Sistemas de numeración

Para representar números, habitualmente utilizamos el sistema de numeración decimal, que tiene diez **dígitos** (llamados así porque representan a los diez dedos con los que contamos). Como todos sabemos, éstos son el 0, el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6, el 7, el 8 y el 9.

¿Cómo podemos contar objetos en cantidades mayores que diez, con solamente diez dígitos? El truco es crear un sistema **posicional**, donde los dígitos tienen diferente valor según en qué lugar del número se encuentran.

Contando con el cero y los naturales

Asignamos dígitos a las cosas que queremos contar, y cuando se agota la secuencia de los dígitos, agregamos un nuevo dígito **1** a la izquierda para representar el hecho de que se nos acabó **una vez** la secuencia, y volvemos a empezar:

	0...	Cero...
	1...	uno...
	...	(varios dígitos...)
	7...	siete...
	8...	ocho...
	9...	nueve... ¡se acabaron los dígitos!
No importa, tomemos un nuevo dígito para la posición siguiente a la izquierda...	**1 0...**	y repetimos la misma secuencia de diez dígitos a la derecha volviendo a empezar... diez...
	1 1...	once...
	1 2...	doce...
	...	y seguimos...
	1 8...	dieciocho...
	1 9...	diecinueve... ¡se acabaron 2 veces los dígitos!
Tomemos el siguiente dígito en la secuencia para la posición de la izquierda...	**2 0...**	y repetimos la secuencia a la derecha de nuevo...
y sigamos contando...	**2 1...**	veintiuno...
	2 2...	veintidós...

¿Qué pasa cuando se agota la secuencia en la posición de la izquierda? Es decir, ¿qué pasa cuando llegamos al **99**? ¿Y al **999**? Tenemos que tomar todavía una posición más a la izquierda y volver a empezar la secuencia con todas las posiciones de la derecha (luego del **99** escribimos **100**). Esto ocurre en una posición diferente, cada vez más a la izquierda, cada vez que agotamos la secuencia.

Como vemos, este procedimiento puede seguir indefinidamente, permitiendo escribir números de cualquier cantidad de dígitos.

Sistemas posicionales

Nuestro sistema es posicional: cuando escribimos un número, el **valor absoluto** de cada dígito será siempre el mismo, pero su significado o **valor relativo** depende de la posición donde se encuentra. El **2** es un dígito cuyo valor absoluto es, claro, **2**. Pero el dígito **2** de la línea donde contamos **veintiuno (21)** no tiene el mismo valor relativo que el **2** de la línea **doce (12)**. Los símbolos que se encuentran más a la izquierda tienen mayor valor relativo: el **2** de **21** vale **veinte**, o sea **diez veces más** que el **2** de **12**, porque representa el hecho de que la secuencia de **diez** dígitos se agotó dos veces.

En el número **21**, el **2** está desplazado a la izquierda una posición; por lo tanto, su valor se multiplica por **10**, valiendo **20**. En el número **215**, el **2** está desplazado a la izquierda dos posiciones; por lo tanto su valor se multiplica **dos veces** por **10** (o sea, $\mathbf{10 * 10 = 10^2 = 100}$), dando **200**.

La cantidad de dígitos de un sistema numérico se llama la **base** del sistema. En cualquier sistema posicional, cada vez que un dígito se desplaza a la izquierda una posición, para obtener su valor relativo hay que multiplicarlo por una potencia de la base del sistema (cualquiera sea dicha base). En este caso, la base es **10**, porque estamos utilizando el sistema decimal. Cuando escribimos **215**, en realidad estamos expresando su desarrollo como suma de potencias de la base:

$$\mathbf{2 * 10^2 + 1 * 10^1 + 5 * 10^0}.$$

Cuando escribimos el “número” **215**, lo que estamos escribiendo en realidad son los coeficientes de las potencias de la base en el desarrollo del número **215**.

> Para que este desarrollo sea el correcto, las potencias de la base deben estar **ordenadas descendentemente** (es decir, de mayor exponente a menor exponente) y **completas** (sin que falte **ningún** exponente, **incluyendo el exponente 0**).

Preguntas

- ¿Cuál es el desarrollo en potencias de 10 del número 1322? ¿Y del 10502?
- ¿Qué potencias de la base utilizamos cuando escribimos números con coma (o punto) y parte fraccionaria? ¿Cómo son los exponentes de esas potencias?
- ¿Cuál es el desarrollo en potencias de 10 del número 125.61?

Símbolos y significado de los dígitos

Ya que estamos, tratemos de aclarar lo siguiente, que es un poco difícil de explicar: los símbolos que escribimos, y que llamamos “números”, no son más que una representación de los verdaderos **números**. ¿Se entiende esto? A ver con ejemplos:

- La figura siguiente no es música.

  Es solamente una notación para los sonidos musicales. La verdadera música aparece cuando alguien toca esta notación en un instrumento y nosotros la escuchamos, o la imaginamos en nuestra cabeza.

- Éstas no son palabras: *CASA, SOL, PERRO*. Son una notación para las palabras. Las verdaderas palabras aparecen cuando alguien las dice, o cuando su significado está en nuestra cabeza.

- ¡Ésta no es una pipa!

  Es una pintura que representa una pipa.

- De la misma manera, **12, 21 y 3.1416**, ¡no son los verdaderos números, sino una notación para los números! Y esta notación se hace eligiendo una base, y esta base puede ser cualquiera. Dependiendo de la base elegida, los **símbolos** (los dígitos) para **representar** el mismo número serán unos u otros.

Así que podríamos elegir cualquier otra representación que quisiéramos para los números (igual que para las palabras, o para la música). Y como veremos, el mismo **número** podrá tener dos, o varias, **representaciones**.

Un sistema "frutal"

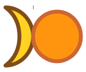
¿Cómo sería nuestro sistema de numeración si tuviéramos otra cantidad de dedos en nuestras manos? Depende de cuál fuera esa otra cantidad de dedos, pero muy probablemente seguiría siendo un sistema posicional. Y los dígitos, ¿necesariamente tienen que seguir siendo como los conocemos?

Imaginemos un sistema numérico con sólo dos símbolos, **naranja** y **banana**, sabiendo que **naranja** equivale a nuestro **0** y **banana** equivale a nuestro **1**. ¿Podremos usar estos símbolos para contar objetos?

Escribamos una secuencia de números para contar en nuestro sistema *frutal* y anotemos la correspondencia con nuestro sistema habitual.

 **0**

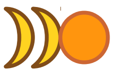
 **1** Se acabó la secuencia...

 **2** Entonces agregamos un 1 a la izquierda y volvemos a iniciar la secuencia.

 **3** ¡Se volvió a agotar la secuencia!

 **4** Tendríamos que cambiar el dígito de la izquierda por el siguiente en la secuencia... pero no hay más dígitos. Entonces tomamos una posición más a la izquierda. Agregamos un dígito **1** y volvemos a iniciar la secuencia en todas las demás posiciones.

 **5** Se agotó la secuencia en la posición de más a la derecha, paso al siguiente dígito en la posición siguiente.

 **6** Y vuelvo a empezar la secuencia.

Nuestra secuencia de símbolos ahora tiene sólo dos "dígitos", en lugar de los diez del sistema habitual. Para contar hasta 6, los números con la secuencia de naranjas y bananas se forman exactamente como hicimos antes: mientras contamos objetos, escribimos los símbolos de la secuencia (pasos **0** y **1**). Cuando se agota la secuencia, tomamos el siguiente símbolo de la secuencia y lo colocamos a la izquierda, porque nuestro sistema es posicional. Siempre con ese símbolo a la izquierda, volvemos a repetir la secuencia de dos símbolos mientras seguimos contando (**2** y **3**). Se acabó de nuevo la secuencia, entonces tenemos que agregar un nuevo "dígito" a la izquierda (la banana que aparece a la izquierda, en el **4**).

En realidad, el sistema *frutal* no es otra cosa que el **sistema binario**, de dos dígitos, donde en lugar de **0 y 1** quisimos escribir **naranja y banana** para mostrar que lo importante de los dígitos no son los símbolos, sino su significado.

Preguntas

- ¿Cómo se escriben los números hasta el 10 con este sistema?
- Así como el **2** de **12** vale **2** pero el **2** de **21** vale **20**, las bananas y las naranjas tienen diferente valor relativo según en qué posición se encuentran. ¿Cuánto valen la banana de 1, la de 2 y la de 4? ¿Y cada una de las dos bananas de 5?
- Un náufrago anota con marcas en la palmera de su isla los días que van pasando. Cada día hace una nueva rayita en la palmera. ¿Cuántos dígitos tiene el sistema numérico que utiliza? ¿Éste es un sistema posicional?
- ¿Qué valores tienen, en el sistema decimal, los dígitos **naranja**, **banana** y **uva**, de un sistema posicional de base **3**? ¿Cómo se escriben los primeros diez números en este sistema?
- ¿Cuánto vale la suma **naranja** + **banana**? ¿Y **banana** + **banana**?
- Sabiendo que la base de un sistema numérico posicional es **n**, ¿cuál es el valor absoluto de su dígito más grande?

Sistema binario

El sistema de numeración **binario** es un sistema posicional de base 2, donde sólo tenemos dos dígitos: 0 y 1. Escribamos algunos pocos números en el sistema binario.

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Binario	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Como vemos, los dos símbolos **0** y **1** del sistema **binario** son los mismos que el **0** y el **1**, símbolos que ya conocemos, del sistema **decimal**. Esta reutilización de los símbolos puede llevar a confusión: cuando escribimos **101**, ¿de qué número estamos hablando exctamente, del **101** o del **5**? En otras palabras, ¿en qué base está expresado el número?

Para evitar este problema, conviene aclarar en qué base estamos escribiendo los números, indicándola con un número subscripto. Por ejemplo, $\mathbf{101_{(2}}$ quiere decir que nos referimos al número 101 en base 2, que equivale al 5 en base 10 (o sea $\mathbf{101_{(2} = 5_{(10)}}$). Si quisiéramos escribir, sin ambigüedades, el título de cierta película, escribiríamos “Los $\mathbf{101_{(10}}$ Dálmatas”.

Como ocurre con cualquier sistema posicional, cada número expresado en el sistema binario es en realidad el resultado de un desarrollo, o cuenta, donde utilizamos las potencias descendentes, ordenadas y completas, de la base para calcular el valor relativo de cada dígito. Así, por ejemplo,

$$\mathbf{101_{(2} = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5_{(10}}.$$

Sistema hexadecimal

Así como hemos desarrollado un sistema numérico posicional con sólo dos dígitos, también es posible crear uno con **más dígitos** que en el sistema decimal. En el sistema **hexadecimal** tenemos **16** símbolos. Los primeros 10 símbolos se copian de los del sistema decimal (y valen lo mismo). La base del sistema es **16**, ¡así que nos faltan 6 símbolos! Pero, como hemos visto, los símbolos pueden elegirse a gusto, así que para el sistema hexadecimal se toman las letras **A** a la **F** como “dígitos” que toman los valores entre 10 y 15.

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

El sistema hexadecimal es muy usado en computación porque aporta importantes ventajas: además de que la expresión de los números será en general más corta, resulta bastante más fácil convertir entre los sistemas binario y hexadecimal que entre binario y decimal.

Conversión de sistema decimal a otras bases

El procedimiento general para convertir un número expresado en sistema **decimal** a otra base, es **dividir** sucesivamente el número a convertir, y los sucesivos **cocientes**, por la base deseada. La expresión final se forma tomando **el último cociente y la sucesión de los restos en orden inverso**.

Un esquema útil

Para exponer nuestros cálculos en el presente material, nos resultará práctico construir un esquema como el siguiente:

Número	Cociente (base)	Resto

Los pasos para utilizar el esquema son:

1. En el primer renglón de la columna *Número* escribimos el número a convertir.
2. Dividimos *Número* por la base, llenando *Cociente* y *Resto*.
3. Copiamos el *Cociente* en la columna *Número*. Éste es nuestro nuevo *Número*.
4. Repetimos los pasos 2 y 3 hasta que ya no se pueda seguir dividiendo. Notemos tres cosas importantes:
    - Los *Restos*, por el algoritmo de división, deben necesariamente ser menores que el divisor (la base). De lo contrario, se podría seguir dividiendo.
    - Lo mismo ocurre con el último *Cociente*. De lo contrario, se podría seguir dividiendo.
    - Por lo dicho anteriormente, tanto los *Restos* como el último *Cociente*, al ser menores que la base, se pueden escribir con **un único dígito** en el sistema deseado.
5. Finalmente escribimos el último *Cociente* y los *Restos*, de abajo hacia arriba, en la base deseada, siguiendo las flechas. Ésta es la expresión que buscamos.

Ejemplo: Convertir **66** a base **3**.

Número	**Cociente (3)**	**Resto**
66	22	0
22	7	1
7	2	1

Finalmente, el número **66** expresado en base **3** se escribe **2110**$_{(3}$.

Conversión de decimal a binario

Como se explicó, el procedimiento es dividir sucesivamente el número a convertir por la base, que ahora será **2**. La expresión en el sistema binario se forma tomando el último *Cociente* y la sucesión de los *Restos* en orden inverso. Todos estos números serán menores que la base y por lo tanto son dígitos 0 o 1. Convirtamos, por ejemplo, **531**$_{(10}$ a sistema binario:

Número	Cociente (2)	Resto
531	265	1
265	132	1
132	66	0

66	33	0
33	16	1
16	8	0
8	4	0
4	2	0
2	1	0

Es decir, **531(10 = 1000010011(2**.

Truco rápido para la conversión (o la comprobación) en el caso particular en que la base es 2: notemos que el *Resto* es 1 cuando el *Número* es impar, y 0 cuando es par.

Conversión de decimal a hexadecimal

Nuevamente, el procedimiento es dividir sucesivamente el número a convertir por la base, que ahora es **16**. La expresión en hexadecimal se forma, como antes, tomando el último *Cociente* y la sucesión de los *Restos* en orden inverso[1]. Pero ahora tenemos que tener cuidado con cómo escribimos los sucesivos *Restos*: tienen que estar en el sistema **hexadecimal**.

Ejemplo

Convertir **531(10** a hexadecimal:

Número	Cociente (16)	Resto
531	33	3
33	2	1

O sea, **531(10 = 213(16**.

Ahora veamos el caso donde algún resultado intermedio es mayor que 10.

Convertir **7158**(10 a hexadecimal:

Número	Cociente (16)	Resto
7158	447	6
447	27	15
27	1	11

Aquí hay que tener cuidado de expresar todos los restos en dígitos pertenecientes al sistema. Al construir **la representación en hexadecimal** de 7158, no puedo escribir los restos **15** u **11** (que están escritos en decimal) si no los expreso en hexadecimal. Se tiene que **11(10** = **B(16** y que **15(10** = **F(16**. O sea, **7158(10 = 1BF6(16**.

Hay más detalles sobre conversiones numéricas en varias páginas online[2].

1 http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_hexadecimal
2 http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario#Conversi.C3.B3n_entre_binario_y_decimal

Trucos para cálculo rápido

1. Usando potencias

Un truco útil para convertir rápidamente números decimales (pequeños) al sistema binario es memorizar los valores de algunas potencias de 2 y utilizarlos en las cuentas. Por ejemplo:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**

Entonces, si nos preguntan cómo se escribe en el sistema binario, por ejemplo, el número $\mathbf{78_{(10}}$, sólo necesitamos ver de qué manera se descompone 78 como suma de estos valores. Hay una sola manera:

$\mathbf{78_{(10} = 64 + 8 + 4 + 2 = 2^6} + \mathbf{2^3} + \mathbf{2^2} + \mathbf{2^1}$

Si completamos las potencias:

$\mathbf{78_{(10} = 64 + 8 + 4 + 2 = 2^6} + \mathbf{2^3} + \mathbf{2^2} + \mathbf{2^1} = \mathbf{1 * 2^6} + \mathbf{0 * 2^5} + \mathbf{0 * 2^4} + \mathbf{1 * 2^3} + \mathbf{1 * 2^2} + \mathbf{1 * 2^1} + \mathbf{0 * 2^0}$.

Por lo tanto, cuando queramos escribir $\mathbf{78_{(10}}$ en binario, utilizaremos los coeficientes de la expresión que acabamos de escribir: $\mathbf{78_{(10}} = \mathbf{1001110_{(2}}$.

Comprobemos nuestro resultado con el esquema:

Número	Cociente (2)	Resto
78	39	0
39	19	1
19	9	1
9	4	1
4	2	0
2	1	0

O sea, $\mathbf{78_{(10}} = \mathbf{1001110_{(2}}$.

2. Usando desplazamientos y sumas

Sumar un número a sí mismo es equivalente a multiplicarlo por dos. Esto nos da una forma fácil de multiplicar por dos un número binario sin necesidad de utilizar la operación de multiplicación.

Otra forma de multiplicar un número binario por dos es desplazar los bits a la izquierda, completando con ceros. Para multiplicar por cuatro, desplazamos dos lugares; para multiplicar por ocho, desplazamos tres lugares, y así sucesivamente. Inversamente, si desplazamos a la derecha una posición (dos, o tres) esto equivale a dividir por dos (por cuatro, por ocho, respectivamente).

Ejemplo

$\mathbf{30_{(10} = 15 * 2 = 1111_{(2} * 2 = 11110_{(2}}$

$\mathbf{60_{(10} = 15 * 4 = 1111_{(2} * 4 = 111100_{(2}}$

$\mathbf{80_{(10} = 10 * 8 = 1010_{(2} * 4 = 1010000_{(2}}$

Memorizando algunas pocas combinaciones de 0 y 1 y aplicando lo anterior, más algunas operaciones simples de suma, podemos escribir rápidamente números binarios. Por ejemplo:

- **14** = 7 * 2 = 7 desplazado a la izquierda un lugar = **1110**
- **28** = 7 * 4 = 7 desplazado a la izquierda dos lugares = **11100**
- **30** = 7 * 4 + 2 = 7 desplazado a la izquierda dos lugares, más dos = 11100 + 10 = **11110**
- **45** = 10 * 4 + 5 = 1010 * 4 + 101 = 101000 + 101 = **101101**

Cuando utilizamos la forma rápida de dividir por 2 un número binario, con desplazamientos a la derecha, ¿qué pasa con el dígito binario menos significativo? ¿Qué pasa con el resultado cuando el número es par y cuando es impar?

Conversión de otras bases a sistema decimal

Para convertir de otras bases al sistema decimal usamos lo que se explicó al hablar de la **base** de los sistemas numéricos posicionales y en el ejemplo del truco anterior de cálculo rápido con potencias. Todo lo que hay que hacer es **multiplicar los dígitos de la expresión en la base actual por potencias ordenadas y completas de la base**.

En el truco vimos el desarrollo de un número decimal en base **2**; leyendo el ejemplo al revés, tenemos el mecanismo para volver a convertir a sistema decimal. Si quisiéramos convertir un número en sistema hexadecimal a decimal, consideraremos las potencias de **16**.

Ejemplo

Convertir **10101110**$_{(2}$ a decimal.

$\mathbf{10101110_{(2}} =$

$\mathbf{1 * 2^7 + 0 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 =}$

$\mathbf{1 * 128 + 0 * 64 + 1 * 32 + 0 * 16 + 1 * 8 + 1 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 =}$

$\mathbf{128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0 =}$

$\mathbf{174_{(10}}$

Ejemplo

Convertir **1C8A09**$_{(16}$ a decimal.

1C8A09$_{(16}$ =

$1 * 16^5 + 12 * 16^4 + 8 * 16^3 + 10 * 16^2 + 0 * 16^1 + 9 * 16^0$ =

$1048576 + 12 * 65536 + 8 * 4096 + 10 * 256 + 0 + 9 * 1$ =

$1048576 + 786432 + 32768 + 2560 + 9 = 1870345_{(10}$

Una fórmula alternativa, más rápida, es, procediendo desde el dígito **más** significativo, **multiplicar iterativamente por la base y sumar el dígito siguiente**. En nuestro ejemplo de recién, haríamos:

1C8A09$_{(16}$ =

$((((((((1 * 16) + 12) * 16) + 8) * 16) + 10) * 16) + 0) * 16) + 9 = 1870345_{(10}$.

Conversión entre sistemas binario y hexadecimal

El truco consiste en tener en cuenta que cada **dígito hexadecimal** se representa por **cuatro dígitos binarios**. La tabla de equivalencias es como sigue:

Binario	Hexadecimal	Binario	Hexadecimal
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Es muy útil memorizar esta tabla. Nos permite deducir fácilmente que, por ejemplo,
AB4C$_{(16}$ = 1010101101001100$_{(2}$.

Sistema octal

Otra base muy interesante en computación, pero que por el momento no usaremos, es la base **8** (base del **sistema octal**). Tanto 16 como 8 son potencias de 2; de ahí que es fácil hacer las conversiones entre esas bases y el sistema binario.