

Numerische Mathematik

1. Übungsserie

Aufgabe 1.1:

1 00 00	entspricht:	$(-1)^0 \cdot \frac{0}{2^2} \cdot 2^{1-1}$	$= 0$
0 00 00	entspricht:	$(-1)^0 \cdot \frac{0}{2^2} \cdot 2^{1-1}$	$= 0$
0 00 01	entspricht:	$(-1)^0 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^{1-1}$	$= 0.25$
0 00 10	entspricht:	$(-1)^0 \cdot \frac{2}{2^2} \cdot 2^{1-1}$	$= 0.5$
0 00 11	entspricht:	$(-1)^0 \cdot \frac{3}{2^2} \cdot 2^{1-1}$	$= 0.75$
0 01 00	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{0}{2^2}) \cdot 2^{1-1}$	$= 1$
0 01 01	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) \cdot 2^{1-1}$	$= 1.25$
0 01 10	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{2}{2^2}) \cdot 2^{1-1}$	$= 1.5$
0 01 11	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{3}{2^2}) \cdot 2^{1-1}$	$= 1.75$
0 10 00	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{0}{2^2}) \cdot 2^{2-1}$	$= 2$
0 10 01	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) \cdot 2^{2-1}$	$= 2.5$
0 10 10	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{2}{2^2}) \cdot 2^{2-1}$	$= 3$
0 10 11	entspricht:	$(-1)^0 \cdot (1 + \frac{3}{2^2}) \cdot 2^{2-1}$	$= 3.5$

Aufgabe 1.2:

```
1 package skripte;
2 import java.lang.Math;
3
4 class Main {
5     static int getSingleP() {
6         float x=0.5f;
7         int p=0;
8         while(1f + x != 1f) {
9             x/=2;
10            ++p;
11        }
12        return p;
13    }
14    static int getDoubleP() {
15        double x=0.5;
16        int p=0;
17        while(1d + x != 1d) {
18            x/=2;
19            ++p;
20        }
21        return p;
22    }
23    static int getSingleR() {
24        int e=1;
25        int r=1;
26        while(1f/(float) Math.pow(2, e) != 0) {
27            e = 2*e+1;
28            ++r;
29        }
30        return r;
31    }
32    static int getDoubleR() {
33        int e=1;
34        int r=1;
35        while(1d/Math.pow(2, e) != 0) {
36            e = 2*e+1;
37            ++r;
38        }
39        return r;
40    }
41    public static void main(String[] args) {
42        System.out.printf("Single: p=%d, r=%d\nDouble: p=%d, r=%d\n", getSingleP(), getSingleR(),
43            getDoubleP(), getDoubleR());
44    }
```

Output:

Single: p=23, r=8

Double: p=52, r=11

das kommt hin.

Aufgabe 1.3:

- (a) Sei $S \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A^T A$, sodass $S^T A^T A S = D$ eine Diagonalmatrix aus Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A^T A$ ist (Spektralsatz). Weiterhin sei $x = Sy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\|A\|_2^2 = \left(\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \right)^2 = \max_{\|Sy\|_2=1} \langle ASy | ASy \rangle = \max_{\|y\|_2=1} \langle S^T A^T A S y | y \rangle = \max_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

Diese Summe ist maximal mit $y = e_i =: e_{max}$, mit $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass $\lambda_i = \lambda_{max} := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \lambda_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_{max} y_i^2 = \lambda_{max} \|y\|_2^2 = \lambda_{max} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{max_i}^2 &= \lambda_{max} \\ \Rightarrow \|A\|_2 &= \underline{\underline{\sqrt{\lambda_{max}}}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left\| \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} A_{1,j}x_j \\ A_{2,j}x_j \\ \vdots \\ A_{m,j}x_j \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j \right| \right) \\ &= \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j \right| \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \underline{\underline{\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|}} \end{aligned}$$

- (1) $\sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j$ ist maximal mit $x_j = \frac{|A_{i,j}|}{A_{i,j}}$, da $\forall j \in \{1, \dots, n\} : |x_j| \leq 1$

Aufgabe 1.4:

- (a) Sei $L > 0$ die Lipschitz-Konstante.

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, x) = \frac{\epsilon}{L} \quad \forall y \in [a, b] : \|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon \implies \|x - y\| \cdot L \geq \epsilon \implies \|x - y\| \geq \delta(\epsilon, x)$$

$\implies f$ ist stetig in $[a, b]$.

Falls $L = 0$, dann $\forall x, y \in [a, b] : \|f(x) - f(y)\| = 0$

$\implies f$ ist stetig in $[a, b]$.