Mathematik III - Blatt 11

January 19, 2016

1. Sei $\mathcal{B}$ eine ONB des $\mathbb{R}^2$ und sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$A = A_\alpha^\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass α eine orthogonale Abbildung ist.

   (b) Entscheiden Sie, ob es sich um eine Drehung oder eine Spiegelung handelt und geben Sie im Falle einer Drehung den Drehwikel, im Falle einer Spiegelung die Spiegelungsachse an.

2. (a) Seien $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Achsenspiegelungen an zwei Ursprungsgeraden. Zeigen Sie, dass $\alpha \circ \beta$ eine Drehung ist.

   (b) Sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Nullpunkt und $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden. Zeigen Sie, dass $\gamma \circ \delta$ eine Achsenspiegelung ist. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse.

3. Sei die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A_\alpha^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B}$.

   (a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung α um eine Achsendrehung handelt.

   (b) Bestimmen Sie die Drehachse von α

   (c) Bestimmen Sie eine ONB $\mathcal{C}$, sodass $A_\alpha^\mathcal{C}$ die Form $\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat und geben Sie den Winkel φ an.

4. (a) Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung, $\alpha \neq id$. Zeigen Sie, dass α entweder genau einen Fixpunkt, eine Gerade aus Fixpunkten oder keine Fixpunkte hat.

   (b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda - 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \mu - 1 \end{pmatrix}.$$

      i. Bestimmen Sie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mit $\alpha(v) = A \cdot v + b$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$.

      ii. Für welche λ, μ hat α genau einen Fixpunkt, eine gerade aus Fixpunkten, bzw. keine Fixpunkte?

5. Es ist $y = 3x - 2$ die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

   (a) Geben Sie diese Gerade als affinen Unterraum der Form $w + \langle u \rangle$ an mit $w, u \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Sei σ die Spiegelung an dieser Geraden. Geben Sie eine orthogonale 2x2-Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^2$ an, so dass $\sigma(v) = A \cdot v + b$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$.