

Automaten und Berechenbarkeit

3. Übungsserie

Aufgabe 1:

Symmetrie:

$$\begin{aligned}
 u \sim_L v &\iff \forall w \in \Sigma^* (uw \in L \iff vw \in L) \\
 &\iff \forall w \in \Sigma^* (vw \in L \iff uw \in L) \\
 &\iff \underline{v \sim_L u}
 \end{aligned}$$

Transitivität:

$$\begin{aligned}
 x \sim_L y \wedge y \sim_L z &\iff \forall w \in \Sigma^* (xw \in L \iff yw \in L) \wedge \forall w \in \Sigma^* (yw \in L \iff zw \in L) \\
 &\iff \forall w \in \Sigma^* ((xw \in L \iff yw \in L) \wedge (yw \in L \iff zw \in L)) \\
 &\iff \forall w \in \Sigma^* (xw \in L \iff yw \in L \iff zw \in L) \\
 &\implies \forall w \in \Sigma^* (xw \in L \iff zw \in L) \iff \underline{x \sim_L z}
 \end{aligned}$$

Reflexivität:

$$u \sim_L u \iff \forall w \in \Sigma^* (\underbrace{uw \in L \iff uw \in L}_{\text{Taut.}})$$

Aufgabe 2:

- (a) $\{[\lambda], [a], [aa], [aaa], [aaaa]\}$
- (b) $\{[\lambda], [a], [ab], [aba]\}$
- (c) $\{[\lambda], [b], [bb], [bba], [bbaa]\}$

Aufgabe 3:

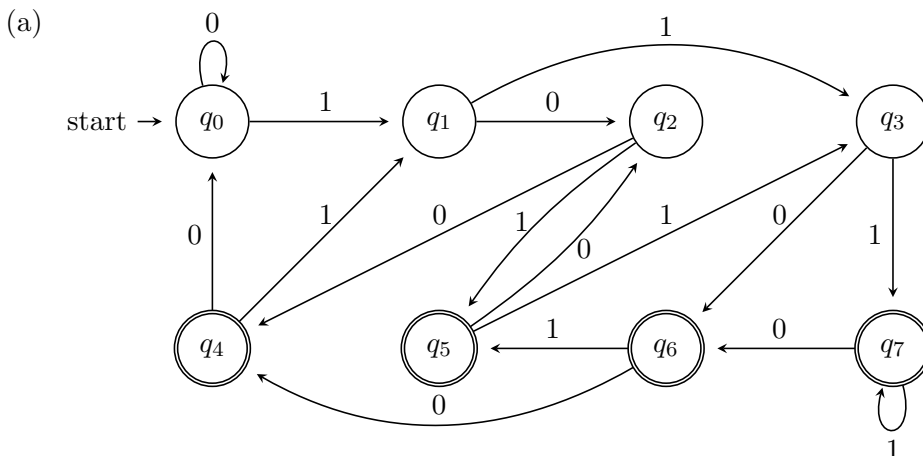
IA: $w = \lambda, \delta^*((q, p), w) = \delta((q, p), w) \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_1(q, w), \delta_2(p, w)) = (\delta^*(q, w), \delta^*(p, w))$

IV: für w gilt: $\delta^*((q, p), w) = (\delta_1^*(q, w), \delta_2^*(p, w))$

IB: für $w \cdot a, a \in \Sigma$ gilt: $\delta^*((q, p), w \cdot a) = (\delta_1^*(q, w \cdot a), \delta_2^*(p, w \cdot a))$

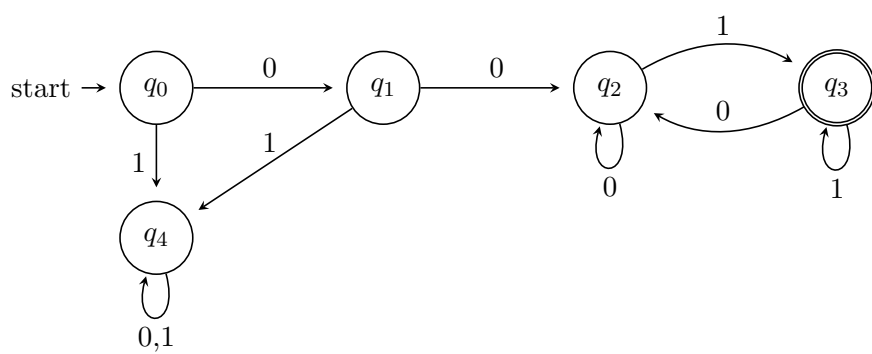
IS: $w \rightarrow w \cdot a$

$$\begin{aligned}
 \delta^*((q, p), w \cdot a) &= \delta(\delta^*((q, p), w), a) \stackrel{\text{IV}}{=} \delta((\delta_1^*(q, w), \delta_2^*(p, w)), a) = (\delta_1(\delta_1^*(q, w), a), \delta_2(\delta_2^*(p, w), a)) \\
 &= \underline{\underline{(\delta_1^*(q, w \cdot a), \delta_2^*(p, w \cdot a))}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$\delta : (q_i, a \in \Sigma) \longrightarrow q_{(i \cdot 2 + a) \% 8}$, wenn $\delta^*(q_0, w) = q_i$, dann stellt die binäre Darstellung von i die letzten 3 Buchstaben von w dar $\implies |w| \geq 3$ (da nur $\{q_i \mid i \geq 4\}$ Finalzustände sind)

(b)



(c) $A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma^2, \delta((q, p), w), (q_0, q_0), F_1 \times Q_2 \cup F_2 \times Q_1)$, wobei $\delta((q, p), w) = (\delta_1(q, w), \delta_2(p, w))$