Automaten und Berechenbarkeit

5. Übungsserie

Aufgabe 1:

(a) Nein, Pumping Lemma: $n \in \mathbb{N},\ z = a^n\#a^{f(n)}$
$uv = a^n,\ v = a^m,\ uv^0w = a^{n-m}\#a^{f(n)},\ f(n) \neq f(n-m)$(Injektivität) $\implies uv^0w \notin L_f$

(b) Ja, $L_1 = \{a^{2(m+n)} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = L(0,2)$

(c) Nein, Pumping Lemma: $n \in \mathbb{N},\ z = a^n\#a^m\#a^{m+n}$
$uv = a^n,\ v = a^x,\ uv^0w = a^{n-x}\#a^m\#a^{n+m} \notin L$

(d) Nein, Pumping Lemma: $n \in \mathbb{N},\ z = a^n\#a^m\#a^{m+n}$
$uv = a^n,\ v = a^x,\ uv^0w = a^{n-x}\#a^m\#a^{n+m} \notin L,$ da $m+n > m+n-x$

(e) Ja, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),\ L = L(A)$

$Q = \{d_i \mid 0 \leq i \leq d-1\} \cup \{c_i \mid 0 \leq i \leq c-1\}$
$\Sigma = \{a\}$

$$\delta(q,a) := \begin{cases} c_{i+1} & \text{falls } q = c_i, i \neq c-1 \\ d_{i+1} & \text{falls } q = d_i, i \neq d-1 \\ d_0 & \text{falls } q = c_{c-1} \text{ oder } q = d_{d-i} \end{cases}$$

$q_0 = c_0$
$F = \{d_0\}$

Aufgabe 2:

$$F = \underbrace{\{ \bigcup_{m\in\mathbb{N}, m\geq 1} 0^{m+n}1^m \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{Wörter, die noch } n \text{ Einsen brauchen}} \cup \underbrace{\{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{Wörter, die noch mindestens } n \text{ Einsen brauchen}} \cup \underbrace{\{\Sigma^* \setminus \{0^{m+n}1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}\}}_{\text{Wörter, die nicht mehr in } L \text{ sein können}}$$

Da der Schnitt zweier Äquivalenzklassen leer ist und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen Σ^* darstellt, ist F eine Zerlegung von Σ^*.

Aufgabe 3:

$F = \{\{w\} \mid w \in \Sigma^*\}$: Jedes Wort hat seine eigene Äquivalenzklasse, da nur es selbst in der Sprache bleibt, wenn das dazugehörige Spiegelwort angehangen wird. Da der Schnitt zweier Äquivalenzklassen leer ist und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen Σ^* darstellt, ist F eine Zerlegung von Σ^*.

Aufgabe 4:

(a) folgt aus (b)

(b) $n \in \mathbb{N},\ z = a^p$ wobei p die kleinste Primzahl mit $p \geq n$ sei
$uv = a^n,\ v = a^m,\ \{uv^iw \mid i \in \mathbb{N}\} = L(p-m, m) \not\subseteq L_{prim}(1.a) \implies \exists_{i\in\mathbb{N}} : uv^iw \notin L_{prim}$

(c) Nein, Pumping Lemma analog zu (b)

(d) Ja, $L^*_{prim} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\} \cup \{\lambda\} = \Sigma^* \setminus \{a\}$, da jedes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ Primfaktoren hat und somit auch als Summe von Primzahlen darstellbar ist.