Numerische Mathematik

5. Übungsserie

Aufgabe 5.1:

(a)

$$(L;b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \frac{104}{105} & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\implies \overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

$$(R,\overline{z}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1.05 & 1.02 & 1 \\ 1.04 & 1.02 & 1.01 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1.05 & 1.02 & 1 \\ 0 & 9.71 \cdot 10^{-3} & 1.95 \cdot 10^{-2} \end{array}\right)$$

$$\implies \overline{x} = \begin{pmatrix} -9.90 \cdot 10^{-1} \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-4} \\ 9.896 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}$$

(c)

$$(A;\Delta_6) = \left(\begin{array}{cc|c} 1.05 & 1.02 & 5 \cdot 10^{-4} \\ 1.04 & 1.02 & 9.896 \cdot 10^{-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1.05 & 1.02 & 5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 9.71 \cdot 10^{-3} & 9.90 \cdot 10^{-1} \end{array}\right)$$

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} -99.1 \\ 102 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.2:

(a) IA: $x^{(0)}$ ist Wahrscheinlichkeitsvektor
IV: $x^{(k)}$ ist Wahrscheinlichkeitsvektor
IS:

$$\forall_{i=1,\dots,n} : \left(Wx^{(k)}\right)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{W_{i,j}}_{\geq 0} \underbrace{x_j^{(k)}}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Wx^{(k)}\right)_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{i,j}x_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} W_{i,j}x_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_j^{(k)} = 1$$

$\implies x^{(k+1)}$ ist Wahrscheinlichkeitsvektor □

(b) $\forall_{i=1,\dots,n} : y_i = 1 \implies \forall_{i=1,\dots,n} : ((W^T - \mathbb{1})y)_i = -1 + \sum_{j=1}^{n} W_{i,j}^T y_j = -1 + \sum_{j=1}^{n} W_{i,j}^T = 0$

$\implies (W^T - \mathbb{1})y = 0 \iff W^T y = y \iff y$ ist Eigenvektor von W^T mit Eigenwert 1
$\implies$ 1 ist Eigenwert von W □

(c) $Wx^{(\infty)} = W \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} Wx^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^{(\infty)}$ □

(d)

$$x^{(5)} \approx \begin{pmatrix} 0.29884000 \\ 0.38248000 \\ 0.31868000 \end{pmatrix}$$

$$x^{(10)} \approx \begin{pmatrix} 0.29824163 \\ 0.38598741 \\ 0.31577096 \end{pmatrix}$$

$$x^{(15)} \approx \begin{pmatrix} 0.29824564 \\ 0.38596477 \\ 0.31578959 \end{pmatrix}$$