

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsserie 5

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(B^C)\mathbb{P}(A|B^C)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(B^C)\mathbb{P}(A|B)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^C))\mathbb{P}(A|B)} \\
 &= \underline{\underline{\mathbb{P}(B)}} \\
 &\implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$B_0 = \{\text{Die ersten beiden Kugeln sind schwarz}\}$

$B_1 = \{\text{Die erste Kugel ist schwarz, die andere weiß}\}$

$B_2 = \{\text{Die erste Kugel ist weiß, die andere schwarz}\}$

$B_3 = \{\text{Die ersten beiden Kugeln sind weiß}\}$

(a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=0}^3 \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i) \\
 &= \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}} &&= \frac{60}{504} \\
 &\quad + \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}} &&+ \frac{80}{504} \\
 &\quad + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}} &&+ \frac{80}{504} \\
 &\quad + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} &&+ \frac{24}{504} \\
 &&&= \underline{\underline{\frac{244}{504}}}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \\
 \mathbb{P}(B_0|A) &= \frac{\frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}}{\mathbb{P}(A)} &&= \frac{60}{\underline{\underline{244}}} \\
 \mathbb{P}((B_1 \cup B_2)|A) &= \frac{\frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}} + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}}{\mathbb{P}(A)} &&= \frac{160}{\underline{\underline{244}}} \\
 \mathbb{P}(B_3|A) &= \frac{\frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}}}{\mathbb{P}(A)} &&= \frac{24}{\underline{\underline{244}}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: $A = \{\text{in Stau geraten}\}$ $B_0 = \{\text{über A4 gefahren}\}$ $B_1 = \{\text{über B7 gefahren}\}$ $B_2 = \{\text{über L2161 gefahren}\}$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A|B_i) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(A^C) &= \underline{\underline{\frac{5}{6}}}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \\ \mathbb{P}(B_0|A) &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \\ \mathbb{P}((B_1)|A) &= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}} \\ \mathbb{P}(B_2|A) &= \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}\end{aligned}$$