

Αεροδυναμικός σχεδιασμός και έλεγχος αεροσκαφών

2η εργασία



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
01/06/2024

Δημήτριος Νεντίδης, 6821

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Εισαγωγή | 2 |
| 2 | Ευστάθεια κατά την προσέγγιση | 2 |
| 2.1 | $C_{m\alpha}$ και static margin | 3 |
| 2.2 | C_{m0} και C_{L0} | 4 |
| 2.3 | C_m vs γωνία προσβολής | 5 |
| 3 | Ευστάθεια κατά cruise | 6 |
| 3.1 | C_{m0} και C_{L0} | 7 |
| 3.2 | δs και α για cruise | 8 |
| 3.3 | -700 kg, 2 M | 8 |
| 4 | Έλεγχος | 11 |
| 4.1 | Συναρτήσεις μεταφοράς | 11 |
| 4.2 | Δυναμικά χαρακτηριστικά ΣΜ | 12 |
| 4.3 | Σύγκριση με MIL-F-8785C | 14 |
| 4.4 | Απλός βρόγχος ανάδρασης | 14 |
| 4.4.1 | $\zeta = 0.6$ και $\omega_s = 2$ rad/s | 16 |
| 4.5 | Ανάδραση καταστάσεων | 17 |

1 Εισαγωγή

Στην δεύτερη εργασία καλούμαστε να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για την ευστάθεια του F-104 τόσο σε συνθήκες προσέγγισης όσο και σε cruise. Έπειτα καλούμαστε να αναπτύξουμε μια λογική ελέγχου για να εξαλείψουμε κάποια ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε με την συνδυαστικό μόχθο του γράφοντα και του Παύλου Βήχα. Ο κώδικας για την εργασία δίνεται σε 2 ξεχωριστά αρχεία, ένα για την ευστάθεια (stability.m) και ένα για τον έλεγχο (control.m).

Για το αεροσκάφος ισχύουν τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

| Parameter | Value | Units |
|------------------------|-----------|-------------------|
| Wing | | |
| Reference area | 18.22 | [m ²] |
| Wingspan | 6.7 | [m] |
| Semi-chord sweep angle | 8 | [deg] |
| Taper ratio | 0.36 | [-] |
| Airfoil | NACA 0006 | [-] |
| Mean aerodynamic chord | 2.91 | [m] |
| Horizontal Tail | | |
| Reference area | 4.2 | [m ²] |
| Wingspan | 3.6 | [m] |
| Semi-chord sweep angle | 0 | [deg] |
| Taper ratio | 0.15 | [-] |
| Airfoil | NACA 0006 | [-] |
| Tail arm | 5.3 | [m] |

2 Ευστάθεια κατά την προσέγγιση

Άρχικα εξετάζεται η ευστάθεια του αεροσκάφους υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

Approach Mass: 6,400 [kg]

Approach speed: 315 [km/h]

Altitude: Sea level

Configuration: Full Flaps & Gears Down.

Ενώ, σύμφωνα με την εκφώνηση, μόνο η κύρια πτέρυγα και η οριζόντια ουρά επιδρούν στην διαμήκη ευστάθεια.

Ακόμα η ταχύτητα του αεροπλάνου κατά την προσέγγιση προκύπτει ίση με 0.264 M.

2.1 $C_{m\alpha}$ και static margin

Η συνολική ροπή που αισθάνεται το αεροσκάφος στο κέντρο μάζας του είναι επαλληλία της ροπής που δημιουργείται από την κύρια πτέρυγα και το οριζόντιο ουριαίο τμήμα. Συνεπώς και ο συντελεστής ροπής είναι η επαλληλία των δύο, άρα και κατ' επέκταση και η κλίση του συντελεστή ροπής $C_{m\alpha_{total}}$ μπορεί να γραφτεί ως (τα νούμερα προκύπτουν από όλες τις ακόλουθες πράξεις):

$$C_{m\alpha_{total}} = C_{m\alpha_{wing}} + C_{m\alpha_{tail}} = 0.044 - 0.1671 = -0.31$$

Ξέροντας ότι έχουμε μια συμμετρική αεροτομή NACA 0006, μπορούμε να εξάγουμε ότι η κλίση a_0 της καμπύλης C_l vs α είναι ίση με 2π για την αεροτομή. Έπειτα λαμβάνοντας υπόψη και το sweep angle της πτέρυγας (Λ), προκύπτει ότι για την κύρια πτέρυγα (ταχύτητα ίση με 0.264 M),

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \cdot \cos(\Lambda)}{\sqrt{1 + [(\alpha_0 \cdot \cos(\Lambda))/(\pi \cdot AR)]^2 + (\alpha_0 \cdot \cos(\Lambda))/(\pi \cdot AR)}} = 2.9815$$

Το $C_{L\alpha_{wing}}$ είναι το παραπάνω α . Ενώ το $C_{m\alpha_{wing}}$ προκύπτει από τον τύπο 2.9 του Nelson,

$$C_{m\alpha_{wing}} = C_{L\alpha_{wing}} \cdot \left(\frac{x_{cg}}{\bar{c}} - \frac{x_{ac}}{\bar{c}} \right) = 0.044$$

Για το ουριαίο κομμάτι, του οποίου η πτέρυγα δεν έχει οπισθόκλιση ($\Lambda = 0$), πρέπει πάλι να βρεθεί πρώτα το $C_{L\alpha_{tail}}$

$$C_{L\alpha_{tail}} = \frac{\alpha_0}{1 + \left(\frac{\alpha_0}{\pi \cdot e \cdot AR_{tail}} \right)} = 3.81$$

και έπειτα από τον τύπο 2.27 του Nelson, το $C_{m\alpha_{tail}}$ προκύπτει ως:

$$C_{m_{\alpha tail}} = -\eta \cdot V_H \cdot C_{L_{\alpha tail}} \cdot \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right) = -0.354$$

με,

$$V_H = \frac{S_{tail} \cdot l_{tail}}{S_{wing} \cdot \bar{c}}$$

και

$$\frac{d\epsilon}{d\alpha} = \frac{2C_{L_{\alpha wing}}}{\pi \epsilon AR}$$

όπου, ϵ είναι ο συντελεστής του Oswald.

$$\epsilon = \frac{1}{\delta + 1}$$

με το δ να βγαίνει με την βοήθεια της εικόνας 5.20 του βιβλίου του Anderson. Εδώ το ϵ προκύπτει ελαφρώς μικρότερο από την μονάδα, τόσο για το wing όσο και για το tail. Το η είναι 1 καθώς γίνεται η υπόθεση ότι η οριζόντια πτέρυγα της ουράς βλέπει καθαρή ροή. Αυτό θεωρείται μια λογική υπόθεση δεδομένου ότι βρίσκεται αρκετά ψηλότερα από την κύρια πτέρυγα.

Το static margin είναι ένα αδιάστατο μέγεθος το οποίο δείχνει τι ποσοστό της μέσης αεροδυναμικής χορδής είναι η απόσταση του κέντρου βάρους από το ουδέτερο σημείο ροπής, το σημείο δηλαδή όπου ο συντελεστής κλίσης της καμπύλης ροπής είναι μηδέν.

$$\frac{x_{np}}{\bar{c}} = \frac{x_{ac}}{\bar{c}} - \eta \cdot V_H \cdot C_{L_{\alpha tail}} \cdot \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)$$

$$\text{Static gain} = \frac{x_{np}}{\bar{c}} - \frac{x_{cg}}{\bar{c}} = 0.104$$

2.2 C_{m0} και C_{L0}

Εφόσον το αεροσκάφος κάνει μια σταθερή προσέγγιση όπου ο ρυθμός με τον οποίο προσεγγίζει δεν μεταβάλλεται, υφίσταται ισορροπία δυνάμεων και ροπών. Άρα το $C_m = 0$ και το εφόσον το βάρος είναι ίσο με την άντωση, ισχύει

$$C_{L_{\text{approach}}} = \frac{\text{Lift}}{0.5 \cdot 1.2 \cdot V^2 \cdot S}$$

Επιπλέον από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε την κλίση της καμπύλης ροπής, ενώ επιπλέον, με τον τρόπο επίλυσης προέκυψε στην ουσία και ο συντελεστής κλίσης της C_L ως επαλληλία του $C_{L_{\text{wing}}}$ και του $C_{L_{\text{tail}}}$,

$$C_{L_{\text{total}}} = C_{L_{\text{wing}}} + C_{L_{\text{tail}}}$$

Ακόμα από την εκφώνηση δίνεται ο διορθωτικός όρος των δύο καμπύλων, ροπής και άντωσης, συναρτήσει της γωνίας εκτροπής της οριζόντιας ουράς. Για να βρεθούν τα C_{m0} και C_{L0} δεν μένει να τοποθετηθούν στις εντίστοιχες εξισώσεις οι τιμές για τις κλίσεις της καμπύλης, η γωνία προσβολής, και η γωνία εκτροπής της ουράς. Να σημειωθεί εδώ ότι τα ζητούμενα $C_{m0} = C_{m0}^* + C_{m_{\delta s}} \cdot \delta s$ και $C_{L0} = C_{L0}^* + C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s$. Το $C_{L0}^* = 0$ εξαιτίας της γεωμετρίας (συμμετρίας) τως δύο αεροτομών.

$$C_L = C_{L0}^* + C_{L\alpha} \cdot \alpha + C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s$$

και

$$C_m = C_{m0}^* + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m_{\delta s}} \cdot \delta s$$

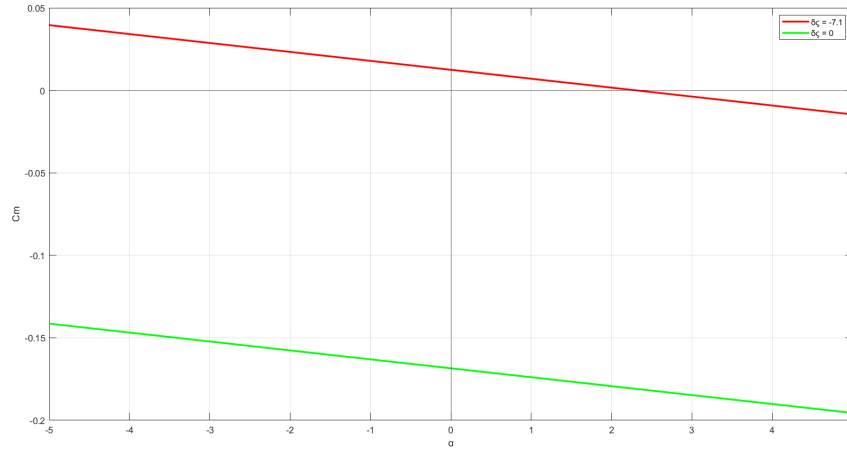
$$\text{Προκύπτει } C_{m0} = C_{m0}^* + C_{m_{\delta s}} \cdot \delta s = -0.1685 + 0.1809 = 0.0124$$

$$\text{και, } C_{L0} = C_{L0}^* + C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s = 0 - 0.0843 = -0.0843.$$

2.3 C_m vs γωνία προσβολής

Γνωρίζοντας από τα προηγούμενα ερωτήματα τόσο της κλίση της καμπύλης ροπής, όσο και το C_{m0} , το σημείο δηλαδή που τέμνεται ο άξονας y , για $\delta s = -7.1$ μοίρες, προκύπτει, για αυτή την γωνία εκτροπής του ουριαίου, το ακόλουθο διάγραμμα C_m vs α :

Φαίνεται ότι για 2.3 μοίρες γωνία προσβολής έχουμε $C_m = 0$, δηλαδή το αεροπλάνο βρίσκεται σε συνθήκη trimmed. Με αλλαγή του δs η καμπύλη αυτή θα μετακινούταν προς τα επάνω ή κάτω, αλλάζοντας έτσι και το σημείο τομής του y άξονα και φυσικά το trim point, σημείο τομής του x άξονα. Ενδεικτικά στο διάγραμμα φαίνεται ακόμα για $\delta s =$



Σχήμα 1: C_m vs α trimmed (κόκκινο), untrimmed (πράσινο).

0 η καμπύλη. Είναι εμφανές ότι με αυτές τις συνθήκες το αεροπλάνο δεν μπορεί να ισορροπήσει.

3 Ευστάθεια κατά cruise

Για τις συνθήκες cruise, σε υψηλές ταχύτητες, οι κλίσεις των συντελεστών άντωσης και ροπής πρόνευσης, καθώς και οι μεταβολές των συντελεστών άντωσης και πρόνευσης από την εκτροπή της οριζόντιας ουράς, είναι ανάλογες του αριθμού Mach βάση της ακόλουθης σχέσης.

$$C_x = A \cdot M^4 + B \cdot M^3 + C \cdot M^2 + D \cdot M + E$$

Με τους συντελεστές να δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

| Coefficient | A | B | C | D | E |
|--------------------|---------|--------|---------|--------|---------|
| C_{L_a} | -5.524 | 34.344 | -78.940 | 76.698 | -21.539 |
| C_{m_a} | -4.485 | 23.523 | -41.934 | 29.286 | -8.085 |
| $C_{L_{\delta_s}}$ | 0.00331 | 0.878 | -3.694 | 4.432 | -0.760 |
| $C_{m_{\delta_s}}$ | 0.086 | -1.912 | 6.986 | -7.934 | 1.115 |

Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα δεδομένα:

Cruise Mass: 7400 [kg]

Cruise speed: 961 [km/h]

Altitude: 35,000 [ft]

Configuration: No Flaps & Gears up

3.1 C_{m0} και C_{L0}

Εάν το αεροπλάνο έκανε steady level flight για ταχύτητα ίση με 961 km/h στα 35000 πόδια, όντας 7400 kg, το C_L προκύπτει από την ισορροπία δυνάμεων:

$$C_{L_{trimmed}} = \frac{\text{Lift}}{0.5 \cdot 1.2 \cdot V^2 \cdot S} = 0.2943$$

Για την καμπύλη C_L γνωρίζουμε ότι ο όρος C_{L0} θα είναι μηδέν εξαιτίας της γεωμετρίας των αεροτομών κύριας πτέρυγας και ουράς. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι $C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s = -0.023$ (ο οποίος είναι και ο σταθερός όρος της καμπύλης συντελεστή άντωσης) και άρα, για $\alpha = 3^\circ$ προκύπτει $C_{L_{3^\circ}} = 0.237$, μικρότερο από το απαιτούμενο για cruise. Είναι εμφανές ότι το αεροπλάνο δεν είναι trimmed για $\alpha = 3^\circ$ και $\delta s = -1.5^\circ$.

Η γωνία προσβολής που το αεροπλάνο πρέπει να είναι έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία δυνάμεων και ρόπως για $\delta s = -1.5^\circ$ προκύπτει από:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \cdot \alpha + C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s$$

με $C_{L_{\delta s}}$ να δίνεται από την ταχύτητα πτήσης. Λύνοντας προκύπτει ότι η αντίστοιχη γωνία είναι $\alpha_{trimmed} = 3.66^\circ$.

Πλέον μπορεί να υπολογιστεί και ο σταθερός όρος του συντελεστή ροπής με απλή αντικατάσταση στον αντίστοιχο τύπο και $C_m = 0$ για $\alpha_{trimmed}$. Προκύπτει $C_{m0} = 0.095$. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι το άθροισμα του C_{m0} και του $C_{L_{\delta s}} \cdot \delta s$ καθώς αυτό είναι και το σημείο τομής με τον y άξονα. Ειδάλως το C_{m0} , όπως αυτό φαίνεται στην παραπάνω εξίσωση είναι ίσο με 0.0506 (δεν ζητάει αυτό το ερώτημα αλλά θα χρειαστεί στο επόμενο ερώτημα). Στο εξής αυτό θα ονομάζεται C_{m0}^* .

Αντικαθιστώντας στον τύπο για το C_m για $\alpha = 3^\circ$ προκύπτει $C_{m_{3^\circ}} = 0.017$, δείχνοντας της ύπαρξη θετικής ροπής σε αυτό το σημείο. Προη-

γυμνένως, στο αντίστοιχο ερώτημα κατά την προσέγγιση, όντας σε trim ο συντελεστής ροπής ήταν μηδέν. Για να βρεθεί πάλι το αεροπλάνο σε κατάσταση trim με αυτή την γωνία προσβολής χρειάζεται να αλλάξει η γωνία εκτροπής του ουριαίου.

3.2 δs και α για cruise

Στόχος εδώ είναι να βρεθούν τα κατάλληλα δs και α , δηλαδή τα κατάλληλα trim points για ένα εύρος ταχυτήτων 0.7-2 M.

Από τους τύπους:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha} \cdot \alpha + C_{L\delta s} \cdot \delta s$$

και

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\delta s} \cdot \delta s$$

προκύπτει για trim γνωστό $C_m = 0$ και, όπως και πριν $C_{L_{trim}} = (7400 \cdot g)/(0.5 \cdot 1.2 \cdot V^2 \cdot S)$. Αντικαθιστώντας πανώ και για $C_{L_0} = 0$ και ξέροντας από το προηγούμενο ερώτημα ότι το $C_{m_0}^* = 0.0506$, προκύπτει:

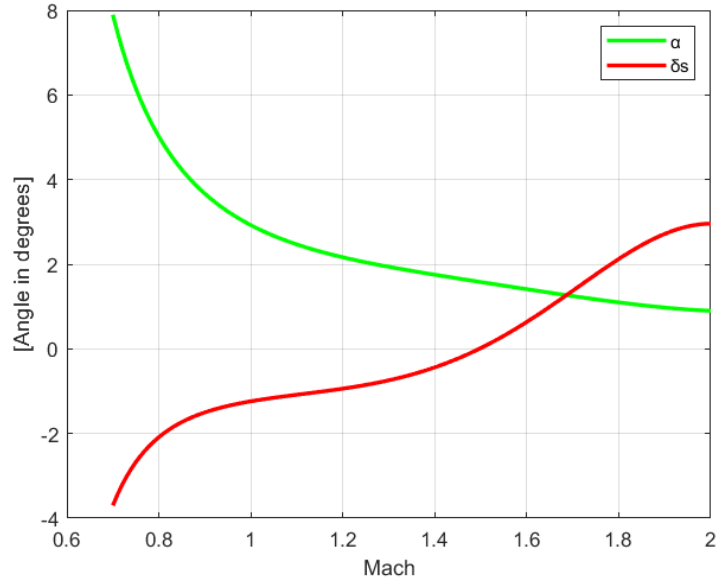
$$\begin{bmatrix} C_{L\alpha} & C_{L\delta s} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{L_{trim}} \\ -C_{m_0}^* \end{bmatrix}$$

Με την χρήση επαναληπτικής διαδικασίας επιλύεται αυτό το σύστημα για κάθε ταχύτητα αλλάζοντας τον πίνακα συντελεστών των αγνώστων $x = [\alpha, \delta s]^T$. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

3.3 -700 kg, 2 M

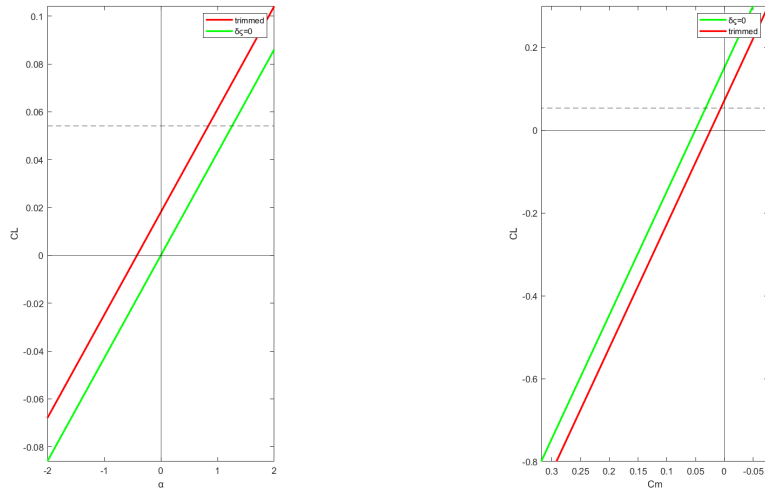
Ξέροντας την ταχύτητα πτήσης, το υψόμετρο και το βάρος ορίζουμε στην ουσία τις παραμέτρους της αποστολής, και άρα το απαιτούμενο Lift και C_L .

Το πρόβλημα που δημιουργείται εδώ βέβαια είναι ότι τόσο η γωνία εκτροπής της οριζόντιας ουράς, όσο και η γωνία προσβολής είναι άγνωστα μεγέθη. Για να υπολογιστούν γίνεται χρήση του trim diagram, ή, για την ακρίβεια, της λογικής που προκύπτει από την χρήση του.



Σχήμα 2: Trim point συναρτήσεις του Mach.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι έχουμε δs ίσο με το 0. Βρίσκουμε μια γωνία προσβολής για την οποία υφίσταται η ισορροπία δυνάμεων. Έπειτα, από την ισορροπία ροπών βρίσκουμε το $\delta s'$ για το οποίο ισορροπεί το αεροπλάνο για το α που προέκυψε από την ισορροπία δυνάμεων. Λύνουμε εκ νέου την ισορροπία δυνάμεων για νέο α' και επαναλαμβάνουμε μέχρι η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\delta s' - \delta s$ να είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο σφάλμα. Η επαναληπτική διαδικασία έβγαλε ότι η βέλτιστη τιμή για την εκτροπή $\delta s = 3.84^\circ$, ενώ η γωνία προσβολής είναι ίση με 0.11 μοίρες.



Σχήμα 3: Trim diagram.

4 Έλεγχος

Η διαμίκης κίνηση του αεροπλάνου μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα με 4 μεταβλητές κατάστασης, $x_1 = u$, η αξονική ταχύτητα, $x_2 = w$, η κάθετη ταχύτητα, $x_3 = q$, το pitch rate, και $x_4 = \theta$, το pitch. Η χειραγωγούμενη μεταβλητή για αυτήν την κίνηση είναι το deflection του οριζόντιου ουριαίου τμήματος, $u = \eta$.

Από την εκφώνηση δίνεται ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα μεταβλητών κατάστασης μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

με,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0352 & 0.1070 & 0 & -32.2 \\ -0.2140 & -0.4400 & 305 & 0 \\ 1.198 \times 10^{-4} & -0.0154 & -0.4498 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -22.1206 \\ -4.6580 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ενώ επιπλέον ορίζονται σαν output τα x_1 έως x_4 με τον πίνακα C να είναι μοναδιαίος διαγώνιος. Μη έχοντας εξωτερικές διαταραχές ο πίνακας D είναι ίσος με 0.

4.1 Συναρτήσεις μεταφοράς

Για να μετατραπεί το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης σε μοντέλο συναρτήσεων μεταφοράς μεταξύ των μεταβλητών εξόδου και της χειραγωγούμενης μεταβλητής, κίνηση του elevator, πρώτα με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace των εξισώσεων κατάστασης (υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Αναδιατάσσοντας την πρώτη εξίσωση για να λύνοντας για το $X(s)$:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Αντικαθιστώντας το $X(s)$ στην εξίσωση εξόδου:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] U(s)$$

Το μπρώο συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ συνδέει την έξοδο $Y(s)$ με την είσοδο $U(s)$:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Με την βοήθεια του MATLAB, όλες αυτές οι πράξεις γίνονται με την χρήση της κατάλληλης εντολής. Οι συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν είναι οι παρακάτω:

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} = \frac{-2.367s^2 - 3.091s + 55.03}{s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078}$$

$$\frac{w(s)}{\eta(s)} = \frac{-22.12s^3 - 1431s^2 - 50.36s - 32.18}{s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078}$$

$$\frac{q(s)}{\eta(s)} = \frac{-4.658s^3 - 1.873s^2 - 0.1671s}{s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078}$$

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = \frac{-4.658s^2 - 1.873s - 0.1671}{s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078}$$

4.2 Δυναμικά χαρακτηριστικά ΣΜ

Οι πόλοι προκύπτουν από την λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου των συναρτήσεων μεταφοράς, $s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078$.

Λύνοντας προκύπτουν οι πόλοι στις θέσεις:

- $s = -0.445871 - 2.16761i$

- $s = -0.445871 + 2.16761i$
- $s = -0.0166285 - 0.14743i$
- $s = -0.0166285 + 0.14743i$

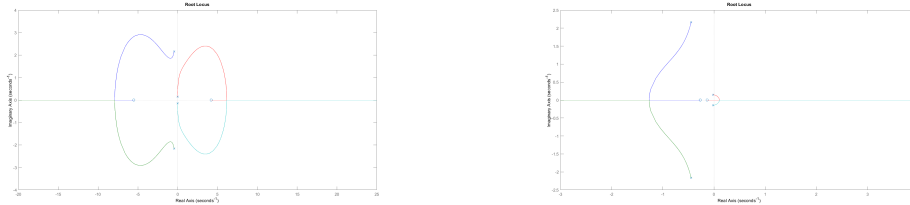
Ωστόσο για περισσότερες να εξαχθούν περισσότερες πληροφορίες πρέπει να χωριστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο σε δύο τριώνυμα, ένα που περιέχει την βραχυπρόθεσμη δυναμική συμπεριφορά (συμβολίζεται με s) και ένα την φυγοειδή (συμβολίζεται με p), προκύπτει:

$$(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2) = 0$$

Λύνοντας αυτό τώρα προκύπτει ότι

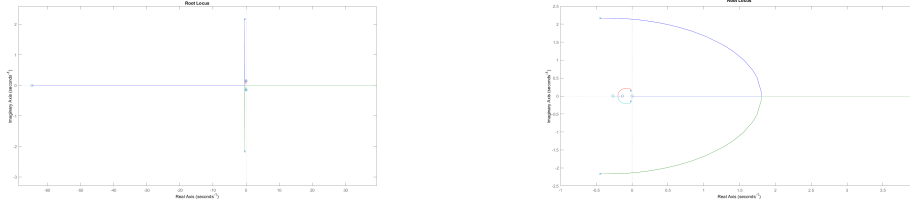
- $\omega_p = 0.148 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 2.210 \text{ rad/s}$
- $\zeta_p = 0.112$
- $\zeta_s = 0.201$

Στα παρακάτω δύο figures συνοψίζονται οι γεωμετρικοί τόποι ριζών για τις 4 εξισώσεις.



Σχήμα 4: Γεωμετρικοί τόποι u , θ .

Μπορεί να φανεί από την τοποθεσία των μηδενικών και των πόλων, ότι τα βραχυπρόθεσμα χαρακτηριστικά περιορίζονται από την παρουσία μηδενικών πολύ κοντά στους βραχυπρόθεσμους πόλους.



Σχήμα 5: Γεωμετρικοί τόποι w , q .

Από την άλλη, εδώ φαίνεται ότι η μηδενικών κοντά στους φυγοειδείς πόλους μειώνει δραστικά την επηροή τους στην συνάρτηση μεταφοράς. Τέλος φαίνεται ένα μηδενικό στο δεξί ημιεπίπεδο για w και για θ τα οποία αντιστρέφουν το output τους (το κάνουν αρνητικό).

4.3 Σύγκριση με MIL-F-8785C

Όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί, η βραχυπρόθεσμη απόσβεση ζ_s δεν πληρεί τα απαιτούμενα κριτήρια και συνεπώς είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί ένα feedback loop έτσι ώστε να ικανοποιηθούν τα στάνταρντς του προτύπου.

| Παράμετρος | Όρια | Τιμή | Πληρείται |
|------------|----------------------|------|-----------|
| ζ_p | $\zeta_p \geq 0.04$ | 0.11 | Ναι |
| ζ_s | $\zeta_s \geq 0.5$ | 0.20 | Όχι |
| ω_s | $0.8 < \omega_s < 3$ | 2.21 | Ναι |

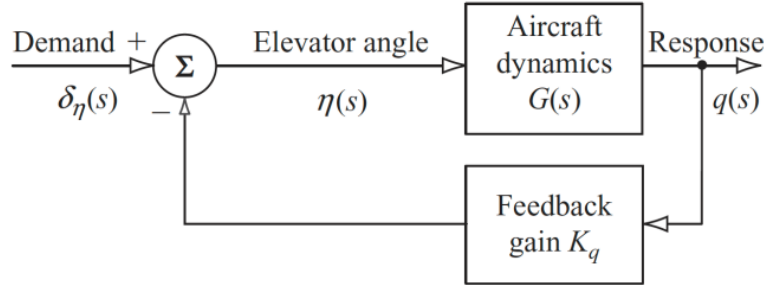
4.4 Απλός βρόγχος ανάδρασης

Πριν παρακαμφθούνε τα ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά είναι κρίσιμο να ερευνηθεί το κατά πόσο το σύστημα είναι ελέγξιμο. Ο πίνακας ελεγχσιμότητας, C_c , ορίζεται ως:

$$C_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο εάν $\text{rank}(C_c) = n$.

Εφόσον το σύστημα είναι ελέγξιμο, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη ενός κλειστού βρόγχου με gain feedback για την διόρθωση των ανεπιθύμητων χαρακτηριστικών.



με $G(s)$,

$$\frac{q(s)}{\eta(s)} = G(s) = \frac{-4.658s^3 - 1.873s^2 - 0.1671s}{s^4 + 0.925s^3 + 4.949s^2 + 0.1825s + 0.1078}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει για τον κλειστό βρόγχο είναι η ακόλουθη,

$$G_{\text{closed loop}}(s) = \frac{G(s)}{1 + K_q \cdot G(s)}$$

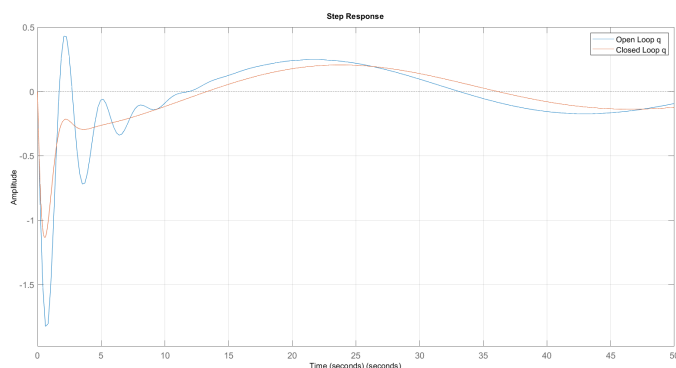
Στόχος είναι να κρατηθούν τα φυγοειδή δυναμικά χαρακτηριστικά όσο κοντά γίνεται στα προυπάρχοντα και να αυξηθεί η βραχυπρόθεσμη απόσβεση πάνω από 0.5. Έπειτα από μερικές δοκιμές, φαίνεται ότι κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται για $K_q = -0.4$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόγχου είναι:

$$G_{\text{closed loop}}(s) = \frac{-4.658s^3 - 1.873s^2 - 0.1671s}{s^4 + 2.788s^3 + 5.698s^2 + 0.2493s + 0.1078}$$

Τα χαρακτηριστικά πλέον βρίσκονται εντός των επιθυμητών ορίων.

- $\omega_p = 0.139 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 2.360 \text{ rad/s}$
- $\zeta_p = 0.126$
- $\zeta_s = 0.583$

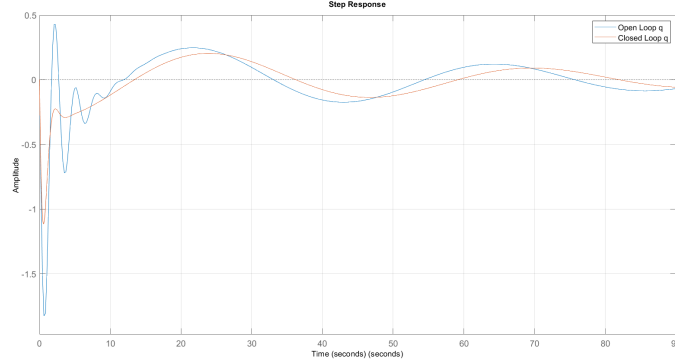
Παρακάτω φαίνεται και η απόκριση της q σε μια βηματική μεταβολή, τόσο στον ανοιχτό όσο και στον κλειστό βρόγχο. Μπορεί να φανεί ότι η βραχυπρόθεσμη συμπεριφορά του κλειστού βρόγχου είναι εμφανώς βελτιωμένη σε σχέση με τον ανοιχτό. Όλες σχεδόν οι ταλαντώσεις έχουν εξαλειφθεί. Ωστόσο το αρχικό undershoot παραμένει εάν και μειωμένο.



Σχήμα 6: Σύγκριση βηματικής μεταβολής ανοιχτού και κλειστού βρόγχου με $K_q = -0.4$.

4.4.1 $\zeta = 0.6$ και $\omega_s = 2$ rad/s

Για να οριστούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά αρκεί να επιλεγεί το κατάλληλο gain έτσι ώστε να αλλάξει ανάλογα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Εδώ, το κύριο ενδιαφέρον πέφτει στο βραχυπρόθεσμο τριώνυμο, το οποίο πρέπει να λάβει την μορφή $s^2 + 2.4s + 4$. Για επιτευχθεί αυτό διαλέγουμε $K_q = -0.42$ για το οποίο πλησιάζουμε περισσότερο στα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Το ζ_s είναι ακριβώς ίσο με το επιθυμητό ενώ το $\omega_s = 2.37$ rad/s. Η απόκριση φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 7: Σύγκριση βηματικής μεταβολής ανοιχτού και κλειστού βρόγχου με $K_q = -0.42$.

4.5 Ανάδραση καταστάσεων

Για το μοντέλο ανάδρασης καταστάσεων μπορούμε να χωρίσουμε το state space σε δύο μειωμένα μοντέλα, ένα με τα φυγοειδή χαρακτηριστικά και ένα με τα βραχυπρόθεσμα. Εφόσον το q είναι μέρος των βραχυπρόθεσμων χαρακτηριστικών, η λογική ελέγχου θα αναπτυχθεί πρώτα στο βραχυπρόθεσμο μειωμένο μοντέλο και έπειτα θα γενικευτεί στο πλήρες.

Το μειωμένο μοντέλο έχει την ακόλουθη μορφή:

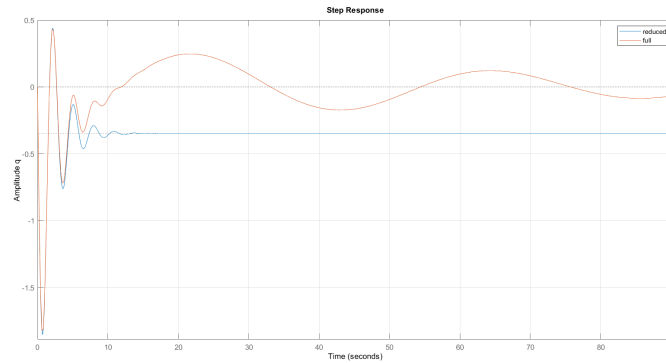
$$\dot{x}_{red} = \begin{pmatrix} -0.44 & 305 \\ -0.0154 & -0.4498 \end{pmatrix} \cdot x_{red} + \begin{pmatrix} -22.12 \\ -4.658 \end{pmatrix} \cdot u$$

και

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\text{με } x = [w, q]^T$$

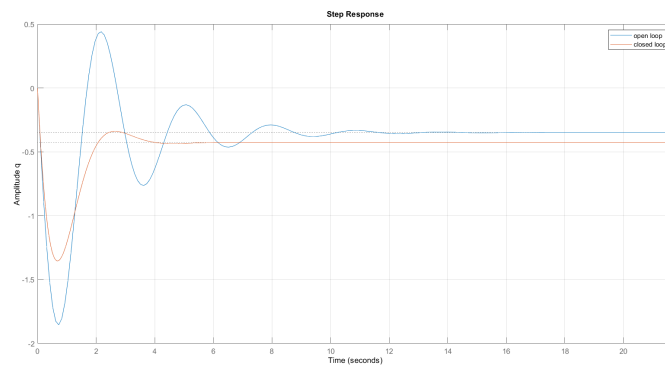
Για να διαπιστωθεί εάν είναι αρκετά κοντά η συμπεριφορά του μειωμένου με το πλήρες συγκρίνουμε τα step responses των δύο ανοιχτών βρόγχων για την μεταβλητή που μας ενδιαφέρει, q .



Σχήμα 8: Σύγκριση βηματικής μεταβολής πλήρους και μειωμένου μοντέλου για ανοιχτό βρόγχο.

Όπως φαίνεται οι δύο αποκρίσεις είναι αρκετά κοντά τα πρώτα δευτερόλεπτα, δηλαδή κατά τα short term dynamics. Ύστερα το μειωμένο, μην μοντελοποιώντας την φυγοκεντρική δυναμική μένει σε μια τιμή, ενώ το πλήρες εκτελεί μειωμένη ταλάντωση.

Τοποθετώντας τους πόλους εκεί που θέλουμε για $\zeta = 0.6$ και $\omega_s = 2$ rad/s, δηλαδή στα $p_{1,2} = -1.2000 \pm 1.6000i$, προκύπτει μειωμένη δράση ελέγχου $K_{red} = [0.0010, -0.3291]$.

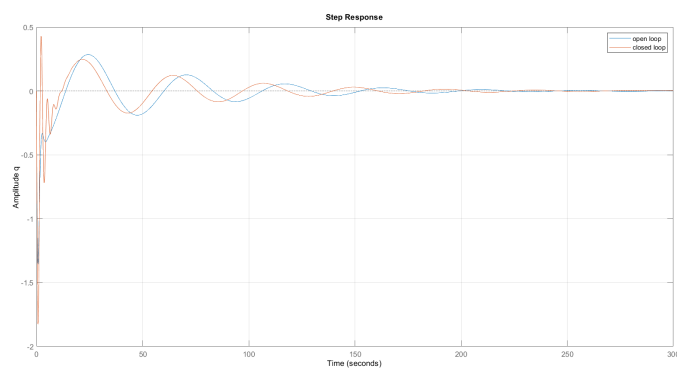


Σχήμα 9: Απόκριση σε ανοιχτό και κλειστό βρόγχο για q στο μειωμένο σύστημα.

Όπως φαίνεται επιβάλλονται ακριβώς τα επιθυμητά χαρακτηρι-

στικά, βέβαια η απόκριση δεν αλλάζει δραστικά από αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος.

Τέλος γενικεύοντας για το πλήρες σύστημα, το ολικό K προκύπτει ίσο με $K_{full} = [0, 0.0010, -0.3291, 0]$. Η απόκριση του πλήρους σε ανοιχτό και κλειστό για την μεταβλητή q φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 10: Απόκριση σε ανοιχτό και κλειστό βρόγχο για q στο πλήρες σύστημα.