Коэффициент отражения от одиночного и двойного δ-потенциала

Керим Гусейнов

МГУ им. М. В. Ломоносова
Кафедра общей ядерной физики

17 мая 2021 г.

Одиночный δ-потенциал. Уравнение Шредингера

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\Big(E - V(x)\Big)\psi(x) = 0, \qquad V(x) = v_0\,\delta(x)$$

$$x < 0: \qquad \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

$$x > 0: \qquad \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \\ Ce^{ikx}, & x > 0, \end{cases} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

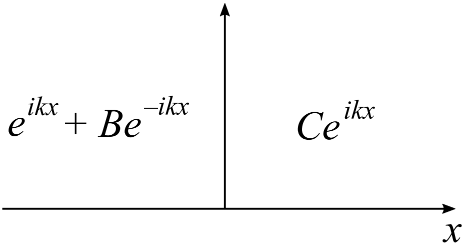
Изменяются условия сшивки

$$\int_{-0}^{+0}\left(\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\Big(E - v_0\,\delta(x)\Big)\psi(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) - \frac{2mv_0}{\hbar^2}\psi(0) = 0$$

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0)$$

Одиночный δ-потенциал. Отражение и прохождение



$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k_0 = \frac{2mv_0}{\hbar^2}$$

$$1 + B = C$$

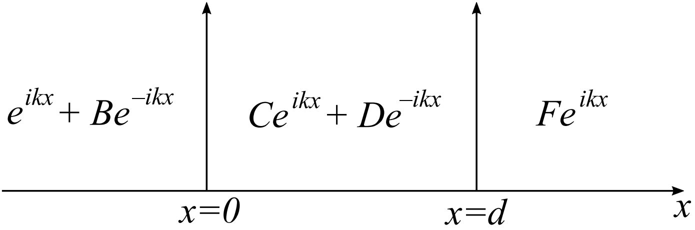
$$ikC - (ik - ikB) = k_0 C$$

$$B = \frac{k_0}{2ik - k_0}, \qquad C = \frac{2ik}{2ik - k_0}$$

$$R = |B|^2 = \frac{k_0^2}{k_0^2 + 4k^2}$$

$$D = |C|^2 = \frac{4k^2}{k_0^2 + 4k^2}$$

Двойной δ-потенциал



$$V(x) = v_0\,\delta(x) + v_0\,\delta(x-d)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0 \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx}, & x \in (0, d) \\ Fe^{ikx}, & x > d \end{cases}$$

$$1 + B = C + D$$

$$\frac{k_0}{ik}(1+B) = C - D - (1-B)$$

$$Ce^{ikd} + De^{-ikd} = Fe^{ikd}$$

$$\frac{k_0}{ik}Fe^{ikd} = Fe^{ikd} - (Ce^{ikd} - De^{-ikd})$$

Двойной δ-потенциал. Полное прохождение

$$\varkappa = k/k_0, \qquad \varphi = kd = \varkappa\lambda \qquad (\lambda = d/k_0)$$

$$B = -\frac{\frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi} - 1\right) + i\varkappa\left(e^{2i\varphi} + 1\right)}{2\varkappa^2 + 2i\varkappa - \frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi} - 1\right)} = -ie^{i\varphi}\frac{\sin\varphi + 2\varkappa\cos\varphi}{2\varkappa^2 + 2i\varkappa - \frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi} - 1\right)}$$

$$F = 1 + Be^{-2i\varphi} + \frac{1+B}{\varkappa}e^{-i\varphi}\sin\varphi$$

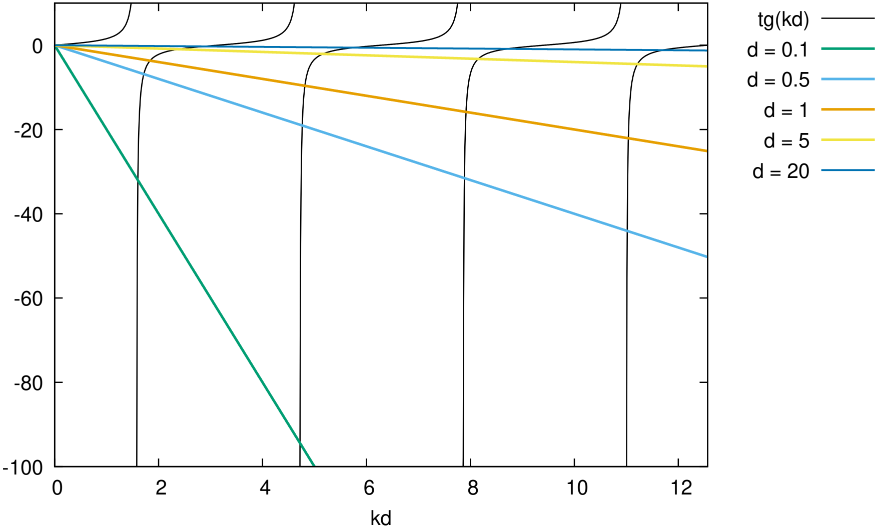
$$R = |B|^2 = 0 \Rightarrow B = 0: \qquad -2\varkappa = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varkappa\lambda)$$

$$\varkappa\lambda = x, \quad \varkappa = x/\lambda$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = -2x/\lambda}$$

Двойной δ-потенциал. Полное прохождение ($R = 0$, $D = 1$)

$$\operatorname{tg} x = -2x/\lambda$$



Двойной δ-потенциал. Полное отражение

$$B = -ie^{i\varphi}\frac{\sin\varphi + 2\varkappa\cos\varphi}{2\varkappa^2 + 2i\varkappa - \frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi} - 1\right)}$$

$$\left(2\varkappa^2 - 2i\varkappa - \frac{1}{2}\left(e^{-2i\varphi} - 1\right)\right)\left(2\varkappa^2 + 2i\varkappa - \frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi} - 1\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
=&4\varkappa^4 + 2\varkappa^2 + \frac{1}{4}\left(e^{2i\varphi} - 1\right)\left(e^{-2i\varphi} - 1\right) - 4i\varkappa^3 + 4i\varkappa^3 - \varkappa^2\left(e^{-2i\varphi} - 1\right) \\
&- \varkappa^2\left(e^{2i\varphi} - 1\right) - i\varkappa\left(e^{-2i\varphi} - 1\right) + i\varkappa\left(e^{2i\varphi} - 1\right) \\
=&4\varkappa^4 + 4\varkappa^2 + \sin^2\varkappa + \varkappa(2 - 2\cos(2\varphi)) - 2\varkappa\sin(2\varphi)
\end{aligned}$$

$$R = |B|^2 = \frac{(\sin\varphi + 2\varkappa\cos\varphi)^2}{4\varkappa^4 + 4\varkappa^2(1 + \sin^2\varphi) + \sin^2\varkappa - 2\varkappa\sin(2\varphi)} = 1$$

$$\sin^2\varphi + 4\varkappa^2\cos^2\varphi + 2\varkappa\sin(2\varphi) = 4\varkappa^4 + 4\varkappa^2(1 + \sin^2\varphi) + \sin^2\varkappa - 2\varkappa\sin(2\varphi)$$

$$4\varkappa^4 + 8\varkappa^2\sin^2\varphi - 4\varkappa\sin(2\varphi) = 0 \qquad \boxed{\varkappa^3 + 2\varkappa\sin^2\varphi - \sin(2\varphi) = 0}$$

Двойной δ-потенциал. Полное отражение ($R = 1,\ D = 0$)