{cases}$$

其中 λ 是一个非零常数.

6. 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是由 n 个未知数 n 个方程式组成的线性方程组. 若该方程组只有零解，则 $A^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 也只有零解，其中 k 是任意的正整数. 反之，若 $A\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，则 $A^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解.

7. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，记 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 A 的第 i 个行向量，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，证明：如果齐次线性方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

8. 如果方阵 $A=(a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为严格对角占优阵. 求证严格对角占优阵必是非异阵.

9. 设齐次方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

由 n 个未知数及 n 个方程式组成, 且 $|A|=0$, 行列式 $|A|$ 中第 (i,j) 个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 求证: 该方程组的所有解都可写为下列形式:

$$k\begin{pmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\vdots\\A_{in}\end{pmatrix}.$$

10. 若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式等于零, 证明:

$$r(A^*)\leqslant 1,$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵.

11. 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0,\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0,\\b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1.\end{cases}\tag{2}$$

求证: 方程组(1)有解的充分必要条件是方程组(2)无解.

12. 证明: 通过平面内不在一条直线上的 3 点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 的圆方程为

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

以此证明: 通过具有有理坐标的 3 点的圆, 其圆心也是有理坐标.

复 习 题 三

1. 设 V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间,举例说明

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$$

未必成立.

2. 设 V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间,又 V_1 包含 V_2,则

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_2 + V_1 \cap V_3.$$

3. 设 V 是 $\mathbf{K}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间,求证:

(1) 所有对称矩阵组成 V 的子空间;

(2) 所有反对称矩阵也组成 V 的子空间;

(3) V 是这两个子空间的直和并求它们的维数.

4. 设 V_1, V_2 分别是 $\mathbf{K}$ 上齐次线性方程组 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 与 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间,求证 $\mathbf{K}^n = V_1 \oplus V_2$.

5. 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是 n 阶方阵,且 $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$,求证: $r(B) = r(A)$.

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,又

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_r, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{2r}\boldsymbol{\alpha}_r, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_r = a_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r. \end{cases}$$

求证: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关的充分必要条件是系数矩阵 $A = (a_{ij})_{r\times r}$ 的行列式等于零.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性无关的向量,若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_k = a_{k1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{k2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{km}\boldsymbol{\alpha}_m. \end{cases}$$

记表示矩阵 $A = (a_{ij})_{k\times m}$. 求证: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 的秩等于 $r(A)$.

8. 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是向量空间 V 中一组向量, $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k\}$ 可用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性表出,那么向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k\}$ 的秩不可能超过向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的秩.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 1, 0, 1)$ 是四维实行向量空间 V 上的向量,它们生成的子空间为 V_1. 又向量 $\boldsymbol{\beta}_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, -3, -1)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (-1, 1, -1, 1)$ 生成的子空间为 V_2. 求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基.

10. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是同阶对角阵且主对角线上

元素全大于零,求证: $|A+D|>0$. 特别, I_n+A 和 I_n-A 都是非异阵.

11. 求证: 秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和,但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

12. 证明: $r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$.

13. 设有分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}.$$

若 A 是非异方阵,求证: $r(M)=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$.

14. 设 V_0 是 $\mathbf{K}_n$ 的一个非平凡子空间,求证: 必存在矩阵 A,使 V_0 是 n 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间.

15. 设 A,B 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵,若 n 变元的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 和 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解,每个方程组的基础解系含有 m 个向量,求证: $r(A-B)\leqslant n-m$.

16. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,求证: 必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵 B,使 $AB=\mathbf{0}$.

17. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times l$ 矩阵,证明: 方程组 $AB\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是同解方程组的充分必要条件是 $r(AB)=r(B)$.

18. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个基础解系, A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$. 求证: 必存在一个 $n-r$ 阶非异阵 P,使

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r})P.$$

19. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,求证: $r(A'A)=r(AA')=r(A)$.

20. 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 是 m 个方程式 n 个未知数的线性方程组,求证: 它有解的充分必要条件是方程组 $A'\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{\alpha}$ 均适合等式 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=0$.

21. 设 A 是矩阵, D 是 A 的 r 阶子式, A 中所有包含 D 为 r 阶子式的 $r+1$ 阶子式称为 D 的 $r+1$ 阶加边子式. 求证: 矩阵 A 的秩等于 r 的充分必要条件是 A 存在一个 r 阶子式 D 不等于零而 D 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于零.

*22. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 若 $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$ 是其极大无关组. 又设 A 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$. 其中 $\{\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}\}$ 是极大无关组,则 $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}\}$ 交叉点上的元素组成的子矩阵 D 的行列式 $|D|\neq 0$.

*23. 设 A 是一个方阵, A 的第 $i_1,\cdots,i_r$ 行和第 $i_1,\cdots,i_r$ 列交点上的元素组成的子式称为 A 的一个主子式. 若 A 是对称矩阵或反对称矩阵且秩为 r,求证: A 必有一个 r 阶主子式不等于零.

*24. 证明斜对称矩阵的秩必为偶数.

第四章 线性映射

§4.1 线性映射的概念

读者已经学过映射的概念,我们现在来复习一下.所谓映射,是指从一个集合 A 到另一个集合 B 的对应 φ: $A \to B$. 对 A 中任一元素 a,均有唯一的元素 $b \in B$ 与之对应,记之为 $b = \varphi(a)$. 元素 b 称为 a 在 φ 下的像, a 称为元素 b 的原像或逆像. A 中元素在 φ 下的像全体构成 B 的一个子集,记之为 $\varphi(A)$ 或 $\mathrm{Im}\,\varphi$. 如果 $\mathrm{Im}\,\varphi = B$,即 B 中任一元素 b 均在 A 中有元素 a,使 $b = \varphi(a)$,则称 φ 是满映射或称 φ 是映上的映射. 如果映射 φ 适合下列条件: 若 $a \neq a'$,则 $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,那么就称 φ 是单映射. 单映射的另外一个等价说法是从 $\varphi(a) = \varphi(a')$ 可推出 $a = a'$. 如果 φ 既是单映射又是满映射,则称 φ 是双射. 这时不仅对 A 中的一个元素有且仅有 B 中的一个元素与之对应,而且对 B 中的任一元素,有且仅有 A 中的一个元素与之对应. 因此,双射又称为一一对应.

函数 $y = x^2$ 可以看成是实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射. 这个映射不是单映射也不是满映射. 因为 $-1 \neq 1$,但$(-1)^2 = 1$. 另一方面,$\mathbf{R}$ 中的元素 -1 没有原像. 这个函数的像为$[0, +\infty)$. 如果我们把 $y = x^2$ 看成是$(-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$的映射,那么这是个映上的映射,但仍不是单映射.

设 $M_n(\mathbf{R})$是实数域 $\mathbf{R}$ 的 $n(n>1)$ 阶方阵全体组成的集合,定义 $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ 的映射为: $\varphi(A) = \det A$,则 φ 是映射,且这是个映上的映射. 它不是单映射. 事实上,对 $\mathbf{R}$ 中任意一个实数,均有无穷多个矩阵,其行列式值等于这个实数.

设 $y = x^3$ 是$[0, 1)$到$[0, +\infty)$上的函数,这显然是一个映射且是一个单映射,但它不是满映射.

Descartes 平面上的点到实数偶之间的对应:

$$\varphi: C \to (a, b),$$

其中 C 的横坐标为 a,纵坐标为 b. 这是一个映射且是一个双射,即一一对应.

若集合 A 是集合 B 的子集,作 $A \to B$ 的映射 j:

$$j(a)=a,\ a\in A,$$

则 j 是一个映射且显然是单映射. 若 $A=B$, 则 j 是一个一一对应,这时映射 j 实际上把 A 中任一元素映射为自身,因此称为恒等映射,记为 1_A 或 I_A.

一个集合 A 到自身的映射通常称为变换,比如 $y=x^2$ 可以看成是 $\mathbf{R}$ 自身的变换.

集合 A 到 B 的两个映射 f 与 g 称为是相等的当且仅当对任意的 $a\in A$,都有 $f(a)=g(a)$,这时记 $f=g$.

若 f 是集合 $A\to B$ 的映射,g 是集合 $B\to C$ 的映射,定义映射 g 与 f 的乘积 $g\cdot f$ 为集合 $A\to C$ 的映射,且

$$(g\cdot f)(a)=g(f(a)),\ a\in A.$$

这里需要注意的是并非任意两个映射都有乘积. 只有当 f 的像落在 g 所定义的集上时才可定义 g 与 f 的积. 如果 $A=B$, 那么 A 上的任意两个变换都可相乘.

若 f 是 $A\to B$ 的映射,g 是 $B\to C$ 的映射,h 是 $C\to D$ 的映射,则 $h\cdot(g\cdot f)$ 及 $(h\cdot g)\cdot f$ 都是 $A\to D$ 的映射且对任意的 $a\in A$, 有

$$((h\cdot g)\cdot f)(a)=(h\cdot g)(f(a))=h(g(f(a))),$$

$$(h\cdot(g\cdot f))(a)=h((g\cdot f)(a))=h(g(f(a))),$$

因此

$$(h\cdot g)\cdot f=h\cdot(g\cdot f). \tag{4.1.1}$$

上式通常称为映射乘法的结合律. 正因为如此,我们写 3 个(或 3 个以上)映射的乘积时常常略去括号,写为 $h\cdot g\cdot f$. 通常乘号"·"也省略,即 $g\cdot f$ 写为 gf.

下面我们着重讨论一下双射. 设 f 是 $A\to B$ 的双射,我们定义 $B\to A$ 的映射 g 如下: 对任一 $b\in B$, 取 b 在 f 下的原像记为 a, 定义 $g(b)=a$. 由于 f 是双射,故对 B 中的元素 b,有且仅有一个 a 作为 b 在 f 下的原像. 因此 g 确是 $B\to A$ 的映射. 不仅如此,显然 g 也是一个双射,且

$$gf=1_A,\ fg=1_B.$$

我们称 g 是 f 的逆映射,记为 $g=f^{-1}$.

命题 4.1.1　设 f 是集合 $A\to B$ 的映射,如果存在 $B\to A$ 的映射 g,使

$$gf=1_A,\ fg=1_B,$$

则 f 是双射且 $g=f^{-1}$.

证明　先证明 f 是单映射: 若 $f(a_1)=f(a_2)$,则由 $gf(a_1)=1_A(a_1)=$

a_1, $gf(a_2) = 1_A(a_2) = a_2$,知 $a_1 = a_2$,因此 f 为单映射.

又对 B 中任一元素 b, $g(b) \in A$ 且 $fg(b) = 1_B(b) = b$. 因此 $g(b)$是 b 在 f 下的原像,即 f 是映上的映射. 证毕.

从命题 4.1.1 的证明中可看出,从 $gf = 1_A$ 可推出 f 是单映射,从 $fg = 1_B$ 可推出 f 是满映射.

现在我们转而来考虑线性映射.

定义 4.1.1　设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 到 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V' 的映射,如果 φ 适合下列条件:

(1) $\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in V$;

(2) $\varphi(k\boldsymbol{\alpha}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha})$, $k \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V$;

则称 φ 是 $V \to V'$ 的线性映射. V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换. 若 φ: $V \to V'$ 作为映射是单的,则称 φ 是单线性映射;如 φ 作为映射是满的,则称 φ 是满线性映射. 若 φ 是双射,则称 φ 是线性同构,简称同构. 若 $V = V'$, V 自身上的同构称为自同构.

请读者注意,我们曾在第三章中定义了两个线性空间的同构,那个定义与现在的定义是相同的.

例 4.1.1　设 V,V'是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,定义 φ 为 $V \to V'$ 的映射,且对一切 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, 则 φ 是一个线性映射,称之为零映射,通常记为 $\mathbf{0}$,但要注意这是一个映射.

例 4.1.2　设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,定义 V 到自身的映射为恒等映射 1_V,则显然 1_V 是 V 上的线性变换,称为恒等变换,记为 I_V 或 Id_V,在不致于混淆的情形下,也简记为 I.

例 4.1.3　设 $V = \mathbf{K}_m$, $U = \mathbf{K}_n$ 分别是数域 $\mathbf{K}$ 上的 m 维和 n 维列向量空间, A 是 $\mathbf{K}$ 上一个已知的 $n \times m$ 矩阵,定义 $V \to U$ 的映射 φ 为

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha}.$$

这个映射由矩阵乘法定义($n \times m$ 矩阵乘以 m 维列向量是一个 n 维列向量),由矩阵乘法性质容易验证 φ 是一个线性映射.

例 4.1.4　设 $\mathbf{K}^n$ 是 $\mathbf{K}$ 上 n 维行向量空间, $\mathbf{K}_n$是 $\mathbf{K}$ 上 n 维列向量空间,定义 $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}_n$ 的映射 φ:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

则容易验证 φ 是线性同构.

例 4.1.5　设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，定义 V 上变换 φ，对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha},$$

其中 k 是一个固定常数，则 φ 是 V 上线性变换，这个变换常称之为纯量变换或数量变换.

例 4.1.6　设 V 是区间[0, 1]上的实可微函数全体组成的实线性空间，定义 φ 为求导变换

$$\varphi(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x),$$

由求导性质知 φ 是 V 上的线性变换.

命题 4.1.2　设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射，则

(1) $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(2) $\varphi(k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + l\varphi(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in V, k, l\in \mathbf{K}$;

(3) 若 φ 是同构，则其逆映射 φ^{-1} 也是线性映射，从而是 $U\to V$ 的同构.

证明　(1) $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\cdot\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}\cdot\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$.

(2) $\varphi(k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}) = \varphi(k\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(l\boldsymbol{\beta}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + l\varphi(\boldsymbol{\beta})$.

(3) 见第三章定理 3.7.2 的证明. 证毕.

注　若 $V\to U$ 的一个映射 φ 适合命题 4.1.2 中的(2)，则 φ 必是线性映射. 读者不难自己验证这一点.

最后需要提请读者注意的是，在线性映射的定义中，我们要求 V 与 V' 都是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，不同数域上线性空间之间的映射不是线性映射.

习　题　4.1

1. 判断下列映射是否是线性变换：

(1) 设 V 是 Descartes 平面，φ 把平面上的任一向量伸长 n 倍(n 是固定的自然数)；

(2) 设 V 是 Descartes 平面，φ 把平面上任一向量逆时针转动 60°，但其长度保持不变；

(3) 设 V 是[0, 1]区间上所有连续函数组成的实线性空间，φ 是 V 上的变换，对任意的 $f(x)\in V$，有

$$\varphi(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$

(4) 设 V 是 Descartes 平面，φ 为 V 上的变换：

$$\varphi(x, y) = (2x^2, y), (x, y)\in V;$$

(5) 设 V 是 Descartes 平面，(a, b)是平面上固定的一点，φ 是 V 上的变换：

$$\varphi(x, y)=(x+a, y+b).$$

2. 证明 $\mathbf{K}_n$上变换

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

是线性变换的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 这里 A 是一个 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是固定的 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{K}_n$ 中任一向量.

3. 设线性空间 $V=V_1\oplus V_2$，已知 φ_1 及 φ_2 分别是 V_1，V_2 到 U 的线性映射，则存在从 V 到 U 唯一的线性映射 φ，当 φ 限制在 V_i 上时等于 $\varphi_i(i=1, 2)$.

4. 设 V 是由几乎处处为零的无穷实数数列(即$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，其中只有有限多个 a_i 不为零)组成的实向量空间，$\mathbf{R}[x]$是所有实系数多项式组成的实向量空间. 定义 φ 如下：

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

其中 $a_n\neq 0$，而 $a_s=0$, $s>n$. 求证：φ 是线性同构.

§4.2 线性映射的运算

在例 4.1.3 中，我们已经知道任意一个 $n\times m$ 矩阵 A 都可以定义一个从 m 维列向量空间到 n 维列向量空间的线性映射：$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha}$. 如果另有一个 $n\times m$ 矩阵 B，它定义的线性映射是 $\psi(\boldsymbol{\alpha})=B\boldsymbol{\alpha}$，注意到矩阵之间存在的运算，我们可以定义这两个映射的加法：$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{\alpha})=(A+B)\boldsymbol{\alpha}$. 显然这仍是一个线性映射. 类似地，我们还可定义线性映射的数乘：$(k\varphi)(\boldsymbol{\alpha})=kA\boldsymbol{\alpha}$. 对一般的线性映射，我们是否也可以定义它们的加法和数乘呢？

定义 4.2.1 *设 φ, ψ 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 $V\to U$ 的线性映射，定义 $\varphi+\psi$ 为 $V\to U$ 的映射：*

$$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{\alpha})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\psi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

若 $k\in\mathbf{K}$，定义 $k\varphi$ 为 $V\to U$ 的映射：

$$(k\varphi)(\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

容易验证 $\varphi+\psi$ 是线性映射. 事实上

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})&=\varphi(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})+\psi(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})\\&=\varphi(k\boldsymbol{\alpha})+\varphi(l\boldsymbol{\beta})+\psi(k\boldsymbol{\alpha})+\psi(l\boldsymbol{\beta})\\&=k\varphi(\boldsymbol{\alpha})+l\varphi(\boldsymbol{\beta})+k\psi(\boldsymbol{\alpha})+l\psi(\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

$$=k(\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\psi(\boldsymbol{\alpha}))+l(\varphi(\boldsymbol{\beta})+\psi(\boldsymbol{\beta}))$$

$$=k(\varphi+\psi)(\boldsymbol{\alpha})+l(\varphi+\psi)(\boldsymbol{\beta}).$$

同理可证明 $k\varphi$ 也是线性映射.

若 $U=\mathbf{K}$, 即把 $\mathbf{K}$ 看成是 $\mathbf{K}$ 上的一维空间,则 $V\to\mathbf{K}$ 的线性映射通常称为 V 上的线性函数.

现在我们考虑从 V 到 U 的线性映射全体组成的集合$\mathcal{L}(V, U)$. 在这个集合上,既然我们定义了加法和数乘,它是一个线性空间吗?

命题 4.2.1　设$\mathcal{L}(V, U)$是 $V\to U$ 的线性映射全体,则在上述线性映射的加法及数乘定义下, $\mathcal{L}(V, U)$是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 特别,$V\to\mathbf{K}$ 上的所有线性函数的全体构成一个线性空间.

这个命题的证明很容易,只需按照线性空间的定义逐条验证即可,我们将证明留给读者. V 上的所有线性函数构成的线性空间通常称为 V 的共轭空间,记为 V^*. 当 V 是有限维空间时,V^* 也称为 V 的对偶空间.

如果 $V=U$, 我们用$\mathcal{L}(V)$来记$\mathcal{L}(V,V)$,即 V 上线性变换全体组成的集合. 这时在$\mathcal{L}(V)$上,除了加法和数乘运算外,还有乘法运算,这个乘法就是映射的乘法.

定义 4.2.2　设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,如果在 A 上定义了一个乘法"$\cdot$"(通常可以省略),使对任意 A 中元素 a, b,c 及 $\mathbf{K}$ 中元素 k,适合下列条件:

(1) 乘法结合律:　　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

(2) 存在 A 中元 e,使对一切 $a\in A$,均有:

$$e\cdot a=a\cdot e=a;$$

(3) 分配律:　　$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a,$$

$$(ka)\cdot b=k(a\cdot b)=a\cdot(kb),$$

则称 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的代数,元素 e 称为 A 的恒等元.

注　A 的恒等元常常用 1 表示,注意不要与数 1 混淆.

定理 4.2.1　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,则$\mathcal{L}(V)$是 $\mathbf{K}$ 上的代数.

证明　由命题 4.2.1, $\mathcal{L}(V)$是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 我们逐条来验证定义 4.2.2.

乘法结合律实际上就是映射的结合律,因此自然成立.

设 1_V 是 V 上的恒等映射,由上节可知它是线性变换,显然对任意的 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$,有

$$1_V \cdot \varphi = \varphi \cdot 1_V = \varphi,$$

因此 1_V 是$\mathcal{L}(V)$的恒等元.

设 φ_1, φ_2, φ_3 都是 V 上线性变换,对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,有

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \cdot (\varphi_2 + \varphi_3))(\boldsymbol{\alpha}) &= \varphi_1((\varphi_2 + \varphi_3)(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= \varphi_1(\varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi_3(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= \varphi_1(\varphi_2(\boldsymbol{\alpha})) + \varphi_1(\varphi_3(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\boldsymbol{\alpha}) + (\varphi_1 \cdot \varphi_3)(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= (\varphi_1 \cdot \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \varphi_3)(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_1 \cdot (\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \varphi_3.$$

同理可证明另外一个分配律.

设 k 是 $\mathbf{K}$ 中任一数, φ, ψ 为 V 上线性变换,则对 V 中任意的 $\boldsymbol{\alpha}$,有

$$\begin{aligned}[(k\varphi) \cdot \psi](\boldsymbol{\alpha}) &= (k\varphi)(\psi(\boldsymbol{\alpha})) = k[\varphi(\psi(\boldsymbol{\alpha}))] \\ &= k((\varphi \cdot \psi)(\boldsymbol{\alpha})) = (k(\varphi \cdot \psi))(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

从而

$$(k\varphi) \cdot \psi = k(\varphi \cdot \psi).$$

同理可证明

$$\varphi \cdot (k\psi) = k(\varphi \cdot \psi).$$

证毕.

在$\mathcal{L}(V)$中,定义线性变换 φ 的 n 次幂为 n 个 φ 之积,则不难验证:

$$\varphi^n \cdot \varphi^m = \varphi^{n+m}, \ (\varphi^n)^m = \varphi^{nm}. \tag{4.2.1}$$

若 φ 是双射,即为 V 上的自同构,则 φ^{-1} 也是 V 上的线性映射(也是自同构),称 φ^{-1} 为 φ 的逆变换. 如定义

$$\varphi^{-n} = (\varphi^{-1})^n,$$

则不难验证:

$$\varphi^{-n} = (\varphi^n)^{-1}. \tag{4.2.2}$$

这时定义

$$\varphi^0 = I_V,$$

则(4.2.1)式对一切整数均成立.但需注意 φ 的负数次幂仅对自同构(又称可逆变换或非异变换)有意义.

读者需要特别注意的是,线性变换的乘法通常不满足交换律,即一般来说

$$\varphi \cdot \psi \neq \psi \cdot \varphi.$$

因此一般来说 $(\varphi \cdot \psi)^n \neq \varphi^n \cdot \psi^n$.

如果 φ 与 ψ 都是可逆线性映射,则 $\varphi \cdot \psi$ 也是可逆线性映射,且

$$(\varphi \cdot \psi)^{-1} = \psi^{-1} \cdot \varphi^{-1}.$$

对任一非零数 k,若 φ 可逆,则 $k\varphi$ 也可逆,且

$$(k\varphi)^{-1} = k^{-1}\varphi^{-1}.$$

读者不难自己验证上述结论.

习 题 4.2

1. 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间,定义 V 上的变换 D,S 如下:

$$D(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\ S(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明: D, S 均为 V 上的线性变换且 $DS = I_V$,但 $SD \neq I_V$.

2. 证明:对 $\mathcal{L}(V)$ 中的任一元 φ 及 $\mathbf{K}$ 中的数 k,有

$$k\varphi = (kI_V) \cdot \varphi = \varphi \cdot (kI_V).$$

3. 验证:数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵组成的线性空间在矩阵乘法下是 $\mathbf{K}$ 上的代数.

4. 假如线性变换 φ 适合 $\varphi^2 = \varphi$,则称 φ 是幂等变换.求证:在上一节例 4.1.3 中定义的线性变换,若 $A^2 = A$ (即 A 是幂等矩阵),则这个线性变换是幂等变换.

5. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,则 φ 是可逆变换的充分必要条件是 φ 将 V 的基变为基.

§4.3 线性映射与矩阵

我们已经定义了线性空间之间的线性映射及其运算.线性映射是一个比较抽象的"几何"概念,不便于计算和研究.我们这一节的目的是要将这个抽象的概

念“代数化”. 我们在第三章中通过引进线性空间的基,将抽象的线性空间和行向量空间或列向量空间联系了起来. 在例 4.1.3 中,我们也注意到,列向量空间的线性映射可以用矩阵来定义. 因此自然地,我们希望将线性映射和矩阵联系起来.

首先注意到如果取定线性空间 V 的一组基,则从 V 到另一个线性空间 U 的线性映射 φ 完全被它在基上的作用所决定,即我们有下面的引理.

引理 4.3.1 设有 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 和 U, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 是 V 的一组基,则

(1) 如有 V 到 U 的线性映射 φ 和 ψ,对任意的 i,都有 $\psi(\boldsymbol{e}_i)=\varphi(\boldsymbol{e}_i)$,则 $\psi=\varphi$;

(2) 给定 U 中 m 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$,有且只有一个从 V 到 U 的线性映射 φ,满足 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(i=1, 2, \cdots, m)$.

证明 (1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,设 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{e}_m$, 则

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\alpha}) &= \psi(\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{e}_m)\\ &=\lambda_1\psi(\boldsymbol{e}_1)+\lambda_2\psi(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+\lambda_m\psi(\boldsymbol{e}_m)\\ &=\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1)+\lambda_2\varphi(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+\lambda_m\varphi(\boldsymbol{e}_m)\\ &=\varphi(\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{e}_m)\\ &=\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

因此 $\psi=\varphi$.

(2) 定义 $V\to U$ 的映射 φ 如下:对 V 中任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{e}_m$,

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m.$$

容易验证这是 V 到 U 的线性映射,且 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\beta}_i(i=1, 2, \cdots, m)$. 唯一性由(1)即得. 证毕.

现考虑这样一个问题: 设 V 与 U 分别是数域 $\mathbf{K}$ 上 m 维及 n 维线性空间, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 是 V 的基; $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是 U 的基,又设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射且 V 的基向量在 φ 下的像已知. 若 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在给定基下的坐标向量是 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)'$,问: 如何来求 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ 在 U 的基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标向量?

设

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{e}_1)=a_{11}\boldsymbol{f}_1+a_{12}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{f}_n,\\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)=a_{21}\boldsymbol{f}_1+a_{22}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{f}_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi(\boldsymbol{e}_m)=a_{m1}\boldsymbol{f}_1+a_{m2}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{f}_n.\end{cases}\tag{4.3.1}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{e}_m$，故

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\alpha})&=\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1)+\lambda_2\varphi(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+\lambda_m\varphi(\boldsymbol{e}_m)\\&=\lambda_1\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\boldsymbol{f}_j\Big)+\lambda_2\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\boldsymbol{f}_j\Big)+\cdots+\lambda_m\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\boldsymbol{f}_j\Big)\\&=\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{i1}\Big)\boldsymbol{f}_1+\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{i2}\Big)\boldsymbol{f}_2+\cdots+\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{in}\Big)\boldsymbol{f}_n.\end{aligned}$$

这表明 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$在$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$下的坐标向量$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$为

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}.\qquad(4.3.2)$$

上式中的矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 是(4.3.1)式中系数矩阵的转置. 我们称这个矩阵为 φ 在已给定基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$与$\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$下的表示矩阵，或简称为 φ 在给定基下的矩阵.

注意(4.3.1)式和(4.3.2)式是等价的. 我们在上面从(4.3.1)式推出了(4.3.2)式. 反过来，如果(4.3.2)式成立，即 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在线性映射 φ 的作用下其坐标向量可以用(4.3.2)式来表示，则由于 $\boldsymbol{e}_1$ 的坐标向量是$(1,0,\cdots,0)'$，根据(4.3.2)式得到 $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$的坐标向量是$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})'$(即表示矩阵的第一个列向量). 因此

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1)=a_{11}\boldsymbol{f}_1+a_{12}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{f}_n.$$

同理，

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i)=a_{i1}\boldsymbol{f}_1+a_{i2}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{f}_n.$$

于是我们得到了(4.3.1)式.

我们在给定基后，由从 V 到 U 的一个线性映射得到了一个 $n\times m$ 矩阵. 反过来，给定一个 $\mathbf{K}$ 上的 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，由引理 4.3.1，我们可以得到 $V\to U$ 的唯一一个映射 φ 使 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$适合(4.3.1)式.

若记$\mathcal{L}(V,U)$为所有从 V 到 U 的线性映射组成的集合，$M_{n\times m}(\mathbf{K})$是 $\mathbf{K}$ 上全体 $n\times m$ 矩阵组成的集合，则我们得到了一个从$\mathcal{L}(V,U)$到 $M_{n\times m}(\mathbf{K})$的映射 T，对任意的 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$，$T(\varphi)=A$，其中 A 是 φ 在给定基下的表示矩阵. 前面的分析告诉我们：T 是一个一一对应.

我们已经知道，$M_{n\times m}(\mathbf{K})$在矩阵的加法与数乘下是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$\mathcal{L}(V, U)$也是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 这两个线性空间同构吗？即一一对应 T 保持加法运算和数乘运算吗？

先做一些符号上的说明. 假设 V 的基为$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$，$U$ 的基为$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$. 记 η_1 是 V 到 $\mathbf{K}_m$ 的线性同构：若 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{e}_m$，则

$$\eta_1(\boldsymbol{\alpha}) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)'.$$

同样，若 $\boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{f}_1 + b_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{f}_n$，则令

$$\eta_2(\boldsymbol{\beta}) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'.$$

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，$T(\varphi) = A$ 是 φ 在给定基下的表示矩阵. 我们约定用$\underline{A}$ 表示在例 4.1.3 中定义的从 $\mathbf{K}_m \to \mathbf{K}_n$ 的线性映射，即若 $\boldsymbol{x}\in \mathbf{K}_m$，则 $\underline{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

定理 4.3.1 设 T 是由上面定义的从$\mathcal{L}(V, U)$到 $M_{n\times m}(\mathbf{K})$的映射，则 T 是一个线性同构. 不仅如此，$\eta_2\varphi = \underline{A}\eta_1$，即有图 4.1 所示的交换图.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_1"'] & U \arrow[d, "\eta_2"] \\ \mathbf{K}_m \arrow[r, "\underline{A}"] & \mathbf{K}_n \end{tikzcd}$$

图 4.1

证明 我们先验证 T 是一个线性映射. 设 φ, ψ 是 $V \to U$ 的线性映射且 $T(\varphi) = A = (a_{ji})$，$T(\psi) = B = (b_{ji})$. 对任意的 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$，有

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_i) &= \varphi(\boldsymbol{e}_i) + \psi(\boldsymbol{e}_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{f}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{f}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})\boldsymbol{f}_j,\end{aligned}$$

因此

$$T(\varphi+\psi) = A + B = T(\varphi) + T(\psi).$$

同理，可证明对任意的 $k\in \mathbf{K}$ 及 $\varphi\in\mathcal{L}(V, U)$，有

$$T(k\varphi) = kA = kT(\varphi).$$

这表明 T 是线性映射. 因为 T 是一一对应，故 T 是同构.

要证明图 4.1 所示的交换性,只要对 V 的任一基向量 $\boldsymbol{e}_i$,验证 $\eta_2\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\underline{A}\eta_1(\boldsymbol{e}_i)$ 即可. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=a_{i1}\boldsymbol{f}_1+a_{i2}\boldsymbol{f}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{f}_n$, 故

$$\eta_2\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

注意到 $\eta_1(\boldsymbol{e}_i)$是第 i 个标准单位向量,因此 $A\eta_1(\boldsymbol{e}_i)$就等于 A 的第i 个列向量,即 $\underline{A}\eta_1(\boldsymbol{e}_i)=\eta_2\varphi(\boldsymbol{e}_i)$. 图的交换性成立. 证毕.

现在我们考察 V 上全体线性变换$\mathcal{L}(V)$. 取定 V 的一组基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 对任一 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$, 设

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{e}_1)=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)=a_{n1}\boldsymbol{e}_1+a_{n2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{cases} \tag{4.3.3}$$

则 φ 在基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$下的表示矩阵为 n 阶方阵 $A=(a_{ji})$, 即(4.3.3)式中系数矩阵的转置. 由上面的定理可知,$\mathcal{L}(V)$与 $\mathbf{K}$ 上 n 阶方阵全体作为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间同构. 然而我们知道,在$\mathcal{L}(V)$中定义了线性变换的乘法,在 n 阶方阵集合中也有乘法,这两个乘法之间有什么关系?

定理 4.3.2　设 T 是$\mathcal{L}(V)$到 $\mathbf{K}$ 上 n 阶矩阵的映射, $T(\varphi)=A$,则对任意的 $\varphi, \psi\in\mathcal{L}(V)$, 有

$$T(\psi\varphi)=T(\psi)T(\varphi),$$

即 T 保持了乘法.

证明　由定理 4.3.1 知道, T 是一个线性同构. 设 $T(\varphi)=A=(a_{ji})$, $T(\psi)=B=(b_{ji})$,又 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$ 是 V 中任一向量,则 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$的坐标向量为

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

$\psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))$的坐标向量为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

这表明，$T(\psi\varphi)=BA$. 证毕.

推论 4.3.1 上述同构 T 有下列性质：

(1) $T(I_V)=I_n$；

(2) φ 是 V 上自同构的充分必要条件是 $T(\varphi)$ 为可逆阵且这时有

$$T(\varphi^{-1})=T(\varphi)^{-1}.$$

证明 (1) 当 $\varphi=I_V$ 时，(4.3.1)式中的系数矩阵为 I_n，其转置也为 I_n，因此结论成立.

(2) 由 $\varphi\varphi^{-1}=I_V$，得

$$T(\varphi)T(\varphi^{-1})=T(\varphi\varphi^{-1})=T(I_V)=I_n.$$

此即 $T(\varphi^{-1})=T(\varphi)^{-1}$. 充分性也不难验证，证毕.

上面的这些结论在线性映射与矩阵之间建立起了桥梁，它可以使我们能用代数的工具(矩阵)来研究几何的对象(线性映射). 另一方面，我们也可以用几何的方法来研究代数的对象(矩阵).

我们继续讨论线性变换的问题. 我们知道线性变换的矩阵是与线性空间中的基联系在一起的. 一般说来，当基发生变化时，同一个线性变换在不同基下的矩阵是不相同的. 如果我们已经知道了两组基及其过渡矩阵，同一个线性变换在

这两组基下的表示矩阵有什么关系呢?

定理 4.3.3　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$\varphi\in\mathcal{L}(V)$，又设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 及 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的两组基且从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵为 P，若 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 A，在基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵为 B，则

$$B=P^{-1}AP.$$

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中任一向量且

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n=\mu_1\boldsymbol{f}_1+\mu_2\boldsymbol{f}_2+\cdots+\mu_n\boldsymbol{f}_n,$$

则由第三章中的(3.8.3)式得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

设

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{e}_n=\eta_1\boldsymbol{f}_1+\eta_2\boldsymbol{f}_2+\cdots+\eta_n\boldsymbol{f}_n, \tag{4.3.5}$$

则由(4.3.2)式得

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}. \tag{4.3.6}$$

另一方面由(4.3.5)式及第三章的(3.8.3)式有

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}. \tag{4.3.7}$$

由(4.3.4)式、(4.3.6)式、(4.3.7)式得:

$$PB\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=AP\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}. \tag{4.3.8}$$

但 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意的,即(4.3.8)式中的 μ_i 是任意的,因此

$$PB = AP,$$

即

$$B = P^{-1}AP.$$

证毕.

定义 4.3.1 若 A, B 为 n 阶方阵且存在 n 阶非异阵 P,使

$$B = P^{-1}AP,$$

则称 A 与 B 相似,记为 $A \approx B$.

定理 4.3.3 表明:V 上的线性变换 φ 在不同基下的表示矩阵是相似的.

命题 4.3.1 相似关系是一种等价关系,即

(1) $A \approx A$;

(2) 若 $A \approx B$,则 $B \approx A$;

(3) 若 $A \approx B, B \approx C$,则 $A \approx C$.

证明 (1) $A = I_n^{-1}AI_n$,故 $A \approx A$.

(2) 若 $B = P^{-1}AP$,则 $A = PBP^{-1}$,因此 $B \approx A$.

(3) 若 $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$,则 $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$. 因此 $A \approx C$, 证毕.

定理 4.3.3 揭示了同一线性变换在不同基下表示矩阵之间的关系. 一个十分重要的问题是:对一个线性变换 φ 能否找到一组适当的基,使 φ 在这组基下的表示矩阵具有简单的形状? 这个问题的代数提法是:给定一个 n 阶矩阵 A,能否找到一种方法,使得 A 相似于一个比较简单的矩阵. 我们将在第六、第七章中探讨这一问题.

习 题 4.3

1. 设 V 是实数域上次数小于 4 的一元多项式全体组成的线性空间,φ 为多项式的求导运算. $\{1, x, x^2, x^3\}$ 是 V 的基,试求 φ 在这组基下的矩阵.

2. 设 φ 是 $\mathbf{K}^4$ 中的线性变换,它在一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求 φ 在下列基下的矩阵：

(1) $\{e_4, e_3, e_2, e_1\}$；

(2) $\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4\}$.

3. 设 V 是 Descartes 平面，求绕原点转动 θ 角的旋转在标准基 $\{(1, 0), (0, 1)\}$ 下的矩阵.

4. 设有线性空间 V 上线性变换 φ, ψ，已知 φ 是可逆变换. 又 φ 和 ψ 在第一组基下的表示矩阵分别为 A, B. V 的第一组基到第二组基的过渡矩阵为 P，求线性变换 $\psi\varphi^{-2}+2\varphi+I$ (I 为 V 上恒等变换)在第二组基下的表示矩阵.

5. 设 V, U 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，维数分别为 n 与 m，求证：$\mathcal{L}(V, U)$ 是 nm 维线性空间.

6. 设 A, B 是 n 阶方阵且 A 可逆，求证：AB 与 BA 相似.

7. 证明：相似的矩阵具有相同的迹.

8. 若 A 与 B 相似，C 与 D 相似，则下列分块矩阵也相似.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

9. 求出只与自己相似的所有 n 阶矩阵.

10. 设 n 阶矩阵 B 是从 n 阶矩阵 A 经过互换第 j 行与第 i 行，再互换第 j 列与第 i 列得到，求证：A 与 B 相似并求非异阵 P，使 $B=P^{-1}AP$.

11. 证明定理 4.3.3 的逆命题：若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则它们可看成是同一个线性变换在两组基下的矩阵.

12. 设 φ 是线性空间 $V\to U$ 的线性映射，$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 及 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 是 V 的两组基. 又 $\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ 及 $\{f_1', f_2', \cdots, f_n'\}$ 是 U 的两组基，φ 在 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，$\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ 下的表示矩阵为 A，在 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 及 $\{f_1', f_2', \cdots, f_n'\}$ 下的表示矩阵为 B. 又设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 到 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 的过渡矩阵为 P，$\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ 到 $\{f_1', f_2', \cdots, f_n'\}$ 的过渡矩阵为 Q，试证：

$$B=Q^{-1}AP.$$

§4.4　线性映射的像与核

定义 4.4.1　设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上向量空间 V 到 U 的线性映射，φ 的全体像元素组成 U 的子集称为 φ 的像，记为 $\mathrm{Im}\,\varphi$. 又，V 中在 φ 下映射为零向量的全体向量构成 V 的子集，称为 φ 的核，记为 $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

命题 4.4.1　设 φ 是线性空间 $V\to U$ 的线性映射，则 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 是 U 的子空间，$\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是 V 的子空间.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Im}\,\varphi$，则有 V 中元素 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=\varphi(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{\beta}=\varphi(\boldsymbol{v}).$$

显然 $\varphi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{u})+\varphi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Im}\varphi$. 同理若 $k\in\mathbf{K}$,则 $\varphi(k\boldsymbol{u})=k\varphi(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{\alpha}$, $k\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\varphi$. 此即 $\operatorname{Im}\varphi$ 是 U 的子空间.

设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker}\varphi$,则 $\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 因此

$$\varphi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{u})+\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker}\varphi$. 类似地,可证明 $k\boldsymbol{u}\in\operatorname{Ker}\varphi$. 因此 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 V 的子空间. 证毕.

推论 4.4.1 线性映射 φ 是满映射的充分必要条件是 $\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim U$;线性映射 φ 是单映射的充分必要条件是 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbf{0}$.

证明 第一个结论显然. 对第二个结论,若 φ 是单映射, $\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$,自然意味着 $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$,即 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbf{0}$. 反之,若 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbf{0}$,如果 $\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{v})$,则 $\varphi(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{u})-\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$,故 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$. 证毕.

定义 4.4.2 设 φ 是 $V\to U$ 的线性映射. 称像空间 $\operatorname{Im}\varphi$ 的维数为 φ 的秩,记作 $r(\varphi)$. 核空间 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的维数称为 φ 的零度.

如果一个线性映射的表示矩阵已知,那么它的像空间和核空间的维数如何确定? 像空间和核空间如何用已知的基向量来表示?

定理 4.4.1 设 V, U 分别是数域 $\mathbf{K}$ 上的 m 维和 n 维线性空间,又设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 是 V 的基, $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是 U 的基. 若 φ 是 $V\to U$ 的线性映射,它在给定基下的表示矩阵为 A,则

$$\dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{rank}(A),\ \dim\operatorname{Ker}\varphi=m-\operatorname{rank}(A).$$

证明 我们沿用定理 4.3.1 中的记号和术语. 考虑定理 4.3.1 中的交换图 4.1. 由此图的交换性可得 $\eta_2(\operatorname{Im}\varphi)=\eta_2\varphi(V)=\underline{A}\eta_1(V)$. 然而 η_1 是同构, $\eta_1(V)=\mathbf{K}_m$, 所以

$$\eta_2(\operatorname{Im}\varphi)=\underline{A}(\mathbf{K}_m)=\operatorname{Im}\underline{A}.$$

注意到 $\underline{A}$ 作用在 $\boldsymbol{e}_i$ 上的像就是矩阵 A 的第 i 个列向量. 因此 $\operatorname{Im}\underline{A}$ 就是由 A 的全体列向量生成的子空间,其维数就是矩阵 A 的秩 $r(A)$. 而 η_2 是一一对应,故

$$\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim\operatorname{Im}\underline{A}=r(A).$$

又若 $\boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker}\varphi$,即 $\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 则

$$\underline{A}\eta_1(\boldsymbol{v})=\eta_2\varphi(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}.$$

因此 $\eta_1(\operatorname{Ker}\varphi)\subseteq\operatorname{Ker}\underline{A}$. 反之,若 $\boldsymbol{u}\in\operatorname{Ker}\underline{A}$,即 $\underline{A}(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$. 因为 η_1 是一一对应,故存在 $\boldsymbol{x}\in V$,使 $\boldsymbol{u}=\eta_1(\boldsymbol{x})$. 于是

$$\eta_2\varphi(\boldsymbol{x})=\underline{A}\eta_1(\boldsymbol{x})=\underline{A}(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}.$$

注意到 η_2 是同构,故 $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. 这就是 $\mathrm{Ker}\,\underline{A}\subseteq\eta_1(\mathrm{Ker}\,\varphi)$. 我们证得了 $\eta_1(\mathrm{Ker}\,\varphi)=\mathrm{Ker}\,\underline{A}$. 因为 η_1 是一一对应,故 $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi=\dim\mathrm{Ker}\,\underline{A}$. 又因为 $\mathrm{Ker}\,\underline{A}$ 就是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,故 $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi=m-\mathrm{rank}(A)$. 证毕.

推论 4.4.2(线性映射的维数公式) 设 φ 是 $\mathbf{K}$ 上 m 维线性空间 V 到 $\mathbf{K}$ 上 n 维线性空间的线性映射,则

$$\dim\mathrm{Ker}\,\varphi+\dim\mathrm{Im}\,\varphi=\dim V.$$

推论 4.4.3 记号同上, φ 是满映射的充分必要条件是 $r(A)=n$, 即表示矩阵 A 是一个行满秩阵; φ 是单映射的充分必要条件是 $r(A)=m$, 即 A 是一个列满秩阵.

推论 4.4.4 n 维向量空间 V 上线性变换 φ 是可逆变换的充分必要条件为它是单映射或它是满映射.

证明　若 φ 是单映射, 则 $\mathrm{Ker}\,\varphi=\boldsymbol{0}$. 而

$$\dim\mathrm{Ker}\,\varphi+\dim\mathrm{Im}\,\varphi=n.$$

因此 $\dim\mathrm{Im}\,\varphi=n$, 即 φ 是满映射,从而 φ 是可逆变换(即自同构).

若 φ 是满映射, 则 $r(\varphi)=\dim\mathrm{Im}\,\varphi=n$,故 $\mathrm{Ker}\,\varphi=\boldsymbol{0}$, 即 φ 是单映射,因而也是自同构. 证毕.

注　用代数方法证明这个推论也很简单,事实上,一个 n 阶方阵可逆的充分必要条件或它为行满秩阵,或它是列满秩阵.

推论 4.4.5 n 维向量空间 V 上的线性变换 φ 是单映射(或满映射)的充分必要条件是它在 V 的任意一组基下的表示矩阵是可逆阵.

下面的例子将告诉我们如何计算像空间和核空间.

例 4.4.1 设 V 是 $\mathbf{K}$ 上五维空间, U 是 $\mathbf{K}$ 上四维空间, $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5\}$ 是 V 的基, $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4\}$ 是 U 的基, $V\to U$ 的线性变换 φ 在上述基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\2&1&1&1&-3\\1&1&2&2&-2\\2&3&-5&-17&10\end{pmatrix},$$

求 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 和 $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

解　对矩阵 A 进行行初等变换:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\2&1&1&1&-3\\1&1&2&2&-2\\2&3&-5&-17&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\0&-3&-1&7&-7\\0&-1&1&5&-4\\0&-1&-7&-11&6\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\0&-1&1&5&-4\\0&-3&-1&7&-7\\0&-1&-7&-11&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\0&-1&1&5&-4\\0&0&-4&-8&5\\0&0&-8&-16&10\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&7&-6\\0&-1&1&5&-4\\0&0&-4&-8&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&7&-6\\0&-1&1&5&-4\\0&0&1&2&-\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&-\frac{9}{4}\\0&1&0&-3&\frac{11}{4}\\0&0&1&2&-\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此 $r(A)=3$,即 $\dim\mathrm{Im}\,\varphi=3$. 从上面可以看出 A 的前 3 个列向量线性无关,因此它们可以组成 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的一组基,故

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\varphi=&\ k_1(\boldsymbol{f}_1+2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+2\boldsymbol{f}_4)\\&+k_2(2\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+3\boldsymbol{f}_4)\\&+k_3(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+2\boldsymbol{f}_3-5\boldsymbol{f}_4).\end{aligned}$$

k_i 可取 $\mathbf{K}$ 中的任意数.

方程 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}9\\-11\\5\\0\\4\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{Ker}\,\varphi=k_1(-\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4)+k_2(9\boldsymbol{e}_1-11\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3+4\boldsymbol{e}_5).$$

k_i 可取 $\mathbf{K}$ 中的任意数.

习　题　4.4

1. 设 φ 是实四维空间 V 上的线性变换，φ 在 V 的一组基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

求 φ 的核空间与像空间(用它们基的线性组合来表示).

2. 设 $V = V_1 \oplus V_2$，φ 是 V 上线性变换且适合条件：

$$\varphi(v_1 + v_2) = v_1,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

求证：$\varphi^2 = \varphi$，并求 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 及 $\mathrm{Ker}\,\varphi$. 又若 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 是 V_1 的基，$\{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ 是 V_2 的基，求 φ 在 V 的基 $\{e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ 下的矩阵.

3. 设 φ 是线性空间 $V \to V'$ 的线性映射，U 是 V' 的子空间且 $U \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$，求证：$\varphi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ 是 V 的子空间，且

$$\dim U + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \varphi^{-1}(U).$$

4. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的二阶矩阵全体组成的向量空间，定义 V 上的线性变换 φ 如下：

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 φ 的秩和零度.

5. 设 $V = M_n(\mathbf{K})$，若 $A \in V$，令 $\varphi(A) = \mathrm{tr}\,A$，求证：$\varphi$ 是 $V \to K$ 的线性映射，并求 $\dim\mathrm{Ker}\,\varphi$ 以及 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 的一组基.

6. 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间，φ 是 V 上线性变换，求证：

(1) $\dim U - \dim\mathrm{Ker}\,\varphi \leqslant \dim \varphi(U) \leqslant \dim U$；

(2) $\dim \varphi^{-1}(U) \leqslant \dim U + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi$.

7. 利用上题，证明关于两个 n 阶方阵 A 与 B 之积秩的 Sylvester(西尔维斯特)不等式：

$$r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}.$$

§4.5　不变子空间

设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，φ 是 V 上的线性变换. 现在我们来研究由 φ 决定的一类子空间——不变子空间. 不变子空间的理论对以后我们将要学习的标准型理论有重要的意义.

定义 4.5.1　设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的子空间，若 U 适合条件：

$$\varphi(U) \subseteq U,$$

则称 U 是 φ 的不变子空间(或 φ-子空间). 这时把 φ 限制在 U 上，则 φ 在 U 上定义了一个线性变换，称为由 φ 诱导出的线性变换，或称为 φ 在 U 上的限制，记为 $\varphi|_U$.

线性空间 V 上任何一个线性变换 φ 至少有两个不变子空间：零子空间及全空间 V.

例 4.5.1　线性变换 φ 的像与核都是 φ 的不变子空间.

证明　$\varphi(\operatorname{Im}\varphi) \subseteq \varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$. 另一方面，$\varphi(\operatorname{Ker}\varphi) = \mathbf{0} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. 由此即得结论，证毕.

例 4.5.2　Descartes 平面上绕原点的旋转当旋转角 $\theta \neq k\pi$ (k 为整数)时，没有一维的不变子空间，因此没有非平凡的不变子空间(我们把零子空间及全子空间 V 称为平凡的不变子空间).

例 4.5.3　设 φ 是 V 上的数乘变换，即存在常数 k，使 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha}$，则 V 的任一子空间都是 φ 的不变子空间.

下面我们要讨论一个线性变换的不变子空间和该线性变换的表示矩阵之间关系.

定理 4.5.1　设 U 是 V 上线性变换 φ 的不变子空间，且设 U 的基为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$. 将 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ 扩充为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$，则 φ 在这组基下的矩阵具有下列形状：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & a_{r+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} & a_{r+1,r} & \cdots & a_{nr} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{n,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.5.1}$$

证明　由于 $\varphi(\boldsymbol{e}_i) \in U (i = 1, 2, \cdots, r)$，因此

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{1r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{2r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(\boldsymbol{e}_r) = a_{r1}\boldsymbol{e}_1 + a_{r2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{rr}\boldsymbol{e}_r,$$

即在 $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\cdots$, $\varphi(\boldsymbol{e}_r)$的表示式中, $\boldsymbol{e}_{r+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$前的系数均为零,因此 φ 的表示矩阵具有所要求的形状. 证毕.

上述定理的逆命题也是成立的. 即若 V 有一组基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$,如果线性变换 φ 在 V 的这组基下的矩阵是分块上三角阵(4.5.1),则由基向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_r$ 生成的子空间 V_1 是 φ 的不变子空间. 事实上,由矩阵(4.5.1)即知 $\varphi(\boldsymbol{e}_i) \in V_1 (i = 1, \cdots, r)$. 因此 $\varphi(V_1) \subseteq V_1$.

推论 4.5.1　设 $V = V_1 \oplus V_2$ 且 V_1,V_2 都是线性变换 φ 的不变子空间. 又 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ 是 V_1 的基,$\{\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V_2 的基,则 φ 在基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的矩阵为分块对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{4.5.2}$$

其中 A_1 为 r 阶方阵, A_2 为 $n-r$ 阶方阵.

证明　类似定理 4.5.1 即可证明. 证毕.

显然推论 4.5.1 还可以进一步推广. 若 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 设每个 V_i 都是线性变换 φ 的不变子空间,那么在 V 中存在一组基(这组基可由 V_i 的基合并而成),使 φ 在这组基下的矩阵为分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

其中每块都是 r_i 阶方阵, $r_i = \dim V_i$.

如果 n 维线性空间的线性变换 φ 有足够小的不变子空间,比如有 n 个一维不变子空间,其直和正好组成全空间,那么上式中的表示矩阵就是一个对角阵.

例 4.5.4　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的三维空间,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是 V 的基, φ 是 V 上线性变换,它在这组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

求证: 由向量 $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3\}$ 生成的子空间 U 是 φ 的不变子空间.

证明　$\varphi(\boldsymbol{e}_3)$的坐标向量为

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 2 & -1\\2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

容易求出向量组$\{(-1,\ -1,\ 0)',\ (0,\ 0,\ 1)',\ (1,\ 1,\ 2)'\}$的秩为 2,而$U$显然是二维子空间,因此$\varphi(\boldsymbol{e}_3)\in U$. 同理可证$\varphi(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)\in U$. 于是$U$是$\varphi$-不变子空间. 证毕.

习　题　4.5

1. 在实四维空间V中,设线性变换φ在基$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4\}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 4 & -2\\2 & -1 & 0 & 1\\2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

求证:由向量$\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$及$\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4$生成的子空间$U$是$\varphi$-不变子空间.

2. 设φ, ψ都是线性空间V上的线性变换且$\varphi\psi=\psi\varphi$, 求证: $\mathrm{Im}\,\varphi$及$\mathrm{Ker}\,\varphi$都是ψ-不变子空间.

3. 设φ是n维线性空间V上的自同构,若W是φ-不变子空间,证明W也是φ^{-1}-不变子空间.

4. 设V_1,V_2是V上线性变换φ-不变子空间,则V_1+V_2,$V_1\cap V_2$也是φ-不变子空间.

5. 设φ是n维线性空间V上幂等线性变换,即适合$\varphi^2=\varphi$. 则必存在V的子空间W,使对一切$\boldsymbol{\alpha}\in W$,有$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$. 这时若$\varphi$的秩不等于$n$,则必存在$V$的非平凡子空间$U$,使$\varphi(U)=\mathbf{0}$且

$$V=W\oplus U.$$

6. 设φ是n维线性空间V上的线性变换, φ在V的一组基下的矩阵为对角阵且对角线上的元素互不相同,求关于φ不变的所有一维子空间并确定它们的个数.

复 习 题 四

1. 设V是实数域上次数不超过n的多项式全体组成的线性空间;D是求导变换,则

(1) D是V上的线性变换,且有r维不变子空间, $1\leqslant r\leqslant n$;

(2) 求D在基$\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$下的表示矩阵;

(3) $\mathrm{Im}\,D\cap\mathrm{Ker}\,D\neq\mathbf{0}$.

2. 设V是数域$\mathbf{K}$上的向量空间, φ是V上线性变换,若φ在基$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$下的表示

矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求证:

(1) V 中包含 $\boldsymbol{e}_1$ 的 φ-不变子空间只有 V 自身;

(2) V 任一非零 φ-不变子空间必包含 $\boldsymbol{e}_n$;

(3) V 不能分解为两个非平凡 φ-不变子空间的直和.

3. 设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 的线性变换,在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 A,若将 $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ 对换,问: 在对换后的基下的表示矩阵与 A 有何关系?

4. 设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 的线性变换,若 φ 是满映射,U 是 V 的 r 维子空间,则 $\varphi(U)$ 也是 V 的 r 维子空间.

5. 设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 的线性变换,若存在 $n>1$ 及 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$, 使

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varphi + a_n I = 0,$$

其中 I 表示 V 的恒等变换, 又 $a_n \neq 0$, 则 φ 必是自同构.

6. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上互不相同的线性变换. 求证: 必存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}), \varphi_2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi_k(\boldsymbol{\alpha})$两两不相同.

7. 设 V 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 是 V 上的非零线性变换. 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,使 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$.

8. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上线性变换, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中向量且已知 $\varphi^{m-1}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}$, $\varphi^m(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, 求证: $\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \varphi^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.

9. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间, $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbf{K})$,取定 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 令 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 是 V^* 中的向量, 适合:

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = 0 (i \neq j), \ \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_i) = 1,$$

求证: $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$是 V^* 的一组基.

10. 设 U, V 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $\dim U = m, \dim V = n$, $m < n$. 又 φ 是 U 到 V 的单线性映射,求证: 必存在 V 到 U 的映上线性映射 ψ,使 $\psi\varphi = I$, 这里 I 表示 U 上的恒等映射.

11. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,若对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,总存在自然数 m(m 可能和 $\boldsymbol{\alpha}$ 有关),使得 $\varphi^m(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, 求证: $I-\varphi$ 是 V 的自同构,其中 I 表示 V 上的恒等映射.

12. 设 U_1, U_2 是 n 维线性空间 V 的子空间,假定它们维数相同. 求证: 存在 V 上的可逆线性变换 φ,使 $U_2 = \varphi(U_1)$.

13. 设 $V = M_n(\mathbf{K})$, A, B 是两个 n 阶矩阵,定义 V 上的变换:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}B,$$

求证：φ 是 V 上的线性变换，φ 是线性同构的充分必要条件是 A，B 都是非异阵.

14. 设有 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 V，V'. U 是 V 的子空间，φ 是线性空间 U 到 V' 的线性映射，求证：必存在 $V \to V'$ 的线性映射 ψ，它在 U 上的限制就是 φ（称这样的 ψ 是 φ 的扩张）.

15. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的子空间. 若 $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq U$，又对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in U$，$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$，求证：

(1) 存在 V 的子空间 W，使 $V = U \oplus W$ 且 $\varphi(W) = \mathbf{0}$；

(2) 存在 V 的线性变换 ψ，使 $\psi(U) = \mathbf{0}$ 且 $r(\varphi) + r(\psi) = n$.

16. 求证：n 维线性空间 V 上秩为 m 的线性变换可以表示为 m 个秩为 1 的线性变换之和.

17. 设 φ，ψ 是 n 维线性空间 V 的线性变换且 $\varphi^2 = \varphi$，$\psi^2 = \psi$，求证：

(1) $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\psi$ 的充分必要条件是 $\varphi\psi = \psi$，$\psi\varphi = \varphi$；

(2) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$ 的充分必要条件是 $\varphi\psi = \varphi$，$\psi\varphi = \psi$.

18. 设 φ 是线性空间 V 到 U 的线性映射，求证：必存在 U 到 V 的线性映射 ψ，使

$$\varphi\psi\varphi = \varphi.$$

19. 设 A，B 是数域 $\mathbf{K}$ 上 n 阶方阵且 $A^2 = A$，$B^2 = B$，又 $r(A) = r(B)$，求证：必存在 $\mathbf{K}$ 上满秩的 n 阶方阵 C，使 $CB = AC$.

20. φ_1，$\cdots$，φ_m 是 n 维线性空间 V 的线性变换且适合条件：

$$\varphi_i\varphi_j = 0\,(i \neq j),\ \varphi_i^2 = \varphi,\ \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_m = \mathbf{0}.$$

求证：V 是 $\mathrm{Im}\,\varphi_1$，$\cdots$，$\mathrm{Im}\,\varphi_m$ 的直和.

*21. 设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间，φ 是其上的线性变换，求证：必存在正整数 m，使

$$\mathrm{Im}\,\varphi^m = \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1},\ \mathrm{Ker}\,\varphi^m = \mathrm{Ker}\,\varphi^{m+1},\ V = \mathrm{Im}\,\varphi^m \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi^m.$$

*22. 设 A，B 都是 $m \times n$ 矩阵，求证：方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 同解的充分必要条件是存在 m 阶非异阵 P，使 $B = PA$.

第五章　多　项　式

§5.1　一元多项式代数

在这一章里,我们将暂时中止对线性空间、线性变换的讨论转而研究多项式.多项式理论不仅对进一步研究线性代数是必要的,而且在数学的其他分支领域也有极其重要的应用.

定义 5.1.1　*设 $\mathbf{K}$ 是数域,x 为一个形式符号(称为未定元),若 a_0,a_1,⋯,$a_n \in \mathbf{K}(n \geqslant 0,\ a_n \neq 0)$,称形式表达式*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

为数域 $\mathbf{K}$ 上关于未定元 x 的一元 n 次多项式.域 $\mathbf{K}$ 上一元多项式全体记为 $\mathbf{K}[x]$.

多项式通常记为 $f(x)$,$g(x)$等等,其中 a_ix^i 称为第 i 次项,a_i 称为第 i 次项的系数.如果多项式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 中 $a_n \neq 0$,则称 $f(x)$是一个 n 次多项式,a_nx^n 为 $f(x)$的最高次项或首项,a_0 为常数项.若 $f(x) = a$,则称 $f(x)$为常数多项式,当 $a \neq 0$ 时称它为零次多项式;当 $a = 0$ 时,称之为零多项式,规定其次数为$-\infty$.两个多项式称为相等当且仅当它们次数相同且各次项的系数相等,即若

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{5.1.1}$$

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0, \tag{5.1.2}$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n$,$a_i = b_i(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

现在我们定义 $\mathbf{K}[x]$上的运算.设 $f(x)$,$g(x) \in \mathbf{K}[x]$,适当增加几个系数为零的项,可设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

定义

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots$$
$$+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

若 $c\in\mathbf{K}$, 定义

$$cf(x)=ca_nx^n+ca_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ca_1x+ca_0,$$

则 $\mathbf{K}[x]$在上述定义下成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,其中零向量为零多项式.验证工作并不困难,只需逐条验证线性空间的公理即可,请读者自己完成.

再来定义两个多项式的积.若 $f(x)$,$g(x)$如(5.1.1)式及(5.1.2)式所示且 $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$,定义 $f(x)\cdot g(x)=h(x)$,其中 $h(x)$ 是一个 $m+n$ 次多项式,若设

$$h(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

则

$$c_{n+m}=a_nb_m,$$
$$c_{n+m-1}=a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_0=a_0b_0.$$

不难验证 $\mathbf{K}[x]$中元素的乘积适合下列法则:

(1) $f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

(2) $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

(3) $(f(x)+g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$;

(4) $c(f(x)g(x))=(cf(x))g(x)=f(x)(cg(x))$;

(5) 若把 c 看成是常数多项式,则 c 与 $f(x)$的作为多项式的积与 c 作为数乘以 $f(x)$的积相同.

由上述法则可知,$\mathbf{K}[x]$是数域 $\mathbf{K}$ 上的代数,通常称 $\mathbf{K}[x]$为数域 $\mathbf{K}$ 上的一元多项式代数.由于 $\mathbf{K}[x]$中的加法及乘法适合环的条件,因此 $\mathbf{K}[x]$也称为 $\mathbf{K}$ 上的一元多项式环.

若 $f(x)$是 n 次多项式,则记 $f(x)$的次数为

$$\deg f(x) = n.$$

显然有下列引理.

引理 5.1.1　若 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$,则

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

注意上述等式对零多项式也适用.用这个引理我们可证明下面的命题.

命题 5.1.1　若 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$ 且 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$,则

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

证明　$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geqslant 0 + 0 = 0$,因此

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

证毕.

推论 5.1.1　若 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$,则

$$g(x) = h(x).$$

证明　$f(x)(g(x)-h(x)) = 0$,但 $f(x) \neq 0$,故必须有 $g(x)-h(x) = 0$,证毕.

下列命题也是显然的.

命题 5.1.2　设 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$,则

(1) $\deg cf(x) = \deg f(x)$, $0 \neq c \in \mathbf{K}$;

(2) $\deg(f(x)+g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$.

§5.2　整　除

定义 5.2.1　设 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$,若存在 $h(x) \in \mathbf{K}[x]$,使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$是 $f(x)$的因式,或 $g(x)$可以整除 $f(x)$,或 $f(x)$可以被 $g(x)$整除.记为 $g(x) \mid f(x)$.否则称 $g(x)$不能整除 $f(x)$或 $f(x)$不能被 $g(x)$整除.

从整除的定义知道,零多项式的因式可以是任一多项式.但零多项式不能是任一非零多项式的因式.整除有下列简单性质.

命题 5.2.1　设 $f(x),g(x),h(x) \in \mathbf{K}[x]$, $0 \neq c \in \mathbf{K}$,则

(1) 若 $f(x) \mid g(x)$，则 $cf(x) \mid g(x)$，因此非零常数多项式 c 是任一非零多项式的因子；

(2) $f(x) \mid f(x)$；

(3) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$；

(4) 若 $f(x) \mid g(x)$，$f(x) \mid h(x)$，则对任意的多项式 $u(x)$，$v(x)$，有

$$f(x) \mid g(x)u(x) + h(x)v(x);$$

(5) 设 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$ 且 $f(x)$，$g(x)$ 都是非零多项式，则存在 $\mathbf{K}$ 中非零元 c，使

$$f(x) = cg(x).$$

证明 (1) 若 $g(x) = f(x)q(x)$，则

$$g(x) = (cf(x))(c^{-1}q(x)).$$

此即 $cf(x) \mid g(x)$.

(2) 显然.

(3) 若 $g(x) = f(x)q(x)$，$h(x) = g(x)p(x)$，则

$$h(x) = (f(x)q(x))p(x) = f(x)(q(x)p(x)).$$

(4) 若 $g(x) = f(x)q(x)$，$h(x) = f(x)p(x)$，则

$$g(x)u(x) + h(x)v(x) = f(x)[q(x)u(x) + p(x)v(x)].$$

(5) 设 $g(x) = f(x)q(x)$，$f(x) = g(x)p(x)$，则

$$f(x) = f(x)(q(x)p(x)).$$

但

$$\deg f(x) = \deg f(x) + \deg q(x)p(x).$$

因此

$$\deg q(x)p(x) = 0,$$

也就是说

$$\deg q(x) = \deg p(x) = 0.$$

故 $p(x)$ 及 $q(x)$ 均为常数非零多项式，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相差一个非零常数，证毕.

注　适合命题中条件(5)的两个多项式(即可以互相整除的两个多项式)称为相伴多项式，记为 $f(x) \sim g(x)$.

任意给定两个非零多项式 $f(x)$及 $g(x)$,未必有 $f(x)\mid g(x)$ 或 $g(x)\mid f(x)$,但我们仍可做带余式的除法.

定理 5.2.1　设 $f(x), g(x)\in \mathbf{K}[x]$, $g(x)\neq 0$,则必存在唯一的 $q(x)$, $r(x)\in \mathbf{K}[x]$,使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \tag{5.2.1}$$

且 $\deg r(x)<\deg g(x)$.

证明　若 $f(x)=0$ 或 $\deg f(x)<\deg g(x)$,只需令 $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$ 即可.

现设 $\deg f(x)\geqslant \deg g(x)$,对 $f(x)$的次数用数学归纳法.若 $\deg f(x)=0$,则 $\deg g(x)=0$.因此可设 $f(x)=a$, $g(x)=b(a\neq 0,\ b\neq 0)$.这时令 $q(x)=ab^{-1}$, $r(x)=0$ 即可.作为归纳假设,我们设结论对小于 n 次的多项式均成立.设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\ b_m\neq 0,$$

由于 $n\geqslant m$,可令

$$f_1(x)=f(x)-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x),$$

则 $\deg f_1(x)<n$.由归纳假设,有

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x),$$

且 $\deg r(x)<\deg g(x)$,于是

$$f(x)-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)=q_1(x)g(x)+r(x).$$

因此

$$f(x)=[a_nb_m^{-1}x^{n-m}+q_1(x)]g(x)+r(x).$$

令

$$q(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}+q_1(x),$$

即得(5.2.1)式.

再证明唯一性.设另有 $p(x)$, $t(x)$,使

$$f(x)=g(x)p(x)+t(x),$$

且 $\deg t(x)<\deg g(x)$,则

$$g(x)[q(x)-p(x)]=t(x)-r(x),\tag{5.2.2}$$

注意(5.2.2)式左边若 $q(x)-p(x)\neq 0$，便有

$$\deg\,(q(x)-p(x))g(x)\geqslant \deg g(x)>\deg\,(t(x)-r(x)).$$

引出矛盾.因此只可能 $p(x)=q(x)$，$t(x)=r(x)$. 证毕.

推论 5.2.1　设 $f(x)$，$g(x)\in \mathbf{K}[x]$，$g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 后的余式为零.

为了求出(5.2.1)式中的 $q(x)$ 及 $r(x)$，我们可用除法算式，参见下面的例子.

例 5.2.1　设 $f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$，$g(x)=x^2-x+1$，试求(5.2.1)式中的 $q(x)$及 $r(x)$.

解

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\ 4x^3 & & +\ 5x & -\ 1 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & & & 3x^2-x-4 \\ \cline{1-5}
 & -\ x^3 & -\ 3x^2 & +\ 5x & & \\
 & -\ x^3 & +\ x^2 & -\ x & & \\ \cline{2-5}
 & & -\ 4x^2 & +\ 6x & -\ 1 & \\
 & & -\ 4x^2 & +\ 4x & -\ 4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +\ 3 &
\end{array}$$

因此 $q(x)=3x^2-x-4$，$r(x)=2x+3$.

习　题　5.2

1. 设 $f(x)=2x^5+x^4-x+1$，$g(x)=x^3-x+2$，求 $q(x)$及 $r(x)$，使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

且 $\deg r(x)<3$.

2. 设 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b$，$g(x)=x^2-3x+1$. 若 $f(x)$除以 $g(x)$后余式为 $25x-5$，试求 a，b 之值.

3. 设 $g(x)=ax+b$，a，$b\in\mathbf{K}$. 又 $f(x)\in\mathbf{K}[x]$，则 $g(x)\mid f^2(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)\mid f(x)$.

4. 若 $f(x)=x^4+px^2+q$，$g(x)=x^2+mx+1$，问：p,q,m 适合什么条件才有 $g(x)\mid f(x)$?

5. 证明: $x^d - a^d \mid x^n - a^n$ 的充分必要条件是 $d \mid n$,其中 $a \neq 0$.

6. 设 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $abc \neq 0$, $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$,若 $g(x) \mid f(x)$, 求证:

$$\frac{ap-b}{a} = \frac{aq-c}{b} = \frac{ar}{c}.$$

7. 设 $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$, 其中 m,n,p 为自然数,又 $g(x) = x^2 + x + 1$, 求证: $g(x) \mid f(x)$.

§5.3　最大公因式

设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式. 若 $h(x) \in \mathbf{K}[x]$ 适合: $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$,则称 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式(或公因子).

定义 5.3.1　设 $f(x), g(x) \in \mathbf{K}[x]$,若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式且若 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,必有 $h(x) \mid d(x)$,则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式(或称 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的 g. c. d),记为 $d(x) = (f(x), g(x))$.

同理,若非零多项式 $m(x)$ 适合 $f(x) \mid m(x)$, $g(x) \mid m(x)$(即 $m(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公倍式)且对任意 $f(x), g(x)$ 的公倍式 $l(x)$,均有 $m(x) \mid l(x)$,则 $m(x)$ 称为 $f(x), g(x)$ 的最小公倍式(或称之为 $f(x), g(x)$ 的 l. c. m),记为 $m(x) = [f(x), g(x)]$.

如何求两个多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因子 $d(x)$? 不妨假设 $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$, 由带余除法,有

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

其中 $\deg r(x) < \deg g(x)$. 若 $r(x) \neq 0$,因为 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$,故 $d(x) \mid r(x)$,这表明 $d(x)$ 是 $g(x)$ 和 $r(x)$ 的公因子. 注意到 $r(x)$ 的次数比 $f(x), g(x)$ 都小. 如果我们再将 $g(x)$ 除以 $r(x)$,得到的余式次数更小(如果不为零的话),而 $d(x)$ 是 $r(x)$ 和这个余式的公因子. 不断这样做下去,肯定会得到余式为零的除式, 其中的一个因子便是最大公因子. 这个方法称为 Euclid(欧几里得)辗转相除法.

定理 5.3.1　设 $f(x), g(x) \in \mathbf{K}[x]$,则存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$,且有 $u(x), v(x) \in \mathbf{K}[x]$, 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x). \tag{5.3.1}$$

证明　若 $f(x) = 0$,则显然 $(f(x), g(x)) = g(x)$. 同理若 $g(x) = 0$,则 $(f(x), g(x)) = f(x)$. 故不妨设 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$. 由带余除法,我们有下列

等式：

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),$$

$$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),$$

$$r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{t-2}(x)=r_{t-1}(x)q_t(x)+r_t(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

余式的次数是严格递减的，因此经过有限步后，必有一个等式其余式为零. 不妨设 $r_{s+1}(x)=0$，于是

$$r_{s-1}(x)=r_s(x)q_{s+1}(x).$$

现在要证明 $r_s(x)$即为 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式. 由上式知 $r_s(x)\mid r_{s-1}(x)$，但

$$r_{s-2}(x)=r_{s-1}(x)q_s(x)+r_s(x), \tag{5.3.2}$$

因此 $r_s(x)\mid r_{s-2}(x)$. 这样可一直推下去，得 $r_s(x)\mid f(x)$，$r_s(x)\mid g(x)$. 这表明 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式. 又设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，则 $h(x)\mid r_1(x)$，于是 $h(x)\mid r_2(x)$，不断往下推，容易看出有 $h(x)\mid r_s(x)$. 因此 $r_s(x)$是最大公因式.

再证明(5.3.1)式. 从(5.3.2)式得

$$r_s(x)=r_{s-2}(x)-r_{s-1}(x)q_s(x), \tag{5.3.3}$$

但我们有

$$r_{s-3}(x)=r_{s-2}(x)q_{s-1}(x)+r_{s-1}(x), \tag{5.3.4}$$

从(5.3.4)式中解出 $r_{s-1}(x)$ 代入(5.3.3)式，得

$$r_s(x)=r_{s-2}(x)[1+q_{s-1}(x)q_s(x)]-r_{s-3}(x)q_s(x).$$

用类似的方法逐步将 $r_i(x)$ 用 $r_{i-1}(x)$，$r_{i-2}(x)$ 代入，从而得到

$$r_s(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x).$$

显然 $u(x),v(x)\in\mathbf{K}[x]$，证毕.

若 $d_1(x)$与 $d_2(x)$都是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式，则 $d_1(x)\mid d_2(x)$，$d_2(x)\mid d_1(x)$，因此必存在 $c\in\mathbf{K}$，使 $d_2(x)=cd_1(x)$，即 $f(x)$与 $g(x)$的两个最大公因

式最多相差一个非零常数. 若规定 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式首项系数为 1(首项系数等于 1 的多项式称为首一多项式), 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就唯一确定了. 今后我们规定, 凡最大公因式均指首一多项式.

对 m 个多项式, 我们也可以定义最大公因式的概念. 设 $f_i(x)(i=1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbf{K}[x]$ 中元素, 若 $d(x) \mid f_i(x)(i=1, 2, \cdots, m)$, 则称 $d(x)$ 是 $\{f_i(x)\}$ 的公因式. 如果对 $\{f_i(x)\}$ 的任一公因式 $h(x)$, $h(x) \mid d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $\{f_i(x)\}$ 的最大公因式.

引理 5.3.1　*若 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{K}[x]$, 则*

$$((f(x), g(x)), h(x)) = (f(x), (g(x), h(x))) = (f(x), g(x), h(x)).$$

证明　设 $d_1(x) = (f(x), g(x))$, $d_2(x) = (g(x), h(x))$, $d(x) = (f(x), g(x), h(x))$, 则 $d(x) \mid d_1(x)$, $d(x) \mid h(x)$. 另一方面, 若 $u(x) \mid d_1(x)$, $u(x) \mid h(x)$, 则 $u(x) \mid f(x)$, $u(x) \mid g(x)$, 从而 $u(x) \mid d(x)$. 这说明

$$d(x) = (d_1(x), h(x)) = ((f(x), g(x)), h(x)).$$

同理, $d(x) = (f(x), (g(x), h(x)))$. 证毕.

引理 5.3.1 告诉我们, 求 m 个多项式的最大公因式时可以先求其中任意两个的最大公因式. 再用同样方法不断求下去, 不必顾虑先后次序, 最后结果总是一样的.

例 5.3.1　*$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$, 求 $(f(x), g(x))$ 以及 $u(x), v(x)$ 使 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f(x), g(x))$.*

解　对 $f(x)$, $g(x)$ 进行辗转相除

	$f(x)$	$g(x)$	
	$x^4 \quad -x^3 - x^2 + 2x - 1$	$x^3 \quad -2x + 1$	
$q_1(x) = x - 1$	$x^4 \quad -2x^2 + x$	$x^3 - x^2$	$q_2(x) = x + 1$
	$-x^3 + x^2 + x - 1$	$x^2 - 2x + 1$	
	$-x^3 \quad +2x - 1$	$x^2 - x$	
	$r_1(x) = x^2 - x$	$r_2(x) = -x + 1$	
$q_3(x) = -x$	$x^2 - x$		
	0		

因此 $(f(x), g(x)) = x - 1 = -r_2(x)$. 又

$$r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x)$$

$$= g(x) - [f(x) - g(x)q_1(x)]q_2(x)$$
$$= f(x)(-q_2(x)) + g(x)[1 + q_1(x)q_2(x)],$$

所以

$$u(x) = x + 1,\ v(x) = -x^2.$$

利用最大公因式,我们可以定义互素的概念.

定义 5.3.2 设 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$,若$(f(x),g(x)) = 1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

定理 5.3.2 设 $f(x),g(x) \in \mathbf{K}[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $u(x),v(x) \in \mathbf{K}[x]$,使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \tag{5.3.5}$$

证明 若$(f(x),g(x)) = 1$,由定理 5.3.1 知道,存在 $u(x),v(x)$,使(5.3.5)式成立.反之,若(5.3.5)式成立,假定$(f(x),g(x)) = d(x)$,由(5.3.5)式可知 $d(x) \mid 1$,于是 $d(x) = 1$. 证毕.

推论 5.3.1 若 $f_1(x) \mid g(x)$, $f_2(x) \mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x)) = 1$,则

$$f_1(x)f_2(x) \mid g(x).$$

证明 不妨设 $g(x) = f_1(x)s(x) = f_2(x)t(x)$,则

$$g(x) = f_1(x)s(x)[f_1(x)u(x) + f_2(x)v(x)],$$

其中 $u(x),v(x) \in \mathbf{K}[x]$,且使 $f_1(x)u(x) + f_2(x)v(x) = 1$. 于是

$$g(x) = f_1(x)s(x)f_1(x)u(x) + f_1(x)f_2(x)s(x)v(x)$$
$$= f_2(x)t(x)f_1(x)u(x) + f_1(x)f_2(x)s(x)v(x)$$
$$= f_1(x)f_2(x)[t(x)u(x) + s(x)v(x)].$$

即 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$, 证毕.

推论 5.3.2 若$(f(x),g(x)) = 1$,且 $f(x) \mid g(x)h(x)$,则

$$f(x) \mid h(x).$$

证明 设 $u(x),v(x) \in \mathbf{K}[x]$,且使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

则

$$f(x)u(x)h(x) + g(x)v(x)h(x) = h(x).$$

因上式左边可被 $f(x)$ 整除,故 $f(x)\mid h(x)$,证毕.

推论 5.3.3 设 $(f(x),g(x))=d(x)$,$f(x)=f_1(x)d(x)$,$g(x)=f_2(x)d(x)$,则

$$(f_1(x),f_2(x))=1.$$

证明 若 $u(x),v(x)\in\mathbf{K}[x]$,使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x),$$

即

$$f_1(x)d(x)u(x)+f_2(x)d(x)v(x)=d(x),$$

两边消去 $d(x)$ 即得

$$f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)=1,$$

因此 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 互素. 证毕.

推论 5.3.4 设 $(f(x),g(x))=d(x)$,则

$$(t(x)f(x),t(x)g(x))=t(x)d(x).$$

证明 设有 $u(x),v(x)$,使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x),$$

则

$$t(x)f(x)u(x)+t(x)g(x)v(x)=t(x)d(x).$$

因此,若 $h(x)\mid f(x)t(x)$,$h(x)\mid g(x)t(x)$,则必有 $h(x)\mid t(x)d(x)$. 又 $t(x)d(x)$ 是 $t(x)f(x)$,$t(x)g(x)$ 的公因子,因此 $t(x)d(x)$ 是 $t(x)f(x)$ 与 $t(x)g(x)$ 的最大公因式. 证毕.

推论 5.3.5 若 $(f_1(x),g(x))=1$,$(f_2(x),g(x))=1$,则

$$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1.$$

证明 设

$$f_1(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

$$f_2(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=1,$$

将上两式两边分别相乘得

$$\begin{aligned}(f_1(x)f_2(x))u(x)u_1(x)+g(x)[v(x)f_2(x)u_1(x)\\+g(x)v_1(x)v(x)+v_1(x)f_1(x)u(x)]=1.\end{aligned}$$

这就是说 $f_1(x)f_2(x)$和 $g(x)$互素. 证毕.

推论 5.3.6　设 $f(x)$, $g(x)$是非零多项式, 则

$$f(x)g(x) \sim (f(x),g(x))[f(x),g(x)].$$

证明　设 $d(x)=(f(x),g(x))$ 且

$$f(x)=f_0(x)d(x), g(x)=g_0(x)d(x),$$

则 $f_0(x)$, $g_0(x)$ 互素. 假定 $l(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公倍式且

$$l(x)=f(x)u(x)=g(x)v(x),$$

故 $f_0(x)d(x)u(x)=g_0(x)d(x)v(x)$. 消去 $d(x)$得

$$f_0(x)u(x)=g_0(x)v(x).$$

因为 $f_0(x)$, $g_0(x)$互素, 所以

$$f_0(x)\mid v(x), g_0(x)\mid u(x).$$

不妨设 $u(x)=g_0(x)p(x)$. 于是

$$l(x)=f_0(x)d(x)g_0(x)p(x).$$

即 $f_0(x)d(x)g_0(x)\mid l(x)$, 而

$$f_0(x)d(x)g_0(x)=\frac{f(x)g(x)}{d(x)}.$$

这就是要证明的结论. 证毕.

下面的定理是多项式形式的"中国剩余定理". "中国剩余定理"又称为"孙子定理", 是一个在数论, 代数学等领域有广泛应用的定理.

定理 5.3.3(中国剩余定理)　设$\{f_i(x)\mid i=1,\cdots,n\}$是两两互素的多项式, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_n(x)$是 n 个多项式. 求证: 存在多项式 $g(x)$, $q_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$, 适合 $g(x)=f_i(x)q_i(x)+a_i(x)$, 对一切 i 成立.

证明　先证明存在多项式 $g_i(x)$, 使对任意的 i, 有

$$g_i(x)=f_i(x)q_i(x)+1,\ f_j(x)\mid g_i(x)\quad(j\neq i).$$

一旦得证, 只需令 $g(x)=a_1(x)g_1(x)+\cdots+a_n(x)g_n(x)$ 即可. 现构造 $g_1(x)$如下. 因为 $f_1(x)$和 $f_j(x)(j\neq 1)$ 互素, 存在 $u_j(x)$, $v_j(x)$, 使

$$f_1(x)u_j(x)+f_j(x)v_j(x)=1.$$

令

$$g_1(x)=f_2(x)v_2(x)\cdots f_n(x)v_n(x)$$
$$=(1-f_1(x)u_2(x))\cdots(1-f_1(x)u_n(x)),$$

显然 $g_1(x)$符合要求. 同理可构造 $g_i(x)$. 证毕.

习　题　5.3

1. 用辗转相除法求下列多项式的最大公因式:

(1) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$;

(2) $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$, $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$;

(3) $f(x)=x^6+x^5-2x^4-4x^3-2x^2+7x+6$, $g(x)=x^5+x^2-x+1$.

2. 求 $u(x),v(x)$,使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$:

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

(2) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$.

3. 若 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$, 举例说明 $d(x)$不必是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式. 但如果 $d(x)\mid f(x)$,$d(x)\mid g(x)$,证明: $d(x)$必是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式.

4. 设 $(f(x),g(x))=1$,则$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

5. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 为 **K** 上的多项式, 且

$$(f_i(x),g_j(x))=1,\ i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n,$$

则 $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

6. 若 $f(x)$与 $g(x)$互素,求证: $f(x^m)$与 $g(x^m)$也互素,其中 m 为任一自然数.

7. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的最大公因式为 $d(x)$,则必存在 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$, 使

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\cdots+f_n(x)g_n(x)=d(x).$$

特别, $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 互素($d(x)=1$) 的充分必要条件是存在 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$, 使

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\cdots+f_n(x)g_n(x)=1.$$

§5.4 因式分解

读者在中学里已经学习过因式分解. 但是由于当时没有数域的概念,因此对什么叫“不可再分”缺乏严格的定义. 现在我们可以来严格地建立多项式的因式分解理论.

定义 5.4.1　设 $f(x)$是数域 **K** 上的非常数多项式,若 $f(x)$可以分解为两

个次数小于 $f(x)$ 次数的 **K** 上多项式之积,则称 $f(x)$ 是 **K** 上的可约多项式. 否则,称之为 **K** 上的不可约多项式.

从这个定义看出,多项式的可约或不可约与数域密切相关: 比如 x^2-2 在有理数域上是不可约多项式,但在实数域上是可约多项式. 然而无论在哪个域上,一次多项式总是不可约的. 另外我们还要注意,因为 **K** 是一个域,对 **K** 中任一非零数 c,都有 $f(x)=c(c^{-1}f(x))$. 但是这种分解没有多大意义. 我们谈的因式分解,都是指将一个多项式分解为两个次数较小的多项式之积.

若 $f(x)$ 不可约,则只有非零常数多项式或 $cf(x)(c\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的因式. 一个不可约多项式 $f(x)$ 与任一多项式 $g(x)$ 只有两种关系,或者 $f(x)\mid g(x)$,或者 $(f(x),g(x))=1$.

不可约多项式还有"素性",如以下定理所述.

定理 5.4.1 若 $p(x)$ 是 **K** 上的不可约多项式,$f(x)$,$g(x)$ 是 **K** 上的多项式且 $p(x)\mid f(x)g(x)$,则或者 $p(x)\mid f(x)$,或者 $p(x)\mid g(x)$.

证明 若 $p(x)$ 不能整除 $f(x)$,则 $p(x)$ 与 $f(x)$ 互素,由推论 5.3.2 即得 $p(x)\mid g(x)$. 证毕.

推论 5.4.1 设 $p(x)$ 为不可约多项式且

$$p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),$$

则 $p(x)$ 必可整除其中某个 $f_i(x)$.

对 **K**$[x]$ 中任意一个非常数多项式,是否一定可以分解为不可约因子的积? 这种分解是否唯一? 下面的因式分解基本定理回答了这个问题.

定理 5.4.2 设 $f(x)$ 是数域 **K** 上的多项式且 $\deg f(x)\geqslant 1$,则

(1) $f(x)$ 可分解为 **K** 上的有限个不可约多项式之积;

(2) 若

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \tag{5.4.1}$$

是 $f(x)$ 的两个不可约分解,即 $p_i(x)$,$q_j(x)$ 都是 **K** 上的次数大于零的不可约多项式,则 $s=t$,且经过适当调换因式的次序以后,有

$$q_i(x)\sim p_i(x)(i=1,2,\cdots,s).$$

证明 (1) 对多项式 $f(x)$ 的次数用数学归纳法. 若 $\deg f(x)=1$,结论显然成立. 设次数小于 n 的多项式都可以分解为 **K** 上的不可约多项式之积而 $\deg f(x)=n$. 若 $f(x)$ 不可约,结论自然成立. 若 $f(x)$ 可约,则

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

其中 $f_1(x),f_2(x)$的次数小于 n,由归纳假设它们可以分解为 $\mathbf{K}$ 上的有限个不可约多项式之积.所有这些多项式之积就是 $f(x)$.

(2) 对(5.4.1)式中的 s 用数学归纳法. 若 $s=1$,则 $f(x)=p_1(x)$,因此 $f(x)$是不可约多项式,于是 $t=1,q_1(x)=p_1(x)$. 现假设对不可约因式个数小于 s 的多项式结论正确.由(5.4.1)式,有

$$p_1(x)\mid q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

由推论 5.4.1 可知,必存在某个 i, 不妨设 $i=1$, 使

$$p_1(x)\mid q_1(x).$$

但是 $p_1(x)$, $q_1(x)$ 都是不可约多项式,因此存在 $c_1\in\mathbf{K}$, 使

$$q_1(x)=c_1p_1(x).$$

此即 $p_1(x)\sim q_1(x)$. 将上式代入(5.4.1)式并消去 $p_1(x)$,得到

$$p_2(x)\cdots p_s(x)=c_1q_2(x)\cdots q_t(x).$$

这时左边为 $s-1$ 个不可约多项式之积,由归纳假设,$s-1=t-1$,即 $s=t$. 另一方面,存在 $c_i\in\mathbf{K}$, $c_i\neq 0,q_i(x)=c_ip_i(x)$. 证毕.

定理 5.4.2 表明,任一多项式可唯一地被分解为若干个不可约多项式之积.这里唯一是在相伴意义下的唯一,即相应的多项式可以差一个常数因子.如果把分解式中相同或仅差一个常数的因式合并在一起,我们就得到了一个“标准分解”式:

$$f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x),\tag{5.4.2}$$

其中每个 $p_i(x)$是首一多项式且 $(p_i(x),p_j(x))=1\ (i\neq j)$, $e_i\geqslant 1$.

若 $e_i>1$, 我们称(5.4.2)式中的因式 $p_i(x)$为 $f(x)$的 e_i 重因式.显然这时 $p_i^{e_i}(x)\mid f(x)$,但 $p_i^{e_i+1}(x)$ 不能整除 $f(x)$.

例 5.4.1　设 $f(x),g(x)$是 $\mathbf{K}$ 上的两个多项式.在它们的标准分解式中适当添加零次项,我们不妨设它们有如下的分解式:

$$f(x)=c_1p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_n^{e_n}(x);$$

$$g(x)=c_2p_1^{f_1}(x)p_2^{f_2}(x)\cdots p_n^{f_n}(x),$$

其中 $e_i\geqslant 0$, $f_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $f(x),g(x)$的最大公因式

$$(f(x),g(x))=p_1(x)^{k_1}p_2^{k_2}(x)\cdots p_n^{k_n}(x),$$

其中 $k_i=\min\{e_i,f_i\}(i=1,2,\cdots,n)$.

类似地，$f(x)$，$g(x)$的最小公倍式

$$[f(x),g(x)]=p_1(x)^{h_1}p_2^{h_2}(x)\cdots p_n^{h_n}(x),$$

其中 $h_i=\max\{e_i,f_i\}(i=1,2,\cdots,n)$.

一个多项式何时有重因式？我们现在来讨论这个问题.为此，首先我们回忆一下数学分析中导数的概念.

若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则 $f(x)$的导数或微商为下列多项式：

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1. \tag{5.4.3}$$

事实上，我们也可以形式地定义(5.4.3)式为多项式 $f(x)$的微商而不借用数学分析中的定义.按此定义不难验证下列公式：

(1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$;

(2) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(3) $(cf(x))'=cf'(x)$;

(4) $(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$.

定理 5.4.3 多项式 $f(x)$没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素.

证明 设多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 m 重因式，$m>1$，则 $f(x)=p^m(x)g(x)$，因此

$$f'(x)=mp^{m-1}(x)p'(x)g(x)+p^m(x)g'(x).$$

于是 $p^{m-1}(x)\mid f'(x)$. 这表明 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公因式 $p^{m-1}(x)$.

反之，若不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的单因式，可设 $f(x)=p(x)g(x)$，$p(x)$ 不能整除 $g(x)$. 于是

$$f'(x)=p'(x)g(x)+p(x)g'(x).$$

若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的因子，则 $p(x)\mid p'(x)g(x)$. 但 $p(x)$ 不能整除 $g(x)$ 且 $p(x)$ 不可约，故 $p(x)\mid p'(x)$. 而 $\deg p'(x)<\deg p(x)$，这是不可能的. 若 $f(x)$ 无重因式，则在 $f(x)$ 的标准分解式(5.4.2)中，$e_i=1$ 对一切 $i=1,2,\cdots,m$ 成立，于是 $p_i(x)$ 都不能整除 $f'(x)$. 由于 $p_i(x)$ 为不可约多项式，故$(p_i(x),f'(x))=1$，由推论 5.3.5 知道

$$(p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),f'(x))=1,$$

即$(f(x),f'(x))=1$. 证毕.

定理 5.4.3 提供了判断多项式 $f(x)$是否有重因式的方法：求出 $f(x)$的导数并求 $f(x)$及 $f'(x)$的最大公因式(用 Euclid 辗转相除法)．若$(f(x),f'(x))=1$，则 $f(x)$无重因式，否则必有重因式．这个方法的好处在于它不必求出 $f(x)$的标准分解式，也不必求根即可作出判断(事实上，求标准分解式或求根往往非常困难)．

当 $f(x)$有重因式时，我们可借助$(f(x),f'(x))$将 $f(x)$的重因式消去．即有下列命题．

命题 5.4.1 设 $d(x)=(f(x),f'(x))$，则 $f(x)/d(x)$是一个没有重因式的多项式，且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$的不可约因式相同(不计重数)．

证明 设 $f(x)$有如(5.4.2)式的标准分解式，则

$$\begin{aligned} f'(x) = & ce_1 p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_s^{e_s}(x)p_1'(x) \\ & + ce_2 p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s}(x)p_2'(x) \\ & + \cdots \\ & + ce_s p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)p_s'(x). \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

因此 $p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式．注意到 $f(x)$ 的因式一定具有 $c_1p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$ 的形状．不妨设 $h(x)$ 是 $f(x),f'(x)$ 的公因子．注意到 $p_1^{e_1}(x)$ 可以整除(5.4.4)式中右边除第一项外的所有项，但不能整除第一项，因此 $p_1^{e_1}(x)$ 不能整除 $f'(x)$．同理，$p_i^{e_i}(x)$ 不能整除 $f'(x)$．由此我们不难看出

$$h(x)\mid p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x),$$

即 $p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\cdots p_s^{e_s-1}(x)=d(x)$．显然 $f(x)/d(x)$没有重因式且与 $f(x)$含有相同的不可约因式．证毕．

习 题 5.4

1. 判断下列多项式有无重因式：

(1) $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$；

(2) $f(x)=4x^3-4x^2-7x-2$；

(3) $f(x)=x^3+x+1$．

2. 设 $\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$ 是数域且 $\mathbf{K}_2\subseteq\mathbf{K}_1$．若 $p(x)\in\mathbf{K}_2[x]$是 $\mathbf{K}_1$ 上的不可约多项式，求证：$p(x)$在 $\mathbf{K}_2$ 上也不可约．

3. 设 $p(x)$是数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式且 $\deg p(x)\geqslant 2$，则 $p(x)$为 $\mathbf{K}$ 上的不可约多项式的充

分必要条件是对 $\mathbf{K}[x]$上任意适合 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，或者 $p(x) \mid f(x)$，或者 $p(x) \mid g(x)$.

4. 证明：$g^2(x) \mid f^2(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$.

5. 设 u 是复数域 $\mathbf{C}$ 中的元，若 u 适合一个有理系数的多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，即 $f(u) = 0$，则称 u 是一个代数数. 证明：对任一代数数 u，总存在一个有理数域上的次数最小的首一多项式 $g(x)$，使 $g(u) = 0$. 这个多项式是有理数域上不可约多项式且被 u 唯一确定($g(x)$称为 u 的最小多项式).

6. 设 $f(x)$，$g(x)$都是 $\mathbf{K}$ 上的多项式，n 是一个自然数，则

$$(f^n(x), g^n(x)) = (f(x), g(x))^n,$$

$$[f^n(x), g^n(x)] = [f(x), g(x)]^n.$$

§5.5 多项式函数

我们在定义数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式 $f(x)$时，未定元 x 被看成是一个形式元，多项式 $f(x)$是一个形式多项式. 若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

对 $\mathbf{K}$ 中任一元 b，定义

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

则称 $f(b)$为 $f(x)$在点 b 的值. 这样多项式 $f(x)$又可看成是数域 $\mathbf{K}$ 上的函数，这个函数称为多项式函数. 一个很自然的问题是：多项式函数与多项式是否是一回事？也就是说，若两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$在 $\mathbf{K}$ 上的取值相同，那么是否必有 $f(x) = g(x)$，即它们对应的各次项的系数相同？我们将在下面给予肯定的回答.

定义 5.5.1 若 $b \in \mathbf{K}$ 且 b 适合某个非零多项式 $f(x)$，即 $f(b) = 0$，则称 b 是 $f(x)$的一个根或零点.

定理 5.5.1 设 $f(x) \in \mathbf{K}[x]$，$b \in \mathbf{K}$，则存在 $g(x) \in \mathbf{K}[x]$，使

$$f(x) = (x-b)g(x) + f(b).$$

特别，b 是 $f(x)$的根当且仅当 $(x-b) \mid f(x)$.

证明 由带余除法知

$$f(x) = (x-b)g(x) + r(x), \tag{5.5.1}$$

$\deg r(x) < 1$，因此 $r(x)$为常数多项式. 在(5.5.1)式中用 b 代替 x，即得 $r(x) =$

$f(b)$, 证毕.

定理 5.5.2　设 $f(x)$是 $\mathbf{K}$ 上的 n 次多项式,则 $f(x)$在 $\mathbf{K}$ 内至多有 n 个不同的根.

证明　设 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是 $f(x)$在 $\mathbf{K}$ 上的 r 个不同根. 作 $g(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r)$. 现用归纳法证明 $g(x)\mid f(x)$. 当 $r=1$ 时就是余数定理. 设 $r-1$ 时结论成立, 则

$$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{r-1})h(x).$$

将 b_r 代入得:

$$0=f(b_r)=(b_r-b_1)(b_r-b_2)\cdots(b_r-b_{r-1})h(b_r).$$

由于 b_i 互不相同, 故$(b_r-b_1)(b_r-b_2)\cdots(b_r-b_{r-1})\neq 0$,于是 $h(b_r)=0$. 由余数定理知

$$h(x)=(x-b_r)q(x).$$

所以

$$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r)q(x),$$

即 $g(x)\mid f(x)$. 由于 $f(x)$因式的次数不超过 $f(x)$的次数, 故 $r\leqslant n$. 证毕.

推论 5.5.1　若 $f(x)$与 $g(x)$是 $\mathbf{K}$ 上的次数不超过 n 的两个多项式,且存在 $\mathbf{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$,使

$$f(b_i)=g(b_i),\ i=1, 2, \cdots, n+1,$$

则 $f(x)=g(x)$.

证明　作 $h(x)=f(x)-g(x)$, 显然 $h(x)$次数不超过 n. 但有 $n+1$ 个不同的根,因此只可能 $h(x)=0$,即 $f(x)=g(x)$, 证毕.

推论 5.5.1 肯定地回答了我们一开始提出的问题. 即若两个多项式 $f(x)$, $g(x)$在数域 $\mathbf{K}$ 上的值相同, 则 $f(x)=g(x)$. 但是读者必须注意,这是因为任一数域都有无限个元素之故. 对一般的域(读者将在抽象代数教程中遇到)来说,上述结论是不一定成立的,即存在两个不同的多项式,它们在某一有限域上的值处处相同.

最后我们谈一下重根. 若$(x-b)^k\mid f(x)(b\in\mathbf{K})$,但$(x-b)^{k+1}$不能整除 $f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个 k 重根. 若 $k=1$,则称 b 为单根. 如果把 k 重根看成 $f(x)$有 k 个根,则我们有下述命题.

命题 5.5.1　若 $f(x)$是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 次多项式,则 $f(x)$在 $\mathbf{K}$ 中最多有 n 个根.

证明 将 $f(x)$ 作标准分解,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{K}$ 中根的个数等于该分解式中一次因式的个数,它不会超过 n,证毕.

习 题 5.5

1. 用余数定理证明:

(1) $x(x+1)(2x+1) \mid (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$;

(2) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \mid x^5 + x^{11} + x^{17} + x^{23} + x^{29}$.

2. 求证: a 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0,\ f^{(k)}(a) \neq 0.$$

3. 设 $\deg f(x) = n \geqslant 1$,若 $f'(x) \mid f(x)$, 则 $f(x)$ 有 n 重根.

4. 证明下列 Lagrange(拉格朗日)插值定理: 设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是 $\mathbf{K}$ 中 n 个不同的数, $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 是 $\mathbf{K}$ 中任意 n 个数,则必存在一个 $\mathbf{K}$ 上的多项式 $f(x)$, $\deg f(x) \leqslant n-1$, 且

$$f(a_i) = b_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

试求出这个多项式.

5. 证明: 数域 $\mathbf{K}$ 上的任意一个不可约多项式没有重根.

6. 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式,若当 $k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$ 时有 $f(k) = \dfrac{k}{k+1}$,求 $f(n+1)$.

§5.6 复系数多项式

现在我们来研究复数域上的多项式,首先我们要证明重要的"代数基本定理". 这个定理的内容读者可能在中学里就已经知道. 定理的证明要用到二元连续函数的性质,对这方面不熟悉的读者可以跳过这一证明,承认其结论就可以了. 这个定理在复变函数课程里还将有一个非常简洁的证明. 在下面的证明里,我们不再区别多项式和多项式函数.

定理 5.6.1(代数基本定理) *每个次数大于零的复数域上的多项式都至少有一个复数根.*

证明 设复数域上的 n 次多项式为

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \tag{5.6.1}$$

我们首先证明,必存在一个复数 z_0,使对一切复数 z,有

$$| f(z) | \geqslant | f(z_0) |.$$

令 $z = x + \mathrm{i}y$,其中 $x,\ y$ 是实变量. 展开 $f(x + \mathrm{i}y)$ 并分开实部和虚部, 则

$$f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y),$$

其中 $u(x,\ y)$及 $v(x,\ y)$为实系数二元多项式函数. 又

$$|f(z)|=\sqrt{u(x,\ y)^2+v(x,\ y)^2}$$

是一个二元连续函数,但

$$\begin{aligned}|f(z)|&=|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geqslant|a_nz^n|-|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&\geqslant\left|z^n\right|\left[|a_n|-\left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|}+\frac{|a_{n-2}|}{|z^2|}+\cdots+\frac{|a_0|}{|z^n|}\right)\right],\end{aligned}$$

因此当 $|z|\to\infty$ 时, $|f(z)|\to\infty$. 于是必存在一个实常数 R,当 $|z|>R$ 时, $|f(z)|$ 充分大,因此 $|f(z)|$ 的最小值必含于圆 $|z|\leqslant R$ 中. 但这是平面上的一个闭区域. 因此必存在 z_0,使 $|f(z_0)|$ 为最小.

接下去我们要证明 $f(z_0)=0$. 我们用反证法,即若 $f(z_0)\neq 0$,则必可找到 z_1,使 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$,这样就与 $|f(z_0)|$ 是最小值相矛盾.

将 $z=z_0+h$ 代入(5.6.1)式便可得到一个关于 h 的 n 次多项式:

$$f(z_0+h)=b_nh^n+b_{n-1}h^{n-1}+\cdots+b_1h+b_0. \tag{5.6.2}$$

当 $h=0$ 时, $f(z_0)=b_0$,由假定 $f(z_0)\neq 0$, 故

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=\frac{b_n}{f(z_0)}h^n+\frac{b_{n-1}}{f(z_0)}h^{n-1}+\cdots+\frac{b_1}{f(z_0)}h+1.$$

$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$中有些可能为零,但决不全为零. 设 b_k 是第一个不为零的复数,则

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\cdots+c_nh^n, \tag{5.6.3}$$

其中 $c_j=\dfrac{b_j}{f(z_0)}$. 令 $d=\sqrt[k]{-\dfrac{1}{c_k}}$, $h=ed$ 代入(5.6.3)式得

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1-e^k+e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}e+\cdots),$$

取充分小的正实数 e(至少小于 1),使

$$e(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)<\frac{1}{2},$$

于是

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leqslant |1-e^k| + |e^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1}+c_{k+2}d^{k+2}+\cdots)|$$

$$\leqslant 1-e^k+e^{k+1}(|c_{k+1}d^{k+1}|+|c_{k+2}d^{k+2}|+\cdots)$$

$$<1-e^k+\frac{1}{2}e^k$$

$$=1-\frac{1}{2}e^k<1.$$

将这样的 e 代入 $h=ed$，得

$$|f(z_0+ed)|<|f(z_0)|.$$

这就推出了矛盾，证毕.

推论 5.6.1 复数域上的一元 n 次多项式在复数域中恰有 n 个复根(包括重根).

推论 5.6.2 复数域上的不可约多项式都是一次多项式.

推论 5.6.3 复数域上的一元 n 次多项式必可分解为一次因式的乘积.

现设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是首一多项式 $f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n$ 的 n 个根，则我们有如下的 Vieta(韦达)定理.

定理 5.6.2(Vieta 定理) 若数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n$$

在 $\mathbf{K}$ 中有 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=-p_1,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x_ix_j=p_2,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n} x_ix_jx_k=-p_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^np_n.$$

证明 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，将这个式子的右边展开与 $f(x)$ 比较系数即得结论. 证毕.

由代数基本定理，一个复数域上的一元 n 次方程必有 n 个根. 如何求这 n 个

根，读者已在中学里学到过一元一次及一元二次方程的求根公式.对于一元三次、一元四次方程也有求根公式，当然要复杂得多.下面我们介绍一下如何来求解一元三次、一元四次方程.

由于将一个方程式两边乘以非零常数不影响该方程的根，因此不妨设有下列一元三次方程式:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0.$$

作变换 $x=y-\frac{1}{3}a$，代入上述方程化简后得到一个缺二次项的方程:

$$y^3+py+q=0.$$

显然，只要将上面方程的根加上 $\frac{1}{3}a$ 即可得原方程的根，因此我们把问题归结为求

$$f(x)=x^3+px+q=0 \tag{5.6.4}$$

这一类方程式的根.

若 $q=0$，则 $x_1=0$, $x_2=\sqrt{-p}$, $x_3=-\sqrt{-p}$ 便是方程的根.若 $p=0$，则 $x_1=\sqrt[3]{-q}$, $x_2=\sqrt[3]{-q}\omega$, $x_3=\sqrt[3]{-q}\omega^2$ 就是方程的根.其中

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

因此我们只需讨论 $p\neq 0$, $q\neq 0$ 的情形.

引进新的未知数 $x=u+v$，则

$$x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3uvx,$$

或

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0.$$

与(5.6.4)式比较得

$$\begin{cases}uv=-\frac{1}{3}p,\\ u^3+v^3=-q.\end{cases} \tag{5.6.5}$$

如可求出(5.6.5)中的 u,v 即可求出 x，但(5.6.5)式又可变为

$$\begin{cases}u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3,\\ u^3+v^3=-q.\end{cases} \tag{5.6.6}$$

由 Vieta 定理可知 u^3,v^3 是下列二次方程的两个根：

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0.$$

于是

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

令

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27},$$

注意 u,v 必须适合(5.6.5)式，故可得方程(5.6.4)的根为

$$\begin{cases} x_1=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}, \\ x_2=\omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}, \\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}. \end{cases} \tag{5.6.7}$$

上式通常称为 Cardan(卡丹)公式.

现在来考虑四次方程，我们采用与讨论三次方程同样的方法，令 $x=y-\frac{1}{4}a$，可消去方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三次项，把求解四次方程的问题归结为求解下面类型的方程：

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{5.6.8}$$

引进新的未知数 u，在(5.6.8)式中加 $ux^2+\frac{u^2}{4}$，再减 $ux^2+\frac{u^2}{4}$，得

$$x^4+ux^2+\frac{u^2}{4}-\left[(u-a)x^2-bx+\frac{u^2}{4}-c\right]=0. \tag{5.6.9}$$

我们注意到上式中 $x^4+ux^2+\frac{u^2}{4}=\left(x^2+\frac{u}{2}\right)^2$，如果中括号内是一个完全平方，则(5.6.9)式可化为两个二次方程来解. 而中括号是一个完全平方的条件是

$$b^2-4(u-a)\left(\frac{u^2}{4}-c\right)=0. \tag{5.6.10}$$

这是一个 u 的三次方程,称为方程(5.6.8)的预解式.假定 u 已解出,(5.6.9)式将变成

$$\left(x^2+\frac{u}{2}\right)^2-\left(\sqrt{u-a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{u-a}}\right)^2=0.$$

分解因式后得到两个二次方程:

$$x^2+\sqrt{u-a}\,x+\frac{u}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u-a}}=0, \tag{5.6.11}$$

$$x^2-\sqrt{u-a}\,x+\frac{u}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u-a}}=0. \tag{5.6.12}$$

这样便可求出方程(5.6.8)的所有根.

这里需要注意的是(5.6.10)式是一个三次方程,u 有 3 个根.如依次将这 3 个根代入(5.6.11)式、(5.6.12)式,岂非得到方程(5.6.8)的 12 个根!其实,我们只需取(5.6.10)式的一个根就可以了.因为任取其他根所得的结果是完全一样的.事实上,(5.6.11)式与(5.6.12)式之积就是方程式(5.6.8),因此方程(5.6.11)、方程(5.6.12)的根总是方程(5.6.8)的根,只不过在方程(5.6.11)、方程(5.6.12)中出现的情形不同而已.比如设 x_1, x_2, x_3, x_4 为方程(5.6.8)的 4 个根.可能 x_1, x_2 为方程(5.6.11)的根,这时 x_3, x_4 为方程(5.6.12)的根;又可能 x_3, x_4 为方程(5.6.11)的根,这时 x_1, x_2 为方程(5.6.12)的根,等等.四次方程的这种解法通常称为 Ferrari(费拉里)解法.

高于四次以上的方程一般是不能用根式来求解的,这一结论在 19 世纪 30 年代被法国数学家 Galois(伽罗瓦)证明.他的证明要涉及群、域等抽象代数知识.读者将在抽象代数的课程中学到它.需要注意的是,我们这里说五次及五次以上的方程一般不能用根式求解,但是并不是说不能解.另外,也并不是所有五次及五次以上的方程都不能用根式求解.什么时候可用根式解,什么时候不能用根式解,Galois 给出了一个充分必要条件.读者欲知其详,请参阅有关 Galois 理论的著作.

习　题　5.6

1. 设方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根成等差数列,求证:

$$2p^3-9pq+27r=0.$$

2. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的 n 个根为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n,且 $x_i\neq 0(i=1,$

2, …, n), 求以$\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, …, $\frac{1}{x_n}$为根的多项式.

3. 设多项式 x^3+3x^2+mx+n 的 3 个根成等差数列,而多项式 $x^3-(m-2)x^2+(n-3)x+8$ 的 3 个根成等比数列,求 m 与 n.

4. 证明: 方程 $x^3+px+q=0$ 有重根的充分必要条件是

$$4p^3+27q^2=0.$$

5. 若方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根都是实数,试证: $p^2\geqslant 3q$.

提示: 利用 Vieta 定理计算 $\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2]$.

6. 设 $f(x)$是复数域上的多项式,若对任意的实数 c, $f(c)$总是实数,求证: $f(x)$是实系数多项式.

§5.7　实系数多项式和有理系数多项式

我们已经知道,复数域上的不可约多项式都是一次的. 实数域上的不可约多项式应该是什么样的呢?

定理 5.7.1　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是实系数多项式,若复数 $a+bi(b\neq 0)$ 是其根,则 $a-bi$ 也是它的根.

证明　令 $z=a+bi$,其共轭复数为$\bar{z}=a-bi$, 则

$$\begin{aligned}f(\bar{z})&=a_n\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}+a_0\\&=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}=0.\end{aligned}$$

由此即得结论. 证毕.

定理 5.7.1 表明,多项式 $f(x)$虚部不为零的复根必成对出现.

推论 5.7.1　实数域上的不可约多项式或为一次或为二次多项式:

$$ax^2+bx+c, \text{且 } b^2-4ac<0.$$

证明　一次多项式显然为不可约. 当 $b^2-4ac<0$ 时, ax^2+bx+c 没有实根,故不可约. 反过来,任一高于二次的实系数多项式 $f(x)$ 如有实根,则 $f(x)$ 可约. 如有一复根 $a+bi(b\neq 0)$,则 $a-bi$ 也是它的根,故

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

是 $f(x)$ 的因式, $f(x)$可约. 证毕.

推论 5.7.2　实数域上的多项式 $f(x)$必可分解为有限个一次因式及不可

约二次因式的乘积.

接下去讨论有理系数多项式.我们首先证明一个整系数多项式有有理根的必要条件,然后研究有理系数多项式的因式分解.

定理 5.7.2 设有整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{5.7.1}$$

则有理数$\frac{q}{p}$是$f(x)$的根的必要条件是 $p|a_n$, $q|a_0$,其中 p,q 是互素的整数.

证明 将$\frac{q}{p}$代入(5.7.1)式得

$$a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\frac{q}{p}+a_0=0,$$

将上式两边乘以 p^n 得:

$$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}p+\cdots+a_1qp^{n-1}+a_0p^n=0.$$

显然必须有 $p|a_n$, $q|a_0$. 证毕.

定理 5.7.2 给出了整系数多项式有有理根的必要条件.由于任一有理系数方程均可化为同解的整系数方程(只需用系数的公分母乘以方程的两边即可),因此,定理 5.7.2 也可用来判别一个有理系数多项式是否有有理根.

例 5.7.1 证明下列多项式没有有理根:

$$f(x)=x^5-12x^3+36x+12.$$

证明 $f(x)$如有有理根,只可能为±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.将上述这些数代入 $f(x)$均不为零,因此 $f(x)$无有理根.证毕.

现在来讨论有理系数多项式的因式分解.首先我们要探讨一下有理系数多项式的可约性与整系数多项式可约性的关系.

定义 5.7.1 设多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是整系数多项式,若 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0 的最大公约数等于 1,则称 $f(x)$为本原多项式.

引理 5.7.1(Gauss 引理) 两个本原多项式之积仍是本原多项式.

证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

是两个本原多项式. 若

$$f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

不是本原多项式,$c_0, c_1, \cdots, c_{m+n}$必有一个公共素因子$p$. 因为$f(x)$是本原多项式,$p$不能整除$f(x)$的所有系数,设$p \mid a_0, p \mid a_1, \cdots, p \mid a_{i-1}$,但$p$不能整除$a_i$. 同理,设$p \mid b_0, p \mid b_1, \cdots, p \mid b_{j-1}$,但$p$不能整除$b_j$. 注意到

$$c_{i+j} = \cdots + a_{i-2}b_{j+2} + a_{i-1}b_{j+1} + a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots,$$

p可整除c_{i+j},p也能整除右式除a_ib_j以外的所有项. 但p不能整除a_i和b_j,故p不能整除a_ib_j,引出矛盾. 证毕.

定理 5.7.3 *若整系数多项式$f(x)$在有理数域上可约,则它必可分解为两个次数较低的整系数多项式之积.*

证明 假定整系数多项式$f(x)$可以分解为两个次数较低的有理系数多项式之积:

$$f(x) = g(x)h(x),$$

$g(x)$的各项系数为有理数,必有一个公分母记为c,于是$g(x) = \frac{1}{c}(cg(x))$,其中$cg(x)$为整系数多项式. 若把$cg(x)$中所有系数的最大公因数$d$提出来,则

$$g(x) = \frac{d}{c}\left(\frac{c}{d}g(x)\right),$$

$\frac{c}{d}g(x)$是一个本原多项式. 这表明$g(x) = ag_1(x)$,a为有理数,$g_1(x)$为本原多项式. 同样,$h(x) = bh_1(x)$,其中b为有理数,$h_1(x)$为本原多项式. 于是我们得到

$$f(x) = g(x)h(x) = abg_1(x)h_1(x).$$

由 Gauss 引理可知,$g_1(x)h_1(x)$是本原多项式. 若ab不是一个整数,则$abg_1(x)h_1(x)$将不是整系数多项式,这与$f(x)$是整系数多项式相矛盾. 因此ab必须是整数,于是$f(x)$可以分解为两个次数较小的整系数多项式之积. 证毕.

我们通常称一个整系数多项式$f(x)$在整数环上可约,若它可以分解为两个次数较低的整系数多项式之积. 上面的定理告诉我们,整系数多项式$f(x)$若在整数环上不可约,则在有理数域上也不可约. 如何判断一个整系数多项式不可约,我们有如下的 Eisenstein(爱森斯坦因)判别法.

定理 5.7.4(Eisenstein 判别法) *设多项式*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式，$a_n \neq 0$，$n \geqslant 1$，p是一个素数. 若 $p \mid a_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$，但 p 不能整除 a_n 且 p^2 不能整除 a_0，则 $f(x)$在有理数域上不可约.

证明 我们只需证明 $f(x)$在整数环上不可约即可. 设 $f(x)$可分解为两个次数较低的整系数多项式之积：

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0)(c_t x^t + c_{t-1}x^{t-1} + \cdots + c_0),$$

其中 $m + t = n$. 显然 $a_0 = b_0 c_0$，$a_n = b_m c_t$. 由假设 $p \mid a_0$，故 $p \mid b_0$ 或 $p \mid c_0$. 又 p^2 不能整除 a_0，故 p 不能同时整除 b_0 及 c_0. 不妨设 $p \mid b_0$ 但 p 不能整除 c_0. 又由假设，p不能整除$a_n = b_m c_t$，故 p 既不能整除 b_m 又不能整除 c_t. 因此不妨设 $p \mid b_0$，$p \mid b_1$，$\cdots$，$p \mid b_{j-1}$ 但 p 不能整除 b_j. 而

$$a_j = b_j c_0 + b_{j-1}c_1 + \cdots + b_0 c_j,\ j \neq 0, n.$$

根据假定，$p|a_j$，又 p 可整除上式右端除 $b_j c_0$ 外的其余项，而不能整除 $b_j c_0$ 这一项，引出矛盾. 证毕.

例 5.7.2 对任意的 $n \geqslant 1$，$x^n - 2$ 在有理数域上不可约.

证明 由于 2 可整除 $x^n - 2$ 中除首项以外的一切系数，又 $2^2 = 4$ 不能整除 -2. 由 Eisenstein 判别法知 $x^n - 2$ 不可约. 证毕.

这个例子表明，存在任意次的有理数域上不可约多项式.

例 5.7.3 若 p 为素数，证明：

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

在有理数域上不可约.

证明 作变数代换

$$x = y + 1,$$

得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{(y+1)^p - 1}{y} \\ &= y^{p-1} + C_p^1 y^{p-2} + C_p^2 y^{p-3} + \cdots + C_p^{p-1}. \end{aligned}$$

注意 $p \mid C_p^i (1 \leqslant i \leqslant p-1)$，$p$不能整除首项系数 1，$p^2$ 不能整除 $C_p^{p-1} = p$，因此上述关于 y 的多项式在有理数域上不可约. 显然 $f(x)$在有理数域上也不可约. 证毕.

例 5.7.4 证明：

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

当 n 是素数时在有理数域上不可约.

证明 将 $n!$ 乘以 $f(x)$,只需证明当 $n=p$ 为素数时,在整数环上不可约即可.而由 Esenstein 判别法即知 $p!\ f(x)$不可约.证毕.

习 题 5.7

1. 证明:实系数奇次方程必有实数根.

2. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是实系数多项式,求证:

(1) 若$(-1)^ia_i$ 全是正数,则 $f(x)$没有负实根;

(2) 若$(-1)^ia_i$ 全是负数,则 $f(x)$也没有负实根;

(3) 当 a_i 全正或全负时,$f(x)$没有正实根.

3. 求证:方程 $x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1=0$ 无实数根.

4. 求下列多项式的有理根:

(1) $x^3-6x^2+15x-14$;

(2) $4x^4-7x^2-5x-1$;

(3) $6x^4-25x^3+20x^2-25x+14$;

(4) $x^5-x^4-\frac{5}{2}x^3+2x^2-\frac{1}{2}x-3$.

5. 证明下列多项式在有理数域上不可约:

(1) x^p+px+p (p 是素数);

(2) x^6+x^3+1;

(3) $x^4-18x^3+12x^2-6x+2$.

6. 若 $p_1,\cdots,p_m$ 是互不相同的 m 个素数,求证:对任意的 $m>1$,多项式

$$f(x)=x^m-p_1\cdots p_m$$

在有理数域上不可约.

7. 证明:x^8+1 在有理数域上不可约.

8. 写出一个次数最小的有理系数首一多项式,使它有下列根:

$$1+\sqrt{3},\ 3+\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

9. $f(x)$是次数大于 0 的首一整系数多项式,若 $f(0)$,$f(1)$都是奇数,求证:$f(x)$没有有理根.

§5.8 多元多项式

设 $\mathbf{K}$ 是数域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n 个未定元,它们彼此无关.称 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$

为一个单项式,其中 a 是这个单项式的系数, k_j 为非负整数. 如果 $a\neq 0$,则称该单项式的次数为 $k=k_1+k_2+\cdots+k_n$. 如果两个单项式除相差一个系数外,其余都相同,即每个 x_i 的次数都相同,则称这两个单项式为同类项. 同类项相加,可将它们的系数相加. 比如

$$2x_1^2x_2x_3^4+3x_1^2x_2x_3^4=5x_1^2x_2x_3^4.$$

不是同类项相加时不能把系数相加. 有限个单项式的和称为一个 n 元多项式,它的一般形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}.$$

下面我们总假定在一个文字多项式中的各单项式彼此不同,即同类项已合并.

对一个 n 元多项式,它的系数非零的单项式的最大次数称为这个多项式的次数. 比如下列三元多项式的次数为 5:

$$x_1^2x_2x_3^2+2x_1x_2x_3-3x_1x_2+1.$$

两个 n 元多项式称为相等当且仅当它们同类项的系数全都相等.

两个 n 元多项式相加,即将它们同类项的系数相加. 例如,若

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+2x_1x_3-3x_1x_2x_3,$$

$$g(x_1,x_2,x_3)=-x_2^2-2x_1x_3+5x_1x_2x_3,$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)+g(x_1,x_2,x_3)=x_1^3-x_2^2+2x_1x_2x_3.$$

两个单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$, $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 相乘,其积为

$$ab\,x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}.$$

两个多项式相乘按分配律可化为各单项式乘积之和. 如

$$(x_1^3+x_1x_2x_3-2x_3)(x_1^2-x_1x_2-x_3^2)$$

$$=x_1^5-x_1^4x_2-x_1^3x_3^2+x_1^3x_2x_3-x_1^2x_2^2x_3-2x_1^2x_3+2x_1x_2x_3+2x_3^3.$$

相乘后如出现同类项应予以合并. 多元多项式不像一元多项式那样可按次数的大小降幂或升幂排列. 比如

$$x_1^2x_2+x_1x_2x_3,$$

其中两项都是 3 次式. 为了给它们排次序,我们常采用“字典排列法”: n 个未定

元按自然足标为序排列,即为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;若有两个非零单项式:

$$ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},\ bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n},$$

若 $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_{k-1} = j_{k-1}$,但 $i_k > j_k$,则规定 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 先于 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$. 按这样排列,任一多项式都只有唯一的方法把它的各单项式排序. 这时要注意第一项即首项未必是最高次项,末项也未必是次数最低的项. 例如多项式:

$$x_1^2x_2 + x_1^3x_3 + 3x_1x_2x_3 - 4x_2x_3^5,$$

按字典排列应为

$$x_1^3x_3 + x_1^2x_2 + 3x_1x_2x_3 - 4x_2x_3^5.$$

引理 5.8.1 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$及 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都是 **K** 上的 n 元多项式且非零,则按字典排列法排列后乘积的首项等于 f 的首项与 g 的首项之积.

证明 设 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 和 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$分别是 f 和 g 的首项 (按字典排列法),它们的乘积为 $abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$. 其他任意两个单项式 $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 和 $dx_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$ 之积为$cdx_1^{k_1+r_1}x_2^{k_2+r_2}\cdots x_n^{k_n+r_n}$. 设 $i_1 = k_1, \cdots, i_{t-1} = k_{t-1}, i_t > k_t; j_1 = r_1, \cdots, j_{s-1} = r_{s-1}, j_s > r_s$. 又 $t \leqslant s$,显然

$$i_1 + j_1 = k_1 + r_1, \cdots, i_{t-1} + j_{t-1} = k_{t-1} + r_{t-1}, i_t + j_t > k_t + r_t.$$

因此$abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$ 先于$cdx_1^{k_1+r_1}x_2^{k_2+r_2}\cdots x_n^{k_n+r_n}$.

同理可证明: $abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}$ 先于 $acx_1^{i_1+k_1}x^{i_2}+k_{22}\cdots x_n^{i_n+k_n}$ 和 $bcx_1^{j_1+k_1}x_2^{j_2+k_2}\cdots x_n^{j_n+k_n}$. 因此它确是 fg 的首项,证毕.

命题 5.8.1 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, 则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0.$$

证明 f 和 g 的首项不为零, 故 $fg \neq 0$. 证毕.

推论 5.8.1 若 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, 且

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \cdots, x_n)h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= g(x_1, x_2, \cdots, x_n)h(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

多元多项式除了“字典排列法”外，还有“齐次排列法”．我们先介绍齐次多项式的概念．若一个多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的每个单项式都是 k 次式，则称之为 k 次齐次多项式或 k 次型．如 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ 是三元一次型．$x_1^2+x_1x_2-3x_2^2$ 为二元二次型．$x_1^4-4x_2x_3x_4^2+5x_1x_2x_3x_4$ 为四元四次型．

两个次数相同的齐次多项式之和若不为零，则必仍是同次齐次多项式．任意两个齐次多项式之积仍为齐次多项式．

任一 n 元多项式均可表示为若干个齐次多项式之和，这只需要将各次数相等的项放在一起即可．如

$$\begin{aligned}&2x_1^3-3x_1x_2+4x_4^3-x_1x_2x_3+x_4^2\\&=(2x_1^3+4x_4^3-x_1x_2x_3)+(x_4^2-3x_1x_2),\end{aligned}$$

其中 $2x_1^3+4x_4^3-x_1x_2x_3$ 为三次型，$x_4^2-3x_1x_2$ 为二次型．

多元多项式与多元多项式函数之间的关系与一元的情形类似．

引理 5.8.2　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 元非零多项式，则必存在 $\mathbf{K}$ 中元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)\neq 0$．

证明　对未定元个数 n 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，多项式 $f(x)$ 只有有限个零点，故总有 $a\in\mathbf{K}$ 使 $f(a)\neq 0$．现设对有 $n-1$ 个未定元的多项式结论成立．将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 写成未定元 x_n 的多项式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=b_0+b_1x_n+\cdots+b_mx_n^m,$$

其中 $b_i=b_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 是 $n-1$ 元多项式．因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\neq 0$，故可设 $b_m\neq 0$．由归纳假设，存在 $a_1, \cdots, a_{n-1}\in\mathbf{K}$，使

$$b_m(a_1, \cdots, a_{n-1})\neq 0.$$

因而

$$\begin{aligned}f(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n)&=b_0(a_1, \cdots, a_{n-1})+b_1(a_1, \cdots, a_{n-1})x_n\\&\quad+\cdots+b_m(a_1, \cdots, a_{n-1})x_n^m\end{aligned}$$

是一个非零的以 x_n 为未定元的一元多项式，故存在 $a_n\in\mathbf{K}$，使

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)\neq 0.$$

证毕．

命题 5.8.2　数域 $\mathbf{K}$ 上的两个 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 相等的充分必要条件是对一切 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{K}$，均有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

证明 只需证明充分性.作

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

若 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$,则必有 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$,使 $h(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$. 与假设矛盾. 证毕.

习 题 5.8

1. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的两个多项式且 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是非零多项式.如果对一切使 $g(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$ 的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{K}$,均有 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$,求证: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$.

2. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式且 fg 是 n 元齐次多项式,求证: f 与 g 都是齐次多项式.

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元非零多项式,若存在 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1,$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c$,其中 c 是 $\mathbf{K}$ 中的非零元.

§5.9 对称多项式

定义 5.9.1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 元多项式,若对任意的 $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant n)$,均有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n),$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 元对称多项式.

例如,三元多项式 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,将 x_1 与 x_2 对换有

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_2^2 + x_1^2 + x_3^2.$$

又将 x_1 与 x_3 对换及将 x_2 与 x_3 对换都得到同一个多项式.因此 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 是对称多项式.多项式 $x_1^2 - x_1x_2$ 与 $x_2^2 - x_1x_2$ 不相等,故 $x_1^2 - x_1x_2$ 不是对称多项式.

设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是数组 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个全排列.若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个对称多项式,则不难看出:

$$f(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

我们称 $x_1 \to x_{k_1}, x_2 \to x_{k_2}, \cdots, x_n \to x_{k_n}$ 是未定元的一个置换. 因此对称多项

式在未定元的任一置换下不变.

容易看出对称多项式之和仍是对称多项式,对称多项式之积也是对称多项式.因此对称多项式的多项式还是对称多项式.这句话的意思是说:若 f_1, f_2, …, f_m 是 m 个 n 元对称多项式,$g(y_1, y_2, \cdots, y_m)$是 m 元多项式,则将 f_1, f_2, …, f_m 代替 y_1, y_2, …, y_m 后得到的多项式

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

仍是一个 n 元对称多项式.

在对称多项式中,有一类基本的多项式,称为初等对称多项式.它们是这样定义的:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

这 n 个多项式称为 n 元初等对称多项式.初等对称多项式之所以重要,是因为我们有下述定理.

定理 5.9.1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的对称多项式,则必存在 $\mathbf{K}$ 上唯一的一个多项式 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

证明 存在性:设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$按字典排列法的首项为

$$ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},\ a \neq 0,$$

则必有 $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots \geqslant i_n$.事实上 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式,若 $i_k < i_{k+1}$,则将 x_k 与 x_{k+1} 对换得到 $ax_1^{i_1}\cdots x_k^{i_{k+1}}x_{k+1}^{i_k}\cdots x_n^{i_n}$,这一项也是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的项,但它应在 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 之前,此与首项的假定相矛盾.

作多项式

$$g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\cdots\sigma_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}\sigma_n^{i_n}.$$

显然 g_1 是 x_1, x_2, …, x_n的对称多项式,且 g_1 的首项为

$$ax_1^{i_1-i_2}(x_1x_2)^{i_2-i_3}\cdots(x_1\cdots x_n)^{i_n} = ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}.$$

因此 g_1 与 f 的首项相同，于是 $f_1=f-g_1$ 是一个首项后于 f 的对称多项式. 对 f_1 重复上述做法，不断做下去，便得到一列对称多项式：

$$f_0=f,\ f_1=f_0-g_1,\ f_2=f_1-g_2,\cdots,$$

每个 f_i 的首项都后于 f_{i-1} 的首项. 设 $bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 是某个 $f_i(i>1)$ 的首项，则因它后于 f 的首项，故有

$$i_1\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_n\geqslant 0.$$

这样的 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只有有限个，故多项式 f_i 不能无限地构造下去，即存在某个正整数 s，$f_s=0$. 于是

$$f=g_1+f_1=g_1+g_2+f_2=\cdots=g_1+g_2+\cdots+g_s.$$

由于每个 g_i 都可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式，因此 f 也可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式.

唯一性：设 $g(y_1,\cdots,y_n)$ 及 $h(y_1,\cdots,y_n)$ 都是 $\mathbf{K}$ 上的 n 元多项式，且

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=h(\sigma_1,\cdots,\sigma_n).$$

令

$$\varphi(y_1,\cdots,y_n)=g(y_1,\cdots,y_n)-h(y_1,\cdots,y_n).$$

由假定，有

$$\varphi(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=0.$$

我们要证明多项式

$$\varphi(y_1,\cdots,y_n)=0.$$

假定 $\varphi(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$，不妨设

$$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)=cy_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n}+dy_1^{j_1}y_2^{j_2}\cdots y_n^{j_n}+\cdots,$$

其中 $c,d,\cdots$ 均不为零且假定各单项式彼此不是同类项. 在 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 中，

$$\begin{aligned}c\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}&=cx_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)_n^{k}+\cdots\\&=cx_1^{k_1+k_2+\cdots+k_n}x_2^{k_2+k_3+\cdots+k_n}\cdots x_n^{k_n}+\cdots,\\d\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\cdots\sigma_n^{j_n}&=dx_1^{j_1}(x_1x_2)^{j_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)_n^{j}+\cdots\\&=dx_1^{j_1+j_2+\cdots+j_n}x_2^{j_2+j_3+\cdots+j_n}\cdots x_n^{j_n}+\cdots.\end{aligned}$$

因此 $c\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}$ 与 $d\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\cdots\sigma_n^{j_n}$ 等化成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式后其首项都不相同. 因此

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \neq 0,$$

引出矛盾. 证毕.

上述定理通常被称为对称多项式基本定理. 这个定理的存在性证明是构造性的,可用来求对称多项式的初等对称多项式表示.

例 5.9.1　将对称多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

表示为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的多项式.

解　这时首项为 $x_1^2x_2$,作

$$\begin{aligned}\sigma_1^{2-1}\sigma_2^1 = \sigma_1\sigma_2 &= (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\ &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

因此

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

这种做法当多项式次数较高时计算可能相当繁. 下面我们通过举例介绍"待定系数法".

例 5.9.2　试将对称多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$$

表示为初等对称多项式的多项式.

解　注意到 f 是一个齐次多项式,次数等于 6. 又 f 的首项是 $x_1^4x_2^2$,它的指数组为(4, 2, 0). 从定理 5.9.1 的证明中可看出 f_i 首项的指数组只可能是(4, 1, 1), (3, 3, 0), (3, 2, 1), (2, 2, 2),相对应的 f_i 的单项式为

$$\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = \sigma_1^3\sigma_3, \sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0 = \sigma_2^3, \sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2 = \sigma_3^2,$$

因此可设

$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2.$$

取 x_1, x_2, x_3 的一些特殊值便得到关于 a, b, c, d 的线性方程组. 不难解得

$$a = -2, b = -2, c = 4, d = -1.$$

因此

$$f=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2.$$

上述例子中 f 是一个齐次多项式. 若 f 不是齐次多项式,则可把 f 分解为齐次多项式之和. 显然每个齐次多项式仍是对称多项式,可用初等对称多项式来表示. 这样便可得到 f 的表示.

下面我们证明著名的 Newton(牛顿)公式. 令

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k.$$

引理 5.9.1 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,$$

则

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x),$$

其中 $g(x)$ 作为 x 的多项式次数小于 n.

证明 容易看出

$$f'(x)=\sum_{i=1}^n\frac{f(x)}{(x-x_i)}.$$

因此

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}}{(x-x_i)}f(x)$$
$$=\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}+x_i^{k+1}}{(x-x_i)}f(x)$$
$$=f(x)\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{(x-x_i)}+g(x),$$

其中

$$g(x)=\sum_{n=1}^n\frac{x_i^{k+1}f(x)}{(x-x_i)}$$

作为 x 的多项式其次数小于 n. 又

$$\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{(x-x_i)}=\sum_{i=1}^n(x^k+x_ix^{k-1}+x_i^2x^{k-2}+\cdots+x_i{}^k)$$

$$=nx^k+(x_1+\cdots+x_n)x^{k-1}+(x_1^2+\cdots+x_n^2)x^{k-2}$$
$$+\cdots+(x_1^k+\cdots+x_n^k)$$
$$=nx^k+s_1x^{k-1}+s_2x^{k-2}+\cdots+s_k,$$

于是

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x).$$

证毕.

命题 5.9.1(Newton 公式) 记号同上，若 $k\leqslant n$，则

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0;$$

若 $k>n$，则

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^n s_{k-n}\sigma_n=0.$$

证明 对 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$ 求导并乘以 x^{k+1} 得到：

$$x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+(n-2)\sigma_2x^{n+k-2}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_nx^{k+1}.$$

由引理，有

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x)$$
$$=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}$$
$$+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n)+g(x).$$

比较 x^n 的系数即知，当 $k\leqslant n$ 时，有

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0;$$

若 $k>n$，则

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^n s_{k-n}\sigma_n=0.$$

证毕.

习 题 5.9

1. 试将下列对称多项式用初等对称多项式表示：

(1) $(x_1+x_2+x_3)^3-(x_2+x_3-x_1)^3-(x_1+x_3-x_2)^3-(x_1+x_2-x_3)^3$;

(2) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$.

2. 求证：$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ 的某一根平方等于其他两根平方和的充分必要条件是

$$p^4(p^2-2q)=2(p^3-2pq+2r)^2.$$

3. 用 Newton 公式将 s_4 用初等对称多项式表示出来.

4. 已知 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根为 α_1, α_2, α_3，求一个三次方程，其根为 α_1^3, α_2^3, α_3^3.

5. 解下列方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4, \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=4, \\ x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=4. \end{cases}$$

6. 设 $1\leqslant k\leqslant n$，求证：

(1) $\sigma_k=\dfrac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$;

(2) $s_k=\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_1 \end{vmatrix}$.

§5.10 结式和判别式

设 $f(x)$，$g(x)$是数域 $\mathbf{K}$ 上的一元多项式. 现在我们来讨论它们何时有公共根(简称公根). 公根问题实际上等价于公因子问题，但是现在我们要从另外一个角度来探讨这个问题.

引理 5.10.1 设 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式，则 $d(x)\neq 1$ 的充分必要条件是存在 $\mathbf{K}$ 上的非零多项式 $u(x)$，$v(x)$，使

$$f(x)u(x)=g(x)v(x), \tag{5.10.1}$$

且 $\deg u(x)<\deg g(x)$，$\deg v(x)<\deg f(x)$.

证明 若 $d(x)\neq 1$，令 $f(x)=d(x)v(x)$，$g(x)=d(x)u(x)$，则

$$f(x)u(x)=d(x)v(x)u(x)=g(x)v(x),$$

且 $\deg u(x)<\deg g(x)$, $\deg v(x)<\deg f(x)$.

反过来,若 $d(x)=1$,则由(5.10.1)式知 $f(x)\mid g(x)v(x)$. 但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,因此 $f(x)\mid v(x)$,与 $\deg f(x)>\deg v(x)$ 矛盾. 证毕.

现设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

$$u(x)=x_0x^{m-1}+x_1x^{m-2}+\cdots+x_{m-1},$$

$$v(x)=y_0x^{n-1}+y_1x^{n-2}+\cdots+y_{n-1},$$

其中 $x_0,\cdots,x_{m-1};y_0,\cdots,y_{n-1}$ 为待定未知数. 将上面 4 个式子代入(5.10.1)式,比较系数得

$$\begin{cases}a_0x_0=b_0y_0,\\ a_1x_0+a_0x_1=b_1y_0+b_0y_1,\\ a_2x_0+a_1x_1+a_0x_2=b_2y_0+b_1y_1+b_0y_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_nx_{m-3}+a_{n-1}x_{m-2}+a_{n-2}x_{m-1}=b_my_{n-3}+b_{m-1}y_{n-2}+b_{m-2}y_{n-1},\\ a_nx_{m-2}+a_{n-1}x_{m-1}=b_my_{n-2}+b_{m-1}y_{n-1},\\ a_nx_{m-1}=b_my_{n-1}.\end{cases}$$

我们把上述 $m+n$ 个等式看成是 $m+n$ 个未知数 $x_0,x_1,\cdots,x_{m-1};y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组. 不难算出这个线性方程组系数矩阵的转置为

$$\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&\cdots&a_n&0&\cdots&0\\ 0&a_0&a_1&\cdots&\cdots&a_{n-1}&a_n&\cdots&0\\ 0&0&a_0&\cdots&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&\cdots&\cdots&a_0&\cdots&\cdots&\cdots&a_n\\ -b_0&-b_1&-b_2&\cdots&\cdots&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&-b_0&-b_1&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&\cdots&-b_0&-b_1&\cdots&\cdots&-b_m\end{pmatrix}.$$

若上述 $m+n$ 方阵的行列式不等于零,则 x_i, y_j 都只能全为零,这时 $f(x)$,$g(x)$ 互素,即没有公根. 反之,若上述方阵的行列式等于零,则 $f(x)$,$g(x)$有公因子,即有公根.

定义 5.10.1 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m.$$

定义下列 $m+n$ 阶行列式:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

为 f 与 g 的结式或称 Sylvester 行列式.

显然我们可以有下列判断两个多项式存在公根的定理.

定理 5.10.1 多项式 $f(x)$与 $g(x)$有公根(在复数域中)的充分必要条件是它们的结式 $R(f,g)=0$.

推论 5.10.1 多项式 $f(x)$与 $g(x)$互素的充分必要条件是 $R(f,g)\neq 0$.

多项式的结式也可以用它们的根来表示.

定理 5.10.2 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m.$$

$f(x)$的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,$g(x)$的根为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$,则 $f(x)$与 $g(x)$的结式为

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(x_j-y_i). \tag{5.10.2}$$

证明 令 $f(x)=a_0f_1(x)$,$g(x)=b_0g_1(x)$,则 $f_1(x)$与 $f(x)$有相同的根,

同样,$g_1(x)$ 与 $g(x)$ 的根相同. 由结式的定义知道

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n R(f_1, g_1).$$

由此可知我们只需对首一多项式 $f(x)$ 及 $g(x)$ 证明即可. 由 Vieta 定理知, $-a_1, a_2, \cdots, (-1)^n a_n$ 是一个关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式. $-b_1, b_2, \cdots, (-1)^m b_m$ 是一个关于 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的初等对称多项式. 因此 $R(f, g)$ 是一个关于 $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m$ 的多项式且关于 $x_1, \cdots, x_n$ 是对称多项式, 关于 $y_1, \cdots, y_m$ 也是对称多项式. 又因为

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n);$$

$$g(x) = (x - y_1)(x - y_2)\cdots(x - y_m).$$

当 $x_1 = y_1$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根,即 $R(f, g) = 0$. 若把 $R(f, g)$ 看成 x_1 的多项式,则 $x_1 - y_1$ 是 $R(f, g)$ 的因式. 又因为把 $R(f, g)$ 看成是 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式时它是对称多项式,因此 $x_j - y_1$ 也是 $R(f, g)$ 的因式$(j = 1, \cdots, n)$. 同理,$x_j - y_i (j = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ 都是 $R(f, g)$ 的因式. 但这些因式两两互素,因此

$$R(f, g) = h(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(x_j - y_i). \qquad (5.10.3)$$

现只需证明 $h(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) = 1$ 即可.

先把(5.10.3)式两边看成是未定元 x_1 的多项式. 显然 $\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{m}(x_j - y_i)$ 是一个 m 次(关于 x_1 的)多项式,又由 $R(f, g)$的定义不难看出它也是一个(关于 x_1 的)m 次多项式. 因此 h 是一个关于 x_1 的零次多项式. 同理可证 $x_2, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m$ 在 h 中均为零次. 换言之,h 是一个常数多项式. 于是

$$R(f, g) = c\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(x_j - y_i). \qquad (5.10.4)$$

常数 c 与 x_j, y_i 无关,故与 f 和 g 的具体形式无关. 取 $g(x) = x^m$,即 $g(x)$ 的根 $y_i = 0 (i = 1, \cdots, m)$, 则(5.10.4)式的右边为 $cx_1^m x_2^m \cdots x_n^m$, 比较结式定义中行列式的值可得 $c = 1$. 证毕.

利用结式,可定义一个多项式的判别式如下.

定义 5.10.2 多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

的判别式定义为

$$\Delta(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_0^{-1}R(f,f').$$

定理 5.10.3 多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的判别式等于

$$\Delta(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_j-x_i)^2, \tag{5.10.5}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $f(x)$ 的根.

证明 由(5.10.2)式知道

$$R(f,g)=a_0^m\prod_{j=1}^{n}g(x_j).$$

现令 $g(x)=f'(x)$, $\deg f'(x)=n-1$, 因此

$$R(f,f')=a_0^{n-1}\prod_{j=1}^{n}f'(x_j).$$

又

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

$$f'(x)=a_0\left[\sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)\right],$$

$$f'(x_j)=a_0(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n),$$

因此

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_0^{2n-1}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_j-x_i)^2.$$

由此即得(5.10.5)式. 证毕.

例如, ax^2+bx+c 的判别式为 $a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$. 这是我们早已熟悉的判别式.

推论 5.10.2 多项式 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是它的判别式 $\Delta(f)=0$.

作为结式的应用,我们来求解二元高次方程组. 设

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0\end{cases} \tag{5.10.6}$$

是两个二元多项式组成的方程组. 我们的目的是把求解这组方程先归结为求解一个一元高次方程. 设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 为

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y), \tag{5.10.7}$$

$$g(x, y) = b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \cdots + b_m(y), \tag{5.10.8}$$

其中 $a_i(y)$, $b_j(y)$ 都是 y 的多项式且 $a_0(y) \neq 0$, $b_0(y) \neq 0$. 令

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_{n-1}(y) & a_n(y) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0(y) & \cdots & \cdots & a_{n-2}(y) & a_{n-1}(y) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0(y) & \cdots & \cdots & \cdots & a_n(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & \cdots & b_m(y) \end{vmatrix},$$

这是一个关于 y 的多项式. 如果 (α, β) 是方程组(5.10.6)的解, 则 α 是 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 的公根, 因此 β 是 $R(f, g)$ 的根. 这样, 我们可先求出 $R_x(f, g) = 0$ 的所有根 β_i, 再代入(5.10.7)式、(5.10.8)式. 这时, 或 $a_0(\beta_i) = b_0(\beta_i) = 0$, 或存在 α_i, 使 (α_i, β_i) 是方程组(5.10.6)的解. 由此即可求出方程组(5.10.6)的一切解. 对于多于两个未知数的高次方程组, 我们也可采用类似方法逐个"消去"未知数, 从而求出方程组的解.

习　题　5.10

1. 计算下列多项式的结式:

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$, $g(x) = x^2 - 2x - 1$;

(2) $f(x) = x^5 + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

2. 计算 $x^3 + px + q$ 的判别式.

3. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$. 求证:

(1) $R(f, g) = (-1)^{mn}R(g, f)$;

(2) 若 a, b 为常数, 则 $R(af, bg) = a^mb^nR(f, g)$.

4. 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 求证:

(1) 若 $\Delta f < 0$, $f(x)$ 无重根且有奇数对虚根;

(2) 若 $\Delta f > 0$, $f(x)$无重根且有偶数对虚根.

5. 求证: $R(f, g_1g_2) = R(f, g_1)R(f, g_2)$.

6. 设 $f(x)$为首一多项式,已知 $\Delta(f(x))$,试求 $\Delta(f(x^2))$.

7. 求曲线:

$$\begin{cases} x = t^3 + 2t - 3, \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$$

的直角坐标方程.

复 习 题 五

1. 设 $f(x)$,$g(x)$是次数不小于 1 的互素多项式,求证: 必唯一地存在两个多项式 $u(x)$, $v(x)$,使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且 $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$.

2. 求证: $(f(x),g(x)) = 1$ 的充分必要条件是对任意的 m,n, $(f^m(x),g^n(x)) = 1$.

3. 非常数多项式 $f(x)$是某个不可约多项式的幂的充分必 要条件是: 对任意的多项式 $g(x)$,或者 $f(x)$和 $g(x)$互素,或者 $f(x)$可以整除 $g(x)$的某个幂.

4. 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的全体多项式组成的线性空间,D 是 V 上的线性变换,若 D 适合

(1) $D(x) = 1$;

(2) $D(f(x)g(x)) = g(x)D(f(x)) + f(x)D(g(x))$.

求证: D 就是求导变换.

5. 设 $f(x)$是数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式, 若 $f(x+a) = f(x)$,其中 $a \neq 0$, $a \in \mathbf{K}$, 求证: $f(x)$是一个常数多项式.

6. 设 $f(x)$是非零多项式且 $f(x)$可以整除 $f(x^m)(m > 1)$, 求证: $f(x)$的根只能是零或 1 的某个方根.

7. 求证: $y = \sin x$ 在实数域内不能表示为 x 的多项式.

8. 若 n 是奇数,求证: $(x+y)(y+z)(x+z)$ 可整除$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$.

9. 设 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$, 其中 a_i 是两两互不相同的整数,求证: $f(x)$ 在有理数域内不可约.

10. 设 $f(x)$是有理系数多项式,若 $a + b\sqrt{c}$ 是 $f(x)$的根(其中 $\sqrt{c}$是无理数, a, b,c 是有理数),求证: $a - b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)$的根.

11. 设 $f(x)$是有理系数多项式. 若 d 是一个有理数而无理数$\sqrt[3]{d}$是 $f(x)$的一个根,则 $\sqrt[3]{d}\omega$, $\sqrt[3]{d}\omega^2$ 也是 $f(x)$的根.

12. 求证: 有理系数多项式 $x^4 + px^2 + q$ 在有理数域上可约的充分必要条件是或者 $p^2 - 4q = k^2$,其中 k 是一个有理数;或者 q 是某个有理数的平方且 $\pm 2\sqrt{q} - p$ 也是有理数的平方.

13. 设 x_1, x_2, x_3 是三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根,求这 3 个根的倒数的平方和.

14. 设 x_1, x_2, x_3 是三次方程 $x^3-2x^2+x-3=0$ 的 3 个根,求 $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$ 的值.

15. 求证:多项式 x^4+px+q 有重因子的充分必要条件是 $27p^4=256q^3$.

16. 求 n 次多项式 $x^n+px+q(n>1)$ 的判别式.

17. 设 $f(x), g(x)$是次数大于 1 的多项式,求证:

$$\Delta(f(x)g(x))=\Delta(f(x))\Delta(g(x))[R(f, g)]^2.$$

18. 求证:$\Delta((x-a)g(x))=(g(a))^2\Delta(g(x))$.

*19. 设 $f(x)=g(h(x))$,$g(x)$ 是次数等于 n 的多项式,其根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. $h(x)$是 m 次多项式,又 $g(x)$,$h(x)$均为首一多项式,求证:

$$\Delta(f(x))=[\Delta(g(x))]^m[\Delta(h(x)-x_1)\Delta(h(x)-x_2)\cdots\Delta(h(x)-x_n)].$$

提示:利用复合函数的导数公式及第 10 节习题 5 的结论.

20. 求参数曲线:

$$\begin{cases}x=2(t+1)/(t^2+1),\\ y=t^2/(2t-1)\end{cases}$$

的直角坐标方程.

第六章 特 征 值

§6.1 特征值和特征向量

在这一章及下一章中,我们主要研究有限维线性空间上的线性变换.我们特别关心这样一个问题:对给定线性空间 V 上的线性变换,能否找到 V 的一组基,使得该线性变换在这组基下的矩阵具有特别简单的形状.比如,若我们能找到 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,使线性变换 φ 在这组基下的矩阵为对角阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

这时,若 $\boldsymbol{\alpha} = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n$,则

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = a_1 k_1 e_1 + a_2 k_2 e_2 + \cdots + a_n k_n e_n.$$

线性变换 φ 的表达式非常简单.线性变换 φ 的许多性质也变得一目了然.如若 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 不为零,而 $a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$,则 φ 的秩为 r,且 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 就是由 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ 生成的子空间,而 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 则是由 $\{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ 生成的子空间,等等.

由第四章我们已经知道,一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的.因此用矩阵的语言重述上面提到的问题就是:能否找到一类特别简单的矩阵,使任一矩阵与这类矩阵中的某一个相似?比如,我们可以问:是否所有的矩阵都相似于对角阵?若不然,哪一类矩阵可以相似于对角阵?

由第四章第 5 节知道,若线性空间 V 可分解为

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m, \tag{6.1.1}$$

其中每个 V_i 都是线性变换 φ 的不变子空间,那么 φ 可以表示为分块对角阵.我们当然希望(6.1.1)式中的 V_i 越小越好.最小的非零子空间是一维子空间.若 V_i 是一维子空间,$\boldsymbol{x}$ 是其中的任一非零向量,φ 在 V_i 上的作用相当于一个数乘,

于是存在 $\lambda \in \mathbf{K}$, 使

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}.$$

定义 6.1.1 设 φ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 V 的线性变换,若 $\lambda \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 使

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{6.1.2}$$

则称 λ 是线性变换 φ 的一个特征值,向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 φ 关于特征值 λ 的特征向量.

由(6.1.2)式我们可以看出,φ 关于特征值 λ 的全体特征向量再加上零向量构成 V 的一个子空间. 事实上,若向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 是属于特征值 λ 的特征向量,则

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),$$

$$\varphi(c\boldsymbol{x}) = c\varphi(\boldsymbol{x}) = c\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(c\boldsymbol{x}).$$

因此 φ 属于特征值 λ 的特征向量全体加上零向量构成 V 的子空间,记为 V_λ,称为 φ 的属于特征值 λ 的特征子空间. 显然 V_λ 是 φ 的不变子空间.

现在设 φ 在某组基下的矩阵为 A,向量 $\boldsymbol{x}$ 在这组基下可表示为一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 这时(6.1.2)式等价于

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{6.1.3}$$

(6.1.3)式也等价于

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \tag{6.1.4}$$

定义 6.1.2 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶方阵,若存在 $\lambda \in \mathbf{K}$ 及 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使(6.1.3)式成立,则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

读者会提出这样的问题:既然同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的,那么相似矩阵是否有相同的特征值? 回答是肯定的,这就是下面的定理.

定理 6.1.1 若 B 与 A 相似,则 B 与 A 具有相同的特征值.

证明 设 $B = P^{-1}AP$, P 是可逆阵. 若 λ 是 A 的特征值,则存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使(6.1.3)式成立. 因为

$$B(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = P^{-1}AP(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = P^{-1}A\boldsymbol{\alpha} = P^{-1}\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

所以 λ 也是 B 的特征值,而 $P^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是 B 关于 λ 的特征向量. 同理可证 B 的特征值必是 A 的特征值. 证毕.

我们已经定义了线性变换与矩阵的特征值,现在的问题是如何来求一个线

性变换或一个矩阵的特征值? 从(6.1.4)式可以看出,要使 $\boldsymbol{\alpha}$ 非零,必须 $|\lambda I_n - A| = 0$. 反过来若 $\lambda \in \mathbf{K}$ 且 $|\lambda I_n - A| = 0$, 则(6.1.4)式有非零解. 因此寻找矩阵 A 的特征值等价于寻找行列式 $|\lambda I_n - A| = 0$ 时 λ 的值. 设 $A = (a_{ij})$, 则

$$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.1.5}$$

这是以 λ 为未知数的 n 次首一多项式.

定义 6.1.3 设 A 是 n 阶方阵,称 $|\lambda I_n - A|$ 为 A 的特征多项式.

矩阵 A 的特征值就是它特征多项式的根. 另外,若 P 是非异阵,则

$$|\lambda I_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}||\lambda I_n - A||P| = |\lambda I_n - A|.$$

因而相似矩阵必有相同的特征多项式. 设

$$|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ 等于 A 的特征多项式中 λ^{n-1} 的系数之负值. 由行列式(6.1.5)知道它等于 A 的主对角线上的元素和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, 即矩阵 A 的迹 $\mathrm{tr}A$. 由于相似矩阵有相同的特征值,因此相似的矩阵必有相同的迹.

特征多项式 $|\lambda I_n - A|$ 的常数项就是 $\lambda = 0$ 时的值, 显然它等于 $(-1)^n|A|$. 由 Vieta 定理知, A 的 n 个特征值之积为

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|.$$

从上面的分析我们可以得出求一个矩阵的特征值与特征向量的方法:作矩阵 $\lambda I_n - A$(通常称之为 A 的特征矩阵)并求出特征多项式 $|\lambda I_n - A|$ 的根,这就是 A 的特征值. 将每个特征值代入线性方程组

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

求出非零解,就是关于特征值 λ 的特征向量.

例 6.1.1 设 A 是一个上三角阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

求 A 的特征值.

解　$|\lambda I_n - A|$ 是一个上三角行列式,因此

$$|\lambda I_n - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}),$$

即 A 的特征值等于 A 主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. 对下三角阵也有类似的结论.

例 6.1.2　求下列 3×3 矩阵的特征值与特征向量:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

因此 A 的特征值为 1, 2. 设特征向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 1 代入 $(\lambda I_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 2,故只有一个线性无关的解,可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

同理将 $\lambda=2$ 代入 $(\lambda I_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 解得(也只有一个无关解):

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

故属于特征值1的特征向量为 $c_1\xi_1$，属于特征值2的特征向量为 $c_2\xi_2$，其中 c_1，c_2 为 **K** 中的任意非零数.

例 6.1.3 求下列矩阵的特征值：

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

解 因为

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1,$$

因此 A 的特征值为 i，$-\mathrm{i}$.

例 6.1.3 表明，即使是有理数域上的矩阵，其特征值有可能是虚数. 这就是说，对数域 **K** 上的矩阵(或相应的线性变换)，有可能在 **K** 中不存在特征值. 但是对复数域来说，任一 n 阶方阵总存在特征值. 因此在考虑特征值问题时，我们常常放在复数域里讨论.

从例 6.1.1 我们也看到，一个上三角阵(或下三角阵)的特征值都在主对角线上. 如果我们能把一个矩阵相似地变到一个上三角阵，那么它的特征值也就一目了然了. 但是，由于一个矩阵的特征值有可能是虚数，因此数域 **K** 上的矩阵未必能相似于一个上三角阵. 然而复数域 **C** 上的矩阵，它们总相似于上三角(或下三角)阵.

定理 6.1.2 任一复方阵必(复)相似于一上三角阵.

证明 设 A 是 n 阶复方阵，现对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然. 假定对 $n-1$ 阶矩阵结论成立，现对 n 阶矩阵 A 来证明. 将 A 看成是复 n 维列向量空间 V 上的线性变换(参见例 4.1.3)，记之为 φ. 设 λ 是 A 的一个特征值，则存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，使

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 作为 V 的一个基向量，并扩展为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，则 φ 在这组基下的表示矩阵形如：

$$\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\tag{6.1.6}$$

矩阵(6.1.6)是一个分块矩阵，A_1 是一个 $n-1$ 阶方阵. 这等价于说存在非异阵 P，使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

因为 A_1 是一个 $n-1$ 阶矩阵，所以由归纳假设可知，存在非异的 $n-1$ 阶矩阵 Q，使 $Q^{-1}A_1Q$ 是一个上三角阵. 令

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

则 R 也是非异阵，且

$$\begin{aligned} R^{-1}P^{-1}APR &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这是一个上三角阵，它与 A 相似，证毕.

注　虽然一般数域 $\mathbf{K}$ 上的矩阵未必相似于对角阵，但是从定理 6.1.2 的证明可以看出，若数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶方阵 A 的特征值全在 $\mathbf{K}$ 中，则存在 $\mathbf{K}$ 上的矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 是一个上三角阵.

作为定理 6.1.2 的应用，我们证明一个有用的命题. 首先，若 A 是一个 n 阶矩阵，$f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是一个多项式，记

$$f(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n.$$

我们来考虑矩阵 A 的特征值与矩阵 $f(A)$ 的特征值之间的关系.

命题 6.1.1　设矩阵 A 是 n 阶方阵，λ 是它的一个特征值. 又 $f(x)$ 是一个多项式. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，则 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值.

证明　因为任意一个 n 阶矩阵均(复)相似于上三角阵，可设

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

因为上三角阵的和、数乘及乘方仍是上三角阵，经计算不难得到

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

因此 $f(A)$的全部特征值为:$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$. 证毕.

命题 6.1.2 设 n 阶矩阵 A 适合一个多项式 $g(x)$,即 $g(A)=0$. 求证:A 的特征值 λ 也必适合 $g(\lambda)=0$.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 经简单计算得

$$g(\lambda)\boldsymbol{\alpha} = g(A)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 因此 $g(\lambda)=0$. 证毕.

对可逆阵 A,其逆阵 A^{-1}的特征值和 A 的特征值有什么关系呢? 下面的命题回答了这个问题.

命题 6.1.3 设 n 阶矩阵 A 是可逆阵,若 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则 A^{-1}的特征值为 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$.

证明 首先注意到 A 是可逆阵, $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A| \neq 0$, 因此每个 $\lambda_i \neq 0$(事实上,A 可逆的充分必要条件是它的特征值全不为零).

由定理 6.1.2 可知,矩阵 A 相似于一个上三角阵 B,其对角线上元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 容易证明,$B^{-1}$也是一个上三角阵且对角元素为 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$. 而 B^{-1}和 A^{-1}相似,所以特征值相同,证毕.

习 题 6.1

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2. (1) 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换,V 有一个直和分解:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m,$$

其中每个 V_i 是 φ 的不变子空间. 设 φ 限制在 V_i 上的特征多项式为 $f_i(\lambda)$,求证:φ 的特征多项式

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_m(\lambda);$$

(2) 设 $A=\mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$是分块对角阵,证明:$A$ 的特征多项式等于 A_i 的特征多项式之积.

3. 证明:n 阶矩阵 A 以任一非零 n 维列向量为特征向量的充分必要条件是 $A=cI_n$, 其中 c 是常数.

4. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是两个非零向量且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=0$,求矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$ 的全部特征值.

5. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

是可逆阵,向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, b, 1)'$ 是矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的特征向量,求 λ, a, b 的值.

6. 设 A 是 4 阶矩阵且 $|3I_4+A|=0$, $AA'=2I_4$, $|A|<0$. 求 A^* 的一个特征值.

7. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix},$$

又 $|A|=-1$, A^* 有一个特征值 λ_0 且属于 λ_0 的一个特征向量为$(-1, -1, 1)'$.求 a, b, c, λ_0 的值.

8. 求证:

(1) 若 A 是幂零阵,即存在自然数 $k>1$, 使 $A^k=0$, 则 A 的特征值全为零;

(2) 若 $A^2=I_n$, 则 A 的特征值为$+1$或-1;

(3) 若 $A^2=A$, 则 A 的特征值只能为 0 或 1.

*9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,且 $m\geqslant n$. 求证:

$$|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA|.$$

从而若 A 和 B 是同阶矩阵,则 AB 与 BA 特征值相同.

*10. (1) 若复矩阵 A 与 B 可交换,即 $AB=BA$, 则 A 与 B 至少有一个公共的特征向量;

(2) 若复矩阵 $\{A_i \mid i=1, \cdots, m\}$ 两两可交换,求证:它们至少有一个公共的特征向量.

§6.2 对角化

我们将在这一节里回答上一节中提出的问题:什么样的矩阵相似于一个对角阵?

我们注意到,如果矩阵 A 相似于对角阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{6.2.1}$$

则 A 代表了一个 n 维线性空间中的线性变换 φ，φ 在某一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下的矩阵为对角阵(6.2.1). 于是 $\varphi(e_i)=\lambda_i e_i$，即 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 φ 的特征向量. 也就是说 φ 有 n 个线性无关的特征向量.

反过来，若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，这说明 A 代表的 n 维线性空间 V 中的线性变换 φ 有 n 个线性无关的特征向量，这一组向量构成 V 的一组基，φ 在这组基下的矩阵显然是一个对角阵.

这样我们就证明了下述定理.

定理 6.2.1 设 A 是 n 阶方阵，则 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量(这样的矩阵称为可对角化矩阵).

与上述定理等，有下述定理.

定理 6.2.2 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则存在 V 的一组基，使得 φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵的充分必要条件是 φ 有 n 个线性无关的特征向量(这样的线性变换称为可对角化的线性变换).

那么是否任一 n 阶方阵均有 n 个线性无关的特征向量呢？当然不是！

例 6.2.1 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值为 1, 1. 将 1 代入 $(\lambda I_2 - A)x = \mathbf{0}$，求得 A 的特征向量为

$$k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbf{K}.$$

这表明 A 只有一个线性无关的特征向量，因此 A 不能对角化.

事实上，如果 A 可以对角化，由于 A 的特征值是 1, 1，所以 A 将相似于 I_2，即存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=I_2$. 于是 $A=PI_2P^{-1}=I_2$，引出矛盾！

现在我们来讨论不同的特征值和它们相应的特征向量有什么关系. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 有 k 个不同特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，相应的特征子空间为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$.

定理 6.2.3 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 为数域 $\mathbf{K}$ 上 n 维线性空间 V 上线性变换 φ 的不同的特征值，则

$$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k.$$

证明 对 k 用数学归纳法.若 $k=1$,结论显然.现设对 $k-1$ 个特征值 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_{k-1},它们相应的特征子空间 V_1, V_2, $\cdots$, V_{k-1}之和是直和.我们要证明 V_1, V_2, $\cdots$, V_{k-1}, V_k 之和为直和.这只需证明:

$$V_k\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{k-1})=\mathbf{0} \tag{6.2.2}$$

即可.设 $\boldsymbol{v}\in V_k\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{k-1})$,则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_{k-1}, \tag{6.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{v}_i\in V_i(i=1,2,\cdots,k-1)$.在(6.2.3)式两边作用 φ,得

$$\varphi(\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{v}_1)+\varphi(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+\varphi(\boldsymbol{v}_{k-1}).$$

但 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_{k-1}$都是 φ 的特征向量或零向量,因此

$$\lambda_k\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}. \tag{6.2.4}$$

在(6.2.3)式两边乘以 λ_k 减去(6.2.4)式得

$$\mathbf{0}=(\lambda_k-\lambda_1)\boldsymbol{v}_1+(\lambda_k-\lambda_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})\boldsymbol{v}_{k-1}.$$

由归纳假设,$V_1+V_2+\cdots+V_{k-1}$ 是直和,因此 $(\lambda_k-\lambda_i)\boldsymbol{v}_i=\mathbf{0}$,而 $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$,从而 $\boldsymbol{v}_i=\mathbf{0}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$.这就证明了(6.2.2)式.证毕.

推论 6.2.1 线性变换 φ 属于不同特征值的特征向量必线性无关.

推论 6.2.2 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值,则 A 必相似于对角阵.

推论 6.2.2 另外一个等价的说法就是:若矩阵 A 的特征多项式没有重根,则 A 相似于对角阵.那么 A 的特征多项式有重根时的情形又将如何呢?

定理 6.2.4 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,λ_0 是 φ 的特征多项式的 m 重根,又 V_0 是属于 λ_0 的特征子空间.若 $t=\dim V_0$,则 $t\leqslant m$.

证明 设$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_t\}$是 V_0 的一组基.由于 V_0 中的非零向量都是 φ 关于 λ_0 的特征向量,故

$$\varphi(\boldsymbol{e}_j)=\lambda_0\boldsymbol{e}_j \quad (j=1,\cdots,t).$$

将$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_t\}$扩充为 V 的一组基,记为$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_t,\boldsymbol{e}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$,则 φ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 I_t & * \\ 0 & B\end{pmatrix}, \tag{6.2.5}$$

其中 B 是一个 $n-t$ 阶方阵.矩阵 A 的特征多项式具有如下形状:

$$(\lambda-\lambda_0)^t g(\lambda).$$

这表明 λ_0 的重数至少为 t,即 $t\leqslant m$. 证毕.

定义 6.2.1 设 φ 是有限维线性空间 V 上的线性变换,λ_0 是 φ 的一个特征值,V_0 是属于 λ_0 的特征子空间,则称 $\dim V_0$ 为 λ_0 的度数或几何重数. λ_0 作为 φ 的特征多项式根的重数称为 λ_0 的重数或代数重数. 若 φ 的任一特征值的重数等于度数,则称 φ 有完全特征向量系.

显然 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 有完全特征向量系当且仅当 φ 有 n 个线性无关的特征向量. 由于相似矩阵的特征多项式相等,因此定义 6.2.1 对矩阵也可同样定义其特征值的重数与度数. 显然我们有下面的结论.

定理 6.2.5 矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 的任一特征值的重数与度数相等,或等价地,A 有完全特征向量系.

推论 6.2.3 设 φ 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 V 中的线性变换,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 φ 的全部不同的特征值,$V_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 是属于特征值 λ_i 的特征子空间,则 φ 可对角化的充分必要条件是

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k.$$

例 6.2.1 中的矩阵有一个二重特征值 1,但只有一个线性无关的特征向量. 因此它没有完全特征向量系,从而它不可能与一个对角阵相似.

已知可对角化矩阵 A,如何求出 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角阵,下面我们来讨论这个问题. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 注意 P 为可逆阵,不妨设 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 P 的列向量分块. 因为

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

所以

$$AP=P\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

因此

$$(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, A\boldsymbol{\alpha}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n).$$

即有 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$,故 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 就是属于特征值 λ_i 的特征向量. 因此 P 的 n 个列向量就是 A 的 n 个特征向量. 这表明,只要我们求出 A 的 n 个线性无关的特征向量,将它们放在一起组成一个矩阵就是要求的 P.

注 因为特征向量不唯一,P 不唯一. 另外还要注意第 i 个列向量对应于第 i 个特征值.

例 6.2.2 判断矩阵 A 是否相似于对角阵,如是,求出可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$

为对角阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}.$$

解　先计算 A 的特征值

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

A 有特征值 1(二重)及 3(一重). 当 $\lambda=1$ 时 $(\lambda I_3-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+2x_3=0,\\2x_1-4x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组的系数矩阵秩为 1，因此解空间维数等于 2. 不难求得方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=3$ 时，不难求得方程组 $(3I_3-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为(只有一个向量)：

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因此

$$P=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

例 6.2.3　计算 A^{10}：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}.$$

解　用上例的方法求得

$$P=\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{10}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}^{10}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1-2^{10}&2^{10}\end{pmatrix}.$$

习 题 6.2

1. 判断下列方阵能否相似于对角阵：

(1) $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 求可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 是对角阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix}$；　(2) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}$.

3. 矩阵 A 是三阶方阵,它的特征值为 1, 1, 3,对应的特征向量依次为

$$(2,1,0)',\ (-1,0,1)',\ (0,1,1)',$$

求出矩阵 A.

4. 已知矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$$

相似.

(1) 求 y 的值；

(2) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆阵 P.

5. 设 A 是三阶矩阵, $A\boldsymbol{\alpha}_i=\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$, 以及

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

求 A.

6. 设

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix},$$

当 k 为何值时,存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 是对角阵? 求出 P 和对角阵.

7. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值,ξ_1, ξ_2 分别是 λ_1 与 λ_2 的特征向量,求证: $\xi_1+\xi_2$ 必不是 A 的特征向量.

8. 若矩阵 A, B 有完全特征向量系,求证:

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

也有完全特征向量系.

9. 设 A 是 n 阶矩阵,$A=\begin{pmatrix}I_r&B\\0&-I_{n-r}\end{pmatrix}$. 求证:$A$ 可对角化.

10. 求证:

(1) 若矩阵 A 适合 $A^2=I_n$, 则 A 必可对角化;

(2) 若矩阵 A 适合 $A^2=A$, 则 A 必可对角化;

(3) 若 A 是非零矩阵且 $A^k=0$, 则 A 必不能对角化;

(4) 若实矩阵 A 适合 $A^2+A+I_n=0$, 则 A 在实数域上不能对角化.

11. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix},$$

求 A^n.

12. 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值,求证:λ_0 的度数等于

$$n-r(\lambda_0I_n-A).$$

§6.3　极小多项式与 Cayley－Hamilton 定理

我们已经知道,数域 $\mathbf{K}$ 上的全体 $n\times n$ 矩阵组成了 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,其维数等于 n^2. 因此下列 n^2+1 个矩阵必线性相关:

$$A^{n^2},A^{n^2-1},\ \cdots,\ A,\ I.$$

也就是说,存在 $\mathbf{K}$ 中不全为零的数 $c_i(i=0,1,2,\cdots,c_{n^2})$, 使得

$$c_{n^2}A^{n^2}+c_{n^2-1}A^{n^2-1}+\cdots+c_1A+c_0I=0.$$

这表明矩阵 A 适合数域 $\mathbf{K}$ 上的一个多项式.

定义 6.3.1 若 n 阶矩阵 A(或 n 维线性空间上的线性变换 φ)适合一个非零首一多项式 $m(x)$,且 $m(x)$ 是 A(或 φ)所适合的多项式中次数最小者,则称 $m(x)$ 是 A(或 φ)的一个极小多项式或最小多项式.

从本节开始的说明我们知道,极小多项式肯定是存在的,它唯一吗?

引理 6.3.1 若 $f(x)$ 是 A 适合的一个非零多项式,则 A 的极小多项式 $m(x)$ 是 $f(x)$ 的因子.

证明 由多项式的带余除法知道

$$f(x)=m(x)q(x)+r(x),$$

且 $\deg r(x)<\deg m(x)$. 将 A 代入得 $r(A)=0$, 若 $r(x)\neq 0$, 则 A 适合一个比 $m(x)$ 次数更小的多项式,矛盾. 故 $r(x)=0$,即 $m(x)\mid f(x)$. 证毕.

命题 6.3.1 任一 n 阶矩阵的极小多项式必唯一.

证明 若 $m(x)$, $g(x)$ 都是矩阵 A 的极小多项式,则由上述引理知道,$m(x)$ 能够整除 $g(x)$, $g(x)$ 也能够整除 $m(x)$. 因此 $m(x)$ 与 $g(x)$ 只差一个常数因子,但极小多项式又必须首项系数为 1,故 $g(x)=m(x)$. 证毕.

命题 6.3.2 相似的矩阵具有相同的极小多项式.

证明 设矩阵 A 的极小多项式是 $m(x)$,矩阵 B 的极小多项式是 $n(x)$,又 A 和 B 相似, $B=P^{-1}AP$. 注意到

$$m(B)=m(P^{-1}AP)=P^{-1}m(A)P=0,$$

因此 $n(x)\mid m(x)$. 同理,$m(x)\mid n(x)$,故 $m(x)=n(x)$. 证毕.

例 6.3.1 设 A 是一个分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

求证:A 的极小多项式等于诸 A_i 的极小多项式之最小公倍式.

证明 设 A_i 的极小多项式为 $f_i(x)$,A 的极小多项式为 $f(x)$. 诸 $f_i(x)$ 的最小公倍式是 $g(x)$,则 $g(A_i)=0$, 故

$$g(A)=\begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_m) \end{pmatrix}=0.$$

因此 $f(x)\mid g(x)$. 又因为

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & & \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_m) \end{pmatrix}=0,$$

因此对每个 i 有 $f(A_i)=0$, 即有 $f_i(x)\mid f(x)$. 而 $g(x)$是诸 $f_i(x)$的最小公倍式,故 $g(x)\mid f(x)$. 综上所述, $f(x)=g(x)$. 证毕.

例 6.3.2　设 $m(x)$是 n 阶矩阵 A 的极小多项式,λ_0 是 A 的特征值,求证:

$$(x-\lambda_0)\mid m(x).$$

证明　由余数定理可设

$$m(x)=(x-\lambda_0)q(x)+r,$$

其中 r 是常数. 将 A 代入上式得:

$$0=m(A)=(A-\lambda_0 I_n)q(A)+rI_n,$$

即

$$(A-\lambda_0 I_n)q(A)=-rI_n.$$

两边取行列式,因为 λ_0 是 A 的特征值,所以 $|A-\lambda_0 I_n|=0$. 若 $r\neq 0$,将出现矛盾,故 $r=0$, 结论成立. 证毕.

由上例知道,若不计重数,矩阵 A 的极小多项式和特征多项式有相同的根.

从本节开始的分析知道,n 阶矩阵的极小多项式的次数最多不超过 n^2. 但是这个估计实在比较粗,我们可以估计得更精确些.

为了研究一个矩阵可能适合的多项式,我们先看比较简单的情形. 设 A 是一个上三角阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

主对角线上的元素 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 正好是 A 的全部特征值. 将 A 依次作用于标准单位向量,可得 n 个等式:

$$A\boldsymbol{e}_1=\lambda_1\boldsymbol{e}_1,$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + \lambda_2 e_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Ae_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{i-1,i}e_{i-1} + \lambda_i e_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Ae_n = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{n-1,n}e_{n-1} + \lambda_n e_n.$$

作

$$f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n),$$

注意到 $(A-\lambda_i I_n)(A-\lambda_j I_n) = (A-\lambda_j I_n)(A-\lambda_i I_n)$, 不难算出:

$$f(A)(e_i) = (A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\cdots(A-\lambda_n I_n)(e_i) = \mathbf{0}$$

对一切 $i=1, 2, \cdots, n$ 成立,因此 $f(A)=0$. 而 $f(x)$是 A 的特征多项式,因此 A 适合它的特征多项式. 利用定理 6.1.2,我们很容易把上述结论推广到一般情形.

定理 6.3.1(Cayley - Hamilton(凯莱-哈密顿)定理) 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵,$f(x)$是 A 的特征多项式,则 $f(A)=0$.

证明 由定理 6.1.2 知 A 复相似于一个上三角阵,也就是说存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=B$, B 是一个上三角阵,其中 P 与 B 都是复数矩阵,但 A 与 B 有相同的特征多项式 $f(x)$. 记

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

则 $f(B)=0$. 而

$$\begin{aligned} f(A) &= A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I_n \\ &= (PBP^{-1})^n + a_1(PBP^{-1})^{n-1} + \cdots + a_n I_n \\ &= PB^nP^{-1} + a_1 PB^{n-1}P^{-1} + \cdots + a_n I_n \\ &= P(B^n + a_1 B^{n-1} + \cdots + a_n I_n)P^{-1} \\ &= Pf(B)P^{-1} = 0. \end{aligned}$$

证毕.

推论 6.3.1 n 阶矩阵极小多项式的次数不超过 n.

Cayley - Hamilton 定理表明,任一矩阵 A 的极小多项式必是其特征多项式的因子,但一般来说并不一定等于特征多项式. 对一个给定的矩阵,如何求它的

极小多项式？我们将在下一章中加以阐述.

由于矩阵与线性变换之间有一一对应关系,因此我们有下述推论.

推论 6.3.2 设 φ 是 n 维线性空间 V 中的线性变换,$f(x)$ 是 φ 的特征多项式,则 $f(\varphi)=0$.

习 题 6.3

1. 设 A 是 n 阶非异阵,求证:$A^{-1}=g(A)$,其中 g 是一个 $n-1$ 次多项式.

2. 求证:任一方阵与其转置均有相同的极小多项式.

3. 证明:n 阶方阵 A 为非异阵的充分必要条件是 A 的极小多项式的常数项不为零.

4. 举例说明极小多项式相同的矩阵未必相似.

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵,$f(x)$, $m(x)$ 分别是 A 的特征多项式及极小多项式,$n(x)$ 是 B 的极小多项式,若 $(m(x),n(x))=1$, 求证: $(f(x),n(x))=1$.

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵,$f(x)$, $m(x)$ 分别是 A 的特征多项式及极小多项式,$n(x)$ 是 B 的极小多项式,若 $(m(x),n(x))=1$, 求证:$f(B)$ 是非异阵.

7. 设 A 为 n 阶矩阵,$m(x)$ 是 A 的极小多项式,$g(x)$ 是和 $m(x)$ 互素的多项式. 求证:$g(A)$ 是非异阵;反之,若存在多项式 $g(x)$,使 $g(A)$ 是非异阵,则 $g(x)$ 和 $m(x)$ 互素.

8. 设 φ 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换,其特征多项式是 $f(\lambda)$ 且 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$. 已知 $f_1(\lambda)$,$f_2(\lambda)$ 互素. 令 $V_1=\operatorname{Im} f_1(\varphi)$, $V_2=\operatorname{Im} f_2(\varphi)$, 求证:

(1) $V_1=\operatorname{Ker} f_2(\varphi)$, $V_2=\operatorname{Ker} f_1(\varphi)$;

(2) V_1, V_2 是 φ-不变子空间且 V 是它们的直和.

问:φ 限制在 V_1 和 V_2 上的特征多项式分别是什么?

*§6.4 特征值的估计

在许多实际问题及理论问题中,常常需要对矩阵的特征值做出估计. 比如,特征值是否在单位圆内？特征值的实部是否小于零？等等. 我们将在这一节中介绍两个常用的定理.

一般来说,矩阵的特征值是一些复数. 复数值的估计常常用复平面上的圆来给定范围. 复平面上以 z_0 为圆心、以 r 为半径的圆常用 $|z-z_0|=r$ 来表示. 该圆内部(包括圆周)用 $|z-z_0|\leqslant r$ 来表示,该圆的外部用 $|z-z_0|>r$ 来表示.

现设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶方阵,A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|.$$

令

$$R_i = \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| = |a_{i1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|,$$

即 R_i 为 A 的第 i 行元素去掉 a_{ii} 后的绝对值之和. 我们有下列"圆盘定理"(又称 Гершгорин(戈氏)圆盘第一定理).

定理 6.4.1 设 A 是 n 阶复矩阵, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 A 的特征值在复平面上下列圆盘(又称戈氏圆盘)中:

$$|z-a_{ii}| \leqslant R_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

证明 任取 A 的一个特征值 λ_0, 设 ξ 为属于 λ_0 的特征向量, 则 $A\xi=\lambda_0\xi$. 记 ξ 的第 i 个坐标为 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 将 $A\xi=\lambda_0\xi$ 写成线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda_0 x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda_0 x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda_0 x_n. \end{cases}$$

设 $|x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_n|$ 中 $|x_r|$ 最大, 从上式可得

$$(\lambda_0-a_{rr})x_r=a_{r1}x_1+\cdots+a_{r,r-1}x_{r-1}+a_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{rn}x_n.$$

于是

$$\begin{aligned} |\lambda_0-a_{rr}||x_r| &\leqslant |a_{r1}||x_1|+\cdots+|a_{r,r-1}||x_{r-1}|+|a_{r,r+1}||x_{r+1}| \\ &\quad +\cdots+|a_{rn}||x_n| \\ &\leqslant (|a_{r1}|+\cdots+|a_{r,r-1}|+|a_{r,r+1}|+\cdots+|a_{rn}|)|x_r|. \end{aligned}$$

此即

$$|\lambda_0-a_{rr}||x_r| \leqslant R_r|x_r|.$$

但 $|x_r| \neq 0$, 故

$$|\lambda_0-a_{rr}| \leqslant R_r.$$

证毕.

例 6.4.1 估计下列矩阵特征值的范围:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.2 & -1 \\ 0.3 & 2 & -0.2 & 1.1 \\ -0.5 & 0.1 & -4 & 0.2 \\ -1 & -0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　由定理 6.4.1,写出 4 个戈氏圆盘为

$$D_1: |z-1| \leqslant 0.5+0.2+1=1.7,$$

$$D_2: |z-2| \leqslant 0.3+0.2+1.1=1.6,$$

$$D_3: |z+4| \leqslant 0.5+0.1+0.2=0.8,$$

$$D_4: |z| \leqslant 1+0.1+0.2=1.3.$$

若把这 4 个圆盘画在复平面上,则 D_1, D_2, D_4 连在一起,D_3 不与其他 3 个圆盘相连.

若一个戈氏圆盘与另一个相连,则称这两个圆盘内(包括圆周)的区域是连通的.若几个圆盘连在一起,比如 D_1 与 D_2 相连,D_2 与 D_4 相连,则称这些相连圆盘内的区域(包括圆周)为连通区域.这几个圆盘称为连通圆盘.

定理 6.4.2　设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个戈氏圆盘分成若干个连通区域,若其中一个连通区域含有 k 个戈氏圆盘,则有且只有 k 个特征值落在这个连通区域内(若两个戈氏圆盘重合,需计重数;又若特征值为重根,也计重数).

证明　考虑下列带参数 t 的矩阵:

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

显然 $A(1)=A$, 而 $A(0)$为下列对角阵:

$$A(0)=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由圆盘定理 6.4.1,矩阵 $A(t)$的特征值落在下列圆盘中:

$$|z-a_{ii}| \leqslant tR_i,\ i=1, 2, \cdots, n,$$

其中 R_i 为 A 的第 i 行元素去掉 a_{ii}后的绝对值之和.让 t 从 0 变到 1,则 $A(t)$的特征值始终不会越出下列圆盘:

$$|z-a_{ii}| \leqslant R_i.$$

又 $A(t)$的特征多项式的系数是 t 的多项式,故 $A(t)$的特征值关于 t 连续.

若 k 个圆盘组成一个连通的区域，由于 $A(0)$ 的 k 个特征值（即 a_{ii} 中的 k 个元素）总在这 k 个圆盘内，故 A 在这 k 个圆盘内有 k 个特征值，即它们不可能跑到与这 k 个圆盘不相连通的圆盘内. 由于这一结论对任一圆盘连通区域都对，故这 k 个圆盘组成的连通区域内只有 k 个 A 的特征值. 证毕.

习 题 6.4

1. 估计下列矩阵的特征值范围并在复平面上画出其戈氏圆盘：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.2 \\ -1.1 & -1 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0.1 & -0.5 \\ 0.1 & 2 & 0.4 & -0.1 \\ 1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设 A 是 $n\times n$ 阵，$A=(a_{ij})$，若对任意的 $i=1, 2, \cdots, n$，有

$$a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$

则称 A 是严格对角占优阵. 证明：严格对角占优阵的特征值不等于零，从而 A 必是非异阵.

3. 证明：严格对角占优阵的特征值的实部均为正实数.

4. 如果圆盘定理中有一个连通分支是由两个圆外切组成的，证明：每个圆内部（不含圆周）不可能有两个特征值.

复 习 题 六

1. 设 A 是 n 阶矩阵，若 $(A+I)^m=0$，求证：A 是可逆阵并求出 $|A|$.

2. 设 A 是实二阶阵，$\det A<0$，求证：A 实相似于对角阵.

3. P 是非异阵，$B=PAP^{-1}-P^{-1}AP$，求证：B 的特征值之和为零.

4. 对任意 n 阶方阵 A，B，求证：$AB-BA$ 必不相似于 cI_n，其中 c 是非零常数.

5. 设 A 是 n 阶整数阵，求证：方程 $A\boldsymbol{x}=0.5\boldsymbol{x}$ 必无解.

6. 实矩阵 I_n-A 的特征值的模长都小于 1，求证：$0<\det A<2^n$.

7. 设 A，B，C 都是 n 阶矩阵，A，B 各有 n 个不同的特征值，又 $f(x)$ 是 A 的特征多项式且 $f(B)$ 是非异阵. 求证：矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

相似于对角阵.

8. 设 A，B 都是 n 阶矩阵，A，B 有相同的特征值且这 n 个特征值互不相等，求证：存在 n 阶矩阵 P，Q，使 $A=PQ$，$B=QP$.

9. 若 A 是 n 阶矩阵,秩等于 $n-1$. A 的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

其中 $\lambda_n = 0$. 试求 A^* 的全部特征值.

10. 设 $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是一个实 n 维行向量且 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, 试求 n 阶实矩阵 $I_n - 2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ 的特征值.

11. 假定 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是实数且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 试求下列矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 + 1 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

*12. 设 A, B, C 分别是 $m \times m$, $n \times n$, $m \times n$ 矩阵 $(m > n)$. 又已知 $AC = CB$, C 的秩等于 r. 求证:A 和 B 至少有 r 个相同的特征值.

13. 设 $f(\lambda)$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值,$g(\lambda)$ 是任一多项式,证明:矩阵 $g(A)$ 的行列式等于 $R(f, g)$,即为 f, g 的结式.

*14. 求证:复数域上 n 阶循环矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

可对角化. 求出可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 相似于对角阵.

15. 设 $f(x)$ 是一个 n 次首一多项式,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

称下列矩阵为 $f(x)$ 的友阵:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

求证:矩阵 C 的特征多项式就是 $f(\lambda)$. 利用这个结论解下列问题:

设 $f(x)$ 的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, $g(x)$ 为另一多项式,求以 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 为根的 n 次多项式.

*16. 设 A, B, C 是 n 阶矩阵,其中 $C = AB - BA$. 又它们适合条件 $AC = CA$, $BC = CB$. 求证:C 的特征值全为零. 又若将条件减弱为 $ABC = CAB$, $BAC = CBA$,则上述结论

不再成立.

*17. 设 A, B 是 n 阶矩阵,若 A 有 n 个不同的特征值且 $AB=BA$, 求证:B 相似于对角阵.

*18. 若 A, B 都是数域 F 上的 n 阶矩阵且 $AB=BA$, 假定 A, B 的特征值都在 F 中,求证:存在 F 上的可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 及 $P^{-1}BP$ 都是上三角阵.

*19. 下列级数称为 Fibonacci(费波那契)级数:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8,\ \cdots,$$

通项用递推式来表示为

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n.$$

求证:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

提示:用矩阵表示递推式,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

只要求出 A^n 就可以算出 a_n 来.

*20. 设 φ 是 n 维复线性空间上的线性变换,又有两个复多项式:

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,\ g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n.$$

假定 $\sigma=f(\varphi)$, $\tau=g(\varphi)$. 矩阵 F 是 $f(x)$的友阵,即

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

若 $g(F)$是可逆阵,求证:

$$\operatorname{Ker}\sigma\tau=\operatorname{Ker}\sigma\oplus\operatorname{Ker}\tau.$$

第七章 相似标准型

§7.1 多项式矩阵

我们将在这一章里继续探讨上一章中提出的问题:给定一个线性变换,找出一组基,使该线性变换在这组基下的表示矩阵具有比较简单的形状.这个问题等价于寻找一类比较简单的矩阵,使任一同阶方阵均与这类矩阵中的某一个相似.这类比较简单的矩阵就是所谓的相似标准型.

为了解决这个问题,可以分两步走.第一步找出相似矩阵的不变量,这些不变量不仅在相似关系下保持不变,而且足以判断两个矩阵是否相似.我们称这样的不变量为全系不变量.比如秩是两个(同阶)矩阵在相抵关系下的不变量,反之,若两个矩阵的秩相同,则它们必相抵.因此,秩是矩阵相抵关系的全系不变量.第二步找出一类比较简单的矩阵,利用相似关系的全系不变量就可以判断一个矩阵与这类矩阵中的某一个相似.

相似关系比相抵关系要更复杂一些,它的全系不变量也比较复杂.我们在上一章中已经知道,矩阵的特征多项式(从而特征值)是相似不变量,但它并不是全系不变量,因为我们很容易举出例子来证明这一点.比如下面两个矩阵的特征多项式相同但不相似:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式与 B 的特征多项式都是 λ^2,但 A, B 绝不相似.

人们经过研究终于发现,两个矩阵 A 与 B 之间的相似和 λI_n-A 与 λI_n-B 的相抵有着密切的联系.注意,λI_n-A 是这样形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{pmatrix},$$

其中的元素含有未定元 λ. 一般地,下列形式的矩阵:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$是以 λ 为未定元的数域 $\mathbf{K}$ 上的多项式. 我们称 $A(\lambda)$为多项式矩阵,或 λ-矩阵. λ-矩阵的加法、数乘及乘法与数域上的矩阵运算一样,只需在运算过程中将数的运算代之以多项式运算即可.

现在我们来研究两个 λ-矩阵的相抵关系. 首先我们必须定义什么叫 λ-矩阵的初等变换.

定义 7.1.1 对 λ-矩阵 $A(\lambda)$施行的下列 3 种变换称为 λ-矩阵的行初等变换:

(1) 将 $A(\lambda)$的两行对换;

(2) 将 $A(\lambda)$的第 i 行乘以常数 c, c 是数域 $\mathbf{K}$ 中的非零数;

(3) 将 $A(\lambda)$的第 i 行乘以 $\mathbf{K}$ 上的多项式 $f(\lambda)$后加到第 j 行上去.

同理我们可以定义 3 种 λ-矩阵的列初等变换.

定义 7.1.2 若 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$都是 λ-矩阵且 $A(\lambda)$经过初等变换后可变为 $B(\lambda)$,则称 λ-矩阵 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$相抵.

与数字矩阵一样,λ-矩阵的相抵关系是一种等价关系,即

(1) $A(\lambda)$与自身相抵;

(2) 若 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$相抵,则 $B(\lambda)$与 $A(\lambda)$相抵;

(3) 若 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$相抵,$B(\lambda)$与 $C(\lambda)$相抵,则 $A(\lambda)$与 $C(\lambda)$相抵.

证明与数域上相同,请读者自己完成.

类似数字矩阵,λ-矩阵的初等变换也对应于初等 λ-矩阵的相乘.

定义 7.1.3 下列 3 种矩阵称为初等 λ-矩阵:

(1) 将 n 阶单位阵的第 i 行与第 j 行对换,记为 P_{ij};

(2) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以非零常数 c,记为 $P_i(c)$;

(3) 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以多项式 $f(\lambda)$后加到第 j 行上去后得到的矩阵,记为 $T_{ij}(f(\lambda))$.

注意,第一类与第二类初等 λ-矩阵与数域上的第一类与第二类初等矩阵没有什么区别. 第三类初等 λ-矩阵的形状如下:

$$T_{ij}(f(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & f(\lambda) & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 7.1.1 *对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 施行第 k $(k=1,2,3)$ 类行(列)初等变换等于用第 k 类初等 λ-矩阵左(右)乘以 $A(\lambda)$.*

证明与定理 2.4.3 完全相同,留给读者作为练习.

注 下列 λ-矩阵的变换不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为前面一个矩阵的第一行乘以 λ 不是 λ-矩阵的初等变换. 同理下面的变换需第一行乘以 λ^{-1},因此也不是 λ-矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对 n 阶 λ-矩阵,我们可定义可逆 λ-矩阵的概念.

定义 7.1.4 *若 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵,且*

$$A(\lambda)B(\lambda) = I_n,\ B(\lambda)A(\lambda) = I_n,$$

则称 $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵. 这时称 $A(\lambda)$ 为可逆 λ-矩阵,有时在不引起混淆的情形下,简称之为可逆阵.

注 注意不要将数字矩阵中的一些结论随意搬到 λ-矩阵上. 比如下面的 λ-矩阵的行列式不为零,但它不是可逆 λ-矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不是 λ-矩阵之故.

不难看出,初等 λ -矩阵都是可逆 λ -矩阵,有限个初等 λ -矩阵的积也是可逆 λ -矩阵. 下一节我们将证明可逆 λ -矩阵必可表示为有限个初等 λ -矩阵的积.

为了把数域上矩阵的相似关系归结为 λ -矩阵的相抵关系,我们尚需证明一个有关 λ -矩阵带余除法的引理. 设 $M(\lambda)$是一个 n 阶 λ -矩阵,则 $M(\lambda)$可以化为如下形状:

$$M(\lambda) = M_m\lambda^m + M_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + M_0,$$

其中 M_i 为数域 $\mathbf{K}$ 上的 $n\times n$ 数字矩阵. 因此,一个多项式矩阵可以化为系数为矩阵的多项式,反之亦然.

引理 7.1.1　*设 $M(\lambda)$与 $N(\lambda)$是两个 n 阶 λ -矩阵且都不等于零. 又设 B 为 n 阶数字矩阵,则必存在 λ -矩阵 $Q(\lambda)$及 $S(\lambda)$和数字矩阵 R 及 T,使下式成立:*

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)Q(\lambda) + R, \tag{7.1.1}$$

$$N(\lambda) = S(\lambda)(\lambda I - B) + T. \tag{7.1.2}$$

证明　将 $M(\lambda)$写为

$$M(\lambda) = M_m\lambda^m + M_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + M_0,$$

其中 $M_m \neq 0$. 可对 m 用归纳法,若 $m = 0$,则已适合要求(取 $Q(\lambda) = 0$). 现设对小于 m 次的矩阵多项式,(7.1.1)式成立. 令

$$Q_1(\lambda) = M_m\lambda^{m-1},$$

则

$$M(\lambda) - (\lambda I - B)Q_1(\lambda) = (BM_m + M_{m-1})\lambda^{m-1} + \cdots + M_0. \tag{7.1.3}$$

上式是一个次数小于 m 的矩阵多项式,由归纳假设得

$$M(\lambda) - (\lambda I - B)Q_1(\lambda) = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R.$$

于是

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)[Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)] + R.$$

令 $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)$ 即得(7.1.1)式. 同理可证(7.1.2)式. 证毕.

定理 7.1.2　*设 A, B 是数域 $\mathbf{K}$ 上的矩阵,则 A 与 B 相似的充分必要条件是 λ -矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵.*

证明　若 A 与 B 相似,则存在 $\mathbf{K}$ 上的非异阵 P,使 $B = P^{-1}AP$, 于是

$$P^{-1}(\lambda I-A)P=\lambda I-P^{-1}AP=\lambda I-B. \tag{7.1.4}$$

把 P 看成是常数 λ -矩阵,上式表明 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

反过来,若 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵,即存在 $M(\lambda)$ 及 $N(\lambda)$,使

$$M(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)=\lambda I-B, \tag{7.1.5}$$

其中 $M(\lambda)$ 与 $N(\lambda)$ 都是有限个初等矩阵之积,因而都是可逆阵. 因此可将(7.1.5)式写为

$$M(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)N(\lambda)^{-1}, \tag{7.1.6}$$

由引理 7.1.1 可设

$$M(\lambda)=(\lambda I-B)Q(\lambda)+R, \tag{7.1.7}$$

代入(7.1.6)式经整理得

$$R(\lambda I-A)=(\lambda I-B)[N(\lambda)^{-1}-Q(\lambda)(\lambda I-A)]. \tag{7.1.8}$$

上式的左边是一次的矩阵多项式,因此右式中中括号内的部分必须是零次的,也即必是一个常数矩阵,设为 P. 于是

$$R(\lambda I-A)=(\lambda I-B)P. \tag{7.1.9}$$

(7.1.9)式又可整理为

$$(R-P)\lambda=RA-BP.$$

再次比较次数得 $R=P$, $RA=BP$. 现只需证明 P 是一个非异阵即可. 由假设

$$P=N(\lambda)^{-1}-Q(\lambda)(\lambda I-A),$$

将上式两边右乘 $N(\lambda)$并移项得

$$PN(\lambda)+Q(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)=I.$$

但

$$(\lambda I-A)N(\lambda)=M(\lambda)^{-1}(\lambda I-B),$$

因此

$$PN(\lambda)+Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}(\lambda I-B)=I. \tag{7.1.10}$$

再由引理 7.1.1 可设

$$N(\lambda)=S(\lambda)(\lambda I-B)+T,$$

代入(7.1.10)式并整理得

$$[PS(\lambda)+Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}](\lambda I-B)+PT=I.$$

比较次数即知上式左边方括号内的矩阵必须为零,因此 $PT=I$, 即 P 是非异阵. 证毕.

习 题 7.1

1. 设 $M(\lambda)$是 λ-矩阵且可写为

$$M(\lambda)=M_m\lambda^m+M_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+M_0.$$

求证:若 $M(\lambda)$是可逆 λ-矩阵,则 M_0 是非异阵.

2. 证明引理 7.1.1 中的余式 R 及 T 是唯一确定的,$Q(\lambda)$与 $S(\lambda)$也唯一确定.

§7.2 矩阵的法式

在上一节中,我们把矩阵的相似归结为 λ-矩阵的相抵. 现在我们来求 λ-矩阵的相抵标准型. 我们自然地希望任一 λ-矩阵相抵于一个对角 λ-矩阵.

引理 7.2.1 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是一个非零 λ-矩阵,则 $A(\lambda)$必相抵于这样的一个 λ-矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$可整除 $B(\lambda)$中的任一元素 $b_{ij}(\lambda)$.

证明 经行初等变换及列初等变换可将 $A(\lambda)$的第(1, 1)元素变成次数最低的非零多项式. 因此不妨设 $a_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $\deg a_{11}(\lambda)\leqslant \deg a_{ij}(\lambda)$, 其中 $a_{ij}(\lambda)\neq 0$ (等于零的项除外). 若 $a_{11}(\lambda)$可整除所有的 $a_{ij}(\lambda)$,则结论已成立. 若否,设在第一列中有元素 $a_{i1}(\lambda)$不能被 $a_{11}(\lambda)$整除,作带余除法:

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda).$$

用$-q(\lambda)$乘以第一行加到第 i 行上,第$(i, 1)$元素就变为 $r(\lambda)$,而 $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda)$. 再将第 i 行与第一行交换,于是第(1, 1)元素为 $r(\lambda)$,它的次数比 $a_{11}(\lambda)$要小. 如这时 $r(\lambda)$仍不能整除第一列所有元素,则可再做带余除法将第(1, 1)元素的次数降下来. 由于 $a_{11}(\lambda)$次数有限,经过有限次后,必可做到第(1, 1)元素可整除所有第一列元素.

同样的方法可施于第一行. 因此我们不妨设 $a_{11}(\lambda)$可整除第一行及第一列. 这时,设 $a_{21}(\lambda)=a_{11}(\lambda)g(\lambda)$. 将第一行乘以$-g(\lambda)$加到第二行上,则第二行第一列元素为零. 用同样的方法可消去第一行、第一列除 $a_{11}(\lambda)$以外的所有元素,

于是 $A(\lambda)$经初等变换后变成下列形状：

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22}(\lambda) & \cdots & a'_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2}(\lambda) & \cdots & a'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{7.2.1}$$

这时，若 $a_{11}(\lambda)$可整除所有其他元素，则结论已成立. 若否，比如 $a_{11}(\lambda)$不能整除 $a'_{ij}(\lambda)$，则将第 i 行加到第一行上去，这时在第一行又出现了一元素 $a'_{ij}(\lambda)$，它不能被 $a_{11}(\lambda)$整除. 重复上面的做法，又可使第(1, 1)元素的次数降下来. 如此反复做下去，由于 $a_{11}(\lambda)$次数有限，总可得到所需的结果. 证毕.

定理 7.2.1 设 $A(\lambda)$是一个 n 阶 λ -矩阵，则 $A(\lambda)$相抵于对角阵

$$\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda);0,\ \cdots,\ 0\}, \tag{7.2.2}$$

其中 $d_i(\lambda)$是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1)$.

证明 对 n 用数学归纳法，当 $n = 1$ 时结论显然，现设 $A(\lambda)$是 n 阶 λ -矩阵. 由引理可知 $A(\lambda)$相抵于 n 阶 λ -矩阵 $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$，其中 $b_{11}(\lambda) | b_{ij}(\lambda)$对一切 $i,\ j$ 成立. 因此，将 $B(\lambda)$的第一行乘以某个 λ 的多项式加到第二行上去便可消去第二行第一列元素 $b_{21}(\lambda)$. 同理可依次消去第一列除 $a_{11}(\lambda)$外的所有元素. 再用类似方法消去第一行其余元素. 这样便得到了一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \cdots & b'_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \cdots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

不难看出，这时 $b_{11}(\lambda)$仍可整除所有的 $b'_{ij}(\lambda)$. 设 c 为 $b_{11}(\lambda)$的首项系数，记 $d_1(\lambda) = c^{-1}b_{11}(\lambda)$，设$\overline{B}(\lambda)$为上面的矩阵中右下方的 $n-1$ 阶 λ -矩阵，则由归纳假设可知存在 $P(\lambda)$及 $Q(\lambda)$，使

$$P(\lambda)\,\overline{B}(\lambda)\,Q(\lambda) = \operatorname{diag}\{d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda);\ 0,\ \cdots,\ 0\},$$

且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1,\ \cdots,\ r-1)$，其中 $P(\lambda)$与 $Q(\lambda)$可写成为有限个初等 λ -矩阵之积. 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{B}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda);\ 0,\ \cdots,\ 0\},$$

且

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & P(\lambda)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & Q(\lambda)\end{pmatrix}$$

可写为若干个 n 阶初等 λ -矩阵之积. 于是只需证明 $d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)$ 即可. 但这点很容易看出,事实上由于 $\overline{B}(\lambda)$ 中的任一元素均可被 $d_1(\lambda)$ 整除, 因此 $P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda)$ 中的任一元素也可被 $d_1(\lambda)$ 整除,这就证明了定理. 证毕.

注 我们上面对 n 阶 λ -矩阵证明了它必相抵于一个对角阵. 事实上,对长方 λ -矩阵,结论也同样成立,证明也类似. (7.2.2)式中的 r 通常称为 $A(\lambda)$ 的秩. 但要注意即使某个 n 阶 λ -矩阵的秩等于 n,它也未必是可逆 λ -矩阵.

推论 7.2.1 任一 n 阶可逆 λ -矩阵都可表示为有限个初等 λ -矩阵的积.

证明 由上述定理,存在 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$,使可逆阵 $A(\lambda)$ 适合

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_n(\lambda)\},$$

其中 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 为若干个初等 λ -矩阵之积. 这时 $r = n$, 因为上式左边是个可逆阵,右边的矩阵也可逆. 显然,一个对角 λ -矩阵要可逆必须 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, $\cdots$, $d_n(\lambda)$ 皆为非零常数. 于是

$$A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}\mathrm{diag}\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n\}Q(\lambda)^{-1},$$

其中 d_1, d_2, $\cdots$, d_n 为非零常数. 因为初等 λ -矩阵的逆仍是初等 λ -矩阵, $\mathrm{diag}\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n\}$ 可表示为 n 个初等 λ -矩阵 $P(d_i)$ 之积, $A(\lambda)$ 可表示为有限个初等 λ -矩阵之积. 证毕.

推论 7.2.2 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵,则 A 的特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 必相抵于

$$\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_m(\lambda)\}, \tag{7.2.3}$$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1,\ \cdots,\ m-1)$.

证明 因为 $|\lambda I_n - A|$ 是 n 次多项式,若有可逆阵 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 使 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda)$ 为对角 λ -矩阵,则由于 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 可表示为有限个初等 λ -矩阵的乘积,故它们的行列式是一个非零常数. 因此 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda)$ 与 $\lambda I_n - A$ 的行列式只差一个常数. 显然(7.2.2)式中的 $r = n$. 把 $d_i(\lambda)$ 中常数多项式写出来(因是首一多项式,故为常数 1),就可得结论. 证毕.

定义 7.2.1 称(7.2.2)式中的对角 λ -矩阵为 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的法式或相抵标准型.

例 7.2.1 求 $\lambda I - A$ 的法式,其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

解

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -3 & \lambda+2 & 0\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\lambda)\ (3)}\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda+1\\ -3 & \lambda+2 & 0\\ \lambda & -1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda+1\\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 3\lambda+3\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 6\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-4\lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(6)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & \lambda-1\\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & \lambda-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 6(\lambda-1)\\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & 6(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}.$$

习　题　7.2

1. 试求 $\lambda I-A$ 的法式,其中 A 为

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-2\\-5&1&4\end{pmatrix}$; (3) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&4&0\\-1&1&5\end{pmatrix}$.

2. 用初等变换化 λ-矩阵为对角阵且适合定理 7.2.1 的要求:

(1) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda&2\lambda-1&\lambda\\\lambda&\lambda^2&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2+\lambda-1&-\lambda^2\end{pmatrix}$;

(2) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 设 $\lambda I-A$ 的法式为

$$\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_m(\lambda)\},$$

求证:A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

4. 若 $(f(\lambda),\ g(\lambda))=1$, 证明下列 3 个 λ-矩阵相抵:

$$\begin{pmatrix}f(\lambda)&0\\0&g(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}g(\lambda)&0\\0&f(\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&f(\lambda)g(\lambda)\end{pmatrix}.$$

5. 求证:n 阶 λ-矩阵为可逆的充分必要条件是它的行列式为非零常数.

§7.3 不变因子

在上一节中我们证明了任一 λ-矩阵均相抵于一对角 λ-矩阵. 因此,如果两个 n 阶 λ-矩阵的法式相同,则它们必相抵. 现在要问反过来的问题,即如果两个 λ-矩阵的法式不相同,是否它们必不相抵? 假如我们能证明这一点,那么我们就找到了 λ-矩阵相抵关系的全系不变量,即 r 个首一多项式序列:

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda) \tag{7.3.1}$$

适合 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,\ \cdots,\ r-1)$. 为了证明这一点,我们只要证明(7.3.1)式中的多项式在相抵关系下具有不变性就可以了. 为此,我们需引进行列式因子的概念.

定义 7.3.1 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵,k 是小于等于 n 的某个自然数. 如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因子(它是首一多项式)不等于零,则称这个多项式为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子,记为 $D_k(\lambda)$. 若 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式都等于零,则

规定 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子为零.

例 7.3.1　求下列矩阵的行列式因子

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为首一非零多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$.

解　$A(\lambda)$ 的非零行列式因子为

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda),\ D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda),\ \cdots,$$

$$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda).$$

引理 7.3.1　设 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子，则 $D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda)$ 对一切 $i=1, 2, \cdots, r-1$ 成立.

证明　设 A_{i+1} 是 $A(\lambda)$ 的任一 $i+1$ 阶子式，即在 $A(\lambda)$ 中任意取出 $i+1$ 行及 $i+1$ 列组成的行列式. 将这个行列式按某一行展开，则它的每一展开项都是一个多项式与一个 i 阶子式的乘积. 由于 $D_i(\lambda)$ 是所有 i 阶子式的公因子，因此 $D_i(\lambda) \mid A_{i+1}$. 而 $D_{i+1}(\lambda)$ 是所有这类 A_{i+1} 的最大公因子，因此 $D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda)$. 证毕.

定义 7.3.2　设 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_r(\lambda)$ 是 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子，则 $g_1(\lambda)=D_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)$, $\cdots$, $g_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

例 7.3.1 中矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda).$$

定理 7.3.1　相抵的 λ-矩阵有相同的行列式因子，从而有相同的不变因子.

证明　我们只需证明行列式因子在任意一种初等变换下不变就可以了. 对第一种初等变换，交换 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的任两行，显然 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式最多改变一个符号，因此行列式因子不改变.

对第二种初等变换，$A(\lambda)$ 的 i 阶子式与变换后矩阵的 i 阶子式最多差一个非零常数，因此行列式因子也不改变.

对第三种初等变换，记变换后的矩阵为 $B(\lambda)$，则 $B(\lambda)$ 与 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式可

能出现以下 3 种情形:子式完全相同;$B(\lambda)$子式中的一行(或一列)等于 $A(\lambda)$中相应子式的同一行(列)加上该子式中某一行(列)与某个多项式之积;$B(\lambda)$子式的某一行(列)等于 $A(\lambda)$中相应子式的同一行(列)加上不在该子式中的某一行与某个多项式之积. 在前面两种情形,行列式的值不改变,因此不影响行列式因子. 现在来讨论第三种情形. 设 B_i 为 $B(\lambda)$的 i 阶子式,相应的 $A(\lambda)$的 i 阶子式记为 A_i,则由行列式性质得

$$B_i = A_i + f(\lambda)\widetilde{A}_i, \tag{7.3.2}$$

其中 $\widetilde{A}_i$ 由 $A(\lambda)$ 中的 i 行与 i 列组成,因此它与 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式最多差一个符号. $f(\lambda)$ 是乘以某一行的那个多项式,于是 $A(\lambda)$ 的行列式因子 $D_i(\lambda) \mid A_i, D_i(\lambda) \mid \widetilde{A}_i$,故 $D_i(\lambda) \mid B_i$. 这说明,$D_i(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 的所有 i 阶子式,因此 $D_i(\lambda)$ 可整除 $B(\lambda)$ 的 i 阶行列式因子 $\widetilde{D}_i(\lambda)$. 但 $B(\lambda)$ 也可用第三种初等变换变成 $A(\lambda)$,于是 $\widetilde{D}_i(\lambda) \mid D_i(\lambda)$. 由于 $D_i(\lambda)$ 及 $\widetilde{D}_i(\lambda)$ 都是首一的多项式, 因此必有 $D_i(\lambda) = \widetilde{D}_i(\lambda)$. 证毕.

定理 7.3.2 **数域 $\mathbf{K}$ 上 n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 和 $\lambda I - B$ 具有相同的行列式因子或不变因子.**

证明 显然不变因子被行列式因子唯一确定,反之行列式因子也被不变因子唯一确定. 再由定理 7.3.1 及定理 7.1.2 即得结论. 证毕.

以后 $\lambda I - A$ 的行列式因子及不变因子均简称为 A 的行列式因子与不变因子.

推论 7.3.1 **设 $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的两个数域且 $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{K}$, 若 A, B 是 $\mathbf{F}$ 上的两个矩阵,那么 A, B 在 $\mathbf{F}$ 上相似的充分必要条件是它们在 $\mathbf{K}$ 上相似.**

证明 若 A, B 在 $\mathbf{F}$ 上相似,由于 $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{K}$, 它们当然在 $\mathbf{K}$ 上相似. 反之,若 A, B 在 $\mathbf{K}$ 上相似,则 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $\mathbf{K}$ 上有相同的不变因子,也就是说它们有相同的法式. 但在求法式的过程中只涉及多项式的加、减、乘及数的加、减、乘、除运算. 而数域在加、减、乘、除运算下封闭,数域上的多项式在加、减、乘及数乘下也封闭. 因此,法式中的不变因子多项式 $d_i(\lambda)$仍是 $\mathbf{F}$ 上的多项式,与初等变换相对应的初等矩阵也是 $\mathbf{F}$ 上的 λ-矩阵,这就是说存在 $\mathbf{F}$ 上可逆 λ-矩阵 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $M(\lambda)$, $N(\lambda)$, 使

$$\begin{aligned} P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) &= M(\lambda)(\lambda I - A)N(\lambda) \\ &= \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}. \end{aligned}$$

故 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $\mathbf{F}$ 上相抵,从而 A 和 B 在 $\mathbf{F}$ 上相似. 证毕.

习　题　7.3

1. 求下列矩阵的行列式因子与不变因子：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否相似：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

3. 求下列 n 阶上三角阵的行列式因子和不变因子：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

4. 设 A 是 n 阶矩阵，求证：存在某个常数 k，使得 $A = kI_n$ 的充分必要条件是 A 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-1$ 次多项式.

5. 证明：任一 n 阶方阵 A 必与它的转置 A' 相似.

§7.4　有理标准型

利用矩阵的不变因子，现在可以来构造所谓的"有理标准型"了. 我们的想法是寻找一个比较简单的矩阵，使它与给定的矩阵有相同的不变因子. 由前面两节我们已经知道，矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的法式为

$$\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_k(\lambda)\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为首一非常数多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$. A 的不变因子就是

$$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda).$$

引理 7.4.1 下列 r 阶矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

的行列式因子等于

$$1, \cdots, 1; f(\lambda), \tag{7.4.1}$$

其中共有 $r-1$ 个 1，$f(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r$，$F$ 的不变因子组也由(7.4.1)式给出.

证明 F 的 r 阶行列式因子就是它的特征多项式，由第一章例 1.5.7 得

$$|\lambda I - F| = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r.$$

对任一 $k < r$，$\lambda I - F$ 总有一个 k 阶子式其值等于 $(-1)^k$，故 $D_k(\lambda) = 1$. 证毕.

引理 7.4.2 设 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 相抵于对角 λ-矩阵

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}, \tag{7.4.2}$$

λ-矩阵 $B(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\mathrm{diag}\{d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_n(\lambda)\}, \tag{7.4.3}$$

且 $d'_1(\lambda), d'_2(\lambda), \cdots, d'_n(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的一个置换(即若不计次序，这两组多项式完全相同)，则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$.

证明 利用第一类行及列初等变换即可将(7.4.2)式变成(7.4.3)式，因此(7.4.2)式所示的矩阵与(7.4.3)式所示的矩阵相抵，从而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵. 证毕.

定理 7.4.1 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶方阵，A 的不变因子组为

$$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda),$$

其中 $\deg d_i(\lambda) = m_i$，则 A 相似于下列分块对角阵：

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}, \tag{7.4.4}$$

其中 F_i 的阶等于 m_i，且 F_i 是形如引理 7.4.1 中的矩阵，F_i 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 系数(除最高次项)的负值组成.

证明　注意到 $\lambda I - A$ 的第 n 个行列式因子就是 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$，再由行列式因子的相抵不变性可知：

$$|\lambda I - A| = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda).$$

而 $|\lambda I - A|$ 是一个 n 次多项式，因此 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. 矩阵 F_i 的行列式因子为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ d_i(\lambda),$$

其中共有 $m_i - 1$ 个 1. 将 $\lambda I - A$ 的法式作如下变动：

$$\operatorname{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda);1,\ \cdots,\ 1,\ d_2(\lambda);\cdots;1,\ \cdots,\ 1,\ d_k(\lambda)\}, \tag{7.4.5}$$

每个 $d_i(\lambda)$ 前配以 $m_i - 1$ 个 1. (7.4.5) 式所示的矩阵与 $\lambda I - A$ 仍相抵(引理 7.4.2). 由引理 7.4.1 可知 $\lambda I - F$ 与 (7.4.5) 式所示的矩阵相抵，于是 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - F$ 相抵，即 A 与 F 相似. 证毕.

例 7.4.1　设 6 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1,\ 1,\ 1,\ \lambda - 1,\ (\lambda - 1)^2,\ (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

则 A 的有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注　(7.4.4) 式称为矩阵 A 的有理标准型或 Frobenius(弗罗本纽斯)标准型，每个 F_i 称为 Frobenius 块.

在第六章第 3 节中我们定义了一个矩阵的极小多项式，用有理标准型可以清楚地表明极小多项式与不变因子的关系.

定理 7.4.2　设数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,\ d_k(\lambda),$$

其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i = 1,\ \cdots,\ k-1)$，则 A 的极小多项式 $m(\lambda) = d_k(\lambda)$.

证明 设 A 的有理标准型为

$$F=\begin{pmatrix}F_1&&&\\&F_2&&\\&&\ddots&\\&&&F_k\end{pmatrix}.$$

因为相似矩阵有相同的极小多项式,故只需证明 F 的极小多项式是 $d_k(\lambda)$ 即可. 但 F 是分块对角阵,由第六章第3节知道,F 的极小多项式是诸 F_i 极小多项式的最小公倍式. 而 F_i 的极小多项式正如下面的引理所示,恰为 $d_i(\lambda)$. 又 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$, 因此诸 $d_i(\lambda)$的最小公倍式等于 $d_k(\lambda)$. 证毕.

引理 7.4.3 引理 7.4.1 中的矩阵 F 的极小多项式等于

$$f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r.$$

证明 因为 F 的特征多项式为 $f(\lambda)$,所以 F 适合多项式 $f(\lambda)$. 设 $e_i(i=1, 2, \cdots, r)$ 是 r 维标准单位列向量,则不难算出:

$$e_1'F=e_2',\ e_1'F^2=e_3',\ \cdots,\ e_1'F^{r-1}=e_r'.$$

显然, e_1', $e_1'F$, $\cdots$, $e_1'F^{r-1}$ 是一组线性无关的向量,因此 F 不可能适合一个次数不超过 $r-1$ 的多项式,即 F 的极小多项式就是 $f(\lambda)$,证毕.

例 7.4.2 下面两个4阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

的不变因子分别为 A: $1, \lambda, \lambda, \lambda^2$ 和 B: $1, 1, \lambda^2, \lambda^2$. 它们的特征多项式和最小多项式分别相等,但它们不相似.

习 题 7.4

1. 根据下列不变因子组写出有理标准型:

(1) $1, 1, \lambda, \lambda(\lambda+1)^2$;

(2) $1, 1, 1, (\lambda+1), (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3$.

2. 求下列矩阵的有理标准型:

(1) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}$.

3. 证明：A 的特征多项式与极小多项式相等的充分必要条件是 $\lambda I - A$ 的行列式因子为

$$1, \cdots, 1, D_n(\lambda).$$

4. 若矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 的特征多项式与极小多项式相等.

5. 若将有理标准型 $F = \mathrm{diag}\{F_1, F_2, \cdots, F_k\}$ 中任意两个 Frobenius 块 F_i 与 F_j 互换位置，问：所得的矩阵与 F 是否相似？

6. n 阶矩阵 A 是幂零矩阵，即有大于 1 的整数 k，使 $A^k = 0$, $A^{k-1} \neq 0$. 写出 A 的最后一个不变因子.

7. 矩阵 A 的特征多项式和极小多项式重合，矩阵 B 也具有这个性质，若 A 和 B 的特征多项式相同，问：A, B 是否必相似？

8. 例 7.4.2 说明即使两个矩阵的特征多项式和极小多项式分别相等，这两个矩阵仍可能不相似. 假定限制矩阵的阶不超过 3，两个特征多项式和极小多项式分别相等的矩阵是否仍有可能不相似？

*9. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，又 φ 的极小多项式的次数等于 n. 若 ψ 是 V 上的另一个线性变换，且 $\psi\varphi = \varphi\psi$. 求证：$\psi = g(\varphi)$，其中 g 是一个不高于 $n-1$ 次的多项式.

*10. 设 $f(\lambda)$ 及 $m(\lambda)$ 分别是数域 $\mathbf{K}$ 上矩阵 A 的特征多项式与极小多项式，假设

$$m(\lambda) = p_1^{e_1}(\lambda) p_2^{e_2}(\lambda) \cdots p_t^{e_t}(\lambda)$$

是 $m(\lambda)$ 的一个不可约分解，又

$$f(\lambda) = p_1^{r_1}(\lambda) p_2^{r_2}(\lambda) \cdots p_t^{r_t}(\lambda)$$

是 $f(\lambda)$ 的不可约分解，矩阵 $p_i(A)^{e_i}$ 的零度即它的核空间的维数记为 m_i，求证：

$$r_i = \frac{m_i}{\deg p_i}.$$

§7.5　初等因子

利用矩阵的不变因子，我们可以求一个矩阵的有理标准型. 有理标准型对任何数域 $\mathbf{K}$ 都可以求出来，它有着诸多的用途. 但是有理标准型也有一些缺点，主要是它有时不够"简单"，即有时每个 Frobenius 块太大，用起来不太方便. 有理标准型中 Frobenius 块太大的原因是不变因子 $d_i(\lambda)$ 的次数可能比较高. 如果我们用因子分解的方法分解每个 $d_i(\lambda)$，这就有可能造出更"细"的标准型来. 为此，我们先引进初等因子的概念.

设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$是数域 $\mathbf{K}$ 上矩阵 A 的非常数不变因子,在 $\mathbf{K}$ 上把 $d_i(\lambda)$分解成不可约因子之积:

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda),\\
d_2(\lambda) &= p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{2t}}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d_k(\lambda) &= p_1^{e_{k1}}(\lambda)p_2^{e_{k2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{kt}}(\lambda),
\end{aligned}
\tag{7.5.1}
$$

其中 e_{ij} 是非负整数(注意 e_{ij} 可以为零!). 由于 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$, 因此

$$e_{1j} \leqslant e_{2j} \leqslant \cdots \leqslant e_{kj} (j = 1, 2, \cdots, t).$$

定义 7.5.1 *若(7.5.1)式中的 $e_{ij} > 0$, 则称 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 为 A 的一个初等因子, A 的全体初等因子称为 A 的初等因子组.*

由因式分解的唯一性可知 A 的初等因子被 A 的不变因子唯一确定. 反过来,若给定一组初等因子 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$,适当增加一些 1(表示为 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$, $e_{ij} = 0$), 则可将这组初等因子按降幂排列如下:

$$
\begin{aligned}
&p_1^{e_{k1}}(\lambda),\ p_1^{e_{k-1,1}}(\lambda),\ \cdots,\ p_1^{e_{11}}(\lambda),\\
&p_2^{e_{k2}}(\lambda),\ p_2^{e_{k-1,2}}(\lambda),\ \cdots,\ p_2^{e_{12}}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_t^{e_{kt}}(\lambda),\ p_t^{e_{k-1,t}}(\lambda),\ \cdots,\ p_t^{e_{1t}}(\lambda),
\end{aligned}
\tag{7.5.2}
$$

令

$$
\begin{aligned}
d_k(\lambda) &= p_1^{e_{k1}}(\lambda)p_2^{e_{k2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{kt}}(\lambda),\\
d_{k-1}(\lambda) &= p_1^{e_{k-1,1}}(\lambda)p_2^{e_{k-1,2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{k-1,t}}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d_1(\lambda) &= p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda),
\end{aligned}
$$

则 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i = 1, \cdots, k-1)$,且 $d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$ 的初等因子组就如(7.5.2)式所示. 因此,给定 A 的初等因子组,我们可唯一地确定 A 的不变因子组. 这一事实表明,A 的不变因子组与初等因子组在讨论矩阵相似关系中的作用是相同的. 因此我们有下述定理.

定理 7.5.1 *数域 $\mathbf{K}$ 上的两个矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们有*

相同的初等因子组,即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的全系不变量.

例 7.5.1 设 9 阶矩阵 A 的不变因子组为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ (\lambda-1)(\lambda^2+1),\ (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别在有理数域、实数域和复数域上求 A 的初等因子组.

解 A 在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2-2.$$

A 在实数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2+1,\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda-\sqrt{2}.$$

A 在复数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda+i,\ \lambda+i,\ \lambda-i,\ \lambda-i,\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda-\sqrt{2}.$$

例 7.5.2 设 A 是一个 10 阶矩阵,它的初等因子组为

$$\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3,\ \lambda-2.$$

求 A 的不变因子组.

解 将上述多项式分类按降幂排列:

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1;$$

$$(\lambda+1)^3, (\lambda+1)^2;$$

$$\lambda-2.$$

于是

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2),$$

$$d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2,\ d_1(\lambda)=\lambda-1.$$

A 的不变因子组为

$$1,\ \cdots,\ 1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)(\lambda+1)^2,\ (\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2),$$

其中有 7 个 1.

用初等因子组我们可以得到比有理标准型更精细的标准型. 对每个初等因子 $p^l(\lambda)$,我们可构造一个比较简单的矩阵,使它的初等因子组就是 $p^l(\lambda)$,再将所有这样的矩阵拼成一个分块对角阵就可以得到标准型. 显而易见,数域越"大",矩阵的初等因子越多,从而分块也越精细. 我们在这里不打算构造一般数

域上以初等因子为基础的标准型,在下一节中我们将讨论复数域上以初等因子为基础的 Jordan(若当) 标准型.

习　题　7.5

1. 已知矩阵的不变因子组,求它的初等因子组(分别在有理数域、实数域与复数域上):

(1) $1, \cdots, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda-1), (\lambda-1)^3(\lambda+1)\lambda^2$;

(2) $1, \cdots, 1, \lambda^2+1, \lambda(\lambda^2+1), \lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)(\lambda^2-2)$.

2. 已知矩阵的初等因子组,求它的不变因子组:

(1) $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda-\sqrt{2}, (\lambda-\sqrt{2})^2, \lambda+\sqrt{2}, (\lambda+\sqrt{2})^2$;

(2) $\lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^3, \lambda-2, (\lambda-2)^2$.

§7.6　Jordan 标准型

我们根据上一节末提出的寻找标准型的思想来讨论复数域上的标准型. 由于任一多项式在复数域上均可分解为一次因子的乘积,因此复数域上的初等因子都是一次因子的幂. 又因为初等因子必是矩阵特征多项式的因式,故必具有 $(\lambda-\lambda_0)^r$ 的形状,其中 λ_0 是矩阵的特征值. 我们先来找一个形状比较简单的矩阵,它的初等因子组就是 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

引理 7.6.1　r 阶矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

证明　显然 J 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^r$. 对任一小于 r 的自然数 k, $\lambda I-J$ 总有一个 k 阶子式,其值等于 $(-1)^k$,因此 J 的行列式因子为

$$1, \cdots, 1, (\lambda-\lambda_0)^r, \tag{7.6.1}$$

(7.6.1) 式也是 J 的不变因子组,故 J 的初等因子组只有一个多项式 $(\lambda-\lambda_0)^r$. 证毕.

引理 7.6.2　设矩阵 $\lambda I-A$ 经过初等变换化为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{7.6.2}$$

其中 $f_i(\lambda)$ $(i=1, \cdots, n)$ 为非零首一多项式. 将 $f_i(\lambda)$ 作不可约分解，若 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 能整除 $f_i(\lambda)$，但 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$ 不能整除 $f_i(\lambda)$，就称 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 是 $f_i(\lambda)$ 的一个准素因子，则矩阵 A 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子的集合.

证明　第一步，先证明下列事实：

若 $f_i(\lambda)$, $f_j(\lambda)$ $(i\neq j)$ 的最大公因式为 $g(\lambda)$；$f_i(\lambda)$, $f_j(\lambda)$ 的最小公倍式是 $h(\lambda)$，则

$$\operatorname{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, f_i(\lambda), \cdots, f_j(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$$

经过初等变换可以变为

$$\operatorname{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, g(\lambda), \cdots, h(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\},$$

且这两个对角阵具有相同的准素因子组.

不失一般性，令 $i=1$, $j=2$. 因为 $(f_1(\lambda), f_2(\lambda))=g(\lambda)$，所以存在 $u(\lambda)$, $v(\lambda)$，使

$$f_1(\lambda)u(\lambda)+f_2(\lambda)v(\lambda)=g(\lambda).$$

又令 $f_1(\lambda)=g(\lambda)q(\lambda)$，则 $h(\lambda)=f_2(\lambda)q(\lambda)$. 对(7.6.2)式作下列初等变换：

$$\begin{array}{c}(u(\lambda))\\ \downarrow\end{array}\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{array}{c}\xleftarrow{\quad(v(\lambda))\quad}\\ \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & & \\ f_1(\lambda)u(\lambda) & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}\end{array} \to$$

$$\begin{array}{c}\uparrow\\ (-q(\lambda))\end{array}\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ g(\lambda) & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -h(\lambda) & & \\ g(\lambda) & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} g(\lambda) & & & \\ & h(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

现来考察 $g(\lambda)$ 与 $h(\lambda)$ 的准素因子. 将 $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ 作标准分解,其分解式不妨设为

$$f_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{c_1}(\lambda-\lambda_2)^{c_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{c_t},$$

$$f_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{d_t},$$

其中 c_i, d_i 为非负整数. 令

$$e_i=\max\{c_i,\ d_i\},\ k_i=\min\{c_i,\ d_i\},$$

则

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_t},$$

$$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_1}(\lambda-\lambda_2)^{e_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_t}.$$

不难看出 $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ 的准素因子组与 $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ 的准素因子组相同.

第二步证明(7.6.2)式所示矩阵的法式可通过上述变换得到.

注意到(7.6.2)式中矩阵的主对角线上的元素可以任意对换而不影响问题的讨论,故不妨设 $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $\cdots$, $f_n(\lambda)$ 按升幂排列. 这时如果 $f_i(\lambda)\mid f_{i+1}(\lambda)$,则这已是法式. 不然,根据上面的讨论可用 $f_i(\lambda)$, $f_{i+1}(\lambda)$ 的最大公因式 $g(\lambda)$ 和最小公倍式 $h(\lambda)$ 分别代替它们. 可以看出,经过有限次这样的步骤以后就可以将(7.6.2)式化为法式. 而在每一步骤中,准素因子组保持不变,这就证明了结论. 证毕.

例 7.6.1 设 $\lambda I-A$ 经过初等变换后成为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (\lambda-1)^2(\lambda+2) & & & \\ & & (\lambda+2) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda-1) \end{pmatrix},$$

求 A 的初等因子组.

解 A 的初等因子组为 $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda+2$, $\lambda+2$.

注 引理 7.6.2 给出了求矩阵初等因子组的另外一个方法,它可以不必先

求不变因子组而直接用初等变换把特征矩阵化为对角阵,再分解主对角线上的多项式即可.

引理 7.6.3　设 J 是分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每个 J_i 都是形如引理 7.6.1 中的矩阵,J_i 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,则 J 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k}. \tag{7.6.3}$$

证明　$\lambda I-J$ 是一个分块对角 λ-矩阵. 由于对分块对角阵中某一块施行初等变换时其余各块保持不变,因此 $\lambda I-J$ 相抵于下列分块对角阵:

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix},$$

其中 $H_i=\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1;(\lambda-\lambda_i)^{r_i}\}$. 再对 H 进行行列对换使 H 相抵于

$$\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1;(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k}\}. \tag{7.6.4}$$

(7.6.4) 式中矩阵的初等因子就如(7.6.3) 式所示. 证毕.

定理 7.6.1　设 A 是复数域上的矩阵且 A 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则 A 相似于分块对角阵:

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}, \tag{7.6.5}$$

其中 J_i 为 r_i 阶矩阵,且

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}. \qquad (7.6.6)$$

证明 由引理 7.6.1 及引理 7.6.3 知道 A 与 J 有相同的初等因子组,因此 A 与 J 相似. 证毕.

注 (7.6.5) 式中的矩阵称为 A 的 Jordan 标准型,每个 J_i 称为 A 的一个 Jordan 块.

由引理 7.6.3 我们可以看出,若交换任意两个 Jordan 块的位置,得到的矩阵与原来的矩阵仍有相同的初等因子组,它们仍相似. 因此矩阵 A 的 Jordan 标准型中 Jordan 块的排列可以是任意的. 但是,由于每个初等因子组唯一确定了一个 Jordan 块,故若不计 Jordan 块的排列次序,则矩阵的 Jordan 标准型是唯一确定的.

至此,我们对复数域上线性空间的线性变换解决了在第四章中提出的问题:求 V 的一组基,使该线性变换在这组基下的表示矩阵具有简单的形式. 我们把这一结果叙述为下列定理.

定理 7.6.2 *设 φ 是复数域上线性空间 V 上的线性变换,则必存在 V 的一组基,在这组基下 φ 的表示矩阵为(7.6.5) 式所示的 Jordan 标准型.*

推论 7.6.1 *复线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V 的某组基下可以表示为对角阵的充分必要条件是 φ 的初等因子全是一次式.*

推论 7.6.2 *复线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V 的某组基下可以表示为对角阵的充分必要条件是 φ 的极小多项式无重根.*

证明 若 φ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 无重根,则由于 $m(\lambda)$ 是 A 的最后一个不变因子,故 A 的所有不变因子都无重根. 也就是 A 的初等因子全是一次式. 由上面的推论知 φ 可对角化. 反之,若存在 V 的一组基,φ 在这组基下的表示矩阵 A 是对角阵,A 的极小多项式等于 A 主对角线上一阶矩阵极小多项式的最小公倍式(参见第六章第 3 节),显然无重根. 证毕.

推论 7.6.3 *复矩阵 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 的极小多项式无重根.*

推论 7.6.4 *设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的矩阵,如果 A 的特征值全在 $\mathbf{K}$ 中且其极小多项式无重根,则 A 在 $\mathbf{K}$ 上相似于对角阵.*

证明 因为 A 在复数域上相似于对角阵,其对角元素都在 $\mathbf{K}$ 中,由

推论 7.3.1 知道 A 在 $\mathbf{K}$ 上也相似于此对角阵. 证毕.

推论 7.6.5　设 V_0 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 V 中线性变换 φ 的不变子空间. 如果 φ 可对角化,则 φ 在 V_0 上的限制也可对角化.

证明　因为 φ 的极小多项式 $g(\lambda)$ 无重根,而它在 V_0 上限制的极小多项式是 $g(\lambda)$ 的因子,所以也没有重根. 证毕.

例 7.6.2　设 A 是 7 阶阵,其初等因子组为

$$\lambda-1,\ (\lambda-1)^3;(\lambda+1)^2,\ \lambda-2.$$

求其 Jordan 标准型.

解　A 的 Jordan 标准型为

$$J=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&1&0&&&\\&0&1&1&&&\\&0&0&1&&&\\&&&&-1&1&\\&&&&0&-1&\\&&&&&&2\end{pmatrix},$$

J 含有 4 个 Jordan 块.

例 7.6.3　设复数域上的四维线性空间上的线性变换 φ 在一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4\}$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\6&1&2&1\\-14&-5&-1&0\end{pmatrix},$$

求 V 的一组基,使 φ 在这组基下的矩阵为 Jordan 标准型,并求出从原来的基到新基的过渡矩阵.

解　用初等变换把 $\lambda I-A$ 化为对角 λ-矩阵并求出它的初等因子组为

$$(\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2.$$

因此,A 的 Jordan 标准型为

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

设矩阵 P 是从 e_1, e_2, e_3, e_4 到新基的过渡矩阵,则

$$P^{-1}AP=J,$$

此即

$$AP=PJ. \tag{7.6.7}$$

设 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是四维列向量,代入(7.6.7)式得

$$(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3, A\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&&\\&&1&1\\&&0&1\end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$A\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

求出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 便可求出 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$. 诸 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的解可能不唯一,只需取比较简单的一组解就可以了.需要注意的是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 A 的属于特征值 1 的特征向量,因此取方程组 $(I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解之一作 $\boldsymbol{\alpha}_1$,另一个作 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 就可以了(注意不能取线性相关的两个解,因为 P 是非异阵),我们求得:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-6\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-4&-6&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

因此新基为

$$\{e_1-2e_2-4e_3,\ e_2-6e_3+e_4,\ e_3-e_4,\ e_4.\}$$

习　题　7.6

1. 已知矩阵的下列初等因子组,写出 Jordan 标准型:

(1) $\lambda,\ \lambda^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2$;

(2) $(\lambda+1)^2,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^3$;

(3) $(\lambda-\sqrt{2})^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^3,\ (\lambda-1)^3$.

2. 求下列矩阵的 Jordan 标准型:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

3. 设复四维空间上线性变换 φ 在基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的矩阵如第 2 题(4) 所示,求一组新基使 φ 在这组基下的矩阵为 Jordan 标准型并求过渡矩阵.

4. 设 A 是有理数域上的矩阵,A 的特征多项式是一个有理数域上的不可约多项式,求证:A 的有理标准型只有一块 Frobenius 块,而如果把 A 看成是复数域上的矩阵,则 A 的 Jordan 标准型是一个对角阵.

5. 设 A 是一个形如下式的分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

证明:A 的初等因子组等于 $A_i\,(i=1, \cdots, k)$ 的初等因子组的无交并集.

6. 在第 5 题中若任意交换各块的位置,求证:所得的矩阵与原矩阵 A 相似.

7. 设 n 阶矩阵 A 适合 $A^2=0$, A 的秩等于 r,求出 A 的初等因子组.

8. 设有理数域上 n 阶矩阵 A 的特征多项式的所有不可约因子是

$$\lambda^2+\lambda+1,\ \lambda^2-2.$$

又 A 的最小多项式是四次式,求证:A 在复数域上必相似于对角阵.

9. 设 A 是 n 阶复矩阵且存在自然数 k 使 $A^k=I_n$,求证:A 相似于对角阵.

10. 若非零矩阵 A 适合 $A^2=A$ 且秩等于 r,试求 A 的 Jordan 标准型.

§7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用举例

在这一节里,我们要用 Jordan 标准型更仔细地来考察复线性空间按线性变换 φ 所做的直和分解以及 φ 特征值的度数与重数的关系,并给出 Jordan 标准型应用的一些例子.

设 V 是 n 维复线性空间,φ 是 V 上的线性变换. 设 φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

定理 7.6.2 告诉我们,存在 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$,在这组基下 φ 的表示矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

上式中每个 J_i 是相应于初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 的 Jordan 块,其阶正好为 r_i. 令 V_1 是由基元 $\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{r_1}$ 生成的子空间,则

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{e}_1)&=\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\\
\varphi(\boldsymbol{e}_2)&=\boldsymbol{e}_1+\lambda_1\boldsymbol{e}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi(\boldsymbol{e}_{r_1})&=\boldsymbol{e}_{r_1-1}+\lambda_1\boldsymbol{e}_{r_1}.
\end{aligned} \tag{7.7.1}$$

这表示 $\varphi(V_1)\subseteq V_1$,即 V_1 是 φ 的不变子空间. 这一结论自然对任一 i 都对,即 V_i 是 φ 的不变子空间,其中 V_i 是对应于 J_i 的 V 的子空间. V_i 由 $\boldsymbol{e}_{s+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{s+r_i}$ 生成,其中 $s=r_1+\cdots+r_{i-1}$,我们有

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k.$$

线性变换 φ 限制在 V_1 上(仍记为 φ)便成为 V_1 上的线性变换. 这个线性变换在

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{r_1}$ 下的矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

J_1 的特征值为 λ_1,由于 $\lambda_1 I - J_1$ 是一个秩为 $r_1 - 1$ 的矩阵,因此 J_1 只有一个线性无关的特征向量,不妨选为 $\boldsymbol{e}_1$. 显然 $\boldsymbol{e}_1$ 也是 φ 作为 V 上线性变换的特征向量(关于特征值 λ_1). 现设 φ 的相同特征值已归并在一起,即

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{t_1}, \lambda_{t_1+1} = \cdots = \lambda_{t_2}, \cdots,$$

相应的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_1)^{r_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_1)^{r_{t_1}}, \cdots,$$

则 $J_1, \cdots, J_{t_1}$ 都以 λ_1 为特征值,且相应于每一块有且只有一个线性无关的特征向量. 相应的特征向量可取为

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{r_1+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{r_{t_1-1}+1}. \tag{7.7.2}$$

显然这是 t_1 个线性无关的特征向量. 因此 φ 关于特征值 λ_1 的特征子空间 V_{λ_1} 以(7.7.2)式中的向量组为基,且

$$\dim V_{\lambda_1} = t_1.$$

但这时 λ_1 是 φ 的 $r_1 + r_2 + \cdots + r_{t_1}$ 重特征值. 因此 λ_1 的重数与度数之差等于

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_{t_1}) - t_1.$$

于是我们得到如下结论:线性变换 φ 的特征值 λ_1 的度数等于 φ 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_1 的块数,λ_1 的重数等于所有属于 λ_1 的块组成的分块对角阵的阶数.

现在再来看 J_1 所对应的子空间 V_1. 由(7.7.1)式中诸等式可知

$$(\varphi - \lambda_1 I)(\boldsymbol{e}_{r_1}) = \boldsymbol{e}_{r_1-1}, \cdots, (\varphi - \lambda_1 I)(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1,$$

因此,若记 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_{r_1}$, $\psi = \varphi - \lambda_1 I$, 则

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{e}_{r_1-1}, \psi^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{e}_{r_1-2}, \cdots, \psi^{r_1-1}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{e}_1, \psi^{r_1}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}.$$

也就是说

$$\{\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\alpha}),\ \psi^2(\boldsymbol{\alpha}),\ \cdots,\ \psi^{r_1-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$$

构成了 V_1 的一组基.

定义 7.7.1 设 V_0 是线性空间 V 的 r 维子空间,ψ 是 V 上线性变换. 若存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V_0$,使 $\{\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\alpha}),\ \cdots,\ \psi^{r-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$ 构成 V_0 的一组基且 $\psi^r(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,则称 V_0 为关于线性变换 ψ 的循环子空间.

上面的事实说明,每个 Jordan 块对应的子空间是一个循环子空间. 把属于同一个特征值,比如属于 λ_1 的所有循环子空间加起来组成 V 的一个子空间:

$$R(\lambda_1)=V_1\oplus\cdots\oplus V_{t_1}.$$

若 $\boldsymbol{v}\in R(\lambda_1)$,则不难算出$(\varphi-\lambda_1 I)^s(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 其中

$$s=\dim R(\lambda_1)=r_1+\cdots+r_{t_1}.$$

事实上,我们可以证明

$$R(\lambda_1)=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\varphi-\lambda_1 I)^n(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}\}. \tag{7.7.3}$$

为证明(7.7.3)式成立,设 $U=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\varphi-\lambda_1 I)^n(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}\}$, 则由上面的分析知道, $R(\lambda_1)\subseteq U$. 另一方面,设 $\boldsymbol{v}\in U$, λ_j 是不等于 λ_1 的特征值,若 $\boldsymbol{v}$ 在 $R(\lambda_j)$中的分量不等于零,利用 Jordan 标准型不难发现, $(\varphi-\lambda_1 I)^n(\boldsymbol{v})$ 将不可能等于零,这是因为$(\varphi-\lambda_1 I)^n(\boldsymbol{v})$ 在 $R(\lambda_j)$ 中的分量不等于零. 因此,$\boldsymbol{v}$ 必须属于 $R(\lambda_1)$. 这就证明了(7.7.3)式.

定义 7.2.2 设 λ_0 是 n 维复线性空间上线性变换 φ 的特征值,则

$$R(\lambda_0)=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\varphi-\lambda_0 I)^n(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}\}$$

构成了 V 的一个子空间,称为属于特征值 λ_0 的根子空间.

上面的结果表明:特征值 λ_0 的根子空间可表示为若干个循环子空间的直和,每个循环子空间对应于一个 Jordan 块.

虽然我们前面的讨论是对特征值 λ_1 进行的,其实对任一特征值 λ_i 均适用. 因此便有如下的定理.

定理 7.7.1 设 φ 是复 n 维线性空间 V 上的线性变换,φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则

(1) V 可分解为 k 个不变子空间的直和:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k, \tag{7.7.4}$$

其中 V_i 的维数等于 r_i 且是 $\varphi - \lambda_i I$ 的循环子空间;

(2) 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 φ 互不相同的全部特征值,则 V 可分解为 s 个不变子空间的直和:

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s), \tag{7.7.5}$$

其中每个 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间,$R(\lambda_i)$ 的维数等于 λ_i 的重数,且每个 $R(\lambda_i)$ 又可分解为(7.7.4)式中若干个 V_j 的直和.

下面我们举例说明 Jordan 标准型在矩阵理论上的应用.

例 7.7.1　证明:复数域上的方阵 A 必可分解为两个对称矩阵的乘积.

证明　设 P 是非异阵且使 $P^{-1}AP = J$ 为 A 的 Jordan 标准型. 于是 $A = PJP^{-1}$. 设 J_i 是 J 的第 i 个 Jordan 块,则

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & 1 & \lambda_i & \\ & \iddots & \iddots & & \\ 1 & \iddots & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

即 J_i 可分解为两个对称矩阵之积,于是 J 也可以分解为两个对称矩阵之积,记为 S_1, S_2,则

$$A = PJP^{-1} = PS_1S_2P^{-1} = (PS_1P')(P^{-1})'S_2P^{-1}.$$

证毕.

例 7.7.2　设 A 是本章例 7.6.3 中的矩阵,计算 $A^k (k > 1)$.

解　因为

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = J^k,$$

故先计算 J^k. 注意 J 是分块对角阵,它的 k 次方等于将各对角块 k 次方,因此

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & k \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k+1 & k & 0 & 0 \\ -4k & -2k+1 & 0 & 0 \\ 6k & k & k+1 & k \\ -14k & -5k & -k & -k+1 \end{pmatrix}.$$

下面我们要用 Jordan 标准型来证明著名的 Jordan - Chevalley(若当-谢瓦莱)分解定理,它在 Lie(李)代数中有重要的应用. 为此我们先证明一个引理.

引理 7.7.1　设 A, B 是两个 n 阶可对角化复矩阵且 $AB = BA$, 则它们可同时对角化,即存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角阵.

证明　对矩阵阶用归纳法. 当 $n = 1$ 时显然,设结论对阶小于 n 的矩阵成立. 令 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_s 是矩阵 A 的全体不同的特征值. 如果 $s = 1$, 则因为 A 可对角化,不难推出 $A=\lambda_1 I$, 即 A 是数量矩阵. 这时若 $P^{-1}BP$ 是对角阵,则 $P^{-1}AP = \lambda_1 I_n$ 也是对角阵,结论已成立. 因此我们设 $s>1$. 矩阵 A 定义了 n 维复列向量空间 V 上的线性变换记为 φ, $V_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 是属于特征值 λ_i 的特征子空间. 因为 A 可对角化,故

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

记 ψ 为矩阵 B 定义的 V 上线性变换,则 $\varphi\psi = \psi\varphi$. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V_i$, $\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \psi\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_i\psi(\boldsymbol{\alpha})$, 这表明 $\psi(\boldsymbol{\alpha}) \in V_i$, 即 V_i 是 ψ 的不变子空间. 将 ψ 和 φ 限制在 V_i 上显然仍是可对角化线性变换且它们乘法可交换. 由归纳假设,存在 V_i 的基,在此基下,ψ, φ 在 V_i 上限制的表示矩阵都是对角阵. 将各个 V_i 的基合并成 V 的基,显然在此基下,φ, ψ 的表示矩阵都是对角阵. 证毕.

***例 7.7.3(Jordan - Chevalley 分解)**　设 A 是 n 阶复矩阵,则 A 可分解为 $A = B+C$, 其中 B, C 适合下面条件:

(1) B 是一个可对角化矩阵;

(2) C 是一个幂零矩阵;

(3) $BC = CB$;

(4) B, C 均可表示为 A 的多项式.

不仅如此,上述满足条件(1)～(3)的分解是唯一的.

证明　先对 A 的 Jordan 标准型 J 证明结论. 设 A 的全体不同特征值为 λ_1,

$\lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 且

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 J_i 是属于特征值 λ_i 的根子空间对应的块,其阶设为 m_i. 显然,对每个 i 均有 $J_i = M_i + N_i$,其中 $M_i = \lambda_i I$ 是对角阵,N_i 是一个幂零矩阵. 又 $M_iN_i = N_iM_i$. 令

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{pmatrix},$$

则 $J = M + N$, $MN = NM$, M 是对角阵,N 是幂零矩阵.

因为 $(J_i - \lambda_i I)^{m_i} = 0$, 所以 J_i 适合多项式 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$. 而 λ_i 互不相同,因此多项式 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$, $(\lambda - \lambda_2)^{m_2}$, $\cdots$, $(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ 两两互素. 由中国剩余定理,存在多项式 $g(\lambda)$满足条件:

$$g(\lambda) = h_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{m_i} + \lambda_i,$$

对所有 $i = 1, 2, \cdots, s$ 成立(这里 $h_i(\lambda)$也是多项式). 代入 J_i 得到

$$g(J_i) = h_i(J_i)(J_i - \lambda_i I)^{m_i} + \lambda_i I = \lambda_i I = M_i.$$

于是

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(J_1) & & & \\ & g(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{pmatrix} = M.$$

又因为 $N = J - M = J - g(J)$, 所以 N 也是 J 的多项式.

现考虑一般情形. 设 $P^{-1}AP = J$,则 $A = PJP^{-1} = P(M+N)P^{-1}$. 令 $B = PMP^{-1}$, $C = PNP^{-1}$, 则 B 是可对角化矩阵,而 C 是幂零矩阵. 又

$$g(A) = g(PJP^{-1}) = Pg(J)P^{-1} = PMP^{-1} = B.$$

又易证明 $BC = CB$, $C = A - g(A)$.

最后证明唯一性. 假设 A 有另一满足条件的分解 $A = B_1 + C_1$,则 $B - B_1 =$

C_1-C. 由 $B_1C_1=C_1B_1$ 不难验证 $AB_1=B_1A$, $AC_1=C_1A$. 因为 $B=g(A)$,故 $BB_1=B_1B$. 同理 $CC_1=C_1C$. 设 $C^r=0$, $C_1^t=0$,用二项式定理即知$(C_1-C)^{r+t}=0$. 于是

$$(B-B_1)^{r+t}=(C_1-C)^{r+t}=0.$$

因为 $BB_1=B_1B$, 它们都是可对角化矩阵,由引理知道它们可同时对角化,即存在可逆阵 Q,使得 $Q^{-1}BQ$ 和 $Q^{-1}B_1Q$ 都是对角阵. 注意到

$$\begin{aligned}(Q^{-1}BQ-Q^{-1}B_1Q)^{r+t}&=[Q^{-1}(B-B_1)Q]^{r+t}\\&=Q^{-1}(B-B_1)^{r+t}Q=0,\end{aligned}$$

两个对角阵之差仍是一个对角阵,这个差的幂要等于零矩阵,这两个矩阵必相等,由此即得 $B=B_1$,于是 $C=C_1$. 证毕.

习 题 7.7

1. 求 n 阶 Jordan 块

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda\end{pmatrix}$$

的 k 次幂 J^k.

2. 求矩阵 B,使 $B^2=A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}.$$

3. 证明:在例 7.7.1 中把矩阵分解为两个对称矩阵之积时,可指定其中一个矩阵为非异阵.

4. n 阶矩阵 A 有一个特征值 1,又 A 只有一个线性无关的特征向量,求 A 的 Jordan 标准型.

5. 设 A 是奇异复方阵但不是幂零阵,则 A 相似于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix},$$

其中 B 是幂零阵,C 是非奇异阵.

6. 设 A, B 都是 n 阶矩阵且 $AB=BA$. 假定 A 是幂零矩阵,求证: $|A+B|=|B|$.

*§7.8 矩阵函数

在这一节里我们将要定义矩阵函数,如 e^A, $\sin A$, $\cos A$ 等,方法是利用幂级数来定义这些函数.

我们曾经遇到过矩阵多项式:

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_0 I.$$

让 A 在 $M_n(\mathbf{C})$(即复 n 阶矩阵集合)上变动,$f(A)$就成了矩阵函数(值也在 $M_n(\mathbf{C})$ 中). 对矩阵多项式函数,可以用 Jordan 标准形来简化它的计算. 设 P 是非异阵且

$$P^{-1}AP = J,$$

其中 J 是 A 的 Jordan 标准型. 记

$$J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_k\},$$

J_i 是 Jordan 块,则

$$J^m = \mathrm{diag}\{J_1^m, J_2^m, \cdots, J_k^m\}.$$

又

$$A^m = (PJP^{-1})^m = PJ^mP^{-1},$$

因此要计算 $f(A)$,只需算出 J_i^m 就可以了. 设 J_i 为 r 阶阵:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法不难证明

$$J_i^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & C_m^1\lambda_i^{m-1} & C_m^2\lambda_i^{m-2} & \cdots & \cdots \\ & \lambda_i^m & C_m^1\lambda_i^{m-1} & \cdots & \cdots \\ & & \lambda_i^m & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda_i^m \end{pmatrix}. \tag{7.8.1}$$

若

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p,$$

则不难算出

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_i) \\ & & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r-3)!}f^{(r-3)}(\lambda_i) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}. \tag{7.8.2}$$

再由

$$\begin{aligned} f(A) &= f(PJP^{-1}) = Pf(J)P^{-1} \\ &= Pf(\mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_k\})P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}\{f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_k)\}P^{-1}, \end{aligned}$$

即可计算 $f(A)$.

现在引进 n 阶复方阵幂级数的概念. 首先要定义何为方阵幂级数的收敛?

设有 n 阶复方阵序列 $\{A_p\}$:

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11}^{(p)} & \cdots & a_{1n}^{(p)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(p)} & \cdots & a_{nn}^{(p)} \end{pmatrix},$$

$B = (b_{ij})$ 是一个同阶方阵,若对每个(i, j),序列 $\{a_{ij}^{(p)}\}$ 均收敛于 b_{ij},即

$$\lim_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = b_{ij},$$

则称矩阵序列$\{A_p\}$收敛于 B,记为

$$\lim_{p\to\infty} A_p = B.$$

否则称$\{A_p\}$发散. 设

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

是一个幂级数,记

$$f_p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p$$

是其部分和.若矩阵序列$\{f_p(A)\}$收敛于 B,则称矩阵级数

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots \tag{7.8.3}$$

收敛,极限为 B. 记为 $f(A) = B$. 用变量矩阵 X 代替 A,便可定义矩阵幂级数

$$f(X) = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots . \tag{7.8.4}$$

定理 7.8.1　设 $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ 是复幂级数,则

(1) 方阵幂级数 $f(X)$收敛的充分必要条件是对任一非异阵 P, $f(P^{-1}XP)$收敛,这时

$$f(P^{-1}XP) = P^{-1}f(X)P;$$

(2) 若 $X = \mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_k\}$, 则

$$f(X) = \mathrm{diag}\{f(X_1), \cdots, f(X_k)\};$$

(3) 若 $f(z)$的收敛半径为 r, J_0 为 n 阶 Jordan 块

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

则当 $|\lambda_0| < r$ 时 $f(J_0)$收敛,且

$$f(J_0) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \dfrac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \dfrac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_0) & \cdots & \dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda_0) \\ & f(\lambda_0) & \dfrac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \cdots & \dfrac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda_0) \\ & & f(\lambda_0) & \cdots & \dfrac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda_0) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

证明　(1) 设 $f_p(z)$是 $f(z)$前 $p+1$ 项的部分和,则

$$f_p(P^{-1}XP) = P^{-1}f_p(X)P.$$

由于 n 阶矩阵序列的收敛等价于 n^2 个数值序列的收敛,故

$$f(P^{-1}XP) = \lim_{p\to\infty} f_p(P^{-1}XP) = \lim_{p\to\infty} P^{-1}f_p(X)P$$
$$= P^{-1}(\lim_{p\to\infty} f_p(X))P = P^{-1}f(X)P.$$

(2) 对任意自然数 p,有

$$(\mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_k\})^p = \mathrm{diag}\{X_1^p, \cdots, X_k^p\},$$

因此

$$f(X) = \mathrm{diag}\{f(X_1), \cdots, f(X_k)\}.$$

(3) 设 $f_p(z)$同(1),则由矩阵多项式的性质可知

$$f_p(J_0) = \begin{pmatrix} f_p(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f_p'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f_p^{(2)}(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f_p^{(n-1)}(\lambda_0) \\ & f_p(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f_p'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f_p^{(n-2)}(\lambda_0) \\ & & f_p(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}f_p^{(n-3)}(\lambda_0) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f_p(\lambda_0) \end{pmatrix}. \tag{7.8.5}$$

令 $p\to\infty$, 由矩阵序列收敛与 n^2 个数值序列收敛的等价性即得结论. 证毕.

定理 7.8.1 可以使我们利用 Jordan 标准型来简化矩阵幂级数的计算以及矩阵幂级数的收敛性讨论.

定理 7.8.2 设 $f(z)$是复幂级数,收敛半径为 r. 若 A 是 n 阶复方阵,特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 记

$$\lambda = \max|\lambda_i|, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则

(1) 若 $\lambda < r$, 则 $f(A)$收敛;

(2) 若 $\lambda > r$, 则 $f(A)$发散;

(3) 若 $\lambda = r$, 则 $f(A)$收敛的充分必要条件是:对每一绝对值等于 r 的特征值 λ_j,若 A 的属于 λ_j 的初等因子中最高幂为 n_j 次,则 n_j 个数值级数

$$f(\lambda_j), f'(\lambda_j), \cdots, f^{(n_j-1)}(\lambda_j) \tag{7.8.6}$$

都收敛；

(4) 若 $f(A)$ 收敛，则 $f(A)$ 的特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n).$$

证明　设 A 的 Jordan 标准型为 $J=\mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_k\}$. 显然 $f(A)$ 的收敛性等价于所有 $f(J_i)$ $(i=1,\cdots,k)$ 的收敛性. 由上面的定理即知(1)成立.

若某一个 $|\lambda_j|>r$，则 $f(\lambda_j)$ 发散，因此 $f(J_j)$ 发散，故 $f(A)$ 发散，这就证明了(2).

当 $\lambda=r$ 时，对 $|\lambda_i|<r$ 的 J_i，$f(J_i)$ 收敛. 对 $|\lambda_j|=r$ 的特征值 λ_j，注意到 $f(z)$ 的任意次导数的收敛半径仍为 r，又初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$ 对应的 Jordan 块为 n_j 阶，从(7.8.5)式即可知道 $f(J_j)$ 的收敛性等价于(7.8.6)式中 n_j 个级数的收敛性.

最后若 $f(A)$ 收敛，则 $f(A)$ 与 $f(J)$ 有相同的特征值，即 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$. 证毕.

由复分析知道：

$$\mathrm{e}^z = 1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots,$$

$$\sin z = z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots,$$

$$\cos z = 1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots,$$

$$\ln(1+z) = z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots.$$

前 3 个级数在整个复平面上收敛，$\ln(1+z)$ 的收敛半径为 1，于是对一切方阵，定义

$$\mathrm{e}^A = I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots,$$

$$\sin A = A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\frac{1}{7!}A^7+\cdots,$$

$$\cos A = I-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\frac{1}{6!}A^6+\cdots$$

都有意义. 若 A 的特征值绝对值小于 1,则

$$\ln(I+A)=A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3-\frac{1}{4}A^4+\cdots$$

也有意义. 同理还可以定义幂函数、双曲函数等等. 矩阵函数在分析数学中,比如在微分方程理论中有着重要的应用.

下面我们举例来说明如何计算 e^{tA},其中 t 是一个数值变量,A 是 n 阶复方阵.

在具体计算矩阵函数时必须注意不要随便套用数值函数的性质. 比如在数值函数中,成立

$$\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y},$$

但一般来说对矩阵 A, B,下面的等式并不一定成立:

$$\mathrm{e}^A\cdot\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{A+B}.$$

如对

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$$

读者可验证 $\mathrm{e}^A\cdot\mathrm{e}^B\neq\mathrm{e}^{A+B}$. 但如果 A 与 B 可交换,即 $AB=BA$,则 $\mathrm{e}^A\cdot\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^{B+A}$ 必成立. 用幂级数乘法读者不难自己证明这一结论.

若 N 是一个幂零阵,即存在 k,使 $N^k=0$, 则

$$\mathrm{e}^N=I+N+\frac{1}{2!}N^2+\frac{1}{3!}N^3+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

设 J_i 是一个 Jordan 块,λ_i 是 J_i 的特征值,则

$$J_i=\lambda_iI+N.$$

如果 J_i 是 r 阶阵,则 $N^r=0$. 因为$(\lambda_iI)N=N(\lambda_iI)$, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{J_i}&=\mathrm{e}^{\lambda_iI+N}=\mathrm{e}^{\lambda_iI}\cdot\mathrm{e}^N=\mathrm{e}^{\lambda_i}\cdot\mathrm{e}^N\\&=\mathrm{e}^{\lambda_i}I+\mathrm{e}^{\lambda_i}N+\frac{1}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_i}N^2+\cdots+\frac{1}{(r-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i}N^{r-1}.\end{aligned}$$

同理

$$e^{tJ_i}=e^{t\lambda_i}\cdot e^{tN}=e^{t\lambda_i}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}\\ & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2}\\ & & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(r-3)!}t^{r-3}\\ & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & & \ddots & t\\ & & & & & 1\end{pmatrix}.$$

现设 $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_1,\cdots,J_k\}$ 是 A 的 Jordan 标准型,则

$$e^{tA}=Pe^{tJ}P^{-1},$$

$$e^{tJ}=\begin{pmatrix}e^{tJ_1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & e^{tJ_k}\end{pmatrix}.$$

将 e^{tJ_i} 的式子代入上面的式子即可求出 e^{tA}.

习　题　7.8

1. 若矩阵 A 和 B 乘法可交换,则

$$e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A.$$

2. 证明: $\sin^2A+\cos^2A=I$.
3. A 是 n 阶矩阵,求证: $\sin 2A=2\sin A\cos A$.
4. 计算 $\sin(e^{t})$ 及 $\cos(e^{ct})$, 其中 c 是非零常数.
5. 求证:对任何方阵 A, e^A 总是非异阵.
6. 设 A 是 n 阶方阵,试求 e^A 的行列式.

复　习　题　七

1. 矩阵 $A=cI_n$(c 是一个常数)的充分必要条件是 A 的不变因子组中无常数.
2. 求秩等于 1 的 n 阶复方阵的 Jordan 标准型.
3. 设 $r(A)=\mathrm{tr}(A)=1$, 求证:A 是幂等阵.
4. 求证:n 阶方阵 A 的秩为 r 的充分必要条件是 A 的形如 λ^k 的初等因子恰有 $n-r$ 个.
5. n 阶矩阵 A 的最小多项式的次数等于 n,求证:A 的 Jordan 标准型中各个 Jordan 块的

主对角线元素彼此不同.

6. 如果 $A^k=0$ 的最小正整数为 k,则称 A 为 k 次幂零阵,求证:所有 n 阶 n 次幂零阵彼此相似.

7. 设 A 是 n 阶幂零矩阵,求证:对任意的 k, $\mathrm{tr}(A^k)=0$. 反之,若对任意的 $k\leqslant n$, $\mathrm{tr}(A^k)=0$ 成立,则 A 是幂零矩阵.

8. 矩阵 A 是上三角阵且主对角线上元素全相同,除主对角线上元素外,A 至少还有一个元素非零,求证 A 的 Jordan 标准型必不是对角阵.

9. 设 A 是 n 阶矩阵,若 A 可对角化,求证:A 的伴随 A^* 也可对角化且 A 和 A^* 可同时对角化.

10. 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征值,则 $r((\lambda_0 I_n-A)^k)=n-k$.

11. 求证:矩阵 A 相似于对角阵的充分必要条件是对 A 的任一特征值 λ_0, $(\lambda_0 I-A)^2$ 和 $(\lambda_0 I-A)$ 的秩相等.

12. 设 A 是 n 阶矩阵且 A 的特征多项式等于 $(\lambda-1)^n$,又 $2\leqslant k\leqslant n$, 则 A 和 A^k 相似.

13. 设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换,求证:φ 可对角化的充分必要条件是对任意一个 φ-不变子空间 U,总存在 φ-不变子空间 W,使得 $V=U\oplus W$.

*14. 设 J 是 n 阶 Jordan 块且主对角元素为 λ_0,求证:和 J 乘法可交换的 n 阶矩阵必为 J 的多项式.

*15. 设 A 是一个 n 阶分块上三角阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

假定 A_1 和 A_2 的 Jordan 标准型分别是 J_1 和 J_2 且它们都是 Jordan 块. 又假如 A_1 和 A_2 的特征值不同,求证:矩阵 A 的 Jordan 标准型就是

$$\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{pmatrix}.$$

*16. 设有 n^2 个非零 n 阶矩阵 $A_{ij}\,(i,\,j=1,\,\cdots,\,n)$ 适合

$$A_{ij}A_{jk}=A_{ik},\ A_{ij}A_{lk}=0\quad(j\neq l).$$

求证: 存在可逆阵 P,使对任意的 i, j, $P^{-1}A_{ij}P=E_{ij}$, 其中 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵.

17. 设 $a\neq 0$, 求 n 阶矩阵 A 的 Jordan 标准型:

$$A=\begin{pmatrix}a & a & a & \cdots & a\\ & a & a & \cdots & a\\ & & a & \cdots & a\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & a\end{pmatrix}.$$

*18. 求下列矩阵的 Jordan 标准型:

$$A=\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

19. 求下列矩阵的 Jordan 标准型:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

20. J 是一个 n 阶 $(n>1)$ Jordan 块,且主对角元素等于零,求 J^2 的 Jordan 标准型.

21. 设 $n\geqslant 3$, 求下列 n 阶矩阵 A 的 Jordan 标准型:

$$A=cI_n+N^2,$$

其中 c 是非零常数,N 是一个 Jordan 块且其主对角线上的元素为零.

22. 设 φ 是复线性空间 V 上线性变换,求证:φ 可对角化的充分必要条件是对 φ 的任一特征值 λ_i,总有

$$\operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_i I)\cap Im(\varphi-\lambda_i I)=\mathbf{0}.$$

23. 设 A 是 n 阶复方阵,λ_0 是 A 的一个特征值. 已知属于特征值 λ_0 的初等因子只有一个 $(\lambda-\lambda_0)^k(k>1)$, 求证:$A$ 属于 λ_0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示为 $A-\lambda_0 I_n$ 列向量的线性组合.

第八章 二 次 型

§8.1 二次型的化简与矩阵的合同

在解析几何中,我们曾经学过二次曲线及二次曲面的分类.以平面二次曲线为例,一条二次曲线可以由一个二元二次方程给出:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \tag{8.1.1}$$

要区分(8.1.1)式是哪一种曲线(椭圆、双曲线、抛物线或其退化形式),我们通常分两步来做:首先将坐标轴旋转一个角度以消去 xy 项,再作坐标的平移以消去一次项.这里的关键是消去 xy 项,通常的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases} \tag{8.1.2}$$

从线性空间与线性变换的角度来看,(8.1.2)式表示平面上的一个线性变换.因此二次曲线分类的关键是给出一个线性变换,使(8.1.1)式中的二次项只含平方项.这种情形也在空间二次曲面的分类时出现.类似的问题在数学的其他分支、物理、力学中也会遇到.为了讨论问题的方便,只考虑二次齐次多项式.

定义 8.1.1 设 f 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 元二次齐次多项式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

称 f 为数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 元二次型,简称二次型.

这里非平方项的系数采用 $2a_{ij}$ 主要是为了以后矩阵表示的方便.

例 8.1.1 下列多项式都是二次型:

$$f(x, y)=\frac{1}{2}x^2+3xy+4y^2,$$

$$f(x, y, z)=2x^2-y^2+4z^2-2xy+(\sqrt{3}+2)xz,$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + \sqrt{5}x_2^2 - 2x_3^2.$$

而下列多项式都不是二次型：

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 2x + 1,$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 2xy + 2xz + 3,$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_3^2 + 5x_1x_4.$$

我们现在要用矩阵为工具来处理二次型.用矩阵的乘法我们可以把(8.1.3)式写成矩阵的形式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}, \tag{8.1.4}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

在矩阵 A 中，$a_{ij} = a_{ji}$ 对一切 i，j 成立，也就是说矩阵 A 是一个对称矩阵.由此可知，给定一个 $\mathbf{K}$ 上的 n 元二次型，我们就得到了一个 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶对称矩阵 A（称为该二次型的相伴矩阵或系数矩阵）.反过来，若给定数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶对称矩阵 A，则由(8.1.4)式，我们可以得到一个 $\mathbf{K}$ 上二次型，称为对称矩阵 A 的相伴二次型.现在的问题是：用这样的方法得到的矩阵是否和二次型一一对应？回答这一点并不难.设 $f = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}$，我们要证明 $A = B$.这等价于证明下面的结论：设 A 是对称矩阵，若 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立，则 $A = 0$.令 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$，其中 $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$ 是 n 维标准单位列向量.设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶对称矩阵，则 $a_{ii} = \boldsymbol{e}_i'A\boldsymbol{e}_i = 0$ 且

$$\begin{aligned} 0 &= (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)'A(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) \\ &= \boldsymbol{e}_i'A\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j'A\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i'A\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j'A\boldsymbol{e}_i \\ &= a_{ij} + a_{ji}. \end{aligned}$$

因为 $a_{ij} = a_{ji}$，故 $a_{ij} = 0$，于是 $A = 0$.这表明用对称矩阵来表示二次型时，表示矩阵是唯一的.事实上，如果我们不限制矩阵是对称矩阵，表示矩阵将不唯一.这样会给用矩阵方法研究二次型带来不可逾越的困难.

例 8.1.2 求二次型 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ 的矩阵表示.

解

$$f(x,\ y)=(x,y)\begin{pmatrix}1 & \dfrac{3}{2}\\ \dfrac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

例 8.1.3 求二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_4^2$ 相伴的对称矩阵.

解　所求的对称矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 4\end{pmatrix},$$

这是一个对角阵. 显然若一个二次型只含平方项,则它的相伴矩阵是一个对角阵.

例 8.1.4 求对称矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2} & -\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{2} & -1 & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

所对应的二次型.

解　所求之二次型为

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_1x_2-x_2^2-2\sqrt{2}x_1x_3+2x_3^2.$$

二次型理论的基本问题是要寻找一个线性变换把它变成只含平方项. 由上面我们知道,二次型与对称矩阵一一对应,而线性变换可以用矩阵来表示. 自然地,二次型的变换与矩阵有着密切的关系. 现在我们来探讨这个关系.

设 V 是 n 维线性空间,二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 可以看成是 V 上的二次函数. 即若设 V 的一组基为 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$,向量 $\boldsymbol{x}$ 在这组基下的坐标为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$,则 f 便是向量 $\boldsymbol{x}$ 的函数. 现假设 $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ 是 V 的另一组基,向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ 下的坐标为 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$. 记 $C=(c_{ij})$ 是从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ 的过渡矩阵,则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

或简记为

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 n 维列向量

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

将上式代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$, 得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{y}'C'AC\boldsymbol{y}.$$

显然,$C'AC$ 仍是一个对称矩阵,故 $\boldsymbol{y}'C'AC\boldsymbol{y}$ 是以 $\boldsymbol{y}$ 为变元的二次型,记为 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 由此我们可看出:若二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所对应的对称矩阵为 A,则经过变量代换之后得到的二次型 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$所对应的对称矩阵为 $C'AC$.

定义 8.1.2 *设 A, B 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵,若存在 n 阶非异阵 C,使*

$$B = C'AC,$$

则称 B 与 A 是合同的,或称 B 与 A 具有合同关系.

不难证明,合同关系是一个等价关系,即

(1) 任一矩阵 A 与自己合同,因为 $A = I'AI$;

(2) 若 B 与 A 合同,则 A 与 B 合同,这是因为若 $B = C'AC$, 则 $A = (C')^{-1}BC^{-1} = (C^{-1})'BC^{-1}$;

(3) 若 B 与 A 合同,D 与 B 合同,则 D 与 A 合同. 事实上,若 $B = C'AC$, $D = H'BH$,则 $D = H'C'ACH = (CH)'A(CH)$.

因为一个二次型经变量代换后得到的二次型的相伴对称矩阵与原二次型相伴的对称矩阵是合同的,又因为只含平方项的二次型其相伴对称矩阵是一个对角阵(见例 8.1.3),所以,化二次型为只含平方项等价于对对称矩阵 A 寻找非异阵 C,使 $C'AC$ 是一个对角阵. 这一情形与矩阵相似关系颇为类似,在相似关系

下我们希望找到一个非异阵 P,使 $P^{-1}AP$ 成为简单形式的矩阵(如 Jordan 标准型). 现在我们要找一个非异阵 C,使 $C'AC$ 为对角阵. 因此二次型化简的问题相当于寻找合同关系下的标准型. 我们能找到这样的矩阵 C 吗?

首先我们来考察初等变换和矩阵合同的关系.

引理 8.1.1 对称矩阵 A 的下列变换都是合同变换:

(1) 对换 A 的第 i 行与第 j 行,再对换第 i 列与第 j 列;

(2) 将 A 的第 i 行乘以非零常数 k,再将 k 乘以第 i 列;

(3) 将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上,再将 k 乘以第 i 列加到第 j 列上.

证明 上述变换相当于将一个初等矩阵左乘以 A 后再将这个初等矩阵的转置右乘之,因此是合同变换. 证毕.

引理 8.1.2 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的非零对称矩阵,则必存在非异阵 C,使 $C'AC$ 的第(1, 1)元素不等于零.

证明 若 $a_{11}=0$,而 $a_{ii}\neq 0$,则用行初等变换将第一行与第 i 行对换,再将第一列与第 i 列对换,得到的矩阵的第(1, 1)元素不为零. 根据上引理,这样得到的矩阵和原矩阵合同.

若所有的 $a_{ii}=0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 设 $a_{ji}\neq 0\ (i\neq j)$, 将 A 的第 j 行加到第 i 行上去,再将第 j 列加到第 i 列. 因为 A 是对称矩阵, $a_{ji}=a_{ij}\neq 0$, 于是第 $(i,\ i)$ 元素是 $2a_{ij}$ 且不为零. 再用前面的办法使第(1, 1)元素不等于零. 显然我们得到的矩阵和原矩阵仍合同. 这就证明了结论. 证毕.

定理 8.1.1 设 A 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶对称矩阵,则必存在 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶非异阵 C,使 $C'AC$ 为对角阵.

证明 由上述引理,不妨设 $A=(a_{ij})$ 中 $a_{11}\neq 0$. 若 $a_{i1}\neq 0$, 则可将第一行乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上,再将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 列上. 由于 $a_{i1}=a_{1i}$, 故得到的矩阵的第$(1,\ i)$元素及第$(i,\ 1)$元素均等于零. 由引理 8.1.1 可知,新得到的矩阵与 A 是合同的. 这样,可依次把 A 的第一行与第一列除 a_{11} 外的元素都消去. 于是 A 合同于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右下角是一个 $n-1$ 阶对称矩阵,记为 A_1. 因此可归纳地假设存在非异的 $n-1$ 阶矩阵 D,使 $D'A_1D$ 为对角阵,于是

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & D'A_1D\end{pmatrix}$$

是一个对角阵.显然

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}',$$

因此 A 合同于一对角阵.证毕.

习　题　8.1

1. 证明:秩等于 r 的对称矩阵等于 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

2. 设 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}$ 是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的一个排列,则下面两个对角阵

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},\ \mathrm{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}\}$$

合同.

3. 若可逆阵 A 和 B 合同,求证:A^{-1} 和 B^{-1} 也合同.

4. 设矩阵 A_1 和 B_1 合同,A_2 和 B_2 合同,则下列两个分块矩阵也合同:

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}.$$

5. 设 A 为 n 阶复对称矩阵且 A 的秩为 r,求证:A 必可分解为 $A = T'T$,其中 T 是秩为 r 的 n 阶矩阵.

6. 设 A 是 n 阶反对称矩阵,则 A 合同于下列形状的矩阵:

$$\mathrm{diag}\{S, \cdots, S, 0, \cdots, 0\},$$

其中 $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 若 A 的秩等于 $2r$,则有 r 个 S.

7. 求证:实反对称矩阵的行列式总是非负实数.

8. 元素全是整数的反对称矩阵的行列式是某个整数的平方.

§8.2　二次型的化简

如何将二次型化为标准型? 在这一节里,我们将介绍两种方法.

一、配方法

配方法的基础是运用下列公式:

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \\
&+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_1x_n \\
&+2x_2x_3+\cdots+2x_2x_n \\
&+\cdots \\
&+2x_{n-1}x_n.
\end{aligned}
$$

我们通过例子来介绍配方法.

例 8.2.1　将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3+x_3^2$$

化成对角型.

解　先将含有 x_1 的项放在一起凑成完全平方再减去必要的项:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3)-3x_2^2-6x_2x_3+x_3^2 \\
&= [(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3] \\
&\quad -3x_2^2-6x_2x_3+x_3^2 \\
&= (x_1+x_2-2x_3)^2-4x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2.
\end{aligned}
$$

再对后面那些项配方:

$$
\begin{aligned}
-4x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2 &= -[(2x_2+\frac{1}{2}x_3)^2-\frac{1}{4}x_3^2]-3x_3^2 \\
&= -(2x_2+\frac{1}{2}x_3)^2-\frac{11}{4}x_3^2.
\end{aligned}
$$

于是

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2-2x_3)^2-(2x_2+\frac{1}{2}x_3)^2-\frac{11}{4}x_3^2.$$

令

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1+x_2-2x_3, \\
y_2 = 2x_2+\frac{1}{2}x_3, \\
y_3 = x_3,
\end{cases}
$$

或

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此 $f = y_1^2 - y_2^2 - \frac{11}{4}y_3^2$，其变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注　在用配方法化二次型为只含平方项的过程中，必须保证变换矩阵 C 是非异阵. 如果我们按照例 8.2.1 的方法，将含 x_1 的项放在一起配成一个完全平方. 接下来将含 x_2 的项放在一起再配方，如此不断做下去. 最后得到的变换矩阵 C 是一个主对角元素全不为零的上三角阵，因此是一个非异阵. 有时我们用看似简单的方法得到的结果未必正确. 比如用观察法即可得到下列配方：

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

若令 $y_1 = x_1 - x_2$，$y_2 = x_1 + x_3$，$y_3 = x_2 + x_3$，则 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. 由于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

不是非异阵，因此上述配方不是我们所需要的结论.

如果已知的二次型中没有平方项，则我们可以采用下面例子中的方法.

例 8.2.2　将二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 \\ + x_2x_4 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

化成对角型.

解　这个二次型缺少了 x_i^2 项，因此无法用例 8.2.1 的方法配方. 但我们可作如下变换：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases}$$

代入原二次型得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4 - 2y_3y_4.$$

这时 y_1^2 项不为零,于是

$$\begin{aligned} f &= (2y_1^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4) - 2y_2^2 - 2y_3y_4 \\ &= 2[(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \frac{1}{2}y_3y_4] - 2y_2^2 - 2y_3y_4 \\ &= 2(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - y_3y_4 - \frac{1}{2}y_4^2 \\ &= 2(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}(y_3 + y_4)^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3 + y_4, \\ z_4 = y_4. \end{cases}$$

于是

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2,$$

其中 z_4^2 的系数为零,故未写出.

为求变换矩阵 C,可从上面 z_i 的表示式中解出 y_i:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_3 - z_4, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3 - z_4, \\ y_4 = z_4. \end{cases}$$

再将 x_i 求出：

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + \dfrac{1}{2}z_3 - z_4, \\ x_2 = z_1 - z_2 + \dfrac{1}{2}z_3 - z_4, \\ x_3 = z_3 - z_4, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

于是

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & \dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、初等变换法

用配方法化简二次型有时比较麻烦，求非异阵 C 也比较麻烦. 我们常常用初等变换法来化简二次型. 初等变换法的依据是引理 8.1.1.

下面我们通过例子来说明这种方法.

例 8.2.3　将下列二次型化为对角型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

解　记与 f 相伴的对称矩阵为 A，写出(A, I_3)并作变换：

$$(A, I_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

于是 f 可化简为

$$y_1^2 - 4y_2^2.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这种方法可总结如下：作 $n\times 2n$ 矩阵 (A, I_n)，对这个矩阵施行行初等变换，同时施以同样的列初等变换，将它左半边化为对角阵，则这个对角阵就是已化简的二次型的相伴矩阵，右半边的转置便是矩阵 C.

如碰到第 $(1, 1)$ 元素是零的矩阵，可先设法将第 $(1, 1)$ 元化成非零，再进行上述过程.

例 8.2.4　将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 化成对角型.

解　写出与 f 相伴的对称矩阵 A，作 (A, I_3) 并将它的第二行加到第一行上，再将第二列加到第一列上：

$$(A, I_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

同例 8.2.3 一样,对上述矩阵进行初等变换得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

因此 f 化简为

$$2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+8y_3^2.$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & 2 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习 题 8.2

1. 用配方法把下列二次型化成对角型:

(1) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3-2x_2x_4+2x_3x_4$;

(3) $f(x, y, z)=2y^2-z^2+xy+xz$.

2. 用初等变换法把下列二次型化为对角型并求出非异阵 C:

(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+2x_1x_2+2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-8x_2x_3$;

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_2x_3-x_1x_4-4x_2x_4+6x_3x_4$.

3. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

有一个特征值为 3,求 a 的值且求可逆阵 C,使得 $(AC)'(AC)$ 是对角阵.

4. 证明下列分块对称矩阵的变换是合同变换:

(1) 对换分块矩阵 A 的第 i 行块与第 j 行块,再对换第 i 列块与第 j 列块;

(2) 将矩阵 M 左乘以 A 的第 i 行块加到第 j 行块上,再将矩阵 M' 右乘以第 i 列块加到

第 j 列块上.

§8.3 惯性定理

在上两节里我们已经知道如何将一个数域上的二次型化为标准型,即只含平方项的二次型. 在这一节里,我们将主要讨论实数域与复数域上的二次型.

一、实二次型

我们已经知道,任意一个实对称矩阵 A 必相合于一个对角阵:

$$\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i \neq 0\ (i=1, \cdots, r)$. 注意到 C 是可逆阵,所以 $r = r\,(C'AC) = r(A)$. 故秩 r 是矩阵合同关系下的一个不变量. 如同相似标准型一样,我们的目的是要找出实对称矩阵在合同关系下的全系不变量,即找出一组足以判断两个实对称矩阵是否相合的合同不变量. 我们不妨设实对称矩阵已具有下列对角阵的形状:

$$A = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0\}.$$

由引理 8.1.1 不难知道,任意调换 A 的主对角线上的元素得到的矩阵仍与 A 合同. 因此我们可把零放在一起,把正项与负项放在一起,即可设 $d_1 > 0, \cdots, d_p > 0; d_{p+1} < 0, \cdots, d_r < 0$. A 所代表的二次型为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_rx_r^2. \tag{8.3.1}$$

令

$$y_1 = \sqrt{d_1}x_1, \cdots, y_p = \sqrt{d_p}x_p;$$

$$y_{p+1} = \sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1}, \cdots, y_r = \sqrt{-d_r}x_r;$$

$$y_j = x_j\ (j = r+1, \cdots, n),$$

则(8.3.1)式变为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2. \tag{8.3.2}$$

这一事实等价于说 A 合同于下列对角阵:

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1; -1, \cdots, -1; 0, \cdots, 0\}, \tag{8.3.3}$$

其中有 p 个 1,q 个 -1, $n-r$ 个零.

现在我们要证明(8.3.2)式中的数 p 及 $q = r - p$ 是一个不变量.

定理 8.3.1　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个 n 元实二次型,且 f 可化为两个标准型:

$$c_1 y_1^2 + \cdots + c_p y_p^2 - c_{p+1} y_{p+1}{}^2 - \cdots - c_r y_r^2,$$

$$d_1 z_1^2 + \cdots + d_k z_k^2 - d_{k+1} z_{k+1}^2 - \cdots - d_r z_r^2,$$

其中 $c_i > 0$, $d_i > 0$, 则必有 $p = k$.

证明　用反证法,设 $p > k$. 由前面的说明知道可设 c_i 及 d_i 均为 1. 因此

$$\begin{aligned} & y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \\ = & z_1^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \cdots - z_r^2. \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

又设

$$\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}=C\boldsymbol{z},$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{z}=C^{-1}B\boldsymbol{y}$. 令

$$C^{-1}B=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} z_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n, \\ z_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n. \end{cases}$$

因为 $p > k$, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \cdots + c_{kn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0. \end{cases}$$

必有非零解(n 个未知数,$n-(p-k)$ 个方程式). 令其中一个非零解为 $y_1 = a_1, \cdots, y_p = a_p, y_{p+1} = 0, \cdots, y_n = 0$. 把这组解代入(8.3.4)式左边得到

$$a_1^2 + \cdots + a_p^2 > 0.$$

但这时 $z_1 = \cdots = z_k = 0$,故(8.3.4)式右边将小于等于零. 引出了矛盾. 同理可证 $p < k$ 也不可能. 证毕.

定理 8.3.1 通常称为惯性定理. (8.3.2)式中的二次型称为 f 的规范标准型.

定义 8.3.1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个实二次型,若它能化为形如(8.3.2)式的形状,则称 r 是该二次型的秩,p 是它的正惯性指数,$q = r - p$ 是负惯性指数,$s = p - q$ 称为 f 的符号差.

显然,若已知秩 r 与符号差 s,则 $p = \frac{1}{2}(r+s)$, $q = \frac{1}{2}(r-s)$. 事实上,在 p, q, r, s 中只需知道其中两个数,其余两个数也就知道了. 由于实对称矩阵与实二次型之间的等价关系,我们将实二次型的秩、惯性指数及符号差也称为相应的实对称矩阵的秩、惯性指数及符号差.

定理 8.3.2 秩与符号差(或正负惯性指数)是实对称矩阵合同关系的全系不变量.

证明 由上面的定理知道,秩 r 与符号差 s 是实对称矩阵合同关系的不变量. 反之,若 n 阶实对称矩阵 A, B 的秩都为 r,符号差都是 s,则它们都合同于

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1; -1, \cdots, -1; 0, \cdots, 0\},$$

其中有 $p = \frac{1}{2}(r+s)$ 个 1, $q = \frac{1}{2}(r-s)$ 个 -1 及 $n-r$ 个零,因此 A 与 B 合同. 对正负惯性指数的结论也同样成立,证毕.

二、复二次型

复二次型要比实二次型简单得多. 因为复二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_rx_r^2$$

必可化为

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2,$$

其中 $z_i = \sqrt{d_i}x_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, $z_j = x_j (j = r+1, \cdots, n)$. 所以复对称矩阵的合同关系只有一个全系不变量,那就是秩 r.

习　题　8.3

1. 把互相合同的实对称矩阵作为一个类,问:n 阶实对称矩阵共有多少个类?

2. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵且 $r(A) = r$, 作 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(A'A)\boldsymbol{x}$, 求证:$f$ 的秩等于 r.

3. 举例说明实对称矩阵 A 和它的伴随矩阵 A^* 未必合同.

4. 设 f 是实二次型,其相伴矩阵为 A,若 $\det A < 0$, 证明:必存在一组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,使

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) < 0.$$

5. 设有 n 元实二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {} & (x_1 - a_1x_2)^2 + (x_2 - a_2x_3)^2 \\ & + \cdots + (x_{n-1} - a_{n-1}x_n)^2 + (x_n - a_nx_1)^2, \end{aligned}$$

其中 a_i 是实数,问: a_i 适合什么条件时,f 的正惯性指数恰为 n?

6. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+s}^2$,其中 $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (i = 1, 2, \cdots, k+s)$, 求证:$f$ 的正惯性指数 $p \leqslant k$, 负惯性指数 $q \leqslant s$.

7. 证明:一个秩大于 1 的实二次型可以分解为两个实系数的一次多项式之积的充分必要条件是它的秩等于 2 且符号差等于零.

*8. 设 A 是 n 阶实可逆阵, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A' & 0 \end{pmatrix}$. 求矩阵 B 的正负惯性指数.

提示:利用分块初等变换,见上节习题 4.

§8.4　正定型与正定矩阵

这一节里的二次型都假定是实二次型.

定义 8.4.1　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型.

(1) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} > 0$, 则称 f 是正定二次型(简称正定型),矩阵 A 称为正定矩阵(简称正定阵);

(2) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}<0$，则称 f 是负定二次型(简称负定型)，矩阵 A 称为负定矩阵(简称负定阵)；

(3) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$，则称 f 是半正定二次型(简称半正定型)，矩阵 A 称为半正定矩阵(简称半正定阵)；

(4) 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}\leqslant 0$，则称 f 是半负定二次型(简称半负定型)，矩阵 A 称为半负定矩阵(简称半负定阵)；

(5) 若存在 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}>0$，又存在 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta}<0$，则称 f 是不定型.

显然

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

是正定型，而

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2$$

是负定型.事实上我们可以证明如下的定理.

定理 8.4.1 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩.

证明 若 f 的正惯性指数等于 n，则 f 可化为下列标准型：

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

显然 f 是正定型.反之，若 f 是正定型，如果 f 的正惯性指数 $p<n$，则 f 可化为如下标准型：

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ny_n^2, \tag{8.4.1}$$

其中 $c_j\geqslant 0(j=p+1, \cdots, n)$.这时令 $a_1=\cdots=a_p=0$, $a_{p+1}=\cdots=a_n=1$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零，而(8.4.1)式右边小于等于零.假设这时 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}$，其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

C 是非异阵.故从 $y_i=a_i(i=1, \cdots, n)$ 可得 $x_i=b_i(i=1, \cdots, n)$ 是一组不全

为零的实数. 于是

$$f(b_1, b_2, \cdots, b_n) \leqslant 0.$$

这与 f 是正定型矛盾,其余结论的证明类似,证毕.

显然我们有下面的定理.

定理 8.4.2 实对称矩阵 A 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 I_n;A 是负定阵当且仅当它合同于$-I_n$;A 是半正定阵当且仅当 A 合同于下列分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

A 是半负定阵当且仅当 A 合同于分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 8.4.2 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵,A 的 n 个子式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

称为 A 的顺序主子式.

定理 8.4.3 n 阶实对称矩阵 A 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

证明 设与 A 对应的实二次型为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 若 $A=(a_{ij})$ 且 f 是正定型,则 f 可表示为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_ix_j,$$

则对任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$,有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

所以,f_k 是一个正定二次型. 它的相伴矩阵 A_k 由 A 的前 k 行及前 k 列组成,因

此 A_k 是一个正定阵. A_k 合同于 I_k,即 k 阶单位阵. 也就是说存在非异 k 阶矩阵 B,使

$$B'A_kB = I_k.$$

因此

$$\det(B'A_kB) = (\det B)^2 \det A_k = 1,$$

即有 $\det A_k > 0$. 这证明了必要性.

我们对 A 的阶 n 用数学归纳法来证明充分性. 当 $n=1$ 时,$A=(a)$, $a>0$,因此 $f=ax_1^2$ 是正定型. 设结论对 $n-1$ 成立,现要证明对 n 阶矩阵 A,若它的 n 个顺序主子式大于零,则 A 必是正定阵. 记 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式所在的矩阵,A 可写为

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 A 的顺序主子式大于零, A_{n-1} 的顺序主子式也大于零,由归纳假设, A_{n-1} 是正定阵. 于是 A_{n-1} 合同于 $n-1$ 阶单位阵,即存在 $n-1$ 阶非异阵 B,使

$$B'A_{n-1}B = I_{n-1}.$$

令 C 是下列分块矩阵:

$$C = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$C'AC = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & B'\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}'B & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是个对称矩阵,其形式为

$$C'AC = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

用第三类行及列初等变换可将上述矩阵化为对角阵. 这相当于对 $C'AC$ 右乘一

个非异阵 Q 后再左乘 Q' 得到一个对角阵,亦即 $Q'C'ACQ$ 等于

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, c\}.$$

由于 $|A|>0$, 因此 $c>0$. 这就证明了 A 是一个正定阵. 证毕.

例 8.4.1 试求 t 的取值范围,使下列二次型为正定型:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+3x_4^2+2tx_1x_2 \\ -2x_1x_3+4x_2x_3+x_4^2.$$

解 这个二次型的相伴矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & 0 \\ t & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A 的顺序主子式为

$$|A_1| = 1 > 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4-t^2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4(t-1)(t+2),$$

$$|A_4| = -12(t-1)(t+2).$$

要使 A 正定,必须

$$4-t^2>0,\ -4(t-1)(t+2)>0.$$

得 $-2<t<1$.

例 8.4.2 若 A 是正定矩阵,则

(1) A 的主对角元素全大于零;

(2) A 的任一 k 阶主子阵,即由 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行及 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列交点上元素组成的矩阵,必是正定阵,从而 A 的所有主子式全大于零;

(3) A 中绝对值最大的元素在主对角线上.

证明 (1),(2). 设 A_k 是矩阵 A 的第 k 个顺序主子式所在的矩阵,则 A_k 是实对称矩阵且其顺序主子式都大于零,A_k 是正定阵.

经过若干次行对换以及相同的列对换,我们不难将 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行

及$i_1, i_2, \cdots, i_k$列分别换成第1, 2, …, k行和第1, 2, …, k列. 利用上面的结论即知(2)成立,而(1)是(2)的推论.

(3)用反证法. 假定$a_{ij}(i \neq j)$是A的绝对值最大的元素. 根据(2),我们只需证明第i行、第j行与第i列、第j列交点上元素组成的矩阵不是正定阵. 考虑矩阵(假定$i < j$)

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

注意到$a_{ij} = a_{ji}$且$|a_{ij}| \geqslant |a_{ii}|$, $|a_{ij}| \geqslant |a_{jj}|$,上述矩阵的行列式值$a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \leqslant 0$. 所以这个矩阵一定不是正定矩阵. 证毕.

习　题　8.4

1. 判定下列二次型属于哪种型:

(1) $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(2) $10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2$.

2. 若下列二次型是正定型,求λ的取值范围:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

3. 设A是n阶实对称矩阵,$P_1, P_2, \cdots, P_n$是A的n个顺序主子式,证明:A是负定阵的充分必要条件是

$$P_1 < 0,\ P_2 > 0,\ \cdots,\ (-1)^n P_n > 0.$$

4. n阶实对称矩阵A是半正定阵的充分必要条件是对任意的正实数c,总有$A + cI_n$是正定阵.

5. 设A是m阶实对称正定矩阵,B是$m \times n$实矩阵. 求证:$B'AB$是正定矩阵的充分必要条件是$r(B) = n$.

6. 如果实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$仅在$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$时为零,证明:$f$必是正定型或负定型.

7. 证明:实对称矩阵A是秩为r的半正定阵的充分必要条件是存在秩等于r的$r \times n$矩阵B,使$A = B'B$. 特别,A是正定阵的充分必要条件是存在n阶非异阵B,使$A = B'B$.

8. 若A与B是同阶正定阵,求证: $A + B$也是正定阵.

9. 若A是可逆半正定阵,则A必是正定阵.

10. 求证:n阶实对称矩阵A是正定阵的充分必要条件是A的n个顺序主子式的代数余子式全大于零.

* §8.5 Hermite 型

现在我们来考虑复数域上的另一种二次型——Hermite 型. 为方便起见,我们把 n 个变元的 Hermite 型看成是复数域上的二次齐次函数:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\overline{x}_i x_j, \tag{8.5.1}$$

其中 $\overline{a}_{ji} = a_{ij}$. 当变量取实变量且 a_{ij} 都是实数时, f 就是实二次型. 因此, Hermite 型也可看成是实二次型的推广. 事实上, Hermite 型有许多与实二次型相同的性质.

Hermite 型(8.5.1)可写成如下的矩阵形式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{\boldsymbol{x}}'A\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ij})$, $\overline{A}' = A$, 这样的矩阵称为 Hermite 矩阵. 与实二次型类似, Hermite 型与 Hermite 矩阵之间有着一一对应关系, 即给定一个 n 变元的 Hermite 型必相伴有一个 n 阶 Hermite 矩阵, 反之给定一个 n 阶 Hermite 矩阵, 必有一个 n 元 Hermite 型与之对应.

设 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$, 其中 C 是一个非异复矩阵, 而

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则

$$f = (\overline{C\boldsymbol{y}})'A(C\boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{y}}'\,\overline{C}\,'AC\boldsymbol{y}.$$

矩阵 $\overline{C}'AC$ 仍是一个 Hermite 矩阵.

定义 8.5.1　设 A, B 是两个 Hermite 矩阵, 若存在非异复矩阵 C, 使

$$B = \overline{C}'AC,$$

则称 A 与 B 是复相合的.

容易证明复相合是一个等价关系. 与实二次型类似, Hermite 型

$$a_1\overline{y}_1y_1 + a_2\overline{y}_2y_2 + \cdots + a_n\overline{y}_ny_n \tag{8.5.2}$$

称为标准型. Hermite 型的基本问题是如何把一个 Hermite 型化成像(8.5.2)式那样的标准型. 这个问题等价于寻找非异阵 C,使$\overline{C}'$的 AC 成为对角阵. 类似实对称矩阵,我们可以证明如下定理.

定理 8.5.1 若 A 是一个 Hermite 矩阵,则必存在一个非异阵 C, 使$\overline{C}'AC$ 是一个对角阵且主对角线上的元素都是实数.

证明 寻找 C 的过程类似实对称矩阵的情形,故从略. 现只需说明后面的结论. 事实上,$\overline{C}'AC$ 仍是 Hermite 矩阵,因此,主对角线上的元素 $b_{ii} = \overline{b}_{ii}$, 必是实数. 证毕.

Hermite 型虽然系数是复数且变元 x_i 可看成是复数域上的变元. 但作为函数它的值却总是实数. 这点从定理 8.5.1 即可看出. 事实上, 当 a_i 都是实数时, 无论 y_i 为何值,

$$a_1\overline{y}_1y_1 + a_2\overline{y}_2y_2 + \cdots + a_n\overline{y}_ny_n$$

总是实数.

类似实二次型,我们可以证明 Hermite 型的惯性定理.

定理 8.5.2 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个 Hermite 型,则它总可以化为如下标准型:

$$\overline{y}_1y_1 + \cdots + \overline{y}_py_p - \overline{y}_{p+1}y_{p+1} - \cdots - \overline{y}_ry_r, \tag{8.5.3}$$

且若 f 又可化为另一个标准型:

$$\overline{z}_1z_1 + \cdots + \overline{z}_kz_k - \overline{z}_{k+1}z_{k+1} - \cdots - \overline{z}_rz_r,$$

则 $p = k$.

我们称(8.5.3)式中的 p 为 f 的正惯性指数, r 为 f 的秩, $q = r - p$ 为 f 的负惯性指数, $p - q$ 为符号差. 同样地,秩与符号差是一个 Hermite 矩阵复相合的全系不变量. 上述这些结论的证明与实二次型是平行的,我们略去其证明,把它们留给读者作为练习.

由于 Hermite 型的值总是实数,故可定义正定型、负定型、半正定型、半负定型及不定型的概念. 相应地,有正定 Hermite 矩阵、负定 Hermite 矩阵、半正定 Hermite 矩阵、半负定 Hermite 矩阵的概念. 我们只对正定型及正定阵叙述其概

念及判定正定 Hermite 矩阵的定理.

定义 8.5.2 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 Hermite 型,若对任一组不全为零的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,均有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0,$$

则称 f 是正定 Hermite 型,它对应的矩阵称为正定 Hermite 矩阵.

定理 8.5.3 一个 n 阶 Hermite 矩阵为正定的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

这个定理的证明类似于实对称矩阵,从略.

习 题 8.5

1. 证明定理 8.5.2 及定理 8.5.3.

2. 设 A 是正定 Hermite 矩阵,则 $A = \overline{B}'B$, 其中 B 是非异阵.

复 习 题 八

1. 下列关于实对称矩阵 A 的命题等价:

(1) A 是正定矩阵;

(2) 存在主对角线上元素全为 1 的上三角阵 B,使 $A = B'DB$, 其中 D 是对角元大于零的对角阵;

(3) 存在主对角线上元素全为正的上三角阵 C,使 $A = C'C$.

2. (1) 实对称矩阵 A 是正定矩阵,则 A^* 也是正定矩阵;

(2) 实对称矩阵 A 是半正定矩阵,则 A^* 也是半正定矩阵;

(3) 实对称矩阵 A 是负定矩阵,则当 n 是偶数时,A^* 为负定矩阵;当 n 是奇数时,A^* 为正定矩阵.

3. 设 $f(X) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 是实二次型,假定 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $P_1, \cdots, P_{n-1}$ 非零,求证:f 可化为下列标准型

$$P_1 y_1^2 + \frac{P_2}{P_1} y_2^2 + \cdots + \frac{P_n}{P_{n-1}} y_n^2,$$

其中 $P_n = |A|$.

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,求证:若 A 是严格对角占优阵且主对角线上的元素全为正,则 A 是正定阵.

5. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,求证:必存在正实数 k,使对任一 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}$,总有

$$\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} \leqslant k\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}.$$

6. 实二次型(a_{ij} 全是实数)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{k}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2,$$

求证:f 的秩等于下列矩阵的秩:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

7. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实正定矩阵,求证:

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定型.

8. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶实正定阵, P_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子式,求证:

$$\det A \leqslant a_{nn}P_{n-1}.$$

9. 若实对称矩阵 A 是正定阵,则 A 的主对角线上的元素之积不小于 $\det A$.

10. 证明下列实二次型是正定型:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

11. 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - s)^2,\ s = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

12. 化下列实二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}.$$

13. 判断下列实二次型是什么型:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

14. 证明下列实二次型为半正定型:

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

15. 求证:n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正定阵,其中

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j}.$$

16. 设 A 是 n 阶实正定阵,S 是 n 阶实反对称矩阵,求证:

$$\det(A+S)>0.$$

17. 设 A 是非异实对称矩阵,S 是实反对称矩阵,$AS=SA$,求证:$A+S$ 为非异阵.

18. 设 A 是实对称正定阵,$\boldsymbol{\beta}'=(b_1,\cdots,b_n)$,$b_i(i=1,\cdots,n)$,$c$ 都是实数. 求证:函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}+c$ 有极小值 $c-\boldsymbol{\beta}'A^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

19. 设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩等于 n,符号差等于 s,求证:在 n 维实向量空间 V 中存在维数等于 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 的子空间 U,对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in U$, $f(\boldsymbol{\alpha})=0$.

*20. 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 是 n 阶正定阵,求证:矩阵 $C=(a_{ij}b_{ij})$ 也是正定阵.

第九章　内 积 空 间

§9.1　内积空间的概念

在解析几何中，我们已经知道，$\mathbf{R}^3$ 中任一向量可定义其"长度"，空间中任意两点之间可定义其距离. 向量 $\boldsymbol{v}=(x_1, x_2, x_3)$ 的长度为

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

两点(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)之间的距离为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

即这两点所代表的向量之差的长度. 我们现在要把"长度"、"距离"的概念推广到一般的实线性空间与复线性空间上去. 距离可看成是长度概念的派生概念，而长度又可看成是内积的派生概念. 我们已经知道在 $\mathbf{R}^3$ 中，内积是这样定义的：若 $\boldsymbol{u}=(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{v}=(y_1, y_2, y_3)$, 则 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的内积(或点积)为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, \tag{9.1.1}$$

从而 $\boldsymbol{u}$ 的长度为

$$\|\boldsymbol{u}\|=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}}.$$

从(9.1.1)式我们可看出 $\mathbf{R}^3$ 中的内积有下列性质.

$\mathbf{R}^3$ 中向量内积的性质

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$;

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$;

(3) $(c\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$;

(4) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$;

其中 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任意向量，c 是任一实数.

根据上述 4 条性质，我们类似地定义一般线性空间上的内积.

定义 9.1.1　设 V 是实数域上的线性空间,若存在某种规则,使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$,都唯一地对应一个实数,记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,且适合如下规则:

(1) $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$;

(3) $(c\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, c 为任一实数;

(4) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;

则称在 V 上定义了一个内积. 实数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积. 线性空间 V 称为实内积空间. 有限维实内积空间称为 Euclid 空间,简称为欧氏空间.

对复数域上的线性空间,我们也可以定义内积.

定义 9.1.2　设 V 是复数域上的线性空间,若存在某种规则,使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$,都唯一地对应一个复数,记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,适合如下规则:

(1) $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$;

(3) $(c\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, c 为任一复数;

(4) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;

则称在 V 上定义了一个内积. 复数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积. 线性空间 V 称为复内积空间. 有限维复内积空间称为酉空间.

注　复内积空间的定义与实内积空间的定义是一致的. 事实上,对一个实数 a, $\overline{a} = a$. 故定义 9.1.1 中的(1)与定义 9.1.2 中的(1)是一致的. 因此,我们经常将这两种空间统称为内积空间,某些定理的叙述及证明中也不区别它们. 但是,需要注意的是对酉空间,定义 9.1.2 中的(1), (3)意味着:

$$(\boldsymbol{\alpha}, c\boldsymbol{\beta}) = \overline{c}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

例 9.1.1　设 $\mathbf{R}_n$ 是实 n 维列向量空间, $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 定义

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

则我们定义了一个内积,这个内积称为 $\mathbf{R}_n$ 中的标准内积.

例 9.1.2　设 $\mathbf{C}_n$ 是复 n 维列向量空间, $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 定义

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n,$$

则在此定义下 $\mathbf{C}_n$ 成为一个酉空间,上述内积称为 $\mathbf{C}_n$ 的标准内积.

注　对 n 维实或复行向量空间,我们也同样定义标准内积.

例 9.1.3　设 $V = \mathbf{R}^2$ 为二维实行向量空间,若 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2)$,

定义

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2,$$

容易验证定义 9.1.1 中的(1),(2),(3)都成立. 当 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 时,上式为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2.$$

(4)也成立. 因此,$\mathbf{R}^2$ 在此内积下成为二维欧氏空间.

例 9.1.4　设 V 是$[a, b]$区间上连续函数全体构成的实线性空间,设 $f(t)$, $g(t) \in V$, 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

则不难验证这是一个内积,于是 V 成为内积空间. 这是一个无限维实内积空间.

例 9.1.5　设 V 是 n 维实列向量空间,G 是实正定阵,对 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 定义

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'G\boldsymbol{\beta},$$

我们来证明 V 在上式的定义下成为欧氏空间. 定义 9.1.1 中的(2), (3)显然成立. 对(1),注意到 $\boldsymbol{\alpha}'G\boldsymbol{\beta}$ 是实数,其转置仍是它自己,而 G 是对称矩阵,故

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'G\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}'G\boldsymbol{\beta})' = \boldsymbol{\beta}'G'\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}'G\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}).$$

又从 G 是正定阵即可知道(4)成立.

当 $G = I_n$ 为单位阵时,V 上内积就是例 9.1.1 中的标准内积. 对实列向量空间,标准内积可用矩阵乘法表示

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}.$$

对实行向量空间,标准内积也可表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'.$$

对 n 维复列向量空间 U,若有正定 Hermite 矩阵 H,我们也可定义 U 上内积:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'H\overline{\boldsymbol{\beta}}.$$

当 $H = I_n$ 时就是例 9.1.2 中的标准内积. 当 U 是复列向量空间时,标准内积可表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'\overline{\boldsymbol{\beta}}.$$

当 U 是复行向量空间时,标准内积可表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\beta}}'.$$

有了内积的概念,我们便可定义向量的长度(或称范数)了.

定义 9.1.3　设 V 是内积空间(实或复),$\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的元素,定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度(或范数)为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}},$$

即实数$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$的算术根.

注意,当 V 是复内积空间时,由于规则(1), $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$总是实数. 从长度的定义知, $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 当 $V = \mathbf{R}^n$ 且内积为标准内积时,若 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{9.1.2}$$

利用范数可定义内积空间中两个向量的距离. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离为

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|.$$

显然 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. 当 V 是实空间时,定义 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}. \tag{9.1.3}$$

当 V 是复空间时,定义 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta = \frac{|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

内积空间中两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 若适合 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直或正交. 显然若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 也正交. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交时夹角为 90°,我们用记号 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 来表示.

定理 9.1.1　设 V 是实或复的内积空间, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, c 是任一常数(实数或复数),则

(1) $\|c\boldsymbol{\alpha}\| = |c|\|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(2) $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|$;

(3) $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$.

证明　(1) $\|c\boldsymbol{\alpha}\|^2 = (c\boldsymbol{\alpha}, c\boldsymbol{\alpha}) = c\bar{c}\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = |c|^2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$,故 $\|c\boldsymbol{\alpha}\| = |c|\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,则$(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{0} + \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = 2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta})$,故$(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = 0$. 因此(2)成立. 若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 令

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\boldsymbol{\alpha},$$

则 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$，且

$$0 \leqslant \|\boldsymbol{v}\|^2 = \left(\boldsymbol{\beta} - \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} - \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\boldsymbol{\alpha}\right)$$

$$= (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

$$= \|\boldsymbol{\beta}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}.$$

由此即可得(2).

(3) 我们有

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$$

$$= \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + \|\boldsymbol{\beta}\|^2$$

$$= \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}.$$

由(2)得

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|, \ |\overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

故

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

$$= (\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|)^2.$$

证毕.

定理 9.1.1 中的(2)通常称为 Cauchy-Schwarz(柯西-许瓦兹)不等式，(3)通常称为三角不等式. 读者注意在(9.1.3)式中要使 θ 有意义，必须保证 $\cos\theta \leqslant 1$. 而这就是定理 9.1.1 中的(2). 在定理 9.1.1(3)的证明中我们可看出：若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$，因此

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2. \tag{9.1.4}$$

上式通常称为勾股定理，它是平面几何中勾股定理的推广.

设 V 是实 n 维行向量空间，内积取标准内积，从定理 9.1.1 的(2)立即可得到下列著名不等式：

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

设 V 是$[a, b]$上连续函数全体构成的实线性空间,内积如例 9.1.4,则从定理 9.1.1 的(2)可得下列 Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t.$$

习　题　9.1

1. 设 V 是内积空间,若 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 且对一切 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 总有$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})=0$,则 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 另一方面,若$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=0$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立,则也有 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

2. 设 V 是 n 维内积空间,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是 V 的一组基,若

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_i)=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e}_i),\ i=1, 2, \cdots, n,$$

求证:$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

3. 若$(\ ,\ )_1$, $(\ ,\ )_2$ 是 V 上的两个内积,证明:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_1+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_2$$

定义了 V 上的另一个内积.

4. 设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维行向量空间,$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$是 $\mathbf{R}^n$ 上的标准内积,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基,求证:对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

5. 证明:在 $\mathbf{R}^2$ 中(内积为标准内积)存在一个线性变换 φ,使 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})\perp\boldsymbol{\alpha}$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^2$ 成立. 但是在 $\mathbf{C}^2$(内积也为标准内积)中这样的线性变换不存在.

6. 证明:在内积空间中平行四边形两对角线平方和等于四边平方和,即

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

7. 设 V 是实数域上全体多项式构成的实线性空间,设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m,$$

定义

$$(f, g)=\sum_{i,j}\frac{a_ib_j}{i+j+1},$$

证明:(f, g)定义了 V 上的内积.

8. 设 V 是 n 维欧氏空间,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是 V 的一组基,$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个实数,求证:存在唯一的向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使对任意的 i,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_i)=c_i.$$

§9.2 内积的表示和正交基

这一节我们将只考虑有限维内积空间. 我们要讨论的第一个问题是: 给定内积空间的一组基以后,如何用坐标向量来表示向量的内积. 具体来说,设 V 是欧氏空间(酉空间), $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组基. 如果 $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = g_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$, 问:$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$等于什么?

用向量内积的性质,很容易给出这个问题的答案. 当 V 是欧氏空间时,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i g_{ij} b_j.$$

我们把上述结论写成矩阵形式:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

其中矩阵

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_n) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix},$$

称为基向量$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$的 Gram(格列姆)矩阵或内积空间 V 在给定基下的度量矩阵.

于是我们得到了内积在给定基下的表示:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{x}'G\boldsymbol{y}, \tag{9.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 分别是向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 在给定基下的坐标向量.

再来看矩阵 G. 因为 $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)$, 所以 G 是实对称矩阵. 又因为对任意的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,总有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) > 0$, 所以 $\boldsymbol{x}'G\boldsymbol{x} > 0$ 对一切 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{x}$ 成立. 这表明 G 是一个正定阵. 反之,给定 n 阶实对称正定阵,利用(9.2.1)式,我们也不难定义 V 上的内积(参见例 9.1.5). 由此我们可以看出,若给定了 n 维欧氏空间的一组基,则欧氏空间上的内积和 n 阶实对称正定阵之间存在着一个一

一对应.

设 V 是酉空间,我们类似可证若 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{v}_1+b_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{v}_n$, 令

$$H=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_n)\\ (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}'H\overline{\boldsymbol{y}},\tag{9.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量,H 是一个 Hermite 矩阵.

从(9.2.1)式和(9.2.2)式,我们自然地会提出这样一个问题:在 V 中是否存在这样一组基,它的 Gram 矩阵是单位阵 I_n? 如果存在,那么在这组基下的内积表示将特别简单.首先我们看看如果 $G=I_n$(或 $H=I_n$),基向量要满足什么条件? 显然 G(或 H)等于 I_n 的充分必要条件是:

$$(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)=0\ (i\neq j),\ (\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i)=1.$$

定义 9.2.1　设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基.若 $\boldsymbol{e}_i\perp\boldsymbol{e}_j$ 对一切 $i\neq j$ 成立,则称这组基是 V 的一组正交基.又若 V 的一组正交基中每个向量的长度等于 1,则称这组正交基为标准正交基.

显然在标准正交基下,度量矩阵就是单位阵,那么在任意的有限维内积空间中,标准正交基一定存在吗? 很容易验证,n 维列(行)向量空间在标准内积下,它的标准基(即标准单位向量组成的基)是标准正交基.在证明一般的内积空间标准正交基的存在性之前,我们先证明正交向量组的两个重要性质.

引理 9.2.1　内积空间 V 中的任何一组两两正交的非零向量必线性无关.

证明　设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 是 V 中两两正交的向量.若

$$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{0},$$

则对任一 $1\leqslant i\leqslant m$, 有

$$(k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_i)=0.$$

但 $\boldsymbol{v}_i\perp\boldsymbol{v}_j$, 故由上式可得

$$k_i(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i)=0.$$

由于 $\boldsymbol{v}_i\neq\boldsymbol{0}$,故 $k_i=0$. 证毕.

引理 9.2.2 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 中每个向量正交,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和由向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 生成的子空间中每个非零向量正交.

证明 设 $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\beta}_1+b_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_k\boldsymbol{\beta}_k$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) &= (b_1\boldsymbol{\beta}_1+b_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_k\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\alpha})\\ &= \sum_{i=1}^{k} b_i(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\alpha}) = 0.\end{aligned}$$

故结论成立. 证毕.

推论 9.2.1 n 维内积空间中任意一个正交向量组的向量个数不超过 n.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个非零向量,则 $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个长度等于 1 的向量,这个过程称为单位化. 因此要证明存在标准正交基,我们只须先证明存在正交基,然后将正交基单位化即可. 我们从一组线性无关的向量出发,设法构造出一组正交向量来. 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 是 V 中 m 个线性无关的向量. 我们采用数学归纳法. 当只有一个向量时,令 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1$. 假定 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 已经构造好,是一组两两正交的向量. 我们用待定系数法求 $\boldsymbol{v}_{k+1}$. 设

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{u}_{k+1}+a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k.$$

两边和 $\boldsymbol{v}_j (j\leqslant k)$ 作内积,便得到

$$0=(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)+a_j(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j).$$

于是

$$a_j=-\frac{(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)}{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j)}.$$

下面我们给出定理及其证明.

定理 9.2.1 设 V 是内积空间, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 是 V 中 m 个线性无关的向量,则在 V 中存在 m 个两两正交的向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$, 使 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 张成的 V 的子空间恰好为由 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 张成的 V 的子空间, 即 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 是该子空间的一组正交基.

证明 设 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1$, 其余 $\boldsymbol{v}_i$ 可用数学归纳法定义如下: 假定 $\boldsymbol{v}_k$ 已定义好 $(1\leqslant k<m)$, 这时 $\boldsymbol{v}_i (1\leqslant i\leqslant k)$ 两两正交且 $\boldsymbol{v}_i (1\leqslant i\leqslant k)$ 皆属于由 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 张成的子空间. 令

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{u}_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\boldsymbol{v}_j.$$

注意 $\boldsymbol{v}_{k+1} \neq \boldsymbol{0}$, 否则 $\boldsymbol{u}_{k+1}$ 将是 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 的线性组合,从而也是 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 的线性组合,此与 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 线性无关矛盾. 又对任意的 $1 \leqslant i \leqslant k$, 有

$$(\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_i) = (\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_i) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)$$

$$= (\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_i) - (\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_i) = 0.$$

因此 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{k+1}$ 两两正交. 又因为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{k+1}$ 属于 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 张成的子空间,故 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 也属于这个子空间,这就证明了结论. 证毕.

上述正交化过程通常称为 Gram-Schmidt(格列姆-施密特)方法.

推论 9.2.2 任一内积空间均有标准正交基.

例 9.2.1 设 V 是三维实行向量空间,内积为标准内积. 又已知 3 个线性无关的向量:

$$\boldsymbol{u}_1 = (3, 0, 4), \boldsymbol{u}_2 = (-1, 0, 7), \boldsymbol{u}_3 = (2, 9, 11),$$

用 Gram-Schmidt 方法求 V 的一组标准正交基.

解 令 $\boldsymbol{v}_1 = (3, 0, 4)$,

$$\boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 7) - \frac{(-1 \cdot 3 + 0 + 7 \cdot 4)}{25}(3, 0, 4)$$

$$= (-4, 0, 3),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = (2, 9, 11) - \frac{(2 \cdot 3 + 0 + 11 \cdot 4)}{25}(3, 0, 4)$$

$$- \frac{(2 \cdot (-4) + 0 + 11 \cdot 3)}{25}(-4, 0, 3)$$

$$= (0, 9, 0),$$

再令

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{5}(3, 0, 4),$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{5}(-4, 0, 3),$$

$$\boldsymbol{w}_3 = (0, 1, 0),$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ 是 V 的一组标准正交基.

下面我们要讨论子空间的正交问题.

定义 9.2.2 设 U 是内积空间 V 的子空间. 令

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, U) = 0\}.$$

这里 $(\boldsymbol{v}, U) = 0$ 表示对一切 $\boldsymbol{u} \in U$, 均有 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$, 则容易验证 $U^{\perp}$ 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

定理 9.2.2 设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间, 则

(1) $V = U \oplus U^{\perp}$;

(2) U 上的任一组标准正交基均可扩张为 V 上的标准正交基.

证明 (1) 若 $\boldsymbol{x} \in U \cap U^{\perp}$, 则 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, 因此 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $U \cap U^{\perp} = \boldsymbol{0}$. 另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{u} \in V$, 由推论 9.2.2 可知, 存在 U 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$, 令

$$\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_m,$$

则 $\boldsymbol{u}_1 \in U$. 又令

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1,$$

则对任一 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 有

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{e}_i) = 0.$$

因此 $\boldsymbol{w} \in U^{\perp}$, 而 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}$, 这就证明了 $V = U \oplus U^{\perp}$.

(2) 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 是 U 上任一组标准正交基, $\{\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 $U^{\perp}$ 上的一组标准正交基, 则显然 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 证毕.

定义 9.2.3 设 V 是 n 维内积空间, $V_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 V 的子空间. 如果对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V_i$ 和任意的 $\boldsymbol{\beta} \in V_j (j \neq i)$ 均有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的正交和, 记为

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k.$$

引理 9.2.3 正交和必是直和且任一 V_i 和其余子空间的和正交.

证明 由引理 9.2.1, 正交向量组必线性无关, 因此正交和必是直和(因此正交和也称为正交直和).

又因为对任意的 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ 和 $\sum\limits_{j \neq i} \boldsymbol{v}_j (\boldsymbol{v}_j \in V_j)$,

$$\left(\boldsymbol{v}_i, \sum_{j \neq i} \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{j \neq i} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0.$$

后一个结论也成立. 证毕.

现假定 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$,定义 V 上的线性变换 $E_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 如下:若 $v = v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_k(v_i \in V_i)$,令 $E_i(v) = v_i$.很容易验证 E_i 是 V 上线性变换且 $E_i^2 = E_i$, $E_iE_j = 0(i \neq j)$.线性变换 E_i 称为 V 到 V_i 的正投影(简称投影).

例 9.2.2 设 U 是内积空间 V 的子空间,$V=U\perp U^{\perp}$. E 是 V 到 U 的正投影,则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \in V$, 都有

$$(E(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, E(\boldsymbol{\beta})).$$

证明 设 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2$,其中 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \in U^{\perp}$,则 $E(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{u}_1$, $E(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{u}_2$, 所以

$$(E(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, E(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2).$$

由此即得结论.证毕.

下面的例子是“斜边大于直角边”这一几何命题在内积空间中的推广.

例 9.2.3(Bessel(贝塞尔)不等式) 设 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 是 n 维内积空间 V 中的正交向量组,$\boldsymbol{y}$ 是 V 中任一向量,则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_k)|^2}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2} \leqslant \|y\|^2.$$

等号成立的充分必要条件是: $\boldsymbol{y}$ 属于由 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 张成的子空间.

证明 令

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_k)}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2} \boldsymbol{v}_k,$$

则 $\boldsymbol{x}$ 属于由 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 张成的子空间 U($\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 在 U 中的投影). 又 $V = U \oplus U^{\perp}$, 而

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_k) = 0$$

对一切 $k = 1, 2, \cdots, m$ 成立,因此 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in U^{\perp}$. 由勾股定理得:

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|^2,$$

故

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

又由 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 两两正交不难算出

$$\| \boldsymbol{x} \|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_k)|^2}{\| \boldsymbol{v}_k \|^2}.$$

若 $\boldsymbol{y}$ 属于由$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$张成的子空间,则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$, 故等号成立. 反之,若等号成立,则 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2=0$,于是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{y}$ 属于由$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$张成的子空间. 证毕.

Bessel 不等式在数学分析中有重要的应用.

习 题 9.2

1. 用 Gram-Schmidt 方法求由下列向量张成的子空间的标准正交基:

(1) $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2=(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_3=(1, 0, 0)$;

(2) $\boldsymbol{v}_1=(1, 2, 2, -1)$, $\boldsymbol{v}_2=(1, 1, -5, 3)$, $\boldsymbol{v}_3=(3, 2, 8, -7)$;

(3) $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, -1, -2)$, $\boldsymbol{v}_2=(5, 8, -2, -3)$, $\boldsymbol{v}_3=(3, 9, 3, 8)$.

2. 设 V 是内积空间,U 是 V 的子空间,若 U 可以由向量组$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$生成,则

$$U^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)=0,\ i=1, 2, \cdots, m\}.$$

3. 设 U, U_1, U_2 是有限维内积空间 V 的子空间,求证:

(1) $(U^{\perp})^{\perp}=U$;

(2) $(U_1+U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}$;

(3) $(U_1\cap U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}$;

(4) $V^{\perp}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0}^{\perp}=V$.

4. 设 S 是 n 维欧氏空间 V 的子集,证明:

(1) $S^{\perp}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V \mid (\boldsymbol{\alpha}, S)=0\}$ 是 V 的子空间;

(2) $(S^{\perp})^{\perp}$等于由 S 生成的子空间.

5. 设线性子空间 U 为下列线性方程组的解空间:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_4=0, \\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0, \end{cases}$$

试求 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组.

*6. 令 V 是区间 $[-1, 1]$ 上由次数不超过 n 的实系数多项式构成的实线性空间,V 上的内积为

$$(f, g)=\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

证明: V 是 $n+1$ 维欧氏空间,且下列多项式(称为 Legendre(勒让德)多项式)

$$P_0(x)=1,\ P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k]\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

组成 V 的一组正交基.

*7. 设 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 是欧氏空间 V 中的 m 个向量,矩阵

$$G(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_m)\\ (\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\boldsymbol{v}_m,\ \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_m,\ \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_m,\ \boldsymbol{v}_m)\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 的 Gram 矩阵. 证明:若用 Gram-Schmidt 方法将线性无关向量组 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m\}$ 变成正交向量组 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m\}$,则这两组向量 Gram 矩阵的行列式值不变,即

$$|G(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)|=|G(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m)|=\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{u}_m\|^2.$$

8. 证明:向量 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m$ 线性无关的充分必要条件是它们的 Gram 矩阵为一个非异阵.

9. 证明下列不等式:

$$0\leqslant|G(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_m)|\leqslant\|\boldsymbol{v}_1\|^2\|\boldsymbol{v}_2\|^2\cdots\|\boldsymbol{v}_m\|^2.$$

后一个等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}_i$ 两两正交.

10. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵,证明下列 Hadamard(阿达玛)不等式:

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ji}^2.$$

§9.3 伴　随

在这一节里我们将考察内积空间中的线性变换,内积空间中的线性变换常常被称为线性算子.

现设 V 是 n 维内积空间(不妨设之为酉空间),取 V 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$. 假定 φ 是 V 上的线性变换且它在这组基下的表示矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

又设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n$. 记 $\boldsymbol{x}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)',\ \boldsymbol{y}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)'$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量,则

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (A\boldsymbol{x})'\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}'A'\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}'(\overline{\overline{A}'\boldsymbol{y}}). \tag{9.3.1}$$

记矩阵 $\overline{A}'$在 V 上定义的线性变换为 ψ,即对任意的 $\boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$,定义 $\psi(\boldsymbol{\beta}) = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$, 其中

$$c_i = \overline{a}_{1i}b_1 + \overline{a}_{2i}b_2 + \cdots + \overline{a}_{ni}b_n \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

即 $\psi(\boldsymbol{\beta})$的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \overline{A}'\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

于是(9.3.1)式表明

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in V$ 成立.

读者很容易验证上述结论对欧氏空间也成立.

定义 9.3.1 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子,若存在 V 上的线性算子φ^*,使等式

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in V$ 成立,则称 φ^* 是 φ 的伴随算子,简称为 φ 的伴随.

定理 9.3.1 设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的线性变换,则存在 V 上唯一的线性变换 φ^*,使对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in V$,成立

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*(\boldsymbol{\beta})). \tag{9.3.2}$$

证明 只须证明唯一性.若 ψ 是 V 上的线性变换且

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ 成立,则$(\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 成立,即$(\boldsymbol{\alpha},\ \psi(\boldsymbol{\beta}) - \varphi^*(\boldsymbol{\beta})) = 0$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}$ 成立,特别,对 $\boldsymbol{\alpha} = \psi(\boldsymbol{\beta}) - \varphi^*(\boldsymbol{\beta})$ 也成立.由内积定义即知 $\psi(\boldsymbol{\beta}) - \varphi^*(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$,即 $\psi(\boldsymbol{\beta}) = \varphi^*(\boldsymbol{\beta})$.而 $\boldsymbol{\beta}$ 是任意的,故有 $\psi = \varphi^*$,证毕.

定理 9.3.1 表明,对内积空间 V 上的任意一个线性算子,它的伴随必存在且唯一.从本节开始的分析我们还知道,线性算子在标准正交基下的表示矩阵和它的伴随的表示矩阵有下面的关系.

定理 9.3.2　设 V 是 n 维内积空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 V 上的线性算子 φ 在这组基下的表示矩阵为 $A=(a_{ij})$，则如果 V 是酉空间，那么 φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{A}'=(\overline{a}_{ij})'$，即 A 的共轭转置；如果 V 是欧氏空间，那么 φ^* 的表示矩阵为 A'，即 A 的转置.

证明　由伴随的唯一性知道本节一开始由 $\overline{A}'$ 定义的线性变换 ψ 就是 φ 的伴随，而 ψ 的表示矩阵就是 $\overline{A}'$. 证毕.

伴随算子有下列性质.

定理 9.3.3　设 V 是有限维内积空间，若 φ 及 ψ 是 V 上线性变换，c 为常数，则

(1) $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$；

(2) $(c\varphi)^*=\overline{c}\varphi^*$；

(3) $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$；

(4) $(\varphi^*)^*=\varphi$.

证明　由矩阵和线性变换的对应关系及矩阵转置共轭的性质即得. 证毕.

关于伴随的不变子空间和特征值有下面的结果.

命题 9.3.1　设 V 是 n 维内积空间，φ 是 V 上线性算子.

(1) 若 U 是 φ 的不变子空间，则 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间；

(2) 若 φ 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 φ^* 有特征值 $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots, \overline{\lambda}_n$.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}\in U^{\perp}$，$\boldsymbol{\beta}\in U$，因为

$$(\boldsymbol{\beta}, \varphi^*(\boldsymbol{\alpha}))=(\varphi(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\alpha})=0.$$

所以 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间.

(2) 取 V 的一组标准正交基，记 A 是 φ 的表示矩阵，则当 V 是酉空间时，φ^* 的表示矩阵为 $\overline{A}'$. 因为 $|\lambda I_n-A|=0$ 当且仅当 $|\overline{\lambda}I_n-\overline{A}'|=0$，故结论成立. 当 V 是欧氏空间时，实矩阵 A 和 A' 的特征多项式相同，因此特征值相同. 又因为实矩阵虚部不为零的复特征值成对出现，即若 $a+b\mathrm{i}$ 是 A 的特征值，则 $a-b\mathrm{i}$ 也是 A 的特征值. 故结论也成立. 证毕.

习　题　9.3

1. 设 V 是二维复行向量空间，内积为标准内积. 设 $\{e_1, e_2\}$ 为 V 的标准基. 若

$$\varphi(e_1)=(1, -2),\ \varphi(e_2)=(\mathrm{i}, -1),$$

求 φ 及 φ^* 在这组基下的表示矩阵. 又若 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$，求 $\varphi^*(\boldsymbol{x})$.

2. 设 V 是有限维内积空间，φ 是 V 上的线性算子，N 是 φ 的核，求证：φ^* 的像空间等于 N 的正交补 $N^{\perp}$.

3. 设 φ 是有限维内积空间 V 上的线性算子，若 φ 为线性自同构，求证：φ^* 是线性自同构且 $(\varphi^*)^{-1}=(\varphi^{-1})^*$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维酉空间 V 中的两个向量，令 φ 是 V 上的变换且对任意的 $\boldsymbol{x}\in V$, $\varphi(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}$，则 φ 是 V 上的线性变换，求 φ^*. 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两个正交单位向量，将它们扩展为 V 的基：

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{e}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n.$$

求在这组基下 φ 和 φ^* 的表示矩阵.

5. 设 V 是由实 n 阶矩阵组成的线性空间，定义 V 中内积如下：若 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$，则

$$(A,\ B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij},$$

求证：V 是 n^2 维欧氏空间.

又若 T 是一个 n 阶方阵，定义 V 上的线性变换

$$\psi(A)=TA,$$

试求 ψ 的伴随.

6. 若向量 $\boldsymbol{x}$ 既是线性算子 φ 属于特征值 λ_1 的特征向量，又是 φ^* 属于特征值 λ_2 的特征向量，则 $\lambda_1=\overline{\lambda}_2$.

7. 证明：若 φ^* 是 φ 的伴随，φ 的极小多项式为 $g(x)$，则 φ^* 的极小多项式为 $\overline{g}(x)$，这里 $\overline{g}(x)$ 的系数等于 $g(x)$ 系数的共轭.

§9.4 内积空间的同构，正交变换和酉变换

在第四章中，我们曾经讨论过抽象的 n 维线性空间和 n 维列向量空间(或行向量空间)的同构. 我们知道若在 V 中取定一组基，将 V 中向量映射到它在这组基下坐标向量的映射是一个线性同构. 现在设 V 是 n 维欧氏空间，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 又设 $\mathbf{R}_n$ 是 n 维实列向量空间，$\mathbf{R}_n$ 的内积取为标准内积. 令 φ 为 $V\to\mathbf{R}_n$ 的线性映射，它将 V 中向量 $\boldsymbol{x}$ 变为其坐标向量，即若 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n$，则 $\varphi(\boldsymbol{x})=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 我们已经知道 φ 是同构. 此外若令 $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{v}_n$，则

$$(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{y}))=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

因此映射 φ 是一个保持内积的同构. 因为向量的长度、向量之间的距离都是由内积决定的，故 φ 保持向量的长度和向量间的距离. 当 V 是酉空间时，类似的结论

也成立.于是我们可以把对抽象内积空间的研究归结为对 $\mathbf{R}_n$ 或 $\mathbf{C}_n$ 的研究.

定义 9.4.1 设 V 与 U 是域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间,$\mathbf{K}$ 是实数域或复数域,φ 是 $V\to U$ 的线性映射.若对任意的 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V$,有

$$(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),$$

则称 φ 是 $V\to U$ 的保持内积的线性映射.又若 φ 作为线性映射是同构,则称 φ 是内积空间 V 到 U 上的保积同构.

注 (1) 在不会引起误解的情况下,我们常常把内积空间的保积同构就称为同构.

(2) 保持内积的线性映射一定是单映射,这是因为 $\|\varphi(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$,从 $\|\varphi(\boldsymbol{x})\|=0$ 得到 $\|\boldsymbol{x}\|=0$,故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(3) 容易证明保持内积的同构关系是一个等价关系,读者可自己证明之.

我们上面已经提到,若线性映射 φ 保持内积,则 φ 必保持向量的长度.现在的问题是如果已知线性映射 φ 保持向量的长度或向量之间的距离,它是否一定是保积映射?

命题 9.4.1 若 φ 是内积空间 V 到内积空间 W 的保持范数的线性映射,则 φ 保持内积.

证明 向量的范数可以用内积表示,反过来内积也可用范数来表示.设 $\boldsymbol{x}$ 是 V 中的任意两个向量,则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2&=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}),\\\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2&=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

故

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})+2\,\overline{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}.\tag{9.4.1}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2&=(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})+\mathrm{i}(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})-\mathrm{i}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\\\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2&=(\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})-\mathrm{i}(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})+\mathrm{i}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

故

$$\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-\mathrm{i}y\|^2=-2\mathrm{i}(x,y)+2\mathrm{i}\,\overline{(x,y)}. \tag{9.4.2}$$

由(9.4.1)式和(9.4.2)式得

$$(x,y)=\frac{1}{4}\|x+y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|x-\mathrm{i}y\|^2. \tag{9.4.3}$$

由此即可得到结论. 证毕.

注　我们仅对复空间进行了讨论,事实上对实空间,可得下列等式:

$$(x,y)=\frac{1}{4}\|x+y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2. \tag{9.4.4}$$

因此对实空间结论也正确. 由于保持内积与保持范数的等价性,保持内积的同构也称为保范同构或保距同构.

定理 9.4.1　设 V 与 W 都是 n 维内积空间(同为实空间或同为复空间),若 φ 是 $V\rightarrow W$ 的线性映射,则下列命题等价:

(1) φ 保持内积;

(2) φ 是保积同构;

(3) φ 将 V 的任一组标准正交基变成 W 的一组标准正交基;

(4) φ 将 V 的某一组标准正交基变成 W 的一组标准正交基.

证明　(1) ⇒(2): φ 保持内积,因此 φ 为单映射,即

$$\dim\mathrm{Im}\,\varphi=\dim V=n.$$

因此 $\mathrm{Im}\,\varphi=W$, 即 φ 是映上的,故为同构.

(2)⇒(3): 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的任意一组标准正交基. 由于 φ 保持内积,故对 $i\neq j$, 有

$$(\varphi(e_i),\varphi(e_j))=(e_i,e_j)=0,$$

又

$$(\varphi(e_i),\varphi(e_i))=(e_i,e_i)=1.$$

这表明 $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)\}$ 是 W 的标准正交基.

(3)⇒(4): 显然.

(4)⇒(1): 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的标准正交基且 $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)\}$ 是 W 的标准正交基. 假定

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i,$$

则

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(e_i),\ \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi(e_i),$$

$$\begin{aligned}(\varphi(u),\ \varphi(v)) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(e_i),\ \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi(e_i)\right) \\ &= a_1 \overline{b}_1 + a_2 \overline{b}_2 + \cdots + a_n \overline{b}_n \\ &= (u,\ v).\end{aligned}$$

证毕.

推论 9.4.1　两个有限维内积空间 V 与 W(同为实空间或同为复空间)同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

证明　只需证明充分性. 设 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 V 的标准正交基, $\{f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n\}$ 是 W 的标准正交基,令 φ 是 $V \to W$ 的线性映射:

$$\varphi(e_i) = f_i,$$

则 φ 将标准正交基变为标准正交基,由定理可知 φ 是保积同构,证毕.

现在我们来讨论同一个内积空间上的保积自同构及其表示矩阵.

定义 9.4.2　设 V 是欧氏空间,若 φ 是 V 上保持内积的线性变换,则称 φ 为 V 上的正交变换或正交算子. 若 U 是酉空间,则 U 上保持内积的线性变换称为酉变换或酉算子.

显然正交变换及酉变换都是可逆线性变换. 由定理 9.4.1 知道,正交变换可定义为把欧氏空间中一组标准正交基变成标准正交基的线性变换. 酉变换也类似.

定理 9.4.2　设 φ 是欧氏空间或酉空间上的线性变换,则 φ 是正交变换或酉变换的充分必要条件是 φ 非异,且

$$\varphi^{-1} = \varphi^*.$$

证明　设 φ 是欧氏空间 V 上的正交变换,则对 V 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$,有

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \boldsymbol{\beta}) = (\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\beta}))) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^{-1}(\boldsymbol{\beta})).$$

此即 $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

反过来,若 $\varphi^* = \varphi^{-1}$, 则

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \varphi(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*\varphi(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}).$$

φ 保持内积,故 φ 是正交变换.

对酉变换可类似证明,证毕.

如果在内积空间 V 中取定一组标准正交基,那么正交(酉)变换的表示矩阵有什么特点呢?

定义 9.4.3 设 A 是 n 阶实方阵,若 $A' = A^{-1}$,则称 A 是正交矩阵. 又若 C 是 n 阶复方阵且 $\overline{C}' = C^{-1}$,则称 C 是酉矩阵.

定理 9.4.3 设 φ 是欧氏空间(酉空间)V 上的正交变换(酉变换),则在 V 的任一标准正交基下,φ 的表示矩阵是正交矩阵(酉阵).

证明 由上述定理,当 φ 是正交变换时,若 φ 在 V 的一组标准正交基下的矩阵为 A,则 φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 A',由 $\varphi^* = \varphi^{-1}$ 得 $A' = A^{-1}$, A 是正交矩阵. 同理,当 φ 是酉变换时,φ 在标准正交基下的矩阵 A 应适合 $\overline{A}' = A^{-1}$,即 A 是酉矩阵. 证毕.

注 上述定理的逆命题也是正确的,即若线性变换 φ 在一组标准正交基下的表示矩阵为正交(酉)矩阵,则 φ 是正交(酉)变换. 这由线性变换与其表示矩阵的关系即得.

由正交矩阵与酉矩阵的定义可知正交矩阵适合条件 $AA' = A'A = I_n$;酉矩阵适合条件 $\overline{A}'A = A\overline{A}' = I_n$.

定理 9.4.4 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵,则 A 是正交矩阵的充分必要条件是:

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 0,\ i \neq j,$$

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1,$$

或

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0,\ i \neq j,$$

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1.$$

也就是说,A 为正交矩阵的充分必要条件是它的 n 个行向量是 n 维实行向量空间组成的欧氏空间(取标准内积)的标准正交基;或它的 n 个列向量是 n 维实列向量空间组成的欧氏空间(取标准内积)的标准正交基.

证明 由 $AA' = I_n$ 即可得到第一个结论,由 $A'A = I_n$ 得到第二个结论. 证毕.

同理我们可证明下述定理.

定理 9.4.5　设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵，则 A 是酉矩阵的充分必要条件是：

$$a_{i1}\overline{a}_{j1}+a_{i2}\overline{a}_{j2}+\cdots+a_{in}\overline{a}_{jn}=0,\ i\neq j,$$

$$|a_{i1}|^2+|a_{i2}|^2+\cdots+|a_{in}|^2=1,$$

或

$$a_{1i}\overline{a}_{1j}+a_{2i}\overline{a}_{2j}+\cdots+a_{ni}\overline{a}_{nj}=0,\ i\neq j,$$

$$|a_{1i}|^2+|a_{2i}|^2+\cdots+|a_{ni}|^2=1.$$

也就是说，A 为酉矩阵的充分必要条件是它的 n 个行向量是 n 维复行向量空间组成的酉空间(取标准内积)的标准正交基；或它的 n 个列向量是 n 维复列向量空间组成的酉空间(取标准内积)的标准正交基.

定理 9.4.6　若 n 阶实矩阵 A 是正交矩阵，则

(1) A 的行列式值等于 1 或 -1；

(2) A 的特征值的绝对值(模长)等于 1.

证明　(1) 由 $AA'=I_n$，取行列式即得结论.

(2) 设 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是属于 λ 的特征向量，则 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是 $\overline{\boldsymbol{x}}'A'=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}'$. 所以

$$\overline{\boldsymbol{x}}'A'A\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}'\lambda\boldsymbol{x},$$

即

$$\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\lambda(\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}).$$

因此 $\overline{\lambda}\lambda=1$，即 $|\lambda|=1$. 证毕.

定理 9.4.7　若 n 阶复矩阵 A 是酉矩阵，则

(1) A 的行列式值的模长等于 1；

(2) A 的特征值的绝对值(模长)等于 1.

证明　同上定理. 证毕.

例 9.4.1　(1) 单位阵是正交矩阵也是酉矩阵；

(2) 对角阵是正交矩阵的充分必要条件是主对角线上的元素为 1 或 -1.

例 9.4.2　(1) 下列矩阵是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

(2) 下列矩阵为酉矩阵：

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} & 4-3\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i} \\ 6+2\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

习 题 9.4

1. 证明：正交(酉)变换的积仍是正交(酉)变换，正交(酉)变换的逆也是正交(酉)变换. 正交(酉)矩阵的积仍是正交(酉)矩阵，正交(酉)矩阵的逆仍是正交(酉)矩阵.

2. 证明二阶正交矩阵具有下列形状：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. 证明：上三角(或下三角)正交矩阵必是对角阵且主对角线上的元素为 1 或 -1.

4. 设 A 是 n 阶非异实矩阵，求证：A 可分解为

$$A = QR,$$

其中 Q 是正交矩阵，R 是一个上三角阵且主对角线上的元素均大于零，且这样的分解必唯一.

(这是矩阵分解理论中的一个重要定理，称为矩阵的 QR 分解. 类似的结论对复矩阵也对，只须将 Q 改为酉矩阵即可.)

5. 设 $\boldsymbol{e}$ 是欧氏空间中长度为 1 的向量，定义线性变换

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e},$$

证明：

(1) φ 是正交变换且 $\det\varphi = -1$；

(2) 若 ξ 是 n 维欧氏空间 V 中的正交变换且 1 是它的特征值，属于 1 的特征子空间 V_1 的维数等于 $n-1$，则必存在 V 中的单位向量 $\boldsymbol{e}$，使

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}.$$

(本题中的 φ 称为镜像变换.)

6. n 阶实方阵 $M = I_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是 n 维实列向量且适合 $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v} = 1$，称 M 为实镜像阵. 求证：欧氏空间中任一镜像变换在任一组标准正交基下的矩阵是镜像阵. 反之若一个线性变换 φ 在一组标准正交基下的表示矩阵为镜像阵，则 φ 是镜像变换.

7. 设 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是欧氏空间 V 中两个长度相等的不同向量，求证：必存在镜像变换 φ，使 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

*8. 证明 n 维欧氏空间的任一正交变换均可表示为不超过 $n+1$ 个镜像变换之积.

9. 设 A, B 是 n 阶正交矩阵且 $\det A = 1$, $\det B = -1$，求证：$\det(A+B) = 0$.

10. 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 及 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ 是欧氏空间(酉空间)中两组向量. 证明：存在正交(酉)变换 φ，使

$$\varphi(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \cdots, k$$

成立的充分必要条件是这两组向量的 Gram 矩阵相等.

§9.5　自伴随算子

在下面的几节里我们将讨论与相似标准型类似的问题：一个内积空间上的线性变换适合什么条件，它在一组标准正交基下的矩阵有比较简单的形状？设 n 维内积空间 V 上的线性变换 φ 在一组标准正交基下的表示矩阵为 A，在另一组标准正交基下的表示矩阵为 B，两组基之间的过渡矩阵为 P，我们首先要问：P 是一个什么样的矩阵？

引理 9.5.1　**欧氏空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵，酉空间两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.**

证明　设 V 是 n 维欧氏空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 V 的两组标准正交基且

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ f_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

因为 $(f_i, f_i) = 1$，故

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1. \tag{9.5.1}$$

又若 $i \neq j$ 则 $(f_i, f_j) = 0$，故

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0. \tag{9.5.2}$$

定理 9.4.4 和(9.5.2)式、(9.5.2)式表明过渡矩阵

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 同理可证明酉空间中的两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵. 证毕.

根据引理我们知道，当 V 是欧氏空间时，

$$B = P^{-1}AP = P'AP;$$

当 V 是酉空间时,有

$$B = P^{-1}AP = \overline{P}'AP.$$

定义 9.5.1 设 A, B 是 n 阶实矩阵,若存在正交矩阵 P,使 $B=P'AP$ 成立,则称 B 和 A 正交相似. 设 A, B 是 n 阶复矩阵,若存在酉矩阵 P,使 $B=\overline{P}'AP$,则称 B 和 A 酉相似.

和矩阵的相似关系一样,我们不难证明正交(酉)相似关系是等价关系,即

(1) n 阶矩阵 A 和自己正交(酉)相似;

(2) 若 B 和 A 正交(酉)相似,则 A 和 B 也正交(酉)相似;

(3) 若 B 和 A 正交(酉)相似,C 和 B 正交(酉)相似,则 C 和 A 也正交(酉)相似.

我们的问题是寻找一类矩阵的正交(酉)相似标准型. 显而易见,正交(酉)相似比普通的相似要求更高,因此对一般的矩阵寻求它们的正交(酉)相似标准型将是很困难的. 在这一节里我们将把注意力限制在一类特殊的矩阵——Hermite 矩阵和实对称矩阵上.

定义 9.5.2 设 φ 是有限维内积空间 V 上的线性变换,φ^* 是 φ 的伴随,若 $\varphi^* = \varphi$, 则称 φ 是自伴随算子. 在 V 是欧氏空间的情形,φ 称为对称算子或对称变换,在 V 是酉空间的情形,φ 称为 Hermite 算子或 Hermite 变换.

例 9.5.1 设 V 是 n 维内积空间,V_0 是 V 的子空间,$V=V_0 \oplus V_0^{\perp}$. 令 E 是 V 到 V_0 上的正投影,由例 9.2.2 知道 E 是自伴随算子.

若 V 是 n 维欧氏空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是一组标准正交基,设 φ 在这组基下的表示矩阵为 A,则 φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 A'. 若 $\varphi^* = \varphi$,则 $A' = A$. 也就是说欧氏空间上的自伴随算子在任一组标准正交基下的表示矩阵是实对称矩阵. 同理可证明酉空间上的自伴随算子在任一组标准正交基下的表示矩阵是 Hermite 矩阵. 反之亦容易看出,若 V 是欧氏空间,线性变换 φ 在某组标准正交基下的表示矩阵是实对称矩阵,则 $\varphi^* = \varphi$. 对酉空间也有类似结论.

定理 9.5.1 设 V 是 n 维酉空间,φ 是 V 上的自伴随算子,则 φ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交.

证明 设 λ 是 φ 的特征值,$\boldsymbol{x}$ 是属于 λ 的特征向量,则

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) \\ &= (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

因为 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$, 所以$\bar{\lambda}=\lambda$, λ 是实数. 又若设 μ 是 φ 的另一个特征值, $\boldsymbol{y}$ 是属于 μ 的特征向量,注意到 λ, μ 都是实数,我们有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mu \boldsymbol{y}) \\ &= \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

由于 $\mu \neq \lambda$, 因此$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$,即 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. 证毕.

推论 9.5.1　Hermite 矩阵的特征值全是实数,实对称矩阵的特征值也全是实数. 这两种矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交.

证明　Hermite 矩阵的结论是定理的显然推论,而实对称矩阵也是 Hermite 矩阵,因此结论成立. 证毕.

定理 9.5.2　设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的自伴随算子,则存在 V 的一组标准正交基,φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵,且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

证明　首先我们需要说明的是若 V 是欧氏空间,由于自伴随算子 φ 的特征值是实数,因此有实的特征向量. 不妨设 $\boldsymbol{u}$ 是 φ 的特征向量,令 $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$, 则 $\boldsymbol{v}_1$ 是 φ 的长度等于 1 的特征向量. 我们对维数 n 用归纳法.

若 $\dim V = 1$, 结论已成立. 设对小于 n 维的内积空间结论成立. 令 W 为 $\boldsymbol{v}_1$ 张成的子空间,$W^{\perp}$ 为 W 的正交补,则 W 是 φ 的不变子空间且

$$V = W \oplus W^{\perp}, \ \dim W^{\perp} = n-1.$$

由命题 9.3.1 可知 $W^{\perp}$ 是 $\varphi^* = \varphi$ 的不变子空间. 将 φ 限制在 $W^{\perp}$ 上仍是自伴随算子. 由归纳假设,存在 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基$\{\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$,在这组基下 φ 的表示矩阵为对角阵,且 $\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是其特征向量. 则 φ 在$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$下的表示矩阵为对角阵且$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$为 φ 的特征向量. 证毕.

推论 9.5.2　设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵,则存在酉矩阵 P,使得$P^{-1}AP$ 为实对角阵,即 Hermite 矩阵酉相似于实对角阵. 又若 A 是 n 阶实对称矩阵,则存在正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角阵,即实对称矩阵正交相似于对角阵. 上述正交矩阵或酉矩阵 P 的 n 个列向量恰为矩阵 A 的 n 个两列正交且长度等于 1 的特征向量.

证明　由定理即可知 Hermite 矩阵酉相似于实对角阵,实对称矩阵正交相似于对角阵. 从 §6.2 知道 P 的列向量都是 A 的特征向量,而因为 P 是正交(酉)阵,故这些列向量两两正交且长度等于 1. 证毕.

上述对角阵称为 Hermite(实对称)矩阵 A 的酉(正交)相似标准型. 对角阵对角线上的元素就是 A 的特征值.

现在的问题是实对称矩阵或 Hermite 矩阵正交相似或酉相似的全系不变量是什么呢?

定理 9.5.3 实对称(Hermite)矩阵的特征值是实对称(Hermite)矩阵正交(酉)相似的全系不变量.

证明 只证实的情形. 显然正交相似的矩阵有相同的特征值. 另一方面,由上面的结论知道只需对对角阵证明若它们的特征值相同必正交相似即可. 设

$$B = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

$$D = \mathrm{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}\},$$

其中$\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}\}$是$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$的一个排列. 由于任一排列可通过若干个对换来实现,因此只要证明对 B 的第(i, i)元素和第(j, j)元素对换后得到的矩阵与 B 正交相似即可. 设 P_{ij} 是第一类初等矩阵,则 P_{ij} 是正交矩阵且 $P'_{ij} = P_{ij}$, 因此 $P'_{ij}BP_{ij}$ 和 B 正交相似. 这就是我们所要证明的结论,证毕.

实对称矩阵的正交相似理论在实二次型理论中有重要的应用. 从几何的角度看问题,以三维欧氏空间为例,就是要在不改变度量的条件下将二次曲面的方程化为标准型. 这也是解析几何中所谓的主轴问题.

定理 9.5.4 设 $f(x) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 是 n 变元实二次型, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值,则 f 经正交变换可以化为下列标准型:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

因此, f 的正惯性指数等于 A 的正特征值的个数,其负惯性指数等于 A 的负特征值的个数. f 的秩等于 A 的非零特征值的个数.

证明 正交相似既是相似又是合同,因此由推论 9.5.2 即得. 证毕.

推论 9.5.3 设 $f(x) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 是 n 变元实二次型,则 f 是正定型当且仅当矩阵 A 的特征值全是正数, f 是负定型当且仅当矩阵 A 的特征值全是负数, f 是半正定型当且仅当 A 的特征值非负, f 是半负定型当且仅当 A 的特征值非正.

下面我们通过具体例子来说明对实对称矩阵 A, 如何求正交矩阵 P, 使 $P'AP$是对角阵. 我们的方法和 §6.2 类似,只是增加了特征向量的标准正交化过程.

例 9.5.2 求正交矩阵 P, 使 $P'AP$ 为对角阵,其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 先求特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda-2)^2.$$

因此,A 的特征值为 $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. 当 $\lambda = 8$ 时,求解齐次线性方程组 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系(只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,\ 1,\ 1)'.$$

当 $\lambda = 2$ 时,求解齐次线性方程组 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系(有两个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (-1,\ 1,\ 0)',\ \boldsymbol{\eta}_3 = (-1,\ 0,\ 1)'.$$

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交,因此只要对上面两个向量正交化,用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (-1,\ 1,\ 0)',\ \boldsymbol{\xi}_3 = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 化为单位向量得到

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\right)',\ \boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)',$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)'.$$

令

$$P = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

于是

$$P'AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

注 上述方法也适用于 Hermite 矩阵,即对 Hermite 矩阵 A,求酉矩阵 P,使$\overline{P}'AP$ 为对角阵.

例 9.5.3 设 A 是三阶实对称矩阵,A 的特征值为 0, 3, 3. 已知属于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 1)'$,又向量 $\boldsymbol{v}_2=(-1, 1, 0)'$ 是属于特征值 3 的特征向量,求矩阵 A.

解 由定理 9.5.1 知道 A 属于特征值 0 的特征向量和 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 都正交. 若设之为 $\boldsymbol{v}_3=(x_1, x_2, x_3)$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ -x_1+x_2=0, \end{cases}$$

求出一个非零解 $\boldsymbol{v}_3=(1, 1, -2)'$. 因为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ 已经两两正交,故只须将 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ 标准化,得到

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

令

$$P=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

则

$$A=PBP'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 9.5.4 设 A 是 n 阶实对称矩阵且 $A^3=I_n$,证明: $A=I_n$.

证明 设 A 的特征值为 λ,则 $\lambda^3=1$. 因为 λ 是实数,故 $\lambda=1$,这就是说 A 的特征值全是实数. 由推论 9.5.2,存在正交矩阵 P,使得 $P'AP=I_n$. 于是 $A=PI_nP'=I_n$. 证毕.

习　题　9.5

1. 对下列实对称矩阵 A,找正交矩阵 P,使 $P'AP$ 为对角阵:

(1) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$.

2. 求酉矩阵 P,使$\overline{P}'AP$ 为对角阵:

(1) $A=\begin{pmatrix}3&2+2\mathrm{i}\\2-2\mathrm{i}&1\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}3&2-\mathrm{i}\\2+\mathrm{i}&7\end{pmatrix}$.

3. 设有实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1&-1\\1&a&-1&1\\1&-1&a&1\\-1&1&1&a\end{pmatrix}.$$

已知 A 有一个单特征值-3,求 a 的值并求正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

4. 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 2,\ -1)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ -1,\ 1)'$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 和对角阵 D,使 $Q'AQ=D$.

5. 已知曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面 $v^2+4w^2=4$, 求 a, b 之值和正交矩阵 P.

6. 证明:两个自伴随算子之和仍为自伴随算子、两个自伴随算子之积仍是自伴随算子的充分必要条件是它们可以交换.

7. 若 φ, ψ 是自伴随算子,则

$$\varphi\psi+\psi\varphi,\ \mathrm{i}(\varphi\psi-\psi\varphi)$$

也是自伴随算子.

8. 设 V 是 n 维欧氏空间,G 是 V 关于基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的度量矩阵. 求在这组基下用矩阵 A 给出的线性变换 φ 是自伴随算子的充分必要条件.

9. 证明: n 维内积空间的两个自伴随算子 φ, ψ 有公共的由它们的特征向量组成的标准正交基的充分必要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi$.

10. 设 $\{A_i(i=1, 2, \cdots, m)\}$ 是 m 个实对称矩阵且两两乘法可交换,求证: 存在正交矩阵 P,使 $P'A_iP(i=1, 2, \cdots, m)$ 都是对角阵.

§9.6 复正规算子

我们现在来讨论这样一个问题: 如果 n 维酉空间 V 上的线性变换 φ 在一组标准正交基下的矩阵是对角阵,则 φ 必须满足些什么条件? 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的标准正交基,φ 在这组基下的矩阵为

$$A=\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

则

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i)=c_i\boldsymbol{e}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

即 φ 以 $c_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为特征值. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 恰为 φ 的特征向量. 又记 φ^* 为 φ 的伴随,则 φ^* 在这组基下的表示矩阵为

$$\overline{A}'=\mathrm{diag}\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n\}.$$

于是,有

$$\overline{A}'A=A\overline{A}',\ \varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi.$$

定义 9.6.1 设 φ 是有限维内积空间 V 上的线性变换,φ^* 是其伴随,若 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$,则称 φ 是 V 上的正规算子. 一个矩阵 A 若适合 $\overline{A}'A=A\overline{A}'$,则称其为正规矩阵.

注 (1) 当 V 是欧氏空间时,若 $\varphi^*\varphi=\varphi\varphi^*$,我们称 φ 是实正规算子. 若 A 是实矩阵且 $A'A=AA'$,则 A 称为实正规矩阵,我们将在下一节中详细讨论实正规算子和实正规矩阵.

(2) 容易验证酉算子(酉矩阵),Hermite 算子(Hermite 矩阵)都是复正规算子(矩阵). 正交变换(矩阵),对称变换(矩阵)都是实正规算子(矩阵).

显而易见,正规算子在任一组标准正交基下的矩阵都是正规矩阵. 反之,选定一组标准正交基,一个正规矩阵代表了一个正规算子.

从上面的论证我们看出:一个复矩阵如果酉相似于对角阵,它一定是复正规矩阵. 那么复正规矩阵是否必酉相似于对角阵呢?

我们先证明正规性在酉相似下是不变的,即下面的引理.

引理 9.6.1　若 A 是复正规矩阵,则对任意的酉矩阵 P, $\overline{P}'AP$ 仍是复正规矩阵;若 A 是实正规矩阵,则对任意的正交矩阵 P, $P'AP$ 仍是实正规矩阵.

证明　对复正规矩阵 A,我们有

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{P}'AP)'}(\overline{P}'AP) &= \overline{P}'\,\overline{A}'P\,\overline{P}'AP = \overline{P}'\,\overline{A}'AP \\ &= \overline{P}'A\,\overline{A}'P = \overline{P}'AP\,\overline{P}'\,\overline{A}'P \\ &= (\overline{P}'AP)\,\overline{(\overline{P}'AP)'}.\end{aligned}$$

对实正规矩阵,也可同样证明. 证毕.

复正规矩阵(正规算子)的特征值和特征向量有下列重要的性质.

命题 9.6.1　设 V 是 n 维酉空间,φ 是 V 上的正规算子.

(1) 向量 $\boldsymbol{u}$ 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量的充分必要条件为 $\boldsymbol{u}$ 是 φ^* 属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量;

(2) 属于 φ 不同特征值的特征向量必正交.

证明　(1) 先证明 $\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\| = \|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立. 由 φ 的正规性,有

$$\begin{aligned}\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\|^2 &= (\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \varphi(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi^*\varphi(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{\alpha},\ \varphi\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= (\varphi^*(\boldsymbol{\alpha}),\ \varphi^*(\boldsymbol{\alpha})) = \|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|^2.\end{aligned}$$

若 λ 是任一数,则 $(\lambda I-\varphi)^* = \overline{\lambda}I-\varphi^*$,且

$$(\lambda I-\varphi)(\overline{\lambda}I-\varphi^*) = (\overline{\lambda}I-\varphi^*)(\lambda I-\varphi),$$

即 $\lambda I-\varphi$ 也是正规算子. 于是

$$\|(\lambda I-\varphi)(\boldsymbol{\alpha})\| = \|(\overline{\lambda}I-\varphi^*)(\boldsymbol{\alpha})\|$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立. 故 $(\lambda I-\varphi)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $(\overline{\lambda}I-\varphi^*)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 成立.

(2) 设 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$ 且 $\lambda\neq\mu$,则

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) &= (\lambda\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\ \varphi^*(\boldsymbol{v})) \\ &= (\boldsymbol{u},\ \overline{\mu}\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

因为 $\lambda \neq \mu$ 故 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. 证毕.

引理 9.6.2 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上线性变换, 又 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的标准正交基. 设 φ 在这组基下的矩阵 A 是一个上三角阵, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是 A 为对角阵.

证明 若 A 是对角阵, 则 $A\overline{A}' = \overline{A}'A$, 故 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 即 φ 是正规算子. 反过来设 φ 是正规算子. 由于 A 是上三角阵, 可记 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0(i > j)$. 于是 $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{e}_1$. 由上面的命题可知 $\varphi^*(\boldsymbol{e}_1) = \overline{a}_{11}\boldsymbol{e}_1$. 另一方面, 有

$$\varphi^*(\boldsymbol{e}_1) = \overline{a}_{11}\boldsymbol{e}_1 + \overline{a}_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}\boldsymbol{e}_n.$$

因此 $a_{1j} = 0$ 对一切 $j > 1$ 成立. 又因为 A 是上三角阵, 所以

$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_{22}\boldsymbol{e}_2.$$

于是又有 $\varphi^*(\boldsymbol{e}_2) = \overline{a}_{22}\boldsymbol{e}_2$ 及 $a_{2j} = 0\ (j \neq 2)$. 不断这样做下去即可得 A 是对角阵. 证毕.

定理 9.6.1(Schur(舒尔)定理) 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的矩阵为上三角阵.

证明 对 V 的维数 n 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时结论显然正确. 设对 $n - 1$ 维酉空间结论成立. 由于 V 是复线性空间, 因此总存在 φ^* 的特征值与特征向量, 即有

$$\varphi^*(\boldsymbol{e}) = \lambda\boldsymbol{e}.$$

设 W 是 $\boldsymbol{e}$ 张成的一维子空间的正交补. 对任意的 $\boldsymbol{v} \in W$, 有

$$(\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{v}, \varphi^*(\boldsymbol{e})) = (\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{e}) = 0.$$

因此 W 是 φ 的不变子空间. 将 φ 限制在 W 上得到 W 上的一个线性变换. 而 $\dim W = n - 1$, 由归纳假设存在 W 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$, 使 φ 在 W 上的限制在这组基下的矩阵为上三角阵. 令 $\boldsymbol{e}_n = \dfrac{\boldsymbol{e}}{\|\boldsymbol{e}\|}$, 则 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 成为 V 的一组标准正交基, φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵. 证毕.

推论 9.6.1(Schur 定理) 任一复 n 阶矩阵均酉相似于一个上三角阵.

利用上面两个命题, 我们立即得到下列定理.

定理 9.6.2 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的正规算子, 则 V 有一组标准正交基, 在这组标准正交基下, φ 的表示矩阵是对角阵, 且这组基向量恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

定理 9.6.3 复矩阵 A 酉相似于对角阵的充分必要条件是 A 为正规矩阵.

显而易见,复正规矩阵的特征值就是复正规矩阵酉相似关系的全系不变量,即两个复正规矩阵酉相似的充分必要条件是它们具有相同的特征值.

由定理 6.2.3 我们知道,对一个可对角化线性变换,它的所有特征子空间的直和就是全空间 V. 对复正规算子我们也由类似的结论.

命题 9.6.2　设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子,其所有不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$,则 φ 是正规算子的充分必要条件是

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k, \tag{9.6.1}$$

其中 $V_i(i=1, 2, \cdots, k)$是属于特征值 λ_i 的特征子空间.

证明　设 φ 是正规算子,则它是个可对角化的线性变换,所以

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

又从命题 9.6.1 知道,若 $i \neq j$,则 $V_i \perp V_j$, 所以(9.6.1)式成立.

反之,若(9.6.1)式成立,在每个 V_i 中取一组标准正交基,所有这些基向量组成 V 的一组标准正交基. 因为每个 V_i 是 φ 的不变子空间且 φ 限制在 V_i 上是数量变换,即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}$ 对一切 $\boldsymbol{\alpha} \in V_i$ 成立,故 φ 在这组基下的矩阵是对角阵,即 φ 是正规算了. 证毕.

由于酉矩阵是正规矩阵,因此有下列结论.

定理 9.6.4　任一 n 阶酉矩阵必酉相似于下列对角阵:

$$\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

其中 c_i 为绝对值等于 1 的复数.

证明　酉矩阵相似于 $\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$. 由于与酉矩阵酉相似的矩阵仍是酉矩阵,故 $\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$是酉矩阵,因此 $|c_i| = 1$, 证毕.

习　题　9.6

1. 构造一个二阶矩阵,它可对角化但不正交相似于对角阵.

2. 设复矩阵 A 是斜 Hermite 矩阵,即 $\overline{A}' = -A$. 证明 A 必酉相似于对角阵

$$\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

其中 c_i 是纯虚数.

3. 求酉矩阵 P,使$\overline{P}'AP$ 是对角阵,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 设 A 是复正规矩阵,求证: A 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是实数.

5. 设 A 是复正规矩阵,求证:A 是酉矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是绝对值等于 1 的复数.

6. 若 A 是 n 阶正规矩阵,如果 A 又是幂零矩阵,即存在自然数 k,使 $A^k=0$,则 $A=0$.

7. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上非零正规算子且不可逆,求证:$V=\mathrm{Im}\,\varphi\perp\mathrm{Ker}\,\varphi$.

*8. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

等号成立的充分必要条件是 A 为正规矩阵.

提示:利用推论 9.6.1.

*§9.7 实正规矩阵

由上一节我们知道,实矩阵 A 称为正规矩阵若 $AA'=A'A$. 实正规矩阵的正交相似标准型比复正规矩阵的酉相似标准型要复杂一些,这是因为任一复矩阵总有特征值与非零特征向量,而实正规矩阵可能没有实特征值及实特征向量. 为了求得实正规矩阵的正交相似标准型,我们采用“几何”方法.

首先利用欧氏空间 V 上的正规算子 φ 的极小多项式的不可约分解将 V 分解成为若干个不变子空间的正交直和,这时要求 φ 限制在每个不变子空间上的极小多项式不超过二次. 这样,就把问题的研究归结为极小多项式次数不超过二次的正规算子. 因为极小多项式为一次的线性变换就是数量变换,因此接下去就对极小多项式为二次不可约多项式的正规算子进行讨论. 这样就可以得到实正规矩阵的正交相似标准型.

引理 9.7.1 设 V 是 n 维欧氏空间,$f(x)$ 是一个实多项式,若 φ 是 V 上的正规算子,则 $f(\varphi)$ 也是 V 上的正规算子.

证明 设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

则

$$f(\varphi)=a_0I+a_1\varphi+\cdots+a_m\varphi^m,$$

$$f(\varphi)^*=a_0I+a_1\varphi^*+\cdots+a_m(\varphi^*)^m=f(\varphi^*),$$

由 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$, 不难验证

$$f(\varphi)f(\varphi)^*=f(\varphi)^*f(\varphi).$$

证毕.

引理 9.7.2　设 φ 是欧氏空间 V 上的正规算子，$f(x)$，$g(x)$ 是互素的实多项式. 假定 $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f(\varphi)$，$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} g(\varphi)$，则

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0.$$

证明　因为 $f(x)$，$g(x)$ 互素，故存在多项式 $s(x)$，$t(x)$，使

$$f(x)s(x) + g(x)t(x) = 1.$$

于是

$$f(\varphi)s(\varphi) + g(\varphi)t(\varphi) = I.$$

则 $\boldsymbol{u} = g(\varphi)t(\varphi)(\boldsymbol{u})$，

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = (g(\varphi)t(\varphi)(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{v}) = (t(\varphi)(\boldsymbol{u}),\ g(\varphi)^*(\boldsymbol{v})).$$

由上面的引理 $g(\varphi)$ 是正规算子且 $g(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，用命题 9.6.1(1)完全相同的方法容易证明 $g(\varphi)^*(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，因此 $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0$. 证毕.

定理 9.7.1　设 V 是 n 维欧氏空间，φ 是 V 上的正规算子. 令 $g(x)$ 是 φ 的极小多项式，且 $g_1(x)$，…，$g_k(x)$ 为 $g(x)$ 的所有互不相同的首一不可约因子，则 $\deg g_i(x) \leqslant 2$ 且

$$g(x) = g_1(x)\cdots g_k(x). \tag{9.7.1}$$

又若 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)$，则

(1) $W_i \perp W_j\ (i \neq j)$；

(2) $V = W_1 \perp \cdots \perp W_k$；

(3) $W_i\ (i = 1,\ \cdots,\ k)$ 是 φ 的不变子空间，且若 φ_i 表示 φ 在 W_i 上的限制，则 $g_i(x)$ 是 φ_i 的极小多项式且 φ_i 是 W_i 上的正规算子.

证明　设 φ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵为正规矩阵 A. 将 A 看成复矩阵，则 A 相似于对角阵. 因此 A 的极小多项式 $g(x)$ 无重根. $g(x)$ 是实系数多项式，其不可约因子或为一次式，或为二次式，故(9.7.1)式成立.

令 $f_i(x) = g(x)/g_i(x)$，则 $f_1(x)$，…，$f_k(x)$ 互素，故存在实系数多项式 $h_i(x)\ (i = 1,\ \cdots,\ k)$，使

$$f_1(x)h_1(x) + \cdots + f_k(x)h_k(x) = 1.$$

(参见 § 5.3 习题 7). 对任意的 $\boldsymbol{v} \in V$，

$$\boldsymbol{v} = [f_1(\varphi)h_1(\varphi) + \cdots + f_k(\varphi)h_k(\varphi)](\boldsymbol{v}). \tag{9.7.2}$$

注意到 $g_i(\varphi)f_i(\varphi) = g(\varphi) = \boldsymbol{0}$，故对任一 i，$f_i(\varphi)h_i(\varphi)(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} g_i(\varphi) = W_i$.

当 $i \neq j$ 时，$g_i(x)$ 与 $g_j(x)$ 互素，由引理 9.7.2 得到 $W_i \perp W_j$. 由(9.7.2)式可知

$$V = W_1 + \cdots + W_k. \tag{9.7.3}$$

但 W_i 两两正交，故

$$V = W_1 \perp \cdots \perp W_k.$$

若 $\boldsymbol{u} \in W_i$，则

$$g_i(\varphi)\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi g_i(\varphi)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0},$$

因此 $\varphi(\boldsymbol{u}) \in W_i$，即 W_i 是 φ 的不变子空间. 又从 $g_i(\varphi)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 对一切 $\boldsymbol{u} \in W_i$ 成立且 $g_i(x)$ 不可约知道，φ_i 的极小多项式为 $g_i(x)$.

最后因为 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$，所以对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in W_i$，

$$g_i(\varphi)\varphi^*(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi^* g_i(\varphi)(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}.$$

这说明 W_i 也是 φ^* 的不变子空间. 于是 φ 在 W_i 上的限制 φ_i 是 W_i 上的正规算子. 证毕.

接下去我们要讨论极小多项式是二次不可约多项式的实正规算子的表示矩阵，先对比较简单的情形即极小多项式为 x^2+1 的正规算子进行讨论，再过渡到一般情形.

引理 9.7.3 设 V 是 n 维欧氏空间，φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x) = x^2 + 1$. 设 $\boldsymbol{v} \in V$，$\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{v})$，则

$$\varphi^*(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u},\ \varphi^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v},$$

且 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$，$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

证明 由 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi^2(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$，得

$$\begin{aligned} 0 &= \|\varphi(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\|^2 + \|\varphi(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}\|^2 \\ &= \|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2 - 2(\varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{u}\|^2 \\ &\quad + \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 + 2(\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2. \end{aligned}$$

因为 φ 是正规算子，和命题 9.6.1(1)同样的证明可知

$$\|\varphi(\boldsymbol{v})\|^2 = \|\varphi^*(\boldsymbol{v})\|^2,\ \|\varphi(\boldsymbol{u})\|^2 = \|\varphi^*(\boldsymbol{u})\|^2.$$

故

$$0 = \|\varphi^*(\boldsymbol{v})\|^2 + 2(\varphi^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\varphi^*(\boldsymbol{u})\|^2$$

$$-2(\varphi^*(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{v})+\|\boldsymbol{v}\|^2$$

$$=\|\varphi^*(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\|^2+\|\varphi^*(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\|^2.$$

于是 $\varphi^*(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u}$, $\varphi^*(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}$. 又

$$(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})=(\varphi^*(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\ \varphi(\boldsymbol{u}))=(\boldsymbol{u},\ -\boldsymbol{v})=-(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}),$$

因此 $(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})=0$, $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u}$. 最后

$$\|\boldsymbol{v}\|^2=(\varphi^*(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\ \varphi(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|^2.$$

证毕.

引理 9.7.4 设 V 是 n 维欧氏空间,φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x)=(x-a)^2+b^2$,其中 a, b 都是实数且 $b\neq 0$. 设 $\boldsymbol{u}=b^{-1}(\varphi-aI)(\boldsymbol{v})$,则 $\|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$, 且

$$\varphi(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u},\ \varphi(\boldsymbol{u})=-b\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u};$$

$$\varphi^*(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u},\ \varphi^*(\boldsymbol{u})=b\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}.$$

证明 令 $\psi=b^{-1}(\varphi-aI)$, 则 ψ 适合多项式 x^2+1,且 $\boldsymbol{u}=\psi(\boldsymbol{v})$. 又 $\psi^*=b^{-1}(\varphi^*-aI)$, ψ 是 V 上的正规算子. 由引理 9.7.3 即可得到所需结论. 证毕.

定理 9.7.2 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子,φ 的极小多项式为 $g(x)=(x-a)^2+b^2$,其中 a, b 是实数且 $b\neq 0$, 则存在 s,使 $g^s(x)$ 是 φ 的特征多项式且存在 V 的 s 个二维子空间 V_1, $\cdots$, V_s,使

$$V=V_1\perp\cdots\perp V_s.$$

每个 V_i 有标准正交基$\{\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{v}_i\}$,且

$$\varphi(\boldsymbol{u}_i)=a\boldsymbol{u}_i-b\boldsymbol{v}_i,\ \varphi(\boldsymbol{v}_i)=b\boldsymbol{u}_i+a\boldsymbol{v}_i.$$

证明 任取 V 中长度等于 1 的向量 $\boldsymbol{v}_1$,令 $\boldsymbol{u}_1=b^{-1}(\varphi-aI)(\boldsymbol{v}_1)$, 则 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_1$ 是两个长度等于 1 的正交向量. 令 V_1 是由 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_1$ 张成的子空间,则

$$\varphi(\boldsymbol{u}_1)=a\boldsymbol{u}_1-b\boldsymbol{v}_1,$$

$$\varphi(\boldsymbol{v}_1)=b\boldsymbol{u}_1+a\boldsymbol{v}_1,$$

$$\varphi^*(\boldsymbol{u}_1)=a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{v}_1,$$

$$\varphi^*(\boldsymbol{v}_1)=-b\boldsymbol{u}_1+a\boldsymbol{v}_1.$$

因此 V_1 是 φ 和 φ^* 的不变子空间. 令 $W=V_1^\perp$, 用上面的几个式子不难验证 W

是 φ 和 φ^* 的不变子空间. 在 W 中再取长度等于 1 的向量 $\boldsymbol{v}_2$, 令 $\boldsymbol{u}_2 = b^{-1}(\varphi - aI)(\boldsymbol{v}_2)$. 又可得 V_2, $V_2 \perp V_1$. 作 $(V_1 \oplus V_2)^{\perp}$, 再在 $(V_1 \oplus V_2)^{\perp}$ 中取 $\boldsymbol{v}_3$. 如此不断作下去即可得 $s = n/2$ 个子空间 $V_1, \cdots, V_s$, 且

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_s.$$

φ 在标准正交基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_s$ 下的矩阵为分块对角阵:

$$A = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\},$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

显然 A 的特征多项式为 $g(x)^s$. 证毕.

将上面的讨论综合起来,就可得到这一节的主要结论.

定理 9.7.3 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子, 则存在一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的矩阵为下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r, c_{2r+1}, \cdots, c_n\}, \tag{9.7.4}$$

其中 $c_j (j = 2r+1, \cdots, n)$ 是实数, A_i 为形如

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

的二阶实矩阵.

证明 由定理 9.7.1 可知

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k,$$

其中 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)$, $g_i(x)$ 是次数不超过 2 的多项式. 若 $\boldsymbol{w} \in W_i$, 则

$$g_i(\varphi)(\varphi(\boldsymbol{w})) = \varphi g_i(\varphi)(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0},$$

$$g_i(\varphi)(\varphi^*(\boldsymbol{w})) = \varphi^* g_i(\varphi)(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0},$$

即 $\varphi(W_i) \subseteq W_i$, $\varphi^*(W_i) \subseteq W_i$. 于是, φ 在 W_i 上的限制 φ_i 是 W_i 上的正规算子. 再由定理 9.7.2 知道对每个 W_i, 若 $g_i(x)$ 是二次多项式, 则 W_i 可分解为若干个二维子空间的正交直和. 若 $g_i(x) = x - c_i$, 则 $\varphi_i - c_i I = 0$, 即 $\varphi_i = c_i I$. 由此即可得到所需结论. 证毕.

注 (9.7.4)式就是实正规矩阵的正交相似标准型. 在不计对角线上块的次

序的意义下,实正规矩阵的正交相似标准型是唯一确定的.因此,实正规矩阵的特征值是它正交相似的全系不变量.

利用实正规矩阵的正交相似标准型,我们立即可得到正交矩阵的正交相似标准型.

定理 9.7.4　设 A 是 n 阶正交矩阵,则 A 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r; 1, \cdots, 1; -1, \cdots, -1\},$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \ i = 1, \cdots, r.$$

证明　由于正交矩阵是正规矩阵,由定理知道 A 必正交相似于

$$\operatorname{diag}\{A_1, \cdots, A_r; c_{2r+1}, \cdots, c_n\}.$$

又由正交矩阵的性质可知 $|c_i| = 1$, $(i = 2r+1, \cdots, n)$. 另一方面,设

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix},$$

则 $a_i^2 + b_i^2 = 1$,故可设 $a_i = \cos\theta_i$, $b_i = \sin\theta_i$. 证毕.

设 A 是 n 阶实方阵,若 A 适合下列条件:

$$A' = -A,$$

则称 A 是斜对称矩阵或反对称矩阵,由于 $AA' = -A^2 = A'A$,因此斜对称矩阵是正规矩阵.若 P 是正交矩阵,则

$$(P'AP)' = P'A'P = -P'AP.$$

因此,斜对称性在正交相似下保持不变.下面是实斜对称矩阵的正交相似标准型定理.

定理 9.7.5　设 A 是实斜对称矩阵,则 A 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{B_1, \cdots, B_r; 0, \cdots, 0\},$$

其中

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1, \cdots, r.$$

证明　设 A 正交相似于

$$\mathrm{diag}\{B_1, \cdots, B_r; c_{2r+1}, \cdots, c_n\}.$$

由 $B' = -B$ 即得 $c_i = 0\ (i = 2r+1, \cdots, n)$. 再由 $B_i' = -B_i$ 知道,B_i 必具有定理所需之形状. 证毕.

推论 9.7.1 实斜对称矩阵的秩必是偶数且其实特征值必为 0,虚特征值为纯虚数.

习 题 9.7

1. 设 φ 是 n 维欧氏空间上的正规算子且其极小多项式为 $g(x) = (x-a)^2 + b^2$, $b \neq 0$, 则 φ 是 V 上的自同构且

$$\varphi^* = (a^2 + b^2)\varphi^{-1}.$$

2. 设 φ 是 n 维欧氏空间上的正规算子,ψ 是 V 上某一线性算子,若 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 则 $\varphi^*\psi = \psi\varphi^*$.

3. 设 A, B 是两个实正规矩阵且 $AB = BA$, 求证: 存在正交矩阵 P,使 $P'AP$ 与 $P'BP$ 同时为标准型.

4. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换,若 $\det\varphi = 1$, 则称 φ 是一个旋转. 求证: 奇数维空间的旋转必有保持不动的非零向量,即存在 $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

5. 证明: n 阶实方阵必正交相似于下列分块上三角阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & A_r & & & \\ & & & c_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_k \end{pmatrix},$$

其中 $c_i\ (i = 1, \cdots, k)$ 是实数, $A_i\ (i = 1, \cdots, r)$ 是二阶实矩阵,其特征值为 $a_i \pm b_i\sqrt{-1}$.

6. 设 A, B 是方阵且分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

是实正规矩阵,求证: $C = 0$ 且 A, B 也是正规矩阵.

7. 利用第 5 题和第 6 题证明实正规矩阵的正交相似标准型定理.

*§9.8 谱

设 V 是 n 维酉空间,φ 是 V 上的正规算子,φ 全体不同的特征值设为 λ_1,

$\lambda_2, \cdots, \lambda_k$. 由命题 9.6.2 我们知道,存在 V 的一组标准正交基,φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵

$$A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_1; \lambda_2, \cdots, \lambda_2; \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_k\}.$$

假定特征值 λ_i 的重数等于 r_i,则在分解式

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k$$

中,W_i 是 φ 的特征子空间且维数等于 r_i. 若记 D_i 为如下对角阵

$$D_i = \mathrm{diag}\{0, \cdots, 0; 1, \cdots, 1; 0, \cdots, 0\},$$

即主对角元有 r_i 个 1,其余都是 0 的对角阵,则

$$A = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \cdots + \lambda_k D_k.$$

诸 D_i 适合条件 $D_i^2 = D_i$, $D_iD_j = 0(i \neq j)$, $D_1 + D_2 + \cdots + D_k = I_n$.

对实对称矩阵也有类似的结论. 如果把上面的结论"翻译"成几何语言就是下面的谱分解定理. 我们将给出一个用"几何"方法的证明.

定理 9.8.1 设 V 是有限维内积空间,φ 是 V 上的线性算子,当 V 是酉空间时 φ 为正规算子;当 V 是欧氏空间时,φ 为自伴随算子. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 φ 全体不同的特征值,W_i 为 φ 属于 λ_i 的特征子空间,则 V 是 $W_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的正交直和. 这时若设 E_i 是 V 到 W_i 上的正投影,则 φ 有下列分解式:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k. \tag{9.8.1}$$

证明 由命题 9.6.2 知道

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k.$$

又因为 E_i 是 $V \to W_i$ 的正投影,故

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_k,$$

注意 $\varphi E_i = \lambda_i E_i$, 于是

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi E_1 + \varphi E_2 + \cdots + \varphi E_k \\ &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.\end{aligned}$$

证毕.

推论 9.8.1 若 $f_j(x) = \prod\limits_{i \neq j} \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_i}(x - \lambda_i)$,则 $E_j = f_j(\varphi)$.

证明 当 $i \neq j$ 时 $E_iE_j = 0$, 故

$$\varphi^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \cdots + \lambda_k^2 E_k.$$

同理不难证明

$$\varphi^n = \lambda_1^n E_1 + \lambda_2^n E_2 + \cdots + \lambda_k^n E_k$$

对一切 n 成立. 若设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

则

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= a_0 I + a_1 \varphi + \cdots + a_n \varphi^n \\ &= a_0 \Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i^0 E_i \Big) + a_1 \Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i \Big) + \cdots + a_n \Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i^n E_i \Big) \\ &= \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) E_i. \end{aligned}$$

由 $f_j(\lambda_j) = 1$, $f_j(\lambda_i) = 0 (j \neq i)$ 即得 $f_j(\varphi) = E_j$, 证毕.

谱分解定理有许多重要的应用,我们下面择要介绍其应用. 虽然下面一个定理用标准型很容易证明,但是用谱分解来证明亦不失为一个好方法.

若内积空间 V 上的自伴随算子 φ 适合条件: 对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}$,总有 $(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$,则称之为半正定自伴随算子. 显然,半正定自伴随算子在标准正交基下的表示矩阵是半正定 Hermite 矩阵(酉空间时)或半正定实对称矩阵(欧氏空间时). 如果对任意的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 $(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) > 0$,则称 φ 是正定自伴随算子. 这时 φ 在标准正交基下的表示矩阵是正定 Hermite 矩阵或正定实对称矩阵.

定理 9.8.2 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上正规算子. 若 φ 的特征值全是实数,则 φ 是自伴随算子;若 φ 的特征值全是非负实数,则 φ 是半正定自伴随算子;若 φ 的特征值全是正实数,则 φ 是正定自伴随算子;若 φ 的特征值的绝对值等于 1,则 φ 是酉算子.

证明 设 φ 的谱分解为

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

注意到 E_i 是自伴随算子(参见例 9.5.1),故

$$\varphi^* = \overline{\lambda}_1 E_1 + \overline{\lambda}_2 E_2 + \cdots + \overline{\lambda}_k E_k.$$

若 φ 的特征值全是实数,则 $\varphi^* = \varphi$, φ 是自伴随算子. 若 λ_i 全是非负实数,取 W_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的标准正交基并把它们拼成 V 的标准正交基,则 φ 在这组

标准正交基下的矩阵为对角阵且主对角线上的元素全为非负实数,故 φ 是半正定自伴随算子. 同理,若特征值全是正实数,则 φ 是正定自伴随算子. 最后若 $|\lambda_i|=1$, 则

$$\begin{aligned}\varphi\varphi^* &= \lambda_1\bar{\lambda}_1E_1+\lambda_2\bar{\lambda}_2E_2+\cdots+\lambda_k\bar{\lambda}_kE_k\\ &=|\lambda_1|^2E_1+|\lambda_2|^2E_2+\cdots+|\lambda_k|^2E_k\\ &=E_1+E_2+\cdots+E_k\\ &=I.\end{aligned}$$

即 φ 是酉算子,证毕.

下面的定理也可以用代数方法证明,但是比较困难,而用谱分解定理证明则比较容易.

定理 9.8.3 设 V 是有限维内积空间,φ 是 V 上的半正定自伴随算子,则存在 V 上唯一的半正定自伴随算子 ψ,使 $\psi^2=\varphi$.

证明 设 φ 的谱分解式为

$$\varphi=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\cdots+\lambda_kE_k.$$

令 $d_i=\sqrt{\lambda_i}\,(i=1,2,\cdots,k)$,则

$$\psi=d_1E_1+d_2E_2+\cdots+d_kE_k$$

适合 $\psi^2=\varphi$ 且 ψ 也是半正定自伴随算子.

现设 θ 是 V 上半正定自伴随算子且 $\theta^2=\varphi$, 我们要证明 $\theta=\psi$. 令

$$\theta=b_1F_1+b_2F_2+\cdots+b_rF_r$$

是 θ 的谱分解,其中 F_i 是投影算子且 b_i 为非负实数. 由 $\theta^2=\varphi$ 得

$$\varphi=b_1^2F_1+b_2^2F_2+\cdots+b_r^2F_r.$$

故 b_i^2 是 φ 的特征值而 b_i 互不相同,因此 $r=k$, $b_i=d_i$ (这里允许差一个次序). 注意到 $E_i(V)$ 及 $F_i(V)$ 都是 φ 的关于特征值 λ_i 的特征子空间,因此 $F_i=E_i$, 这就证明了 $\theta=\psi$. 证毕.

推论 9.8.2 设 A 是半正定实对称(Hermite)矩阵,则必存在唯一的半正定实对称(Hermite)矩阵 B,使 $A=B^2$.

定理 9.8.4 设 V 是 n 维内积空间,φ 是 V 上的任一线性算子,则存在 V 上的酉算子 ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ,使 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的且若 φ 是非异线性算子,则 ω 也唯一.

证明 若已有 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ω 为酉算子, ψ 为半正定自伴随算子, 则

$$\varphi^*=\psi^*\omega^*=\psi\omega^*,$$

$$\varphi^*\varphi=\psi\omega^*\omega\psi=\psi^2.$$

由上定理知, ψ 被 φ 唯一确定.

现来证明存在性. 令 ψ 是上面定理中的 ψ 且使 $\psi^2=\varphi^*\varphi$. 若 φ 是非异线性变换, 则 ψ 也是非异的. 事实上, 这时

$$\begin{aligned}(\psi(\boldsymbol{v}),\ \psi(\boldsymbol{v}))&=(\psi^2(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v})=(\varphi^*\varphi(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v})\\&=(\varphi(\boldsymbol{v}),\ \varphi(\boldsymbol{v}))\end{aligned}\tag{9.8.2}$$

对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立. 显然从 φ 非异即可推出 ψ 也非异. 这时可令 $\omega=\varphi\psi^{-1}$, 只需证明 ω 是酉算子即可. 注意到

$$\omega^*=(\varphi\psi^{-1})^*=(\psi^{-1})^*\varphi^*=(\psi^*)^{-1}\varphi^*=\psi^{-1}\varphi^*,$$

$$\begin{aligned}\omega\omega^*&=\varphi\psi^{-1}\psi^{-1}\varphi^*=\varphi(\psi^{-1})^2\varphi^*\\&=\varphi(\psi^2)^{-1}\varphi^*=\varphi(\varphi^*\varphi)^{-1}\varphi^*\\&=\varphi\varphi^{-1}(\varphi^*)^{-1}\varphi^*=I.\end{aligned}$$

因此 ω 是酉算子.

若 φ 不是非异线性变换, 现来定义 ω. 设 $W=\operatorname{Im}\psi$, $W^{\perp}$ 是其正交补. 定义 $W=\operatorname{Im}\psi\to\operatorname{Im}\varphi$ 的映射 η 如下: 若 $\psi(\boldsymbol{u})\in W$, 则

$$\eta(\psi(\boldsymbol{u}))=\varphi(\boldsymbol{u}).$$

这时我们必须验证 η 定义的合理性. 即若 $\psi(\boldsymbol{u})=\psi(\boldsymbol{v})$, 必须 $\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{v})$. 由(9.8.2)式可知对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\|\psi(\boldsymbol{\alpha})\|^2=\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\|^2$, 因此 $\psi(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\varphi(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$. 这表明 η 是一个合理定义的映射. 又 η 显然是线性的.

再定义 $W^{\perp}\to(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$ 的映射 ξ: 由(9.8.2)式可知 φ 与 ψ 的核空间相同, 故像空间的维数相等. 于是 $W^{\perp}$ 与 $\varphi(V)^{\perp}$ 的维数相同, 故必存在保持内积的同构, 这个同构记为 ξ. 由于 $V=W\oplus W^{\perp}$, 因此 V 中任一元素 $\boldsymbol{v}$ 均可唯一地表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}',$$

其中 $\boldsymbol{w}\in W$, $\boldsymbol{w}'\in W^{\perp}$. 令

$$\omega(\boldsymbol{v})=\eta(\boldsymbol{w})+\xi(\boldsymbol{w}'),$$

不难看出 ω 是 V 上的线性变换且若设 $\boldsymbol{w}=\psi(\boldsymbol{u})$, 则

$$\begin{aligned}(\omega(v),\ \omega(v)) &= (\eta(w)+\xi(w'),\ \eta(w)+\xi(w'))\\ &= (\varphi(u)+\xi(w'),\ \varphi(u)+\xi(w'))\\ &= (\varphi(u),\ \varphi(u))+(\xi(w'),\ \xi(w'))\\ &= (\psi(u),\ \psi(u))+(w',\ w')\\ &= (w,\ w)+(w',w')\\ &= (v,\ v).\end{aligned}$$

因此 ω 是酉算子. 显然这时 $\varphi=\omega\psi$. 证毕.

我们称 $\varphi=\omega\psi$ 是一个极分解. φ 也可作这样的分解: $\varphi=\psi_1\omega_1$, 这里 ω_1 为酉算子, ψ_1 为半正定算子. 这个式子也称为极分解. 证明只需先对 φ^* 作如上述定理之极分解, 再求 φ^* 的伴随即 φ 就可以了.

推论 9.8.3 设 A 是 n 阶实矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 O 以及 n 阶半正定阵 S, 使 $A=OS$. 又设 B 是 n 阶复方阵, 则存在 n 阶酉阵 U 及 n 阶半正定 Hermite 矩阵 H, 使 $B=UH$. 上述分解式当 A, B 为非异阵时被唯一确定.

矩阵极分解式的另一形式读者不难自己写出.

习 题 9.8

1. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是 $\|\varphi(v)\|=\|\varphi^*(v)\|$ 对一切 $v\in V$ 成立.

2. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是 $\varphi=\varphi_1+\mathrm{i}\varphi_2$, 其中 φ_1, φ_2 为自伴随算子且 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$.

3. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是存在某个复多项式 $f(x)$, 使 $\varphi^*=f(\varphi)$.

4. 设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, 证明: φ 正规的充分必要条件是 $\varphi=\psi\omega$, 其中 ψ 是半正定自伴随算子, ω 为酉算子且 ω 与 ψ 可交换.

5. 证明: 谱分解定理之逆也成立, 即如果 φ 是酉空间上的线性算子且存在一组线性算子 $\{E_i(i=1,2,\cdots,k)\}$, 适合 $E_1+E_2+\cdots+E_k=I$, $E_iE_j=0(i\neq j)$, $E_i^2=E_i=E_i^*$, 若 $\varphi=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\cdots+\lambda_kE_k$, 则 φ 是正规算子.

* §9.9 最小二乘解

我们先来讨论一个几何问题. 设在三维欧氏空间 V 中有一个平面 W, 平面外有一点, 现在要求这一点到该平面的最短距离. 为方便起见, 不妨设这平面由

V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 中的两个向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 张成(图 9.1).

C 为向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点,则 $\boldsymbol{v}$ 到平面 W 的距离 d 等于 C 到垂足点 P 的距离,即

$$d = \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|.$$

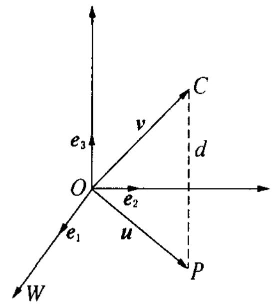

图 9.1

因此只需求出 $\boldsymbol{u}$,就可以求出 d 来. 但 $\boldsymbol{u} \in W$, 可设

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2,$$

由 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2)$, 得

$$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i) = 0, \ i = 1, 2.$$

因此

$$\lambda_1 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1),$$

$$\lambda_2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2),$$

即

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

另一方面,

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3,$$

即有

$$d = |(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3)|. \tag{9.9.1}$$

我们称向量 $\boldsymbol{u}$ 为向量 $\boldsymbol{v}$ 在子空间 W 上的正投影向量.

现在我们把问题提得更一般些. 设 V 是一个内积空间,W 是 V 的子空间 $(W \neq V)$. $\boldsymbol{v}$ 是 V 中的一个向量,现要在 W 中找一个向量 $\boldsymbol{u}$,使 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 最小. 如果这样的 $\boldsymbol{u}$ 存在,则称 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 W 中的正投影向量. 长度 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 被称为 $\boldsymbol{v}$ 到 W 的距离.

定理 9.9.1 设 W 是有限维内积空间 V 的子空间, $\boldsymbol{v} \in V$, 则

(1) 在 W 中存在且只存在一个向量 $\boldsymbol{u}$,使 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 最小且这时 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \perp W$;

(2) 若 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 是 W 的标准正交基,又 $\{\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 $W^{\perp}$ 的标准正交基,这样 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 就成为 V 的一组标准正交基,则

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_m,$$

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_{m+1})\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n,$$

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\| = [|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_{m+1})|^2 + \cdots + |(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_n)|^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{9.9.2}$$

证明　设 $\boldsymbol{w}$ 是 W 中任一向量,要证明 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$. 注意到这时 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \perp W$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w} \in W$. 因此,由勾股定理有

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|^2.$$

若 $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{v}$, 则

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2>\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|^2.$$

这样我们不仅证明了 $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$ 的最小性,也证明了 $\boldsymbol{u}$ 的唯一性. 证毕.

现在我们举例来说明定理 9.9.1 在求最小二乘解方面的应用. 在许多实际问题中我们经常会碰到解所谓的“矛盾线性方程组”的问题. 为说得更清楚一些,举一个简单的例子.

在经济学中,个人的收入与消费之间存在着密切的关系. 收入越多,消费水平也越高. 收入较少,消费水平也较低. 从一个社会整体来看,个人的平均收入与平均消费之间大致呈线性关系. 若 u 表示收入,v 表示支出,则 u, v 适合

$$u=a+bv, \tag{9.9.3}$$

其中 a, b 是两个常数,需要根据具体的统计数据来确定. 假定现在有一组统计数字表示 3 年中每年的收入与消费情况(表 9.1). 现要根据这一组统计数字求出 a, b.

表 9.1　　(单位: 万元)

年	1	2	3
u	1.6	1.7	2.0
v	1.2	1.4	1.8

将 u, v 的值代入(9.9.3)式得到一个两个未知数 3 个方程式的线性方程组:

$$\begin{cases} a+1.2b=1.6, \\ a+1.4b=1.7, \\ a+1.8b=2.0. \end{cases}$$

从第一、第二个方程式可求出 $a=1$, $b=0.5$, 代入第三个方程式:

$$1+1.8\times 0.5=1.9 \neq 2.0,$$

这说明上面的线性方程组无解. 那么这样一来是不是说我们的问题就没有意义

了呢？当然不是！事实上，收入与消费的关系通常极为复杂，我们把它当成线性关系只是一种近似的假定. 另外，统计数字本身不可避免地会产生误差，也就是说统计表只是实际情况的近似反映. 我们的目的是求出 a, b 的值以供理论分析之用. 既然统计数字有误差，就不可能也没有必要求出 a, b 的精确解. 此矛盾的出现并不意味着我们因此而束手无策了. 我们可以对 a, b 提出这样的要求：求出 a 与 b，使得到的关系式 $u = a + bv$ 能尽可能好地符合实际情形. 用数学语言来说就是求 a, b，使平方偏差：

$$[(a+1.2b)-1.6]^2+[(a+1.4b)-1.7]^2+[(a+1.8b)-2.0]^2$$

取最小值. 这就是所谓的最小二乘问题. 一般来说，为了使理论关系式更符合实际，通常要求统计数字多一点，即方程式的个数多一点.

如何求"最小二乘解"？让我们来作一些理论上的分析. 假定有下列矛盾线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

其中 $m > n$，它的系数矩阵记为 A. 为方便，将上述线性方程组写为矩阵形式：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}, \tag{9.9.4}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

现要求出 $\boldsymbol{x}$，使

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\Big)^2$$

取最小值. 记

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

考虑向量

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\beta},$$

这是一个 m 维列向量,第 i 个坐标为 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i$. 因此,若记 $V=\mathbf{R}_m$,内积取标准内积,则

$$\|(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n)-\boldsymbol{\beta}\|^2=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\Big)^2.$$

而

$$\|(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n)-\boldsymbol{\beta}\|=\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{x}\|.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 变动时,$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 张成的 V 的子空间,记之为 W. 要使 $\|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{x}\|$ 取最小值,实际上就是要求 $\boldsymbol{\beta}$ 到 W 的距离. 由定理 9.9.1 知道,只需取 $\boldsymbol{\beta}$ 在 W 上的正投影向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 就可以了. 于是求方程组(9.9.4)的最小二乘解又归结为求下列线性方程组的解:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}. \tag{9.9.5}$$

由定理 9.9.1 知道这样的解总是存在的. 我们可以按照定理 9.9.1 中的办法先求 W 的标准正交基,再扩展为 V 的标准正交基,从而求出 $\boldsymbol{\gamma}$,最后解线性方程组(9.9.5)便可求出 $\boldsymbol{x}$. 但是这样做比较麻烦,我们希望能有一个比较简便的方法求出 $\boldsymbol{x}$ 来.

首先我们注意到在实际问题中,矩阵 A 的秩通常都等于 n. 因此,可设 A 是列满秩阵,即 $r(A)=n$. 这也就是说,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,W 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 张成的 n 维子空间. 设

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \tag{9.9.6}$$

由定理 9.9.1 知道 $(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})\perp W$,因此$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})\perp\boldsymbol{\alpha}_i(i=1, \cdots, n)$,即$((\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\alpha}_i)=0$,或者$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}_i)=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i)$. 这样便有下列线性方程组:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1)x_n=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1),\\(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2)x_n=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n)x_n=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_n).\end{cases}$$

若记 A'为 A 的转置,则上面的方程组可写为矩阵形式:

$$A'A\boldsymbol{x}=A'\boldsymbol{\beta}.$$

由于 A 的秩为 n，因此 A'的秩也是 n,故 $A'A$ 为非异 n 阶方阵. 于是

$$\boldsymbol{x}=(A'A)^{-1}A'\boldsymbol{\beta}.$$

这就是线性方程组(9.9.4)的最小二乘解.

下面我们来求前面例子中提出的线性方程组的最小二乘解：

$$\begin{cases}a+1.2b=1.6,\\a+1.4b=1.7,\\a+1.8b=2.0.\end{cases}$$

这时

$$A=\begin{pmatrix}1&1.2\\1&1.4\\1&1.8\end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1.2&1.4&1.8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1.6\\1.7\\2.0\end{pmatrix}.$$

不难看出 A 的秩等于 2,并通过计算得：

$$A'A=\begin{pmatrix}3&4.4\\4.4&6.64\end{pmatrix},$$

$$(A'A)^{-1}=\frac{1}{0.56}\begin{pmatrix}6.64&-4.4\\-4.4&3\end{pmatrix},$$

$$A'\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}5.3\\7.9\end{pmatrix},$$

$$(A'A)^{-1}A'\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{0.56}\begin{pmatrix}0.432\\0.38\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0.77\\0.68\end{pmatrix}.$$

由此得最小二乘解(近似值)：

$$\begin{cases}a=0.77,\\b=0.68.\end{cases}$$

因此,收入与消费的关系式为

$$u=0.77+0.68v.$$

复 习 题 九

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是欧氏空间 V 上线性无关的向量,则它们的 Gram 矩阵必是正定阵.

2. 求证:正定实对称矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 为单位阵.

3. 设 P 是 n 阶正交矩阵且其特征值不等于 -1,则 I_n+P 是可逆阵且 $(I_n-P)(I_n+P)^{-1}$ 是反对称矩阵.

4. 设 φ 是 n 维内积空间 V 上的变换且满足条件:

$$(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),$$

求证 φ 是线性映射,从而必是正交变换或酉变换.

5. 证明:对不可逆实矩阵 A 也有 QR 分解,即存在正交矩阵 Q 和上三角阵 R,使得 $A=QR$(对复矩阵也有类似结果).

6. 设 V, U 都是 n 维欧氏空间,$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ 分别是 V 和 U 的基(不一定是标准正交基). φ 是 V 到 U 上的线性变换且 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{f}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 求证: φ 是保积同构的充分必要条件是这两组基的 Gram 矩阵相等,即

$$G(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)=G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{f}_n).$$

7. 求证: n 维酉空间上秩等于 1 的线性变换 φ 是半正定自伴随算子的充分必要条件是它在任一组标准正交基下的表示矩阵具有形式:$\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维行向量.

8. 设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是实数,求证: A 正交相似于上三角阵.

9. 设 A 是 n 阶半正定阵,求证:对任意的自然数 $k>1$,必存在同阶半正定阵 B,使 $A=B^k$.

10. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,其特征值为

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n,$$

则对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,均有

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}.$$

11. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵,其特征值分别为

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n;$$

$$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n.$$

求证: $A+B$ 的特征值全落在 $[\lambda_1+\mu_1,\ \lambda_n+\mu_n]$ 中.

12. 设 A 是 n 阶实正定阵,则 $A+A^{-1}-2I_n$ 是半正定阵.

13. 设 A 是 n 阶实正定阵,B 是同阶实对称矩阵. 求证:存在可逆阵 C,使

$$C'AC=I_n,\ C'BC=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\},$$

其中 $\{\lambda_i\}$ 是矩阵 $A^{-1}B$ 的特征值.

14. 设 A 是 n 阶实正定阵,B 是同阶非零半正定阵. 求证:

$$|A+B|>|A|+|B|.$$

15. 设 A 是 n 阶实正定阵,则存在非异实上三角阵 T,使 $A=T'T$.

16. 设 V 是 n 维内积空间,φ,ψ 是 V 上的自伴随算子且 φ 正定,即对任意的 V 中非零向

量 $\boldsymbol{x}$, $(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) > 0$. 求证: $\varphi\psi$ 的特征值全是实数.

17. 设 $\lambda = a + bi$ 是 n 阶实矩阵 A 的复特征值且 $b \neq 0$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}i$ 是属于 λ 的特征向量, 其中 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是实向量. 求证: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 必线性无关, 若 A 是正规矩阵, 则它们互相正交.

18. 求证: 线性变换 φ 是 n 维欧氏空间上的斜对称算子(即 $\varphi^* = -\varphi$) 的充分必要条件是对任意的向量 $\boldsymbol{x}$, 或者 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 或者 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{x}$ 正交.

19. 设 A 是 n 阶非异实矩阵, 则必存在正交矩阵 P, Q, 使 $PAQ = \mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, 其中 $c_i > 0$, 且每个 c_i^2 是 $A'A$ 的特征值.

20. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的可逆线性变换, 若 φ 保持向量的正交性不变, 则 φ 是正规算子且存在正实数 k, 使得 $\varphi^*\varphi = kI$, 其中 I 是 V 上的恒等变换.

21. 设 A, B 是 $m \times n$ 实矩阵, 求证: $A'A = B'B$ 的充分必要条件是存在正交矩阵 Q, 使 $A = QB$.

22. 证明: 正交矩阵任一主子阵(即主子式所在的矩阵)的特征值之绝对值不超过 1.

*23. 设 A 是 n 阶实正规矩阵, A' 是其转置. 求证: 必存在实多项式 $g(x)$, 使得 $A' = g(A)$.

*24. 设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的正规算子. 求证: 对 φ 的任一不变子空间 U, $U^\perp$ 也是 φ^* 的不变子空间, 因此 φ 在 U 上的限制仍然是一个正规算子.

25. 证明: 任意一个正交矩阵可以表示为不超过两个实对称矩阵之积; 任意一个实矩阵可以表示为不超过 3 个实对称矩阵之积.

*第十章 双线性型

§10.1 对偶空间

设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,称 $V \to \mathbf{K}$ 的线性映射($\mathbf{K}$ 作为一维空间)为 V 上的线性函数. 令 V^* 为 V 上的线性函数全体组成的集合. 我们可以在 V^* 上定义加法与数乘,使 V^* 成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间(参见第四章). V^* 称为 V 的共轭空间,当 V 是有限维空间时,常称 V^* 是 V 的对偶空间.

现设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基,则 $V \to \mathbf{K}$ 的任一线性函数 $\boldsymbol{f}$ 被它在 V 基上的值唯一确定. 现定义 $\boldsymbol{f}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 如下:

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}.$$

这里 δ_{ij} 称为 Kronecker(克罗内克)符号,即当 $i = j$ 时,$\delta_{ii} = 1$;$i \neq j$ 时,$\delta_{ij} = 0$. 我们得到了 n 个 V 上的线性函数 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$,现要证明这 n 个线性函数组成了 V^* 的一组基. 注意若

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n,$$

则

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) = a_i.$$

设 $\boldsymbol{f}$ 是 V^* 中的任一元素,且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_j) = b_j (j = 1, 2, \cdots, n)$,令

$$\boldsymbol{g} = b_1\boldsymbol{f}_1 + b_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{f}_n,$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) &= (b_1\boldsymbol{f}_1 + b_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{f}_n)(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{x}$ 是 V 中的任一向量,因此

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}=b_1\boldsymbol{f}_1+b_2\boldsymbol{f}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{f}_n.$$

这说明 V^* 中任一元素均可表示为 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的线性组合. 另一方面,若存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,使

$$c_1\boldsymbol{f}_1+c_2\boldsymbol{f}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{f}_n=\boldsymbol{0},$$

则将上式依次作用于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 上即得

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0.$$

因此$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$是 V^* 中线性无关的向量组,组成 V^* 的一组基. 我们称之为$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$的对偶基. 从这里我们顺便得到结论:

$$\dim V^*=\dim V=n. \tag{10.1.1}$$

需要注意的是当 V 是无限维空间时,(10.1.1)式不再成立.

现在引进一个记号$\langle\,,\rangle$:

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{f}\in V^*$. 容易证明$\langle\,,\rangle$有下列性质.

记号$\langle\,,\rangle$的性质

(1) *若 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle=0$ 对一切 $\boldsymbol{x}\in V$ 成立,则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$;*

(2) *$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle=0$ 对一切 $\boldsymbol{f}\in V^*$ 成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.*

证明　(1)是显然的. 现来证明(2). 若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 把 $\boldsymbol{x}$ 作为 V 的一个基向量并扩充它为 V 的一组基: $\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 令 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)=1$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)=0(i>1)$, 则 $\boldsymbol{f}$ 可定义成为 V 上的线性函数,这时$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle\neq 0$. 证毕.

固定 $\boldsymbol{f}$,则$\langle \boldsymbol{f}, -\rangle$便是 V 上的线性函数且$\langle \boldsymbol{f}, -\rangle=\boldsymbol{f}$. 同样地,固定 $\boldsymbol{x}$, $\langle -, \boldsymbol{x}\rangle$ 可看成是V^* 上的线性函数. 事实上,对任意的 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\in V^*$ 及任意的 $k\in\mathbf{K}$,有

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}\rangle&=(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\\&=\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle+\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}\rangle;\end{aligned}$$

$$\langle k\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle=(k\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=k\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

因此$\langle -, \boldsymbol{x}\rangle$是$V^*$上的线性函数. 记$V^*$上的全体线性函数为$(V^*)^*=V^{**}$, V^{**}就是 V^* 的共轭空间. 上面的讨论表明:

$$\langle -, \boldsymbol{x}\rangle\in V^{**}.$$

定义 $V \to V^{**}$ 的映射 η:

$$\eta(x)=\langle -,\ x\rangle,$$

则

$$\eta(x+y)=\langle -,\ x+y\rangle=\langle -,\ x\rangle+\langle -,\ y\rangle=\eta(x)+\eta(y).$$

$$\eta(kx)=\langle -,\ kx\rangle=k\langle -,\ x\rangle=k\eta(x).$$

因此,η 是线性空间 $V\to V^{**}$ 的线性映射. 又若 $\eta(x)=\mathbf{0}$ (这里的 $\mathbf{0}$ 表示 V^{**} 的零向量),即对任意的 $f\in V^*$, $\langle f,\ x\rangle=0$. 由前面的分析得知,必有 $x=\mathbf{0}$,这就是说 $\mathrm{Ker}\ \eta=\mathbf{0}$,因此 η 是一个单映射. 这时若 $\dim V=n$,则 $\dim V^{**}=\dim V^*=n$. 故 η 也是满映射,即 η 是线性同构. 如果把 V 与 V^{**} 在这个同构下等同起来,则 V 可以看成是 V^* 的对偶空间. 这样 V 与 V^* 具有平等的地位,它们互为对偶.

现在我们来研究如何把 V 上的线性映射诱导到对偶空间上去. 设 φ 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间 U 到 $\mathbf{K}$ 上线性空间 V 中的线性映射,U^*, V^* 分别是 U, V 的共轭空间. 设 $f\in V^*$,则 $f\varphi$ 是 U 上的线性函数. 定义 $V^*\to U^*$ 的映射 φ^* 如下:

$$\varphi^*(f)=f\varphi,$$

则

$$\varphi^*(f+g)=(f+g)\varphi=f\varphi+g\varphi=\varphi^*(f)+\varphi^*(g),$$

$$\varphi^*(kf)=(kf)\varphi=k(f\varphi)=k\varphi^*(f).$$

因此 φ^* 是线性映射. 我们称 φ^* 是线性映射 φ 的对偶映射.

定理 10.1.1　设 U, V, W 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,φ 和 ψ 分别是 $U\to V$ 及 $V\to W$ 的线性映射. $\varphi^*: V^*\to U^*$, $\psi^*: W^*\to V^*$ 分别是 φ 及 ψ 的对偶映射,则

(1) 对任意的 $x\in U$ 及任意的 $f\in V$, 总成立:

$$\langle\varphi^*(f),\ x\rangle=\langle f,\ \varphi(x)\rangle, \tag{10.1.2}$$

若 $\widetilde{\varphi}$ 是 $V^*\to U^*$ 的线性映射且等式

$$\langle\widetilde{\varphi}(f),\ x\rangle=\langle f,\ \varphi(x)\rangle \tag{10.1.3}$$

对一切 $x\in U$, $f\in V^*$ 成立,那么 $\widetilde{\varphi}=\varphi^*$;

(2) $(\psi\varphi)^*=\varphi^*\psi^*$;

(3) 若 $U=V$, I 表示 V 上恒等映射,则 I^* 是 V^* 上的恒等映射(也记为 I);

(4) φ 是单映射的充分必要条件是 φ^* 为满映射;

(5) φ 是满映射的充分必要条件是 φ^* 为单映射;

(6) φ 是同构当且仅当 φ^* 也是同构.

证明　(1) 由 φ^* 之定义,有

$$\begin{aligned}\langle \varphi^*(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{x}\rangle &= \varphi^*(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}\varphi)(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{x})) = \langle \boldsymbol{f}, \varphi(\boldsymbol{x})\rangle.\end{aligned}$$

又若 $\widetilde{\varphi}$ 使(10.1.3)式成立,则对任意的 $\boldsymbol{x}\in V$, 有

$$\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \langle \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \varphi^*(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}),$$

因此 $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{f}) = \varphi^*(\boldsymbol{f})$对一切 $\boldsymbol{f}\in V^*$ 成立,即有 $\widetilde{\varphi} = \varphi^*$.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$, $\boldsymbol{g}\in W^*$, 有

$$\begin{aligned}\langle (\psi\varphi)^*(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{x}\rangle &= \langle \boldsymbol{g}, \psi\varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle \psi^*(\boldsymbol{g}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle \\ &= \langle \varphi^*(\psi^*(\boldsymbol{g})), \boldsymbol{x}\rangle \\ &= \langle (\varphi^*\psi^*)(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{x}\rangle.\end{aligned}$$

由(1)即得 $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$.

(3) 显然成立.

(4) φ 是单映射的充分必要条件是存在 $V\to U$ 的线性映射 ξ,使 $\xi\varphi = I$, I 是 U 上的恒等映射. 但这时

$$\varphi^*\xi^* = (\xi\varphi)^* = I^*,$$

这等价于 φ^* 是满映射.

(5) 同(4)一样证明.

(6) 由(4), (5)即得,证毕.

例 10.1.1　设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维列向量空间,V' 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维行向量空间. 现利用 V' 定义 V 上的线性函数如下:设 $\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{u}$ 为 V' 中固定的向量,若

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n),\ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)',$$

定义

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$

则 $\langle \boldsymbol{u}, -\rangle$ 是 V 上的线性函数(读者不妨验证之). 另一方面,设 $\boldsymbol{f}$ 是 V 上的任一线性函数,$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的标准基,若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) = a_i$, 令

$$\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

则不难验证对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$. 这表明我们可以把 V' 看成是 V 的

对偶空间. 同理可把 V 看成是 V' 的对偶空间. 又因为

$$\langle e_i', e_j\rangle = \delta_{ij},$$

所以 $\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ 是 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的对偶基. 又设 A 是 n 阶方阵,则 A 定义了 V 上的线性变换 φ:

$$\varphi(v) = Av,$$

A 也定义了 V' 上的线性变换 ψ:

$$\psi(u) = uA.$$

由于

$$\langle uA, v\rangle = (uA)v = u(Av) = \langle u, Av\rangle,$$

故 $\psi = \varphi^*$.

习　题　10.1

1. 设 n 维线性空间 V 中有两组基: $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 已知从前一组基到后一组基的过渡矩阵是 P, 求这两组基的对偶基之间的过渡矩阵.

2. 设 V_1 是 V 的子空间,记

$$V_1^{\perp} = \{f \in V^* \mid \langle f, V_1\rangle = 0\}.$$

求证: $V_1^{\perp}$ 是 V^* 的子空间且若 V_2 是 V 的另一子空间,则

$$V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} = (V_1 + V_2)^{\perp}.$$

3. 设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的有限维线性空间, V_1 是 V 的子空间. 把 V 看成是 V^* 的对偶空间(按本节中的方式),求证:

$$(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1.$$

4. 设 φ 是 V 上的线性变换且 $\varphi^2 = \varphi$, φ^* 是 φ 的对偶,求证:

$$\operatorname{Im}\varphi^* = (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}.$$

5. 将有限维线性空间 V 与 V^* 看成是互为对偶的空间, φ 是 V 上的线性变换,求证: $(\varphi^*)^* = \varphi$.

6. 设 V 是有限维欧氏空间,对任一固定的 $u \in V$, $(u, -)$ 是 V 上的线性函数,作映射 $u \to (u, -)$, 证明: 这是一个 $V \to V^*$ 的同构. 若将 u 与 $(u, -)$ 等同起来,则

$$\langle u, v\rangle = (u, v),$$

V 可以看成是自身的对偶空间. 证明: V 上的线性变换 φ 的对偶就是 φ 的伴随.

§10.2 双线性型

在上一节中,我们在两个线性空间 V^*, V 上定义了一个函数$\langle , \rangle$. 它可以看成是一个"双变元"函数,其中一个变元在 V^* 内,另一个变元在 V 中. 这个双变元函数对每个变元都是线性的,即

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{y} \rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{f}, k\boldsymbol{y} \rangle = k\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{y} \rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x} \rangle,$$

$$\langle k\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle = k\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle.$$

这样的性质称为双线性,$\langle , \rangle$称为 V^* 与 V 上的双线性函数. 现在我们要在任意两个数域 $\mathbf{K}$ 的线性空间上定义双线性函数.

定义 10.2.1 *设 U, V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $U\times V$ 是它们的积集合. 若存在集合 $U\times V \to \mathbf{K}$ 的映射 g,适合下列条件:*

(1) 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, $\boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbf{K}$,

$$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

$$g(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z});$$

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbf{K}$,

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}),$$

$$g(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z});$$

则称 g 是 U 与 V 上的双线性函数.

显然若固定 $\boldsymbol{z} \in V$, $g(-, \boldsymbol{z})$ 是 U 上的线性函数. 同样若固定 $\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x}, -)$ 是 V 上的线性函数. 显而易见, §10.1 中的$\langle , \rangle$是定义在 V^* 与 V 上的双线性函数. 双线性函数又称为双线性型.

现在我们要研究双线性型的表示. 因为双线性型对每个变元是线性的,不难看出双线性函数的值完全被该函数在基向量上的值唯一确定. 设 U 和 V 分别是数域 $\mathbf{K}$ 上的 m 维与 n 维线性空间. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 分别是 U 与 V 的基, g 是定义在 U 和 V 上的双线性型. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,它的第 (i, j) 元素等于 $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j)$,即

$$A=\begin{pmatrix} g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_n) \\ g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{x}\in U$, $\boldsymbol{z}\in V$,

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{z}=\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j,$$

则

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= g\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_jg(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j) \\ &= (a_1, a_2, \cdots, a_m)A(b_1, b_2, \cdots, b_n)'. \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

(10.2.1)式告诉我们,若记 $\boldsymbol{x}$ 的坐标向量(用列向量表示)为 $\boldsymbol{\alpha}$,记 $\boldsymbol{y}$ 的坐标向量为 $\boldsymbol{\beta}$,则

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta}. \tag{10.2.2}$$

(10.2.1)式还表明,取定基后,U 和 V 上的双线性型 g 可以由 $\mathbf{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 $A=(g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j))$ 完全确定. 反过来,若已知 U 和 V 的基以及 $\mathbf{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵,则由(10.2.1)式可定义 U 和 V 上的双线性函数 g. 因此,在固定基下,U 和 V 上的双线性函数全体与 $\mathbf{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵之间有一个一一对应. 它可以使我们能够用矩阵作为工具来研究双线性型.

我们自然关心这样一件事: 若 U 与 V 的基发生变化,同一个双线性函数在不同基下的表示矩阵有什么关系? 现设 $\{\boldsymbol{e}_i(i=1, 2, \cdots, m)\}$, $\{\boldsymbol{e}_i'(i=1, 2, \cdots, m)\}$ 是 U 的两组基,$\{\boldsymbol{v}_j(j=1, 2, \cdots, n)\}$, $\{\boldsymbol{v}_j'(j=1, 2, \cdots, n)\}$ 是 V 的两组基,它们之间的过渡矩阵分别为 C 及 D. 又设 $\boldsymbol{x}\in U$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,在基 $\{\boldsymbol{e}_i'\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\alpha}=C\boldsymbol{\beta}$. 类似地,设 $\boldsymbol{y}\in U$ 在基 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{\gamma}$,在基 $\{\boldsymbol{v}_j'\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{\delta}$,则 $\boldsymbol{\gamma}=D\boldsymbol{\delta}$. 设双线性型 g 在基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 和基 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ 下的表示矩阵为 A,在基 $\{\boldsymbol{e}_i'\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_j'\}$ 下的表示矩阵为 B. 于是

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\gamma}=(C\boldsymbol{\beta})'A(D\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{\beta}'(C'AD)\boldsymbol{\delta}.$$

另一方面

$$g(x,\ y) = \boldsymbol{\beta}' B \boldsymbol{\delta}.$$

因为 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 是任意的,所以

$$B = C'AD.$$

这说明,g 在不同基下的表示矩阵是相抵的. 由矩阵理论知道存在非异阵 C 及 D,使 $C'AD$ 为对角阵. 这就是说,我们可以选择 U, V 的基,使 g 在这两组基下的矩阵是对角阵:

$$\mathrm{diag}\{1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\}.$$

矩阵 A 的秩 r 称为 g 的秩,它不随基的改变而改变. 这样就证明了下面的定理.

定理 10.2.1 设 g 是 U 和 V 上的双线性型,则必存在 U 的基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_m\}$ 及 V 的基 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$,使

$$g(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij},\ i,\ j = 1,\ \cdots,\ r;$$

$$g(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{v}_j) = 0,\ i > r, \text{或 } j > r,$$

其中 r 为 g 的秩.

定义 10.2.2 设 g 是 U 和 V 上的双线性型. 令

$$L = \{\boldsymbol{u} \in U \mid g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y}) = 0, \text{对一切 } \boldsymbol{y} \in V\},$$

$$R = \{\boldsymbol{v} \in V \mid g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}) = 0, \text{对一切 } \boldsymbol{x} \in U\},$$

则 L 与 R 分别是 U 与 V 的子空间,分别称为 g 的左根子空间与右根子空间.

若 U 是 m 维线性空间,V 是 n 维线性空间,又设 g 的秩等于 r,由定理 10.2.1 知道可选择 U 和 V 的基 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\ \cdots,\ m}$ 及 $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ \cdots,\ n}$,使左根子空间 L 恰好由 $\boldsymbol{e}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_m$ 张成,右根子空间 R 恰好由 $\boldsymbol{v}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n$ 张成. 因此我们有

$$\dim L = m - r,\ \dim R = n - r. \tag{10.2.3}$$

定义 10.2.3 一个双线性型 g 称为非退化,若 g 的左、右根子空间都为零.

定理 10.2.2 U 和 V 上的双线性型 g 为非退化双线性型的充分必要条件是

$$\dim U = \dim V = r,$$

其中 r 为 g 的秩.

证明 由(10.2.3)式即得. 证毕.

推论 10.2.1 U 和 V 上的双线性型 g 为非退化的充分必要条件是 g 在 U 和 V 的任意两组基下的表示矩阵是非异阵.

现设 g 是 U 和 V 上非退化的双线性型,固定 $\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x},\ -)$就成了 V 上的线

性函数. 作 $U \to V^*$ 的映射 φ:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}, -),$$

则 φ 是一个线性映射. 若 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$,即 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 对一切 $\boldsymbol{y} \in V$ 成立. 由于 g 是非退化的,因此 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 这说明 $\operatorname{Ker}\varphi = \boldsymbol{0}$,也就是 φ 为 $U \to V^*$ 的单映射. 另一方面,$\dim V^* = \dim V = \dim U$, 故 φ 是一个线性同构. 若将 $\boldsymbol{x}$ 与 $g(\boldsymbol{x}, -)$等同起来,则 U 就成了 V 的对偶空间 V^*. 这时有

$$\langle \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

类似地,我们可将 V 与 U^* 等同起来,即存在线性同构映射 $\psi: V \to U$, 使

$$\langle \boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{y}) \rangle = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ 成立. 这一事实表明非退化双线性型在同构的意义下与 §10.1 中定义的双线性型$\langle , \rangle$没有什么区别,许多问题的讨论可归结为 V^* 和 V 上的双线性型$\langle , \rangle$的讨论.

一般地我们还有下列定理.

定理 10.2.3　设 g_1 及 g_2 是 U 和 V 上的两个非退化双线性型,则存在 U 上的非异线性变换 φ 及 V 上的非异线性变换 ψ,使

$$g_2(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\ g_2(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{y})) = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ 成立.

证明　由上面的讨论知道存在 $U \to V^*$ 的线性同构 φ_1,使

$$\langle \varphi_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

同理,存在线性同构 $\varphi_2: U \to V^*$, 使

$$\langle \varphi_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = g_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

令 $\varphi = \varphi_2^{-1}\varphi_1$, φ 是 U 的非异线性变换,且

$$\begin{aligned} g_2(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) &= \langle \varphi_2\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \varphi_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle \\ &= g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

同理可证明另一等式. 证毕.

对偶映射的概念也可推广到双线性型上. 设 g_1 及 g_2 是 U 和 V 上的非退化双线性型,φ 是 V 上的线性变换. 若存在 U 上的线性变换 φ^*,使

$$g_2(\varphi^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{x},\ \varphi(\boldsymbol{y}))$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ 成立,则称 φ^* 是 φ 关于 g_1, g_2 的对偶. 不难证明 φ 关于 g_1, g_2 对偶的存在性. 事实上令 $\varphi^* = \varphi_2^{-1}\,\widetilde{\varphi}\varphi_1$, 其中 φ_1 及 φ_2 同定理 10.2.3 证明中的映射, $\widetilde{\varphi}$ 是 φ 关于$\langle\,,\rangle$的对偶,即 φ 适合

$$\langle\,\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{y}\rangle = \langle\boldsymbol{v},\ \varphi(\boldsymbol{y})\rangle,$$

于是

$$\begin{aligned} g_2(\varphi^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) &= \langle\varphi_2\varphi^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}\rangle = \langle\,\widetilde{\varphi}\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}\rangle \\ &= \langle\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{y})\rangle = g_1(\boldsymbol{x},\ \varphi(\boldsymbol{y})). \end{aligned}$$

唯一性可这样来证明: 若 ξ 是 U 上的线性变换,且

$$g_2(\xi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{x},\ \varphi(\boldsymbol{y})),$$

则

$$g_2(\xi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) = g_2(\varphi^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ 成立,因此

$$g_2(\xi(\boldsymbol{x}) - \varphi^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) = 0$$

对一切 $\boldsymbol{y} \in V$ 成立. 但 g_2 是非退化的双线性型,故 $\xi(\boldsymbol{x}) - \varphi^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$,即 $\xi(\boldsymbol{x}) = \varphi^*(\boldsymbol{x})$ 对一切 $\boldsymbol{x} \in U$ 成立,所以 $\xi = \varphi^*$.

习 题 10.2

1. 设 g_1 及 g_2 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 U 和 V 上的双线性型,定义

$$(g_1 + g_2)(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + g_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),$$

对 $\mathbf{K}$ 中任一数 k,定义

$$(kg_1)(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = kg_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

求证: $g_1 + g_2$ 及 kg_1 仍是 U 和 V 上的双线性型且在此定义下, U 和 V 上的全体双线性型成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 若 $\dim U = m$, $\dim V = n$, 则上述线性空间的维数为 mn.

2. 设 g 是 U 和 V 上的双线性型, V^* 是 V 的对偶空间, L 是 g 的左根子空间. 定义 $U \to V^*$ 的映射 φ:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x},\ -),$$

求证: φ 是线性映射且 $\operatorname{Ker}\varphi = L$.

3. 设 g 是 U 和 V 上的非退化双线性型. 若 $\{e_i\}$, $\{v_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 分别是 U, V 的基,使

$$g(e_i, v_j)=\delta_{ij}, \ i, j=1, 2, \cdots, n,$$

则称 $\{e_i\}$, $\{v_i\}$ 是关于 g 的对偶基. 设 φ 是 V 上的线性变换, φ^* 是 φ 关于 g 的对偶映射. 若 φ 在 $\{v_i\}$ 下的表示矩阵为 A,证明: φ^* 在 $\{e_i\}$ 下的表示矩阵为 A'.

4. 设 g 是 U 和 V 上的非零双线性型,证明:必存在 U, V 的子空间 U_0, V_0,使 g 限制在 U_0, V_0 上是非退化的双线性型,且

$$\dim U_0=\dim V_0=\dim U-\dim L,$$

其中 L 是 g 的左根子空间.

5. 设 g 是 U、V 上非退化的双线性型, S 是 U 的子集,且

$$S^{\perp}=\{v\in V \mid g(S, v)=0\},$$

求证: $S^{\perp}$ 是 V 的子空间.

6. 设 U, V 是线性空间, g 是其上的非退化双线性型. φ, ψ 是 V 上的线性变换,求证:

(1) $(\psi\varphi)^*=\varphi^*\psi^*$;

(2) $(\varphi^*)^*=\varphi$.

§10.3 纯量积

定义 10.3.1 设 g 是 $V\times V\to \mathbf{K}$ 的双线性函数,则称 g 是 V 上的纯量积(或称数量积). 若

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}),$$

对一切 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$ 成立,则称 g 是 V 上的对称型. 若

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

对一切 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$ 成立,则称 g 是 V 上的交错型.

交错型又称反对称型. 交错型的另一等价说法是对 V 中任一元素 $\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0$. 事实上,由 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=-g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ 可推出 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0$. 另一方面若 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0$ 对一切 $\boldsymbol{x}$ 成立,则 $g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=0$, 由此即可推出 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

V 上的纯量积也可用矩阵来表示. 但是与一般的双线性型的矩阵表示有一点区别. 我们只取 V 的一组基而不是取两组基. 因此若 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 V 的一组基,则 g 的表示矩阵为

$$A=(g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)).$$

若

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{e}_i,$$

则

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)A(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)'. \tag{10.3.1}$$

若$\{\boldsymbol{v}_i\}$是 V 的另一组基且 C 是$\{\boldsymbol{e}_i\}$到$\{\boldsymbol{v}_i\}$的过渡矩阵,若记 B 为 g 在$\{\boldsymbol{v}_i\}$下的表示矩阵,则

$$B = C'AC.$$

这就是说纯量积 g 在不同基下的表示矩阵是合同的.

显然,对称型的表示矩阵是对称矩阵,反对称型的表示矩阵是反对称矩阵.反过来,若给定一个对称矩阵(反对称矩阵),则在 V 的一组基下,(10.3.1)式定义了 V 上的一个对称型(反对称型).

设 g 是 V 上的纯量积,$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 是 V 中两个向量.若 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 左垂直于 $\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{y}$ 右垂直于 $\boldsymbol{x}$,记为 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. 当 g 是对称型或交错型时, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ 等价于 $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$, 这时称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.反过来,如果 g 有下列性质:由 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ 总可推出 $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$, 那么 g 是否必是对称型或交错型呢?下面的定理将给予肯定的回答.

定理 10.3.1 设 g 是 V 上的纯量积,则在 V 中 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ 等价于 $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$ 的充分必要条件是 g 为对称型或交错型.

证明 只需证明必要性.设 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in V$. 令

$$\boldsymbol{w} = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} - g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})\boldsymbol{y},$$

则

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w}) &= g(\boldsymbol{x},\ g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} - g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})\boldsymbol{y}) \\ &= g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}) - g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \\ &= 0, \\ g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x}) &= g(g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} - g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) \\ &= g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})g(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

但从 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{w}$ 可推出 $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{x}$, 故

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}). \tag{10.3.2}$$

上式对任意的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 均成立.令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 得

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})(g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})-g(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x}))=0. \tag{10.3.3}$$

因此或者 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$ 或者 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})=g(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x})$. 若 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$ 对一切 $\boldsymbol{x}\in V$ 成立,则 g 是交错型. 我们的目的是要证明(10.3.3)式或者对所有的 $\boldsymbol{x}$ 有 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$, 或者对所有的 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}$ 有 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})=g(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x})$. 假设不然,则存在 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\in V$,使 $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\neq g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})$, $g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w})\neq 0$. 由(10.3.3)式可知, $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})=0$ 而且

$$g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}),\ g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}).$$

因为 $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\neq g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})$,由(10.3.2)式知道 $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})=g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u})=0$ 以及 $g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})=g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v})=0$. 于是

$$g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\neq g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}).$$

由(10.3.3)式得 $g(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})=0$. 但是

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})&=g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w})+g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})\\&=g(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{w})\neq 0,\end{aligned}$$

这就出现了矛盾. 证毕.

推论 10.3.1　*若 g 是 V 上的对称型或交错型,U 是 V 的子空间,记*

$$U^{\perp l}=\{\boldsymbol{x}\in V\mid g(\boldsymbol{x},\ U)=0\},$$

$$U^{\perp r}=\{\boldsymbol{x}\in V\mid g(U,\ \boldsymbol{x})=0\},$$

则 $U^{\perp l}=U^{\perp r}$. 特别地,g 的左根子空间等于右根子空间.

注　这时记 $U^{\perp}=U^{\perp l}=U^{\perp r}$, 称为 U 的正交补. g 的左右根子空间重合,称为 g 的根子空间.

需要注意的是,这里的正交补概念比内积空间中的正交补概念更一般. 因为显然在实线性空间 V 上的内积是一种纯量积,而内积空间中有关的正交向量性质在这里不一定成立. 比如在内积空间中,子空间与其正交补之交必是零空间. 但即使在非退化的情形,子空间 U 与其正交补 $U^{\perp}$ 之交未必为零.

例如,设 V 是二维实线性空间,$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ 是 V 的一组基,g 为由矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

定义的纯量积,显然 g 是非退化的对称型. 令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,则 $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})=0$, $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{u}$! 若记 U 为 $\boldsymbol{u}$ 生成的子空间,则有 $U\perp U$.

定理 10.3.2 设 g 是 n 维线性空间 V 上非退化的对称型(交错型),U 是 V 的子空间,则 $U \cap U^{\perp} = \mathbf{0}$ 的充分必要条件是 g 限制在 U 上是 U 的一个非退化的纯量积.这时有直和分解:

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

证明 我们首先证明

$$\dim U^{\perp} = n - \dim U, \tag{10.3.4}$$

对任意的 $\boldsymbol{x} \in V$, $g(\boldsymbol{x}, -)$ 限制在 U 上是 U 上的线性函数.作 $V \to U^*$ 的映射 φ:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}, -),$$

则 φ 是线性映射且 $\operatorname{Ker} \varphi = U^{\perp}$.若 $\boldsymbol{f} \in U^*$,则 $\boldsymbol{f}$ 可以扩张为 $V \to \mathbf{K}$ 上的线性函数,仍记之为 $\boldsymbol{f}$.因为 g 非退化,$\boldsymbol{x} \to g(\boldsymbol{x}, -)$ 是 V 到 V^* 的同构,故有 $\boldsymbol{x} \in V$,使 $\boldsymbol{f} = g(\boldsymbol{x}, -)$.这说明 φ 是满映射.于是

$$\dim U^{\perp} + \dim U^* = n.$$

而 $\dim U^* = \dim U$,故(10.3.4)式成立.

现设 $U \cap U^{\perp} = \mathbf{0}$,则由(10.3.4)式可知

$$V = U \oplus U^{\perp}. \tag{10.3.5}$$

若 g 限制在 U 上退化,则存在 U 中非零向量 $\boldsymbol{u}$,使得 $g(\boldsymbol{u}, U) = 0$.另一方面,显然有 $g(\boldsymbol{u}, U^{\perp}) = 0$,由(10.3.5)式即知 $g(\boldsymbol{u}, V) = 0$.这与 g 是 V 上的非退化纯量积矛盾,故必要性成立.

若 g 限制在 U 上非退化.设 $\boldsymbol{x} \in U \cap U^{\perp}$,则 $g(\boldsymbol{x}, U) = 0$,即有 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,这表明 $U \cap U^{\perp} = \mathbf{0}$.证毕.

注 当 g 限制在 U 上非退化时,g 限制在 $U^{\perp}$ 上也非退化.这时有 $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

定理 10.3.3 设 g 与 h 是 V 上的两个非退化的纯量积,则存在 V 的唯一的非异线性变换 φ,使

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 成立.

证明 我们用矩阵方法来证明这一结论.取 V 的一组基为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$.设 $A = (h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$, $B = (g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$.若

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{e}_i,$$

则

$$h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)A(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)',$$

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)B(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)'.$$

设 φ 在给定基下的矩阵为 C,且 $C' = AB^{-1}$,则 $\varphi(\boldsymbol{x})$的坐标为 $C(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)'$,于是

$$\begin{aligned} g(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}) &= (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)C'B(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)' \\ &= (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)A(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)' \\ &= h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

唯一性的证明留给读者. 证毕.

习　题　10.3

1. 设 g 是 V 上的纯量积(不一定非退化),φ 是 V 上的线性变换. $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$是 V 的一组基. 若 g 在这组基下的矩阵为 $A = (g(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j))$, φ 在这组基下的矩阵为 B. 求证: $g(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y})$是 V 上的双线性型且它在这组基下的矩阵为 $B'A$.

2. 设 g 与 h 是 V 上秩相同的纯量积,则必存在 V 上的非异线性变换 ψ 和 φ,使

$$h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = g(\varphi(\boldsymbol{x}),\ \psi(\boldsymbol{y}))$$

对一切 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ 成立.

3. 求证: V 上任一纯量积均可表示为一个对称型与一个交错型之和.

4. 设 $W = U \oplus V$, g 与 h 分别是 U 及 V 上的纯量积. 现定义 W 上的纯量积 q 如下:

$$q((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})) = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) + h(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v}),$$

其中 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v} \in V$, 求证:

(1) 若 $g,\ h$ 非退化,则 q 也非退化;

(2) 若 $g,\ h$ 为对称型(交错型),则 q 也为对称型(交错型);

(3) 若$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\cdots,m}$, $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\cdots,n}$分别是 $U,\ V$ 的基且 $g,\ h$ 在这基下的矩阵分别为 $A,\ B$, 则 q 在 W 的基 $\{\boldsymbol{e}_i\} \cup \{\boldsymbol{v}_i\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

§10.4　交错型与辛空间

定理 10.4.1　设 g 是 n 维线性空间 V 上的交错型,则存在 V 的一组基

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_r; \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{n-2r}\},$$

使 g 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵：

$$\operatorname{diag}\{S, S, \cdots, S; 0, \cdots, 0\}, \tag{10.4.1}$$

其中共有 r 个 2 阶方阵 S，S 为如下形状：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 不妨设 $g \neq 0$. 这时有 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$,使 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a \neq 0$. 令 $\boldsymbol{u}_1 = a^{-1}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$, 则 $g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) = -g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1) = 1$. 又 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ 必线性无关,否则将有 $g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) = 0$. 现设已选定 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j$ 共 $2j$ 个线性无关的向量,适合

$$g(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = 1 = -g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i)\ (i = 1, \cdots, j);$$

$$g(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{y}) = 0,\ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{u}_i\} \cup \{\boldsymbol{v}_i\} (i = 1, \cdots, j);$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) = 0,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{u}_i\} \cup \{\boldsymbol{v}_i\} (i = 1, \cdots, j).$$

设 V_0 为由$\{\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\cdots,j}$生成的子空间,令

$$V_0^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid g(\boldsymbol{v}, V_0) = 0\},$$

显然,g 限制在 V_0 上是非退化的. 若 $\boldsymbol{u} \in V_0 \cap V_0^{\perp}$,则 $g(\boldsymbol{u}, V_0) = 0$, 即可推出 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$,这表明 $V_0 \cap V_0^{\perp} = \boldsymbol{0}$. 另一方面,若 $\boldsymbol{x}$ 是 V 中任一元素,作

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{v}_i,$$

则

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_i) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i) g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i) = 0,$$

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) - g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) g(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = 0,$$

因此 $\boldsymbol{y} \in V_0^{\perp}$. 但

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \sum_{i=1}^{j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{u}_i - \sum_{i=1}^{j} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{v}_i,$$

故 $V = V_0 + V_0^{\perp}$,从而 $V = V_0 \oplus V_0^{\perp}$. 假定 g 在 $V_0^{\perp}$ 上的限制为零,则定理已得证. 若 g 的限制不等于零,则可找到 $\boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{v}_{j+1} \in V_0^{\perp}$,使

$$g(\boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{v}_{j+1}) = 1 = -g(\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{u}_{j+1}).$$

不断做下去,便可找到我们所需要的基,证毕.

注　上述定理也可以用矩阵方法证明,参见§8.1 习题 6.

推论 10.4.1　数域 K 上的反对称矩阵的秩必是个偶数,且它的行列式等于 K 中某个元素的平方.

推论 10.4.2　数域 K 上的两个 n 阶反对称矩阵合同的充分必要条件是它们具有相同的秩.

定义 10.4.1　设 V 是 K 上的有限维线性空间,若 V 上定义了一个非退化的交错型,则称 V 是一个辛空间.

由推论 10.4.1 知道辛空间的维数总是偶数,且由定理 10.4.1 可知任一 n 维辛空间总有一组基$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_r\}$,使 g 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵:

$$\mathrm{diag}\{S, S, \cdots, S\},$$

其中 $n = 2r$, S 为 2 阶方阵,S 为如下形状:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们称这样的基为 V 的辛基.在辛基下,g 的形式十分简单.设

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + b_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{u}_r + b_r\boldsymbol{v}_r, \tag{10.4.2}$$

$$\boldsymbol{y} = a_1'\boldsymbol{u}_1 + b_1'\boldsymbol{v}_1 + a_2'\boldsymbol{u}_2 + b_2'\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r'\boldsymbol{u}_r + b_r'\boldsymbol{v}_r, \tag{10.4.3}$$

则

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_1b_1' - a_1'b_1 + a_2b_2' - a_2'b_2 + \cdots + a_rb_r' - a_r'b_r. \tag{10.4.4}$$

定义 10.4.2　设 V 是一个辛空间,φ 是 V 上的非异线性变换,且

$$g(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in V$ 成立,则 φ 称为 V 上的一个辛变换.

辛变换有下列性质.

定理 10.4.2　设 V 是数域 K 上的辛空间,则

(1) V 上线性变换 φ 是辛变换的充分必要条件是 φ 将辛基变为辛基;

(2) 两个辛变换之积仍是辛变换;

(3) 恒等变换是辛变换;

(4) 辛变换的逆变换是辛变换.

证明　(1) 必要性是显而易见的.现设 φ 将辛基变为辛基,显然 φ 非异.设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 如(10.4.2)式及(10.4.3)式所示.又 $\boldsymbol{u}_i' = \varphi(\boldsymbol{u}_i)$, $\boldsymbol{v}_i' = \varphi(\boldsymbol{v}_i)$, 则

$\{u_i', v_i'\}_{i=1,\cdots,r}$ 构成 V 的一组辛基,且

$$\varphi(x)=a_1u_1'+b_1v_1'+a_2u_2'+b_2v_2'+\cdots+a_ru_r'+b_rv_r',$$

$$\varphi(y)=a_1'u_1'+b_1'v_1'+a_2'u_2'+b_2'v_2'+\cdots+a_r'u_r'+b_r'v_r'.$$

由(10.4.4)式即知

$$g(\varphi(x), \varphi(y))=g(x, y).$$

(2)和(3)由(1)即得.

(4) 设 φ^{-1}是 φ 的逆变换,则

$$g(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))=g(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y)))=g(x, y).$$

故 φ^{-1}也是辛变换. 证毕.

辛空间上的几何学称为辛几何. 辛几何近年来发展很快,并在数学、力学及其他学科中有重要的应用.

习 题 10.4

1. 证明下面两个反对称矩阵在有理数域上合同:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1&3\\-2&0&4&-2\\1&-4&0&1\\-3&2&-1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

并求出 C,使 $B=C'AC$.

2. 设 V 是辛空间,φ 是 V 上的辛变换,称 φ 在一组辛基下的矩阵为辛矩阵. 令

$$A=\mathrm{diag}\{S, \cdots, S\},$$

其中有 r 个 S 且

$$S=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

求证: n 阶方阵 $(n=2r)T$ 是辛矩阵的充分必要条件是

$$T'AT=A.$$

3. 证明: 辛变换的行列式值之平方等于 1.

§10.5 对称型与正交几何

设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,g 是 V 上的对称型. 取 V 的一组基 $\{e_1,$

$e_2, \cdots, e_n\}$, g 在这组基下的表示矩阵为 A，则 A 是对称矩阵. 若

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

则

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A(x_1, x_2, \cdots, x_n)'.$$

这时我们得到了一个 V 上的二次型. 反过来若 f 是 V 上的二次型，定义

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}[f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})].$$

在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下，二次型 f 相伴的对称矩阵设为 A. 假定

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n,$$

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 分别是 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 在给定基下的坐标向量，即

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)',\ \boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)',$$

则

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}')A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta}] \\ &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta}] \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

但因为 A 是对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\alpha}$，故

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta}.$$

显然，g 是 V 上的对称型. 从这里可以看出，对称型与二次型是等价的. 在这个意义上，双线性型可以看成是二次型的推广.

我们已经知道，任一 $\mathbf{K}$ 上的对称矩阵必合同于 $\mathbf{K}$ 上的对角阵. 因此，若 g 是 V 上的对称型，必存在 V 的一组基，使 g 的表示矩阵为

$$\mathrm{diag}\{b_1, \cdots, b_r; 0, \cdots, 0\}\ (b_i \neq 0).$$

这组基称为 V 的正交基.

欧氏空间的内积实际上就是一个正定对称型. 若一个线性空间 V 上定义了一个非退化的对称型，则 V 上的几何学称为正交几何学. 正交几何是欧氏几何的推广. 我们下面来研究正交几何学中的一些基本结论.

定义 10.5.1 设 $V_i(i=1, 2)$ 是有限维线性空间，$g_i(i=1, 2)$ 是 V_i 上的非退化对称型. 若存在 $V_1 \to V_2$ 的线性同构 η，使

$$g_2(\eta(\boldsymbol{x}), \eta(\boldsymbol{y})) = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$ 成立，则称 η 是 $V_1 \to V_2$ 的保距同构. 特别，当 $V_1 = V_2 = V$，$g_1 = g_2 = g$ 时，则 η 称为 (V, g) 上的一个正交变换.

定理 10.5.1 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的有限维线性空间，g 是 V 上的非退化对称型，则

(1) V 上两个正交变换之积仍是正交变换；

(2) V 上恒等映射是正交变换；

(3) V 上正交变换的逆变换也是正交变换.

证明 用正交变换的定义即可一一验证. 证毕.

给定 $\boldsymbol{u} \in V$ 且 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0$，构造下列映射 S_u：

$$S_u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u},$$

我们有

$$\begin{aligned} g(S_u(\boldsymbol{x}), S_u(\boldsymbol{y})) &= g\left(\boldsymbol{x} - \frac{2g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} - \frac{2g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}\right) \\ &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \frac{2g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ &\quad - \frac{2g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) + \frac{4g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})}{g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^2}g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \\ &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

因此 S_u是正交变换. 显然有 $S_u(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$. 又若 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$，则 $S_u(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. S_u称为 V 上的镜像变换，它把 $\boldsymbol{u}$ 映为 $-\boldsymbol{u}$，而一切与 $\boldsymbol{u}$ 正交的向量保持不动. 由此不难验证 $S_u^2 = I$，即 S_u是一个对合.

定理 10.5.2 设 V 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间，g 是 V 上非退化对称型. η 是 V 上的正交变换，则 V 可以表示为不超过 $n+1$ 个镜像变换之积.

证明 对维数用归纳法. 当 $n=1$ 时，$\eta(\boldsymbol{x}) = \pm\boldsymbol{x}$，结论显然成立. 现设对 $n-1$ 维空间结论正确，而 $\dim V = n$. 这时必有 $\boldsymbol{u} \in V$，$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0$. 令 $\boldsymbol{v} = \eta(\boldsymbol{u})$，则 $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0$. 现来构造镜像变换 ρ，使 $\rho(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ 或 $\rho(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{v}$. 因为

$$g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = 4g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0,$$

不妨设 $g(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \neq 0$ (否则可用 $-\boldsymbol{v}$ 代替 $\boldsymbol{v}$). 令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\rho=S_{\boldsymbol{z}}$. 因为 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$,所以 $g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=0$,从而 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=-g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$,因此 $g(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=2g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$. 于是可以得到 $\rho(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}$. 现令

$$\xi=\rho^{-1}\eta,$$

则 $\xi(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$(或 $\xi(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}$), ξ 仍是一个正交变换. 若 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{u}^{\perp}$, 则

$$g(\xi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u})=\pm g(\xi(\boldsymbol{x}), \xi(\boldsymbol{u}))=\pm g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})=0,$$

故 $\boldsymbol{u}^{\perp}$ 是 ξ-不变子空间,限制在 $\boldsymbol{u}^{\perp}$ 上仍是正交变换. 而 $\dim\boldsymbol{u}^{\perp}=n-1$. 由归纳假定, ξ 可以表示为不超过 n 个 $\boldsymbol{u}^{\perp}$ 上的镜像变换之积. 而每个 $\boldsymbol{u}^{\perp}$ 上的镜像变换均可扩张为 V 上的镜像变换,故 η 可以表示为不超过 $n+1$ 个镜像变换之积. 证毕.

推论 10.5.1 n 维欧氏空间中任一正交变换均可表示为个数不超过 $n+1$ 个镜像变换之积.

正交几何有许多与欧氏几何相仿的性质,但也有一个明显的不同. 在欧氏空间中,任一非零向量不能与自身垂直,但在正交几何中这是可能的.

定义 10.5.2 设 V 是有限维线性空间, g 是 V 上的非退化对称型. 若 $\boldsymbol{v}$ 是 V 中的非零向量,且 $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})=0$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 是 V 上的一个迷向向量. 含有迷向向量的子空间称为迷向子空间,不含任何迷向向量的子空间称为全不迷向子空间. 若一个子空间的非零向量全是迷向向量,则称之为全迷向子空间.

一个二维线性空间若带有一个非退化的对称型且含有迷向向量,则称之为双曲平面. 对双曲平面有如下基本结论.

定理 10.5.3 (1) V 是双曲平面的充分必要条件是 V 有一组基 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$,适合条件:

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})=0,$$

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})=1,$$

即 g 在这组基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 任何两个双曲平面皆保距同构;

(3) 任何一个双曲平面有且只有两个一维的全迷向子空间.

证明 (1) 设 V 是双曲平面,则存在 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$, $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=0$. 因为 g 是非退化的,故存在 $\boldsymbol{v}_0\in V$,使 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)\neq 0$. 显然 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_0$ 线性无关,故 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\}$ 构成 V 的一

组基. 不失一般性, 可令 $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)=1$ (否则在 $\boldsymbol{v}_0$ 上乘一个常数). 又若 $k\in\mathbf{K}$, 则

$$g(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_0,\ k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_0)=g(\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{v}_0)+2k,$$

令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0-\dfrac{1}{2}g(\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{u}$, 便有 $g(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})=0$, 而这时仍有 $g(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=1$. 因此我们可以找到所需要的基. 逆命题是显然的.

(2) 由(1)可设两个双曲平面分别有一组基 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$, $\{\boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{v}'\}$ 适合(1)中的条件, 作线性映射 φ, 使 $\varphi(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}'$, $\varphi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}'$. 不难验证 φ 是保距同构.

(3) 设 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$ 是适合(1)中条件的一组基. 对任意的 k, $t\in\mathbf{K}$,

$$g(k\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\ k\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})=2kt,$$

因此 $k\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$ 为迷向向量的充分必要条件是 $k\neq0$, $t=0$ 或 $k=0$, $t\neq0$. 这就是说, 分别由 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 生成的子空间是 V 仅有的两个全迷向子空间. 证毕.

例 10.5.1 设 V 是实数域上的四维空间, 若 g 是一个非退化的对称型且其正惯性指数等于 3, 则称 $(V,\ g)$ 是一个 Minkowski(闵可夫斯基) 空间. g 在 V 的适当基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

V 上的正交变换称为 Lorentz(洛伦兹) 变换, V 中的迷向向量称为光向量, V 中适合 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})>0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 称为空间向量, 而适合 $g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})<0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 称为时间向量. Minkowski 空间在相对论中有重要的应用.

习 题 10.5

1. 设 g 是 V 上的非退化对称型, φ 是 V 上的正交变换, 求证: $\det\varphi=\pm1$.

2. 若 φ 是 $(V,\ g)$ 上的正交变换且 $\det\varphi=1$, 则 φ 可以表示为偶数个镜像变换的积.

3. 设 φ 是 $(V,\ g)$ 上的线性变换, φ^* 是 φ 关于 g 的对偶映射, 则 φ 是正交变换的充分必要条件是 $\varphi^*\varphi=I$.

4. 设 V 是双曲平面, φ 是 V 上的正交变换且 $\det\varphi=-1$, 求证: φ 必是镜像变换.

5. 设 g 是 n 维实线性空间 V 上的非退化对称型, g 的正惯性指数为 p, 负惯性指数为 q. 设 W 是 V 的极大全迷向子空间, 求证:

$$\dim W=\min\{p,\ q\}.$$

6. 若 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_r$ 且 $U_i\perp U_j(i\neq j)$，则称 V 是 U_i 的正交和，记为 $V=U_1\perp\cdots\perp U_r$. 若 $V=U_1\perp\cdots\perp U_r=V_1\perp\cdots\perp V_r$ 且存在保距同构 $\eta_i: U_i\to V_i(i=1,\cdots,r)$，求证：存在 V 上的正交变换 φ，使 φ 限制在每个 U_i 上就是 η_i.

7. 若 φ 是 (V,g) 的正交变换且 $V_1=\{x\in V,\mid\varphi(x)=x\}$，则

$$\dim V=\dim V_1+\dim(I-\varphi)V.$$

8. 证明 Minkowski 空间的下列性质：

(1) 任意两个时间向量不可能互相正交；

(2) 任意一个时间向量都不可能正交于一个光向量；

(3) 两个光向量正交的充分必要条件是它们线性相关.