金融工程

人工智能/指数增强

“指数增强”新思维——人工智能 + 传统金融

分析师：包赞 S1230518090006
baozan@stocke.com.cn TEL:021-80108127

人工智能

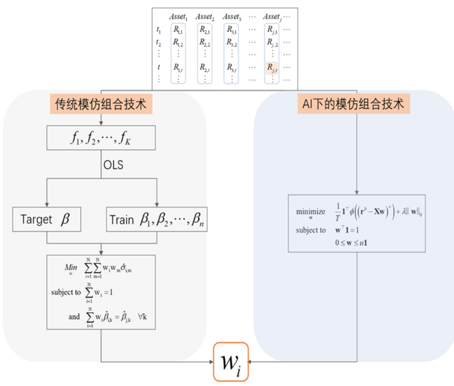
◆**模型思想**

本文目标是寻找到一种技术，在复制一个组合或者指数的同时，产生一些超额收益。模仿组合在学术领域是个老话题，顾名思义，是通过基础资产权重的设定，能够让这个组合和目标组合有差不多的收益表现。当然，不可能有一模一样的收益率曲线，既然不能完全相同，那么从投资业绩角度考虑会希望能够通过技术处理让其大概率有超额收益。所以，模仿组合技术，字面上意思是“制造”一个组合来“模仿”目标组合，实际操作上暗含着超额收益。引申来说，“模仿组合”是以模拟原有组合表现为基础，以能获得超额收益为目标。

◆**方法介绍**

传统方法通过寻找定价因子，计算目标组合 beta，再通过优化技术让模仿组合 beta 和其相等，以此达到复制的目的。流程较长，每个流程都涉及不同的统计和优化技术。考虑复杂系统的不稳定性，作者试图利用更直接的方法来复制，设计一种优化算法，直接利用基础资产的某种组合来跟踪目标组合的收益序列。事实证明，**在优化方法构造得当的情形下，是可以利用较少股票组合来模仿目标组合的收益表现，且大概率产生超额收益。需要特别说明的是，本文介绍的方法，计算效率高且无需日常维护。**

传统与 AI 模仿组合方法流程比对：



◆**回测效果**

为了展现 AI 算法具备模仿并产生超额收益的能力，我们拿以下三个组合作为目标组合：沪深 300 指数；富国沪深 300 指数增强基金；2013 年之前成立的指数增强基金每期（125 交易日）排名前三的等权组合。回测区间是 20130101 到 20190322，回测结果显示：**目标组合为沪深 300 指数时，月度调仓频率下，年化收益达到 15.66%,同期指数年化收益为 7.23%；季度调仓下，年化收益仍可达到 15%，信息比率为 1.89。**

业绩展示：

◆**模型用途**

AI 下模仿组合技术有如下应用场景：1、指数跟踪，由于能够用较少的股票复制一个指数且有超额收益，可以运用在普通指数基金上；2、指数增强，能够大概率产生超额收益，增强效果良好，且调仓频率较低；3、FOF 组合构建，一方面可以节约管理费与申赎费用，另一方面可以复制不可交易指数，扩大了工具范围。4、权重优化，主动权益基金经理也可以运用该技术，为个股权重设置提供参考。5、运用该方法进行期现套利。

证券研究报告

正文目录

1. 引言 4
2. 传统金融中的模仿组合方法 5
2.1. 模仿组合与多因子 5
2.2. 模仿组合技术准备 5
2.3. 传统模仿组合的构建方法 6
3. 人工智能下的模仿组合技术 8
3.1. 传统技术 AI 化 8
3.2. AI 下的模仿组合方法 9
3.3. AI 技术效果展示 12
4. 回测效果展示 14
4.1. 以沪深 300 指数为目标 14
4.2. 以富国沪深 300 指数增强为目标 15
4.3. 以每期指数增强前三平均为目标组合 17
4.4. 策略优点与应用 19
5. 优化算法介绍 21
5.1. 优化最小化算法简介 21
5.2. 构建技术 23
5.3. 算法示例 24

A creative approach to enhanced index investing —— Artificial intelligence and classical finance

Abstract

Mimicking portfolios for factors or portfolios are often used in asset pricing studies. Our findings cast doubt on the usage of traditional mimic methods, because of the irregular excess return of them. In this paper, we present an AI methodology that properly takes into account the goal of return enhancement, which could be used as an enhanced indexing strategy. The empirical strategy backtestings of the AI method show us good performances.

图表目录

图 1: 传统模仿组合方法与 AI 下方法计算流程比对 9
图 2: Huber 损失函数图 11
图 3: 组合累计收益片段展示 13
图 4: 2013-01-04 至 2019-03-22 以沪深 300 为目标下的组合累计收益表现 14
图 5: 2013-01-04 至 2019-03-22 以富国沪深 300 增强为目标下的组合累计收益表现 16
图 6: 2014-01-02 至 2019-03-22 以 Top3 基金组合为目标下的组合累计收益表现 18
图 7: 不同参数得出的组合持股数量（月度调仓） 19
图 8: 不同参数得出的组合持股数量（季度调仓） 20
图 9: 优化最小化迭代逼近函数图示 22

表 1: 沪深 300 指数增强基金池 12
表 2: 以沪深 300 为目标的不同目标函数下模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限） 15
表 3: 以富国沪深 300 指数增强为目标的模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限） 17
表 4: 以每期收益前三的等权组合为目标的模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限） 18

1. 引言

模仿组合方法在金融理论研究中有着很重要的应用，尤其在构造宏观因子方面，由于宏观数据的不好获得性，很多数据都是低频的，构造宏观因子的模仿组合可以提高数据频率，为深入的定价研究提供基础。此外，模仿组合的构建，可以用来对冲相关经济风险，所以，关于模仿组合的技术在学术上一直在探讨和运用。关于模仿组合学术上的运用，可以参考Ferson, W. E. and Harvey, C. R. 的The variation of economic risk premiums, Journal of Political Economy，还有Muir, T., Adrian, T. and Etula, E. 的Financial intermediaries and the cross section of asset returns，Journal of Finance。作者也是受益于这些文献获得一个想法，就是把这个方法应用在指数增强策略上。

本文目标是寻找到一种技术，在复制一个组合或者指数的同时，能够利用这种技术产生一些超额收益。模仿组合，顾名思义，是通过基础资产权重的设定，能够让这个组合和目标组合有差不多的收益表现。当然，不可能有一模一样的收益率曲线，既然不能完全相同，那么从业绩上考虑肯定希望能够通过技术处理让其有超额收益。所以，模仿组合技术，字面上意思是“制造”一个组合来“模仿”目标组合，实际操作上暗含着超额收益，引申来说，“模仿组合”是以模拟原有组合表现为基础，并且能进一步获得一些超额收益。

传统模仿组合理论是先找到完备的定价因子，然后计算出目标组合和各个基础资产在这些因子上的暴露，通过设定模仿组合里面资产的加权 beta 和目标组合的 beta 相等这个约束下，最小化模仿组合的残差来获得模仿组合。但是该方法有诸多缺点。首先，我们需要寻找到完备的定价因子，且解释度比较高，这本身就是个复杂的金融问题；其次，在此基础上，我们需要计算每个资产的 beta 系数，在多元回归下系数也存在估计误差问题。作者参考国外文献并且大量试验，效果不理想，模仿组合不能够大概率产生超额收益。而且传统方法工作量极大，耗费大量时间。

尽管传统方法效果不好，且耗费较大精力，但并不否定该方法理论上的可行性，方法与思路是没问题的，只是技术上需要完善和突破。在强大的理论基础支撑下，作者坚持相信该方法的合理性与可行性，耗费大量时间去搜寻相关优化技术来试图达到我们的目标，即寻找到一种技术，在复制某个组合或者指数的同时，能够利用某种技术产生一些超额收益。

传统方法通过寻找定价因子，计算目标组合 beta，再通过优化技术让模仿组合 beta 和其相等，以此达到复制的目的。流程较长，每个流程都涉及不同的统计和优化技术。考虑复杂系统的不稳定性，作者试图利用更直接的方法来复制，直接利用基础资产的某种组合来跟踪目标组合的收益序列。事实证明，在优化方法构造得当的情形下，是有可能**利用较少股票组合来模仿目标组合的收益表现，且大概率产生超额收益。当然了，表面上看似是“简单粗暴”的处理，其内部的算法设计有着很精细的考虑，并非套用某种优化算法或者人工智能算法都能产生较好的效果。由于该方法属于 AI 范畴，从销售的角度考虑，标题中有“人工智能”字眼。需要特别说明的是，本文介绍的方法，计算效率高且日常无需维护，具有较强的实用性和可操作性。**

本文所展现的技术有很多应用场景：1、指数跟踪，由于能够用较少的股票复制一个指数且有超额收益，所以，可以运用在普通指数基金上；2、**指数增强，能够大概率产生超额收益，增强效果良好，且调仓频率较低；**3、FOF 组合构建，一方面可以节约管理费与申赎费用，另一方面可以复制些不可交易指数，扩大了投资范围，比 FOF 组合经理如想买入某指数，但是市场上没有现成指数基金，可以用该方法构造一个组合。4、权重优化，传统基金经理在组合权重设置上具有较大主观性，可以运用该技术，对单个股票的权重配置提供参考意见。

本文第二节先介绍传统的模仿组合技术，第三节介绍人工智能下的模仿组合技术，第四节向大家展示该方法良好的回测效果。最后一节再详细介绍人工智能里面的优化算法细节。

2. 传统金融中的模仿组合方法

2.1. 模仿组合与多因子

从 Merton(1973)和 Ross(1976)开始，大约有半个世纪，金融学术界和业界一直在写资产收益率的多因子模型。成百上千的学者挖掘了各种因子。金融机构更加信奉因子投资，国外发行了很多“smart beta”型产品，国内各大公募也都开始布局这个让客户看起来更精致更有配置功能的产品。

从数学上讲，无套利条件隐含：任意资产的期望收益是风险因子期望收益的线性函数。所以说公共因子是足够发散投资组合收益率的驱动因素是不可质疑的，而且，换个角度来看，分散可以降低波动率但是不可能消除所有的波动率，这也为多因子驱动收益提供佐证。可以想得更深点，放飞下想象：分散化投资就是因子投资，因为 idiosyncratic 风险已经完全被发散，所有的收益都来源于公共因子的驱动，只是我们无法知道哪些因子在驱动组合收益，但是因子确实存在。我们常规的多因子投资，就是找出哪些因子能在未来有超额收益并且寻找出暴露大的股票来驱动组合收益。

由于多因子框架无论是在学界还是在业界都很流行，有越来越多的需求去管理多维风险，识别潜在风险因子，管理每个组合在这些风险上的暴露是个比较重要的任务。**当然了，模仿组合，就是在管理因子暴露，一个组合“模仿”另一个组合，就是让他们在特定因子上的暴露相等，同时最小化模仿组合的个别风险。**模仿组合必须有两个特性：（1）只能由流动性好的可交易的资产组成；（2）这个组合只能有极少部分收益是不能由公共因子所解释。

2.2. 模仿组合技术准备

我们假设所有的定价因子为已知，所有股票的收益率序列都在这些因子所张成的线性空间里。任何资产的收益率都可以被表示成多因子的形式，比如在时间段 t，股票 j 的收益率可以写成线性函数的形式：

$$R_{j,t} = \alpha_j + \beta_{j,1} f_{1,t} + \beta_{j,2} f_{2,t} + \ldots + \beta_{j,K} f_{K,t} + \varepsilon_{j.t} \qquad (1)$$

其中 f 代表共同风险因子，β 代表因子敏感性，α_{j} 为截距常数，$\varepsilon_{\mathrm{j.t}}$ 表示与这些因素无关的剩余风险或“可分散”风险，并且在各个资产中也不相关。

对于一个**充分发散**的组合来说，其收益率主要由不可发散的因子所驱动，他的残差风险是十分小的，因为(1)式的残差在不同资产间不相关，可以被充分发散。事实上，一个充分发散的组合 P 的收益率序列可以写成如下形式：

$$R_{p.t} = \alpha_p + \beta_{p,1} f_{1,t} + \beta_{p,2} f_{2,t} + \ldots + \beta_{p,K} f_{K,t} \qquad (2)$$

共同因子 f 与上式相同，但因子敏感性及截距常数不同。（2）式的系数与截距项是(1)式的加权平均。由于充分发散不再有残差项，所以组合收益完全由因子以及因子暴露 beta 决定。

事先算好组合里各资产权重，那么组合的 beta 是可以事先确定的。如果可以做空或者有期货对冲，每个 beta 都可以设定到想要的水平。一旦组合权重定了，那么每个系数也就确定了。下一期组合收益率完全由事先设定的 beta 来决定。

2.3. 传统模仿组合的构建方法

传统模仿组合技术是使得其在因子上的暴露与目标资产暴露相等，同时最小化残差波动率。我们假设有 N 个基础资产构成模仿组合，并且用 T 表示计算时使用时间序列的历史窗宽。

对于目标资产 j，方程（1）使用普通最小二乘法（OLS）拟合，该方法可对方程的所有参数进行估计；β 的 K 个估计为 $\hat{\beta}_{j,1},\dots,\hat{\beta}_{j,K}$ ，截距的估计为 $\hat{\alpha}_j$ ，t 时残差估计为：

$$\hat{\varepsilon}_{j,t} = R_{j,t} - \left[\hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_{j,1} f_{1,t} + \hat{\beta}_{j,2} f_{2,t} + \dots + \hat{\beta}_{j,K} f_{K,t}\right]$$

无偏 OLS 残差方差为 $\hat{\sigma}_j^2 = \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_{j,t}^2 / (T-K-1)$ 。$\hat{\sigma}_{i,i}$ 和 $\hat{\sigma}_{i,m}$ 代表残差之间的方差和协方差。

模拟投资组合是 N 项资产的加权平均值，其权重为列向量 $\mathbf{w} = \left(w_{1,\dots,}w_N\right)'$ 。

如何求得组合的权重配置，实现模仿功能，就是求解如下规划问题：

$$Min_w \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} w_i w_m \hat{\sigma}_{i,m}$$

$$\text{subject to：} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\beta}_{i,k} = \hat{\beta}_{j,k} \quad \forall k$$

这是线性约束下的多元优化问题，可以用拉格朗日乘子来求显性解：

$$L = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \hat{\sigma}_i^2 + \sum_{i<m} 2 w_i w_m \hat{\sigma}_{i,m} + \xi_1 \left[-\hat{\beta}_{j,1} + \sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\beta}_{i,1} \right] + L + \xi_K \left[-\hat{\beta}_{j,K} + \sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\beta}_{i,K} \right] + \xi_{K+1} \left[-1 + \sum_{i=1}^{N} w_i \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \hat{\sigma}_i^2 + \sum_{i<m} 2 w_i w_m \hat{\sigma}_{i,m} + \sum_{m=1}^{K} \left[\xi_m \left(-\hat{\beta}_{j,m} + \sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\beta}_{i,m} \right) \right] + \xi_{K+1} \left(-1 + \sum_{i=1}^{N} w_i \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{m=1}^{N} 2 w_m \hat{\sigma}_{i,m} + \sum_{m=1}^{K} \xi_m \hat{\beta}_{i,m} + \xi_{K+1} = 0 \; for \; i = 1, 2, \dots, N \tag{5}$$

我们定义下面代数表示：

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1,1} & \hat{\beta}_{2,1} & \cdots & \hat{\beta}_{N,1}\\ \hat{\beta}_{1,2} & \hat{\beta}_{2,2} & \cdots & \hat{\beta}_{N,2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{\beta}_{1,K} & \hat{\beta}_{2K} & \cdots & \hat{\beta}_{NK}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\mathrm{K}+1}\right)'$$

$$\mathbf{c}=\left(\hat{\beta}_{\mathrm{j},1},\hat{\beta}_{\mathrm{j},2},\cdots,\hat{\beta}_{\mathrm{j,K}},1\right)'$$

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{b}'\mathbf{1}\right]$$

用Σ表示残差的协方差矩阵，方程（5）可被表示为：

$$2\Sigma\mathbf{w}=-\mathbf{A}\xi\rightarrow\mathbf{w}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\xi \tag{6}$$

对拉格朗日乘子分别一阶导：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_{\mathrm{i}}}=\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{w}_{\mathrm{m}}\hat{\beta}_{\mathrm{m,i}}-\hat{\beta}_{\mathrm{j,i}}=0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N}w_i-1=0 \tag{8}$$

改写（7）、（8）式形式，再带入（5）式，我们得到：

$$\mathbf{A}'\mathbf{w}=\mathbf{c}$$

$$\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=-2\mathbf{c}$$

其中$\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}$ 是一个$(\mathrm{K}+1)\times(\mathrm{K}+1)$的二维可逆矩阵。然而 A 并不是二维的，所以$\left(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{A}'\right)^{-1}$，我们可以把乘子写成：

$$\boldsymbol{\xi}=-2\left(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{c} \tag{9}$$

把（9）带入（6），我们就求得了权重：

$$\mathbf{w}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\xi=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{c}$$

模仿组合方法在绩效归因上也有所应用。如果基金经理是选股能手，有信心选出超额 alpha 的股票，那么模仿组合的 beta 可以被设定为和他管理的基金组合一样。超额业绩就是他管理的组合的截距减去模仿组合的截距。

3. 人工智能下的模仿组合技术

人工智能建模有三个要素：建模思想、数据、算法技术。要想建模成功，势必从这三个角度去突破。建模思想是灵魂，凡是优秀成功的人工智能模型，其核心思想一定是逻辑严密且正确。本文的思想来源于传统金融中的模仿组合方法。第二个要素是数据，高质量的大数据也是建模的关键，也是目前很多人工智能团队的主攻点，可能建模想法很普通，但是透过高质量、最一手的数据，我们也能得出可靠的结论。最后一个要素，也是较为关键的部分，就是人工智能的算法技术细节，同样一个优化问题，不同的算法技术可能得出的结果不同，或者有些问题无法套用已有算法。在 AI 建模时，盲目的套用人工智能里的常规算法，比如逻辑回归、神经网络、随机森林、lasso 这类方法，可能会有谬误。因为人工智能算法大多为统计算法，所有统计方法尤其是复杂统计方法，在设计之初都是为了解决特定领域内的问题。建模时还是具体问题具体分析，不能为了套用算法而用算法，相反，算法是为了我们建模的想法服务。

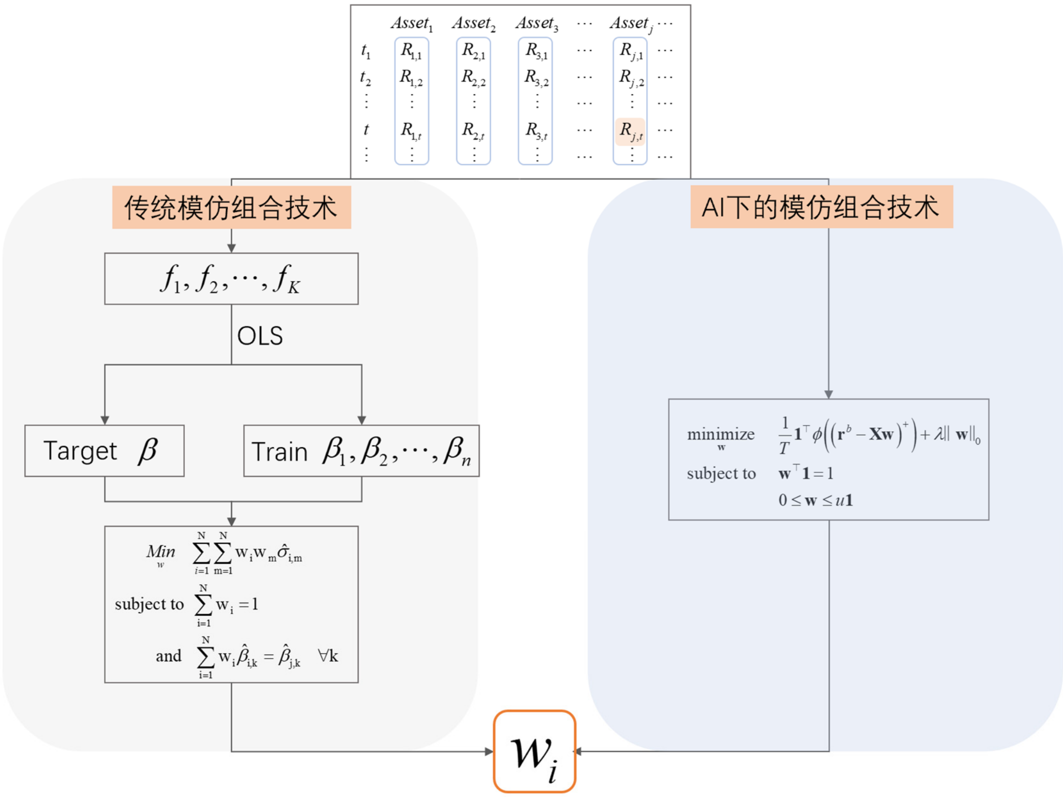
3.1. 传统技术 AI 化

在上一小节，我们通过找到市场里面的定价因子，通过设定模仿组合里面资产的加权 beta 和目标组合的 beta 相等的方法，获得模仿组合。但是该方法有诸多缺点，首先：我们需要寻找到定价因子，且解释度比较高，这本身就是个复杂的系统工程；其次，在此基础上，我们需要计算每个资产的 beta 系数，多元回归下的系数误差问题不可避免。作者参考国外文献并且试验过，效果不好，不能够大概率产生超额收益，而且该方法工作量很大，耗费时间较长，如果没有很好的效果，会很不“经济”。

传统方法效果不好，且耗费较大精力，但是学界一直探讨，至少理论上是严谨且可行。所以，在强大的理论支撑下，作者坚持相信该方法的合理性与可行性，耗费大量时间去搜寻相关优化技术，试图达到我们的目标：**寻找到一种技术，在复制某个组合或者指数的同时，能够利用某种技术产生一些超额收益。**

从系统工程的角度来看，系统越复杂，流程越多，系统出错的概率越大。所以，作者另辟蹊径，使用“简单粗暴”的方法，**不去通过多因子这个介质去复制，直接利用基础资产的组合与目标组合跟踪误差最小的方法，通过优化技术得到模仿组合权重。当然，优化技术有很多，选择合适的技术也是影响超额收益产生与否的关键因素，具体的技术与方法在下一节与后文探讨**

图 1：传统模仿组合方法与 AI 下方法计算流程比对



*数据来源：浙商证券研究所

3.2. AI 下的模仿组合方法

模仿组合构建目标是跟踪某个组合，并且产生超额收益，当然在实际操作过程中，为了调仓的方便，我们必须考虑基础资产个数的问题，在达到目标的前提下，当然是股票数量较少为好，因为便于调仓管理。而且，如果组合规模较小，较少的股票数量更利于精确构建组合。由于模仿组合持仓数量是在达到模仿的目标下越少越好，我们借用统计学里面的降维术语，把这种模仿组合构建称作**稀疏化模仿**。

思路前文也描述过，就是直接用基础资产去模仿目标资产，**其实就是跟踪误差最小化，当然了，我们的目标不是样本内的最小化，而是模仿组合在未来的一个时期能够持续模仿目标资产并且能够产生超额收益，这就对算法技术提出了较高的要求，也是本文的创新点。**

假设一个目标组合是一个指数，由 N 项资产组成。记 $\mathbf{r}^b=\left[r_1^b,\ldots,r_T^b\right]^\top\in R^T$， $X=\left[r_1,\ldots,r_T\right]^\top\in R^T\times N$ 分别为该指数及 N 项资产过去 T 天的（算术）净收益率，其中 $\mathbf{r}_t\in R^N$ 为 N 项资产在第 t 天的净收益。

我们的目标是设计稀疏投资组合 $\mathbf{w}\in R_+^N$，满足 $\mathbf{w}^\top\mathbf{1}=1$，以追踪指数，使得 $\mathbf{Xw}\approx\mathbf{r}^b$。相当于要解决的优化

问题为：

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{w}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{TE}(\mathbf{w})+\lambda\|\mathbf{w}\|_0 \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{w}^\top\mathbf{1}=1 \\ & 0\le\mathbf{w}\le u\mathbf{1}\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{TE}(\mathbf{w})$ 代表一般跟踪误差，λ 为控制投资组合稀疏性的正则化参数，以及 u 为组合权重上限。

ℓ_0 范数由连续和可微（对于 $w\ge 0$）函数近似：

$$\rho_{p,u}(w)=\frac{\log(1+w/p)}{\log(1+u/p)}$$

其中 p>0 是控制估计的参数。于是转变成以下近似问题：

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{w}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{TE}(\mathbf{w})+\lambda\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\rho}_{p,u}(\mathbf{w}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{w}^\top\mathbf{1}=1 \\ & 0\le\mathbf{w}\le u\mathbf{1}\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_{p,u}(\mathbf{w})=\left[\rho_{p,u}(w_1),\ldots,\rho_{p,u}(w_N)\right]^\top$。

有四种类型的目标函数可供选择：

（1） 经验跟踪误差（ETE）：

$$\mathrm{ETE}(\mathbf{w})=\frac{1}{T}\left\|\mathbf{r}^b-\mathbf{X}\mathbf{w}\right\|_2^2$$

（2）下行风险（DR）：

$$\mathrm{DR}(\mathbf{w})=\frac{1}{T}\left\|\left(\mathbf{r}^b-\mathbf{X}\mathbf{w}\right)^+\right\|_2^2$$

（3）Huber 经验跟踪误差（HETE）：

$$\mathrm{HETE}(\mathbf{w})=\frac{1}{T}\mathbf{1}^\top\phi\left(\mathbf{r}^b-\mathbf{X}\mathbf{w}\right)$$

（4）Huber 下行风险（HDR）：

$$\mathrm{HDR}(\mathbf{w})=\frac{1}{T}\mathbf{1}^\top\phi\left(\left(\mathbf{r}^b-\mathbf{X}\mathbf{w}\right)^+\right)$$

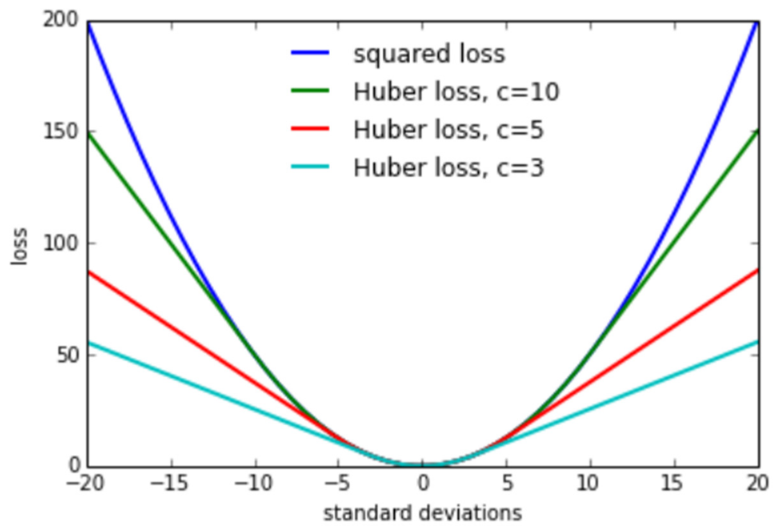
其中 $\phi(\mathrm{x})=\left[\phi\left(x_1\right),\ldots,\phi\left(x_T\right)\right]^{\top}$，并且

$$\phi(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leq \mathrm{c}\\ c(2|x|-c) & |x|>c\end{cases}$$

其中 c>0 为 Huber 参数

在统计学习角度，Huber 损失函数是一种使用稳健性回归的损失函数，Huber 损失相比于平方损失来说对于异常值不敏感，但它同样保持了可微的特性。它基于绝对误差但在误差很小的时候变成了平方误差。我们可以使用超参数δ来调节这一误差的阈值。当δ趋向于 0 时它就退化成了 MAE，而当δ趋向于无穷时则退化为了 MSE。常常被用于分类问题上。

图 2：Huber 损失函数图



*数据来源：浙商证券研究所

在目标函数选择上，我们选取经验跟踪误差和 Huber 下行风险，因为经验跟踪误差就是我们常规的指数复制技术，选取该目标函数主要是为了验证优化算法，如果这个目标函数下，模仿组合大概率产生超额收益，那么说明这套优化算法是合适的。选 Huber 下行风险目标函数主要是因为该目标最小化了低于目标的风险，也就是说“尽力”超过目标，符合我们获得超额收益的要求。

无论选择何种跟踪误差类型，问题（10）都可以通过一种迭代的闭合形式更新算法——优化最小化来求解（迭代次数用 k 表示）。可以看出，上述所有变化归结为以下凸问题的迭代优化：

$$\underset{\mathbf{w}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{w} + \mathbf{q}^{(k)^\top} \mathbf{w}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{w} \in \mathcal{W}_u$$

其中 $\mathcal{W}_u = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1, \mathbf{0} \le \mathbf{w} \le u\mathbf{1}\}$， $\mathbf{q}^{(k)} \in R^N$

求解上述优化问题，用的是优化最小化方法，关于优化最小化算法，第五节会详细介绍。

3.3. AI 技术效果展示

为了展现 AI 算法具备模仿并产生超额收益的能力，我们拿以下三个组合作为目标组合:

（1） 沪深 300 指数;
（2） 富国沪深 300 指数增强基金;
（3） 指数增强基金（下表）以及沪深 300 指数每期（125 交易日）排名前三的等权组合。

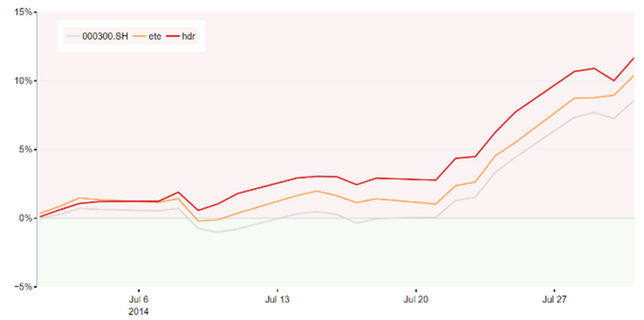
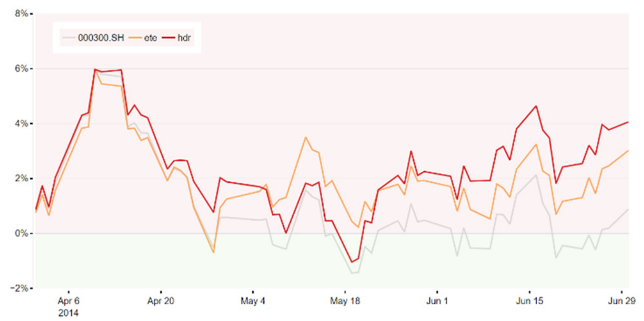
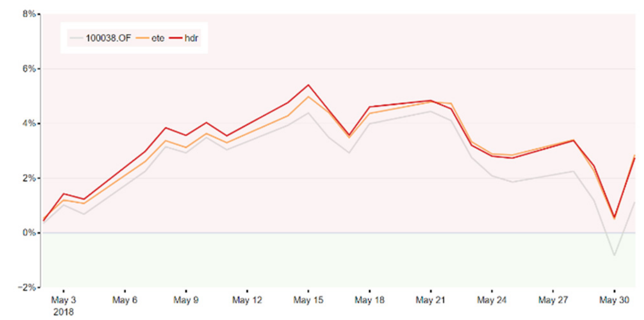
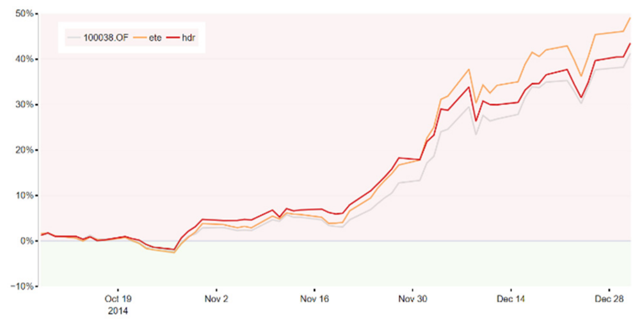
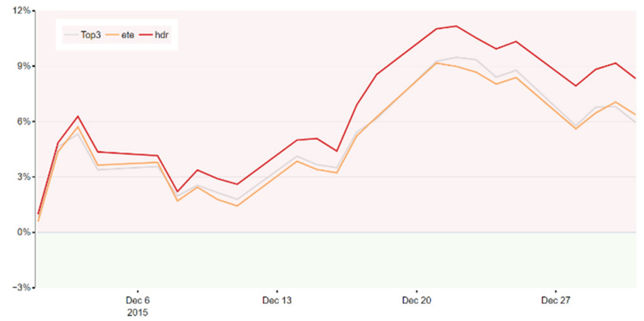
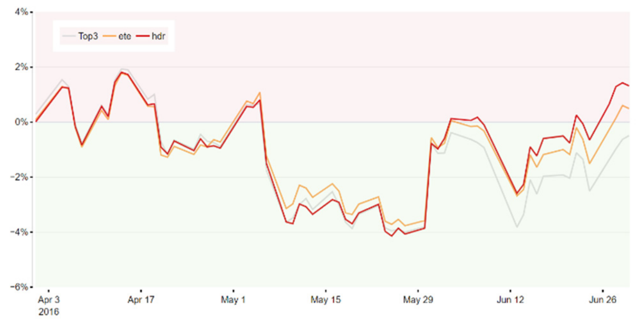
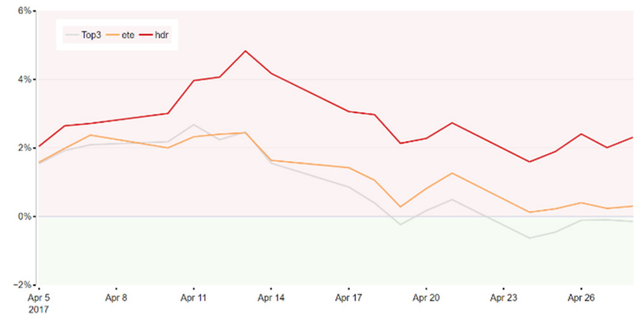
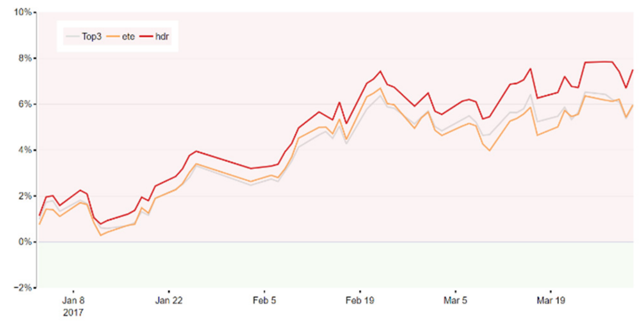
利用这三个目标组合,我们采取上文 AI 算法,来演示这算法能够在未来的一个月或一个季度产生超额收益。完整的回测结果请见下一小节。

表 1：沪深 300 指数增强基金池

代码	名称	成立日
000300.SH	沪深 300	-
200002.OF	长城久泰沪深 300A	2004-05-21
310318.OF	申万菱信沪深 300 指数增强	2004-11-29
450008.OF	国富沪深 300 指数增强	2009-09-03
100038.OF	富国沪深 300 增强	2009-12-16
162213.OF	泰达宏利沪深 300 指数增强 A	2010-04-23
163407.OF	兴全沪深 300 指数增强	2010-11-02
519116.OF	浦银安盛沪深 300 指数增强	2010-12-10
320014.OF	诺安沪深 300 指数增强	2011-04-07
110030.OF	易方达沪深 300 量化增强	2012-07-05

如下图 7 所示，途中红色 hdr 标记表示目标函数是 huber 下行风险的组合收益，ete 表示目标函数为跟踪误差组合的收益，所有组合都是利用历史 125 个交易日计算出来的，图上 0.08、0.05、0.10 数字表述优化过程中组合权重的上限。图中显示 hdr 组合的收益在模仿的同时大概率能跑赢目标组合的收益。

图 3：组合累计收益片段展示

000300.SH 0.08 2014-06-30—2014-07-31	000300.SH 0.10 2014-03-31—2014-06-30
	
100038.OF 0.05 2018-04-27—2018-05-31	**100038.OF 0.08 2014-09-30—2014-12-31**
	
Top3 0.10 2015-11-30—2015-12-31	**Top3 0.08 2016-03-31—2016-06-30**
	
Top3 0.10 2017-03-31—2017-04-28	**Top3 0.08 2016-12-30—2017-03-31**
	

4. 回测效果展示

为了展现 AI 算法下的模仿组合技术能够“模仿”且产生超额收益，下文会对不同参数、不同目标函数下组合的历史表现进行回测分析。模型计算分为月度调仓和季度调仓，计算用到的历史时间序列区间长度一律设为125 个交易日。

4.1. 以沪深 300 指数为目标

图 4：2013-01-04 至 2019-03-22 以沪深 300 为目标下的组合累计收益表现

从上图我们看出，无论是月度调仓、季度调仓、不同权重上限情景下，经验跟踪误差目标函数组合（ete）和最小化跑输风险组合（hdr）都能产生超额收益。下表展示了具体的风险绩效指标，从指标中我们能看出来，月度调仓的业绩在整体上要好于季度调仓，尤其是在权重上限较大的情形，hdr 目标函数的表现要好于 ete 的表现，这符合我们的目标函数的设计初衷，因为 hdr 目标函数最小化低于目标组合的风险，所以能够产生更高的超额收益。从最大回撤的角度看，各个模仿组合的最大回撤均小于指数，从另一个侧面反应这种算法的优势，就是“涨的多，跌的少”。月度胜率角度看，大多参数下胜率都在 70%左右，反应这个算法技术的有效性。胜率高、回撤小、进攻性良好共同造就了该策略能够较大幅度跑赢指数。加上该策略调仓频率低，且每次组合股票数量较少，在四十只左右，这些优良的特性更加利于公募基金日常对组合的管理。

表 2：以沪深 300 为目标的不同目标函数下模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限）

	沪深300	月度调仓						季度调仓					
		w=5%		w=8%		w=10%		w=5%		w=8%		w=10%	
		ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr
累计收益率	51.96%	112.06%	141.33%	109.13%	139.24%	109.24%	141.11%	120.20%	104.74%	131.61%	107.94%	125.78%	103.94%
年化夏普	0.3	0.55	0.63	0.54	0.63	0.54	0.63	0.57	0.51	0.61	0.52	0.59	0.5
年化收益率	7.23%	13.36%	15.83%	13.09%	15.66%	13.10%	15.81%	14.07%	12.69%	15.04%	12.99%	14.55%	12.62%
年化标准差	24.09%	24.35%	24.99%	24.39%	24.98%	24.38%	25.03%	24.66%	25.04%	24.62%	25.06%	24.59%	25.06%
最大回撤	46.70%	43.53%	42.96%	43.27%	42.42%	42.99%	42.63%	44.58%	42.20%	44.17%	41.37%	43.89%	41.25%
超额收益	-	6.13%	8.60%	5.87%	8.43%	5.88%	8.58%	6.84%	5.47%	7.81%	5.76%	7.32%	5.39%
跟踪误差	-	3.60%	4.47%	3.79%	4.59%	3.78%	4.67%	3.91%	4.54%	4.16%	4.75%	4.10%	4.69%
信息比率	-	1.7	1.92	1.55	1.84	1.56	1.84	1.75	1.2	1.89	1.21	1.79	1.15
月度胜率	-	72.00%	72.00%	66.67%	70.67%	68.00%	69.33%	64.00%	65.33%	68.00%	66.67%	70.67%	60.00%

4.2. 以富国沪深 300 指数增强为目标

上文描述了人工智能下的模仿组合技术能够对沪深 300 指数产生稳定的超额收益，一种直接的想法就是，如果给定任意基金组合，这种方法能不能战胜？如果能够战胜，那么该方法势必成为公募基金组合管理的利器。

事实上，模仿组合技术只适合调仓频率较低的组合，让我们回想前文传统模仿组合方法，其中运用到了共同定价因子，高频率调仓的组合势必会带来因子解释度较低，组合的个别（idiosyncratic）风险较大，导致模仿难度加大，模仿失败。**当然，利用模仿组合技术超越其它的基金的想法并非不可实现，单个基金的个别风险较高，但是根据我们之前报告《公募基金业绩可持续性》，几个基金组合在一起的收益序列 R 方会提高很多，因为基金组合发散了个别风险，所以，下一节，我们利用模仿多基金组合的办法来提高我们基金的收益排名。**

图 5：2013-01-04 至 2019-03-22 以富国沪深 300 增强为目标下的组合累计收益表现

上图能看出，季度调仓基本上都小幅跑输了这个增强指数基金。月度调仓情境下，hdr 组合能够跑赢，这也显示该目标函数比较容易产生“增强效果”，达到了目标函数设计的预期。整体上看，目标为单一基金的模仿组合增强效果尚可，因为公募基金收益包含了分红，当然了，本文收益也未减去交易成本。**下文我们以每期增强基金前三的平均为目标组合，增强效果会显著提升。**

表 3：以富国沪深 300 指数增强为目标的模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限）

	富国沪深 300	月度调仓						季度调仓					
		w=0.05		w=0.08		w=0.1		w=0.05		w=0.08		w=0.1	
		ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr
累计收益率	117.75%	104.60%	122.47%	111.45%	123.75%	103.90%	122.73%	102.90%	86.91%	116.11%	93.56%	120.59%	96.89%
年化夏普	0.61	0.54	0.59	0.56	0.59	0.54	0.59	0.53	0.46	0.58	0.48	0.6	0.5
年化收益率	13.86%	12.68%	14.27%	13.30%	14.38%	12.62%	14.29%	12.52%	10.99%	13.71%	11.64%	14.10%	11.96%
年化标准差	22.55%	23.65%	24.23%	23.57%	24.18%	23.51%	24.16%	23.73%	24.15%	23.65%	24.09%	23.61%	24.14%
最大回撤	38.71%	40.47%	40.59%	40.58%	40.29%	40.73%	40.09%	40.17%	41.96%	39.28%	40.48%	38.80%	39.79%
超额收益	-	-1.18%	0.41%	-0.56%	0.52%	-1.24%	0.43%	-1.33%	-2.86%	-0.14%	-2.21%	0.25%	-1.90%
跟踪误差	-	4.52%	5.31%	4.72%	5.46%	4.74%	5.52%	4.81%	5.16%	4.96%	5.16%	4.96%	5.27%
信息比率	-	-0.26	0.08	-0.12	0.09	-0.26	0.08	-0.28	-0.56	-0.03	-0.43	0.05	-0.36
月度胜率	-	50.67%	49.33%	52.00%	56.00%	48.00%	53.33%	50.67%	40.00%	52.00%	44.00%	53.33%	42.67%

4.3. 以每期指数增强前三平均为目标组合

上文说到单一基金个别风险较大，不易于模仿。我们利用多只基金净值曲线等权加权为目标组合收益序列，以此来作为训练样本构建模仿组合。具体收益表现请见下图。从下图我们看出，无论是月度还是季度都能够有超额收益，而且季度的超额收益更为明显，这似乎与常识不符，究其原因，主要是因为我们每期选取前三作为目标组合，但是前三不是很稳健，在未来的一个季度收益下降，而模仿组合较为稳健，所以，按照季度调仓反而超额收益变多。

对于收益前三目标组合，我们选取参数为：ete 目标函数、权重上限为 5%，季度调仓。在这组参数下，月度胜率达到 60%，夏普比为 0.79，最大回撤为 36.94%，远小于沪深 300 的最大回撤 46.70%。总体上看，各个参数下都能实现收益增强的目标。本文未减去交易成本，主要是考虑交易频率较低，且本策略计算未包含分红，而公募基金收益率包含分红，所以认为交易成本能被未考虑的分红相抵。

图 6：2014-01-02 至 2019-03-22 以 Top3 基金组合为目标下的组合累计收益表现

月度调仓 权重限制 5%

季度调仓 权重限制 5%

月度调仓 权重限制 8%

季度调仓 权重限制 8%

月度调仓 权重限制 10%

季度调仓 权重限制 10%

表 4：以每期收益前三的等权组合为目标的模仿组合业绩表现（w 为优化中的权重上限）

	Top3	月度调仓						季度调仓					
		w=5%		w=8%		w=10%		w=5%		w=8%		w=10%	
		ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr	ete	hdr
累计收益率	102.27%	103.21%	109.84%	110.05%	122.35%	103.81%	116.51%	140.49%	114.78%	138.06%	130.26%	138.96%	123.89%
年化夏普	0.65	0.63	0.64	0.66	0.69	0.63	0.67	0.79	0.67	0.78	0.73	0.78	0.71
年化收益率	14.96%	15.07%	15.80%	15.83%	17.14%	15.14%	16.52%	18.97%	16.34%	18.73%	17.95%	18.82%	17.30%
年化标准差	22.99%	24.03%	24.71%	24.03%	24.69%	24.04%	24.65%	23.98%	24.50%	24.00%	24.47%	24.02%	24.47%
最大回撤	41.86%	40.31%	41.02%	40.35%	40.19%	40.49%	40.09%	36.94%	39.42%	37.58%	38.49%	37.63%	38.31%
超额收益	-	0.11%	0.84%	0.86%	2.17%	0.17%	1.56%	4.38%	1.75%	4.14%	3.36%	4.23%	2.71%
跟踪误差	-	4.21%	5.00%	4.34%	5.22%	4.37%	5.20%	4.87%	5.00%	4.93%	5.11%	4.97%	5.13%
信息比率	-	0.03	0.17	0.2	0.42	0.04	0.3	0.9	0.35	0.84	0.66	0.85	0.53
月度胜率	-	53.97%	55.56%	58.73%	53.97%	55.56%	52.38%	60.32%	57.14%	57.14%	52.38%	57.14%	50.79%

4.4. 策略优点与应用

（1）用较少股票模仿指数

见下图，由于 AI 模型采用的是稀疏的优化技术，模型会在模仿的同时尽量使得股票数量较少，所以大多情形下股票数量都在 40 只左右。模型这个特性会带来如下场景的应用：

1、 基金规模较小

当规模较小，很难采用完全复制的办法精确复制指数，用该策略不仅可以复制指数，而且还能产生超额收益。

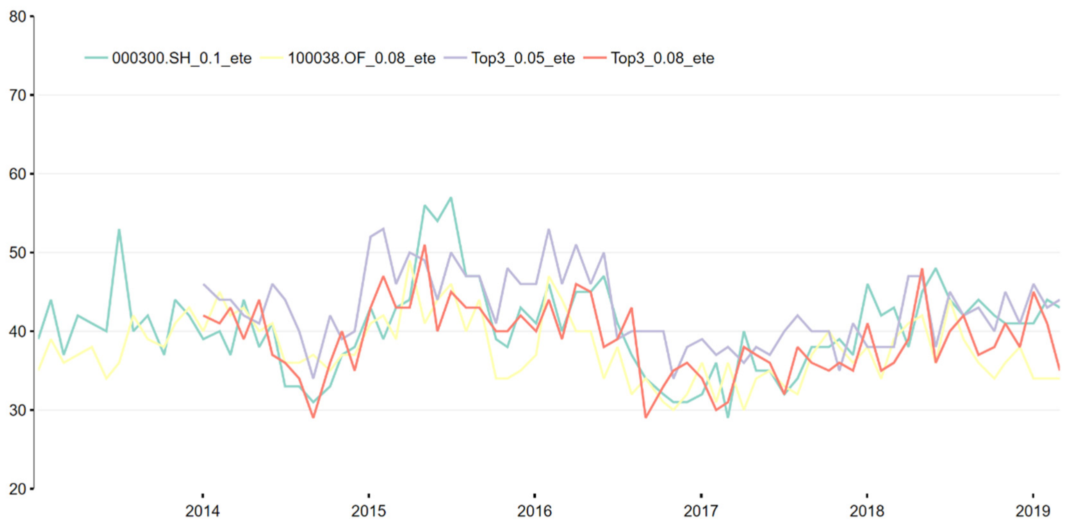
2、 FOF 工具构造

市场上不是所有指数都有对应指数基金，当 FOF 组合经理想买某个指数，但是没有对应指数基金，可以采用该技术自己制造相应指数。

3、FOF 费用节约

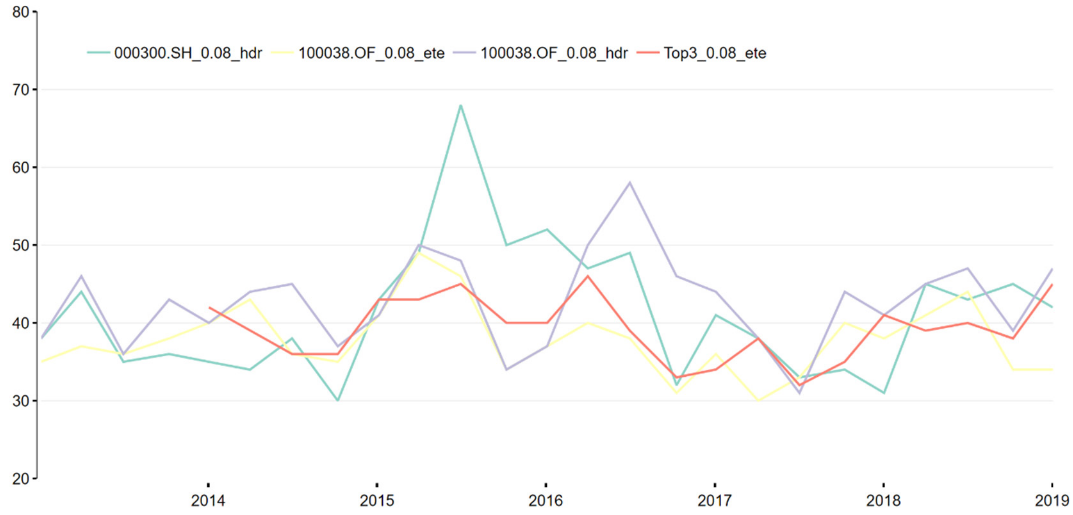
基金管理费与申赎费用在 FOF 管理中是不得不考虑的一部分成本，如果 FOF 管理人想短线持有其它公司的某个指数基金，可以采用该技术买入对应股票。

图 7：不同参数得出的组合持股数量（月度调仓）



*数据来源：浙商证券研究所

图 8：不同参数得出的组合持股数量（季度调仓）



*数据来源：浙商证券研究所

（2）稳定超额收益

1、 指数增强

上文我们已经展示了该策略优良的增强效果，所以，可以应用在指数增强型基金上。私募基金可以采取 T+0 技术在此基础上进行进一步增强。

2、 期现套利

该策略可以获得期现套利多头端的组合，获取中性 alpha 收益。

3、 权重优化

公募基金有自己的核心股票池，或者基金经理有自己看好的一揽子股票，可以利用该技术，得到优化的组合权重。

（3）无需维护因子数据，调仓频率低

本策略只需要输入历史 125 交易日的收益率序列，即可直接得出组合权重，无需其它繁琐的数据维护与参数优化。且该策略调仓频率低，节省了大量的基金管理上的精力。

5. 优化算法介绍

算法细节也是模型成败与否的关键。由于需要对异常值进行“调教”，前文优化中目标函数里面有较为稳健的 Huber 损失函数，函数形式较为复杂，这类目标函数的优化问题，通常可以用优化最小化方法求解。

5.1. 优化最小化算法简介

优化最小化（Majorization-Minimization，MM）算法是一种迭代优化方法，主要思想是将原复杂的优化问题转化为一系列的简单优化问题，利用函数的凸性来寻找它们的最小值。

首先我们考虑以下优化最小化算法：

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{array}$$

其中 $\mathcal{X}$ 是闭凸集， $f(\mathbf{x})$ 是连续函数。

然而由于 $f(\mathbf{x})$ 的处理过于复杂，MM 算法不直接对目标函数求最优化解，转而找到一个目标函数的逼近函数，并对这个逼近函数求解。具体可以通过连续最小化一个逼近函数 $u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$ 来实现与上述最小化算法相同的目标：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$$

通过多次迭代，可以得到越来越接近目标函数最优解的解，即我们希望最小值序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 将收敛到最优 $\mathbf{x}^*$。

那么接下来的问题就是如何构建 $u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$。

首先我们定义以下**相关术语**，便于下文的描述：

1、点到集合的距离：

$$d(\mathbf{x},\mathcal{S}) = \inf_{\mathbf{s}\in\mathcal{S}} \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|$$

2、方向导数：

$$f'(\mathbf{x};\mathbf{d}) = \liminf_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

3、固定点：x 是固定点，如果满足

$$f'(\mathbf{x};\mathbf{d}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{d} \quad \text{such that } \mathbf{x}+\mathbf{d} \in \mathcal{X}$$

假设：

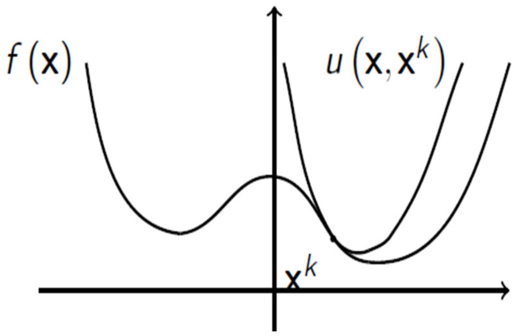
$$u(\mathbf{y},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathcal{X} \quad \text{(A1)}$$

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{X} \quad \text{(A2)}$$

$$u'(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{d})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} = f'(\mathbf{y};\mathbf{d}), \forall \mathbf{d} \text{ with } \mathbf{y}+\mathbf{d} \in \mathcal{X} \quad \text{(A3)}$$

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ is continuous in } \mathbf{x} \text{ and } \mathbf{y} \quad \text{(A4)}$$

图 9：优化最小化迭代逼近函数图示



*数据来源：浙商证券研究所

那么优化最小化算法（MM Algorithm）的具体形式可以表达成：（连续上界最小化）

1、 找寻可行点 $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{X}$ 及集合 k=0

2、 重复

a) $\mathbf{x}^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$ （全局极小值）

b) $k \leftarrow k+1$

3、 直到满足某种收敛准则

根据 A1-A4 假设，序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的每一个极点都是原始问题的一个平稳点。如果进一步假设 $\mathcal{X}^0 = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \le f\left(\mathbf{x}^0\right)\}$ 是紧致（compact）的，那么

$$\lim_{k\to\infty} d\left(\mathbf{x}^k, \mathcal{X}^\star\right) = 0$$

其中 $\mathcal{X}^\star$ 是平稳点的集合。

5.2. 构建技术

优化最小化算法的性能主要取决于代理函数 $u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$。该代理函数 $u\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^k\right)$ 的全局极小值需要易于寻找。假设 $f(\mathbf{x})=f_1(\mathbf{x})+\kappa(\mathbf{x})$，其中 $\mathrm{f}_1(\mathrm{x})$ 是一个“好”函数，$\kappa(\mathbf{x})$ 是估计对象。我们有以下几种常见的构造方法：

（1）通过凸性构造

假设 $\kappa(t)$ 是凸性的，那么

$$\kappa\left(\sum_i \alpha_i t_i\right)\le \sum_i \alpha_i \kappa\left(t_i\right)$$

其中 $\alpha_i \ge 0$，$\Sigma\alpha_i = 1$。

例如：

$$\begin{aligned}\kappa\left(\mathbf{w}^T\mathbf{x}\right)&=\kappa\left(\mathbf{w}^T\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right)+\mathbf{w}^T\mathbf{x}^k\right)\\&=\kappa\left(\sum_i \alpha_i\left(\frac{w_i\left(x_i-x_i^k\right)}{\alpha_i}+\mathbf{w}^T\mathbf{x}^k\right)\right)\\&\le\sum_i \alpha_i\kappa\left(\frac{w_i\left(x_i-x_i^k\right)}{\alpha_i}+\mathbf{w}^T\mathbf{x}^k\right)\end{aligned}$$

若进一步假设 w 及 x 为正 $\left(\alpha_i = w_i x_i^k / \mathbf{w}^T\mathbf{x}^k\right)$：

$$\kappa\left(\mathbf{w}^T\mathbf{x}\right)\le\sum_i \frac{w_i x_i^k}{\mathbf{w}^T\mathbf{x}^k}\kappa\left(\frac{\mathbf{w}^T\mathbf{x}^k}{x_i^k}x_i\right)$$

（2）通过泰勒展开式构造

假设 $\kappa(\mathrm{x})$ 是凹并可微的，那么：

$$\kappa(\mathbf{x})\le\kappa\left(\mathbf{x}^k\right)+\nabla\kappa\left(\mathbf{x}^k\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right)$$

是一个线性上界。

假设 $\kappa(\mathrm{x})$ 是凹并二次可微的，那么：

$$\kappa(\mathbf{x}) \le \kappa\left(\mathbf{x}^k\right) + \nabla\kappa\left(\mathbf{x}^k\right)^T\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right)^T\mathbf{M}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right) \qquad \text{若}\,\mathbf{M}-\nabla^2\kappa(\mathbf{x})\succeq 0, \forall\mathbf{x}$$

（3）用不等式构建

算术几何平均不等式：

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cauchy-Schwartz 不等式：

$$\|\mathbf{x}\| \ge \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x}^k}{\left\|\mathbf{x}^k\right\|}$$

詹森不等式：

$$\kappa(\mathrm{E}\mathbf{x}) \le \mathrm{E}\kappa(\mathbf{x})\text{，其中}\,\kappa(\cdot)\,\text{为凸}$$

5.3. 算法示例

（1）EM 算法（Expectation Maximization）

EM 算法是机器学习中常用到的优化算法。EM 算法可以被看作是 MM 算法的一个特例。

假设完全（complete）数据集合$\{\mathrm{x}, \mathrm{z}\}$ 包含观察变量 x 和潜在变量 z。我们的目标是从 x 中估计最大似然解 $\theta\in\Theta$。最大似然估计量为：$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} -\log p(\mathbf{x}\,|\,\theta)$

EM（期望最大化）算法可以表示为：

1、 E：求得 $p(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{x},\theta^k)$ ——由当前 θ 的估计值“猜测”z

2、 M：得到 θ 为 $\theta^{k+1} = \arg\min_{\theta\in\Theta} u\left(\theta,\theta^k\right)$，其中

$$u\left(\theta,\theta^k\right) = -E_{\mathbf{z}|\mathbf{x},\theta^k}\log p(\mathbf{x},\mathbf{z}\,|\,\theta) \qquad \text{——用“猜测”的完全数据集得到}\,\theta$$

若从 MM 算法角度来解释 EM 算法，目标方程可以表达为

$$
\begin{aligned}
& -\log p(\mathbf{x}\mid\theta) \\
&= -\log \mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\theta}\, p(\mathbf{x}\mid\mathbf{z},\theta) \\
&= -\log \mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\theta}\left(\frac{p(\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k)\,p(\mathbf{x}\mid\mathbf{z},\theta)}{p(\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k)}\right) \\
&= -\log \mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k}\left(\frac{p(\mathbf{x}\mid\mathbf{z},\theta)}{p(\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k)}\,p(\mathbf{z}\mid\theta)\right) \\
&\le -\mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k}\log\left(\frac{p(\mathbf{x}\mid\mathbf{z},\theta)}{p(\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k)}\,p(\mathbf{z}\mid\theta)\right) \qquad \text{(Jensen's Inequality)} \\
&= \underbrace{-\mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k}\log p(\mathbf{x},\mathbf{z}\mid\theta)}_{u(\theta,\theta^k)} + \mathrm{E}_{\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k}\, p(\mathbf{z}\mid\mathbf{x},\theta^k)
\end{aligned}
$$

（2）近端最小化（Proximal Minimization）

当 $f(\mathbf{x})$ 为凹函数，要求得 $\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 相当于求解以下问题：

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{y}\in\mathcal{X}}{\text{minimize}}\ f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2c}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$$

其中，目标函数在 x 和 y 上都是强凸的。

该算法可以表示为：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\left\{ f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2c}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^k\right\|^2 \right\}$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1}$$

若从 MM 算法角度来解释该算法：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}\left\{ f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2c}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^k\right\|^2 \right\}$$

（3）DC 规划（凸差，Difference of Convex）

考虑以下无约束问题：

$$\underset{\mathbf{x}\in R^n}{\text{minimize}}\ f(\mathbf{x})$$

其中 $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})$， $g(\mathbf{x})$ 为凸函数，$h(\mathbf{x})$ 为凹函数。

DC（凸差）规划通过求解以下方程生成序列 $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$：

$$\nabla g\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)=-\nabla h\left(\mathbf{x}^{k}\right)$$

若从 MM 算法角度来解释该算法：

$$\mathbf{x}^{k+1}=\arg\min_{\mathbf{x}}\left\{g(\mathbf{x})+\nabla h\left(\mathbf{x}^{k}\right)^{T}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k}\right)\right\}$$

附录：

1、参考文献：

[1] Richard Roll, Akshay Srivastava. 2018. Mimicking Portfolios, working paper, California Institute of Technology.

[2] Balduzzi, P. and Robotti, C. 2008. Mimicking portfolios, economic risk premia, and tests of multi-beta models. Journal of Business and Economic Statistics, 26 (3), 354–368.

[3] Lamont, Owen A., 2001. Economic Tracking Portfolios, Journal of Econometrics, 105,(November), 161-184.

[4] J. Fan and R. Li. 2001. Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and Its Oracle Properties. Journal of the American Statistical Association,96:1438–1360.

[5] L. Gyorfi, M. Kohler, A. Krzy˙zak, and H. Walk. 2002. A distribution-free theory of nonparametric regression. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer. xvi, 647 p.

[6] Robert Tibshirani. 1996. Regression shrinkage and selection via the lasso. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), pages 267-288.

[7] Anastasios Kyrillidis. 2014. Rigorous optimization recipes for sparse and low rank inverse problems with applications in data sciences. PhD thesis, ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE.

[8] Canakgoz, N. A. and Beasley, J. E. 2008. Mixed integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. European Journal of Operational Research, 196: 384-399.

[9] Guastaroba, G. and Speranza, M. G. 2012. Kernel Search: An application to index tracking problem. European Journal of Operational Research, 217: 54-68.

[10] Lam, W. S., Saiful, J. and Hamizun, I. 2015. The impact of different economic scenarios towards portfolio selection in enhanced index tracking problem. Advanced Science Letters, 21(5): 1285-1288.

[11] Hunter DR, Lange K .2004 . A tutorial on MM algorithms. Amer .Statistician 58:30–37

股票投资评级说明

以报告日后的 6 个月内，证券相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、买入 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋20％以上；
2、增持 ：相对于沪深 300 指数表现 ＋10％～＋20％；
3、中性 ：相对于沪深 300 指数表现－10％～＋10％之间波动；
4、减持 ：相对于沪深 300 指数表现－10％以下。

行业的投资评级：

以报告日后的 6 个月内，行业指数相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：
1、看好 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现＋10%以上；
2、中性 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%～＋10%以上；
3、看淡 ：行业指数相对于沪深 300 指数表现－10%以下。
我们在此提醒您，不同证券研究机构采用不同的评级术语及评级标准。我们采用的是相对评级体系，表示投资的相对比重。
建议：投资者买入或者卖出证券的决定取决于个人的实际情况，比如当前的持仓结构以及其他需要考虑的因素。投资者不应仅仅依靠投资评级来推断结论

法律声明及风险提示

本报告由浙商证券股份有限公司（已具备中国证监会批复的证券投资咨询业务资格，经营许可证编号为：Z39833000）制作。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但浙商证券股份有限公司及其关联机构（以下统称“本公司”）对这些信息的真实性、准确性及完整性不作任何保证，也不保证所包含的信息和建议不发生任何变更。本公司没有将变更的信息和建议向报告所有接收者进行更新的义务。

本报告仅供本公司的客户作参考之用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。

本报告仅反映报告作者的出具日的观点和判断，在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见均不构成对任何人的投资建议，投资者应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本公司的交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

浙商证券研究所

上海市杨高南路 729 号陆家嘴世纪金融广场 1 号楼 29 层
邮政编码：200120
电话：(8621)80108518
传真：(8621)80106010
浙商证券研究所：http://research.stocke.com.cn