گزارش کار پروژه اول آنالیز عددی ۱

گروه ۶

۱ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ سوال ۱

۱.۱ صورت سوال

فرض کنید $fl(y)$ عدد k رقمی قطع شده y باشد، نشان دهید:

$$\frac{|y - fl(y)|}{|y|} \leq 10^{-k+}$$

۲.۱ پاسخ

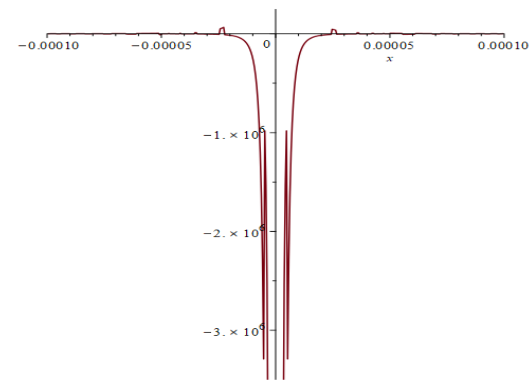
۲ سوال ۲

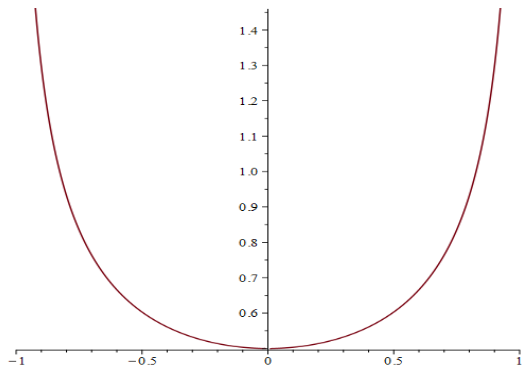
۱.۲ صورت سوال

فرض کنید $f(x) = \frac{2 \cdot log(1+x) + 2 \cdot itan^{-1}(ix) + x^2}{-x^4}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^p} = C \neq 0$ با داشتن سری مکلورن توابع $log(x)$ و $tan^{-1}(x)$ مقادیر C و p را بیابید.

۲.۲ پاسخ

همانطور که در فایل میپل حل این سوال قابل مشاهده است، در مرحله اول با تعریف ظابطه اصلی تابع و رسم نمودار آن سعی میکنیم درکی هندسی از رفتار آن بیابیم. نمودار اول نشان میدهد که تابع در ۰ به مقداری نزدیک به ۰ میل میکند. اما با بررسی دقیق تر و محدود کردن دامنه نمایش نمودار مشاهده میشود که تابع در مقادیر نزدیک به صفر شدیدا نوسان میکند.





برای حل سوال در ابتدا بسط مکلورن توابع را تا درجه ۱۰ محاسبه میکنیم. نرم افزار میپل از $O(x^y)$ برای نمایش درجه خطا در یک سری تیلور استفاده میکند. با این توصیف با افزایش تعداد جملات سری تیلور یا درجه آن میتوان خطا را تا حد توانایی مجاسباتی کامپیوتر کاهش داد. اما چون در این مورد x بسیار نزدیک به ۰ است میتوان با همین درجه پیش رفت چرا که وقتی x نزدیک به صفر است x^{11} بسیار کوچک خواهد بود.
$Order = 20$ برای این است که میپل سری هارا تا درجه حداکثر ۲۰ محاسبه کند و خطا کمی بیشتر کاهش پیدا کند. همانطور که گفته شد جملات $O(21)$ و $O(20)$ را از سری ها حذف میکنیم. تابع $f_2(x)$ را با چندجمله ای ها تعریف میکنیم. تابعی به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Lim(n) = \lim_{x \to 0} \frac{f_2(x)}{x^n}$$

مقادیر Lim را برای n از ۱ تا ۱۰ محاسبه میکنیم و همانطور که مشاهده میشود بخشی از حدود تعریف نشده است. تابع Lim را این بار با اعمال قاعده هوپیتال تعریف میکنیم و دوباره مقادیر Lim را برای n از ۱ تا ۱۰ محاسبه میکنیم. میبینیم که

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_2(x)}{x^2} = \frac{1}{3}$$

پس

$$L = \frac{1}{3},\ p = 2$$