Numerische Mathematik

1. Übungsserie

Aufgabe 1.1:

1 00 00 entspricht: $(-1)^1 \cdot \frac{0}{2^2} \cdot 2^{1-1} = 0$

0 00 00 entspricht: $(-1)^0 \cdot \frac{0}{2^2} \cdot 2^{1-1} = 0$

0 00 01 entspricht: $(-1)^0 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^{1-1} = 0.25$

0 00 10 entspricht: $(-1)^0 \cdot \frac{2}{2^2} \cdot 2^{1-1} = 0.5$

0 00 11 entspricht: $(-1)^0 \cdot \frac{3}{2^2} \cdot 2^{1-1} = 0.75$

0 01 00 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{0}{2^2}) \cdot 2^{1-1} = 1$

0 01 01 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) \cdot 2^{1-1} = 1.25$

0 01 10 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{2}{2^2}) \cdot 2^{1-1} = 1.5$

0 01 11 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{3}{2^2}) \cdot 2^{1-1} = 1.75$

0 10 00 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{0}{2^2}) \cdot 2^{2-1} = 2$

0 10 01 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) \cdot 2^{2-1} = 2.5$

0 10 10 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{2}{2^2}) \cdot 2^{2-1} = 3$

0 10 11 entspricht: $(-1)^0 \cdot (1 + \frac{3}{2^2}) \cdot 2^{2-1} = 3.5$

Aufgabe 1.2:

```java
package skripte;
import java.lang.Math;

class Main {
    static int getSingleP() {
        float x=0.5f;
        int p=0;
        while(1f + x != 1f) {
            x/=2;
            ++p;
        }
        return p;
    }
    static int getDoubleP() {
        double x=0.5;
        int p=0;
        while(1d + x != 1d) {
            x/=2;
            ++p;
        }
        return p;
    }
    static int getSingleR() {
        int e=1;
        int r=1;
        while(1f/(float) Math.pow(2, e) != 0) {
            e = 2*e+1;
            ++r;
        }
        return r;
    }
    static int getDoubleR() {
        int e=1;
        int r=1;
        while(1d/Math.pow(2, e) != 0) {
            e = 2*e+1;
            ++r;
        }
        return r;
    }
    public static void main(String[] args) {
        System.out.printf("Single: p=%d, r=%d\nDouble: p=%d, r=%d\n", getSingleP(), getSingleR(),
    getDoubleP(), getDoubleR());
    }
}
```

Output:

```
Single:  p=23, r=8
Double:  p=52, r=11
```

Aufgabe 1.3:

(a) Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A^TA, sodass $S^TA^TAS = D$ eine Diagonalmatrix aus Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A^TA ist (Spektralsatz). Weiterhin sei $x = Sy,\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\|A\|_2^2 = (\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2)^2 = \max_{\|Sy\|_2=1} \langle ASy|ASy\rangle = \max_{\|y\|_2=1} \left\langle S^TA^TASy|y\right\rangle = \max_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

Diese Summe ist maximal mit $y = e_i =: e_{max}$, mit $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass $\lambda_i = \lambda_{max} := \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \lambda_i$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{max} y_i^2 = \lambda_{max} \|y\|_2^2 = \lambda_{max}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_{max_i}^2 = \lambda_{max}$$

$$\implies \|A\|_2 = \underline{\underline{\sqrt{\lambda_{max}}}}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left\| \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} A_{1,j}x_j \\ A_{2,j}x_j \\ \vdots \\ A_{m,j}x_j \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left(\max_{i\in\{1,\dots,m\}} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j \right| \right) \\
&= \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \left(\max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j \right| \right) \\
&\overset{(1)}{=} \underline{\underline{\max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|}}
\end{aligned}$$

(1) $\sum\limits_{j=1}^n A_{i,j}x_j$ ist maximal mit $x_j = \frac{|A_{i,j}|}{A_{i,j}}$, da $\forall j \in \{1, \dots, n\} : |x_j| \leq 1$

Aufgabe 1.4:

(a) Sei $L > 0$ die Lipschitz-Konstante.

$$\forall x \in [a,b]\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{L}\ \forall y \in [a,b] : \|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon \implies \|x-y\| \cdot L \geq \epsilon \implies \|x-y\| \geq \delta(\epsilon, x)$$

$\implies$ f ist stetig in $[a, b]$.

Falls $L = 0$, dann $\forall x, y \in [a,b] : \|f(x) - f(y)\| = 0$
$\implies$ f ist stetig in $[a, b]$.

(b) Sei $g(t) = y + v \cdot t$ mit $0 \leq t \leq \|x - y\|$ und $v = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Dann gilt mit $\|v\| = 1$ und $\|J_f\| \leq L$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(g(\|x-y\|)) - f(g(0)) \\ &= \int_0^{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(g(t)))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\|x-y\|} J_f(g(t)) \cdot v \,\mathrm{d}t \\ \implies \|f(x) - f(y)\| &\leq \int_0^{\|x-y\|} L \cdot \|v\|\ \mathrm{d}t = \underline{\underline{L \cdot \|x-y\|}} \end{aligned}$$