Complejidad del Algoritmo de la Sucesión Fibonacci

A continuación se demostrará la complejidad del algoritmo de la sucesión Fibonacci en recurrencia definida. Donde se tiene lo siguiente:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \ para \, n > 1$$

Con las siguientes condiciones iniciales $T(0) = 0,\ T(1) = 1$.

Hacemos el cambio de $X^2 = T(n)$ obtenemos su ecuación característica:

$$X^2 - X - 1 = 0,$$

Donde las raíces de dicha ecuación son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto:

$$T(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para calcular las constantes $c_1 \ y \ c_2$ necesitamos utilizar las condiciones iniciales de la ecuación original, obteniendo lo siguiente:

$$T(0) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$T(1) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

Del sistema de ecuaciones obtenido tenemos:

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Sustituyendo entonces en la ecuación anterior, obtenemos lo siguiente:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \in O(\varphi^n)$$

Por lo tanto la complejidad del Algoritmo de la Sucesión de Fibonacci en recurrencia será: $O\left(\varphi^n\right)$ esto quiere decir una complejidad Exponencial.