Automaten und Berechenbarkeit
3. Übungsserie

Aufgabe 1:

Symmetrie:

$$\begin{aligned} u \sim_L v &\iff \forall w \in \Sigma^* \ (uw \in L \iff vw \in L) \\ &\iff \forall w \in \Sigma^* \ (vw \in L \iff uw \in L) \\ &\iff \underline{v \sim_L u} \end{aligned}$$

Transitivität:

$$\begin{aligned} x \sim_L y \wedge y \sim_L z &\iff \forall w \in \Sigma^* \ (xw \in L \iff yw \in L) \wedge \forall w \in \Sigma^* \ (yw \in L \iff zw \in L) \\ &\iff \forall w \in \Sigma^* \ ((xw \in L \iff yw \in L) \wedge (yw \in L \iff zw \in L)) \\ &\iff \forall w \in \Sigma^* \ (xw \in L \iff yw \in L \iff zw \in L) \\ &\implies \forall w \in \Sigma^* \ (xw \in L \iff zw \in L) \iff \underline{x \sim_L z} \end{aligned}$$

Reflexivität:

$$u \sim_L u \iff \forall w \in \Sigma^* \ (\underbrace{uw \in L \iff uw \in L}_{Taut.})$$

Aufgabe 2:

(a) $\{[\lambda], [a], [aa], [aaa], [aaaa]\}$

(b) $\{[\lambda], [a], [ab], [aba]\}$

(c) $\{[\lambda], [b], [bb], [bba], [bbaa]\}$

Aufgabe 3:

IA: $|w| = 1$, $\delta^*((q,p),w) = \delta((q,p),w) \overset{\text{def.}}{=} (\delta(q,w), \delta(p,w)) = (\delta^*(q,w), \delta^*(p,w))$

IV: für w gilt: $\delta^*((q,p),w) = (\delta^*(q,w), \delta^*(p,w))$

IB: für $w \cdot a$, $a \in \Sigma$ gilt: $\delta^*((q,p), w \cdot a) = (\delta^*(q, w \cdot a), \delta^*(p, w \cdot a))$

IS: $w \to w \cdot a$

$\delta^*((q,p), w \cdot a) = \delta(\delta^*((q,p),w), a) \overset{\text{IV}}{=} \delta((\delta^*(q,w), \delta^*(p,w)), a) = (\delta((\delta^*(q,w), a), \delta(\delta^*(p,w), a))$
$= \underline{\underline{(\delta^*(q, w \cdot a), \delta^*(p, w \cdot a))}}$

Aufgabe 4:

(a)