Numerische Mathematik
7. Übungsserie

Aufgabe 7.1:

(a) $v = \begin{pmatrix} -0.78 \\ 1.07 \\ 1.07 \end{pmatrix}, \; H_v = \begin{pmatrix} 0.580 & 0.576 & 0.576 \\ 0.576 & 0.213 & -0.787 \\ 0.576 & -0.787 & 0.213 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2:

not done yet!

Aufgabe 7.3:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (B_{i,j})^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left((Q^T A Q)_{i,j}\right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l,k=1}^{n} Q^T_{i,l} \cdot A_{l,k} \cdot Q_{k,j} \right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} Q^T_{i,l_1} \cdot A_{l_1,k_1} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot Q_{k_2,j} \right) \\
&= \sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} A_{l_1,k_1} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} Q_{l_1,i} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{j,k_2}}_{1 \text{ falls } l_1=l_2 \text{ und } k_1=k_2,\ 0 \text{ sonst}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 \quad \square
\end{aligned}$$

(b) Nach der Hauptachsentransformation gibt es für jede symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierende Matrix $S \in SO_n$, sodass $S^T A S$ eine diagonale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ von A auf der Diagonale ist. Nach (a) ist dann $\sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left((S^T A S)_{i,j}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \quad \square$