

多因子和人工智能谁是“正规军”？ ——兼谈金融预测框架

包赞

浙商证券

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

金融投资的核心问题——资产定价

随机折现因子 (SDF)

- 资产定价的中心问题是处理风险和收益之间的关系。
- 资产定价中心公式：

$$p(x) = E(mx)$$

- 与均衡定价和套利定价的表达形式相比, 随机折现因子定价模型更具有**一般性**, **且对金融数据基本上没有任何的假设限定**。

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

定价理论

- 资产定价问题是上世纪六十年代来西方金融理论中发展最快的一个领域, 在 20 世纪 60 - 70 年代得到了迅猛发展。
 - 资本资产定价模型 (CAPM)
 - 跨期资本资产定价模型 (Intertemporal CAPM)
 - 基于消费需求的定价模型 (Consumption - based CAPM)
 - 套利定价理论 (APT)
- 随机折现因子模型的出现使得资产定价理论出现新的曙光。
- 现在主要面临的挑战是理解和挖掘影响随机折现因子的经济因素或者决定投资者风险溢价的特别因素。

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
 - 资产定价中心公式
 - 定价中心公式的另一种证明
 - 定价中心公式的应用
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

资产定价中心公式

我们首先引入“资产定价中心公式”(Central Asset Pricing Formula), 即任意资产收益率和 m 乘积的期望等于 1。

$$E_t[m_{t+1}R_{i,t+1}] = 1$$

这里的 $R_{i,t+1} = \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}$ 所以:

$$E_t\left[m_{t+1}\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}\right] = 1$$

我们得到任意资产的定价公式: $P_{i,t} = E_t[m_{t+1}P_{i,t+1}]$

上述等式是适用于任意资产, 当然也适用于确定性的无风险资产, 所以:

$$R_f = \frac{1}{Em}$$

资产定价中心公式“中心”的地方在于, 任意的资产价格都可以用 m 来折现定价, m 就是资产定价理论里面著名的随机折现因子 (stochastic discount factor, SDF)。

资产定价中心公式证明

证明：(1) 内积空间.

现在，我们考虑未来的收益是一系列连续状态随机变量。回想一下，连续状态随机变量定义为从样本空间到实线的映射：

$$x \equiv x(\omega) : \Omega \rightarrow R$$

在这种情形下， m 也是实数类型的随机变量。我们定义 $\mathbf{M} = \{x \in R : E x^2 < \infty\}$ 。这一集合里包含所有“合理”的收益。紧接着，我们定义内的内积为：

$$\langle x_1, x_2 \rangle = E(x_1 x_2)$$

众所周知， \mathbf{M} 是具有上述内积的空间。



资产定价中心公式证明

证明：(2) 完备的内积空间是 Hilbert 空间.

资产 i 的未来现金流为：

$$P_{i,t+1} = x_i$$

其中： $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^S)$ ，表示未来现金流的各种不同状态下的价格。
有 n 个资产：

$$\begin{bmatrix} P_{1,t+1} \\ \vdots \\ P_{n,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

向量形式： $\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{x}$



资产定价中心公式证明

证明：(2) 完备的内积空间是 Hilbert 空间.

未来现金流在现在的价格：

$$P_t = q$$

那么：

$$q = \pi(x)$$

这里的 $\pi(\cdot)$ 代表着未来现金流的折现函数，根据金融中的无套利原理：

$$\pi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) = \omega_1 \pi(x_1) + \omega_2 \pi(x_2)$$

而且无限小的未来现金流折现到现在的价格也是无限小，无限小的价格也在这个空间里，也就是说这个内积空间是完备的，完备的内积空间就是希尔伯特空间 (Hilbert space)



资产定价中心公式证明

证明：(3) Hilbert 空间的 Riesz 表示定理。

Hilbert 空间的 Riesz 表示定理：令 H 为 Hilbert 空间。 f 是 H 上任意有界线性泛函，则存在唯一的 $g \in H$ 使得每个 $h \in H$ 下，都有 $f(h) = \langle h, g \rangle$ 。因为不存在套利，那么 q 是 M 上的一个线性正泛函。根据 Riesz 表示定理，对于一些 $m \in M$ ， M 上的每一个有界线性定价泛函 q 可以用内积表示：

$$q(x) = \langle x, m \rangle = E(mx)$$

不能有负价格， q 必须为正才能排除套利，所以几乎可以肯定 $m > 0$ 。反之亦然。因此，我们可以得出结论，几乎可以肯定，当且仅当 $m > 0$ 时不存在套利。□

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
 - 资产定价中心公式
 - 定价中心公式的另一种证明
 - 定价中心公式的应用
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

定价中心公式的另一种证明

从微观经济学中的效用最大化框架出发，我们假设理性人在 $t-1$ 期持有数量为 q_{t-1} 的投资资产，资产在 $t-1$ 期的价格是 p_{t-1} ， t 期的消费是 c_t ， t 期的工资收入是 w_t ，那么他在 t 期的预算约束是：

$$c_t + p_t q_t \leq (p_t + d_t) q_{t-1} + w_t$$

我们构建如下生命周期期望效用最大化问题：

$$\max_{\{c_t, q_t\}} E_0 \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{Subject to : } c_t + p_t q_t \leq (p_t + d_t) q_{t-1} + w_t$$

其中： β 是折现因子。由于这这个问题下，我们只假设存在一个代理人，所以，资产数量是恒定的：

$$q_t = q_{t+1} \quad \forall t$$

定价中心公式的另一种证明

用拉格朗日方法求解优化：

$$L = E_0 \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) - \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t (c_t + p_t q_t - (p_t + d_t) q_{t-1} - w_t) \right]$$

我们对着 c_r 和 q_r 分别求一阶导：

$$F.O.C : \frac{\partial L}{\partial c_r} = E_0 [\beta^r u'(c_r)] - \lambda_r = 0$$

$$F.O.C : \frac{\partial L}{\partial q_r} = -\lambda_r p_r + \lambda_{r+1} (p_{r+1} + d_{r+1}) = 0$$

把第一个算式中的拉格朗日乘子带入第二个一阶条件：

$$E_t [\beta^t u'(c_t) p_t] = E_t [\beta^{t+1} u'(c_{t+1}) (d_{t+1} + p_{t+1})]$$

定价中心公式的另一种证明

于是，我们得到：

$$E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \frac{(p_{t+1} + d_{t+1})}{p_t} \right] = 1$$

从上面等式，我们得到资产价格是未来收入的折现，并且，存在随机折现因子，我们用 m 代替：

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \\ p_t &= E_t (m_{t+1} \cdot x_{t+1}) \end{aligned}$$

上一小节的方法和从消费出发的方法，都是教材中描述的经典方法，但是很明显，第一种方法更直观、直接、普适。

主要内容

1 引言

2 定价理论

- 资产定价中心公式
- 定价中心公式的另一种证明
- 定价中心公式的应用

3 随机折现因子与多因子模型

4 随机折现因子与人工智能

5 人工智能在技术上配合多因子

6 人工智能投资实战应用再探讨

定价中心公式的应用

前面证明了这个式子的正确性：

$$E_t[m_{t+1}R_{i,t+1}] = 1$$

把之前的收益率改写成常规的收益率： $r_{i,t+1} = R_{i,t+1} - 1$ 。所以得到：

$$E_t[m_{t+1}r_{i,t+1}] = 0$$

这个等式这么看还不那么激动人心，我们可以再改写一下：

$$E_{t+1}(r_{i,t+1}) = f(m_{t+1})$$

而：

$$r_{i,t+1} = E_{t+1}(r_{i,t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

所以：

$$r_{i,t+1} = f(m_{t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

这个就是的收益率预测等式。

收益率预测等式启示

- 根据 Riesz 表示定理, m 在完备空间 M 里, 但是 m 具体是什么函数形式是不知道的。
- $r_{i,t+1} = E_{t+1}(r_{i,t+1}) + \mathcal{E}_{t+1}$ 里面的 $E_{t+1}(\cdot)$ 函数表示各类经济状态、各种已知未知的信息, 所以期望收益与真实收益有个残差的区别, **如果市场完全信息**, 那么 $r_{i,t+1} = E_{t+1}(r_{i,t+1}) = f(m_{t+1})$, 即资产的收益可以由随机折现因子表示。
- 由于 Reisz 表示定理, 只说了存在性和唯一性, 并没有说明其**具体函数形式**, 事实上随机折现因子的具体函数形式无法精准确定。

收益率预测等式启示

- 下面著名的定价等式都是 $r_{i,t+1} = E_{t+1}(r_{i,t+1}) = f(m_{t+1}) + \varepsilon_{it}$, 因子部分是 m , 线性函数就是 $f(\cdot)$:

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}MKT_t + e_{it} \quad (1)$$

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}MKT_t + s_{it}SMB_t + h_{it}HML_t + e_{it} \quad (2)$$

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}MKT_t + s_{it}SMB_t + h_{it}HML_t + m_{it}MOM_t + e_{it} \quad (3)$$

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}MKT_t + s_{it}SMB_t + h_{it}HML_t + r_{it}RMW_t + c_{it}CMA_t + e_{it} \quad (4)$$

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型**
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

多因子模型起源于对 SDF 的因子形式假设

(1) 非系统性风险不被定价

根据：

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ p = E(mx) &= \text{cov}(m, x) + (Em)(Ex)\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\frac{Ex}{p} &= \frac{1}{Em} - \frac{\text{cov}(m, R)}{Em} \\ &= R_f - R_f \text{cov}(m, R)\end{aligned}$$

因此：

$$ER - R_f = -R_f \text{cov}(m, R)$$

风险溢价与 $\text{cov}(m, R)$ 成比例。

多因子模型起源于对 SDF 的因子形式假设

(1) 非系统性风险不被定价

有时我们也许会对 x 进行分解：

$$x = x_m + \varepsilon$$

其中 $x_m = \text{proj}(x|m)$ 是 x 的系统性风险， $\varepsilon = x - \text{proj}(x|m)$ 为非系统性（特殊）风险。很容易看出：

$$ER - R_f = -R_f \text{cov}(m, R_m)$$

其中 $R_m = x_m/p$ 。换句话说，非系统性风险没有被定价。

多因子模型起源于对 SDF 的因子形式假设

(2) Beta-定价

对于资产 i ，总收益可以写成：

$$ER_i = R_f + \left(\frac{\text{cov}(R_i, m)}{\text{var}(m)} \right) \left(-\frac{\text{var}(m)}{Em} \right)$$

或者：

$$ER_i = R_f + \beta_{i,m} \lambda_m$$

其中， $\beta_{i,m}$ 衡量了资产 i 包含的系统性风险； λ_m 为“风险价格”。

多因子模型起源于对 SDF 的因子形式假设

(3) 因子模型

我们假设随机折现因子具有下面因子形式：

$$m = a + b'f$$

其中 f 为一列“因子”， b 为因子载荷， a 为一个常数，我们称之为“因子模型”。在不丧失一般性的前提下，我们假设 $Ef = 0$ ，那么 $Em = a = 1/R_f$ 。既然 $1 = E(mR_i)$ ，那么就有：

$$E(R_i) = \frac{1}{Em} - \frac{\text{cov}(m, R_i)}{Em} = \frac{1}{a} - \frac{E(R_i f') b}{a}$$

使得 β_i 为 R_i 在 f 上的回归系数，那么， $\beta_i \equiv E(ff')^{-1} E(fR_i)$ 。所以：

$$E(R_i) = \frac{1}{a} - \frac{E(R_i f') E(ff')^{-1} E(ff') b}{a} = \frac{1}{a} - \beta_i' \frac{E(ff') b}{a}$$

多因子模型起源于对 SDF 的因子形式假设

(3) 因子模型

注意到 $E(ff')b = Emf$ 。如果我们定义

$$\lambda \equiv -R_f E(mf)$$

可以得到：

$$ER_i = R_f + \lambda' \beta_i$$

这就是 β -定价模型的一般形式。反之，我们也可以从 $ER_i = R_f + \lambda' \beta_i$ 中得到 $m = a + b'f$ 。因此，因子模型相当于 beta 定价模型。**CAPM 和 APT 都是因子模型的特例。**

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能**
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

随机折现因子与人工智能

- 上文在对 SDF 因子形式的假设下，得到了多因子模型。当然，收益预测等式：

$$r_{i,t+1} = f(m_{t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

- 其中的 $f(m_{t+1})$ 真实形式是什么样的谁也不知道，如果 m 不是表述成某类固定因子的线性组合，而是其它动态的收益率序列的函数形式，这时用到的就是人工智能算法。
- 注意，人工智能算法不违背 m 的性质，相反，由于其动态性，不是像多因子那样取固定一组因子，其估计性能可能更好。

随机折现因子与人工智能

为什么要将人工智能与机器学习应用于资产定价？

- 衡量资产的风险溢价从根本上讲是一个预测问题——风险溢价是对未来超额收益的条件预期。
- 当预测变量数接近观测样本数或预测变量高度相关时，传统的预测方法会失效。
- 变量间复杂的非线性关系，容易引起过拟合偏差和错误发现。

随机折现因子与人工智能

对人工智能方法在定价上的应用进行简单举例

- 一般形式上，假设资产超额收益是下面预测形式：

$$\begin{aligned} r_{i,t+1} &= E_t(r_{i,t+1}) + \varepsilon_{i,t+1} \\ E_t(r_{i,t+1}) &= f(m_{t+1}) = g^*(z_{i,t}) \end{aligned}$$

- 我们的目标是找到 $E_t(r_{i,t+1})$ 的函数形式，准则是使得对样本外的 $r_{i,t+1}$ 解释度最大。
- 我们把**预测变量**记为 $z_{i,t}$ ，并且假设条件期望函数 $g^*(\cdot)$ 是这些预测变量的灵活函数，也就是函数形式不去特定限制。

随机折现因子与人工智能

例 1 (简单线性预测模型)

这时的函数为：

$$g(z_{i,t}; \theta) = z'_{i,t} \theta$$

目标函数为样本外解释度最大，也就是求下面函数最小化：

$$L(\theta) = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (r_{i,t+1} - g(z_{i,t}; \theta))^2$$

随机折现因子与人工智能

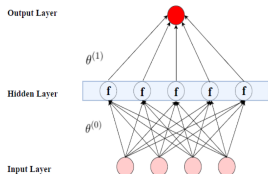
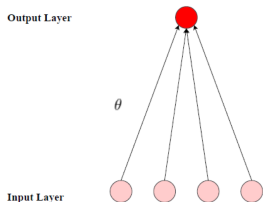
例 2 (神经网络预测模型)

神经网络最终的输出也是各个神经元的线性加总：

$$g(z; \theta) = \theta_0^{(1)} + \sum_{j=1}^5 x_j^{(1)} \theta_j^{(1)}$$

目标函数还是这样一个形式：

$$L(\theta) = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (r_{i,t+1} - g(z_{i,t}; \theta))^2$$



主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子**
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

人工智能在技术上配合多因子

线性形式

传统投资方法假设收益服从一个线性多因子模型：

$$R_i = a_i + u_{i1}F_1 + u_{i2}F_2 + \dots + u_{iL}F_L + e_i$$

因子包含一系列对资产收益有解释能力的变量。

该因子模型原本是一个解释模型，并非用于预测，为实现预测功能，每一个因子值需要用估计值代替：

$$R_i = a_i + u_{i1}\hat{F}_1 + u_{i2}\hat{F}_2 + \dots + u_{iL}\hat{F}_L + e_i$$

我们有多种模型可以对该未来价值进行估计，最简单的可以用历史均值进行估计，更为复杂精细的，可以构建人工智能模型去预估因子未来值。

人工智能在技术上配合多因子

非线性多因子模型

- 为了克服线性模型的缺点，必须考虑更通用的非线性模型：

$$R_i = \tilde{f}(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iL}, \hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_L) + e_i$$

- 为简化该模型，我们用历史均值作为未来因子的估计值，可以得到：

$$\begin{aligned} R_i &= \tilde{f}(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iL}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_L) + e_i \\ &= f(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iL}) + e_i \end{aligned}$$

人工智能在技术上配合多因子

- 我们有丰富的模型可以用来估计非线性方程 $f(\cdot)$ ，以下简单介绍一种巴克莱曾经用的**多层前馈神经网络**。
- 最小化噪声学习的方法
 - 验证集
 - 正则化
 - 滚动训练/测试窗口
- 在连续 N 个月的数据上构建的模型组合起来以预测下个月的收益。因此， k 月股票 i 的收益预测由下式给出：

$$\hat{R}_i(k) = \frac{1}{N^*M} \sum_{j=1}^{N^*M} NN_{k-j} \left(u_{i1}^k, u_{i2}^k, \dots, u_{iL}^k \right)$$

- 在美国市场的检验证明，不同股票池下，非线性多因子模型下的组合夏普表现均优于简单线性多因子模型。

主要内容

- 1 引言
- 2 定价理论
- 3 随机折现因子与多因子模型
- 4 随机折现因子与人工智能
- 5 人工智能在技术上配合多因子
- 6 人工智能投资实战应用再探讨

人工智能投资实战应用再探讨

根据前文收益率预测等式：

$$\begin{aligned}\sum w_{it}^* r_{it} &= \sum w_{it}^* f_t^*(m_t) + \sum w_{it}^* \varepsilon_{it} \\ \sum w_{it}^* r_{it} &= f_t^*(m_t) \sum w_{it}^* + \sum w_{it}^* \varepsilon_{it}\end{aligned}$$

在完全信息市场，定价函数包含所有有效信息，残差可以被抵消，所以：

$$\begin{aligned}\sum w_{it}^* r_{it} &= f_t^*(m_t) + 0 \\ \sum w_{it}^* r_{it} &= f_t^*(m_t)\end{aligned}$$

上式我们看出，特定的 $f_t^*(m_t)$ 对应着特定的组合权重。

当市场信息不完全，残差不能被抵消，高配残差为正的证券时：

$$\sum w_{it}^{**} r_{it} \geq f_t^*(m_t) = \sum w_{it}^* r_{it}$$

这个就是指数增强的基本原理。

人工智能投资实战应用再探讨

- 实际上指数增强策略时，多因子的思路就是刚才说的，找未来有超额收益的证券去超配。
- 还有一个方式，在想法上更抽象、方法技术上更直接，我们可以直接找到符合下面特性的函数 $f_t^{**}(\cdot)$:

$$\sum w_{it}^{**} r_{it} = f_t^{**}(m_t)$$

- 这个思路是从最根本的定价理论引出来的，我们找 f_t^{**} ，就是在找 anomaly，只是这个异象不像常规异象那样容易命名，里面的机理也更复杂。

人工智能投资实战应用再探讨

- 人工智能投资思路具有很强的实践意义
 - 《“指数增强”新思维——人工智能+传统金融》
 - 《次优理论下的组合配置与策略构建——人工智能再出发》
- f^{**} 不容易寻找，需要对很多种算法很了解，且需要对线性空间理论有良好的理解。
- 多因子假设 SDF 为因子形式，人工智能方法技术上更先进，无需特定函数形式上的假设，从投资实战上来看，可能人工智能方法会带来更好的业绩。
- 谁是正规军？**都是！**

谢谢观赏!