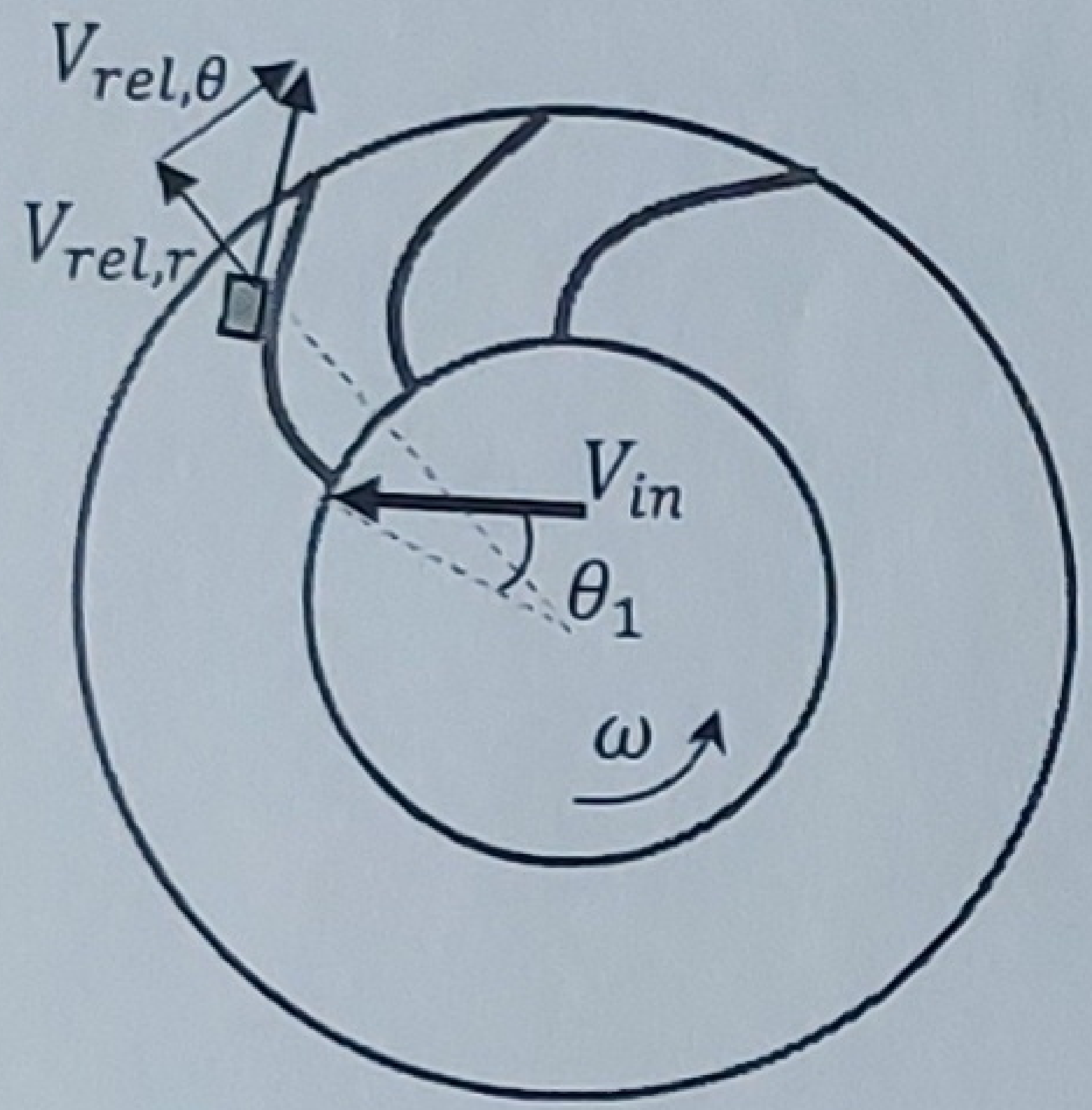
تذکر: تنها به سه سوال از چهار سوال زیر پاسخ دهید. بارم تمام سوالات یکسان است.

سوال اول:

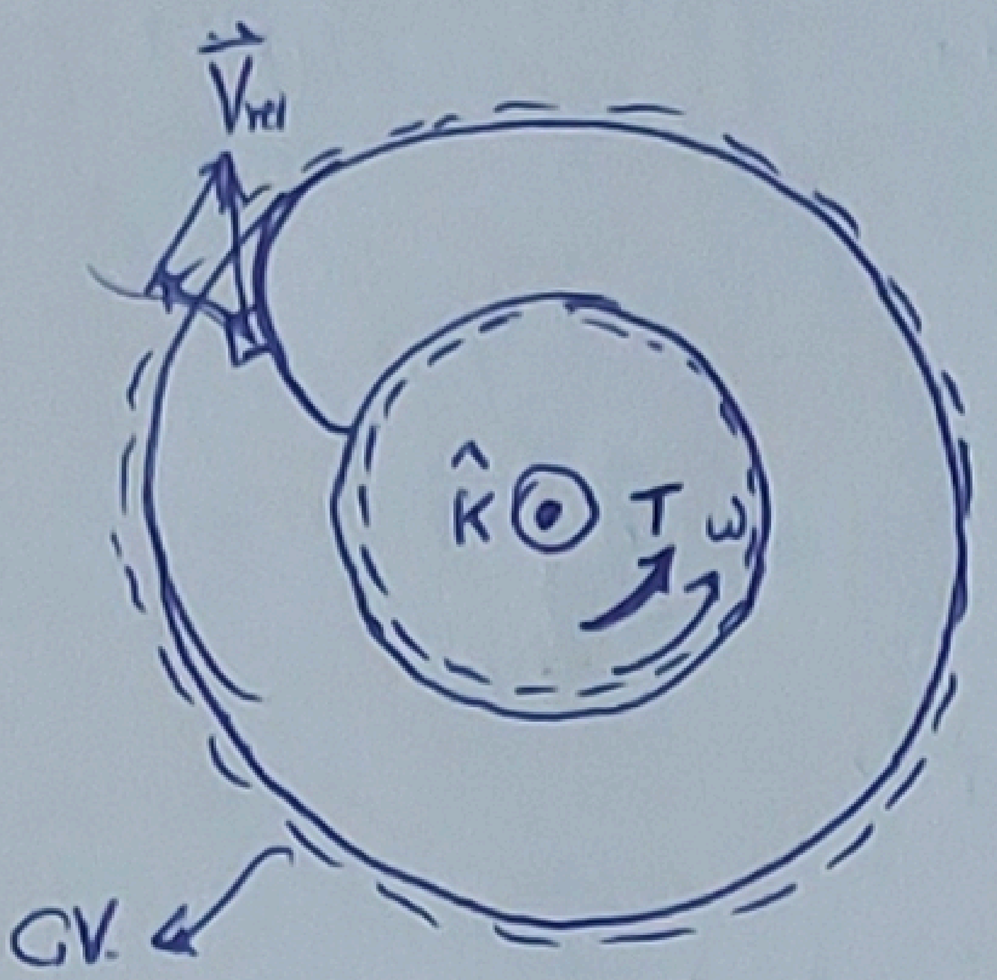


حجم کنترل نالخت چسبیده به پره‌های یک پمپ گریز از مرکز را در نظر بگیرید. با استفاده از معادله مومنتوم زاویه‌ای و به کمک معادله بقای جرم اثبات کنید که گشتاور چرخشی پمپ از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$T = (-\dot{m}_{in})(r_{in}V_{\theta,in}) + (\dot{m}_{out})(r_{out}V_{\theta,out})$$

که در آن، r_{in} و r_{out} شعاع پره‌ها به ترتیب در ورودی و خروجی و V_θ مولفه مماسی سرعت مطلق سیال است که در جهت چرخش مثبت و در خلاف جهت آن منفی لحاظ می‌شود. فرض شود سرعت نسبی سیال بین پره‌ها (نسبت به پره) بصورت $\vec{V}_{rel} = V_{rel,r}\hat{e}_r + V_{rel,\theta}\hat{e}_\theta$ است.

$$\sum(\vec{r}\times\vec{F})_\sigma - \iiint_\sigma \vec{r}\times\left[\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]\rho d\forall = \frac{d}{dt}\iiint_\sigma (\vec{r}\times\vec{V}_{rel})\rho d\forall + \oiint_A (\vec{r}\times\vec{V}_{rel})(\rho\vec{V_r}\cdot\vec{n})dA$$



$$\vec V_r = \vec V - \vec U$$

$\vec V_r$: سرعت نسبت به حجم کنترل
$\vec V$: سرعت مطلق
$\vec U$: سرعت حجم کنترل

$$\vec U = r\omega\, \hat e_\theta$$

+ دستگاه مختصات متصل به روتور و مرکز آن روی محور چرخش
+ حجم کنترل نشان داده شده متصل به روتور.
+ حجم کنترل در دستگاه مختصات متصل به پره‌های روتور بدون تغییر شکل است $\quad \vec V_{rel} = \vec V_r$
+ جریان در حجم کنترل انتخاب شده دائم است

معادله گشتاور اندازه حرکت در حجم کنترل غیرلخت

$$\Big\{ \underbrace{\sum (\vec r \times \vec F)_\sigma}_{\text{ممان خارجی}} - \overbrace{\iiint_\sigma \vec r \times \big[\underbrace{\cancel{\ddot{\vec R}}}_{0} + 2\vec\omega \times \vec V_{rel} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec\omega}\times\vec r}}_{0} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)\big]\rho\, dV}^{I} \quad (1.5)$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}\iiint_\sigma (\vec r \times \vec V_{rel})\rho\, dV}}_{\text{0 دائم}} + \underbrace{\oiint_A (\vec r \times \vec V_{rel})(\rho \vec V_r \cdot \vec n)\, dA}_{II} \Big\}_z$$

فقط مولفه z معادله نیاز است

حال تک تک جملات محاسبه می‌شود

$$\Big[\sum (\vec r \times \vec F)_\sigma\Big]_z = T \quad (0.5)$$

$$\vec\omega = \omega \hat k, \quad \vec V_{rel} = V_{rel,r}\,\hat e_r + V_{rel,\theta}\,\hat e_\theta, \quad \vec r = r\hat e_r \quad (0.5)$$

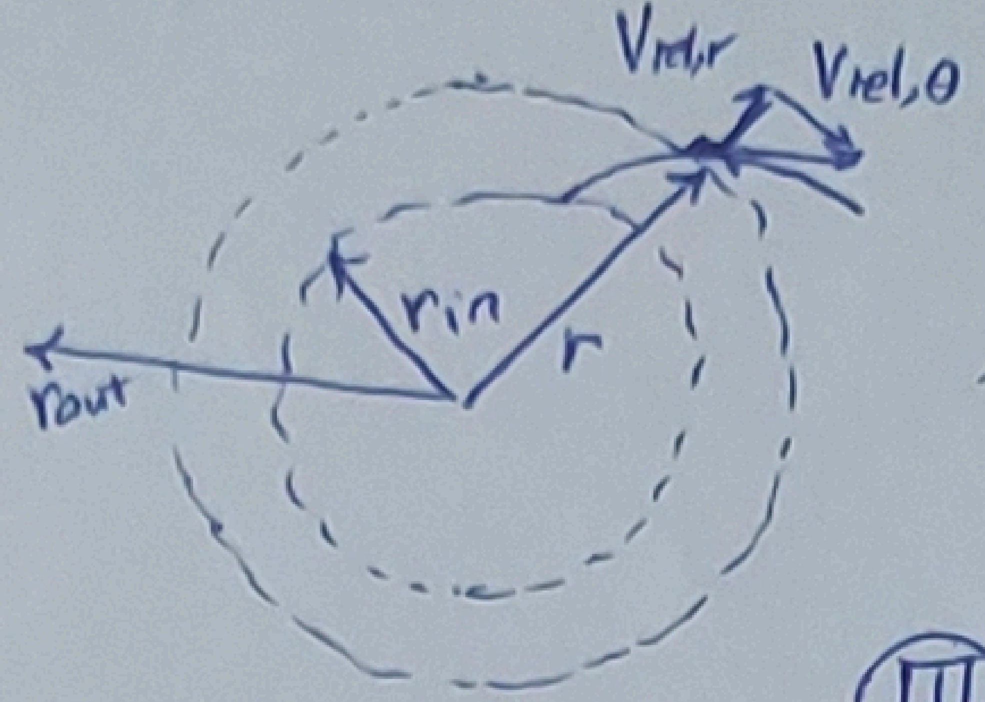
$$\rightarrow \big[\vec r \times (2\vec\omega \times \vec V_{rel})\big]_z = \big[(r\hat e_r)\times(2\omega\hat k \times (V_{rel,r}\,\hat e_r + V_{rel,\theta}\,\hat e_\theta))\big]_z = 2\omega r V_{rel,r}\, \hat k \quad (1)$$

$$\rightarrow \big\{\vec r \times [\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)]\big\}_z = \Big\{ r\hat e_r \times \big[\underbrace{\omega\hat k \times (\underbrace{\omega\hat k \times r\hat e_r}_{\hat e_\theta})}_{\hat e_r}\big]\Big\}_z = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow (\vec r \times \vec V_{rel})_z = (r\hat e_r)\times(V_{rel,r}\,\hat e_r + V_{rel,\theta}\,\hat e_\theta) = r V_{rel,\theta}\, \hat k \quad (1)$$

$$II \rightarrow \oiint (\vec r \times \vec V_{rel})_z \underbrace{(\rho \vec V_r \cdot \vec n)}_{\dot m =} dA = (-\dot m_{in})(r V_{rel,\theta})_{in} + (\dot m_{out})(r V_{rel,\theta})_{out} \quad (1)$$

$$I \rightarrow \Big\{\iiint \vec r \times (2\vec\omega \times \vec V_{rel})\rho\, dV\Big\}_z = 2\rho\omega \iiint_\sigma \underbrace{r V_{rel,r}}_{?}\, dV \quad III$$



$$\boxed{\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}}$$

بقای جرم
در حجم کنترل ورودی

$$\dot{m}_{in} = 2\pi r \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ارتفاع پره}}}{t} \rho V_{rel,r} \longrightarrow \boxed{V_{rel,r} = \frac{\dot{m}}{2\pi \rho t r}} \quad 1$$

$$\text{III} = 2\rho\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} r \left(\frac{\dot{m}}{2\pi\rho t r}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ 2\pi r t\, dr}}{d\forall} = 2\omega\dot{m}\int_{r_{in}}^{r_{out}} r\,dr = \quad 0.5$$

$$2\omega\dot{m}\, \frac{r^2}{2}\Big|_{r_{in}}^{r_{out}} = \omega\dot{m}\,(r_{out}^2 - r_{in}^2) \quad 1$$

جایگذاری
هم جملات
در معادله اصلی

$$\Longrightarrow \quad T = (-\dot{m}_{in})(rV_{rel,\theta})_{in} + (\dot{m}_{out})(rV_{rel,\theta})_{out} + \dot{m}\omega\,(r_{out}^2 - r_{in}^2)$$

$$= (-\dot{m}_{in})\, r_{in}\, \underbrace{\left(V_{rel,\theta_{in}} + r_{in}\omega\right)}_{V_{\theta,in}} + (\dot{m}_{out})\, r_{out}\, \underbrace{\left(V_{rel,\theta_{out}} + r_{out}\omega\right)}_{V_{\theta,out}} \quad 1$$