Mathematik III - Blatt 7

NONAME

December 5, 2015

Aufgabe 1 - 4 Punkte

Sei V der von $sin(x), cos(x), x$ und 1 erzeugt Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\delta : V \to V, f \mapsto f'$ die lineare Abbildung, die eine Funktion V ihre Ableitung zuordnet.

(a) Zeigen Sie, dass das Bild von δ tatsächlich in V liegt.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von δ bezüglich der Basis $(sin(x), cos(x), x, 1)$, sowie den Rang von δ.

(c) Bestimmen Sie Bild und Kern von δ und entscheiden Sie, ob δ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Aufgabe 2 - 7 Punkte

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch $(x, y, z)^t \mapsto (3x + 5y + z, x - 2y, -2x - 4z)^t$ definiert. Weiter sei $\mathcal{C} = ((0, 0, -1)^t, (3, 0, -2)^t, (1, 7, 1)^t)$. $\mathcal{B}$ bezeichne die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von α

(b) Entscheiden Sie, ob α injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(d) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $A^{\mathbb{B}}_{\alpha}$, $A^{\mathbb{C}}_{\alpha}$ und $A^{\mathbb{B},\mathbb{C}}_{\alpha}$

(e) Bestimmen Sie $K_{\mathbb{B}}((3, 2, 1)^t)$ und $K_{\mathbb{C}}((3, 2, 1)^t)$

(f) Bestimmen Sie $K_{\mathbb{B}}(\alpha((3, 2, 1)^t))$ und $K_{\mathbb{C}}(\alpha((3, 2, 1)^t))$

Aufgabe 3 - 2 Punkte

Sei V ein Vektorraum und $\alpha : V \to V$ linear.

(a) Angenommen es gibt eine Basis $\mathbb{B}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix $A^{\mathbb{B}}_{\alpha}$ die Einheitsmatrix ist. Ist α dann die Identität?

(b) Wie verhält es sich, wenn für die Basis $\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$ die Darstellungsmatrix $A^{\mathbb{B},\mathbb{C}}_{\alpha}$die Einheitsmatrix ist?

Aufgabe 4 - 3 Punkte

Seen V, W K-Vektorräume und $\text{Hom}(V, W) = \{\alpha : V \to W : \alpha \text{ ist linear }\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Hom(V, W) bzgl. der Addition von linearen Abbildungen und der Multiplikation von Abbildungen mit Skalaren ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei $dim(V) = n$ und $dim(W) = m$. Wie groß ist die Dimension von Hom(V, W)?

Aufgabe 5 - 4 Punkte

Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um 0 um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ (gegen den Uhrzeigersinn) und $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden, die durch e_2 aufgespannt wird. Sei $\mathbb{B}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ von $\mathbb{C}$ die Basis $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$. Bestimmen Sie $A^{\mathbb{B}}_{\alpha\circ\beta}, A^{\mathbb{C}}_{\alpha\circ\beta}, A^{\mathbb{B}}_{\beta\circ\alpha}$ und $A^{\mathbb{C}}_{\beta\circ\alpha}$