Algebra de Sucesos

Caracterizamos a los sucesos como conceptos abstractos.

Llamaremos álgebra de sucesos , a un conjunto de sucesos, a los resultados de una prueba. A la palabra prueba la entendemos en un sentido amplio. A cada prueba asociamos un conjunto de resultados , sucesos..

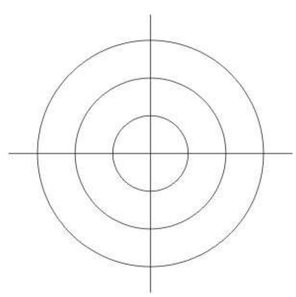
Sean los sucesos A, B, C, D ... elementos de un álgebra de sucesos. Consideramos A y B sucesos identicos, cuando como resultado de la prueba siempre se realizan los dos o no se realizan, escribimos:

$$A = B$$

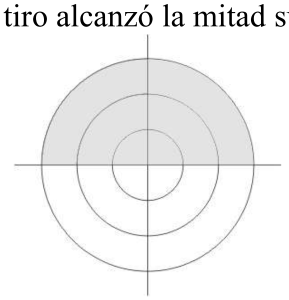
La no realizacion de un suceso, A, es tambien un suceso que se escribira $\bar{A}$. Lo llemaremos suceso opuesto de A.

De la definición resulta que: $A = \bar{\bar{A}}$. (1)

Sean A y B dos elementos de la misma algebra de sucesos. Supongamos que la prueba consiste en tirar sobre un blanco. Dividimos el blanco en cuatro partes iguales

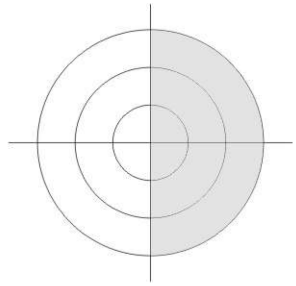


Llamaremos suceso A: el tiro alcanzó la mitad superior del blanco.



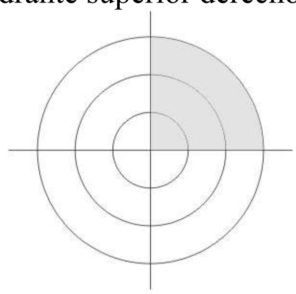
A

Llamemos suceso B: el tiro alcanzó la mitad derecha del blanco



B

La proposicion A y B, o enunciado de otra manera,ambos sucesos se realizan, significa que el tiro alcanzo el cuadrante superior derecho.



AB

Llamaremos suceso C a: ambos sucesos Ay B se realizan, producto de los sucesos A y B y escribimos

$$C = A\,B$$

Como AB es independiente del orden de A y B la operación producto es conmutativa

$$AB = BA \qquad (2)$$

Es evidente que $A\,A = A$ (3)

La primera definición del producto se generaliza para varios factores:

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{(Asociativa)} \;\; (4)$$

Si la realización de un suceso A excluye la de otro B, entonces A B es un suceso imposible. Consideraremos al suceso imposible como un suceso y lo escribiremos : $\emptyset$.

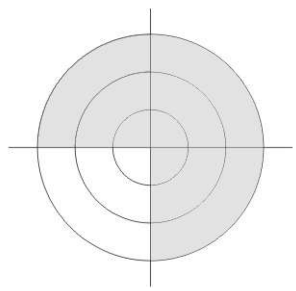
Si A y B se excluyen mutuamente, lo expresamos

$$AB = \emptyset$$

Es evidente que

$$A\bar{A} = \emptyset \qquad (5)$$

Si ahora nos preguntamos en la prueba de tiro al blanco, si se realiza al menos uno de los sucesos A o B, respondemos que esto significa que el tiro no ha alcanzado al cuadrante inferior izquierdo



A + B

El suceso que se produce cuando al menos uno de los sucesos A o B se realizan se llama suma de A y B y se escribe:

$$C = A + B$$

Es evidente que

$$A + B = B + A \qquad \text{(conmutatividad)} \quad (6)$$

Y tambien que

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \text{(asociatividad)} \quad (7)$$

La definición de suma de dos sucesos se puede cumplir en el caso de varios términos.

A + B ocurre cuando A o B ocurren, ‘o’ no significa que A y B se excluyen uno al otro. Si vemos el gráfico A + B significa que el tiro llega a la mitad superior, suceso A, o bien llega al cuadrante inferior derecho $\bar{A}B$

De donde surge:

$$A+B=A+\bar{A}B \qquad (8)$$

Con esta fórmula, toda suma de sucesos se puede descomponer en suma de sucesos que se excluyen dos a dos

PROPIEDAD

Es evidente que

$$A+\bar{A}=\Omega \qquad (9)$$

Tambien que A + A se realiza con seguridad, el suceso cierto y lo representamos con Ω

$$A+\Omega=\Omega \qquad (10)$$

$$\bar{\Omega}=\emptyset \qquad \bar{\emptyset}=\Omega \qquad (11)$$

Las siguentes relaciones son evidentes:

$$A\emptyset=\emptyset \qquad (12)$$

$$A+\emptyset=A \qquad (13)$$

$$A\Omega=A \qquad (14)$$

$$A+\Omega=\Omega \qquad (15)$$

Para poder efectuar todas las operaciones de un algebra se plantea si :

$$A(B+C)=AB+AC \qquad \text{(distributividad)} \quad (16)$$

$A(B+C)$ se realiza cuando se realiza A asi como B o C, es decir cuando se realizan A y B o A y C, o sea cuando ocurre $AB+AC$

De la distributividad resulta (regla de absorción)

$A+AB=A$ (17)

En efecto:

$$A+AB=A\Omega+AB=A(\Omega+B)=A$$

En el algebra de los sucesos hay una segunda distributividad:

$$A+BC=(A+B)(A+C) \qquad (18)$$

Lo demostramos

$$\begin{aligned}(A+B)(A+C)&=A(A+C)+B(A+C)\\ &= A+AC+AB+BC\\ &= A+BC\end{aligned}$$

Demostraremos aún algunas relaciones importantes:

(19) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

El suceso AB ocurre si y solamente si , no ocurre AB, es decir si A y B no ocurren simultáneamente, el suceso A+B ocurre si y solamente si , A o B no ocurren (o los dos) no ocurren. Luego ambas proposiciones son equivalentes.

Demostrar que: $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ (20).

Observación:

Comparando la expresiones (16) y (18), reconocemos que una se deduce de la otra cambiando el signo de adición (+) por el signo de multiplicación y recíprocamente.Tales expresiones se llaman duales, una de la otra.. Por ejemplo son duales:

$$A+AB=A \quad \text{y} \quad A(A+B)=A$$

Sustracción de sucesos:

Definimos la sustracción en el álgebra de sucesos por la igualdad :

$$B-A=B\,\overline{A}$$

Reglas de cálculo:

$$A(B-C)=AB-AC$$

$$AB-C=(A-C)(B-C)$$

El suceso opuesto se puede escribir:

$$A=\Omega-A$$

La sustracción en general no cumple todas las leyes del álgebra ordinaria:

Así en general : $(A-B)+B$ no es igual a A.

También en general $A+(B-C)$ no es igual a $(A+B)-C$

ESPACIO DE MUESTRAS – SUCESOS

Cuando hablemos de probabilidades, siempre nos referimos a un espacio de muestras, esto significa físicamente que tiene relación con un experimento.

La noción de espacio de muestras y sus puntos son ideas primitivas, no definidas.

La colección de los puntos del espacio representan las ocurrencias, resultados, de un experimento y cada punto representa una y solo una ocurrencia.

Llamaremos suceso aleatorio, evento **A** a un conjunto de puntos de espacio de muestras que representan las ocurrencias de un experimento en las que A ocurre.

También podemos decir que **A** es un subconjunto del espacio que identificamos como Ω .

Definición: Llamaremos a Ω el suceso cierto.

Ejemplo:

El espacio de muestra correspondiente al experimento de tirar un dado dos veces tiene 36 puntos. El suceso aleatorio **B**, ambos son pares, tiene como componente a:

(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 2), (6; 4), (6; 6)

Definición: Un espacio de muestras es llamado discreto si contiene una cantidad finita de puntos o un conjunto de puntos infinito y numerable.

AXIOMAS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

Sea Ω un espacio de muestas **A**, un suceso aleatorio cualquira.

Axioma I: A cada suceso aleatorio le corresponde un cierto número, P(A), llamado probabilidad de **A**, que satisface la desigualdad.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Axioma II: La probabilidad del suceso cierto es igual a uno

$$P(\Omega)=1$$

Axioma III: La probabilidad de la suma finita o numerable de sucesos aleatorios, disjuntos, es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos.

$$P(\sum_k A_k)=\sum P(A_k)$$

$$\{A_k\}, k=1,2,3,...$$