

¿Por qué $2^{k-1} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2^k - 1$?

Razonamiento 1

Si escribimos k “unos”, éste es el número más grande que podemos escribir con esa cantidad de dígitos.

Al sumarle 1 a este número máximo de k dígitos, obtenemos un número que tiene un dígito más ($k + 1$ dígitos). Ese número, como es el primero de todos los que podemos escribir con exactamente $k+1$ dígitos, es un uno seguido de k ceros.

Por ejemplo, si k fuera 4, el máximo binario a 4 dígitos es 1111. Sumándole 1 obtengo 10000 que está escrito con 5 dígitos.

Pero este número de la forma 10000 no es otro que 2^k . Entonces resulta que $1111 + 1 = 2^4$, y despejando $1111 = 2^4 - 1$.

El mismo argumento vale para cualquier otro k que consideremos.

Razonamiento 2

¿Cómo se deduce que $2^{k-1} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2^k - 1$?

Esta es una identidad conocida que se suele usar en Álgebra. Una demostración podría ser así:

Llamemos ‘ a ’ al primer miembro de la igualdad para simplificar un poco:

$$a = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0$$

Y ahora multipliquemos ambos miembros por 2. Si dos expresiones son iguales, al multiplicar *ambas* por 2 van a seguir siendo iguales.

$$2a = 2 \times [2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0]$$

Operemos en el segundo miembro, distribuyendo el factor 2:

$$2a = 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2^1$$

Ahora sumemos y restemos 1 al segundo miembro, con lo cual no cambiamos su valor:

$$2a = 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1 - 1$$

Y reescribamos un 1 como 2^0 :

$$2a = 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 - 1$$

Pero ahora, en el centro de esta expresión de varios sumandos aparece de vuelta ‘ a ’ (lo que ponemos entre corchetes):

$$2a = 2^k + [2^{k-1} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0] - 1$$

$$\text{Luego } 2a = 2^k + a - 1$$

Ahora despejamos llevando el 'a' del segundo miembro al primero:

$$2a - a = 2^k - 1$$

$$a = 2^k - 1$$

Pero ¿quién era 'a'? Reemplacemos:

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2^k - 1$$

Que era lo que queríamos demostrar.