outline

- 图像分解和线性时不变系统
- 二维傅立叶变换
- 图像采样

图像分解和线性时不变系统

图像数学表达

图像由基本的像素点组成，如果将每一个像素点看作一个脉冲，则每个像素点的值可以看作是脉冲的幅值，这样图像就可以看作是由一系列脉冲组成的。

单个像素点的数学表达式：

$$f(i,j) = A\delta(x-i, y-j)$$

其中，A是像素点的幅值，$\delta(x-x_0, y-y_0)$是二维脉冲函数，表示在(x_0, y_0)处的脉冲。

则图像可表示为一些列脉冲的叠加，其数学表达式：

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(i,j)\delta(x-i, y-i)$$

其中，N是图像中的像素点个数，A_i是第i个像素点的幅值，(x_i, y_i)是第i个像素点的坐标。

图像处理系统

$$f(x,y) \rightarrow \boxed{\text{image processing T}} \rightarrow g(x,y)$$

其中，f(x,y)是输入图像，g(x,y)是输出图像, T是图像处理系统. 所以数学表达式为：

$$g(x,y) = T[f(x,y)] = T\,[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(i,j)\delta(x-i,y-i)]$$

如果T是线性的，则有：

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(i,j)T[\delta(x-i,y-i)]$$

令 $h(x,y) = T[\delta(x,y)]$，即为T的冲激响应。 如果T是时不变系统，则h(x,y)是固定的，不随输入的位置变化，可以在整个空间内平移。则有：

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(i,j)h(x-i,y-i) = f(x,y) * h(x,y)$$

- 只用时不变系统才能用卷积计算，时不变系统指的是输入信号发生平易，输出信号也发生平移，不会因位置的不同而产生额外的变化。

$$T\{\delta(x-i,y-j)\} = h(x-i,y-j)$$

- h(x,y)也就是滤波器，是固定的，不随输入的位置变化，则其在空间内平移就可以计算图像输出，而不需要做额外的变化。
- 如果h(x,y)是变化的，则在不同的位置输出不一样，不能用单一的h(x,y)来计算输出。

二维傅立叶变换

傅立叶变换为将信号从时域转化为频域。其核心思想是将一个信号分解为不同频率的正弦波叠加。其视觉呈现可参考3B1B的视频。 https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=441s

基础公式

- 欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- 连续傅立叶变换：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

- 离散傅立叶变换：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- 逆傅立叶变换：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

- 离散傅立叶变换的逆变换：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- 傅立叶变换具有可分离性，即：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi vy}dy]\,e^{-i2\pi ux}dx=\int_{-\infty}^{\infty}F_x(u,y)e^{-i2\pi ux}dx$$

- 离散傅立叶变换的可分离性：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi vy/N}]\,e^{-i2\pi ux/M}=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}F_x(u,y)e^{-i2\pi ux/M}$$

DFT 性质

傅立叶变换得到的频谱图像是复数，通常用幅度谱和相位谱来表示，幅度谱是复数的模，相位谱是复数的辐角。数学表达：

$$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)=|F(u,v)|e^{i\theta(u,v)}$$

其中：

$$|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

$$\theta(u,v)=\arctan(\frac{I(u,v)}{R(u,v)})$$

在图像应用中，通常用幅度谱来表示频谱图像，因为幅度谱包含了图像的主要信息，而相位谱则包含了图像的细节信息。

- 周期性

$$F(u,v) = F(u+m,v) = F(u,v+n)$$

- 共轭对称性

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

- 线性性

$$aF_1(u,v) + bF_2(u,v) = F(au,v) + F(bu,v)$$

- 卷积

$$f(x,y) * g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)g(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$$
$$f(x,y) * g(x,y) \iff F(u,v)G(u,v)$$
$$f(x,y)g(x,y) \iff F(u,v) * G(u,v)$$

- 旋转

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad u = \omega\cos\phi, \quad v = \omega\sin\phi$$
$$f(r,\theta+\theta_0) \iff F(\omega,\phi+\theta_0)$$

- 旋转不变性

$$g(u,v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-j(2\pi ur^2+v\theta)}f(r,\theta)drd\theta$$

zero padding

zero padding 主要是为了要解决周期性混叠以及循环卷积的问题。采样定理是解决信号混叠的问题，不能解决循环卷积以及周期性混叠的问题。

首先要了解周期延拓的概念：在DFT变换时，隐式的认为信号是无限重复的。

因为信号是无限周期重复的，所以在做卷积运算时，当计算至数据的末尾时，会将下一个周期的头部数据纳入计算，出现循环卷积的现象。

```
原始信号（周期性排列）：
   a  b  c  d | a  b  c  d | a  b  c  d

设卷积核覆盖3个位置，当卷积核作用在靠近信号末尾时：
   卷积核位置示意：
         [ ?  ?  ? ]
           ↑↑↑
         d (a) b  ← 注意，这里 a 来自下一个周期，也就是“环绕”过来了！
```

也正是因为这种计算方式，导致可能会将图片的左边和右边混在一起。所以需要在图片两边做 zero padding.

- zero padding 的尺寸
  - DFT 计算一维信号时，如果有2个信号分别为 N 和 M，那么需要做 zero padding 到 N+M-1 的尺寸
  - DFT 计算二维信号时，如果有2个信号分别为 NxM 和 PxQ，那么需要做 zero padding 到 (N+P-1)x(M+Q-1) 的尺寸

为什么滤波用DFT, 而图像压缩用DCT?

- DFT 计算为复数，可以同时表示信号的幅度和相位信息，便于详细的滤波处理。
- DCT 计算为实数，减少了存储和计算的复杂性。
- DCT 变换后大多数的能量集中在低频信号，更符合人眼的视觉特性。

图像采样

连续信号 $f_c(x, y)$ 转化为$f_d(x, y)$ 需要经过以下两步：

- 采样 Sampling 采样主要是将连续的(x, y)转化为离散的(m, n)，决定图片的分辨率，决定了图片保留的信息。如果采样不足，会产生不可逆的信息丢失。
- 量化 Quantization 量化主要是针对$f_d(m, n)$量化，将其映射到有限的灰度级上。主要决定了灰度的精度以及视觉效果。

综上：采样过程影响的更大。所以重点关注采样过程。

采样过程

真实世界的信号一般都是带限信号（band-limited）即：

$$F(u,v)=0,\quad \text{for}\quad |u|>U_0\quad \text{or}\quad |v|>V_0$$

其中，U_0和V_0是带限信号的最大频率。

针对真实信号的采样函数为：

$$s(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x,n-\Delta y)$$

其傅立叶变换为：

$$S(u,v)=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(u-\frac{k}{\Delta x},v-\frac{l}{\Delta y})$$

故连续信号$f(x,y)$ 转换为离散信号可以表示为：

$$f_d(x,y)=f_c(x,y)s(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_c(m\Delta x,n\Delta y)\delta(x-m\Delta x,y-n\Delta y)$$

其傅立叶变换为：

$$F_d(u,v)=F_c(u,v)*S(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_c(u-\frac{m}{\Delta x},v-\frac{n}{\Delta y})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_c(u-mf_{xs},v-nf_{ys})$$

可以得到其以($\frac{1}{\Delta x}$, $\frac{1}{\Delta y}$)为周期的周期延拓. 故若不想出现频率混叠，且已知U_0和V_0是带限信号的最大频率，则有：

$$f_{xs}=\frac{1}{\Delta x}\geq 2U_0,f_{ys}=\frac{1}{\Delta y}\geq 2V_0$$

其中$\frac{1}{2U_0}$和$\frac{1}{2V_0}$分别为Nyquist间隔。上述不等式即描述采样定理。若满足上述不等式，即可不丢失信息的情况下对信号进行采样。

恢复原始信号

可以应用理想低通滤波器恢复原始信号：

$$H(f_x,f_y)=\begin{cases}\Delta x\Delta y, & (u,v)\in(-U_0,U_0)\times(-V_0,V_0)\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

其恢复的信号为：

$$
\begin{aligned}
f_c(x,y) &= h(x,y) * f_d(x,y) \\
&= h(x,y) * \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(m\Delta x, n\Delta y)\delta(x-m\Delta x, y-n\Delta y) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(m\Delta x, n\Delta y)h(x,y) * \delta(x-m\Delta x, y-n\Delta y) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(m\Delta x, n\Delta y)h(x-m\Delta x, y-n\Delta y) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_d(m,n)h(x-m\Delta x, y-n\Delta y)
\end{aligned}
$$

综上：若想避免混叠，可以在采样前先对原始图像$f_c(x,y)$进行低通滤波，使其带宽小于采样频率，避免混叠。