Univerzitet u Sarajevu

Elektritehnički fakultet

Odsjek za automatiku i elektroniku

LINEARIZACIJA SISTEMA SA NEGATIVNOM POVRATNOM SPREGOM

Seminarski rad

Projektovanje sistema automatskog upravljanja

Mentor: V.prof.dr. Adnan Tahirović, dipl.ing.el.

Student: Emina Hasanović, BoEE

Sarajevo, februar 2019.

Sadržaj

1. Uvod

U ovom seminarskom radu bit će objašnjena jedna od metoda dizajna nelinearnih sistema, linearizacija sistema sa negativnom povratnom spregom. U uvodom dijelu seminarskog rada upoznat ćemo se s pojmom nelinearnog sistema, osnovnim osobinama i problemima nelinearnih sistema, sa osnovnim matematičkim modelom, te pojmom linearizacije.

1.1. Nelinearni sistemi

1.1.1. Osobine i problemi nelinearnih sistema

Fizički sistemi uopšte, i osobito tehnički sistemi, po pravilu su nelinearni tj. sadrže nelinearnosti. Pod nelinearnostima impliciramo bilo kakva odstupanja od linearnih karakteristika ili od linearnih jednačina dinamike sistema.

Analiza dinamike automatskog sistema upravljanja počinje s matemtičkim opisom pojedinačnih elemenata sistema sa zatvorenom petljom. Ovaj opis uključuje linearne i nelinearne diferencijalne jednačine, koje – kombinirane sa vanjskim pobudama koje djeluju na sistem – čine matematički model dinamičkih performansi sistema.

Ukoliko dinamička izvedba svih elemenata može biti opisana linearnim diferencijalnim jednačinama, onda taj sistem kao cjelina može biti opisan linearnom diferencijalnom jednačinom. Ovo se zove linearni *sistem upravljanja.* Ipak, linearna teorija upravljanja ne može sadržavati sve različitosti dinamičke izvedbe nekog realnog sistema. Stabilnost ravnotežnog stanja linearnog sistema ne ovisi niti o početnim uslovima niti o vanjskim pobudama koje djeluju na taj sistem, već je ovisna isključivo o parametrima tog sistema. S druge strane, stabilnost ravnotežnog stanja nelinearnog sistema uglavnom ovisi o parametrima tog sistema, početnim uslovima, kao i obliku i velič ini vanjske pobude koja djeluje na njega. Teorija linearnog sistema omogućava relativno jednostavnu analizu i dizajn sistema upravljanja. Za linearni sistem moraju biti zadovoljene sljedeće tri predpostavke:

i. Aditivnost nultog ulaza što odgovora nultom stanju,+
ii. Linearnost u odnosu na početne uslove (linearnost odgovora nultom ulazu),
iii. Linearnost u odnosu na ulaze (linearnost odgovora nultom stanju)

Funkcija *f(x)* je linearna u odnosu na neovisnu varijablu *x* ukoliko i samo ukoliko zadovoljava sljedeća dva uslova:

1. *Aditivnost:* $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$ *, za svako* x_1 *i* x_2 *u domeni funkcije f,*
2. *Homogenost*: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, za svako *x u domeni funkcije f, i sve skalare* α *.*

Sistemi koji ne zadovoljavaju uslove (i), (ii) i (iii) nazivaju se *nelinearni* sistemi.

Automatski sistem upravljanja s najmanje jednom nelinearnošću naziva se *nelinearni sistem*. Njihova dinamika se opisuje nelinearnim matematičkim modelima. Nasuprot teoriji linearnog sistema, ne postoji opšta teorija primjenjiva na sve nelinearne sisteme. Umjesto toga, primjenjuje se mnogo kompliciraniji matematički aparat, kao što je funkcionalna analiza, diferencijalna geometrija ili teorija nelinearnih diferencijalnih jednačina. Iz ove teorije, poznato je da osim u posebnim slučajevima (Riccati-jeve ili Bernouilli-jeve jednačine, jednačine koje stvaraju eliptične integrale), opšte rješenje nije moguće pronaći. Umjesto toga, primjenjuju se pojedinačni postupci, koji su često neodgovarajući i previše složeni za inžinjersku praksu. To je razlog zašto je u upotrebi niz približnih postupaka da bi se dobilo neko potrebno znanje o dinamičkim obilježjima sistema. S takvim približnim postupcima, ne-linearne karakteristike realnih elemenata zamjenjuju se idealiziranim, koje se mogu matematički opisati.

Sadašnji postupci za analizu nelinearnih sistema upravljanja klasificiraju se u dvije kategorije: egzaktne (tačne, precizne) i približne. *Egzaktni* postupci se primjenjuju ukoliko približni postupci ne urode zadovoljavajućim rezultatima ili kada je potrebna teoretska osnova za različite pristupe sintezi.

Teorija nelinearnih sistema upravljanja sadrži dva osnovna problema:

1. *Problem analize* sastoji se od teoretskog i praktičnog istraživanja da bi se pronašla ili obilježja sistema ili odgovarajući matematički model sistema.
2. *Problem sinteze* sastoji se od utvrđivanja strukture, parametara i elemenata sistema upravljanja da bi se dobila željena izvedba nelinearnih sistema upravljanja. Nadalje, matematički model mora biti pronađen kao i tehnička realizacija modela. Kako je objekt upravljanja obično poznat, sinteza se sastoji od određivanja kontrolera u širokom smislu. (Predavanja iz "Nelineranih sistema automatskog upravljanja" na Elektrotehničkom fakultetu, Sarajevo)

1.1.2. Osnovni matematički i strukturni modeli nelinearnih sistema

Nelinearni vremenski promjenljivi kontinualni sistemi se mogu opisati vektorskom diferencijalnom jednačinom prvog reda čiji je oblik:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\end{aligned} \qquad 1.1$$

gdje je $\mathbf{x}$ n x1 vektor stanja, $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u}$ je m x 1 vektor ulaza, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y}$ je r x 1 vektor izlaza, $\mathbf{y} \in R^r$.

Postojanje i jedinstvenost rješenja nisu zagarantirani ukoliko nisu uvedena neka ograničenja na vektorsku funkciju $\mathbf{f}(t)$. Rješenjem diferencijalne jednačine (1.1) u intervalu $(0,T)$ podrazumijevamo takve $\mathbf{x}(t)$ koji imaju derivacije u svakoj tački, i za koje vrijedi (1.1) za svako t. Stoga, namećemo ograničenje da $\mathbf{f}$ nije n-dimenzionalna vektor kolona nelinearnih funkcija koje su lokalno Lipschitz-eve. Sa kontinualnim sistemima, koji su isključivo analizirani u ovom tekstu, funkcija $\mathbf{f}$ ima svoju vrijednost za svako t, $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ korespondiraju s n-dimenzionalnim vektorom $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Ovo označavamo na sljedeći način:

$$\mathbf{f} : R_+ \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$$

i također:

$$\mathbf{h} : R_+ \times R^n \times R^m \rightarrow R^r$$

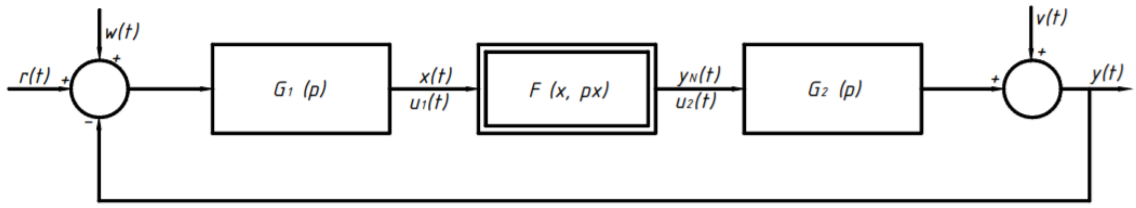
Ne postoji ograničenje da su u izrazima (1.1) prisutne samo diferencijalne jednačine prvog reda, pošto bilo koju diferencijalnu jednačinu n-tog reda možemo zamijeniti sa n-diferencijalnih jednačina prvog reda.

Za funkciju **f** se kaže da je lokalno Lipschitz-ova za varijablu $\mathbf{x}(t)$ ukoliko blizu tačke $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x_0}$ zadovoljava Lipschitz-ov kriterij:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad 1.2$$

za sve **x** i **y** u blizini $\mathbf{x_0}$, gdje je k pozitivna konstanta, a norma je Euclidska. Lipschitz-ov kriterij garantira da (1.1) ima jedinstveno rješenje za početni uslov $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x_0}$.

Blok dijagram nelinearnog sistema je prikazan na slici 1.1.



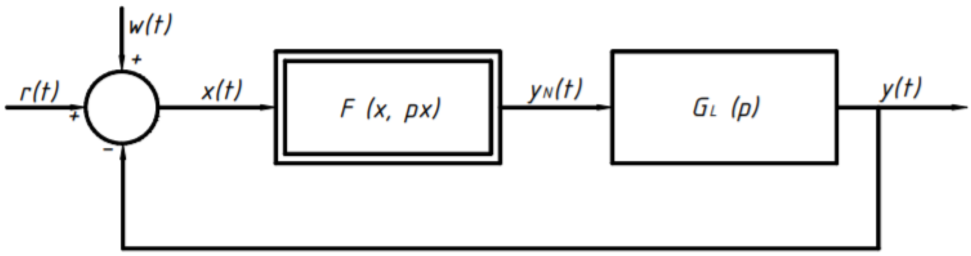
Slika 1.1. Blok dijagram nelinearnog sistema

Široka grupa nelinearnih sistema je takva da se mogu formirati kombinirajući linearni i nelinearni dio (slika 1.1.) Oznake na slici 1.1 su:

- $r(t)$ - referentni signal ili vrijednost za radnu tačku,
- $y(t)$ – izlazni signal, odziv zatvorenog sistema na ulaz $r(t)$
- $w(t)$ - vanjski signal ili signal smetnje
- $x(t)$, $u_1(t)$ - ulaz na nelinearni dio sistema
- $y_N(t)$, $u_2(t)$ - izlaz nelinearnog dijela sistema
- $v(t)$ - slučajna veličina, greška pri mjerenju izlazne veličine,
- $G_1(p)$, $G_2(p)$ - matematički modeli linearnih dijelova sistema,
- $F(x,px)$ - matematički opis nelinearnog dijela sistema

$p = \frac{d}{dt}$ – operator deriviranja

Blok dijagram sistema na slici 1.1 može biti smanjen na blok dijagram na slici 1.2, koji je primjenjiv za približnu analizu velikog broja nelinearnih sistema.



Slika 1.2. Pojednostavljeni blok dijagram nelineranog sistema

Blok dijagram na slici 1.2 predstavljen je dinamičkom jednačinom nelinearnih sistema:

$$f(t) = x(t) + G_L(p)F(x, px) \quad 1.3$$

gdje je $f(t) = x(t) + r(t)$ za $v(t)=0$. (Predavanja iz "Nelineranih sistema automatskog upravljanja" na Elektrotehničkom fakultetu, Sarajevo 2018/2019.)

1.1.3. Linearizacija nelinearnih sistema

Bavljenje nelineranim sistemima je teško jer nam poznati matematički modeli ne daju dovoljno snažna sredstva da analitički riješimo mnoge probleme koje ovdje susrećemo. Da bi pojednostavili stvari i učinili ih prikladnim za rukovanje, dosta često se koristi linearizacija. Lineariziranjem nelinearnog sistema oko jednog ravnotežnog stanja, postižemo primjenljivost teorije linearnih sistema koja su nam već poznata. Koriste se nove tehnike, kao što je metod linearizacije sa povratnom spregom, pseudolinearizacija ulaz-izlaz i linearizacija oko trajektorije. Ove metode se koriste uglavnom pri dizajnu nelineranih sistema.

Često je najpogodnije i najjednostavnije analizirati dinamiku nelinearnog sistema koristeći linearizirani matematički model realnog sistema. Ipak, moramo biti oprezni jer takva zamjena nije uvijek moguća. Naime, takva supstitucija urodi dobar i važeći rezultat samo ako su linearni efekti dominantni. S druge strane, ukoliko su nelinearni efekti dominantni, linearizacija može samo otežati opis sistema, koji će dovesti do pogrešnih zaključaka. (Predavanja iz "Nelineranih sistema automatskog upravljanja" na Elektrotehničkom fakultetu, Sarajevo)

2. Dizajn nelinearnih sistema

U ovom uvodu o dizajnu (sintezi) nelinearnih sistema će biti diskutovani neki problemi koji se javljaju pri samom dizajnu, konkretno koje su razlike između dizajna kontrolera za nelinearni sistem od dizajna kontrolera za linearni sistem. Cilj pri dizajnu kontrolera se može objasniti kao: Ako je dat fizički sistem kojim treba upravljati i ako su date specifikacije kako se taj sistem treba ponašati, potrebno je konstruisati zakon upravljanja negativnom povratnom spregom kako bi sistem u zatvorenom dosegao željeno ponašanje.

S obzirom na dati cilj za dizaj može se razmatrati nekoliko ključnih problema. Prvo, dva osnovna tipa problema pri upravljanju nelinearnim sistemom, nelinearna regulacija i nelinearno praćenje su definirani. Sljedeće, specifikacije željenog ponašanja upravljanja nelinearnim sistemom su diskutovani. Poslije toga su spomenuti osnovni problemi pri konstrukciji nelinearnih kontrolera. Konačno, glavne metode koje se koriste za dizajn nelinearnih kontrolera su navedene. (E.Slotine i Li 1990.)

2.1. Problemi pri upravljanju nelineranim sistemima

Ukoliko dinamiku sistema kojim želimo upravljati karakteriše kretanje s velikim brzinama i/ili sa velikim opsegom, nelinearni efekti će biti značajno prisutni i ipak će se morati koristiti nelinerni kontroler da bi se postigla željena performansa. Općenito, zadaci upravljanja nelinearnim sistemom mogu biti podijeljeni u dvije kategorije: *stabilizacije (ili regulacija) i* *praćenje (ili servo)*. U procesu *stabilizacije*, sistem upravljanja, koji se zove *stabilizator (ili regulator)*, će biti dizajniran tako da stanje sistema u zatvorenom bude stabilizirano oko *ravnotežnog stanja*. Primjeri *stabilizacije* su upravljanje temperaturom u frižideru, upravljanje visinom kod letenja aviona i upravljanje pozicijom robotske ruke. U problemima *praćenja*, cilj dizajna je da se konstruiše kontroler, zvani *„tracker“,* tako da izlaz sistema prati trajektoriju promjenljivu u vremenu. Problemi kao što je problem navesti avion da prati zadanu putanju ili da robotska ruka crta prave linije ili krugove su tipični zadaci *praćenja.* (E.Slotine i Li 1990.)

2.1.1. PROBLEM STABILIZACIJE

Problem asimptotske stabilnosti: *Dat je nelinerni dinamički sistem koji je opisan sa*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.1}$$

potrebno je pronaći zakon upravljanja $\boldsymbol{u}$*, takav da stanje* $\mathbf{x}$*, polazeći bilo gdje u regiji u* $\boldsymbol{\Omega}$*, nastoji da pada na* $\boldsymbol{0}$ *kako* $t \to \infty$*.*

Ukoliko zakon upravljanja direktno zavisi od mjerenja signala direktno, kaže se da je takav zakon *statički zakon upravljanja*. Ukoliko zavisi od mjerenja kroz diferencijalnu jednačinu, kaže se da je takav zakon *dinamički zakon upravljanja*, tj. postoji dinamika u zakonu upravljanja. Naprimjer, u linearnom upravljanju proporcionalni kontroler je statički dok je lead-lag dinamički kontroler.

Zapamtimo, da u gornjoj definiciji, dozvoljavamo da regija $\boldsymbol{\Omega}$ bude velika, u suprotnom, problem stabilizacije može adekvatno biti riješen koristeći linearno upravljanje. Također, ukoliko je cilj upravljanja da stanje dovedemo do neke nenulte zadane vrijednosti $\mathbf{x_d}$, možemo problem jednostavno transformisati u problem regulacije sa nultom zadanom vrijednosti ukoliko uzemo vrijednost $\mathbf{x}$-$\mathbf{x_d}$ kao stanje. (E.Slotine i Li 1990.)

2.1.2. PROBLEM PRAĆENJA

Problem asimptotskog praćenja: *Neka je dat nelinearni dinamički sistem opisan kao*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

i željena trajektorija $\mathbf{y_d}$*, potrebno je pronaći zakon upravljanja za ulaz u takav da, polazeći od bilo kojeg incijalnog stanja u regiji* $\boldsymbol{\Omega}$*, greška praćenja* $\boldsymbol{y(t)}$-$\boldsymbol{y_d(t)}$ *pada na nulu, dok cijelo stanje* $\mathbf{x}$ *ostaje ograničeno.*

Kada je početno stanje sistema u zatvorenom takvo da je greška praćenja uvijek jednaka nuli,

$$\mathbf{y}(t) \equiv \boldsymbol{y_d}(t) \quad \forall t \geq 0 \tag{2.4}$$

Kažemo da je sistem upravljanja sposoban za *savršeno praćenje*. Asimptotsko praćenje implicira da je savršeno praćenje asimptotski dosegnuto. Eksponencijalna konvergencija praćenja može biti definirana slično. Potrebno je poznavati željenu trajektoriju $\boldsymbol{y_d}$ i njene sve *derivacije* do derivacija višeg reda (jednake redu sistema) i da su ine kontinualne i ograničene. Također je potrebno da je željena trajektorija $\boldsymbol{y_d(t)}$ i njene derivacije, da su dostupne za on-line izračunavanja pri upravljanju. Željena trajektorija $\boldsymbol{y_d(t)}$ je planirana unaprijed.

Problemi praćenja su teži nego problemi stabilizacije, teži za riješiti, jer u problemima praćenja, kontroler ne samo da treba cijelo stanje držati stabilnim nego mora i izlaz sistema voditi ka željenom/zadanom izlazu. Međutim s teorijske tačke gledišta, dizajn praćenja i stabilizacije su često povezani. Naprimjer, ako dizajniramo „tracker“ za proces

$$\ddot{y} + f(\dot{y}, y, u) = 0 \qquad 2.5$$

takav da $e(t) = y(t) - y_d(t)$ pada na nulu, ovaj problem je ekvivalentan asimptotskoj stabilizaciji problema

$$\ddot{e} + f(\dot{e}, e, u, y_d, \dot{y_d}, \ddot{y_d}) = 0 \qquad 2.6$$

čije su komponente stanja e i $\dot{e}$.Zapravo, problem dizajna „trackera“ je riješen ukoliko znamo dizajnirati stabilizator za neautonomnu dinamiku.

U drugu ruku, proces stabilizacije može biti posmatran kao poseban slučaj problema praćenja, kada je željena trajektorija konstantna. (E.Slotine i Li 1990.)

2.2. Specificiranje željenog ponašanja sistema

U lineranom upravljanju željeno ponašanje sistema može biti sistematično specificirano, bilo u vremenskom domenu (vrijeme uspona, prvi preskok i vrijeme smirenja na osnovu step ulaza) ili u frekventnom domenu (kakvo treba biti ponašanje sistema na nižim i na višim frekvencijama). Pri sintezi upravljanja lineranih sistema, dat su specifikacije na sistem u zatvorenom, i potrebno je sintentizirati kontroler koji će zadovoljiti date specifikacije. Međutim, specifikacije za nelinearne sisteme (izuzev onih koji su ekvivalentni linearnim) su mnogo manje očigledne jer odziv nelineranih sistema na jedan ulaz ne mora biti sličan tom korištenom ulaznom signalu, pa opis u frekventnom domenu nije moguć.

Pa za nelinearne sisteme umjesto nekih kvalitativnih specifikacija gledamo samo ponašanje sistema u opercijskom regiji od interesa. Kompjuterska simulacija je jako bitan faktor jer pomaže da utvrdimo da li zadani sistem zadovoljava specifikacije. Razmatraju se sljedeće karakteristike:

Stabilnost mora biti garantovana za nominalni model (model koji je korišten za dizajn), u lokalnom ili globalnom smislu. Regija stabilnosti i konvergencije se također razmatraju.

Tačnost i brzina odziva se mogu razmatrati za neke tipične trajektorije kretanja u operacijskom području. Za neke klase sistema, odgovarajući dizajn kontrolera podrazumijeva konstantnu tačnost zavisno od željene trajektorije.

Robusnost je osjetljivost na efekte koji nisu razmatrani pri dizajnu, kao što su smetnje, mjereni šum, nemodelirana dinamika itd. Sistem treba da se nosi s ovim efektima kada obavlja zadani zadatak.

Trošak u sistemu upravljanja je uglavnom određen brojem i tipom aktuatora, senzora, i kompjutera koji su potrebni za implementaciju upravljanja. Aktuatori, senzori i kompleksnost kontrolera bi trebali biti odabrani konzistentno i da odgovaraju željenoj aplikaciji.

Stabilnost ne implicira sposobnost nošenja sa smetnjama čak i male amplitude. Razlog za to je činjenica da stabilnost nelineranog sistema je definirana njegovim početnim stanjem, i jedino privremene smetnje mogu biti prevedene u početno stanje. Naprimjer, stabilan sistem upravljanja može garantovati da se avion može nositi sa velikim naletima vjetra ali da se ne može nositi sa konstantno prisutnim vjetrom čak i male amplitude, intenziteta. Situacija je znatno drukčija nego kod linearnih sistema, gdje stabilnost implicira i sposobnost nošenja sa ograničenim smetnjama. Efekti stalnih smetnja na nelinearne sisteme i ponašanje nelinearnih sistema u tom slučaju je određeno konceptom robusnosti. (E.Slotine i Li 1990.)

2.3. Problemi pri sintezi nelinearnih regulatora

2.3.1. Procedura za dizajn upravljanja nelinearnim sistemom

Koraci su:

1. Specificiranje željenog ponašanja i odabir aktuatora i senzora
2. Modeliranje fizičkog procesa korištenjem diferencijalnih jednačina
3. Dizaj zakona upravljanja za sistem
4. Analiza i simulacija konačnog sistema upravljanja
5. Implementacija sistema upravljanja u odgovarajući hardver

Iskustvo, kretivnost, i inženjerski pristup su bitni pri ovom procesu. (E.Slotine i Li 1990.)

2.3.2. Modeliranje nelinearnih sistema

Modeliranje je zapravo pronalazak matematičkog opisa (obično diferencijalnih jednačina) za fizički proces koji je potrebno upravljati. Dvije stvari su bitne pri modeliranju. Prva je, potrebno je dobro razumjeti dinamiku sistema i zadatak upravljanja da bismo odredili što tačniji model. Međutim, baš tačni modeli nisu uvijek bolji, jer mogu zahtijevati nepotrebni kompleksni dizajn upravljanja, analizu i prezahtjevan proračun. Ključno je da se zadrže esencijalni efekti i da se odbace beznačajni efekti u dinamici sistema u operacijskom području. Drugo, modeliranje je više nego određivanje nominalnog modela fizičkog procesa, također, potrebno je da izražava i karaktere nekih modelskim nesigurnosti, koji mogu biti korišteni za robusni dizajn ili simulaciju.

Modelske nesigurnosti su razlike između modela i stvarnog fizičkog sistema. Nesigurnosti u parametrima se nazivaju parametarske nesigurnosti dok su ostale neparametarske nesigurnosti. Naprimjer, za model kontrolirane mase:

$$m\ddot{x} = u \tag{2.7}$$

Nesigurnost u m je parametarska nesigurnost dok su dinamika motora, mjereni šum, dinamika senzora, neprametarske nesigurnosti.Naprimjer m moze biti negdje između 2 do 5 kg. Karakteriziranje nemodelirane dinamike je često teže za nelinearne sisteme nego za linearne gdje se jednostavno to može analizirati u frekventnom domenu. (E.Slotine i Li 1990.)

2.3.3. Pozitivna i negativna povratna sprega

U nelinearnom upravljanju, koncept negativne povratne sprege igra ključnu ulogu pri dizajnu regulatora, kao i u linearnom upravljanju. Međutim, važnost pozitivne povratne sprege je veća nego kod linearnog upravljanja. Pozitivna povratna sprega se koristi da poništi efekte poznatih smetnji i omogući previđene akcije u zadacima praćenja. Veoma često je nemoguće obezbijediti stabilno upravljanje nelinearnim sistemom bez uključivanja pozitivne povratne sprege u zakon upravljanja.Model procesa se uvijek zahtijeva ukoliko želimo koristiti kompenzaciju pozitivnom povratnom spregom (međutim on ne mora biti tačan).

Asimptotsko praćenje uvijek zahtijeva pozitivnu povratnu spregu da bi se proizvele odgovarajuće sile neizostavne za zahtjevano kretanje. Kontroleri za praćenje se mogu napisati u formi:

u = feedback + feedforward

ili na sličan način. Dio pozitivne povratne sprege nastoji obezbijediti potrebni ulaz da bi se omogućilo praćenje specificirane trajektorije kretanja i poništavanje efekata poznatih smetnji. Dio negativne povratne sprege stabilizira dinamiku greške praćenja. (E.Slotine i Li 1990.)

2.3.4. Bitnost fizičkih osobina procesa

U linearnom upravljanju, poznata je praksa generiranja grupe diferencijalnih jednačina za fizički sistem i onda se obično zaboravi kako su one dobijene. To nije veliki problem, ako ništa ne u teorijskom smislu, jer linearna teorija upravljanja omogućava moćne alate za analizu i dizajn. Međutim, ovo je jako nepoželjno za nelinearne sistema, jer broj alata za rješavanje nelinearnih problema je ograničen. U dizajnu nelinearnog sistema upravljanja, poznavanje fizičkih karakteristika procesa nekada može dizajn kontrolera za komplikovani nelinearni proces učiti jednostavnim. Naprimjer, adaptivno upravljanje robotskim manipulatorom korištenjem konvencionalne adaptivne teorije upravljanja je dosta komplikovano, jer dinamika robota je jako nelinearna i ima nekoliko ulaza. Međutim, upotreba dvije fizičke karakteristike, pozitivna definitnost inercijalne matrice i mogućnost linearnog parametriziranja robotske dinamike, su uspješno dovele do sinteze adaptivnog kontrolera sa željenim zahtjevima globalne stabilnosti i konvergencije praćenja. (E.Slotine i Li 1990.)

2.3.5. Diskretna implementacija

Nelinearni sistemi su kontinualni po svojoj prirodi i teško ih je diskretizovati, dok digitalni sistemi upravljanja mogu biti tretirani kao kontinualni vremenski sistemi ako je korištena velika frekvencija sempliranja. Ipak, analiza i sinteza regulatora za nelinearni sistem se izvodi u kontinualnoj formi. Naravno, zakon upravljanja je implementiran digitalno. (E.Slotine i Li 1990.)

2.4. Dostupne metode za sintezu nelinearnog sistema upravljanja

Ne postoji neka univerzalna metoda koja se koristi za dizajn nelinearnih regulatora. Postoje samo kolekcija alternativnih i komplementarnih tehnika, koje su primjenljive za određene klase nelinearnih sistema upravljanja.

Neke od metoda su:

Trial-and-error

Ideja je da se koriste alati za analizu da bi se odredio kontroler koji može odgovarati toj analizi i simulaciji.Metod fazne ravni, metod opisne funkcije,i analiza Ljapunova mogu biti korištene za ovu svrhu. Iskustvo i intuicija su bitne za ovaj proces. Međutim ovaj metod se ne može koristiti kada je riječ o kompleksim sistemima.

Linearizacija sistema sa negativnom povratnom spregom

Prvo korak u dizajnu je određivanje modela sistema, modela koji opisuje ključnu dinamiku sistema u operacijskom području od interesa. Linearizacija negativne povratne sprege zapravo koristi tehnike *transformacije orginalnog modela sistema i ekvivalentne modele sa jednostavnijom formom.*

Osnovna ideja je da se transformiše nelinearni sistem u linearni sistem , i onda da se koriste dobro poznate i moćne tehnike linearne sinteze da se kompletira dizajn regulatora. Moguće je primijeniti ovu metodu na važne klase nelinearnih sistema (tzv. Ulaz-stanje linearizabilni ili minimalno-fazni sistemi), i uglavnom zahtijeva mjerenje svih stanja. Međutim, ne garantuje robusnot u pogledu parametarske nesigurnosti ili smetnji.

Robusno upravljanje

Kod ovog upravljanja regulator je dizajniran na osnovu razmatranja nominalnog modela ali i modelskih nesigurnosti. Koristi se za neke specifične klase nelinearnih sistema i zahtjeva mjerenje stanja.

Adaptivno upravljanje

Ovaj način upravljanja se nosi sa nesigurnim/promjenljivim procesima ili sistemima koji se mijenjaju u vremenu. Adaptivni kontroler je inherentno nelinearan bez obzira da li je razvijen za nelinearni ili linearni sistem.Postojeće tehnike adaptivnog upravljanja se mogu koristiti za neke klase nelinearnih sistema. Za ove nelinearne sisteme adaptivno upravljanje alternativni i komplementarni pristup robusnim kontrolnim tehnikama, s kojima može biti efektno kombinirano.

Raspored pojačanja

Ovo je pokušaj primjene dobro razvijenih nelinearnih tehnika za kontrolu nelinearnih sistema. Ideja je da se izabere nekoliko radnih tačaka koje pokrivaju radni prostor sistema. Onda, dizajner za svaku ovu tačku napravi linearnu vremenski invarijantnu aproksimaciju za dinamiku procesa i dizajnira linearni kontroler za svaki linearizirani proces. Između radnih tačaka, parametri kompenzatora su onda interpolirani, ili raspoređeni, te je dobijen globalni kompenzator.

U narednom poglavlju će biti opisana metoda linearizacije sistema sa negativnom povratnom spregom. (E.Slotine i Li 1990.)

3. Linearizacija sistema sa negativnom povratnom spregom

Ovo je zapravo način transformisanja orginalnog modela sistema u neki ekvivalentni model s jednostavnijom formom. Ova metoda je *potpuno drukčija od konvencionalne (Jakobijan) linearizacije, jer je linearizacije sistema sa negativnom povratnom spregom postignuta tačnom transformacijom stanja i negativne povratne sprege, nego linearnom aproksimacijom dinamike.*Dakle, osnovna ideja je *algebarska transformacija nelinearnog sistema i njegove dinamike (potpuno ili djelimično) u linearni sistem,* tako da se mogu primijeniti dobro poznate metode linearnog upravljanja.

Osnovna ideja pojednostavljenja forme sistema odabirajući različito stanje nije potpuno nepoznata, to je slično odabiru referentnog koordinatnog sistema u mehanici.

Koristi se kod upravljanja helikopterima, avionima sa visokom performansom, industrijskim robotima, biomedicinskim uređajima, kontrolom vozila itd. Također, postoji nekoliko nedostataka i ograničenja kod ovog pristupa, koji su još uvijek tema istraživanja.

U nastavku će biti predstavljeni neki osnovni koncepti linearizacije negativnom povratnom spregom i adekvatni primjeri, linearizacija negativnom povratnom spregom kod SISO sistema, itd.

Razmatra se klasa nelinearnih sistema oblika:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \qquad 3.1$$

i da li postoji zakon upravljanja po stanju sa negativnom povratnom spregom:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \qquad 3.2$$

i promjena varijabli

$$z = T(x) \qquad 3.3$$

koja transformira nelinearni sistem u ekvivalentni linearni sistem. (K.Khalil 2002.)

3.1. Linearizacija povratnom spregom po stanju

Kako bi se predstavila ideja o linearizaciji sa negativnom povratnom spregom, počet će se sa problemom stabilizacije jednačine klatna:

$$\dot{x_1} = x_2 \qquad 3.4$$

$$\dot{x_2} = -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta] - bx_2 + cu$$

Pregledanjem jednačine stanja vidimo da možemo u izabrati kao

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta] + \frac{v}{c} \qquad 3.5$$

Kako bismo poništili nelinearnost $a[\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta]$. Ovim poništavanjem dobijemo linearan sistem

$$\dot{x_1} = x_2 \qquad 3.6$$
$$\dot{x_2} = -bx_2 + v$$

te je stabilizacijski problem nelinearnog sistema reduciran na stabilizacijski problem kontrolabilnog linearnog sistema. Dalje možemo dizajnirati stabilizacioni linearni sistem upravljanja s povratnom spregom po stanju:

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 \qquad 3.7$$

da bismo loclirali svojstvene vrijednosti sistema u zatvorenom

$$\dot{x_1} = x_2 \qquad 3.8$$
$$\dot{x_2} = -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2$$

u lijevoj poluravni sistema u otvorenom, gdje je v ekvivalentni ulaz koji je potrebno dizajnirati koji dovodi do linearne relacije između ulaza i stanja. Na kraju zakon upravljanja s povratnom spregom po stanju je dat kao:

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta] - \frac{1}{c}[k_1x_1 + k_2x_2] \qquad 3.9$$

Postavlja se pitanje koliko je univerzalna ova ideja o poništavanju nelinearnosti? Jasno, ne možemo očekivati da možemo poništiti nelinearnosti u svakom nelinearnom sistemu.Mora postojati određena osobina u strukturi sistema koja nam dozvoljava ovo poništavanje. Nije teško uočiti da se poništavanje nelinearnosti $\alpha(x)$ oduzimanjem, upravljački ulaz u i nelinearnost $\alpha(x)$ moraju se uvijek zajedno pojaviti kao suma $u + \alpha(x)$. Da bi se poništila nelinearnost $\gamma(x)$ dijeljenjem, upravljački ulaz u i nelinearnost $\gamma(x)$ moraju se uvijek pojaviti kao produkt $\gamma(x)u$. Ukoliko je matrica $\gamma(x)$ nesingularna u posmatranoj domeni, onda može biti poništena kao $u = \beta(x)v$, gdje je $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ tj. inverzna matrica matrice $\gamma(x)$.Mogućnost korištenja povratne sprege da bi konvertovali nelinearnu jednačinu stanja u kontrolabilnu linearnu jednačinu stanja poništavanjem nelinearnosti zahtjeva se da nelinearna jednačina stanja ima sljedeću strukturu:

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \qquad 3.10$$

Gdje je matrica A n x n, a matrica B n x p, par (A,B) je kontrolabilan, funkcije $\alpha: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^p$ i $\gamma: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{pxp}$ su definirane u domenu $D \subset \mathcal{R}^n$, i matrica $\gamma(x)$ je nesingularna za $x \in D$.Ukoliko jednačina stanja ima formu kao u jednačini 3.10.onda se može linearizirati koristeći povratnu spregu po stanju kao:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{3.11}$$

Gdje je $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ da bismo dobili linearnu jednačinu stanja

$$\dot{x} = Ax + Bv \tag{3.12}$$

Za stabilizaciju, dizajniramo $v = -Kx$ takvo da je $A - BK$ je Hurwitz. Na kraju nelinearno stabilizacijsko upravljanje koristeći povratnu spregu po stanju je:

$$u = \alpha(x) - \beta(x)Kx \tag{3.13}$$

Ukoliko pretpostavimoda nelinearni sistem nije opisan jednačinom 3.10. postavlja se pitanje da li to znači da se sistem ne može linearizirati koristeći negativnu povratnu spregu. Odgovor je da može.Podsjetimo se da model stanja sistema nije jedinstven. Zavisi od odabira varijabli stanja. Ukoliko model stanja sistema nije opisan jednačino 3.10. za jedan odabir varijabli stanja, za drugi odabir varijabli stanja može biti. Naprimjer ukoliko posmatramo sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a \sin x_2 \\ \dot{x_2} &= -x_1^2 + u \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ne može se jednostavno izabrati upravljački ulaz u sistem koji će poništiti nelinearnost $a \sin x_2$. Međutim, ukoliko promijenimo varijable transformacijama

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x_1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

onda z_1 i z_2 zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= a \cos x_2(-x_1^2 + u) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pa nelinearnost može biti poništena ulazom:

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v \tag{3.17}$$

što je definirano za $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$. Jednačina stanja u novim koordinatama (z_1,z_2) može biti određena invertovanjem da se izraze (x_1,x_2) u zavisnosti od (z_1,z_2), to je:

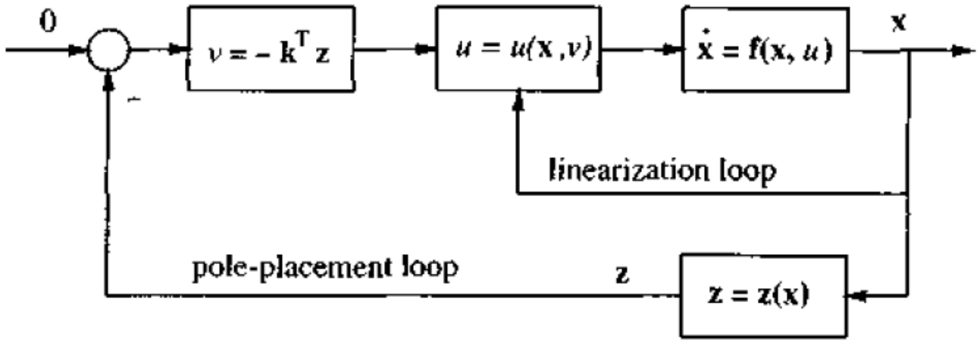
$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \sin^{-1} \frac{x_2}{a} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Što je definirano za $-a < z_2 < a$. Transformirana jednačina stanje je data kao:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = a\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\right)(-z_1^2 + u) \quad 3.19$$

Kroz transformaciju stanja u relaciji 3.15. i transformacija ulaza u 3.17. problem stabilizacije orginalne nelinearne dinamike koristeći orginalni ulaz u je transformisan u problem stabilizacije nove dinamike koristeći ulaz v.

Zatvoreni sistem koji je upravljan predhodnim zakonom je prikazan na blok dijagramu na slici 3.1. Možemo uočiti dvije petlje u ovom sistemu upravljanja, unutrašnja petlja koja linearizira relaciju ulaz-stanje i vanjska petlja koja omogućava stabilizaciju dinamike sistema u zatvorenom. Ovo je konzistentno sa relacijom 3.17., gdje je upravljački ulaz u sastavljen od nelinearnog dijela koji se poništava i linearnog kompenzacijskom dijela. (K.Khalil 2002.)



Slika 3.1. Linearizacija povratnom spregom po stanju

Kada je korištena promjena varijabli $z = T(x)$ da bi se transformisala jednačina stanja iz x koordinata u z koordinate, preslikavanje T mora biti invertabilno, tj. mora postojati inverzno preslikavanje $T^{-1}(.)$ takvo da $x = T^{-1}(z)$ za svako $z \in T(D)$, gdje je D domen od T.Štaviše, kako derivacije z i x moraju biti neprekidne, zahtijeva se da i $T(.)$ i $T^{-1}(.)$ budu neprekidno diferencijabilne. Neprekidno diferencijabilno preslikavanje sa neprekidno diferencijabilnim inverznim preslikavanje se naziva *difeomorfizam.* Preslikavanje T je globalni difeomorfizam ukoliko je difeomorfizam na R^n, tj. $T(R^n) = R^n$. Sada imamo sve uslove kako bismo mogli definirati sisteme linearzibilne negativnom povratnom spregom.

Nelinearni sistem

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad 3.20$$

Gdje su $f: D \to \mathcal{R}^n$ i $G: D \to \mathcal{R}^{nxp}$ dovoljno glatki na domenu $D \subset \mathcal{R}^n$, je linearizibilan negativnom povratnom spregom ukoliko postoji difeomorfizam $T: D \to \mathcal{R}^n$ takav da $D_z = T(D)$ sadrži početne varijable i promjenu varijabli $z = T(x)$ koje transformiraju sistem 3.20. u oblik

$$\dot{z} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad 3.21$$

Sa kontrolabilnim (A,B) i nesingularnim $\gamma(x)$ za svako $x \in D$.

Međutim, ukoliko su izlazne varijable od interesa, kao u problemima praćenja, model stanja sistema je opisan i izlaznom jednačinom. Lineariziranje jednačine stanja sistema nelinearizira nužno i jednačinu izlaza.

Nekada je korisnije linearizirati preslikavanje ulaz-izlaz iako dio jednačine stanja ostaje nelinearan. U ovom slučaju za sistem se kaže da je linearizibilan po preslikavanju ulaz-izlaz.Nekada linearizacija ulaz-izlaz neće obuhvatiti cijelu dinamiku sistema. Može se desiti da neko stanje sistema ne bude povezano sa izlazom nakon linearizacije i u tom slučaju linearizacija korištenjem negativne povratne sprege je učinila da to stanje bude neobservabilno za izlaz. U tom slučaju kada dizajniramo sistem praćenja moramo omogućiti da to stanje ima dobro ponašanje, da je stabilno i ograničeno u nekom smislu.Ukoliko dizajniramo sistem upravljanja sa ulaz-izlaz linearizacijom može se desiti to stanje stalno raste. Ovaj problem unutrašnje stabilnosti se može riješiti koristeći koncept nulte dinamike.

Veza između linearizacije povratnom spregom po stanju i linearizacije povratnom spregom po izlazu je data sljedećom lemom:

Nelinearni sistem n-tog reda je linearizibilan povratnom spregom po stanju ako i samo ako postoji skalarna funkcija $z_1(x)$ takva da linearizacija sistema povratnom spregom po izlazu sa $z_1(x)$ kao izlaznom funkcijom ima relativni stepen n. (E.Slotine i Li 1990.) (K.Khalil 2002.)

3.1.1. Uslovi za linearizaciju povratnom spregom po stanju

Nelinearni sistem dat jednačinom 3.1., gdje su f(x) i G(x) glatka vektorska polja, je linearizbilan povratnom spregom po stanju ako i samo ako postoji područje Ω takvo da vrijede sljedeći uslovi:

- *Vektorska polja* $\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}\}$ *su linearno nezavisni u* $\mathbf{\Omega}$.
- *Grupa* $\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$ *su involutivni u* $\mathbf{\Omega}$.

Prvi uslov predstavlja uslov kontrolabilnosti za nelinearne sisteme. Za linearne sisteme $\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}\}$ postaje poznata matrica kontrolabilnosti $\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{Ab^{n-1}}\}$. Kako znamo nelinearni sistem može biti kontrolabilan dok njegova linearna aproksimacija ne mora biti. Međutim ovaj prvi uslov predstavlja uopšteni uslov kontrolabilnosti.

Uslov involutivnosti je manje intuitivan. Uvijek je zadovoljen za linearne sisteme (koji imaju konstantna vektorska polja), ali nije uvijek generalno zadovoljen u nelinearnim sistemima.

Ukoliko je z(x) glatka funkcija na Ω. Onda, na Ω, grupa jednačina data kao:

$$L_g z = L_g L_f z = \cdots = L_g L_f^k z = 0 \qquad 3.22$$

Je ekvivalentno

$$L_g z = L_{ad_f g} z = \cdots = L_{ad_f^k g} z = 0 \qquad 3.23$$

Za bilo koji pozitivan prirodan broj k.

Koristeći predhodnu lemu ukoliko koristimo $z = \begin{bmatrix} z_1 & L_f z_1 & L_f^{n-1} z_1 \end{bmatrix}^T$ kao novi set varijabli stanja, prva *n-1* jednačina stanja je $\dot{z_k} = z_{k+1} \quad k = 1, \dots, n-1$. Zadnja jednačina je data kao:

$$\dot{z_n} = L_f^n z_1 + L_g L_f^{n-1} z_1 u \qquad 3.24$$

Sada se postavlja pitanje da li $L_g L_f^{n-1} z_1$može biti jednako nuli.Kako su vektorska polja $\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1} \mathbf{g}\}$ linearno nezavisna u Ω, imamo da je:

$$L_g L_f^{n-1} z_1 = (-1)^{n-1} L_{ad_f^{n-1} g} z_1 \qquad 3.25$$

moramo imati da je

$$L_{ad_f^{n-1} g} z_1(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \Omega \qquad 3.26$$

U suprotnom ne-nulti vektor ∇z_1 zadovoljava

$$\nabla z_1 \left[\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1} \mathbf{g} \right] = 0 \qquad 3.27$$

i ortogonalan je na *n* linearno nezavisnih vektora.

Primjenom upravljačkog zakona:

$$u = \left(-L_f^n z_1 + v\right) / \left(L_g L_f^{n-1} z_1\right) \qquad 3.28$$

jednačina 3.24. postaje

$$\dot{z_n} = v \qquad 3.29$$

što pokazuje da je linearizacija sistema povratnom spregom po stanju postignuta.

Operatori korišteni za objašnjavanje predhodnih uslova su operatori diferencijalne geomtrije i sada će oni biti ukratko objašnjeni.

- Ukoliko imamo glatku skalarnu funkciju *h(x)* stanja ***x***, gradijent od *h* je određen kao $\nabla \mathrm{h} = \frac{\partial h}{\partial x}$ Gradijent predstavlja vektor-red elemenata $(\nabla \mathrm{h})_j = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}_j}$.
- Slično, ukoliko je dato vektorsko polje ***f****(x)*, Jakobijan od ***f*** je dat kao $\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x}$ što predstavlja matricu sa *n x n* elemenata.
- Ukoliko je data skalarna funkcija ***h(x)*** i vektorsko polje ***f(x),*** može se definirati nova skalarna funkcija $L_f h$ koja se derivacija od *h* u po ***f,*** tj.
  $L_{\boldsymbol{f}} h = \nabla h \boldsymbol{f}.$
  Uzastopne derivacije se mogu izračunati rekurzivno kao
  $L_{\boldsymbol{f}}^0 h = h$, $L_{\boldsymbol{f}}^i h = L_{\boldsymbol{f}}\left(L_{\boldsymbol{f}}^{i-1} h\right) = \nabla\left(L_{\boldsymbol{f}}^{i-1} h\right) \boldsymbol{f}$

Slično, ukoliko je $\boldsymbol{g}$ drugo vektorsko polje, onda je skalarna funkcija $L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}} h(x)$ data kao $L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}} h = \nabla (L_{\boldsymbol{f}} h) \boldsymbol{g}$.
Naprimjer, ukoliko je dat sistem s jednim izlazom kao $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ y = h(x)$
onda derivacije po izlazu su
$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{\boldsymbol{x}} = L_{\boldsymbol{f}} h, \quad \ddot{y} = \frac{\partial (L_{\boldsymbol{f}} h)}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} = L_{\boldsymbol{f}}^2 h$ itd.

- Neka su $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{g}$ dva vektorska polja u R^n. Onda je 'zagrada' ova dva vektorska polja, trće vektorsko polje dato kao $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = \boldsymbol{\nabla g f} - \boldsymbol{\nabla f g}$ može se zapisati i kao $ad_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{g}$ gdje ad znači „adjoint“ . Rekurzivno se dobije:
  $ad_f^0 \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$
  $ad_f^i \boldsymbol{g} = [\boldsymbol{f}, ad_f^{i-1} \boldsymbol{g}]$
  'Zagrade' imaju sljedeće osobine:
  i. *bilinearnost:*
     $[b_1 \boldsymbol{f_1} + b_2 \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{g}] = b_1 [\boldsymbol{f_1 g}] + b_2 [\boldsymbol{f_2 g}]$
     $[\boldsymbol{f}, b_1 \boldsymbol{g_1} + b_2 \boldsymbol{g_2}] = b_1 [\boldsymbol{g_1 f}] + b_2 [\boldsymbol{g_2 f}]$, b_1 i b_2 su konstane.
  ii. *inverzna komutativnost*
     $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}]$
  iii. *Jakobijanov identitet*
     $L_{ad_{\boldsymbol{f}} g} h = L_{\boldsymbol{f}} L_{\boldsymbol{g}} h - L_{\boldsymbol{g}} L_f h$, h je glatka skalarna funkcija od $\boldsymbol{x}$. (E.Slotine i Li 1990.)

3.2. Linearizacija povratnom spregom po izlazu

Ukoliko imamo SISO sistem (eng. single-input-single-output) tj. jedan uzlaz – jedan izlaz, dat kao

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad 3.30$$
$$y = h(x)$$

gdje su *f*, *g*, *h* dovoljno glatke na domenu $D \subset \mathcal{R}^n$. Preslikavanja $f: D \to \mathcal{R}^n$ i $g: D \to \mathcal{R}^n$ su vektorska polja domena *D*.

Naš cilj je da učinimo da izlaz *y(t)* prati željenu trajektoriju $y_d(t)$ pri čemu drži cijelo stanje ograničenim, gdje su $y_d(t)$ i njene derivacije do visokog reda poznate i ograničene. Očigledna poteškoća koja se javlja s ovim modelom je ta što je izlaz *y* neindirektno povezan s ulazom *u*, preko varijable stanja $\boldsymbol{x}$ i nelinearne jednačine stanja 3.22. Nadalje, nije lahko uočiti kako upravljački ulazni signal *u* može biti dizajniran da upravlja ponašanjem praćenja izlaznog signala *y*. Problem u dizajnu praćenja može biti smanjen ukoliko možemo pronaći direktnu i jednostavnu relaciju između izlaznog signala sistema *y* i upravljačkog ulaznog signala *u*. Ovo predstavlja intuitivnu, osnovnu ideju tzv. linearizacije povratnom spregom po izlazu kod dizajnirana nelinearnog upravljanja. Ovu linearizaciju možemo pokazati na sljedećem primjeru:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x_2} &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x_3} &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad 3.31$$

Da bismo generirali direktnu vezu između izlaza y i ulaza u, prvo ćemo diferencirati izlaz y

$$\dot{y} = \dot{x_1} = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \quad 3.32$$

Kako $\dot{y}$ nije direktno povezan s ulazom u, deferencirat ćemo ponovo. Pa sada imamo

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(x) \quad 3.33$$

Gdje je $f_1(x)$ data kao:

$$f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 \quad 3.34$$

Vidimo da jednačina 3.25. ima sada eksplicitnu vezu između y i u. Ukoliko sada odaberemo ulaz u kao:

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1) \quad 3.35$$

Gdje je *v* novi ulaz koji trebamo odrediti, nelinearnost u 3.25. je poništena, pa mi pretpostavimo jednostavni linearni dvostruki integrator da bude veza između izlaza *y* i novog ulaza *v*:

$$\ddot{y} = v \quad 3.36$$

Dizajn kontrolera za praćenja za ovu relaciju dvostrukog integratora je jednostavan, jer možemo koristiti linearne tehnike. Neka je greška praćenja data kao $e(t) = y(t) - y_d(t)$ i ako odaberemo ovi ulaz *v* kao:

$$v = \ddot{y_d} - k_1 e - k_2 \dot{e} \quad 3.37$$

Gdje su k_1 i k_2 pozitivne konstante, sada je greška praćenja sistema u zatvorenom data kao:

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad 3.38$$

Koja prezentira eksponencijalno stabilnu dinamiku greške. Ukoliko je početno stanje dao kao $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, onda je $e(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$, dosegnuto je savršeno praćenje, u suprotnom *e(t)* konvergira ka nuli eksponencijalno.

Zapamtimo:

- Zakon upravljanja je svugdje definiran, izuzev singularnih tačaka kao što je $x_2 = -1$.

- Mjerenje svih stanja je neophodno za implementaciju zakona upravljanja, jer i proračun derivacije $\dot{y}$ i ulazne transformacije zahtijeva vrijednosti ***x.***

Ova strategija koja je predstavljena kroz predhodni primjer, gdje se prvo generira linearna veza ulaz-izlaz pa se nakon toga sintetizira kontroler koristeći linearne alate sinteze, naziva se linearizacija povratnom spregom po izlazu i može se primijeniti na monoge sisteme, SISO sisteme, kao i MIMO sisteme. Ukoliko moramo da diferenciramo izlaz sistema *r* puta da bismo dobili ekspicitnu vezu između ulaza i izlaza, onda kažemo da sistem ima ***relativni stepen r.***To se može definirati i na sljedeći način:

Derivacija $\dot{y}$ je data kao

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \stackrel{\text{def}}{=} L_f h(x) + L_g h(x)u \qquad 3.39$$

gdje je

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \qquad 3.40$$

i zove se kao „lažna derivacija“ od h u odnosu na f ili duž *f.* Ovo je pojam koji predstavlja derivaciju h duž trajektorija sistema $\dot{x} = f(x)$.

Može se pokazati provođenjem odgovarajućeg proračuna da se ulaz u ne pojavljuje u $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ ali se pojavljuje u izrazu za $y^{(\rho)}$ sa nenultim koeficjentom:

$$y^{(\rho)} = L_f^{\rho} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u \qquad 3.41$$

gdje je $L_f^{\rho} = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial\left(L_f^{k-1} h\right)}{\partial x} f(x)$, a $L_f^0 h(x) = h(x)$.

Jednačina 3.25. pokazuje da je sistem linearizibilan relaciji ulaz-izlaz, s obzirom da povratna sprega po stanju

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}\left[-L_f^{\rho} h(x) + v\right] \qquad 3.42$$

reducira preslikavanje ulaz-izlaz na

$$y^{(\rho)} = v \qquad 3.43$$

Za nelinearni sistem dat jednačinom 3.22. kažemo da ima relativni stepen $\rho, 1 \leq \rho \leq n$ u regiji $D_0 \subset D$ ukoliko vrijedi

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1,2, \dots, \rho - 1 \ ; \ L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \qquad 3.44$$

Za svako $x \in D_0$.

Neka je dat primjer, kontrolirani Van der Polov sistem, i za njega ćemo odrediti relativni stepen:

$$\dot{x_1} = x_2 \qquad 3.45$$
$$\dot{x_2} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

sa izlazom $y = x_1$. Računajući derivacija izlaza, imamo

$$\dot{y} = \dot{x_1} = x_2 \qquad 3.46$$
$$\ddot{y} = \dot{x_2} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

dakle, sistem ima relativni stepen dva u R^2.Ukoliko je ulaz u sistem sada $y = x_2$, imamo

$$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \qquad 3.47$$

pa sistem ima relativni stepen jedan u R^2. Za izlaz $y = x_1 + x_2^2$ imamo

$$\dot{y} = x_2 + 2x_2[-x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u] \qquad 3.48$$

i sistem ima relativni stepen jedan u $D_0 = \{x \in R^2 |\ x_2 \neq 0\}$.

Sistem dat jednačinom 3.23. ima relativni stepen 2. Ova terminologija je konzistentna sa relativnim stepenom za linearne sisteme (broj polova u odnosu na broj nula). Također, može se pokazati da za svaki kontrolabilan sistem reda n, potrebno je barem n diferencijacija bilo kojeg izlaza da bi se pojavio ulaz u toj relaciji $r \leq n$. Ovo možemo razumjeti intuitivno, ukoliko je potrebno više od n diferenciranja, sistem bi trebao biti većeg reda od reda n, ukoliko se ulaz ne pojavi ni u jednoj relaciji, sistem je nekontrolabilan.

Može se učiniti da je dizajn kontrolera praćenja sistema dat jednačinom 3.23. elegantno riješen upravljačkim zakonom iz jednačine 3.27. i 3.29.. Međutim, moramo zapamtiti da jednačina 3.30. vrijedi samo za dio dinamike koja je zatvorena negativnom povratnom spregom, jer je reda dva, dok je cijela dinamika opisana sistemom reda tri. Nadalje, dio dinamike sistema (koja je opisana s jednom komponentom stanja) je bila označena kao „neobservabilna“ u linearizaciji sistema povratnom spregom po izlazu. Ovaj dio dinamike se naziva ***unutrašnjom dinamikom*** sistema, jer je ne možemo vidjeti u relaciji koja daje vezu između ulaza i izlaza. U primjeru dat jednačinom 3.23., unutrašnje stanje može biti stanje x_3,(jer $x_3, y,$ i $\dot{y}$ sačinjavaju novi set stanja), pa je unutrašnja dinamika predstavljena jednačinom:

$$\dot{x_3} = x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 1}\ddot{y_d}(t) - k_1 e - k_2 \dot{e} + f_1 \qquad 3.49$$

Ukoliko je ova unutrašnja dinamika stabilna (što zapravo znači da stanje ostaje ograničeno tokom praćenja, stabilnost u BIBO smislu), onda naš problem upravljanja praćenjem je riješen. U suprotnom, dizajnirani kontroler praćenja je praktično besmislen, jer nestabilnost unutrašnje dinamike će prouzrokovati neželjeni fenomen kao naprimjer spaljivanje osigurača ili velike vibracije mehaničkih dijelova. *Efektivnost predhodno dizajniranog kontrolera, koji je baziran na snižavanju reda modela, zavisi od stabilnosti unutrašnje dinamike*.

Iako je motivacija za linearizaciju povratnom spregom po izlazu proizašla zbog dizajniranja sistema praćenja, može se koristiti također za stabilizacijske probleme. Naprimjer, ukoliko je $y_d(t) \equiv 0$ željena trajektorija kretanja sistema iznad, dva stanja y i $\dot{y}$ sistema u zatvorenom će pasti na nulu koristeći upravljački zakon 3.29. koji implicira stabilizaciju cijelog sistema pri čemu će i unutrašnja dinamika biti stabilna. Ukoliko koristimo linearizaciju sistema povratnom spregom po stanju onda vrijede dvije činjenice. Prva, ne postoji razlog zbog kojeg bismo ograničili izlaz *y=h(x)* tako da ima neko fizikalno značenje. Druga, različiti odabiri funkcije izlaza vode različitoj unutrašnjoj dinamici, neki mogu voditi stabilnoj neki nestabilnoj dinamici.

Za linearni sistem stabilnost unutrašnje dinamike je jednostavno određeno lokacijom nula, zanimljivo je vidjeti da li se ovo može proširiti na nelinearne sisteme. Prije svega je potrebno definisati nule za nelinearni sistem pa tek onda definisati koncept stabilnosti. Proširivanje pojma nule na nelinearni sistem nije jednostavan postupak. Prenosna funkcija, iz koje očitavamo nule linearnog sistema, nije definirana za nelinearni sistem. Nule predstavljaju unutrašnju osobinu linearnog procesa, dok kod nelinearnog sistema stabilnost unutrašnje dinamike može zavisiti od vrste upravljačkog ulaza. Da bismo pokušali riješiti ovaj problem definira se tzv. ***nulta dinamika za nelinearni sistem.*** *Nulta dinamika predstavlja unutrašnju dinamiku sistema kada je izlaz iz sistema održavan na nuli od strane ulaza u sistem*. Sistem koji ima nultu dinamiku kažemo da je ***minimalno-fazni sistem.***

Pored linearizacije povratnom spregom po stanju i linearizacije povratnom spregom po izlazu, postoji i ***linearizacije povratnom spregom po svim stanjima*** koja ovdje neće biti razmatrana. (K.Khalil 2002.) (E.Slotine i Li 1990.) (A.Girard 2005.)

3.3. Primjer linearizacije sistema

Korištena je linearizacija sistema povratnom spregom po stanju.

- Prvo će biti konstruisan vektor $\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g}, \dots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}$ za dati sistem
- Provjerit ćemo uslove za linearizaciju navedene u potpoglavlju 3.1.1.
- Ukoliko su oba uslova zadovoljna, pronaći ćemo prvo stanje z_1 koristeći jednačinu 3.21.

$$\nabla z_1 \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{i}\mathbf{g} = 0\,, \qquad i = 0, \dots n-2 \tag{3.50}$$

$$\nabla z_1 \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g} \neq 0\,, \qquad i = 0, \dots n-2 \tag{3.51}$$

- Izračunamo transformaciju $z = \begin{bmatrix} z_1 & L_f z_1 & L_f^{n-1} z_1 \end{bmatrix}^T$ i transformaciju ulaza prema jednačini 3.11. kao

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \tag{3.52}$$

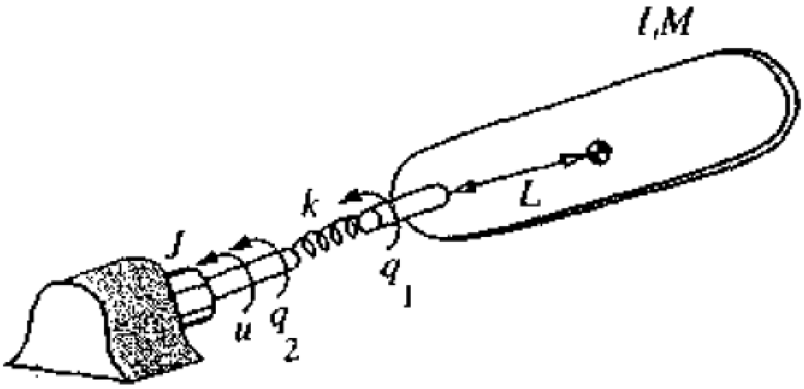
$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \tag{3.53}$$

Sada će ova procedura biti demonstrirana na konkretnom primjeru *[Marion and Spong, 1986; Spong and Vidyasagar, 1989.]*.

Dat je mehanizam na slici 3.2. koji je zapravo predstavlja vezu između dva kruta dijela pri čemu je drugi kruti dio pokretan motorom preko torzione opruge (robot s jednim fleksibilnim dijelom) u vertikalnoj ravni. Jednačine kretanja ovog robota su:

$$J\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) \tag{3.54}$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \tag{3.55}$$



Slika 3.2. Mehanizam s jednim felksibilnim dijelom

Zbog nelinearnosti (uzrokovane gravitacionim momentima) koji se javljaju u prvoj jednačini, dok upravljački ulaz u imamo samo u drugoj jednačini (3.55.), ne postoji očigledan način dizajniranja kontrolera velikog opsega za ovaj mehnizam. Sada ćemo razmotriti da li je moguća linearizacija povratnom spregom po stanju.

Prvo ćemo sistem zapisati u prostoru stanja. Gdje je vektor stanja dat kao: $\boldsymbol{x} = [q_1 \;\; \dot{q}_1 \;\; q_2 \;\; \dot{q}_2]^T$ korespodentna vektorska polja **f** i **g** su data kao:

$$\boldsymbol{f} = \left[x_2 \quad -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J}(x_1 - x_3)J^T \quad \right] \tag{3.56}$$

$$\mathbf{g} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{1}{J}]^T \tag{3.57}$$

Sada ćemo provjeriti uslove kontrolabilnosti i involutivnosti. Kontrolabilna matrica je

$$[\mathbf{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & O & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & O & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \qquad 3.58$$

Matrica ima rang 4 za $k > 0\,, J < \infty$.Nadalje kako su vektorska polja $[\mathbf{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}]$ konstantna, formiraju i involutivan set vektora. Pa je sistem dat jednačinama 3.54. i 3.55. linearizibilan povratnom spregom po stanju.

Sljedeći korak je da pronađemo transformaciju *z=z(x)* i transformaciju ulaza $u = \alpha(x) + \beta(x)v$. Iz jednačine 3.50. i 3.51. i izraza za kontrolabilnu matricu, prva komponenta z_1 novog vektora stanja ***z*** bi trebala zadovoljavati

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$$

Tj. z_1 mora biti funkcija od x_1 samo

$$z_1 = x_1 \qquad 3.59$$

Drugo stanje može biti određeno pomoću z_1

$$z_2 = \nabla z_1 \mathbf{f} = x_2 \qquad 3.60$$

$$z_3 = \nabla z_2 \mathbf{f} = -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \qquad 3.61$$

$$z_4 = \nabla z_3 \mathbf{f} = -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \qquad 3.62$$

Ulazna transformacija je

$$u = (v - \nabla z_4 \mathbf{f})/(\nabla z_4 \mathbf{g}) \qquad 3.63$$

Što može eksplicitno biti zapisano kao:

$$u = \frac{IJ}{K}(v - a(x)) \qquad 3.64$$

gdje je

$$a(x) = \frac{MgL}{I}\sin x_1 \left(x_2^2 + \frac{MgL}{I}\cos x_1 + \frac{k}{I}\right) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3)\left(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I}\cos x_1\right)$$

Kao rezultat predhodnih transformacija stanja i ulaza dobijemo sljedeće linearne jednačine:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = z_3$$
$$\dot{z}_3 = z_4$$
$$\dot{z}_4 = v$$

Pa je linearizacija završena. (E.Slotine i Li 1990.)

3.3.1. Zaključak

Predhodna linearizacija je globalna, jer je z(x) difeomorfizam i ulazna transformacija je definirana svugdje. Inverzna transformacija stanja

$$x_1 = z_1 \tag{3.65}$$

$$x_2 = z_2 \tag{3.66}$$

$$x_3 = z_1 + \left(z_3 + \frac{MgL}{I}\sin z_1\right) \tag{3.67}$$

$$x_4 = z_2 + \left(z_4 + \frac{MgL}{I}z_2\cos z_1\right) \tag{3.68}$$

je definirana svugdje i diferencijabilna. Također ulazna transformacija je svugdje definirana.

U ovom primjeru transformirane varijable imaju i fizikalno značenje, z_1 je pozicija drugog fleksibilnog dijela, z_2 je njegova brzina, z_3 je ubrzanje istog tijela, z_4 je trzaj tog tijela. Iz čega se može vidjeti da stvarno kompleksnost nelinearnog fizičkog modela ovisi o odabiru jednačina stanja, kako je spomenuto i ranije.

Isti se rezultat mogao dobiti da smo samo diferencirali jednačinu 3.54. i 3.55., sa aspekta linearizacija povratnom spregom po izlazu, naravno. (E.Slotine i Li 1990.)

Zaključak

Kao što je već rečeno u uvodnom dijelu ovog seminarskog rada, nelinearni sistemi i njihovo upravljanje je jako komplikovano i nisu metod upravljanja nelinearnim sistemima jednostavne kao što je to slučaj kod linearnih sistema, kod koji su ovi alati jako moćni. S toga, uvijek nastojimo svesti nelinearni sistem na linearni i pri njegovoj analizi, i pri dizajnu. Metod linearizacije koji se koristi pri dizajnu upravljanja koji je obrađen ovdje, linearizacija negativnom povratnom spregom, kao i svi ostali slični metodi linearizacije omogućava da se pri dizajnu upravljanja, sada lineariziranog sistema, koriste linearne metode sinteze regulatora. Ovim tipom linearizacije dobijemo linearni model koji predstavlja tačnu reprezentaciju orginalnog nelineranog modela kroz veliki set operacijskih uslova. Uglavnom, što se tiče dva moguća pristupa pri ovoj linearizaciji, *linearizacija povratnom spregom po stanju i linearizacija povratnom spregom po izlazu*, drugi pristup se više preferira nego prvi za većinu aplikacija. Postoje neki procesi, kod kojih je moguće uzastopno uraditi linearizaciju povratnom spregom po stanju, pa onda linearizaciju povratnom spregom po izlazu.

Reference

[1]A.Girard, J.K.Hendrick and. *Control Of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications.* 2005.

[2] E.Slotine, Jean-Jacques, i Weiping Li. *Applied Nonlinear Control.* New Yersey: Prentice Hall, 1990.

[3] Hebibović, Mujo. “Predavanja iz "Nelineranih sistema automatskog upravljanja" na Elektrotehničkom fakultetu, Sarajevo.” Sarajevo, 2018/2019.

[4] K.Khalil, Hassan. *Nonlinear Systems, Third Edition.* New Jersey: Prentice Hall, 2002.