Automaten und Berechenbarkeit

1. Übungsserie

Aufgabe 1:

1. $\emptyset$
2. $\{ababaaaaabbaababababbabbbaabbabaababbbaabb\}$
3. $\{a,b\}^*$
4. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = Sp(w)\}$
5. $\{ab, ba, bb\}$
6. $\{a,b\}^{42}$
7. $\{xx \mid x \in \{a,b\}^*\}$
8. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
9. $\{a\}^*$
10. $\{w \in \{a,b\}^* \mid ||w|_a - |w|_b| \leq 7\}$

Aufgabe 2:

(a) $L_1 \times L_2 = \{(ab), (abb), (abbb)\}$
$L_1 \cdot L_2 = \{a, abb, abbb\}$
$L_2 \cdot L_1 = \{ba, bab, bba, bbab\}$

(b) $L_1^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$
$L_1^3 = \{aaa, aaab, aaba, aabab, abaa, abaab, ababa, ababab\}$
$L_1^n = \{a, ab\}^n$
$L_1^* = \{a, ab\}^*$
$L_2^2 = \{bb, bbb, bbbb\}$
$L_2^3 = \{bbb, bbbb, bbbbb, bbbbbb\}$
$L_2^n = \{w \mid n \leq |w|_b = |w| \leq 2n\}$
$L_2^* = \{b\}^*$

Aufgabe 3:

(a) $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) \supseteq L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$

$$\begin{aligned} L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land (v \in L_2 \lor v \in L_3))\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_2 \lor w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3 &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_2)\} \\ &\quad \cup \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_3)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_2) \lor \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \ldots)\} \end{aligned}$$

Da $\exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_2) \lor \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_3)$
$\implies \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_2 \lor w = u \cdot v \land u \in L_1 \land v \in L_3)$,
gilt $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) \supseteq L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$.

(b) $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$

$L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_2 \wedge v \in L_3)\}$

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3 &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_2)\} \\ &\quad \cap \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_3)\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_2) \wedge \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \ldots)\} \end{aligned}$$

Da $\exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_2 \wedge v \in L_3)$
$\implies \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_2) \wedge \exists u, v \in \Sigma^* : (w = u \cdot v \wedge u \in L_1 \wedge v \in L_3)$,
gilt $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$.

Aufgabe 4:

(a) Nein, Gegenbeispiel: $L_1 = \{|, ||\},\ L_2 = \{|\},\ L_3 = \{||\}$

(b) Ja, da Σ_1 und Σ_2 disjunkt sind, muss $\exists a \in \Sigma_1^* : \exists b \in \Sigma_2^* : (w = ab)$ mit $w \in L_A \cdot L_B$ und $L_A \in \Sigma_1^*,\ L_B \in \Sigma_2^*$.
Wenn $w = ab \in L_1 \cdot L_2 \wedge w = ab \in L_1 \cdot L_3$, dann $a \in L_1 \wedge b \in L_2 \wedge b \in L_3 \implies b \in L_2 \cap L_3 \implies w \in L_1 \cdot (L_2 \cap L_3)$.
Also ist $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \supseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3 \overset{3.(b)}{\implies} L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$

Aufgabe 5:
Hilfssatz:
Sei $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \{1, 2\}$, die dyadische Darstellung einer natürlichen Zahl $a > 0$. Dann ist $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \{1, 2\}$ mit $m \geq n$ und $\exists k \in [1, m] : x_{m-k} \neq y_{n-k}$ (y mit nicht-positivem Index wird als 0 angenommen) die dyadische Darstellung einer natürlichen Zahl $b \neq a$:

$$b - a = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 2^{m-i} - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot 2^{n-i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-n} x_i \cdot 2^{m-i}}_{\neq 0,\ \geq 2^{n (*)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_{i+m-n} - y_i) \cdot 2^{n-i}}_{\neq 0,\ > (-2^n)^{(**)}} \neq 0$$

(*) $\neq 0,\ \geq 2^n$, falls $k > n$
(**) $\neq 0$, falls $k \leq n$; $> (-2^n)$ da $(x_{i+m-n} - y_i) \in \{1, 0, -1\}$

IA: $n = 1$, 1 hat genau eine dyadische dyadische Darstellung 1_{dya}
IV: für $n = k$ gilt: k_{dya} hat genau eine dyadische Darstellung
IB: für $n = k + 1$ gilt: $(k + 1)$ hat genau eine dyadische Darstellung
IS: $k \to k + 1$
Da k eine dyadische Darstellung k_{dya} hat $k + 1$ die dyadische Darstellung $k_{dya} + 1$.
Alle anderen dyadischen Folgen stellen nicht $k + 1$ dar (Hilfssatz), wodurch $k + 1$ genau eine dyadische Darstellung hat.