Numerische Mathematik

2. Übungsserie

Aufgabe 2.1:

(a) $\underline{\kappa}^{rel}(f,x) = \max_{i,j} \frac{|x_j|}{|f_i(x)|} \cdot \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| = \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(b) $\underline{\kappa}^{rel}(f,x) = \max_{i,j} \frac{|x_j|}{|f_i(x)|} \cdot \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|$,

$$\frac{|x_1|}{|f(x)|} \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right| = \frac{|x_1|}{|x_1^{x_2}|} \cdot \left|x_2 x_1^{x_2-1}\right| = |x_2|$$
$$\frac{|x_2|}{|f(x)|} \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right| = \frac{|x_2|}{|x_1^{x_2}|} \cdot |x_1^{x_2} \ln x_1| = |x_2| \cdot |\ln x_1|$$

$$\implies \underline{\kappa}^{rel}(f,x) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } e^{-1} \le x \le e \\ x_2 \ln x_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2.2:

not done yet!

Aufgabe 2.3:

not done yet!

Aufgabe 2.4:

Da $|f(x)| \le 1$ ist der absolute Rundungsfehler $|\delta| \le \epsilon$. Der Rundungsfehler von $W(h)$ ist höchstens $\frac{\epsilon}{h} + o(\delta)$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

mit ξ_1 zwischen a und $a+h$, ξ_2 zwischen a und $a-h$

$$W(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{2f'(a)h + \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}h^3}{2h} = f'(a) + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12}h^2$$

Dadurch ist der Verfahrensfehler höchstens $\frac{h^2}{6}$, denn $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) \le 2$. Der kleinste Fehler ist somit bei $\frac{\epsilon}{h} = \frac{h^2}{6}$ zu erwarten. $\implies h = (6\epsilon)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{52}{3}}}}$

Nun zum Test:

h	$f(1) - W(h)$
2^{-10}	$8.587876854 \times 10^{-8}$
2^{-13}	$1.341690758 \times 10^{-9}$
2^{-15}	$8.385958594 \times 10^{-11}$
2^{-16}	$2.201394622 \times 10^{-11}$
$3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{52}{3}}$	$1.860733789 \times 10^{-13}$
2^{-17}	$1.860733789 \times 10^{-13}$
2^{-18}	$-7.089884235 \times 10^{-12}$
2^{-20}	$-2.164179946 \times 10^{-11}$
2^{-23}	$-7.984946038 \times 10^{-11}$

Unser vorhergesagtes h funktioniert super und teilt sich unter den gewählten Werten mit 2^{17} den Thron.