

## ۱۵. اردوس حد سازی معنیکی

شرط لازم: ماله (معادله دوایل دست راست مرز) خطی و همنی (صفر مرزی بجهت آن)

مرحله روش صراحتی حل مسئله دینامیک شود

**مثال**) رسانی دوسری دامنه با فرضیات ( $K=cte$ ,  $q=0$ ) درجه داره داره داره در نظر گیری کنید

املاک  
آخر  
فصل  
→  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$  (۱.۰) معادله لابلانس

$$\nabla^2 T = 0$$

ملته: متغیر محدوده همنیست

اگر  $T$  هوا بسا باشد  $T$  هم جمله مابه است  
(متغیر محدوده هماند)  
↓  
ضیافت  
↓  
متغیر محدوده

$$T(0,y) = T(L,y) = T_1$$

$$T(x,0) = T_1; T(x,w) = g(x) \quad g(x) = T_2$$

$$(۲.۰)$$

$$(۳.۰)$$

۱- برای اعمال روش حدسازی مسیری باید در همه محدوده های مورد  
باشد در غیر این صورت باید همنی سازی انجام شود: الف) تغییر متغیر (change of variable) ب) رک جمله جزئی [2A]  
(partial solution)

ب) تغییر متغیر زیر

همن مسیر

[2A]

ج) تغییر متغیر زیر [2A3] و ... superposition [2A3] (Variation of parameters)

$$\theta = T - T_1 \quad (4.0)$$

در این ماله روش تغییر متغیر جاگه باشد  
مثال)  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$  (۵.۰) انتخاب  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{\partial T}{\partial x}, \dots$

با جایزی در معادلات  
 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (7.0) \quad \theta(0,y) = \theta(L,y) = 0$   
R4PSCO  $\theta(x,0) = 0; \theta(x,w) = \frac{g(x) - T_1}{T_2 - T_1} = f(x); \text{ مثلاً } f(x) = 1$

(SL)

معادله Sturm-Liouville

معادله ODE و PDE

و معادله

لطفکم معادله

معادله

معادله

معادله

فرض تفکر متغیر دو دسته ای داریم

(٢.٥)

$$\theta(x,y) = X(x) Y(y) \xrightarrow{\text{PDE}} \text{تفکر متغیر}$$

$$f(X, X', x) = g(Y, Y', y) = \begin{cases} +\lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{cases} \quad (2.5)$$

استخراج مقدار  $\lambda^2$  + دعورت سعی و خطا احجام می سود خواه غیر صفر (ردیف) داشته باشیم . بعایر دنگ

حال حین طایی خواه غیر صفر (ردیف) باشد . در این صورت معادله دست همی دعورت دو معادله مقدار و شرط ناصله می شود دوباره که لغایت رفتار شرط مرزی را برآورد کنید

دستی اسل Sturm-Liouville eigenvalue (SL)

$$\theta(x,y) = \lambda X(x) \rightarrow Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \xrightarrow{\text{تفکر متغیر}} -\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \pm \lambda^2 \quad (\text{عمل})$$

$$\begin{cases} X'' \pm \lambda^2 X = 0 \\ Y'' \mp \lambda^2 Y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{معادله} \\ \pm \lambda^2}} \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ Y'' - \lambda^2 Y = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

حینه متن باشد

$$\begin{cases} X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \\ Y = C_3 e^{-\lambda x} + C_4 e^{+\lambda x} \end{cases} \quad (4.5)$$

اکمال سراط مرزی حین  $(1)$  این معادله دسته همی داشت خواهد بودی  $(C_N)$ جواب متعارف و شرط  $\phi_\lambda(x)$  دستی اسل SL دست ای ط مرزی آننوشته خواه دعورت  $\theta(x,y) = C_\lambda \phi_\lambda(x) \psi_\lambda(y)$ 

منابع

$$\theta(0,y) = X(0) Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \xrightarrow{(4.5)} C_1 = 0$$

$$\theta(L,y) = X(L) Y(y) = 0 \rightarrow X(L) = 0 \xrightarrow{(4.5)} C_2 \sin \lambda L = 0 \xrightarrow{C_2 \neq 0} \sin \lambda L = 0 \rightarrow \lambda L = n\pi$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{جواب} \\ \text{متقل}}} X = C_2 \sin \lambda x, \lambda = n\pi; n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

$$\theta(x,0) = X(x) Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \xrightarrow{(4.6)} C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_3 = -C_4$$

$$\Rightarrow \theta(x,y) = X(x) Y(y) = \underbrace{C_2}_{C_\lambda} \underbrace{\sin \lambda x}_{\phi_\lambda(x)} \underbrace{(\sinh \lambda y)}_{\psi_\lambda(y)} = C_\lambda \sin \lambda x \sinh \lambda y; \lambda = n\pi \quad (4.7)$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

دسته طیوری ← ارثنای سرطانی عینکی

۴- در این مرحله بی همایت جواب پیدا نمایم که در حالت لئے هیچ دام از آن سرطانی آخر (ماهی) را ارث نمایند.

$$\theta(x, w) = c_\lambda \phi_\lambda(x) \psi_\lambda(w) \stackrel{?}{=} f(x) \rightarrow c_\lambda = \frac{f(x)}{\phi_\lambda(x) \psi_\lambda(w)}$$

نمیش.

اما تولیپ خطی این جواب که الف) صفت معادله سرطانی صدق را ارث نمایند (زی خل و صحن متن) بضرایب ثابت

سرطانی آخر را ارث نماید (سوی SL) ترکیب خطی

$$\theta(x, w) = \sum_\lambda c_\lambda \phi_\lambda(x) \psi_\lambda(w) \quad (16.0)$$

توابع دوستی

$$\rightarrow \theta(0, w) = \sum_\lambda c_\lambda \underbrace{\phi_\lambda(0) \psi_\lambda(w)}_{A_\lambda} = \sum_\lambda A_\lambda \phi_\lambda(x) \stackrel{?}{=} f(x) \quad (17.0)$$

طبق سویی SL توابع دوستی معادله SL صحن تواعی معادله و کامل متن با برای مرتب

راجی توان بصورت بدیسطه سری گذاشت از این توابع بیان نمود و ضرایب  $A_\lambda$  از ربطی زیر محاسبه شود (معادله هشت همن

$$A_\lambda = \frac{\int_a^b f(x) \omega(x) \phi_\lambda(x) dx}{\int_a^b \omega(x) \phi_\lambda^2(x) dx} \quad (17.0)$$

نموده

که در اینجا رابط  $\omega(x)$  تابع وزنی است و باعای معادله هشت همن با خرم کلی معادله SL مابل به کل زیر ماتریس

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 \omega(x)] y = 0 \quad (18.0)$$

نکته: آن معادله هشت همن مستقیماً به خرم بالا بخورد می‌دان آنرا به خرم بالا سهیل نمود

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)] y = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[ \overbrace{f_2(x)p(x)}^{q(x)} + \lambda^2 f_3(x)p(x) \right] = 0} \quad (19.0)$$

$$\theta(x, w) = c_\lambda \sin \lambda x \xrightarrow{\lambda = \frac{n\pi}{L}} = f(x) \xrightarrow{\int_a^b f(x) = 1} c_\lambda = \frac{1}{\sinh \lambda L}, \quad \begin{array}{l} \text{سال} \\ \times \end{array}$$

$$\theta(x, y) = \sum_\lambda c_\lambda \sin \lambda x \sinh \lambda y = \sum_{n=1}^\infty C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sinh \frac{n\pi}{L} y \quad (20.0)$$

سری غوریه سینوسی تابع  $f(x)$  حالت خاصی از

$$\rightarrow \theta(x, w) = \sum_{n=1}^\infty \overbrace{C_n \sin \frac{n\pi}{L} x}^{A_n} \overbrace{\sinh \frac{n\pi}{L} w} = f(x) = 1 \xrightarrow{\text{قیمت SL}} \sum_{n=1}^\infty A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) = 1$$

$$A_n = C_n \sinh \frac{n\pi w}{L} \quad (21.0)$$

Subject:

Year.

Month.

Date. ( )

فرم کمی

از مقایسه معادله هشت ممکن (معادله ۹.۰) با معادله  $SL$  (معادله ۱۲.۰) نتیجه می شود

$$p(x)=1, q(x)=0, \omega(x)=1 \quad (12.0)$$

نباریان ضرایب منوری  $A_n$  از معادله (۱۷.۰) قابل محاسبه هستند

$$A_n = \frac{\int_0^L (1 \times 1) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx}{\int_0^L 1 \times \sin^2 \frac{n\pi}{L} x \, dx} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \quad (12.0)$$

سری هدرا را تنها بجزء کافی است

$$\xrightarrow{(11.0)} C_n = \frac{A_n}{\sinh n\pi w} \quad \xrightarrow{(10.0)} \theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi w/L)} \quad (14.0)$$

(بهست آمده از این حل  $T = cte \rightarrow \theta = ct e$ )  
در کل (Fig 1) سیان داره استهه باشد  $\theta$ ،  $T$  از (۸.۰) حاصل

خطوط دوامنات  
isotherm

محاسبه است.

[۱A, ۲A, ۳]  
فوريه کوکسون  
مشاعره  
 $SL$  به مراجع  
مرادجع شود.

آنچه برای اطلاعات بیشتر در خصوص سری های غیر فوتیه با پوابع و تردد  $SL$  به مراجع