통계계산 방법론.

기말시험.

2019020314

이동하.

3. EM algorithm.

(a) $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -n_u \sigma^{-n_u-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} + \sigma^{-n_u} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^2}$ 이다.

이때, $\left.\frac{\partial L}{\partial \sigma}\right|_{\sigma = \hat{\sigma}^{ML}} = 0$ 이므로,

$$\Rightarrow e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \hat{\sigma}^{-n_u-2} \left(-n_u \hat{\sigma}^{ML} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{\sigma}^{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n_u}}$$ 이다. //

$\oplus$ $\frac{\partial^2 L}{(\partial \sigma)^2} = n_u(n_u+1)\sigma^{-n_u-2} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} - n_u \sigma^{-n_u-1} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^2}$

$- n_u \sigma^{-n_u-1} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^2} + \sigma^{-n_u} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \left(\frac{\sum Y_i}{\sigma^2} \right)^2$

$- 2\sigma^{-n_u} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^3}$

$= e^{-\sum \frac{Y_i}{\sigma}} \left\{ n_u(n_u+1) \cdot \sigma^{-n_u-2} - n_u \sigma^{-n_u-1} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^2} - n_u \sigma^{-n_u-1} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^2} + \sigma^{-n_u} \cdot \left(\frac{\sum Y_i}{\sigma^2} \right)^2 - 2\sigma^{-n_u} \cdot \frac{\sum Y_i}{\sigma^3} \right\}$

$= \underbrace{\sigma^{-n_u-4} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sigma}}}_{(= const.)} \left\{ n_u(n_u+1)\sigma^2 - 2\sigma n_u \sum_{i=1}^{n} Y_i + \left(\sum Y_i \right)^2 - 2\sigma \sum_{i=1}^{n} Y_i \right\}$ 이고,

$\left.\frac{\partial^2 L}{(\partial \sigma)^2}\right|_{\sigma = \hat{\sigma}^{ML}} = const. \left\{ \cancel{\left(\sum Y_i \right)^2} + \frac{\left(\sum Y_i \right)^2}{n_u} - 2\cancel{\left(\sum Y_i \right)^2} + \cancel{\left(\sum Y_i \right)^2} - 2 \frac{\left(\sum Y_i \right)^2}{n_u} \right\}$

$= const. \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right)^2 \left\{ -\frac{1}{n_u} \right\} < 0 \quad (\because const > 0)$

$\Rightarrow$ $\sigma = \hat{\sigma}^{ML}$ 에서 maximum 값을 지닌다. //

(b) Q함수를 구해보자.

$$Q(\sigma, \sigma^{(v)}, \underline{Y}, \underline{\delta}) = E_{\sigma^{(v)}}\left[\log L_c(\sigma|\underline{x}) \mid \underline{Y}, \underline{\delta}\right]$$

이때 $\log L_c(\sigma|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i|\sigma)$ 이므로,

$$Q = E_{\sigma^{(v)}}\left[\sum_{i=1}^{n} -\log\sigma - \frac{X_i}{\sigma} \,\middle|\, \underline{Y}, \underline{\delta}\right]$$

$$= -n\log\sigma - \frac{E(\sum X_i \mid \underline{Y}, \underline{\delta})}{\sigma}$$ 이다.

문제의 조건에 따라서, 확률변수 $X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\sigma)$ 이고, $Y_i = \min(X_i, R_i)$, $\delta_i = I(X_i \le R_i)$ 이다. 이는 다음과 같이 표현이 된다.

$\Rightarrow Y_i = \delta_i X_i + (1-\delta_i)R_i$ − 식① (cf) $Y_i = X_i^{\delta_i} R_i^{1-\delta_i}$ 보단, 선형연산인 왼쪽식을 고려한다.)

식 ①은 다음과 동치이다.

$$\delta_i X_i = Y_i - (1-\delta_i)R_i$$

$$\Leftrightarrow X_i = Y_i + (1-\delta_i)(X_i - R_i) \quad \text{− 식 ②}$$

즉, 식 ②를 통해 $E(X_i \mid Y_i, \delta_i)$는 다음과 같다.

$$E(X_i \mid Y_i, \delta_i) = E(Y_i + (1-\delta_i)(X_i - R_i) \mid Y_i, \delta_i)$$

$$= Y_i + (1-\delta_i)\boxed{E[X_i - R_i \mid Y_i, \delta_i]} = \sigma^{(v)}$$

① $\delta_i = 1$ 이면, $X_i < R_i$ 이고, 이에따라 $Y_i = X_i$ 이므로,

$E[X_i - R_i \mid Y_i, \delta_i] = E[X_i - R_i \mid X_i, X_i < R_i] = 0$ (∵ $X_i - R_i$는 shifted 지수분포를 따르는 ⇒ support가 $X_i \ge R_i$)

② $\delta_i = 0$ 이면, $X_i \ge R_i$ 이고, 이에따라 $Y_i = R_i$ 이므로,

$E[X_i - R_i \mid Y_i, \delta_i] = E[X_i - R_i \mid X_i - R_i \ge 0] = \sigma^{(v)}$

즉, Q함수는 아래와 같다.

$$Q = -n\log\sigma - \frac{E(\sum_i X_i \mid Y, \delta)}{\sigma}$$

$$= -n\log\sigma - \frac{\sum_i E(X_i \mid Y_i, \delta_i)}{\sigma}$$

$$= -n\log\sigma - \frac{\sum_i Y_i + (1-\delta_i)\sigma^{(v)}}{\sigma}$$

이는 미분을 통해 최대화하면 다음과 같다.

$$\cdot\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i + (n - \sum_{i=1}^{n}\delta_i)\sigma^{(v)}}{\sigma^2}$$

$$\cdot\ \left.\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma^{(v+1)}} = 0$$

$$\therefore\ \sigma^{(v+1)} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i + (n - \sum_{i=1}^{n}\delta_i)\sigma^{(v)}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i + (n - n_u)\sigma^{(v)}\right\}$$ 이다. //