

## Постановка задачи

Необходимо решить задачу с квазилинейным уравнением переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2ue^{u^2}}{1+e^{2u^2}} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{при } x \in (0, 1), t > 0, \\ u|_{t=0} = 1 + x^2, & \text{при } x \in [0, 1], \\ u|_{x=0} = e^{-t}, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Введем равномерные сетки по  $x$  и по  $t$ :  $x_n = nh$ , при  $n = 0, \overline{[1/h]}$ ;  $t_k = k\tau$ , при  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^k}{\tau} + \frac{f_{n+1}^{k+1} - f_n^{k+1}}{h} = 0, & \text{при } 0 < n \leq [1/h] - 1, k > 0, \\ u_n^0 = 1 + (nh)^2, & \text{при } 0 \leq n \leq [1/h], \\ u_0^k = e^{-k\tau}, & \text{при } k \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $u_n^k = u(x = x_n, t = t_n)$ ,  $f_n^k = f(u_n^k)$ , а  $f(u) = \arctg(u^2)$ .

## Аппроксимация

Пусть  $u \in C^2(0, 1] \times (0, \infty)$ . Тогда

$$\begin{aligned} L_h[u] - L[u] &= \frac{u(x+h, t+\tau) - u(x+h, t)}{\tau} + \frac{f(u(x+h, t+\tau)) - f(u(x, t+\tau))}{h} - \\ &- \left( u_t + f'(u) u_x \right) \Big|_{\substack{x=x+h \\ t=t+\tau}} = \frac{u - (u + u_t \cdot (-\tau) + \bar{u}_{tt}\tau^2/2)}{\tau} + f'(u) \times \\ &\times \frac{u - (u + u_x \cdot (-h) + \bar{u}_{xx}h^2/2)}{h} - u_t + f'(u) u_x = -\bar{u}_{tt}\tau/2 - f'(u) \bar{u}_{xx}h/2 = \mathcal{O}(\tau + h), \end{aligned}$$

где  $\bar{u}_{tt}$  и  $\bar{u}_{xx}$  — производные, взятые в интервалах  $(t, t+\tau)$  и  $(x, x+h)$  соответственно. То есть выбранный оператор  $L_h$  аппроксимирует исходный дифференциальный оператор в первом порядке по  $t$  и по  $x$ .

## Устойчивость

Исследуем устойчивость методом гармоник. Предположим, что в задаче (2) при изменении начальных условий на  $\delta\varphi_n = Ae^{i\alpha x_n}$  решение меняется на  $\delta u_n^k$ , причем  $\delta u_n^{k+1}/\delta u_n^k = q$  и не зависит от  $k$  и  $n$ . Тогда, подставив это выражение в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{1 - 1/q}{\tau} + f'(u_n^k) \frac{1 - e^{-i\alpha h}}{h} = 0$$

Обозначим  $f'(u_n^k) = c$ . Тогда  $q = \frac{1}{1 - \frac{c\tau}{h}(1 - e^{-i\alpha h})}$ , а

$$|q| = \frac{1}{\frac{c\tau}{h}(1 + \frac{c\tau}{h})(\frac{h}{c\tau} + 1 + \frac{1}{\frac{h}{c\tau} + 1} - 2 \cos \alpha h)} \leq \frac{1}{\frac{c\tau}{h}(1 + \frac{c\tau}{h})(\frac{h}{c\tau} - 1 + \frac{1}{\frac{h}{c\tau} + 1})} = 1.$$

Это значит, что в рассмотренном случае схема будет устойчива относительно начальных условий при любых  $h$  и  $\tau$ , при которых достаточно ограничиться первым членом разложения  $\partial_x f(u)$ .

Предположим теперь, что в той же задаче (2) при изменении уже граничных условий на  $\delta\psi_n = Ae^{i\alpha t_n}$  решение меняется на  $\delta u_n^k$ , причем  $\delta u_{n+1}^k / \delta u_n^k = q$  и не зависит от  $k$  и  $n$ . Снова подставив это выражение в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{1 - e^{-i\alpha\tau}}{\tau} + f'(u_n^k) \frac{1 - 1/q}{h} = 0 \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{1 - \frac{h}{c\tau}(1 - e^{-i\alpha\tau})}.$$

Аналогичными преобразованиями получаем, что схема при тех же ограничениях устойчива и относительно граничных условий.

## Аналитическое решение

Для поиска точного решения воспользуемся методом характеристик. Характеристики задачи (1) находятся из уравнения

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{2ue^{u^2}}{1+e^{2u^2}}}.$$

Откуда можно представить характеристики в параметрическом виде

$$t - a = \frac{1 + e^{2u_0^2}}{2u_0 e^{u_0^2}} (x - b), \quad u_0|_{a=0} = 1 + b^2, \quad u_0|_{b=0} = e^{-a}.$$

Получаются семейства прямых

$$t = \frac{1 + e^{2e^{-2a}}}{2e^{-a} e^{e^{-2a}}} x + a, \quad a \geq 0, \quad t = \frac{1 + e^{2(1+b^2)^2}}{2(1+b^2)e^{(1+b^2)^2}} (x - b), \quad b \in [0, 1]. \quad (3)$$

Они представлены на рисунке 1.

Также из уравнений (3) можно получить решение в неявном виде, поскольку  $u(x, t) = u_0(0, a(x, t))$  или  $u_0(b(x, t), 0)$  при  $t > \frac{1+e^2}{2e} x$  и  $t < \frac{1+e^2}{2e} x$  соответственно. Функция для неявного представления имеет вид

$$F(x, t, u) = \begin{cases} \frac{1 + e^{2u^2}}{2ue^{u^2}} x - t - \ln(u), & \text{при } t > x/e, \\ \frac{1 + e^{2u^2}}{2ue^{u^2}} (x - \sqrt{u-1}) - t, & \text{при } t < x/e. \end{cases} \quad (4)$$

Решить уравнения  $F(x, t, u) = 0$  в явном виде не представляется возможным.

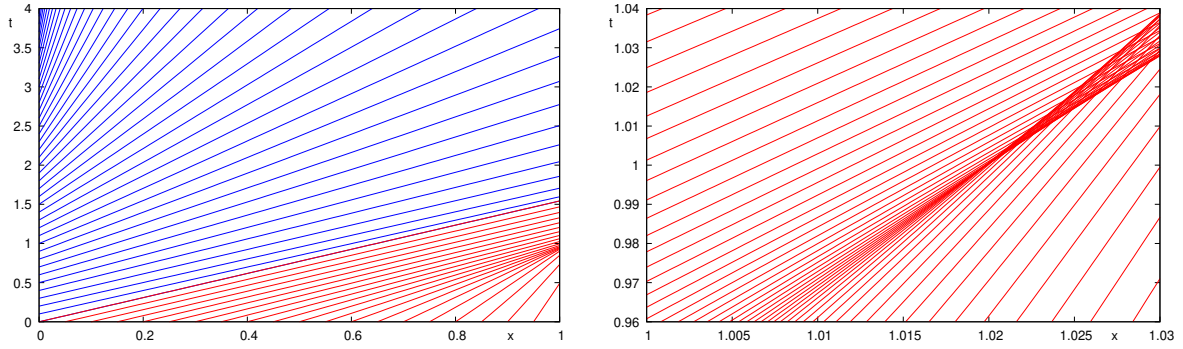


Рис. 1. Характеристики задачи (1) (слева) и их пересечение при  $x > 1$  (справа).

Производная функции  $F$  вблизи точки  $u = 1$  принимает большие значения, поэтому использовать метод Ньютона для численного нахождения  $u$  нерационально. Найденная методом деления отрезка пополам с точностью  $|F| < 10^{-9}$  функция  $u(x, t)$  представлена на рисунке 2. Как видно, на прямой  $t = \frac{1+e^2}{2e}x$  решение претерпевает слабый разрыв.

### Алгоритм решения

Для численного решения задачи воспользуемся схемой бегущего счета. Вычисление начинается с расчета значений функции в начальных и граничных точках. Для расчета функции в новых точках понадобится решать следующее уравнение

$$\frac{h}{\tau} u_{n+1}^{k+1} + f_{n+1}^{k+1} = \frac{h}{\tau} u_{n+1}^k + f_n^{k+1},$$

где функция в предыдущих по времени и координате точках известна. Корень этого уравнения можно найти по методу Ньютона, приняв за начальную точку любое известное соседнее значение функции. Так, зная функцию в точке  $(0, \tau)$  и на прямой  $t = 0$ , вычисляются ее значения на прямой  $t = \tau$  и так далее. Само численное решение для шагов  $\tau = 0.002$ ,  $h = 0.002$  представлено на рисунке 3. Решения при шагах в 4 и в 32 раза больших представлены на рисунке 4. Решение для неравных по координате и по времени шагов представлено на рисунке 5.

### Точность решения

Было произведено несколько расчетов для сеток с одинаковыми вдоль двух осей шагами: 0.002, 0.004, 0.008, 0.016, 0.032, 0.064, а также единственный расчет с неравными шагами  $\tau = 0.064$ ,  $h = 0.002$ . Погрешности решений оценивались в среднем:

$$z = \sum_{k=0}^{N_t} \sum_{n=0}^{N_x} \frac{|u(M_n^k) - \tilde{u}(M_n^k)|}{N_t N_x},$$

Таблица 1. Точность решений при разных шагах сетки.

$\tau$	$h$	$z$	$z/(\tau + h)$
0.064	0.002	0.008143	0.1234
0.002	0.002	0.001138	0.2846
0.004	0.004	0.002052	0.2565
0.008	0.008	0.003089	0.1931
0.016	0.016	0.004855	0.1517
0.032	0.032	0.008071	0.1261
0.064	0.064	0.012900	0.1008

где  $u$  — решение дифференциальной задачи,  $\tilde{u}$  — решение, найденное по неявному аналитическому выражению, а суммирование производится лишь по набору значений, присутствующих во всех сетках одновременно. Краткая информация о точности решений приведена в таблице 1. Из данных видно, что погрешность увеличивается медленнее, чем шаг. Вероятно, это происходит из-за нелинейности исходной задачи.

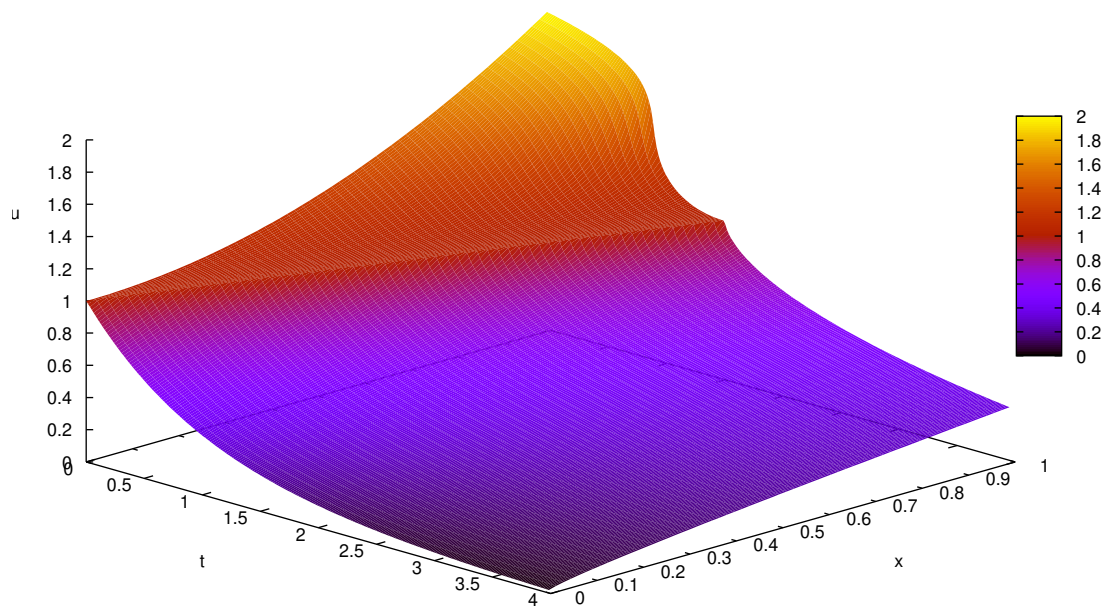


Рис. 2. Численное решение уравнения  $F(x, t, u) = 0$ .

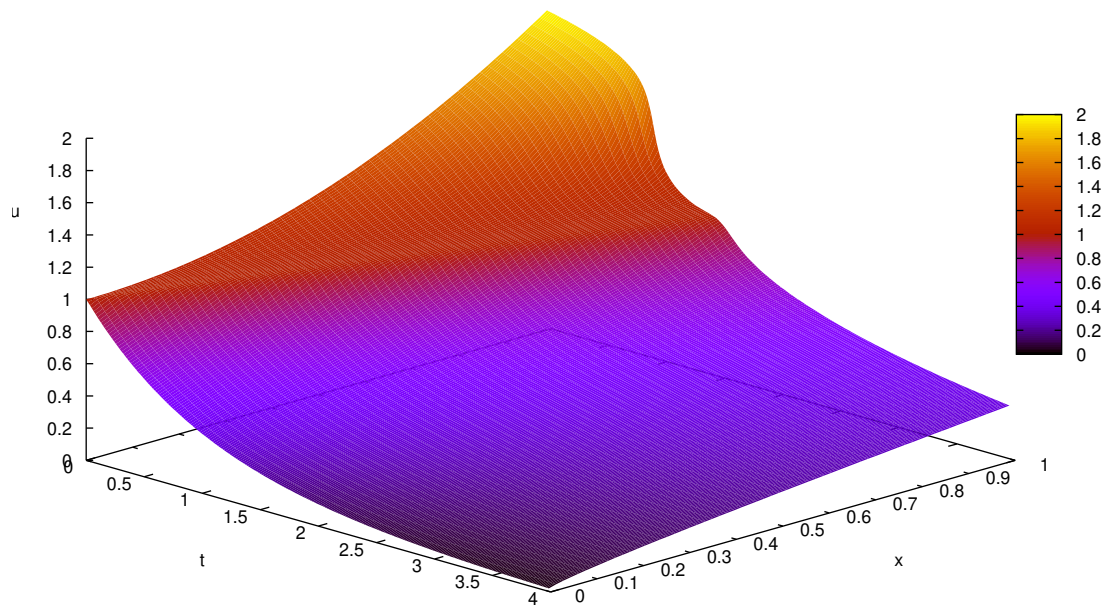


Рис. 3. Численное решение задачи (2) для шагов  $\tau = 0.002$ ,  $h = 0.002$ .

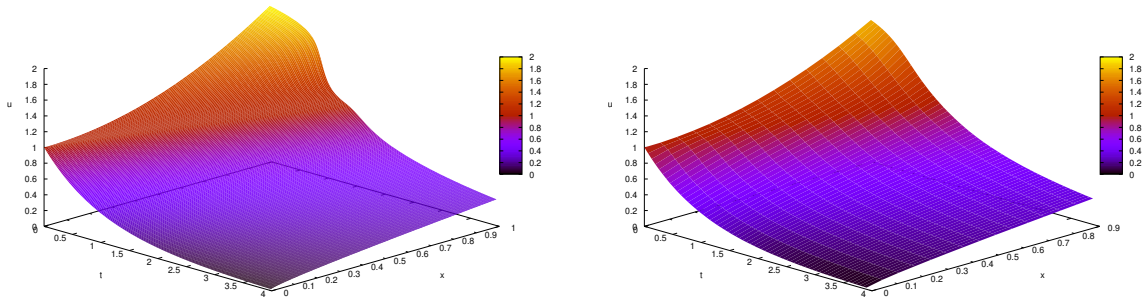


Рис. 4. Численные решения задачи для шагов  $\tau = h = 0.008$  (слева) и  $\tau = h = 0.064$  (справа).

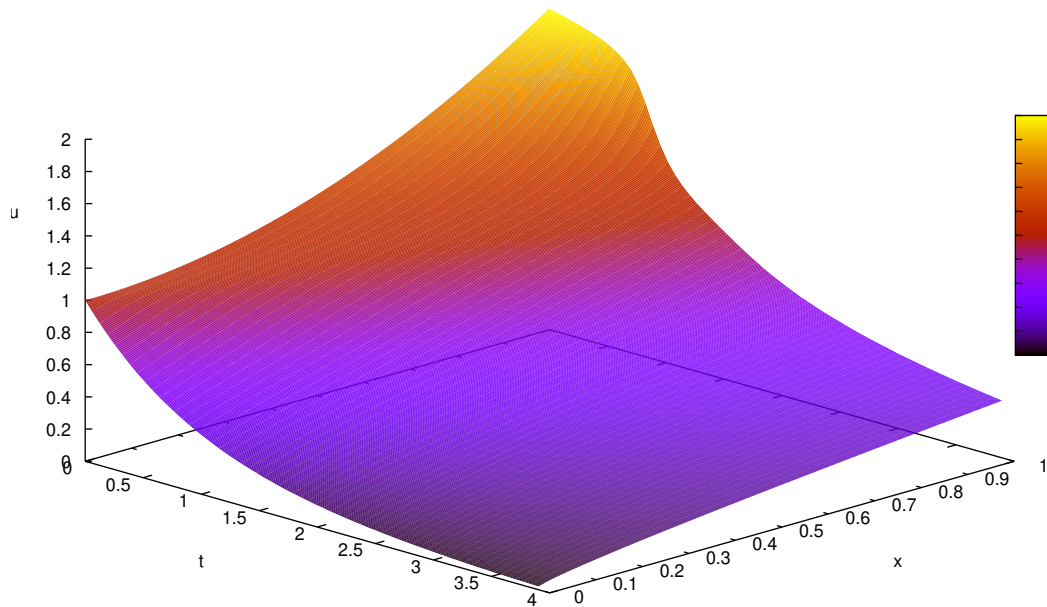


Рис. 5. Численное решение задачи для шагов  $\tau = 0.064$ ,  $h = 0.002$ .