Numerische Mathematik
4. Übungsserie

Aufgabe 4.1:

(a) $A \cdot F(k; \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) = (\mathbb{1} + F(k; \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) - \mathbb{1}) \cdot A = A + (F(k; \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) - \mathbb{1}) \cdot A$

$$F(k; \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m)_{i,j} - \mathbb{1} = \begin{cases} \alpha_i & : j = k \wedge i > k \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies ((F(k; \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) - \mathbb{1}) \cdot A)_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i \cdot A_{k,j} & : i > k \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

(b) $F \cdot F^{-1}$: jeweils das α_i-Fache der k-ten Zeile wird zur i-ten Zeile von F^{-1} addiert. Die k-te Zeile ist 1 in der k-ten Spalte, sonst 0. Damit ist das α_i-Fache der k-ten Zeile α_i. Das wird zur i-ten Zeile von F^{-1} addiert, in der $-\alpha_i$ steht. $\implies F \cdot F^{-1} = \mathbb{1}$

(c) $F_{>k} := F_{k+1} \cdot \ldots \cdot F_{m-1}$, $F_k \cdot F_{>k}$ ist jeweils das $\alpha_{i,k}$-Fache der k-ten Zeile von $F_{>k}$ zur i-ten Zeile von $F_{>k}$ addiert. $(F_{>k})_{k,k} = 1$, sonst ist $F_{>k}$ in der k-ten Zeile und Spalte 0. Also ist $F_k \cdot F_{>k} = F_{>k}(+)\alpha_{i,k}$ jeweils in der i-ten Zeile der k-ten Spalte. Da $F_{m-1} = F(m-1; \alpha_{m,m-1})$ ist $F_{>k}$ die normierte Dreiecksmatrix, deren Einträge unterhalb der Diagonale gegeben sind durch $\forall i > j > k : F_{i,j} = \alpha_{i,j}$. $F_{>0} = F$.

(d) Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^{m \times m}$ ist assoziativ und hat das neutrale Element $\mathbb{1}_m$. $A, B \in L_m(\mathbb{R}) \implies (A \cdot B)_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} A_{i,l} \cdot B_{l,j} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i < j \\ \text{irgendetwas} & : i > j \end{cases} \implies AB \in L_m(\mathbb{R})$. Jedes $F \in L_m(\mathbb{R})$ ist ein Produkt aus Frobenius-Matrizen $F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-1}$ mit $F_k = F(k; F_{k+1,k}, \dots, F_{m,k})$. Dann hat F ein Inverses $F^{-1} = F_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot F_1^{-1}$: $F^{-1} \cdot F = F_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot F_1^{-1} \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-1} = \mathbb{1}$ durch Assoziativität. Durch (b) und (c) ist $F^{-1} \in L_m(\mathbb{R})$

Aufgabe 4.2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3:

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & -999 & -998 \end{array}\right) \to LR(A;b) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1000}{999} \\ \frac{998}{999} \end{array} \right\}$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & -10^3 & -10^3 \end{array}\right) \to LR(A;b) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-3} & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to LR(A;b) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$

(d) $A(\overline{x} + y) = A\overline{x} + Ay = b - A\overline{x} + A\overline{x} = b$

$(b):\ \Delta = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\},\ \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 0 \\ 0 & -10^3 & 1 \end{array}\right) \to LR(A;\Delta) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -10^{-3} \end{array} \right\}$

$(c):\ \Delta = \left\{ \begin{array}{c} 10^{-3} \\ 0 \end{array} \right\},\ \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 10^{-3} \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & 1 & 10^{-3} \\ 0 & -10^3 & 1 \end{array}\right) \to LR(A;\Delta) = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -10^{-3} \end{array} \right\}$