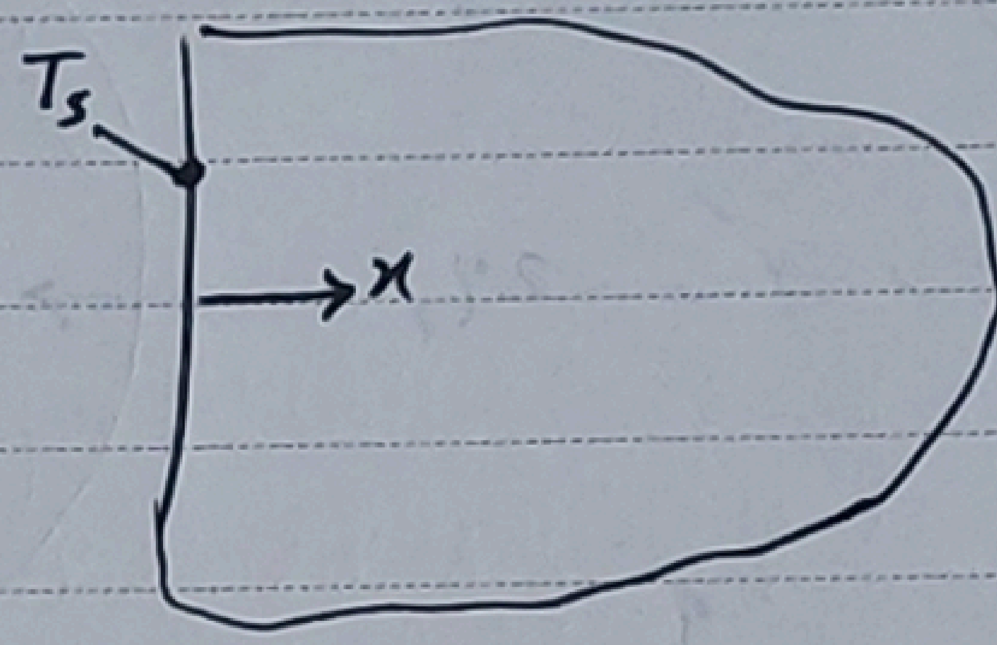
Subject :
Year . Month . Date . ( )

آنالیز

حل تحلیلی رسانایی گذرا در محیط نیمه متناهی به روش حل تشابهی Similarity solution

Case (I)



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(0,t) = T_s \ , \ T(\infty,t) = T_i$$

$$T(x,0) = T_i$$

بررسی می‌کنیم آیا با تغییر متغیر $\eta \equiv \dfrac{x}{f(t)}$ می‌توان مساله را بجای دو متغیر مستقل x و t برحسب یک متغیر η بیان کرد یا خیر. ($\underset{(x,t)}{PDE}$ تبدیل به $\underset{(\eta)}{ODE}$ می‌شود ؟)

محاسبه مشتقات موجود در معادله

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dT}{d\eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\frac{1}{f}}\Big) = \frac{1}{f}\,\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dT}{d\eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{f^2}\frac{d^2T}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{-\frac{f' x}{f^2}} = -x\frac{\overset{df/dt}{f'}}{f^2}\frac{dT}{d\eta}$$

جایگذاری در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی

$$\rightarrow \frac{1}{f^2}\frac{d^2T}{d\eta^2} = -\frac{x}{\alpha}\frac{f'}{f^2}\frac{dT}{d\eta} \rightarrow \frac{d^2T}{d\eta^2} = -\left(\frac{ff'}{\alpha}\right)\eta\,\frac{dT}{d\eta}$$

$$T(0,t) = T_s \longrightarrow T(\eta = 0) = T_s$$

$$T(\infty,t) = T_i \longrightarrow T(\eta = \infty) = T_i$$

برای اینکه معادله دیفرانسیل فقط تابع η باشد باید ضریب $\frac{ff'}{\alpha} = cte$ مقداری ثابت شود. آیا می‌توان $f(x)$ را طوری تعیین کرد که به این هدف برسیم؟ مقدار ثابت را مثلاً $cte = 2$ انتخاب می‌کنیم (دلخواه است و تاثیری در جواب ندارد)

$$\frac{ff'}{\alpha} = 2 \rightarrow f\overset{df/dt}{f'} = 2\alpha \rightarrow f\,df = 2\alpha\, dt \rightarrow \frac{f^2}{2} = 2\alpha t + \overset{\text{دلخواه}}{C^{\,0}} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} f = (4\alpha t)^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین متغیر تشابهی در حالت قابل حصول و بصورت $\eta = \dfrac{x}{f(t)} = \dfrac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ است.

حال لازم است معادله ODE زیر حل شود

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta} \quad ; \quad T(\eta=0)=T_s \quad , \quad T(\eta\to\infty)=T_i$$

$$y=\frac{dT}{d\eta} \; : \; y' = -2\eta y \longrightarrow \frac{dy}{y} = -2\eta\, d\eta \longrightarrow \ln y = -\eta^2 + C \longrightarrow y = \exp(-\eta^2 + C)$$

$$\frac{dT}{d\eta} = y = C_1 \exp(-\eta^2)$$

$$\xrightarrow{\int_0^\eta d\eta} T = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2)\,du + C_2$$

شرایط مرزی $T(\eta=0) = C_2 = T_s$

$$T(\eta\to\infty) = T_i = C_1 \underbrace{\int_0^\infty \exp(-u^2)\,du}_{\text{جدول انتگرال} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} + T_s \longrightarrow C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\longrightarrow \frac{T(\eta) - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\eta \exp(-u^2)\,du}_{\text{بصورت عددی برای هر } \eta \text{ محاسبه شود}}$$

$$(x,t) \longrightarrow \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \longrightarrow T(\eta)$$