En la fig. 6 se muestra la gráfica de la función diferencial de distribución uniforme, mientras que en la fig. 4, la gráfica de la función integral.

Problemas

1. Una magnitud aleatoria se prefija por la función diferencial

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ a\cos x & \text{para} \quad -\frac{\pi}{2}<x\leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{para} \quad x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Hallar el coeficiente a.

Respuesta $a=\frac{1}{2}$.

2. Una magnitud aleatoria está dada por la función diferencial

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0; \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} x & \text{para} \quad 0<x\leqslant \pi; \\ 0 & \text{para} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Hallar: a) la función integral; b) la probabilidad de que como resultado de la prueba la magnitud aleatoria tomá un valor acotado en el intervalo $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Respuesta a) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & \text{para} \quad 0<x\leqslant \pi; \\ 1 & \text{para} \quad x>\pi; \end{cases}$

b) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

3. La magnitud aleatoria X se prefija por la función integral

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0, \\ x & \text{para} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 1 & \text{para} \quad x>1. \end{cases}$$

Hallar la función diferencial.

Respuesta $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0, \\ 1 & \text{para} \quad 0<x\leqslant 1; \\ 0 & \text{para} \quad x>1. \end{cases}$

4. La magnitud aleatoria X está prefijada por la función integral

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & \text{para} \quad 0<x<\pi, \\ 1 & \text{para} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Hallar la función diferencial.

Respuesta $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} x & \text{para} \quad 0<x\leqslant \pi, \\ 0 & \text{para} \quad x>\pi. \end{cases}$

Capítulo doce

DISTRIBUCION NORMAL

§ 1. Características numéricas de las magnitudes aleatorias continuas

Extendemos las definiciones de las características numéricas de magnitudes discretas a las magnitudes continuas. Comencemos de la esperanza matemática.

Supongamos que una magnitud aleatoria continua X está prefijada por la función diferencial $f(x)$. Admitamos que todos los valores posibles de X pertenecen al segmento $[a, b]$. Descompongamos este segmento en n segmentos parciales de longitud $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ y elijamos en cada uno de ellos un punto arbitrario x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Para determinar la esperanza matemática de una magnitud continua por semejanza con la discreta, formemos la suma de los productos de los valores posibles de x_i por sus probabilidades de caer en el intervalo Δx_i (recordemos que el producto $f(x)\,\Delta x$ es aproximadamente igual a la probabilidad de que X caiga en el intervalo Δx):

$$\sum x_i \cdot f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Pasando al límite cuando la longitud del segmento máximo de los segmentos parciales tiende a cero, obtenemos la integral definida $\int_a^b x f(x)\,dx$.

Se llama *esperanza matemática de una magnitud aleatoria continua* X, cuyos valores posibles pertenecen al segmento $[a, b]$, la integral definida:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Si los valores posibles pertenecen a todo el eje x, tendremos que

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Se supone que la integral impropia converge absolutamente, es decir, existe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx$. Si esto no se cumpliese, el valor de la integral dependería de la velocidad de tendencia (por separado) del límite inferior hacia $-\infty$ y del superior hacia $+\infty$.

Por analogía con la dispersión de la magnitud aleatoria discreta se define también la de una magnitud continua.

Se llama *dispersión de una magnitud aleatoria continua* la esperanza matemática del cuadrado de su desviación.

Si los valores posibles de X pertenecen al segmento $[a, b]$, tendremos que

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\, dx;$$

si los valores posibles corresponden a todo el eje x,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)\, dx.$$

La desviación cuadrática media de la magnitud aleatoria continua se determina al igual que para una magnitud discreta, por la igualdad

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Nota 1. Se puede demostrar que las propiedades de la esperanza matemática y de la dispersión de magnitudes discretas se extienden también a las magnitudes continuas.

Nota 2. Para el cálculo de la dispersión es fácil obtener fórmulas más convenientes:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2.$$

Ejemplo. Hallar la esperanza matemática y la dispersión de la magnitud aleatoria X prefijada por la función integral

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ x & \text{para } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

SOLUCION. Hallamos la función diferencial

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

Hallamos la esperanza matemática

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Hallamos la dispersión

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

§ 2. Distribución normal

Se llama *normal* la distribución de las probabilidades de una magnitud aleatoria continua que se describe por la función diferencial

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Como podemos apreciar, *la distribución normal se determina por dos parámetros*: a y σ. Es suficiente prefijar estos parámetros para obtener la distribución normal. Mostremos que el sentido probabilístico de estos parámetros es el siguiente: a es la esperanza matemática, σ, la desviación cuadrática media de la distribución normal.

a) Por definición de la esperanza matemática de una magnitud aleatoria continua

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Introducimos un nuevo parámetro $z=\frac{x-a}{\sigma}$. De donde $x = \sigma z + a$, $dx=\sigma\,dz$. Teniendo en cuenta que los nuevos límites de integración son iguales a los anteriores, obtenemos

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

El primero de los sumandos es igual a cero (bajo el signo integral se halla una función impar; los límites de integración son simétricos respecto al origen de coordenadas). El segundo de los sumandos es igual a a $\left(\text{integral de Poisson } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\sqrt{2\pi}\right)$.

De este modo, $M(X)=a$, es decir, *la esperanza matemática de la distribución normal es igual al parámetro a.*

b) Según definición de la dispersión de una magnitud aleatoria continua, tomando en consideración que $M(X)=a$, tendremos

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Introducimos una nueva variable $z=\frac{x-a}{\sigma}$. De donde, $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma dz$. Teniendo en cuenta que los nuevos límites de integración son iguales a los anteriores, obtenemos

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot z e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Integrando por partes, poniendo $u=z$, $dv=ze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$, hallamos

$$D(X)=\sigma^2.$$

Por lo tanto,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma.$$

De esta manera, *la desviación cuadrática media de la distribución normal es igual al parámetro σ.*

Nota 1. La distribución normal de parámetros arbitrarios a y σ ($\sigma>0$) se llama *general.*

La distribución normal de parámetros $a=0$ y $\sigma=1$ se llama *normada*. Por ejemplo, si X es una magnitud normal de parámetros a y σ, entonces $U=\frac{X-a}{\sigma}$ es una magnitud normal normada, además $M(U)=0$, $\sigma(U)=1$. La función diferencial de distribución normada

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Los valores de esta función están tabulados (suplemento 1).

Nota 2. La función integral de distribución normal general (cap. XI, § 3).

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\,dz,$$

y de la normada

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Los valores de la función $F_0(x)$ están tabulados. Se comprueba fácilmente que

$$F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Nota 3. La probabilidad de que una magnitud normal normada X caiga en el intervalo $(0, x)$ se puede hallar utilizando la función de Laplace $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$. En efecto (cap. XI, § 2), $P(0<X<x)=\int_0^x \varphi(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\Phi(x)$.

Nota 4. Tomando en consideración $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ (cap. XI, § 4), propiedad 2) y, por lo tanto, en virtud de la simetría de $\varphi(x)$ respecto a cero,

$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx = 0{,}5$, por consiguiente, también $P(-\infty < X < 0) = 0{,}5$, es fácil obtener que $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$.
En efecto, $F_0(x) = P(-\infty < X < x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x) = 0{,}5 + \Phi(x)$.

§ 3. Curva normal

La gráfica de la función diferencial de distribución normal se llama *curva normal* (*curva de Gauss*).

Examinemos la función

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

por los métodos del cálculo diferencial.

1. Evidentemente, la función está definida en todo el eje x.
2. Para todos los valores de x la función toma valores positivos, es decir, la curva normal está situada encima del eje x.
3. El límite de la función, al crecer ilimitadamente x (en valor absoluto), es igual a cero: $\lim\limits_{|x|\to\infty} y = 0$, es decir, el eje x sirve de asíntota horizontal de la gráfica.
4. Examinemos la función respecto del extremo. Hallemos la derivada primera:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se aprecia fácilmente que $y' = 0$ cuando $x = a$, $y' > 0$ cuando $x < a$, $y' < 0$ para $x > a$. Por lo tanto, cuando $x = a$ la función tiene un máximo, igual a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. La diferencia $x - a$ está contenida en la expresión analítica de la función al cuadrado, es decir, la gráfica de la función es simétrica respecto a la recta $x = a$.
6. Examinemos la función en el punto de inflexión.

Hallemos la derivada segunda

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Se nota fácilmente que para $x = a + \sigma$ y $x = a - \sigma$ la derivada segunda es igual a cero y, al pasar estos puntos,

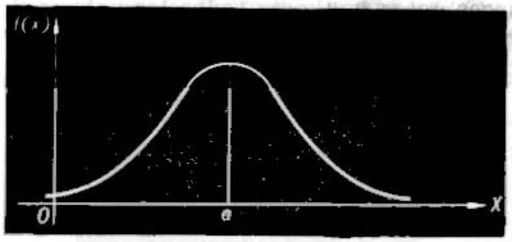

Fig. 7.

cambia de signo $\left(\text{en ambos puntos el valor de la función es igual a } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. Por consiguiente, los puntos $\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ y $\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ de la gráfica son puntos de inflexión.

En la fig. 7 se muestra la curva normal para $a = 1$; $\sigma = 2$.

§ 4. Influencia de los parámetros de la distribución normal sobre la fórmula de la curva normal

Aclaremos cómo influyen los valores de los parámetros a y σ en la fórmula y la disposición de la curva normal.

Se sabe que las gráficas de las funciones $f(x)$ y $f(x-a)$ tienen igual forma; desplazando la gráfica de $f(x)$ en el sentido positivo del eje x en a unidades de la escala para $a > 0$, o en sentido negativo para $a < 0$, obtenemos la gráfica de $f(x-a)$. De aquí se deduce que *la variación de la magnitud del parámetro a* (esperanza matemática) *no altera la forma de la curva normal, sino da lugar solamente a su desplazamiento a lo largo del eje x; hacia la derecha, si a crece, y hacia la izquierda*, si a decrece.

El problema cambia al variar el parámetro σ (desviación cuadrática media). Como se ha mostrado en el párrafo anterior, el máximo de la función diferencial de distribución normal es igual a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. De donde se deduce que *al crecer* σ, *la ordenada máxima de la curva normal decrece, mientras que la propia curva deviene más suave, es decir, se aproxima al eje* x; *cuando decrece* σ, *la curva normal deviene más aguda y se alarga en sentido positivo del eje* y.

Cabe hacer notar que para todos los valores de los parámetros a y σ el área limitada por la curva normal y el eje x

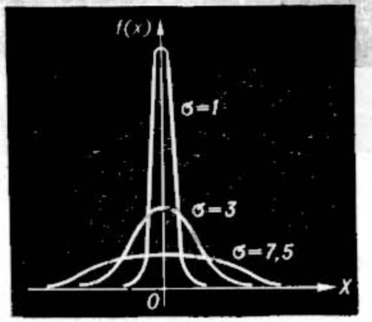

Fig. 8.

se mantiene igual a la unidad (cap. XI, § 4, segunda propiedad de la función diferencial).

En la fig. 8 están representadas las curvas normales para distintos valores de σ y $a = 0$. El dibujo ilustra claramente cómo la variación del parámetro σ influye en la forma de la curva normal.

Conviene señalar que cuando $a = 0$ y $\sigma = 1$ la curva normal $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ se llama *normada*.

§ 5. Probabilidad de que una magnitud aleatoria normal caiga en un intervalo dado

Ya sabemos que si una magnitud aleatoria X está dada por la función diferencial $f(x)$, la probabilidad de que X tome un valor perteneciente al intervalo (α, β), es la siguiente

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Supongamos que la magnitud aleatoria X está distribuida por una ley normal. En tal caso, la probabilidad de que X tome un valor perteneciente al intervalo (α, β), es igual a

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Transformamos esta fórmula de manera que se puedan utilizar las tablas hechas. Introducimos una nueva variable $z = \frac{x-a}{\sigma}$. De aquí, $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma\,dz$. Hallamos los nuevos límites de integración. Si $x = \alpha$, tendremos que $z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$; si $x = \beta$, $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

Por consiguiente, tenemos

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}(\sigma\,dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Utilizando la función de Laplace

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz,$$

finalmente obtenemos

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (*)$$

Ejemplo. Una magnitud aleatoria X está distribuida por una ley normal. La esperanza matemática y la desviación cuadrática media de esta magnitud son respectivamente iguales a 30 y 10. Hallar la probabilidad de que X tome un valor correspondiente al intervalo (10, 50).

SOLUCION. Utilizamos la fórmula (*). Según los datos del problema $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, por lo tanto,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Por la tabla (suplemento 2) hallamos

$$\Phi(2) = 0{,}4772.$$

De aquí, la probabilidad buscada es

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

§ 6. Cálculo de la probabilidad de desviación prefijada

Frecuentemente se necesita calcular la probabilidad de que la desviación de una magnitud aleatoria normalmente distribuida X respecto del valor absoluto es menor que un número positivo dado a, es decir, hay que hallar la probabilidad de que se cumpla la desigualdad $|X - a| < \sigma$.

Sustituimos esta desigualdad por la doble desigualdad equivalente

$$-\delta < X - a < \delta,$$

o bien

$$a - \delta < X < a + \delta.$$

Utilizando la fórmula (*) (§ 5), obtenemos

$$P(|X-a| < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) =$$
$$= \Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Tomando en consideración la igualdad

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

(la función de Laplace es impar), finalmente obtenemos

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

En particular, para $a = 0$

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

En la fig. 9 se muestra claramente que, si dos magnitudes aleatorias están normalmente distribuidas y $a = 0$, la probabilidad de tomar un valor, correspondiente al intervalo $(-\delta, \delta)$, es mayor para la magnitud que tiene un valor menor de σ. Este hecho corresponde totalemente al sentido

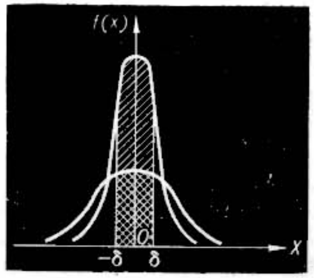

Fig. 9.

probabilístico del parámetro σ (σ es la desviación cuadrática media; este caracteriza la dispersión de la magnitud aleatoria alrededor de su esperanza matematica).

Nota. Evidentemente, los sucesos consistentes en el cumplimiento de las desigualdades $|X - a| < \delta$ y $|X - a| \geqslant \delta$ son opuestos. Por eso, si la probabilidad de que se cumpla la desigualdad $|X - a| < \delta$ es igual a p, la probabilidad de la desigualdad $|X - a| \geqslant \delta$ es igual a $1 - p$.

Ejemplo. La magnitud aleatoria X está distribuida normalmente. La esperanza matemática y la desviación cuadrática media de X son respectivamente iguales a 20 y 10. Hallar la probabilidad de que la desviación sea en valor absoluto menor que tres.

SOLUCION. Utilizamos la fórmula

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Según los datos del problema $\delta = 3$, $a = 20$, $\sigma = 10$. Por lo tanto,

$$P(|X-20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi\ (0{,}3).$$

Por la tabla (suplemento 2) hallamos $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$. La probabilidad buscada es

$$P(|X-20| < 3) = 0{,}2358.$$

§ 7. Regla de las tres sigmas

Transformamos la fórmula (§ 6)

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

poniendo $\delta = \sigma t$. En conclusión obtenemos

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

Si $t = 3$ y, por lo tanto, $\sigma t = 3\sigma$, tendremos que

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973,$$

es decir, la probabilidad de que la desviación sea en valor absoluto menor que el triple de la desviación cuadrática media, es igual a 0,9973.

En otras palabras, la probabilidad de que la magnitud absoluta de la desviación sea *mayor* que el triple de la desviación cuadrática media, es muy pequeña y, precisamente, igual a 0,0027. Esto significa que sólo en 0,27% de los casos puede ocurrir así. Estos sucesos, partiendo del principio de imposiblidad de los sucesos poco probables, pueden considerarse prácticamente inciertos o imposibles. En esto reside precisamente la esencia de la regla de las tres sigmas: *si una magnitud aleatoria está distribuida normalmente, la magnitud absoluta de su desviación respecto de la esperanza matemática no es mayor que el triple de la desviación cuadrática media.*

En la práctica, la regla de las tres sigmas se aplica así: si la distribución de la magnitud aleatoria que se estudia no se conoce, pero si se cumple la condición indicada en la regla expuesta, se puede suponer que la magnitud a estudiar está distribuida normalmente; en caso contrario no está distribuida normalmente.

§ 8. Noción del teorema de Liapunov

Se sabe que las magnitudes aleatorias normalmente distribuidas están profusamente difundidas en la práctica. ¿A qué se debe esto? La respuesta la dio el eminente matemático ruso A. M. Liapunov (teorema límite central de la teoría de las probabilidades). Damos sólo el *corolario del teorema de Liapunov: si una magnitud aleatoria X es la suma de un número muy grande de magnitudes aleatorias mutuamente independientes, la influencia de cada una de ellas en toda la suma es despreciable, entonces X tiene una distribución próxima a la normal.*

En la práctica se tropieza con mayor frecuencia, precisamente, con estas magnitudes aleatorias.

El ejemplo siguiente aclara lo dicho.

Ejemplo. Supongamos que se mide cierta magnitud física. Cualquier medición da solamente un valor aproximado de la magnitud a medir, puesto que sobre el resultado de la medición influyen muchos factores aleatorios independientes (temperatura, oscilación del instrumento, humedad, etc.). Cada uno de estos factores engendra un «error parcial» ínfimo. Sin embargo, dado que el número de estos factores es muy grande, el conjunto de su acción ocasiona ya un «error total» notable.

Considerando el error total como suma de un número muy grande de errores particulares mutuamente independientes, podemos deducir que el error total tiene una distribución próxima a la normal. La experiencia confirma la validez de esta deducción.

§ 9. Estimación de la desviación de la distribución teórica de la normal. Asimetría y exceso

La distribución de frecuencias relativas se llama *empírica*. La estadística matemática estudia la distribución empírica.

La distribución de las probabilidades se llama *teórica*. La distribución teórica es estudiada por la teoría de las probabilidades. En este párrafo se examinan las distribuciones teóricas.

Al estudiar las distribuciones, diferentes de la normal, surge la necesidad de estimar cuantitativamente esta diferencia. Con este propósito se introducen características especiales, en particular, la asimetría y el exceso. Para la distribución normal estas características son iguales a cero. Por eso, si para la distribución a estudiar la asimetría y el exceso tienen pequeños valores, se puede suponer la proximidad de esta distribución a la normal. Por el contrario, los grandes valores de la asimetría y del exceso denotan la desviación considerable de la normal.

¿Cómo estimar la asimetría? Se puede demostrar que, para la distribución simétrica (la gráfica de tal distribución

Problemas

En los problemas 1—2 se necesita verificar para el nivel de significación 0,05 la hipótesis nula sobre la igualdad de las medias de grupos. Se supone que las muestras han sido extraídas de conjuntos normales con idénticas dispersiones generales.

1.

Número del experimento i	Niveles del factor F_j				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
$\overline{x}_{grj}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Respuesta $F_{obs}=6,13$; $F_{cr}(0,05;\ 4;\ 15)=3,06$. La hipótesis nula se rechaza.

2.

Número del experimento i	Niveles del factor F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	6	6	9	7
2	7	7	12	9
3	8	11	13	10
4	11	12	14	10
$\overline{x}_{grj}$	8	9	12	9

Respuesta $F_{obs}=2,4$; $F_{cr}(0,05;\ 3;\ 12)=3,49$. No hay porque rechazar la hipótesis nula.

Tabla de valores de la función $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Suplemento 2

Tabla de valores de la función $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,18	0,0714	0,36	0,1406	0,54	0,2054
0,01	0,0040	0,19	0,0753	0,37	0,1443	0,55	0,2088
0,02	0,0080	0,20	0,0793	0,38	0,1480	0,56	0,2123
0,03	0,0120	0,21	0,0832	0,39	0,1517	0,57	0,2157
0,04	0,0160	0,22	0,0871	0,40	0,1554	0,58	0,2190
0,05	0,0199	0,23	0,0910	0,41	0,1591	0,59	0,2224
0,06	0,0239	0,24	0,0948	0,42	0,1628	0,60	0,2257
0,07	0,0279	0,25	0,0987	0,43	0,1664	0,61	0,2291
0,08	0,0319	0,26	0,1026	0,44	0,1700	0,62	0,2324
0,09	0,0359	0,27	0,1064	0,45	0,1736	0,63	0,2357
0,10	0,0398	0,28	0,1103	0,46	0,1772	0,64	0,2389
0,11	0,0438	0,29	0,1141	0,47	0,1808	0,65	0,2422
0,12	0,0478	0,30	0,1179	0,48	0,1844	0,66	0,2454
0,13	0,0517	0,31	0,1217	0,49	0,1879	0,67	0,2486
0,14	0,0557	0,32	0,1255	0,50	0,1915	0,68	0,2517
0,15	0,0596	0,33	0,1293	0,51	0,1950	0,69	0,2549
0,16	0,0636	0,34	0,1331	0,52	0,1985	0,70	0,2580
0,17	0,0675	0,35	0,1368	0,53	0,2019	0,71	0,2611

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664
0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671
0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306	1,85	0,4678
0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686
0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693
0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699
0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706
0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713
0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382	1,91	0,4719
0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726
0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732
0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738
0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744
0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441	1,96	0,4750
0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756
0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761
0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767
0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484	2,00	0,4772
0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,02	0,4783
0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,04	0,4793
0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515	2,06	0,4803
0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,08	0,4812
0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,10	0,4821
0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,12	0,4830
0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,14	0,4838
0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564	2,16	0,4846
0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,18	0,4854
0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861
1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868
1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875
1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881
1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4887
1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893
1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,32	0,4898
1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641	2,34	0,4904
1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,36	0,4909
1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,38	0,4913

Continuación

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	2,98	0,4986
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,00	0,49865
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,20	0,49931
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,40	0,49966
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,88	0,4980	3,60	0,499841
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,90	0,4981	3,80	0,499928
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,92	0,4982	4,00	0,499968
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,94	0,4984	4,50	0,499997
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,96	0,4985	5,00	0,499997
2,58	0,4951	2,78	0,4973				

Suplemento 3

Tabla de valores $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Suplemento 4

Tabla de valores $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Suplemento 5

Puntos críticos de la distribución χ^2

Número de grados de libertad k	Nivel de significación α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56