

گزارش کار پروژه اول آنالیز عددی ۱

گروه ۶

۴ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ سوال ۱

۱.۱ صورت سوال

فرض کنید $fl(y)$ عدد k رقمی قطع شده y باشد، نشان دهید:

$$\frac{|y - fl(y)|}{|y|} \leq 10^{-k+1}$$

۲.۱ پاسخ

داریم :

$$\begin{aligned} & \frac{|0.d_1d_2\dots d_n \times 10^n - 0.d_1d_2\dots d_k \times 10^n|}{|y|} \\ &= \frac{|0.000\dots d_{k+1}d_{k+2}\dots d_n \times 10^n|}{|y|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} \times 10^{n-k}|}{|y|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2\dots d_n \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} \times 10^{-k}|}{|0.d_1d_2\dots d_n|} \end{aligned}$$

مخرج را تا یک رقم اعشار قطع میکنیم. داریم:

$$0.d_1 \leq 0.d_1 d_2 \dots \leq 1$$

پس:

$$\begin{aligned} &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} \times 10^{-k}|}{0.d_1} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} \times 10^{-k}|}{d_1 \times 0.1} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k}|}{d_1} \times \frac{10^{-k}}{\frac{1}{10}} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k}|}{d_1} \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

چون که:

$$0 < 0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k} < 1$$

$$1 \leq d_1 \leq 9$$

$$0 < \frac{0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k}}{d_1} < 1$$

پس

$$= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2}\dots d_{n-k}|}{d_1} \times 10^{-k+1} \leq 10^{-k+1}$$

■

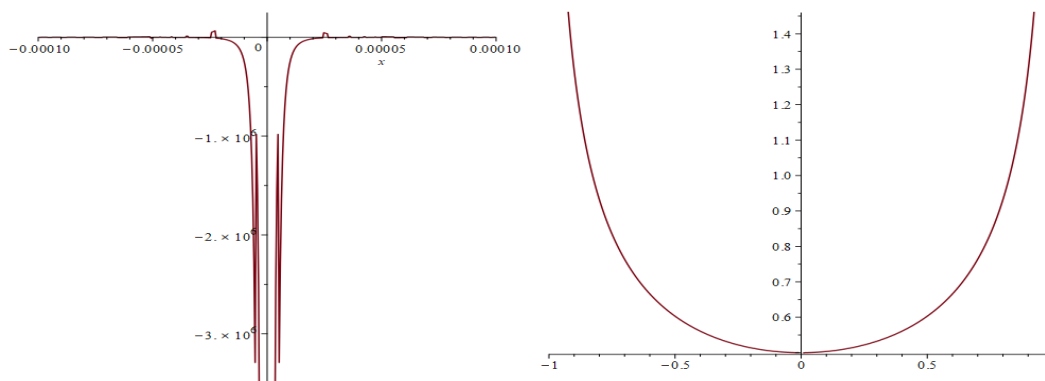
۲ سوال ۲

۱.۲ صورت سوال

فرض کنید $f(x) = \frac{2 \cdot \log(1+x) + 2 \cdot i \tan^{-1}(ix) + x^2}{-x^4}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = C \neq 0$ با داشتن سری مکلاورن توابع $\log(x)$ و $\tan^{-1}(x)$ مقادیر C و p را بیابید.

۲.۲ پاسخ

همانطور که در فایل میپل حل این سوال قابل مشاهده است، در مرحله اول با تعریف ضابطه اصلی تابع و رسم نمودار آن سعی میکنیم درکی هندسی از رفتار آن بیابیم. نمودار اول نشان میدهد که تابع در ۰ به مقداری نزدیک به ۰ میل میکند. اما با بررسی دقیق تر و محدود کردن دامنه نمایش نمودار مشاهده میشود که تابع در مقادیر نزدیک به صفر شدیداً نوسان میکند.



برای حل سوال در ابتدا بسط مکلاورن توابع را تا درجه ۱۰ محاسبه میکنیم. نرم افزار میپل از $O(x^y)$ برای نمایش درجه خطا در یک سری تیلور استفاده میکند. یا این توصیف با افزایش تعداد جملات سری تیلور یا درجه آن میتوان خطا را تا حد توانایی محاسباتی کامپیوتر کاهش داد. اما چون در این مورد x بسیار نزدیک به ۰ است میتوان با همین درجه پیش رفت چرا که وقتی x نزدیک به صفر است x^{11} بسیار کوچک خواهد بود.

$Order = 20$ برای این است که میپل سری هارا تا درجه حداکثر ۲۰ محاسبه کند و خطا کمی بیشتر کاهش پیدا کند. همانطور که گفته شد جملات $O(20)$ و $O(21)$ را از سری ها حذف میکنیم. تابع $f_2(x)$ را با چندجمله ای ها تعریف میکنیم. تابعی به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Lim(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x^n}$$

مقادیر Lim را برای n از ۱ تا ۱۰ محاسبه میکنیم و همانطور که مشاهده میشود بخشی از حدود تعریف نشده است. تابع Lim را این بار با اعمال قاعده هوییتال تعریف میکنیم و دوباره مقادیر Lim را برای n از ۱ تا ۱۰ محاسبه میکنیم. میبینیم که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x^2} = \frac{1}{3}$$

پس

$$L = \frac{1}{3}, p = 2$$

۳ سوال ۳

۱.۳ صورت سوال

با استفاده از یک برنامه عددی و تعریف دنباله ای سری ها نشان دهید سری های زیر به ترتیب همگرا و واگرا هستند.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

۲.۳ پاسخ

طبق تعریف همگرایی دنباله ها داریم:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad ; \quad |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$$

در صورت صدق گزاره بالا گوییم دنباله (α_n) به α همگراست. گوییم دنباله ای واگراست اگر همگرا نباشد. پس نقیض منطقی گزاره بالا را محاسبه میکنیم:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists n > N \quad ; \quad |\alpha_n - \alpha| \geq \varepsilon$$

با این توصیف الگوریتم را به این صورت می سازیم تا با گرفتن α و N به عنوان ورودی به دنبال کمترین میزان ε بگردد و به همراه اندیس عضو دنباله برگرداند. این الگوریتم هم برای نشان دادن همگرایی و هم واگرایی قابل استفاده است.

فایل متلب *Sequence.m* تعریف دنباله است که میتوان با تغییری کوچک دنباله $\frac{1}{n}$ را به $\frac{1}{n^2}$ تبدیل کرد و برعکس. *Convergence.m* فایل الگوریتم است که تابعی است در متلب که با گرفتن α و N مقادیر خواسته شده را برمیگرداند. *main.m* فایل اجرایی است که مقادیر رندوم برای α انتخاب میکند و با اجرای الگوریتم مقادیر را گرفته و در یک آرایه ذخیره میکند.

فایل های *mat* در پوشه *MATLAB* آرایه های ذخیره شده برای اجرای های مختلف اند. پیشوند C نمایش دهنده دنباله $\frac{1}{n}$ و D نمایش دهنده $\frac{1}{n^2}$ است.

برای اثبات همگرایی دنباله ، طبق تعریف انتظار داریم برای هر مقدار α ای یا یک n با ε کوچک پیدا شود یا n بزرگی پیدا شود. شکل های زیر جدول مربوط به آرایه اجراهای مجزا از الگوریتم برای مقادیر رندوم α اند.

	1	2	3		1	2	3
1	0.0052	1.2448	2	1	0.0115	1.2385	2
2	0.1958	1.0542	2	2	0.0672	1.1828	2
3	0.4445	0.8055	2	3	0.3576	0.8924	2
4	0.5497	0.7003	2	4	0.6799	0.5701	2
5	0.6359	0.6141	2	5	0.9082	0.3418	2
6	0.8995	0.3505	2	6	0.9111	0.3389	2
7	0.9382	0.3118	2	7	1.0580	0.1920	2
8	1.1171	0.1329	2	8	1.0970	0.1530	2
9	1.3629	0.0018	3	9	1.1921	0.0579	2
10	1.3887	0.0276	3	10	1.1940	0.0560	2
11	1.4761	0.0125	5	11	1.5272	2.1005e-04	8
12	1.5000	0.0086	6	12	1.5366	0.0032	9
13	1.5475	0.0022	10	13	1.7587	0.1139	8000
14	1.6725	0.0277	8000	14	1.8866	0.2418	8000
15	1.8971	0.2523	8000	15	1.9175	0.2726	8000

ستون اول مقادیر α ستون دوم مقادیر ε و ستون سوم مقادیر n است. همانطور که قابل مشاهده است برای مقادیری از α کوچک است و به صورت ناگهان مقادیر n به 8000 میرود که حد محاسبه اعضای دنباله است. این به این معنی است که دنباله همگرا به مقداری میان این دو α است. برای اثبات واگرایی انتظار داریم برای هر α یک n کوچک و یک ε کوچک پیدا شود.

83	8.7898	1.1505e-04	3687	19	1.8379	0.0045	3
84	8.8972	9.6251e-05	4104	20	1.9792	0.1042	4
85	8.9096	1.5744e-05	4156	21	2.0600	0.0233	4
86	9.1281	3.7631e-05	5171	22	2.1015	0.0182	4
87	9.1503	3.1862e-05	5287	23	2.2076	0.0757	5
88	9.2183	1.5103e-05	5659	24	2.2605	0.0228	5
89	9.2450	5.4962e-05	5812	25	2.4771	0.0271	6
90	9.2507	5.3647e-05	5845	26	2.5600	0.0328	7
91	9.2928	6.3250e-05	6097	27	2.8418	0.0128	9
92	9.3483	6.5690e-05	6445	28	2.9157	0.0133	10
93	9.5179	3.5764e-06	7636	29	2.9427	0.0137	10
94	9.5845	0.0201	8000	30	2.9465	0.0175	10
95	9.7094	0.1449	8000	31	2.9506	0.0217	10
96	9.7542	0.1897	8000	32	2.9977	0.0222	11
97	9.7956	0.2311	8000	33	3.1779	0.0022	13
98	9.8988	0.3344	8000	34	3.3031	0.0151	15

فایل های $D - ARR5.mat$, $C - ARR.mat$ شامل داده های بسیار بزرگ تری نسبت به موارد ذکر شده در گزارش هستند اما همچنان ادعای مطرح شده را تصدیق میکنند.

منابع
GitHub