

Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, решить краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sin(3\pi x)e^{-t}, & \text{при } x \in (0, 1), y \in (0, 1), t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, & \text{при } y \in [0, 1], t \geq 0, \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=1} = 0, & \text{при } x \in [0, 1], t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, & \text{при } x \in [0, 1], y \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Введем равномерные сетки по x , y и t : $x_n = nh_x$, при $n = \overline{0, [1/h_x]}$; $y_m = mh_y$, при $m = \overline{0, [1/h_y]}$; $t_k = k\tau$, при $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим $[1/h_x] = N_x$, $[1/h_y] = N_y$. Рассмотрим разностную схему Письмена и Рекфорда

$$\begin{cases} \frac{2}{\tau}(u_{nm}^{k+1/2} - u_{nm}^k) = \frac{1}{h_x^2}(u_{n+1m}^{k+1/2} - 2u_{nm}^{k+1/2} + u_{n-1m}^{k+1/2}) + \\ + \frac{1}{h_y^2}(u_{nm+1}^k - 2u_{nm}^k + u_{nm-1}^k) + \sin(3\pi nh_x)e^{-(k+1/2)\tau}, \\ \quad \text{при } n = \overline{1, N_x - 1}, m = \overline{1, N_y - 1}, k \geq 0, \\ \frac{2}{\tau}(u_{nm}^{k+1} - u_{nm}^{k+1/2}) = \frac{1}{h_x^2}(u_{n+1m}^{k+1/2} - 2u_{nm}^{k+1/2} + u_{n-1m}^{k+1/2}) + \\ + \frac{1}{h_y^2}(u_{nm+1}^{k+1} - 2u_{nm}^{k+1} + u_{nm-1}^{k+1}) + \sin(3\pi nh_x)e^{-(k+1)\tau}, \\ \quad \text{при } n = \overline{1, N_x - 1}, m = \overline{1, N_y - 1}, k \geq 0, \\ u_{0m}^k = 0, u_{N_x m}^k = 0, & \text{при } m = \overline{0, N_y}, k \geq 0, \\ u_{n0}^k = 0, u_{nN_y}^k = 0, & \text{при } n = \overline{0, N_x}, k \geq 0, \\ u_{nm}^0 = 0, & \text{при } n = \overline{0, N_x}, m = \overline{0, N_y}, \end{cases} \quad (2)$$

где $u_{nm}^k = u(x = nh_x, y = mh_y, t = k\tau)$.

Аппроксимация и устойчивость

Для функций, трижды дифференцируемых по времени и четыре раза по координатам, описанная разностная схема аппроксимирует исходный дифференциальный оператор во втором порядке по каждому шагу: $u_{\text{сеточн.}} - u_{\text{точн.}} = z = \mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$. Также эта схема является безусловно устойчивой.

Аналитическое решение

Для поиска точного решения задачи (1) воспользуемся методом разделения пе-

ременных и разложением в ряд Фурье по собственным функциям области:

$$u(x, y, t) = \sum_{n, m} T_{n m}(t) X_n(x) Y_m(y),$$

где $X_n(x) = \sin(\pi n x)$, $Y_m(y) = \sin(\pi m y)$. Подставив это выражение в дифференциальное уравнение, получим ответ:

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \frac{4}{\pi(2m+1)(\pi^2(4m^2+4m+10)-1)} \left(e^{-t} - e^{-\pi^2(4m^2+4m+10)t} \right), \\ u(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} T_m \sin(\pi(2m+1)y) \sin(3\pi x). \end{aligned} \quad (3)$$

Функция, рассчитанная по этой формуле для времен $t = 0, 0.045, 0.33, 1$, представлена на рисунках 1, 3, 5, 7 соответственно. Как видно, она убывает экспоненциально со временем. Момент времени 0.045 был выбран, поскольку он соответствует максимуму функции.

Алгоритм решения

Для экономичного решения одномерных неявных схем с уравнением второго порядка существует способ, заключающийся во введении дополнительных параметров α_n и β_n таких, чтобы $u_n = \alpha_n u_{n+1} + \beta_n$. Тогда, если $A_n u_{n+1} - C_n u_n + B_n u_{n-1} = F_n$, то $\alpha_n = -\frac{A_n}{B_n \alpha_{n-1} - C_n}$, $\beta_n = -\frac{F_n + B_n \beta_{n-1}}{B_n \alpha_{n-1} - C_n}$. Отправные значения α_0 и β_0 определяются из граничных условий в начальной точке по координате, а исходя из граничных условий в конечной точке можно найти функцию между границами.

В задаче (2) в каждый момент времени два уравнения разбиваются на две одномерные задачи со своими α и β , где вторая производная по одной из координат входит в аналогичную указанной в предыдущем параграфе функцию F . Таким образом, чтобы найти функцию в следующий момент времени, мы последовательно решаем одномерные задачи в двух направлениях, переходя через вспомогательный слой $t = (k + 1/2)\tau$.

Полученные численные решения задачи (2) для тех же времен $t = 0, 0.045, 0.33, 1$ представлены на рисунках 2, 4, 6, 8 соответственно. В отличие от задачи с нелинейным уравнением переноса, где решение имело слабый разрыв, эти решения сложно различить с виду. Функции для меньших чисел узлов представлены на рисунке 9.

Точность решения

Было произведено несколько расчетов на сгущающихся по всем направлениям сетках и одинаковыми шагами и три расчета с минимальными шагами по двум направлениям и большим шагом по третьему. Ошибка рассчитывалась в момент вре-

Таблица 1. Точность решений в момент времени $t = 0.045$ при разных шагах сетки.

h_x	h_y	τ	z	$z/(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$
1/256	1/256	1/256	1.0893×10^{-5}	0.2380
1/128	1/128	1/128	4.3963×10^{-5}	0.2401
1/64	1/64	1/64	15.791×10^{-5}	0.2156
1/32	1/32	1/32	76.003×10^{-5}	0.2594
1/32	1/256	1/256	23.172×10^{-5}	0.2301
1/256	1/32	1/256	21.251×10^{-5}	0.2110
1/256	1/256	1/32	20.640×10^{-5}	0.2049

мени $t = 1/32$, поскольку при увеличении времени она падала даже быстрее, чем экспоненциально, а это – минимальное время, присущее во всех сетках. Погрешность оценивалась среднеквадратично:

$$z = \sqrt{\iint (u_{\text{точн.}} - u_{\text{числ.}})^2 dx dy} = \sqrt{\sum_{nm} ((u_{\text{точн.}})_{nm}^{k_0} - (u_{\text{числ.}})_{nm}^{k_0})^2 / N_x N_y},$$

где суммирование производится по всем узлам соответствующих функциям сеток. Именно такая норма выбрана, поскольку все ряды Фурье приближают раскладываемые функции в среднем.

Точность численных решений при названных шагах представлена в таблице 1. Как видно, схема (2) действительно имеет второй порядок аппроксимации по каждой переменной, не совсем квадратичную зависимость можно объяснить высшими порядками разложения ошибки по шагам, а разница в ошибках при большом шаге по x и большом шаге по y может быть следствием выбора неявного в первый шаг направления.

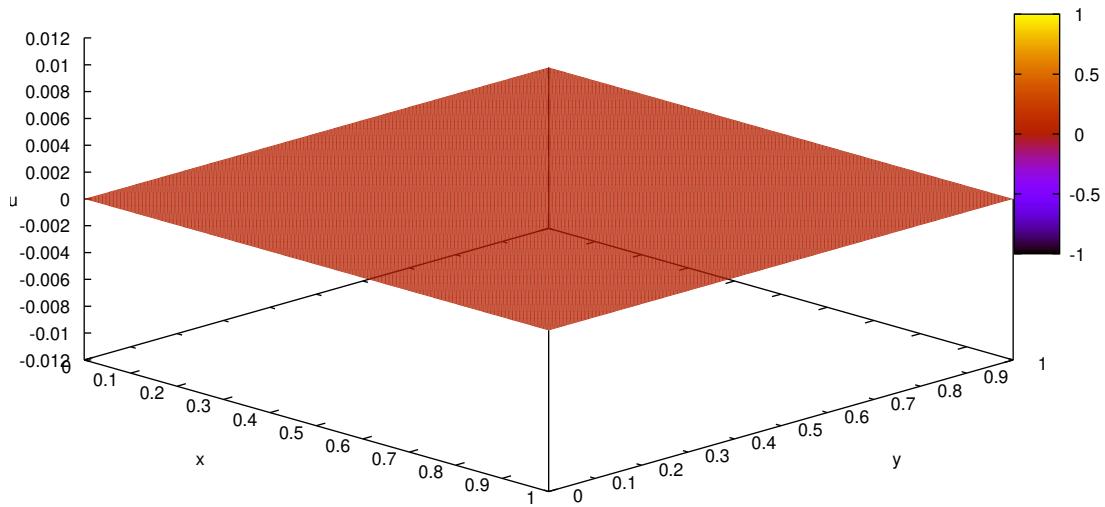


Рис. 1. Точное решение задачи (1) в момент времени $t = 0$.

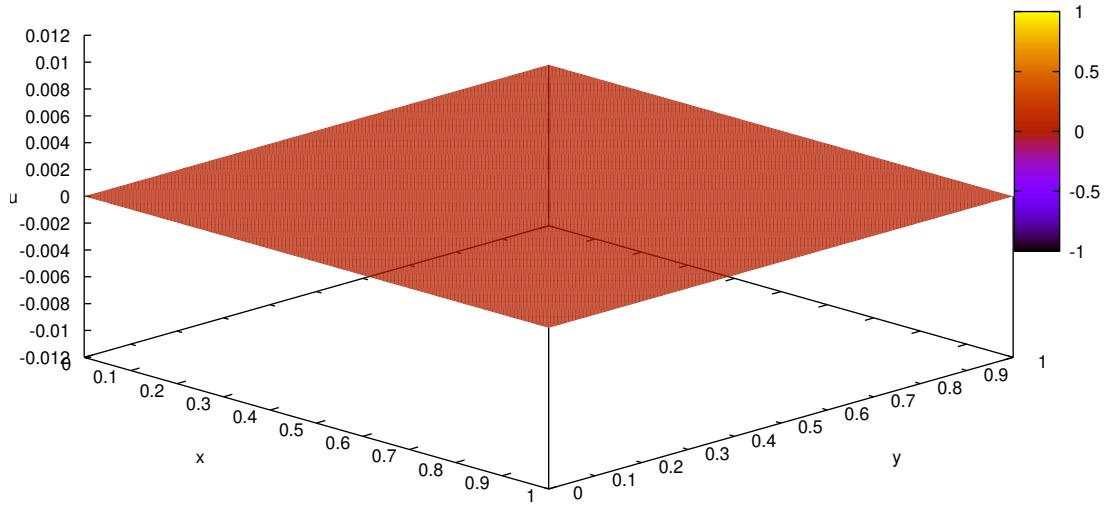


Рис. 2. Численное решение задачи (2) в момент времени $t = 0$.

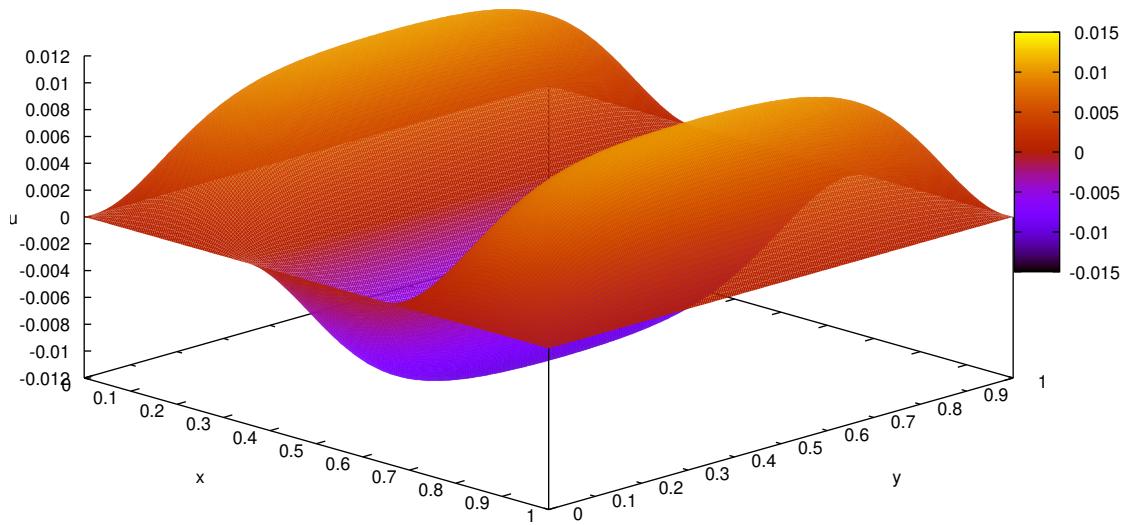


Рис. 3. Точное решение задачи (1) в момент времени $t = 0.045$.

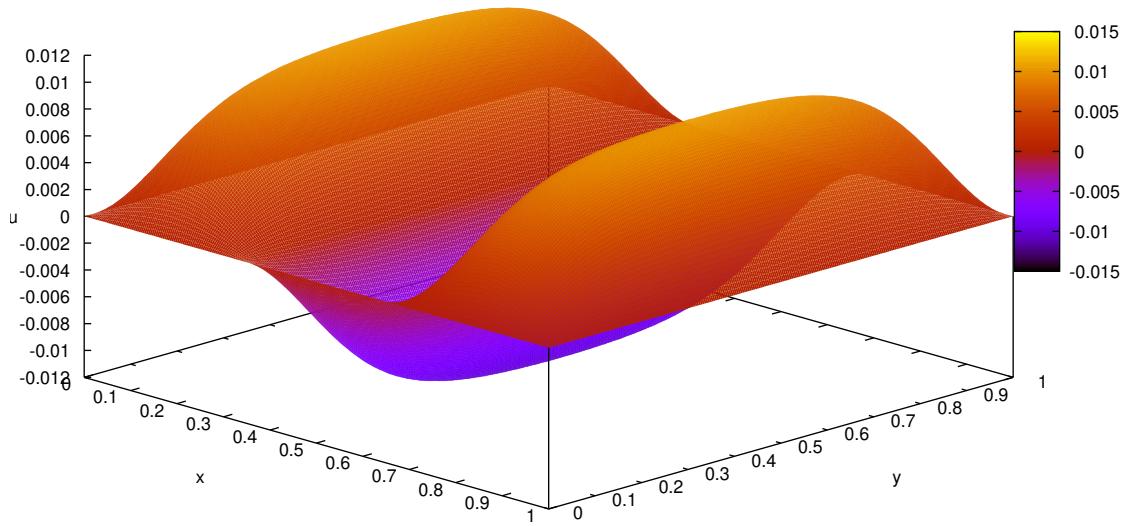


Рис. 4. Численное решение задачи (2) в момент времени $t = 0.045$.

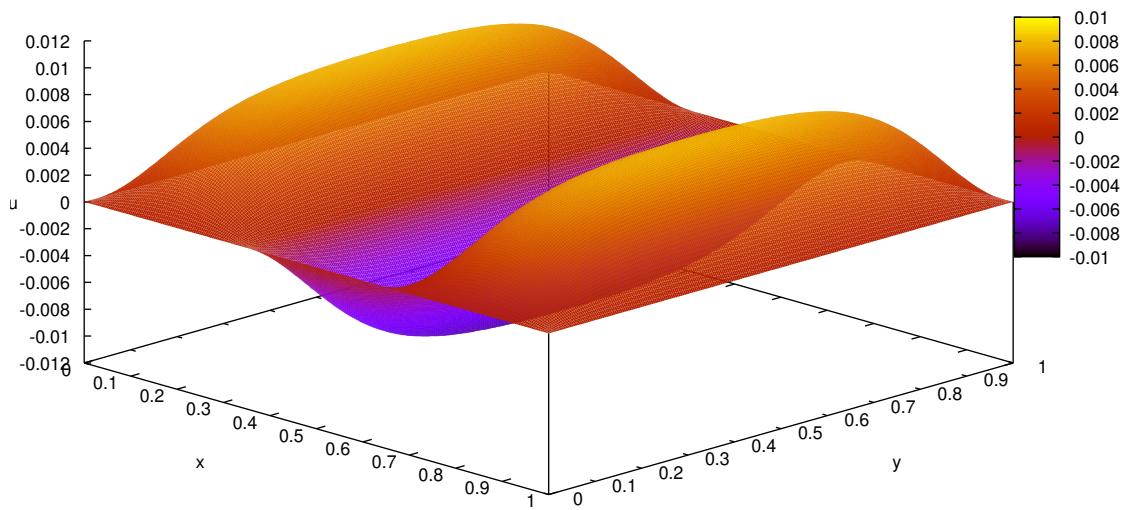


Рис. 5. Точное решение задачи (1) в момент времени $t = 0.33$.

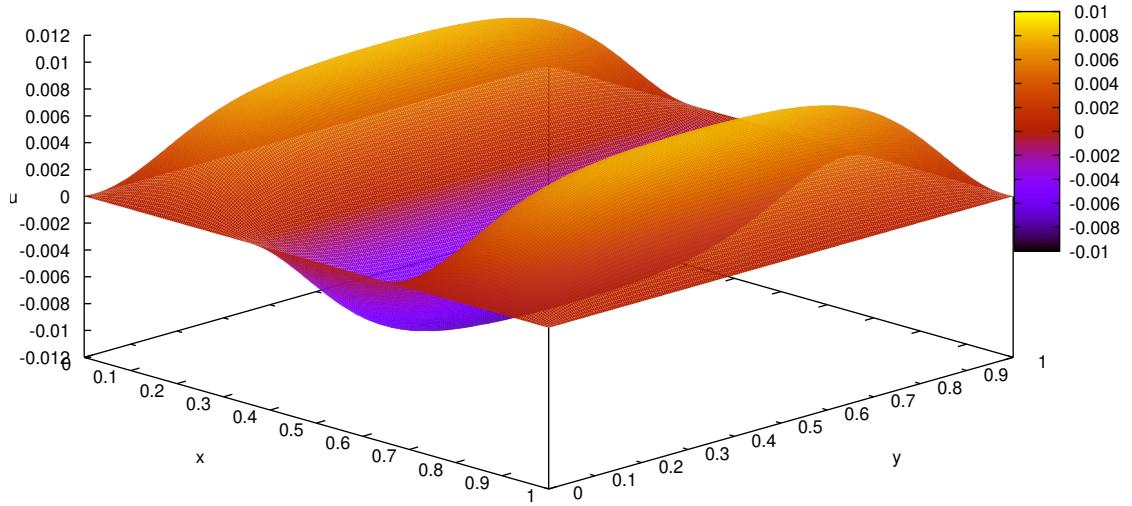


Рис. 6. Численное решение задачи (2) в момент времени $t = 0.33$.

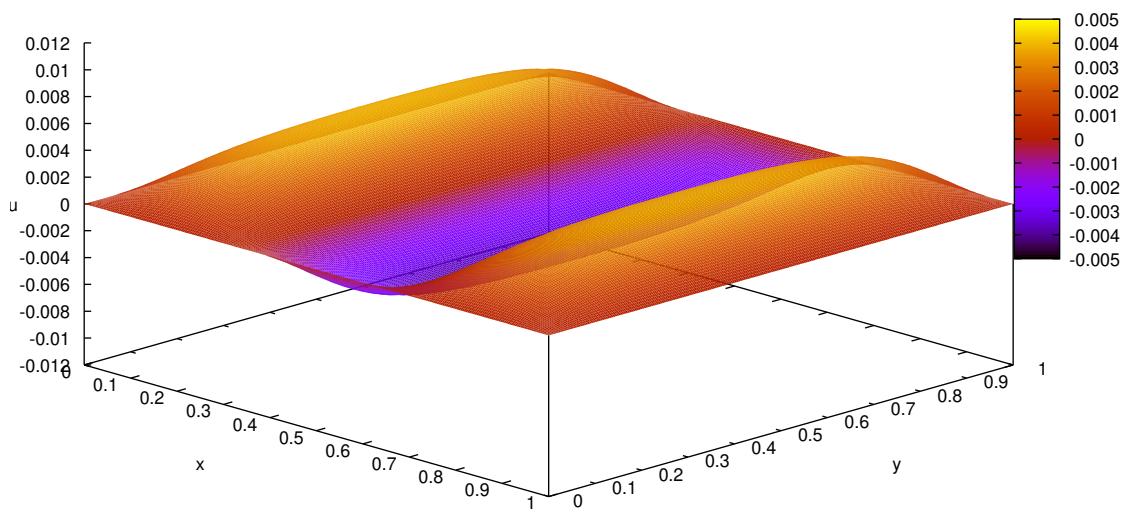


Рис. 7. Точное решение задачи (1) в момент времени $t = 1$.

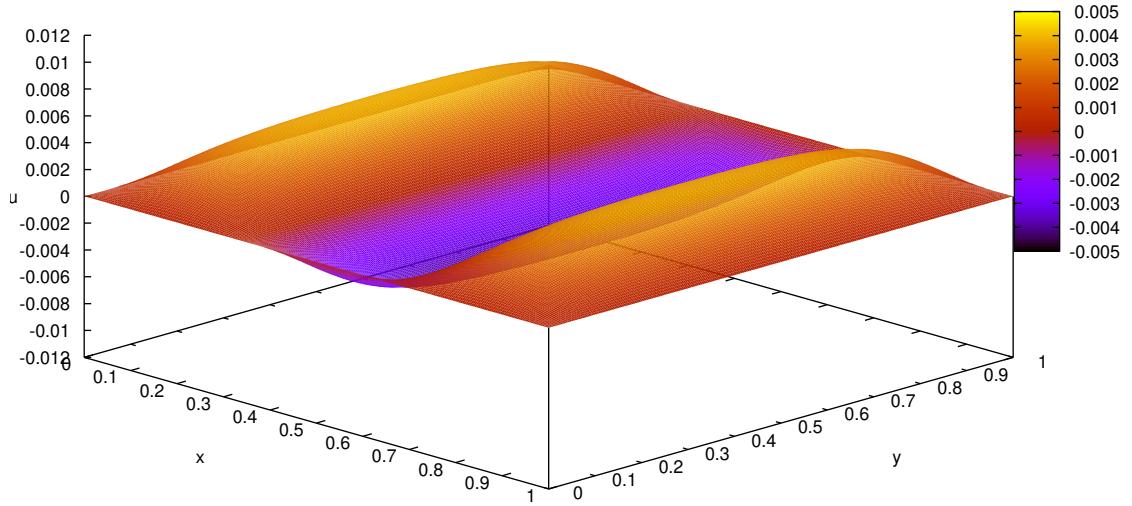


Рис. 8. Численное решение задачи (2) в момент времени $t = 1$.

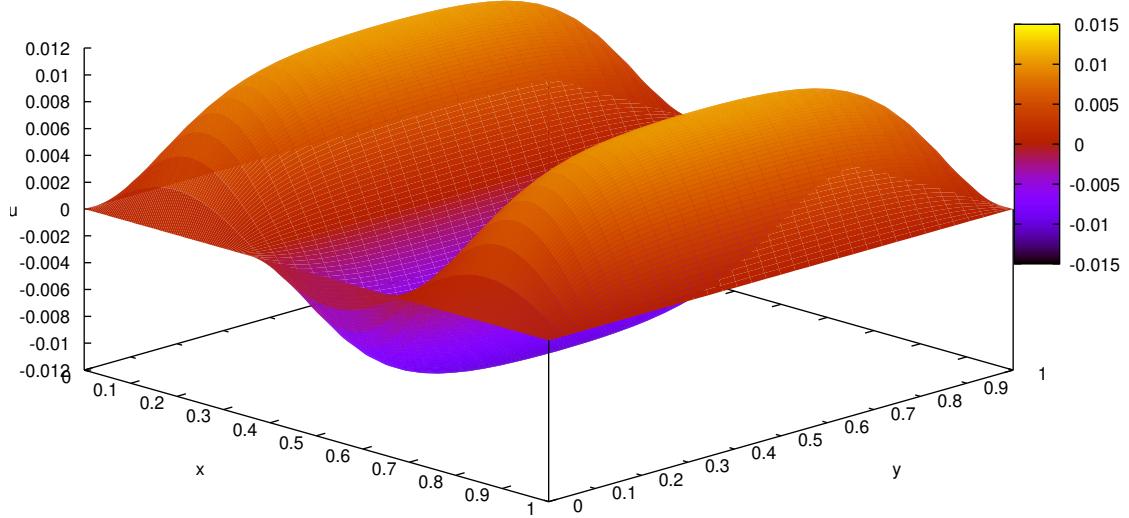
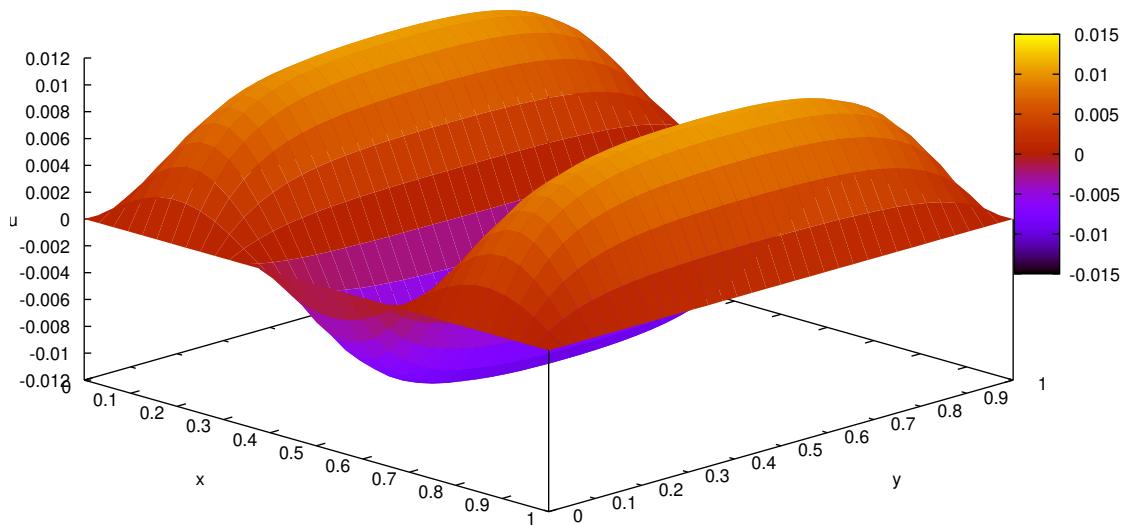


Рис. 9. Численные решения задачи (2) в момент времени $t = 0.045$ для шагов $1/32, 1/32$ (выше) и $1/256, 1/64$ (ниже).