

# Numerische Mathematik

## 2. Übungsserie

**Aufgabe 2.1:**

$$(a) \quad \underline{\kappa}^{rel}(f, x) = \max_{i,j} \frac{|x_j|}{|f_i(x)|} \cdot \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| = \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$(b) \quad \underline{\kappa}^{rel}(f, x) = \max_{i,j} \frac{|x_j|}{|f_i(x)|} \cdot \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right|,$$

$$\frac{|x_1|}{|f(x)|} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right| = \frac{|x_1|}{|x_1^{x_2}|} \cdot |x_2 x_1^{x_2-1}| = |x_2|$$

$$\frac{|x_2|}{|f(x)|} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right| = \frac{|x_2|}{|x_1^{x_2}|} \cdot |x_1^{x_2} \ln x_1| = |x_2| \cdot |\ln x_1|$$

$$\Rightarrow \underline{\kappa}^{rel}(f, x) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } e^{-1} \leq x \leq e \\ x_2 \ln x_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Aufgabe 2.2:**

not done yet!

**Aufgabe 2.3:**

not done yet!

**Aufgabe 2.4:**

Da  $|f(x)| \leq 1$  ist der absolute Rundungsfehler  $|\delta| \leq \epsilon$ . Der Rundungsfehler von  $W(h)$  ist höchstens  $\frac{\epsilon}{h} + o(\delta)$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

mit  $\xi_1$  zwischen  $a$  und  $a+h$ ,  $\xi_2$  zwischen  $a$  und  $a-h$

$$W(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{2f'(a)h + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6}h^3}{2h} = f'(a) + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12}h^2$$

Dadurch ist der Verfahrensfehler höchstens  $\frac{h^2}{6}$ , denn  $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) \leq 2$ . Der kleinste Fehler ist somit bei  $\frac{2\epsilon}{h} = \frac{h^2}{6}$  zu erwarten.  $\Rightarrow h = (6\epsilon)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{52}{3}}}}$

Nun zum Test: