“同心协力”策略研究

摘 要

“同心协力”是一项团队协作的活动。本文通过对团队各成员拉力，排球受力以及鼓的受力三者的分析，给出最佳的每个人的用力方向、时机和力度。

问题一，对球、鼓进行受力分析；接着，对球和鼓的运动过程进行分析，计算出球在完成一次碰撞中损失的能量，该能量应不超过鼓对球提供的能量；考虑在鼓能提供最大动能的位置使鼓球相撞，即在上升的碰撞时刻应满足加速度为0，此时鼓所受的总拉力与重力相等。通过对能量的约束和对力的约束，再结合颠球高度不低于40厘米，使得颠球次数尽可能多，建立颠球模型得到最佳策略各队员在同一时刻出力大小、方向均为以及颠球高度：。

问题二，将鼓分成份，认为每个人的拉力只对应一份。计算出每份力对于相对应的鼓可以提起的高度、该力的作用点到鼓心的距离。将拉鼓的三维模型转化为平面上的二维模型，借助辅助线，做出一条平分拉力总值的辅助线，使用二分法将二维模型转化成线模型。通过求平均值的方法再将线模型转化成两点模型，将N个拉力简化成两个拉力，再计算出这两个拉力对于鼓上升距离的差值，通过这两个拉力点之间的距离，利用反正切函数的定义计算得到倾斜角度。

针对表1数据各倾斜角如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 倾角（度） | 0.3941 | 0.853 | 0.4265 | 1.5145 | 3.0269 | 3.0269 | 2.9731 | 1.9406 | 1.0882 |

问题三，根据问题二，由于队员的发力时机和力度做不到很精确，所以在问题一的策略需要进行调整。对于队员数为偶数的情况，通过事先观察每个队员的发力力度和时机，将队员归类，建立队员发力“习惯”的匹配优先级模型。队员“习惯”相差越小，匹配优先级越大，将优先级最大的两名队员放于鼓直径所在的一条直线上。对于队员个数为奇数的情况，视作增加一名发力力度为0，时机为0的队员，使队员人数变为偶数，利用队员人数为偶数时的模型进行求解，得到人员位置的调整结果。

问题四，题目中要求将球调整为竖直状态弹跳，即为使球水平方向上的速度变为0。由于空气阻力和摩擦力对本题的影响较大，故此处忽略不计。便可以建立鼓与小球共速运动的模型，通过鼓对小球的支持力改变小球的运动方向而不对小球做功，小球速度的改变仅与其重力做功有关。而鼓与小球进行共速运动的方法为：由阴影指向的两名队员通过调整拉力点的高低，进而调整鼓的角度，最终使两者一起运动。

关键词：最优协作策略 倾角变化模型 匹配优先级模型 共速运动

# 一、问题重述

“同心鼓”是大家同心协力才能完成的一项拓展活动。具体地说，即每个人各拿一条长度相同的绳子，绳子的另一端共同连接着鼓，并且均匀地分布在鼓身的圆周，使鼓面保持水平。排球从离鼓面中心垂直上方位置40厘米处落下，团队成员紧抓绳子末端，用鼓面将排球连续弹至离开鼓面40厘米以上，低于此高度，则活动结束。

活动所用排球质量为270克。鼓面直径为40厘米，鼓身高度为22厘米，鼓的质量为3.6千克。团队人数不得低于8人，各队员之间的最小距离不得小于60厘米。

根据所给条件，研究以下问题：

问题一，在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，讨论这种情形下团队的最优协作策略。给出该策略下的颠球高度。

问题二，因为实际上团队成员发力的时机和力度不可能做到精确控制，故鼓面可能会出现倾斜。建立模型描述团队成员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设成员人数为8，绳长为1.7米，鼓面初始位置在绳子水平11厘米以下，处于水平静止状态，根据表1提供的团队成员的不同发力时机和力度，求0.1秒时鼓面的倾斜角度。

问题三，结合现实情况，根据问题二的模型，在问题一中给出的策略是否需要调整？如果需要，怎样调整?

问题四，当鼓面发生倾斜时，球跳动的方向不再竖直，因此需要团队成员调整拉绳策略。设成员人数为10，绳长2米，球的反弹高度为60厘米，与竖直方向的倾斜角度为1度，倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与队员的夹角之比为1:2。给出可精确控制条件下所有团队成员的发力时机和力度，使得排球调整为竖直方向颠，并分析这种调整策略的实施效果。

# 二、问题分析

## 2.1 问题一

球下落的那一刻，团队成员将绳放松，使之与鼓面有一定角度。在球下落的过程中，通过拉绳，使鼓在最大上升速度处与球相碰撞，即完成颠球一次。

在理想状态下，各成员用力方向时机、力度和方向一致，所以最优协作策略的目标是在保证排球连续弹至离开鼓面不低于40厘米，颠球次数最多，此时给出用力时刻绳子与鼓面的夹角和用力的大小。为分析方便，可假设绳和鼓初始位置保持水平。

先对球分析：球在整个运动过程中能量守恒，为了保证排球弹至离开鼓面不低于40厘米，故球在竖直方向上下运动时的空气阻力做功应不少于拉鼓时提供的动能。再对鼓分析：考虑拉鼓时提供的最小动能情况下，在保证各队员出力情况尽可能小，由拉力和鼓的下降高度以及该动能之间的关系，可建立优化模型，给出最佳颠球策略得到该策略下的颠球高度。

## 2.2 问题二

在现实情形中，鼓面会倾斜，为求得团队成员的发力时机和力度与特定时刻的鼓面倾斜角的关系，计算鼓距鼓中心所在竖直方向的距离以及鼓上升的距离确定倾角。

将鼓分成份，认为每个人的拉力只对应一份。利用牛顿第二定律、路程公式和加速度是速度的导数公式。以单个成员分析，根据牛顿第二定律以及加速度是速度的导数可推导出关系式，由于速度是变量，故根据距离是速度在时间下的积分，计算出每份力对于相对应的鼓可以提起的高度、该力的作用点到鼓心的距离。将拉鼓的三维模型转化为平面上的二维模型，借助辅助线，做出一条平分拉力总值的辅助线，使用二分法将二维模型转化成线模型。通过求平均值的方法再将线模型转化成两点模型，将N个拉力简化成两个拉力，再计算出这两个拉力对于鼓上升距离的差值，通过这两个拉力点之间的距离，利用反正切函数的定义计算得到倾斜角度。

## 2.3 问题三

根据问题二，相较于问题一中的理想状态，现实情形下队员的发力力度和时机做不到非常准确，所以问题一中的策略需要调整。在问题一的策略下，可以事先通过比赛测试每个人的发力情况，即发力的“习惯”。根据统计所得的“习惯”，在比赛开始之前改变队员们的位置，采用两两匹配的方式，使匹配队员的位置处于一条直线上，而不是采用随机的位置。

通过队员的“习惯”将其归类，对于偶数类，将所处于一类的进行一一匹配之后，对于各类剩余的球员进行优先级排序，优先级大的队员优先进行匹配。对于奇数类，增加一名发力力度为0、发力时机为0的队员，使人数变为偶数，即可利用偶数的模型解决奇数的问题。

## 2.4 问题四

题目要求通过所有队员的发力时机和力度，将球调整为竖直状态弹跳，即为要求将球水平方向的速度变为0。由于空气阻力可以明显改变球水平方向的速度，所以在这个问题中忽略空气阻力带来的影响。那么只能利用鼓对于球的支持力，仅改变球速度的方向而不改变其大小。

而这个方法可以借鉴物理中的一个简单滑坡模型，这个模型中滑坡与小球始终接触，但是只改变了小球的运动方向，在不考虑滑坡摩擦力的情况下，小球的速度变化仅与滑坡的高度有关，借鉴此思路，便可想到利用鼓的支持力改变小球水平方向，即将小球调整为竖直状态弹跳的方法。

# 三、模型假设

为解决问题，现提出以下假设：

1.球与鼓的碰撞看作完全弹性碰撞；

2.在短时间内，人的拉力为恒力；

3.游戏开始后人的位置不能移动

4.绳子不会发生形变

# 四、符号说明

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 符号说明 |
| 空气阻力 | |
|  | 排球的质量 |
|  | 鼓的质量 |
|  | 鼓面半径 |
|  | 绳长 |
| 排球向下运动过程中克服空气阻力做功 | |
| 排球向上运动过程中克服空气阻力做功 | |
| 拉鼓过程中，鼓的动能 | |
|  | 参与游戏的人数 |
| 第个人 | |
| 拉鼓过程中，第个人作用在鼓上的拉力 | |
|  | 拉鼓过程中，绳子与水平方向的夹角 |
|  | 球在水平面的投影与距离较近队员的夹角 |
|  | 球相对于竖直方向产生的倾斜角度 |

# 五、模型的建立

## 5.1 建立“同心鼓”理想颠球模型

## 5.1.1 球与鼓的运动过程

在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度。为了计算方便，假设初始位置绳与鼓保持水平。根据球下落时刻离鼓面中心上方的高度，拉着的绳子放松，使绳子与鼓有一定的倾斜角度。当鼓与球碰撞时，各队员用力拉绳，使鼓与绳处于同一水平位置，完成一次颠球。以此循环，实现连续颠球。

## 5.1.2 对人分析

人用手在水平方向沿小臂拉绳，如图1所示：



图1 小臂拉绳示意图

查阅相关资料，得到成年人平均小臂长度，故



且



故



即



## 5.1.3 对球分析

在球的整个运动过程中，能量守恒【1】。对球的向下运动过程分析：球向下运动的初始时刻，球在距离鼓面40厘米处，球的速度是。球向下运动的末时刻，球在距离鼓面0厘米处，此时球的速度最大，记为。

球向下运动的过程中，除受到重力（为球的质量，为重力系数），还会受到空气阻力的影响。其受力分析如图2：



图2 球下落过程中受力分析

对球的向上运动过程分析：球向上运动的初始时刻，球在距离鼓面0厘米处，球的速度记为。球向上运动的末时刻，球在距离鼓面不小于40厘米处，球的速度为。

球向上运动的过程中，除受到重力（为球的质量，为重力系数），还会受到空气阻力的影响，其受力分析如图3



图3 球上升过程中受力分析

## 5.1.4 对鼓分析

假设每个人的拉力都相等，记拉力与鼓面之间的夹角为，鼓由最低处到鼓与绳平齐的位置的高度记为，绳长为，为鼓处于最低处时拉力与鼓面的夹角。对鼓做受力分析，受的拉力与自身的重力，将拉力沿水平竖直方向正交分解，受力分析如图4：



图4 鼓的受力分析

## 5.1.5 对整体分析

球从处下落，在向下运动的过程中空气阻力做功【2】为，向上运动的过程中空气阻力做功为，上升至处。鼓由最低位置上升至水平位置的过程中，会产生动能。对球从到的过程使用能量守恒定律。且必定满足有:

 （5-1）



在理想状态下，假定每次球所弹高度均等于40厘米。令

两边同时消去，即：

 （5-2）

其中



故

 （5-3）

其中：表示下落或者上升的高度，为空气阻力系数，为空气密度，为物体迎风面积，为物体与空气的相对运动速度。

在不考虑空气阻力时，从40cm落下，在时球有最大速度





，当用代替时可以简化求解克服空气阻力做功，并且带来的误差在可接受的范围内，故

 （5-4）

其中



故

 （5-5）

在碰撞的过程中有动量守恒【3】，设正方向竖直向上



向下运动的末时刻即为向上运动的初始时刻，故

，方向向下

鼓上升的过程近似看做匀加速运动，故

，方向向上

在鼓上升的过程中与静止小球在鼓速度最大处进行碰撞，动量守恒，故

 （5-6）

得

，方向向上

为球在初速度为的情况下与鼓进行碰撞，故

，方向向上

，方向向上

综上所述



 （5-7）

在计算过程中为降低计算难度，对在保证求解结果大于精确值的前提下，进行近似求解，得到。

则鼓在竖直方向上有向上且大小为的力，向下且大小为的重力，则由能量守恒得

 （5-8）

其中：



则可推导出

 （5-9）

且



得

 （5-10）

## 5.1.6 建立理想颠球模型

在鼓上升到鼓的速度最大的位置进行碰撞，对该位置分析，此时鼓的加速度为0

建立等式

在整体的分析中有式（5-10）

联立两式得



（5-11）

通过计算求解即可得到拉力以及下降后绳子与水平方向的倾斜角度。

## 5.2 建立鼓的倾角变化模型

个拉力点，各点的发力时机与力度不同，会使鼓发生倾斜，将其中的个点简化到两个点，求出这两个点使鼓上升的高度差与两点之间的距离，再求出两个边的反正切函数得到鼓的倾斜角度。

## 5.2.1团队成员发力时机相同，力度不同

## （1）的计算

将拉鼓的三维模型转化成二维模型：个团队成员用力拉鼓，每两个团队成员之间的角度为，将此投影在平面上。以八人为例作图5



图5 八人为例投影

将二维模型转化为一维模型：第个人在鼓上的拉力作用点记为，与的距离记为，鼓面半径为，且。做一条辅助直线，使得该直线与任意一个队员拉力所在直线重合，用二分法改变直线旋转的角度使得两侧的拉力和相等，最终的旋转角度为，确定辅助直线后，将平面上的所有点都投影到该直线上，此时有

 （5-12）

将一维模型转化为点模型：为正的点的构成的集合为，该集合中的元素个数记为。为负的点的构成的集合记为，该集合中的元素个数记为。引入辅助函数



对于为正的点有



对于为负的点有



将为正的点转换成一个点，记为。为负的点转换成一个点，记为，计算公式为





 （5-13）

## （2）的计算

记为第个人，为第个人拉鼓上升的距离，拉鼓上升所用时间为，为第个人的拉力，以单个团队成员分析，由牛顿第二定律公式得：

 （5-14）

即



由于



故



即

 （5-15）

又因为在鼓运动的过程中速度是变量，根据距离公式



可得

 （5-16）

将（5-10）代入（5-11）可得：



即：

 （5-17）

故





将为正的点转换成一个点，记为。为负的点转换成一个点，记为，计算公式为





 （5-18）

## （3）鼓的倾角变化模型

根据（1）（2）所求出的和，可建立如下倾角变化模型：

 （5-19）

## 5.2.2团队成员发力时机不同，力度不同

针对团队成员发力时机不同，力度不同问题，可根据时机的不同状态将个拉力划分，对于划分后的每一类，可看做团队成员发力时机相同，力度不同的情形，即可应用5.2.1的模型求解。

## 5.3 建立队员的优先级模型

结合现实情况，根据问题二的模型，在问题一中给出的策略需要调整。调整方案分为队员个数为偶数的情况和队员个数为奇数的情况。

（1）队员个数为偶数的调整方案

赛前将所有球员进行测试，统计每位球员的发力大小和发力时机。根据统计的数据，根据各队员发力大小和发力时机，将最相似的两队员安排在发力点关于鼓心对称的位置上。

记，，，………，，

记 ，，这里为第个队员的发力时机（单位：秒），为个队员在的发力时机的用力大小（单位：牛顿）。

计算和的范数：



以范数最小建立队员匹配模型：

 （5-20）

按照队员匹配模型，综合发力时机及用力大小进行对比，对队员进行相似匹配，匹配最好的两队员分为一组，把其安排在发力点关于鼓心对称的位置上。

（2）队员个数为奇数的调整方案

若队员个数为奇数，添加一个虚拟人，此人的发力时机和发力大小都为0。此时个队员可按队员个数为偶数的调整方案进行分析。

## 5.4 建立鼓与小球的共速运动模型

由题意可知，小球再次与鼓面接触时的运动轨迹如图6所示：



图6 小球的运动轨迹

在小球竖直下落的1阶段，由于忽略空气阻力，根据机械能守恒定律，可得出球在第一次接触鼓面时的速度。记为小球倾斜之后的反弹高度小球第一次下落时，根据机械能守恒定理，即可得到



小球在空中运动的过程中，重力不做功，根据机械能守恒定理，可得运动过后，小球速度不变，且速度方向关于竖直方向对称，则有，



小球运动到空中至再次落在鼓面的过程中，由于忽略空气阻力，小球受力分析如图7所示



图7 小球的受力分析

根据机械能守恒定理，可得到小球再次接触鼓面的速度，之后鼓与小球开始接触，通过调整鼓的速度，使得鼓沿着球的方向进行匀速支点转动，此时小球与鼓可看作一个整体，对整体进行受力分析如图8：



图8 小球与鼓整体的受力分析

记为球在水平面的投影所指的两名队员的合力，为小球与鼓共速运动时竖直方向上的位移，以小球和鼓整体作为研究对象，在其旋转的过程中，根据能量守恒定理，可得到二者的共速运动模型，公式如下：



且



由于小球在空中运动前后速度方向关于竖直方向对称，力的作用位移与鼓面直径的关系如图9所示：



图9 小球运动的几何关系

由图可得：





球与鼓一起旋转时，整体只受重力影响，从两者接触到旋转至水平位置时，只有重力做功，最后球的速度方向会变成竖直方向。在这个过程中，只需要投影所指的两个队员调整发力和时机，根据机械能守恒定理，即可求出两个队员发出的合力。针对两个队员，球的运动轨迹和队员两个队员的分力方向如图10所示



图10 队员合力与分力的关系

记为球在水平面上的投影距离较近的队员的发力力度，为球在水平面上的投影距离较远的队员的发力力度；对于两位队员的分力，由正弦定理可得到公式：



综合上述，则可求出对应的、,结合投影即可得出使球恢复竖直弹跳状态的方法。

# 六、模型求解

## 6.1 颠球模型求解

对于公式





代入求得

，



由



计算得



根据颠球模型与求得的；已知，队员之间距离不小于60cm，故



当,得到最小的（cm）



即可得出：



## 6.2 倾角变化模型的求解

根据所给初始条件：队员人数为8，绳长为1.7m，鼓面初始时刻水平静止，初始位置较绳子水平时下降11cm以及表中所给的发力时机和用力大小数据，利用问题二建立的倾角变化模型，通过Matlab编程可求得不同发力时机和用力大小下鼓面倾角的度数，求解结果见表1 ，程序代码见附录一。

表1 发力时机（单位：）和用力大小（单位：）不同取值下的鼓面倾角

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 序号 | 用力参数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 鼓面倾角（度） |
| 1 | 发力时机 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.3941 |
| 用力大小 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 2 | 发力时机 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.8530 |
| 用力大小 | 90 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 3 | 发力时机 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.4265 |
| 用力大小 | 90 | 80 | 80 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 4 | 发力时机 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.5145 |
| 用力大小 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 5 | 发力时机 | -0.1 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.0269 |
| 用力大小 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 6 | 发力时机 | -0.1 | 0 | 0 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.0269 |
| 用力大小 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 7 | 发力时机 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.9731 |
| 用力大小 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 8 | 发力时机 | 0 | -0.1 | 0 | 0 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 1.9406 |
| 用力大小 | 90 | 80 | 80 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 9 | 发力时机 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.1 | 0 | 0 | -0.1 | 1.0882 |
| 用力大小 | 90 | 80 | 80 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 |

## 6.3 匹配优先级模型的求解

为验证问题三模型的优劣，利用表一数据，此时队员人数为8。

记为第个队员第次的实验结果，，为第个队员第次实验的发力时机（单位：秒），为第个队员第次实验在发力时机的用力大小（单位：牛顿）。

记为第个队员第次实验结果的均值，，这里。

利用表一数据代入（5-20）式中得到队员六种分组方案并求出每种情况下的倾斜角，如表2：

表2 六种分组方案下的鼓面倾斜角

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 第一组 | 第二组 | 第三组 | 第四组 | 倾斜角（度） |
| 第一种方案 | 3，6 | 5，8 | 1，4 | 2，7 | 1.3502 |
| 第二种方案 | 3，6 | 7，8 | 1，4 | 2，5 | 1.1384 |
| 第三种方案 | 3，7 | 5，8 | 1，4 | 2，6 | 1.3502 |
| 第四种方案 | 3，7 | 6，8 | 1，4 | 2，5 | 1.3502 |
| 第五种方案 | 6，7 | 5，8 | 1，4 | 2，3 | 1.3502 |
| 第六种方案 | 6，7 | 3，8 | 1，4 | 2，5 | 0.9063 |

因调整后第六种方案种，鼓的倾斜角最小，故选用第六种方案的人员分配方式调整策略。

## 6.4 共速运动模型的求解

将数值、、代入中，可得：



再将、、代入如下公式中，









可得：,将其代入下式中：



则可得：



由此可得出答案：除投影指向的两名队员外，其余8名队员通过调整力度，始终使其面前的绳处于水平状态。对于投影指向的两名队员，离投影较近的队员，用78.3818N的力；离投影较远的队员，用40.0664N的力，并且在球与鼓接触时，使鼓随球做弧度为1°的圆周运动直至鼓面水平后，再开始随其他队员一起颠起球。

实际效果：在现实中难以实现，由于角度过小，投影处两名队员的力度与弧度不易把控，并且使鼓与球同时做圆周运动很艰难。但是在可精确条件下，通过精细调整发力力度和时机，可以实现此方案。

# 七、模型评价

## 7.1 模型优点

本文结合题目与实际颠球情况，恰当地给出最优策略，求解得到题目给出的不同情形下的用力方向、时机和力度，并解决了题目中的相关的问题。

在球下落和上升运动过程中，考虑到了二者克服空气阻力做功不同，这使得模型更准确；同时也考虑到人在拉鼓时最省力以及颠球次数最多等因素，使得模型简单易懂，更贴合实际。

对于问题三，进行归类和匹配的时候，方法比较容易理解，且在考虑奇数情况的时候利用假设的方法巧妙的转化为了偶数的问题。并且对于鼓，只需考虑绳结数为偶数的情况，在实际应用中节省了物资和时间。

针对模型四，方法借鉴于物理模型，在理论上比较可靠，对于队伍整体而言容易做到，且每位队员所进行的力皆为恒力，难度不大。

## 7.2 模型缺点

为方便计算，此模型未充分考虑在球与鼓碰撞时因形变而损失的动能，使所得的结果有一定的误差。

模型四较难以理解，并且在实际情况中，阴影指向的两名队员对鼓和球共速的要求不易达到，且很难捕捉到球与鼓接触的一瞬间。

## 7.3 模型改进

比赛前进行大量实验和推测，了解每位队员发力“习惯”相较于标准的具体偏差数值，之后在第一个归类之后进行再次精细的分类，将第二次分类中偏差接近一致的队员进行优先级匹配。

针对模型四，可利用摩擦力做功或者空气阻力做功来减小小球水平方向上的速度，则会使方法变得简单和易于理解。

# 八、参考文献

[1]王少杰，顾牧，吴天刚.新编基础物理学上册（第二版）.北京：科学出版社，2014.7

[2]百度文库，空气阻力公式，https://baike.baidu.com/item/空气阻力/1245819?fr=aladdin，2019年9月3日

[3]百度文库，动量守恒定律，https://baike.baidu.com/item/动量守恒定律/552651?fr=aladdin，2019年9月13日

[4]百度文库，标准排球的直径，https://zhidao.baidu.com/question/8649722.html ，2019年9月13日

[5]姜启源，谢金星，叶俊.数学模型（第五版）[M].北京：高等教育出版社，2009

[6]马昌凤，林伟川.现代数值计算方法（MATLAB版）.北京：科学出版社，2008

# 九、附录

附录一：倾角模型的Matlab求解源程序

%函数1：kk即为倾斜角，传入参数出力时机、出力大小

function [kk] = w2\_20190816(F,t)

N = length(F);

B=0;

B\_s = 180;

B\_x = 0;

[sum1,sum2]=jjjj(F,B);

if sum1 == sum2,BB = 0;end

if sum1~=sum2

B = 90;

for i =1:10

[sum1,sum2]=jjjj(F,B);

if sum1>sum2,B\_x = B;end

if sum1<sum2,B\_s = B;end

if sum1 == sum2,BB = B;end

B = (B\_s+B\_x)/2;

end

end

x = zeros(8,1);d= zeros(8,1);

m = 3.6;g = 9.8;r = 0.2;

A\_f=zeros(8,1);A\_z=zeros(8,1);

sum\_fd = 0;sum\_zd = 0;

sum\_fx = 0;sum\_zx = 0;

num\_f =0;num\_z=0;

k = (pi/180)\*3.7096;

for i = 1:8

t(i) = t(i)-0.1;

end

abs(t);

for i = 1:8

x(i) = 0.5\*(t(i)^2)\*((F(i)\*sin(k)-(m\*g/8))/(m/8));

d(i)=r\*cos(((360\*(i-1)/8)-BB)\*pi/180);

if abs(x(i))<0.000000001,x(i) =0;end

if abs(d(i))<0.000000001,d(i) =0;end

end

for i = 1:8

if d(i)<0

sum\_fd = sum\_fd+d(i);

sum\_fx = sum\_fx+x(i);

A\_f(i) = i;

end

if d(i)>0

sum\_zd = sum\_zd+d(i);

sum\_zx = sum\_zx+x(i);

A\_z(i) = i;

end

if d(i)==0,

A\_f(i)=0;

A\_z(i)=0;

end

end

for i =1:8

if A\_f(i)~=0

num\_f = num\_f+1;

end

if A\_z(i)~=0

num\_z = num\_z+1;

end

end

xl=sum\_fx/num\_f;

xr=sum\_zx/num\_z;

dl=sum\_fd/num\_f;

dr=sum\_zd/num\_z;

if xl<xr,c\_x = xr-xl;end

if xl>xr,c\_x = xl-xr;end

if dl<dr,c\_d = dr-dl;end

if dl>dr,c\_d = dr-dl;end

kk = (180/pi)\*atan(c\_x/c\_d);

end

%函数2

function [sum1,sum2] = jjjj(F,B)

N = length(F);

sum1 = 0;sum2 = 0;

num1 = 0;num2 = 0;

a = 360/N;

jiao = ones(8,1);

n\_1 = zeros(8,1);n\_2 = zeros(8,1);

for i = 1:8

jiao(i) = a\*(i-1);

end

r1 = 180+B; r2 = 0+B;r3 = 180+B;r4 = 360+B;

if r1>360,r1 = r1-360;end

if r2>360,r2 = r2-360;end

if r3>360,r3 = r3-360;end

if r4>360,r4 = r4-360;end

for i = 1:8

if (jiao(i)<r1)&&(jiao(i)>=r2)

n\_1(i) = i;

else

n\_2(i) = i;

end

end

for i = 1:8

if n\_1(i)~=0, num1 = num1+1;end

if n\_2(i)~=0, num2 = num2+1;end

end

b1 = zeros(8,1);c1 = zeros(num1,1);

b2 = zeros(8,1);c2 = zeros(num2,1);

m=0;

for i=1:8

if n\_1(i)~= 0,b1(i) = i;end

end

for i =1:8

for j = i+1:8

if b1(i)>b1(j)

tmp = b1(i);

b1(i) = b1(j);

b1(j) = tmp;

end

end

end

for i = 1:8

if b1(i) == 0,m = m+1;end

if b1(i) ~=0,c1(i-m)=n\_1(b1(i));end

end

m=0;

for i=1:8

if n\_2(i)~= 0,b2(i) = i;end

end

for i =1:8

for j = i+1:8

if b2(i)>b2(j)

tmp = b2(i);

b2(i) = b2(j);

b2(j) = tmp;

end

end

end

for i = 1:8

if b2(i) == 0,m = m+1;end

if b2(i) ~=0,c2(i-m)=n\_2(b2(i));end

end

if B == jiao(1)||B == jiao(2)||B == jiao(3)||B == jiao(4)||B == jiao(5)||B == jiao(6)||B == jiao(7)||B == jiao(8)

t = 0;

tt = 0;

else

t = F(c2(1));

tt = F(c1(num1));

end

for i = 1:8

flag1= 0;

flag2= 0;

if i == c2(1)

sum1 = sum1+t\*(1-(B/a));

sum2 = sum2+t\*(B/a);

flag1 = 1;

end

if i == c1(num1)

sum1 = sum1+tt\*(B/a);

sum2 = sum2+tt\*(1-(B/a));

flag2 = 1;

end

if n\_1(i)~=0

sum1 = sum1+F(i);

end

if n\_2(i)~=0

sum2 =sum2 +F(i);

end

sum1 = sum1-flag1\*tt;

sum2 = sum2-flag2\*t;

end

end