Numerische Mathematik

7. Übungsserie

Aufgabe 7.1:

(a)

$$v \approx \begin{pmatrix} 2.92 \\ 1.07 \\ 1.07 \end{pmatrix} \qquad H_v \approx \begin{pmatrix} 0.580 & 0.577 & 0.577 \\ 0.577 & 0.789 & -0.211 \\ 0.577 & -0.211 & 0.789 \end{pmatrix} \qquad H_v \cdot A \approx \begin{pmatrix} 1.85 & -1.94 \\ 0 & -0.00165 \\ 0 & -0.0383 \end{pmatrix}$$

$$w \approx \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.0383 \end{pmatrix} \qquad H_w \approx \begin{pmatrix} -0.04 & -1 \\ -1 & 0.04 \end{pmatrix} \qquad H_w \cdot A' \approx \begin{pmatrix} 0.0383 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = H_v \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_w \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.58 & 0.554 & 0.554 \\ -0.577 & 0.243 & -0.797 \\ -0.577 & -0.797 & 0.243 \end{pmatrix}$$

$$R \approx \begin{pmatrix} 1.85 & -1.94 \\ 0 & 0.0383 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Ich habe vergessen, bei den Normen / der Berechnung von α zu runden. Das habe ich allerdings zu spät bermerkt und jetzt will ich nicht alles nochmal umschreiben.

(b) not done yet!

Aufgabe 7.2:

not done yet!

Aufgabe 7.3:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (B_{i,j})^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left((Q^T A Q)_{i,j}\right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l,k=1}^{n} Q^T_{i,l} \cdot A_{l,k} \cdot Q_{k,j} \right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} Q^T_{i,l_1} \cdot A_{l_1,k_1} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot Q_{k_2,j} \right) \\
&= \sum_{l_1,l_2,k_1,k_2=1}^{n} A_{l_1,k_1} \cdot A_{l_2,k_2} \cdot \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} Q_{l_1,i} \cdot Q^T_{i,l_2} \cdot Q_{k_1,j} \cdot Q^T_{j,k_2}}_{1 \text{ falls } l_1=l_2 \text{ und } k_1=k_2,\ 0 \text{ sonst}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 \quad \square
\end{aligned}$$

(b) Nach der Hauptachsentransformation gibt es für jede symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierende Matrix $S \in SO_n$, sodass $S^T AS$ eine diagonale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ von A auf der Diagonale ist. Nach (a) ist dann $\sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left((S^T AS)_{i,j}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \quad \square$