Numerische Mathematik

3. Übungsserie

Aufgabe 3.1:

(a) $f(4) = -1,\ f(4.5) = 2^{4.5} - 18 - 1 = \sqrt{2^9} - \sqrt{361} > 0$
$\implies f$ hat mindestens eine Nullstelle in $[4, 4.5]$

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 4$ ist streng monoton steigend,
$f'(4) = 16 \ln 2 - 4 > 16 \log_4 2 - 4 > 0$
$\implies f$ ist streng monoton steigend in $[4, 4.5]$

$\implies f$ hat genau eine Nullstelle in $[4, 4.5]$

(b) $\epsilon = 4 \cdot 10^{-2}$, nach Vorschrift muss $|a_n - b_n| = \frac{|a_n - b_n|}{2^n} < 2\epsilon \iff \frac{1}{2^{n+2}} < 4 \cdot 10^{-2} \iff 2^{n+4} > 10^2$
Das wird erfüllt mit $n = 3$. Berechnung:

$a_0 = 4$	$b_0 = 4.5$	$M = 4.25$	$f(M) \approx 1.02731384$
$a_1 = 4$	$b_1 = 4.25$	$M = 4.125$	$f(M) \approx -0.05187628$
$a_2 = 4.125$	$b_2 = 4.25$	$M = 4.1875$	$f(M) \approx 0.47061816$
$a_3 = 4.125$	$b_3 = 4.1875$	$M = 4.15625$	

Aufgabe 3.2:

(a) $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, potentielle Extremstellen von N_f gibt es bei $x = a, x = b, N_f'(x) = 0$. Da $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, ist $f'(x) \neq 0$ in $[a, b]$, wodurch $x = a, x = b, N_f'(x) = 0$ alle potentiellen Extremstellen von N_f in sind.

$$N_f' = 1 - \frac{f'^2 - f \cdot f''}{f'^2} = \frac{f \cdot f''}{f'^2}$$
$$N_f'(x) = 0 \implies f(x) = 0 \vee f''(x) = 0$$

Fall $f(x) = 0:\ N_f(x) = x - \frac{0}{\underbrace{f'(x)}_{\neq 0}} = x \in [a, b]$

Fall $f''(x) = 0:\ f''(x) = 6x - 6,\ f''(b) = 0$
Außerdem: $N_f(a) = \frac{1}{2} - \frac{1 + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \in [a, b], N_f(b) = 1 - \frac{1+1-3}{3-6} = \frac{2}{3} \in [a, b]$

Alle potentiellen Extremwerte von N_f liegen in $[a, b]$ und N_f ist stetig (da $f'(x) \neq 0$ in $[a, b]$ und f stetig).
$\implies N_f : [a, b] \to [a, b]$

(b) $N_f' = \frac{f \cdot f''}{f'^2}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ ist eine Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 1$ und Nullstellen $x_1 = 0, x_2 = 2$ und somit monoton fallend in $[a, b]$. Also ist $|f'(x)|$ monoton steigend in $[a, b]$.

$f(x)$ ist monoton fallend in $[a, b]$, da $f'(x) < 0$ in $[a, b]$. not done yet!
wird auch nicht mehr gemacht, bin müde

Aufgabe 3.3:

(a) $\phi'(x) = -2xe^{-x^2},\ \phi''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (\underbrace{4x^2 - 2}_{\text{Nullstellen und Vorzeichenwechsel bei } \pm\sqrt{2}}) \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$

$\implies |\phi(x)| \leq \phi(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{e^2} \leq 0.2 = L$

(b) *A-priori-Abschätzung:* $|x_\nu - x^*| \leq \frac{L^\nu}{1-L} |x_0 - x_1| = \frac{5}{4} \cdot 2^\nu \cdot 10^{-\nu} = 2^{\nu-3} \cdot 10^{-\nu+1} < 10^{-5}$
erfüllt mit $\nu = 7$

(c) $N_f(x) = x - \frac{e^{-x^2} - x}{-2xe^{-x^2} - 1}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.000000 & y_1 &= 0.333333 \\ x_2 &= 0.367879 & y_2 &= 0.534613 \\ x_3 &= 0.873423 & y_3 &= 0.621232 \\ x_4 &= 0.466327 & y_4 &= 0.646061 \end{aligned}$$