La distribución binomial

Supongamos que los artículos que salen de una línea de producción son clasificados como defectuosos (D) o no defectuosos (N) y que se eligen aleatoriamente tres artículos de la producción de un día.
El espacio de muestras para este experimento es:

$$\Omega = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}$$

tambien podríamos escribir

$$\Omega = S_1.S_2.S_3 \text{ ; producto cartesiano}$$

donde

$$S_i = \{D, N\}, i = 1, 2, 3$$

Supongamos que la probabilidad que un artículo elegido sea defectuoso es 0,2 y que sea no defectuoso es 0,8. Además, que esas probabilidades sean iguales para cada artículo y que la clasificación de cualquier artículo sea independiente de la clasificación de cualquier otro artículo.

Nos interesa saber cuantos artículos defectuosos se encuentran en los resultados, sin considerar el orden que ocurrieron.
Es decir consideramos la variable aleatoria X que asigna a cada elemento de Ω, el número de artículos defectuosos. Luego, el conjunto de valores posibles de X es 0, 1, 2, 3.

La distribución de X es:

X = 0	si y solo si ocurre NNN
X = 1	si y solo si ocurre DNN, NDN ó NND
X = 2	si y solo si ocurre DDN, DND ó NDD
X = 3	si y solo si ocurre DDD

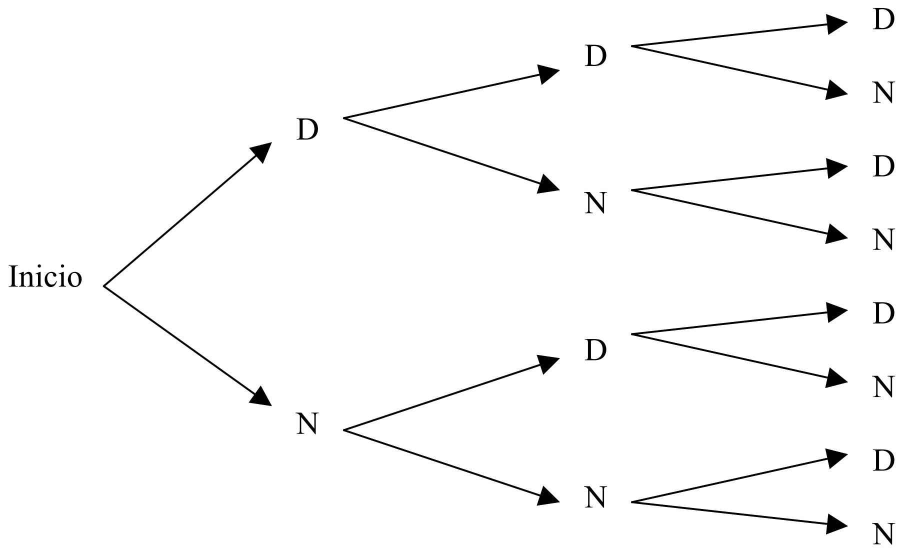
Luego

$$P(X = 0) = (0,8)^3$$
$$P(X = 1) = 3.0.2(0,8)^2$$
$$P(X = 2) = 3(0,3)^2.0,8$$
$$P(X = 3) = (0,2)^3$$

Observar que:

$$\sum_{i=0}^{i=3} P(X = i) = 1$$

y podriamos graficarlo con un árbol:



(Gráfica de tres ensayos de Bernoulli)

Generalizando las nociones del ejemplo anterior:

Consideremos un experimento y sea A un suceso asociado con el experimento. Supongamos $P(A) = p$, luego $P(\overline{A}) = 1 - p$. Consideremos tambien n repeticiones independientes de un experimento. Luego el espacio de muestras Ω, es el conjunto de todas las sucesiones $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, donde $a_i \in A$ o $\overline{A}$, según que A o $\overline{A}$ ocurra en la i-ésima repeticiones.

Definimos la variable X como:

X = números de veces que ocurrió el experimento.

Llamaremos a X, variable aleatoria con parámetro n y p. Sus valores posibles son 0, 1, 2, ... n.
Decimos de otra manera que X tiene una distribución binomial y a cada repetición la llamaremos ensayo de Bernoulli.

Teorema
Sea X una variable aleatoria binomial, con base en n repeticiones:

$$P(X = k) = b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Demostración: Realizarla como ejercicio.

Observación:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=\left[p+(1-p)\right]^{n}=1$$

Ejemplo 1

Supongamos que un tubo de radio puesto en un cierto equipo tenga una probabilidad de 0,2 de funcionar más de 500 horas.
Si probamos 20 tubos, ¿Cuál es la probabilidad que k de ellos funcionen más de 500 horas?

$k=0,1,2,...,20$

Calcular la distribución de probabilidad y obtener su gráfica.

Ejemplo 2

Al poner en funcionamiento una máquina, existe cierta posibilidad que el operario cometa un error. Reconozcamos que el operario aprende en cuanto sabe que la probabilidad de cometer errores disminuye cuando use la maquina en repetidos intentos. Supongamos que hace n intentos y que son estadisticamente independientes. Supongamos tambien que la probabilidad de cometer un error en la i-ésima prueba es $\frac{1}{i+1}; i=1,2,...,n$
Definimos a X como una variable aleatoria que representa el número de operaciones sucesivas. ¿Porque X no está distribuida binomialmente?

Calculemos $P(X=3)$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}.\frac{2}{\underline{3}}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\underline{3}}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{\underline{4}}.\frac{4}{5}+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{\underline{5}}$$