Numerische Mathematik

7. Übungsserie

Aufgabe 7.1:

(a)

$$v \approx \begin{pmatrix} 2.92 \\ 1.07 \\ 1.07 \end{pmatrix} \qquad H_v \approx \begin{pmatrix} 0.580 & 0.577 & 0.577 \\ 0.577 & 0.789 & -0.211 \\ 0.577 & -0.211 & 0.789 \end{pmatrix} \qquad H_v \cdot A \approx \begin{pmatrix} 1.85 & -1.94 \\ 0 & -0.00165 \\ 0 & -0.0383 \end{pmatrix}$$

$$w \approx \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.0383 \end{pmatrix} \qquad H_w \approx \begin{pmatrix} -0.04 & -1 \\ -1 & 0.04 \end{pmatrix} \qquad H_w \cdot A' \approx \begin{pmatrix} 0.0383 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = H_v \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_w \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.58 & 0.554 & 0.554 \\ -0.577 & 0.243 & -0.797 \\ -0.577 & -0.797 & 0.243 \end{pmatrix}$$

$$R \approx \begin{pmatrix} 1.85 & -1.94 \\ 0 & 0.0383 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Ich habe vergessen, bei den Normen / der Berechnung von α zu runden. Das habe ich allerdings zu spät bermerkt und jetzt will ich nicht alles nochmal umschreiben. Außerdem haben wir am Anfang mal definiert, dass am Ende einer Gleitkommazahl nicht nur 9en sind. Deswegen wurde die ein oder andere 0.0399 zu einer 0.04 etc.

(b)

$$Q^T b \approx \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.311 \\ 1.35 \end{pmatrix} \qquad R_1 \approx \begin{pmatrix} 1.85 & -1.94 \\ 0 & 0.0383 \end{pmatrix} \qquad (R_1; b_1) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1.85 & -1.94 & -0.003 \\ 0 & 0.0383 & 0.311 \end{array}\right)$$

$$x \approx \begin{pmatrix} 8.5 \\ 8.12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.2:

not done yet!

Aufgabe 7.3:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (B_{i,j})^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left((Q^T A Q)_{i,j}\right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l,k=1}^{n} Q^T_{i,l} \cdot A_{l,k} \cdot Q_{k,j} \right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} Q^T_{i,l_1} \cdot A_{l_1,k_1} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot Q_{k_2,j} \right) \\
&= \sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} A_{l_1,k_1} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} Q_{l_1,i} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{j,k_2}}_{1 \text{ falls } l_1=l_2 \text{ und } k_1=k_2,\ 0 \text{ sonst}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 \quad \square
\end{aligned}$$

(b) Nach der Hauptachsentransformation gibt es für jede symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierende Matrix $S \in SO_n$, sodass $S^T AS$ eine diagonale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ von A auf der Diagonale ist. Nach (a) ist dann $\sum\limits_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left((S^T AS)_{i,j}\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \quad \square$

Aufgabe 7.4:

$f - g$ hat $n + 1$ Nullstellen $(t_0, \dots, t_n)$ in $\mathbb{R}$, ist aber maximal vom Grad n. Damit ist $\deg(f - g) < 1$ und damit $\deg(f - g) = 0$. Also sind f und g maximal um eine Konstante verschieden. Da aber f und g an mindestens einer Stelle gleich sind, ist $f = g$.