Грибков Д., Гусейнов К., Кравченко В. 1 апреля 2020 г.

Вопрос Показать, что при $t \gg 1/\Gamma$ $\overline{(x-x_0)^4} \sim t^2$.

Пусть на систему с вязким трением действует сила $F(t)$, тогда она подчиняется уравнению Ланжевена

$$\dot{p} + \Gamma p = F(t).$$

При начальном условии $p(0) = p_0$ решение для p будет

$$p(t) = p_0\, e^{-\Gamma t} + \int\limits_0^t F(t')\, e^{-\Gamma(t-t')}\, \mathrm{d}t'. \tag{1}$$

Для задачи на определение $x(t)$ имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = p/m, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \frac{1}{m}\int\limits_0^t p(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \frac{p_0}{\Gamma m}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \mathrm{d}t' \int\limits_0^{t'} \mathrm{d}t'' F(t'') e^{-\Gamma(t'-t'')} \\
&= x_0 + \frac{p_0}{\Gamma m}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \mathrm{d}t'' \int\limits_{t''}^{t} \mathrm{d}t' F(t'') e^{\Gamma(t''-t')} \\
&= x_0 + \frac{p_0}{\Gamma m}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau F(\tau) e^{\Gamma\tau} \frac{e^{-\Gamma\tau} - e^{-\Gamma t}}{\Gamma} \qquad (2) \\
&= x_0 + \frac{p_0}{\Gamma m}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) + \frac{1}{\Gamma m}\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau F(\tau)\left(1 - e^{-\Gamma(t-\tau)}\right) \\
&= \tilde{x} + \int\limits_0^t F(\tau)\, g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \text{ -- введем сокращенные обозначения.}
\end{aligned}$$

Пусть $F(t)$ удовлетворяет

$$\overline{F}(t) = 0, \quad \overline{F(t_1)\,F(t_2)} = C_2\,\delta(t_1 - t_2), \quad \overline{F(t_1)\,F(t_2)\,F(t_3)} = C_3\,\delta(t_1 - t_2)\,\delta(t_1 - t_3),$$

$$\begin{aligned}
\overline{F(t_1)\,F(t_2)\,F(t_3)\,F(t_4)} = C_4\,\delta(t_1 - t_2)\,\delta(t_1 - t_3)\,\delta(t_1 - t_4) + C_2^2\Big(&\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) \\
&+ \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) + \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3)\Big),
\end{aligned}$$

где $C_i = \mathrm{const}$. Тогда $\tilde{x} = \bar{x}$. Поскольку $\bar{x}$ по отношению к усреднению – просто число,

$$\overline{(x-x_0)^4} = \overline{(x - \bar{x} + (\bar{x} - x_0))^4} = \overline{\Delta x^4} + 4\overline{\Delta x^3}\,(\bar{x} - x_0) + 6\overline{\Delta x^2}\,(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{x} - x_0)^4, \tag{3}$$

где $\Delta x = x - \bar{x} = \int\limits_0^t F(\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Для определения констант C_i рассмотрим центральные моменты p в предположении, что при $t \to \infty$ выполняется распределение Максвелла. Согласно распределению Максвелла,

$$\overline{\Delta p^2} = m\theta, \quad \overline{\Delta p^3} = 0, \quad \overline{\Delta p^4} = 3\,\overline{\Delta p^2} = 3m^2\theta^2.$$

Согласно уравнению (1), $\Delta p = \int\limits_0^t F(\tau) e^{-\varGamma(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$,

$$\overline{\Delta p^2} = \overline{\int_0^t \mathrm{d}\tau_1 \int_0^t \mathrm{d}\tau_2 F(\tau_1)F(\tau_2)e^{-\varGamma(2t-\tau_1-\tau_2)}} = \int_0^t \mathrm{d}\tau_1 \int_0^t \mathrm{d}\tau_2 \overline{F(\tau_1)F(\tau_2)} e^{-\varGamma(2t-\tau_1-\tau_2)}$$

$$= C_2 \int_0^t e^{-2\varGamma(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = C_2 \frac{1-e^{-2\varGamma t}}{2\varGamma} \xrightarrow[t\to\infty]{} C_2/(2\varGamma) \quad \Rightarrow \quad \underline{C_2 = 2\varGamma m\theta},$$

$$\overline{\Delta p^3} = \int_0^t \mathrm{d}\tau_1 \int_0^t \mathrm{d}\tau_2 \int_0^t \mathrm{d}\tau_3 \overline{F(\tau_1)F(\tau_2)F(\tau_3)} e^{-\varGamma(3t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)} = C_3 \frac{1-e^{-3\varGamma t}}{3\varGamma} \to$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} C_3/(3\varGamma) \quad \Rightarrow \quad \underline{C_3 = 0},$$

$$\overline{\Delta p^4} = \int_0^t \mathrm{d}\tau_1 \int_0^t \mathrm{d}\tau_2 \int_0^t \mathrm{d}\tau_3 \int_0^t \mathrm{d}\tau_4 \overline{F(\tau_1)F(\tau_2)F(\tau_3)F(\tau_4)} e^{-\varGamma(4t-\tau_1-\tau_2-\tau_3-\tau_4)}$$

$$= C_2^2 \cdot 3\left(\frac{1-e^{-2\varGamma t}}{2\varGamma}\right)^2 + C_4 \frac{1-e^{-4\varGamma t}}{4\varGamma} \xrightarrow[t\to\infty]{} 3m^2\theta^2 + C_4/(4\varGamma) \quad \Rightarrow \quad \underline{C_4 = 0}.$$

Располагая значениями $C_2 = 2\varGamma m\theta$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$, посчитаем центральные моменты x. Согласно уравнению (2), $\Delta x = \int\limits_0^t F(\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

$$\overline{\Delta x^2} = C_2 \int_0^t g(\tau)^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{C_2}{\varGamma^2 m^2} \int_0^t \left(1 - e^{-\varGamma(t-\tau)}\right)^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{C_2}{\varGamma^2 m^2} \int_0^t \left(1 - e^{-\varGamma\tau}\right)^2\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{C_2}{\varGamma^2 m^2} \int_0^t \left(1 - 2e^{-\varGamma\tau} + e^{-2\varGamma\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau = \frac{C_2}{\varGamma^2 m^2}\left(t - 2\frac{1-e^{-\varGamma t}}{\varGamma} + \frac{1-e^{-2\varGamma t}}{2\varGamma}\right) \to$$

$$\xrightarrow[t\gg 1/\varGamma]{} \frac{2\theta t}{\varGamma m},$$

$$\overline{\Delta x^3} = C_3 \int_0^t g(\tau)^3\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

$$\overline{\Delta x^4} = 3C_2^2 \left(\int_0^t g(\tau)^2\,\mathrm{d}\tau\right)^2 + C_4 \int_0^t g(\tau)^4\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow[t\gg 1/\varGamma]{} \frac{12\,\theta^2 t^2}{\varGamma^2 m^2}.$$

Также, согласно уравнению (2),

$$\bar{x} - x_0 = \frac{p_0}{\Gamma m}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) \xrightarrow[t \gg 1/\Gamma]{} \frac{p_0}{\Gamma m}.$$

Вспоминая уравнение (3), запишем

$$\overline{(x - x_0)^4} = \frac{12\,\theta^2 t^2}{\Gamma^2 m^2} + 6\,\frac{2\,\theta t}{\Gamma m}\,\frac{p_0^2}{\Gamma^2 m^2} + \frac{p_0^4}{\Gamma^4 m^4}.$$

При $p_0 = 0$

$$\overline{(x - x_0)^4} \sim t^2.$$

Также, если ввести медленно меняющуюся внешнюю силу, то при $t \gg 1/\Gamma$

$$\bar{x} - x_0 = u_0 t = -\frac{1}{\Gamma m}\frac{\partial U_{\text{внеш}}}{\partial x} \cdot t,$$

$$\overline{x - x_0} = \frac{12\,\theta^2 t^2}{\Gamma^2 m^2} + 6\,\frac{2\,\theta t}{\Gamma m}\,\frac{u_0^2 t^2}{\Gamma^2 m^2} + \frac{u_0^4 t^4}{\Gamma^4 m^4}.$$

Нас интересуют малые времена t, при не слишком большой внешней силе слагаемыми со степенями t больше 2 можно пренебречь. Тогда, снова,

$$\overline{(x - x_0)^4} \sim t^2.$$

Задача

Из уравнения Ланжевена получить $a(t)$.

Найти $\bar{a}(t)$ и рассмотреть случаи $t \ll 1/\Gamma$, $t \gg 1/\Gamma$.

Найти $\overline{\Delta a\,\Delta x}\,(t)$ и рассмотреть случаи $t \ll 1/\Gamma$, $t \gg 1/\Gamma$.

Решение

Уравнение Ланжевена с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{p} + \Gamma p = F(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p(t) = p_0\, e^{-\Gamma t} + \int\limits_0^t F(t')\, e^{-\Gamma(t-t')}\,\mathrm{d}t',$$

$$a = \dot{p}/m, \qquad p_0/m = v_0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a(t) = -v_0\,\Gamma e^{-\Gamma t} + F(t)/m - \Gamma/m \int\limits_0^t F(t')\, e^{-\Gamma(t-t')}\,\mathrm{d}t'.}$$

Поскольку мы полагаем $\overline{F}(t) = 0$,

$$\boxed{\bar{a}(t) = -v_0\,\Gamma e^{-\Gamma t} = \begin{cases} -v_0\Gamma, & t \ll 1/\Gamma, \\ 0, & t \gg 1/\Gamma. \end{cases}}$$

Как уже известно и как только что получено,

$$\Delta x = \frac{1}{\mathit{\Gamma} m}\int\limits_0^t F(\tau)\left(1-e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau)}\right)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\Delta a = F(t)/m - \mathit{\Gamma}/m\int\limits_0^t F(\tau)e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta a\,\Delta x} = {} & \frac{1}{\mathit{\Gamma} m^2}\int\limits_0^t \overline{F(\tau)F(t)}\left(1-e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau)}\right)\,\mathrm{d}\tau - \\
& -\frac{1}{m^2}\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau_1\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau_2\overline{F(\tau_1)F(\tau_2)}\left(1-e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau_1)}\right)e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau_2)} \\
= {} & -\frac{C_2}{m^2}\int\limits_0^t\left(e^{-\mathit{\Gamma}(t-\tau)}-e^{-2\mathit{\Gamma}(t-\tau)}\right)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{C_2}{m^2}\int\limits_0^t\left(e^{-\mathit{\Gamma}\tau}-e^{-2\mathit{\Gamma}\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau \\
= {} & -2\frac{\mathit{\Gamma}\theta}{m}\left(\frac{1-e^{-\mathit{\Gamma} t}}{\mathit{\Gamma}}-\frac{1-e^{-2\mathit{\Gamma} t}}{2\mathit{\Gamma}}\right) = -\frac{\theta}{m}\left(1-2e^{-\mathit{\Gamma} t}+e^{-2\mathit{\Gamma} t}\right)
\end{aligned}$$

При $t \ll 1/\mathit{\Gamma}$

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta a\,\Delta x} &= -\frac{\theta}{m}\Big(1-2\left(1-\mathit{\Gamma} t+\mathit{\Gamma}^2t^2/2+\ldots\right)+\left(1-2\mathit{\Gamma} t+4\mathit{\Gamma}^2t^2/2+\ldots\right)\Big) \\
&= -\frac{\theta}{m}\left(1-2+1+2\mathit{\Gamma} t-2\mathit{\Gamma} t-\mathit{\Gamma}^2t^2+2\mathit{\Gamma}^2t^2+\ldots\right) \approx -\frac{\theta}{m}\,\mathit{\Gamma}^2t^2
\end{aligned}$$

При $t \gg 1/\mathit{\Gamma}$

$$\overline{\Delta a\,\Delta x} = -\theta/m.$$

Итак,

$$\boxed{\overline{\Delta a\,\Delta x} = -\frac{\theta}{m}\left(1-2e^{-\mathit{\Gamma} t}+e^{-2\mathit{\Gamma} t}\right) = \begin{cases} -\theta\mathit{\Gamma}^2t^2/m, & t \ll 1/\mathit{\Gamma}, \\ -\theta/m, & t \gg 1/\mathit{\Gamma}. \end{cases}}$$