

Appunti di Fisica Nucleare e Subnucleare

Anno accademico 2022-2023

Matteo Capitani 865438

Pietro D'Elicio 872235

Giacomo Fracasso 863248

Francesco Declich 866777



Dipartimento di Fisica
Università degli studi di Milano-Bicocca

Note

Questi appunti coprono per intero il corso di fisica nucleare e subnucleare dell'anno accademico 2022-2023 tenuto dai prof. F. Terranova e L. Gironi. Quasi tutte le figure e molte delle integrazioni testuali sono state realizzate seguendo e traducendo il libro di testo *A modern primer in particle and nuclear physics* di F. Terranova, oltre che le slides preparate dal prof. L. Gironi pubblicate sul sito e-learning del corso.

Indice

I Fisica Subnucleare	8
1 Introduzione e richiami di relatività ristretta	9
1.1 Introduzione	9
1.2 Unità Naturali e Formalismo Covariante	11
1.2.1 Unità Naturali	11
1.2.2 Formalismo Covariante	13
1.3 Spazio-Tempo di Minkowski	16
1.3.1 Punti nello spazio-tempo	16
1.3.2 Invarianti relativistiche	18
1.4 Meccanica relativistica	20
1.4.1 Quadrispostamento	21
1.4.2 Quadrivelocità	22
1.4.3 Quadriaccelerazione	22
1.4.4 Quadrimomento e quadriforza	23
1.4.5 Conservazione del quadrimomento	23
2 Decadimenti e Urti	27
2.1 Decadimenti	27
2.1.1 Decadimenti a 2 corpi	27
2.1.2 Decadimenti a 3 corpi	29
2.1.3 Decadimenti in Meccanica Quantistica	30
2.2 Urti	35
2.2.1 Scattering a targhetta fissa	38
2.2.2 Scattering frontale	39
2.2.3 Scattering in meccanica quantistica	40
3 Misure in fisica delle particelle	42
3.1 Particella carica pesante	42
3.1.1 Derivazione di b_{min} e b_{max}	45
3.1.2 Formula di Bethe	46
3.1.3 Picco di Bragg	49
3.2 Particelle cariche leggere	50

3.2.1	Studio qualitativo della perdita di energia per radiazione	50
3.3	Scoperta dell'antimateria	51
3.4	Interazione dei fotoni con la materia	56
3.4.1	Effetto fotoelettrico	56
3.4.2	Effetto Compton	57
3.4.3	Produzione di coppie	58
3.5	Rivelatori	61
3.5.1	Camera a ionizzazione	62
3.5.2	Contatore Proporzionale	64
3.5.3	Contatore Geiger	68
3.5.4	Multiwire proportional chambers (MWPC)	69
4	Simmetrie in meccanica quantistica	71
4.1	Operatori (anti)unitari	71
4.2	Azione degli operatori di simmetria	72
4.3	Simmetrie e osservabili	73
4.4	Classificazione delle simmetrie	75
4.5	Simmetrie continue e costanti del moto	76
4.5.1	Operatore evoluzione temporale	81
4.6	Simmetrie discrete e costanti del moto	82
4.7	Operatore parità quantistica e parità intrinseca	84
4.7.1	Parità intrinseca del fotone	87
4.7.2	Parità intrinseca delle particelle elementari	88
4.8	Parità intrinseca dei sistemi di particelle	92
4.9	Proprietà dei sistemi legate alla parità intrinseca	94
4.10	Operatore C-parità	95
4.10.1	Decadimento del positronio e produzione di fotoni	97
5	Interazioni elettromagnetiche	100
5.1	Elettrodinamica classica e passaggio alla QED	100
5.1.1	Il problema dell'elettrodinamica classica	100
5.1.2	Trasformazioni classiche di gauge	101
5.1.3	Teoria semi-classica dell'elettromagnetismo	103
5.2	Elettrodinamica quantistica (QED)	105
5.2.1	Diagrammi di Feynman	106
5.2.2	Diagrammi al primo ordine	107
5.2.3	Diagrammi al secondo ordine	109
6	Interazioni Forti	112
6.1	Quark e carica di colore	112
6.2	Origine delle interazioni forti	113

6.2.1	Teoria delle rappresentazioni	114
6.3	Cromodinamica Quantistica (QCD)	117
6.3.1	I diagrammi di Feynman in QCD	117
6.3.2	Scattering tra quark	118
6.3.3	Libertà Asintotica	120
6.4	Adroni nel modello a due quark	123
6.4.1	Simmetria di isospin	125
6.5	Barioni nel modello a due quark	126
6.5.1	Possibili stati fisici dei barioni	128
6.5.2	La scoperta delle $\Delta(1232)$	130
6.6	Mesoni nel modello a due quark	133
7	Interazioni Deboli	136
7.1	La natura delle interazioni deboli	136
7.1.1	Antefatto storico: la scoperta dei neutrini	136
7.1.2	Classificazione dei processi deboli	137
7.1.3	Conservazione dei numeri leptonico e barionico	138
7.1.4	Decadimenti	139
7.2	Violazione della Parità	139
7.2.1	L'esperimento di Chien-Shiung Wu	143
7.3	La chiralità del neutrino	147
7.3.1	Cattura elettronica e auto-assorbimento del fotone	147
7.3.2	L'esperimento di Goldhaber	150
7.4	Teoria V-A	152
7.4.1	Decadimento del pione	152
7.5	Teoria Elettrodebole	153
7.5.1	Dalla teoria V-A alla teoria elettrodebole	153
7.5.2	La scoperta delle correnti deboli neutre	156
II	Fisica Nucleare	161
8	Introduzione	162
8.1	Caratteristiche generali degli atomi e dei nuclidi	162
8.2	Proprietà generali dei nuclei	164
8.2.1	Dimensioni dei nuclei	166
8.3	Storia della fisica nucleare	168
8.3.1	La scoperta del neutrone	169
8.3.2	Visione storica delle forze nucleari	171
8.4	Energia di legame	172
8.5	Momento angolare dei nucleoni	173

8.6	Momenti elettrici e magnetici del nucleo	175
8.6.1	Momento magnetico del nucleo	176
8.6.2	Momento di quadrupolo elettrico	176
9	Modelli Nucleari	177
9.1	Modello a "goccia di liquido"	177
9.1.1	Termine di volume	178
9.1.2	Termine di superficie	178
9.1.3	Termine coulombiano	179
9.1.4	Termine asimmetrico	179
9.1.5	Termine di accoppiamento	179
9.2	Modello a Shell	182
9.2.1	Interazione spin-orbita	185
9.2.2	Pairing	186
10	Decadimenti Radioattivi	189
10.1	Decadimenti nucleari	189
10.1.1	Legge di decadimento radioattivo	189
10.1.2	Attività	190
10.1.3	Decadimenti in più canali	191
10.1.4	Catene di decadimenti radioattivi	192
10.2	Decadimenti alfa	193
10.2.1	Cinematica del decadimento alfa	194
10.2.2	Energia delle particelle alfa	195
10.2.3	Modello di Gamow	197
10.2.4	Momento angolare e parità nei decadimenti alfa	201
10.3	Decadimenti beta	201
10.3.1	Cinematica del decadimento beta	203
10.3.2	Teoria di Fermi	205
10.3.3	Regole di selezione	212
10.3.4	Cattura Elettronica	214
10.3.5	Fisica del Neutrino	214
10.3.6	Decadimento doppio beta	215
10.4	Decadimenti gamma	218
10.4.1	Cinematica del decadimento gamma	218
10.4.2	Conversione interna	219
10.4.3	Sviluppo in multipoli e regole di selezione	220
10.4.4	Assorbimento risonante	222

11 Radioattività	225
11.1 Radioattività ambientale	225
11.1.1 Famiglia radioattiva ^{238}U : serie del radio	226
11.1.2 Famiglia radioattiva ^{235}U : serie dell'attinio	227
11.1.3 Famiglia radioattiva ^{232}Th : serie del torio	228
11.1.4 Altre forme di radioattività osservabili in natura	229
11.1.5 Cenni di dosimetria	230
11.2 Raggi cosmici	233
11.2.1 Raggi cosmici primari	233
11.2.2 Raggi cosmici secondari	234
11.3 Cenni di radiodatazione	235
12 Fissione & Fusione Nucleare	237
12.1 Fissione nucleare	237
12.1.1 Fissione spontanea	237
12.1.2 Fissione indotta	238
12.1.3 Reattore nucleare a fissione naturale	242
12.2 Fusione nucleare	242
Appendice: Domande tipiche orale	244
A Fisica Subnucleare - Terranova	245
A.1 Bethe-Block	245
A.2 Camera a ionizzazione	246
A.3 Contatore proporzionale	247
A.4 Contatore Geiger	248
A.5 MWPC	248
A.6 Interazione fotone materia	249
A.7 Parità	250
A.8 Dimostrare che la C-parità di una coppia particella/antiparticella è $(-1)^{\ell+s}$	251
A.9 Chinowski-Steinberger - parità intrinseca π^-	251
A.10 Libertà asintotica	252
A.11 Congettura di confinamento	253
A.12 Probabilità che elicità coincida con la chiralità	254
A.13 Esperimento Wu - violazione parità int. deboli	254
A.14 Riassorbimento del fotone Samario	255
A.15 Goldhaber - chiralità del neutrino	255
A.16 Modello a 2 quark	256
A.17 Conservazione del numero barionico	256
A.18 Decadimento a 2 corpi	257
A.19 Perché $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \gg \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu?$	257

A.20 Sezione d'urto	258
B Fisica Nucleare - Gironi	259
B.1 Attività, legge di decadimento, vari equilibri	259
B.2 Decadimento alfa	260
B.3 Modelli nucleari, con qualche ordine di grandezza	262
B.4 Valle di stabilità e dove arriva (raggiunta con dec. Beta e cattura elettronica)	264
B.5 A pari vs A dispari (due parabole)	265
B.6 Cos'è l'energia di legame?	265
B.7 Grafico E_b/A e premesse teoriche	265
B.8 Decadimento beta	266
B.9 Regole di transizione decadimento beta	268
B.10 Soglie del decadimento beta	269
B.11 Come uso i decadimenti beta per misurare la massa neutrino	269
B.12 Cos'è l'end-point, limite superiore massa del neutrino	270
B.13 Doppio beta senza neutrini	270
B.14 Catene radioattive e radioattività ambientale	271
B.15 Perché fissione con ^{235}U	272
B.16 Dove modello a goccia sbaglia e che modello si usa	272
B.17 Decadimento gamma	272
B.18 Rinculo del gamma e assorbimento risonante	274
B.19 Definizione del Curie (Ci)	275
B.20 Carbonio-14	275
B.21 Termalizzazione dei neutroni (fissione)	276
B.22 Perchè il piombo non viene usato come moderatore	277
B.23 Fusione	277

Parte I

Fisica Subnucleare

Capitolo 1

Introduzione e richiami di relatività ristretta

1.1 Introduzione

La fisica delle particelle nasce quando viene falsificato il modello di mezzo continuo ovvero che la natura mostrasse le stesse proprietà a qualsiasi scala; quindi se ingrandissi un bicchiere d'acqua a dismisura ritroverei ancora acqua con le medesime proprietà.

La prima definizione rigorosa di mezzo continuo viene data da Cauchy nell'800.

Definizione 1.1. *Un mezzo continuo è un insieme di punti di $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\forall \vec{x} \in U$ posso definire una funzione di densità $\rho(\vec{x})$. Chiamo **massa inerziale** l'integrale:*

$$m = \int_B \rho(\vec{x}) d\vec{x} \quad \text{con } B \subset A \tag{1.1}$$

Il mezzo si dice continuo se $\rho(\vec{x})$ è una funzione continua in A .

Matematicamente questa proposizione si traduce nella classica definizione di epsilon-delta di limite: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Definizione 1.2. *Per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x$ tale che $0 < |x - c| < \delta$, allora $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Il modello del mezzo continuo viene falsificato per un valore di $\delta \sim 10^{-10}$ m ovvero nell'ordine delle dimensioni atomiche. Ad esempio le equazioni di Maxwell non funzionano a queste scale, infatti una carica come l'elettrone che si muove di moto circolare uniforme - quindi accelerato - deve perdere energia sotto forma di radiazione elettromagnetica e cadere sul nucleo.

Ciò non avviene poiché le particelle a queste scale sono relativistiche e le leggi di Newton non valgono nella loro forma classica.

Il primo problema che ci poniamo è come definire una *particella elementare*. In fisica classica non esiste una distinzione tra particella elementare e punto materiale.

Definizione 1.3. Un punto materiale è un punto $\in \mathbb{R}^3$ a cui posso associare una massa inerziale ($m \in \mathbb{R}^+$) e una carica elettrica ($q \in \mathbb{R}$) la cui equazione del moto è data dalla cosiddetta "traiettoria".

Definizione 1.4. La traiettoria è una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x, y, z)$ che mi dice dove si trova un punto nello spazio ad un certo tempo $\vec{x}(t)$.

In meccanica relativistica devo modificare la definizione 1.3 nel seguente modo:

Definizione 1.5. Un punto materiale è un punto nello spazio-tempo di Minkowski $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$ a cui è associata una massa a riposo (ovvero la massa misurata in un sistema di riferimento inerziale solidale al punto) ($m \in \mathbb{R}^+$) e una carica elettrica ($q \in \mathbb{R}$) la cui equazione del moto è data dalla traiettoria. Quest'ultima è una mappa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che, dato il tempo proprio τ , mi dà un evento nello spazio-tempo di Minkowski.

La massa a riposo, la carica e il tempo proprio hanno la proprietà di essere *invarianti di Lorentz*. Anche in meccanica relativistica una particella elementare coincide con il punto materiale.

Il problema è che non posso usare queste definizioni di particella per la meccanica quantistica, poiché il concetto di traiettoria non è ben definito a causa della natura non deterministica della teoria stessa. Il teorema di Ehrenfest ovvia a questo problema modificando il concetto di traiettoria continua con i valori di aspettazione delle variabili.

Un problema ben più fondamentale è dato dal fatto che il punto materiale ha dimensioni infinitesime e quindi devo essere in grado di misurare la posizione di una particella con infinita precisione, cosa che il *principio di indeterminazione di Heisenberg* proibisce.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

Questo problema viene risolto, in meccanica quantistica, distinguendo tra la nozione di punto materiale e quella di particella elementare.

Una definizione tautologica di punto materiale in meccanica quantistica è la seguente:

Definizione 1.6. Un punto materiale, in meccanica quantistica, è l'oggetto la cui equazione del moto è l'equazione del moto del punto materiale.

L'hamiltoniana del punto materiale è:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\vec{x}) \quad (1.3)$$

La corrispondente equazione di Schrödinger per il punto materiale sarà allora:

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.4)$$

La differenza tra la fisica classica e la meccanica quantistica risiede proprio nel fatto che le particelle elementari non soddisfano questa equazione.

Definizione 1.7. *La particella elementare in meccanica quantistica è un punto materiale le cui soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono esprimibili **esclusivamente** come sovrapposizione di onde piane.*

Osservazione 1.1:

La funzione d'onda dell'atomo d'idrogeno non è sovrapposizione di onde piane:

$$\psi(\vec{x}, t) = u(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (1.5)$$

perciò - con poca sorpresa - non è una particella elementare.

1.2 Unità Naturali e Formalismo Covariante

Spesso nella fisica delle particelle si ha a che fare con fenomeni relativistici e quantistici. Risulta conveniente utilizzare un sistema di unità di misura che comprenda intrinsecamente questi concetti, insieme ad un formalismo che permetta di verificare, senza fare alcun conto, che ciò che si scrive sia compatibile con la relatività ristretta: questo è il *formalismo covariante*.

1.2.1 Unità Naturali

Finora abbiamo visto un solo sistema di unità di misura, il sistema internazionale (SI) che appartiene alla categoria dei sistemi metrici.

Il sistema interazionale si basa su 7 grandezze fondamentali e ognuna di queste viene definita a partire da una costante fisica:

- Spazio: metro (m) → Velocità della luce nel vuoto: c_0
- Tempo: secondo (s) → Frequenza di transizione iperfina del ^{133}Cs : $\Delta\nu_{\text{Cs}}$
- Massa: chilogrammo (kg) → Costante di Planck¹: h
- Corrente elettrica: ampere (A) → Carica elementare: e
- Temperatura: kelvin (K) → Costante di Boltzmann: k_b
- Intensità luminosa: candela (cd) → Efficienza Luminosa standard: K_{cd}
- Quantità di sostanza: mole (mol) → Numero di Avogadro: N_A

¹Fino al 2019, la definizione del chilogrammo era basata su un campione di platino-iridio depositato presso l'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure a Sèvres in Francia

Il problema di questo sistema di misura è che, per descrivere tutta una serie di fenomeni, è necessario includere tutta una serie di fattori di conversione privi di significato fisico.

Ad esempio se considero la legge di gravitazione universale

$$\vec{F}_g = G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \quad (1.6)$$

la costante di gravitazione G^2 non ha alcun tipo di significato intuitivo, ma è puramente un fattore moltiplicativo dovuto alla nostra scelta arbitraria del valore del metro, del secondo e del chilogrammo.

I sistemi *razionalizzati* (o naturali) risolvono questo problema partendo da delle leggi fisiche ben verificate sperimentalmente ed eliminando quante più costanti di proporzionalità e quindi prototipi possibili.

Il primo sistema razionalizzato fu inventato alla fine dell'ottocento ed è chiamato *cgs elettrostatico*. Il cgs elettrostatico mantiene le unità di spazio (cm), tempo (s) e massa (g) con i loro relativi prototipi, mentre elimina quella della carica utilizzando la legge di Coulomb, imponendo il coefficiente di proporzionalità $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$; così facendo, la legge di Coulomb diventa semplicemente:

$$\vec{F}_c = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (1.7)$$

Il sistema che viene utilizzato in fisica delle particelle viene detto *sistema naturale* (o Heaviside-Lorentz) e si fonda su tre leggi fisiche fondamentali:

$$E = \gamma mc^2 \longrightarrow c = 1 \quad (1.8)$$

$$E = h\nu = \hbar\omega \longrightarrow h = 1 \quad (1.9)$$

$$\vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \longrightarrow k = \frac{1}{4\pi} \quad (1.10)$$

Il prototipo che salta dalla 1.8 è lo spazio poiché, ponendo $c = 1$, la relazione $x = ct$ diventa $x = t$ e posso iniziare a misurare lo spazio in secondi. Questa operazione è molto comoda poiché dalla relatività ristretta so che spazio e tempo sono intrinsecamente legati: poterli misurare con la stessa unità rimuove un certo grado di complessità.

Analogamente il prototipo che viene meno dall'equazione 1.9 è il tempo perché, ponendo $\hbar = 1$, la relazione mi diventa $E = t^{-1}$ e posso misurare il tempo come l'inverso dell'energia.

Infine dalla 1.10 posso rimuovere il prototipo della carica elettrica - in modo analogo al sistema cgs - e, avendo imposto in precedenza $c = 1$, ottengo $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Quindi per

² $G = 6.67384 \pm 0.00080 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

definire tutte le unità fisiche mi basta l'unità di energia, che in fisica delle particelle si chiama elettronvolt (eV).

Definizione 1.8. Un *elettronvolt (eV)* è la quantità di energia che acquista una carica elementare quando viene accelerata da una differenza di potenziale di 1 Volt.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (1.11)$$

Il sistema naturale però ha un problema di precisione: usando un singolo prototipo per definire tutte le unità fisiche, l'errore sul valore dell'energia si propaga su tutte le altre misure. Il sistema internazionale è il sistema di unità che minimizza l'errore sulle misure; quindi in fisica delle particelle svolgiamo tutti i conti nel sistema naturale (SN) e convertiamo poi i risultati in SI.

Un altro problema del sistema di unità naturali (NU) è che, misurando tutto in elettronvolt, non si capisce di cosa si stia parlando. Un modo *puramente* grafico per distinguere le unità di misura a prescindere dal contesto si basa sul ridefinirne alcune:

- Energia \longrightarrow eV.
- Massa \longrightarrow eV/c².
- Momento \longrightarrow eV/c.

Osservazione 1.2:

È bene notare che le unità "eV/c" e "eV/c²" sono sostanzialmente dei simboli, dal momento che $c = 1$. In unità naturali sia il momento sia la massa sono misurate in elettronvolt.

Per passare da sistema naturale a internazionale, nel caso di operazioni semplici, conviene imparare a memoria il valore dei coefficienti di conversione. In particolare bisogna sapere che $\hbar = 6.58 \cdot 10^{-16}$ eV s e che $\hbar c = 197$ MeV fm.

Inoltre, è importante sottolineare che qualsiasi formula α_{NU} espressa in unità naturali sarà proporzionale a $\hbar^a c^b \alpha_{SI}$.

1.2.2 Formalismo Covariante

Il *formalismo covariante* è stato creato in circa 40 anni, a cavallo tra fine '800 ed anni 20 del '900. Esso origina dalla definizione di vettore data da Peano, che risolve il problema dell'arbitrarietà della precedente definizione, visto che essa dipendeva totalmente dal sistema di riferimento. Grazie a Peano, quindi, un qualsiasi vettore rimarrà fisso sotto qualsiasi cambio di base ed assumerà pieno significato fisico: le sue coordinate, infatti, *controvarieranno* a qualsiasi cambiamento dei versori. Scriviamo in \mathbb{R}^n un generico vettore per capire bene il funzionamento di questo meccanismo.

Se $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è un SONC di \mathbb{R}^n , il vettore \vec{v} si potrà scrivere come combinazione lineare dei versori della base $\vec{v} = \sum_{i=1}^N v^i e_i$. Analogamente, in notazione *bra-ket*: $\vec{v} = \sum_{i=1}^N v^i |i\rangle$; dove $|i\rangle$ è l'*i-esimo* versore.

Immaginiamo ora di cambiare base: $\{e_i\}_{i=1,\dots,n} \rightarrow \{e'_i\}_{i=1,\dots,n}$. Per farlo, occorre scrivere ogni versore e'_i sotto forma di combinazione lineare dei vecchi versori, in questo modo: $e'_i = \sum_{j=1}^N a_i^j e_j$.

Affinché il vettore rimanga uguale nello spazio, vogliamo che:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N v^i e_i = \sum_{i=1}^N v'^i e'_i = \sum_{i=1}^N v'^i \sum_{j=1}^N a_i^j e_j \quad (1.12)$$

Osservazione 1.3:

Nel formalismo matriciale, un cambio di base può essere operato da una matrice A , detta *del cambio di base*. Il versore trasformato e'_i è il risultato del prodotto riga per colonna di A con e_i : $e'_i = A e_i$. Si considerino j e i come gli indici che si spostano, rispettivamente, sulla riga e sulla colonna; in notazione di Dirac, con $e'_i = \|i\rangle \wedge e_i = |i\rangle$:

$$\|i\rangle = A|i\rangle = \sum_{ij} |j\rangle a_i^j \langle i|i\rangle = \sum_j a_i^j |j\rangle \quad (1.13)$$

Per verificare la 1.12, le nuove coordinate devono verificare:

$$\sum_{i=1}^N v^i e_i = \sum_{i=1}^N v'^i \sum_{j=1}^N a_i^j e_j \implies v'^i = \sum_{j=1}^N (a_i^j)^{-1} v^j = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_i^j v^j \quad (1.14)$$

Intuitivamente: affinché un vettore rimanga fermo nello spazio, deve avere coordinate che rispondono alla variazione del versore annullando la variazione stessa. Il versore cambia di una quantità a_i^j ma le coordinate restituiscono il suo inverso $\tilde{a}_i^j = (a_i^j)^{-1}$.

Definizione 1.9. *I versori delle basi di uno spazio vettoriale - spazi affini compresi - si trasformano in modo covariante per cambi di base, ovvero come A . Le coordinate si trasformano in modo controvariante per cambi di base, ovvero come $\tilde{A} = A^{-1}$.*

D'ora in poi l'indice basso descriverà quantità covarianti, mentre l'indice alto quantità controvarianti: un generico vettore sarà quindi scritto come $\vec{v} = \sum v^i e_j$.

Per semplificare questa notazione, Einstein ha introdotto la cosiddetta *notazione di Einstein*, che si basa su tre principi:

- quantità covarianti hanno indici bassi
- quantità controvarianti hanno indici alti
- indici covarianti e controvarianti ripetuti si intendono sommati

Si possono classificare tutte le quantità fisiche sulla base di come si trasformano dopo un cambio di base.

Definizione 1.10. *Gli scalari sono quantità sia fisiche sia geometriche che non si modificano in seguito ad un cambio di base. Possono essere anche chiamati invarianti.*

Una quantità può essere scalare per un cambio di base ma non esserlo per un altro.

I cambi di base spesso sono classi ben definite di trasformazioni. Ad esempio le trasformazioni di Lorentz sono dei cambi di base, oppure in fisica classica lo sono le trasformazioni di Galileo.

Definizione 1.11. *Un vettore è una qualsiasi n-tupla di numeri reali che si trasforma in modo controvariante.*

$$x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n) \longrightarrow x^{i'} = A_i^{i'} x^i \quad (1.15)$$

Il vettore $x^{i'}$ viene chiamato *vettore controvariante*.

Le nuove coordinate sono il prodotto dell'inverso della matrice delle basi per le vecchie coordinate, come visto prima.

Ad esempio, il campo elettromagnetico è un vettore non perché sia stato deciso a priori, ma perché se vengono applicate al potenziale vettore e scalare le equazioni di Maxwell, che sono per l'appunto delle trasformazioni, esso varia come (1.15).

Un altro importante concetto è quello di *tensore*, in particolare il *tensore di rango 2* controvariante.

Definizione 1.12. *Un tensore di rango 2 è una matrice reale T che per un cambio di base si trasforma come*

$$T^{i',j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} T^{i,j} = \sum_{i,j=1}^N A_i^{i'} A_j^{j'} T^{i,j} \quad (1.16)$$

Esistono quantità fisiche rilevanti che si trasformano in modo covariante?

Noi sappiamo che un vettore sarà

$$\vec{x}' = A \vec{x} \quad (1.17)$$

Per determinare ogni elemento della matrice A è sufficiente fare la derivata parziale di ciascun elemento del nuovo vettore rispetto a ciascun elemento del vecchio vettore. Questo ci dice che per descrivere un cambio di coordinate è sufficiente conoscere la matrice di mescolamento delle basi.

Ciò significa che un vettore è una quantità le cui coordinate si trasformano nel modo appena illustrato, e analogamente il tensore. Vediamolo esplicitamente:

$$\vec{x}'^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \vec{x}^i \quad (1.18)$$

$$T^{i',j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{ij} \quad (1.19)$$

Quanto appena visto permette facilmente di osservare che ci sono parecchie quantità fisiche che si trasformano in modo covariante: in particolare la più importante classe

è quella delle quantità che sono derivate dispari dei vettori. La più famosa di queste quantità è il gradiente.

1.3 Spazio-Tempo di Minkowski

La precedente trattazione sul formalismo covariante è da intendersi come un discorso generale; ora ci si concentra sulle specifiche applicazioni alla relatività speciale (SR). Ad esempio, un cambio di base A - nel caso più generale possibile - potrebbe essere una funzione del tempo e della posizione $A_j^i = A_j^i(\vec{x}, t)$; in relatività generale (GR) non se ne potrebbe fare a meno, nel nostro caso invece, verrà sempre considerata una costante $A_j^i(\vec{x}, t) = \text{cost.}$

In questa parte della trattazione, ci si pone l'obiettivo di costruire una dinamica relativistica che comprenda la rigorosa struttura matematica appena introdotta. Lo spazio con cui lavoreremo è quadridimensionale - composto da tre dimensioni spaziali e una temporale - e i cambi di base con cui avremo a che fare sono le *trasformazioni di Lorentz*.

1.3.1 Punti nello spazio-tempo

Occorre innanzitutto fare un po' di ordine, cercando di fissare le notazioni che utilizzeremo fin da subito. Se x^μ è un vettore di \mathbb{R}^4 - o *quadrivettore* - le sue componenti saranno scritte in questo modo:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \equiv ct \\ x^1 \equiv x \\ x^2 \equiv y \\ x^3 \equiv z \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

D'ora in poi, si tenderà a mescolare la notazione relativistica con quella più familiare dell'algebra lineare. Sarà opportuno tenere a mente diversi accorgimenti:

- Gli indici greci variano tra 0 e 3, quelli latini tra 1 e 3:

$$\mu = 0, \dots, 3 \implies x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \wedge \quad i = 1, \dots, 3 \implies x^i = x^1, x^2, x^3;$$

- La freccia di vettore viene riservata per gli elementi di \mathbb{R}^3 : $\vec{x} = \{x^i\}_{i=1,\dots,3} = (x^1, x^2, x^3)$;
- $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$ è il cosiddetto *fattore di Lorentz*, in NU:

$$c = 1 \implies \beta = |\vec{v}|;$$

- Il fattore γ di Lorentz si scriverà: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}$ in NU;
- Per brevità, d'ora in avanti: $|\vec{v}| = v$;

- Spesso, nel seguito della trattazione, le quantità primarie saranno invariabilmente indicate con un ' al carattere stesso o al suo indice: $x'^\mu = x^\mu$.

Si procede allora a introdurre, un passo alla volta, il concetto di spazio-tempo. Sia x^μ un punto di \mathbb{R}^4 , in quiete nel sistema di riferimento (SDR) S . Sia ora S' un SDR inerziale, che si sposta a velocità costante lungo la direzione positiva dell'asse x ($\equiv x^1$) con: $\vec{v} = v\hat{i}$. Le *trasformazioni di Lorentz* L , che permettono di passare dalle coordinate in S a quelle in S' , si scrivono (in SI):

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \equiv \frac{x^0}{c} \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \equiv x'^1 \\ y' = y \equiv x'^2 \\ z' = z \equiv x'^3 \end{cases} \quad (1.21)$$

Che si possono riscrivere, in forma matriciale (in NU):

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Dove

$$x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z') \quad \text{tale che} \quad x'^\mu = Lx^\mu \quad (1.23)$$

A riguardo, vanno fatte due importanti osservazioni:

Osservazione 1.4:

Il quadrvettore x^μ rispetta le regole di trasformazione controvariante descritte alla sezione precedente:

$$x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu = \sum_{\nu=0}^3 L_\nu^\mu x^\nu \quad (1.24)$$

Osservazione 1.5:

Le componenti spaziali *ortogonali* alla direzione del moto rimangono inalterate. In altri termini: esse sono *invarianti (o scalari) di Lorentz*.

Definizione 1.13. *Il movimento di un SDR rispetto ad un altro è detto **boost di Lorentz**. Nel caso sopra riportato, si direbbe che S' è un **boost sull'asse x di S** .*

Siamo finalmente pronti a dare la definizione di spazio-tempo. È bene tenere a mente che il *tempo proprio* di un punto materiale (PM) è il tempo misurato da un osservatore solidale al PM stesso.

Definizione 1.14. *Lo spazio dei vettori x^μ di \mathbb{R}^4 , in cui i cambi di base sono definiti dalle trasformazioni di Lorentz, è detto **spazio-tempo di Minkowski** e viene indicato con la lettera \mathcal{M} . I punti $x^\mu \in \mathcal{M}$ sono detti **eventi** e i PM hanno traiettorie che sono funzioni del tempo proprio τ ; in matematica: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\tau \mapsto x^\mu(\tau)$.*

Ci si è serviti di un esempio semplice di boost per introdurre la definizione di *spazio di Minkowski*. Per completezza, si fornisce anche la più generica trasformazione di Lorentz possibile in SR, detta *gruppo di Poincaré*. Se la direzione del moto di S' rispetto a S non è più sull'asse x ma su un generico versore $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$, i boost di Lorentz - in SI - si scrivono:

$$\begin{cases} x'^0 = ct = \gamma \left(x^0 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c} \right) \\ \vec{x}' = \vec{x}_\perp + \gamma \left(\vec{x}_\parallel - \frac{\vec{v} x^0}{c} \right) \end{cases} \quad (1.25)$$

1.3.2 Invarianti relativistiche

Poiché in fisica classica il tempo è una quantità invariante, la distanza tra due punti dello spazio \mathbb{R}^3 è la stessa per ogni osservatore. La distanza quadratica percorsa da un PM tra t e $t+dt$ risulta essere: $ds^2 = |\vec{x}(t) - \vec{x}(t+dt)|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, dove $d\vec{x} = d\hat{x}\hat{i} + d\hat{y}\hat{j} + d\hat{z}\hat{k}$. In SR gli osservatori non si trovano d'accordo sulle misure di tempo e di distanza, tuttavia concordano sulla differenza quadratica tra tempo e spazio. Si consideri, ad esempio, che una particella venga rilasciata a tempo t dalla posizione x e che, successivamente, ne venga registrato il passaggio nella posizione \tilde{x} a \tilde{t} . Quando le due misure vengono confrontate, la relatività speciale garantisce che:

$$c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2 = c^2(\tilde{t}' - \tilde{t})^2 - (\tilde{x}' - \tilde{x})^2 - (\tilde{y}' - \tilde{y})^2 - (\tilde{z}' - \tilde{z})^2 \text{ cioè:}$$

$$ds = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cd\tilde{t})^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 \quad (1.26)$$

In termini più rigorosi:

Definizione 1.15. In \mathcal{M} si può definire un **tensore metrico** $g_{\mu\nu}$ che prende il ruolo della matrice identità $\mathbb{1}$ associata al prodotto scalare standard e dà un nuovo prodotto scalare. Quest'ultimo definisce le distanze nello spazio di Minkowski. Se $a^\mu \in \mathcal{M}$, la quantità $(a^\mu)^2 = g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu$ è detta **norma secondo Minkowski**.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Teorema 1.1

La norma secondo Minkowski è un invariante di Lorentz.

Osservazione 1.6:

La norma di Minkowski data da $g_{\mu\nu}$ non è, matematicamente parlando, una distanza. Queste ultime devono rispettare alcune proprietà, tra cui:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \wedge d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y} \quad (1.28)$$

Non rispettandole, viene spesso definita una *pseudonorma*, tuttavia - in SR - una distanza negativa assume un significato ben preciso.

Definizione 1.16. *Nello spazio-tempo, le distanze possono essere di tre 'tipologie'. Si consideri una particella rilasciata a tempo $t = 0$ da $\vec{x} = \vec{0}$; se il suo passaggio in un rivelatore corrisponde all'evento $x^\mu \in \mathcal{M}$, questo sarà detto:*

- se $(x^\mu)^2 > 0$ di tipo **tempo**
- se $(x^\mu)^2 = 0$ di tipo **luce**
- se $(x^\mu)^2 < 0$ di tipo **spazio**

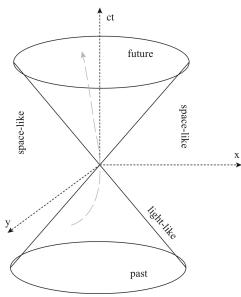


Figura 1.1: Cono di luce

Perché l'evento sia di tipo *luce*, la particella deve viaggiare alla velocità della luce; se la sua velocità è minore, sarà di tipo *tempo*. Naturalmente, questi sono gli unici due casi in cui può esservi relazione causa/effetto tra due eventi. Quelli di tipo *spazio* costituiscono il cosiddetto *presente esteso*, cioè l'insieme di tutti quegli eventi non influenzabili direttamente. Infatti, per come è stato descritto, l'evento x^μ non può mai essere di tipo spazio: altrimenti la particella avrebbe dovuto muoversi a velocità superluminaria.

Teorema 1.2

Se $a^\mu \in \mathcal{M}$, $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ è un vettore controvariante, allora il corrispondente vettore covariante a_μ si ottiene applicandovi il tensore $g_{\mu\nu}$: $a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$. In altri termini:

- $a^0 = a_0$
- $a^i = -a_i$

N.B.: Questo risultato è valido solo in SR, non in GR.

Osservazione 1.7:

Vien da sé, leggendo le righe appena sopra:

$$a^2 = a^\mu a_\mu = g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = (a^0)^2 - |\vec{a}|^2 \quad (1.29)$$

$$a \cdot b = \langle a | b \rangle = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu}a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (1.30)$$

dove: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$.

Altre notazioni che saranno pesantemente implementate durante il corso sono:

- Spesso i quadrivettori, oltre che con indice greco, saranno scritti senza alcun indice: $a^\mu = a \in \mathcal{M}$. Occorrerà prestare molta attenzione per non confonderli con quantità scalari.
- Può capitare che il modulo di un vettore sia abbreviato in questo modo: $|\vec{p}| = p$, mentre il quadrivettore associato - in questo caso del momento - verrà indicato col carattere p in Italic.
- $(a^\mu + b^\mu)^2 = (a^\mu)^2 + (b^\mu)^2 + 2\langle a | b \rangle$

1.4 Meccanica relativistica

Possediamo ora l'impalcatura necessaria per descrivere la dinamica di sistemi fisici compatibili con la SR nello spazio di Minkowski. Il nostro obiettivo è trovare una tecnica per scrivere qualsiasi relazione in modo che sia *automaticamente* compatibile con la relatività ristretta. Per una legge, conciliarsi con la teoria significa rispettare gli assiomi SR di Einstein:

- A1** Le leggi fisiche mantengono la stessa forma funzionale in ogni sistema di riferimento inerziale.
- A2** La velocità di propagazione della luce nel vuoto non dipende dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore.

L'invariante di Lorentz ds - trattata nel capitolo precedente - garantisce che, se un oggetto si muove alla massima velocità possibile, ogni osservatore inerziale concorderà sul suo valore. Il secondo assioma viene allora risolto dichiarando, semplicemente, che tutti i sistemi fisici evolvono nello spazio \mathcal{M} . Allo stesso modo, anche il primo assioma segue in modo immediato dalla struttura matematica che useremo.

Teorema 1.3

Il primo assioma è equivalente a dire che tutte le leggi fisiche devono essere espresse come funzioni di scalari, vettori e tensori.

Non si fa una vera e propria dimostrazione, quanto piuttosto un ragionamento informale. Una legge fisica nello spazio-tempo è un vincolo tra grandezze fisiche: $f(s, x^\mu, T^{\mu\nu}) = 0$. Un esempio può essere:

$$k^\mu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} p_\nu \quad (1.31)$$

Conosciamo come funzionano le trasformazioni di Lorentz, perciò possiamo determinare univocamente come variano le grandezze cambiando SDR. Le relazioni:

- $q' = q$
- $m' = m$

- $F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu}$

- $p'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu} p_\nu$

- $k'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} p^\mu$

Variato ogni termine, osservatori diversi scriveranno la legge fisica nella stessa forma, semplicemente con valori differenti:

$$k'^\mu = \frac{q}{m} F'^{\mu\nu} p'_\nu \quad (1.32)$$

Le variabili sono trasformate, ma la legge è uguale. Scrivendo una formula cogli strumenti giusti, essa risulterà sicuramente compatibile con la teoria.

Osservazione 1.8:

La legge scritta in precedenza è in realtà la scrittura in SR della forza elettromagnetica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.33)$$

L'equazione qui sopra può essere conciliata con la SR, ma per dimostrarlo è necessario applicare le trasformazioni di Lorentz a tutti i termini dell'equazione. Scrivendola come combinazione di scalari, vettori e tensori, non v'è più alcun bisogno di mostrare che è compatibile, perché lo è sicuramente.

Si può allora procedere a costruire la dinamica relativistica (SR), utilizzando il medesimo *modus operandi* della meccanica classica (MC). Prenderemo le quantità fisiche, le renderemo covarianti e infine le useremo come analogo relativistico del caso classico.

Per descrivere la meccanica si devono introdurre:

- Posizione e spostamento ($\vec{x}, d\vec{x}$)
- Velocità ($\vec{v} = \dot{\vec{x}}$)
- Accelerazione ($\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$)
- Equazione del moto ($\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$)

Prima di iniziare, si ricorda che il tempo non è universale in SR, pertanto si farà riferimento al tempo proprio τ . Esso è un invariante di Lorentz, poiché $\tau = \frac{(dx^\mu)^2}{c^2}$, dove sia $(dx^\mu)^2$ sia c sono scalari di Lorentz.

1.4.1 Quadrispostamento

Si è trattato, alla sezione 1.3, il concetto di distanza nello spazio \mathcal{M} di Minkowski, per cui non ci si dilungherà molto.

MC La posizione è una tripla $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z)$, come lo spostamento $d\vec{x} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$;

SR Si parla di quadrivettore, chiamato evento per il suo legame con il tempo: la posizione è un vettore controvariante $x^\mu \in \mathcal{M}$, con il *quadrispostamento* $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$,

Nella relatività ristretta, ho il problema che non posso più usare il tempo perché dovrei specificare in quale sistema inerziale sono. Posso ovviare a questo problema utilizzando il *tempo proprio* τ ovvero il tempo nel sistema di riferimento inerziale solidale al punto materiale.

Si può dimostrare che il tempo proprio è un *invariante di Lorentz*:

$$d\tau^2 = \frac{(dx^\mu)^2}{c^2} = \frac{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2} \quad (1.34)$$

1.4.2 Quadrivelocità

Ora che ho l'analogo dello spazio (x^μ) e l'analogo del tempo (τ) posso introdurre l'analogo della velocità ovvero la *quadrivelocità*:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) \quad (1.35)$$

Ora mi posso chiedere che relazione c'è tra velocità "euclidea" e quadrivelocità:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau^2}{dt^2} &= 1 - \frac{v^2}{c^2} = \gamma^{-2} \implies \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \\ dt &= \gamma(v)d\tau \end{aligned} \quad (1.36)$$

La 1.36 viene detto *Teorema di Dilatazione dei Tempi*. Sfruttando la relazione 1.36 posso calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{d\tau} &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \gamma(v) = v(x)\gamma(v) \\ u^\mu &= \gamma(v)(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Il significato fisico della 1.37 è analogo a quello classico, con la differenza che anche il tempo è incluso nella tangente.

1.4.3 Quadriaccelerazione

L'*accelerazione*, in fisica classica, è data dalla derivata della velocità rispetto al tempo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; posso quindi pensare di definire una quadri-accelerazione analogamente alla quadrivelocità: $\vec{a}^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$.

Svolgendo i conti però ci si accorge che la relazione tra la quadri-accelerazione e la accelerazione "euclidea" è più complessa:

$$a^\mu = \gamma(\dot{\gamma}c, \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\vec{a}) = \gamma(\dot{\gamma}c, \dot{\gamma}v_x + \gamma a_x, \dot{\gamma}v_y + \gamma a_y, \dot{\gamma}v_z + \gamma a_z) \quad (1.38)$$

La comparsa di $\dot{\gamma}$ e di v nella 1.38 è particolare e tipica della trattazione relativistica. L'accelerazione perturba anche l'energia della velocità originaria, questo metodo si usa anche per accelerare le particelle.

1.4.4 Quadrimomento e quadriforza

Avendo definito lo spostamento, il tempo proprio, la velocità e l'accelerazione posso definire le altre quantità derivate. Una quantità molto importante da qui in avanti è il momento: $\vec{p} = m\vec{v}$ che in relatività diventa il *quadrimomento*: $p^\mu = mv^\mu$

Definizione 1.17. Il *quadrimomento* relativistico è il prodotto della quadrivelocità per la massa a riposo del punto materiale $p^\mu = mu^\mu$

Affinché sia un quadrivettore, non deve essere un'invariante di Lorentz.

Posso definire anche la forza che in fisica classica è data dalla seconda legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$. Purtroppo la forma della forza non è l'intuitiva generalizzazione relativistica della legge di Newton, però posso usare il momento ed avere quindi:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d}{dt}(\gamma mc, \vec{p}) \quad (1.39)$$

1.4.5 Conservazione del quadrimomento

In fisica classica vale

$$\sum_i p_i^{\text{in.}} = \sum_i p_i^{\text{fin.}} \implies p^{\text{tot.}} = \sum_i p_i^{\text{tot.}} \quad (1.40)$$

Teorema 1.4 (Principio di Conservazione del quadrimomento)

In un sistema di N particelle interagenti, la somma dei quadrimomenti delle particelle iniziali deve essere uguale alla somma dei quadrimomenti delle particelle finali. In formule:

$$\sum_{i=1}^N p_{i \text{ in.}}^\mu = \sum_{i=1}^M p_{i \text{ fin.}}^\mu \quad (1.41)$$

Dal principio di conservazione del quadrimomento posso ricavare il principio di conservazione dell'energia:

$$p^\mu = mv^\mu = \gamma mc \longrightarrow p^0 \equiv \frac{E}{c} \xrightarrow{NU} E = p^0 \quad (1.42a)$$

$$\gamma mv_x \longrightarrow p^1 \quad (1.42b)$$

$$\gamma mv_y \longrightarrow p^2 \quad (1.42c)$$

$$\gamma mv_z \longrightarrow p^3 \quad (1.42d)$$

La conservazione del momento dunque implica 4 equazioni che influenzano la cinematica, delle quali la 1.42a è la più importante.

Considero ora il sistema più semplice possibile: la singola particella libera. L'energia della particella relativistica è: $E = cp^0$; in fisica classica, invece, l'energia coincide con l'energia cinetica³ e vale: $E = \frac{1}{2}mv^2$

La norma del momento nello spazio di Minkowski è uguale a:

$$\begin{aligned} (p^\mu)^2 &= g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3 \\ &= p^0 p^0 - p^1 p^1 - p^2 p^2 - p^3 p^3 = \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= (p^0)^2 - (p_x)^2 - (p_y)^2 - (p_z)^2 \\ &= (p^0)^2 - (|\vec{p}|)^2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

che è un'invariante di Lorentz.

Per fare il conto mi metto nel sistema più comodo, cioè quello della particella, detto *rest frame (RF)* ($v = 0 \implies \gamma = 1$). Nel rest frame $p_x = p_y = p_z = 0$

$$\begin{aligned} \implies (p^\mu)^2 &= (p^0)_{\text{RF}}^2 = m^2 c^2 \longrightarrow (\text{in SI}) \\ &= m^2 \longrightarrow (\text{in NU}) \end{aligned} \quad (1.44)$$

La relazione 1.44 è un risultato universale che vale sempre.

Teorema 1.5

La norma secondo Minkowski di p^μ è *sempre uguale* alla massa a riposo. In simboli:

$$(p^\mu)^2 = m^2 \quad (1.45)$$

Quindi posso scrivere l'energia di una particella:

$$(p^\mu)^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 \xrightarrow{(NU)} E^2 - |\vec{p}|^2 \implies E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \xrightarrow{(SI)} \sqrt{m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad (1.46)$$

³L'energia cinetica è *l'unica* forma di energia fisicamente rilevante; l'energia potenziale è, in prima approssimazione, l'energia che il campo (ad esempio quello gravitazionale) può scambiare con la particella.

Ora mi posso chiedere qual è la relazione tra l'energia e la velocità di una particella. Ricordo che:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{dove } \beta = \frac{v}{c} \xrightarrow{(NU)} v \quad (1.47)$$

e che

$$p^\mu = \gamma m v^\mu \quad \text{con} \quad \begin{cases} p^0 = \gamma m \\ \vec{p} = \gamma m \vec{v} = \gamma m \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{cases} \quad (1.48)$$

allora combinando la 1.47 e la 1.48 ottengo un'espressione per β .

$$\beta = \frac{p}{\gamma m} \xrightarrow{(NU)} \frac{|\vec{p}|}{E} \quad (1.49)$$

Ricavo anche l'espressione di γ in funzione dell'energia.

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ E = \sqrt{m^2 + p^2} \implies E = \gamma m \end{cases} \implies \gamma = \frac{E}{m} \quad (1.50)$$

In natura esistono due categorie di particelle:

- **Particelle massive:** sono le particelle che hanno massa a riposo $m \neq 0$ e momento $p^\mu = (E, \vec{p}) = (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$.
Quindi il $\beta = |\vec{p}|/E < 1 \implies v < c$
- **Particelle massless:** sono le particelle che hanno massa a riposo $m = 0$ e momento $p^\mu = (E, \vec{p}) = (|\vec{p}|, \vec{p})$.
Il β in questo caso invece vale $\beta = |\vec{p}|/E = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}} \implies v = c$

Tutte le particelle prive di massa si muovono alla velocità della luce.

Quindi la luce (il fotone) non ha uno status speciale ma è semplicemente la particella più comoda e semplice da osservare e misurare.⁴.

Ad inizio '900 in molti si domandarono se una particella massiva potesse trasformarsi in una massless e viceversa. Con la relazione $E = \gamma mc^2$ oggi diamo per scontato che la totalità della massa di una particella possa essere convertita in energia, mentre nel 1905 questa cosa non la sapevano affatto.

Supponiamo di avere una particella con una certa massa a riposo m . Si può fare il seguente ragionamento: questa massa a riposo ha le dimensioni di un'energia, ma è inviolabile e non può essere trasformata in energia. Si può quindi definire l'energia cinetica come segue:

$$E_k = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right] \quad (1.51)$$

⁴Sono particelle prive di massa gli otto gluoni (che però non è possibile osservare direttamente) e l'eventuale particella quantistica del campo gravitazionale, il gravitone.

Tutti gli esperimenti fatti fino al 1905 implicavano che $v \ll c$: sviluppando in Taylor la 1.51, si può ricavare l'espressione dell'energia cinetica classica, postulando, come detto prima, l'inviolabilità della massa a riposo.

La cosa affascinante è che Einstein avrebbe potuto ragionare in questo modo, ma già nel 1905 intuì che in linea di principio una frazione della massa a riposo poteva essere toccata e trasformata in energia cinetica di un'altra particella.

Oggi noi sappiamo che tutta la massa a riposo può essere convertita in energia cinetica. La dimostrazione più spettacolare di questo fatto avvenne negli anni '50 con l'osservazione del decadimento del piona π^0 in due fotoni $\gamma\gamma$: la sua massa a riposo viene interamente convertita.

Una particella massiva non può però trasformarsi in una singola particella massless, altrimenti non si rispetterebbe la conservazione del quadrimomento.

Per verificarlo, consideriamo un ipotetico decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma$: se ci mettiamo nel rest frame del piona, vediamo che $p_{\pi^0}^\mu = (m_{\pi^0}, 0, 0, 0)$. Noi sappiamo che in qualsiasi sistema di riferimento la velocità del fotone è c , ma se il quadrimomento si conserva $p_x^\mu = 0; p_y^\mu = 0; p_z^\mu = 0$ e quindi anche l'energia del fotone sarà nulla, il che è assurdo.

Quanto appena visto può essere generalizzato nel seguente teorema:

Teorema 1.6

Non esistono decadimenti ad un corpo.

Capitolo 2

Decadimenti e Urti

2.1 Decadimenti

Alla fine del precedente capitolo è stato introdotto il concetto di decadimento. Ciò che vogliamo fare adesso è andare a studiare questo fenomeno nel dettaglio, partendo dal caso più semplice: il decadimento *a 2 corpi*.

2.1.1 Decadimenti a 2 corpi

Vogliamo definire il quadrimomento totale p_{tot}^μ . La variabile più utile che sfruttiamo è la norma secondo Minkowski del quadrimomento totale.

$$(p_{tot}^\mu)^2 = (p^0)^2 - (|\vec{p}|)^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right|^2 \quad (2.1)$$

Introduciamo ora una variabile che verrà usata con grande frequenza:

Definizione 2.1. *La prima variabile di Mandelstam o massa invariante è definita come il quadrato della norma secondo Minkowski del quadrimomento totale; essa è un'invariante di Lorentz e viene indicata con la lettera S:*

$$S = (p_{tot}^\mu)^2 \quad (2.2)$$

Possiamo sfruttare questa grandezza per studiare i decadimenti a due corpi. La forma più generale di decadimento è $a \rightarrow b + c$. Siccome vale la conservazione del quadrimomento si ha che $p_a^\mu = p_b^\mu + p_c^\mu$.

Lo stato finale a due particelle è descritto da 6 variabili in 4 equazioni, di cui 4 possono essere determinate univocamente. Vediamo quali sono. Consideriamo il decadimento del pione negativo.

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu \quad (2.3)$$

Sfruttiamo la massa invariante mettendoci nel *rest frame* della particella iniziale che in questo esempio è un piona π^- carico negativamente. Il quadrimomento iniziale è $p_i^\mu = p_{\pi^-}^\mu = (M_{\pi^-}, 0, 0, 0)$. Andiamo a definire le variabili $p_1^\mu = p_\mu^\mu$ e $p_2^\mu = p_{\nu_\mu}^\mu$.

A questo punto applichiamo la conservazione del quadrimomento: $p_{\pi^-}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \rightarrow p_2^\mu = p_{\pi^-}^\mu - p_1^\mu$. Possiamo quindi calcolarci la massa invariante del sistema, tramite la norma secondo Minkowski della somma dei quadrimomenti iniziali e finali.

$$(p_2^\mu)^2 = (p_{\pi^-}^\mu - p_1^\mu)^2 = (p_{\pi^-}^\mu)^2 - 2p_{\pi^-}^\mu p_{1\mu} + (p_1^\mu)^2 = (M_{\pi^-})^2 - (M_{\pi^-}) E_1 + (M_1)^2 \quad (2.4)$$

Se ora consideriamo la norma secondo Minkowski della variabile $(P_2^\mu)^2 = (M_2)^2$ e sostituiamo l'espressione 2.4 possiamo trovare l'energia della prima e seconda particella nel *rest frame*.

$$E_1 = \frac{(M_{\pi^-})^2 + (M_1)^2 - (M_2)^2}{2M_{\pi^-}} \quad (2.5)$$

$$E_2 = \frac{(M_{\pi^-})^2 + (M_2)^2 - (M_1)^2}{2M_{\pi^-}} \quad (2.6)$$

Le energie del muone e del neutrino sono univocamente determinate.

In generale, le espressioni 2.5 e 2.6 pongono delle condizioni sulla massa delle particelle: data una particella iniziale a e due particelle finali b, c , infatti, si ha che $m_a \geq m_b + m_c$.

Vogliamo fare la stessa cosa in un generico sistema di riferimento, considerando sempre il caso trattato in precedenza. Per fare ciò ci serve conoscere per prima cosa il movimento del piona, che supponiamo essere lungo l'asse z del sistema di riferimento del laboratorio con velocità β . In questo sistema di riferimento $\gamma = E_{\pi^-}/M_{\pi^-}$, mentre $\beta = |\vec{P}_{\pi^-}|/M_{\pi^-}$. Nel *rest frame* possono definire l'angolo di emissione θ_{RF} del muone per cui valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} |p_1| \sin \theta_{RF} = p_{1x}^{RF} \\ |p_1| \cos \theta_{RF} = p_{1z}^{RF} \end{cases} \quad (2.7)$$

Se applichiamo nel sistema di riferimento del laboratorio la trasformata di Lorentz delle 2.7, troviamo invece le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} p_{1x} = p_{1x}^{RF} \\ P_{1z} = \gamma (p_{1z}^{RF} + \beta E^{RF}) \end{cases} \quad (2.8)$$

Nel sistema del laboratorio è possibile misurare la tangente dell'angolo θ come:

$$\tan \theta^{LAB} = \frac{p_{1x}^{LAB}}{p_{1z}^{LAB}} = \frac{p_{1x}^{RF}}{\gamma (p_{1z}^{RF} + \beta E_1)} \quad (2.9)$$

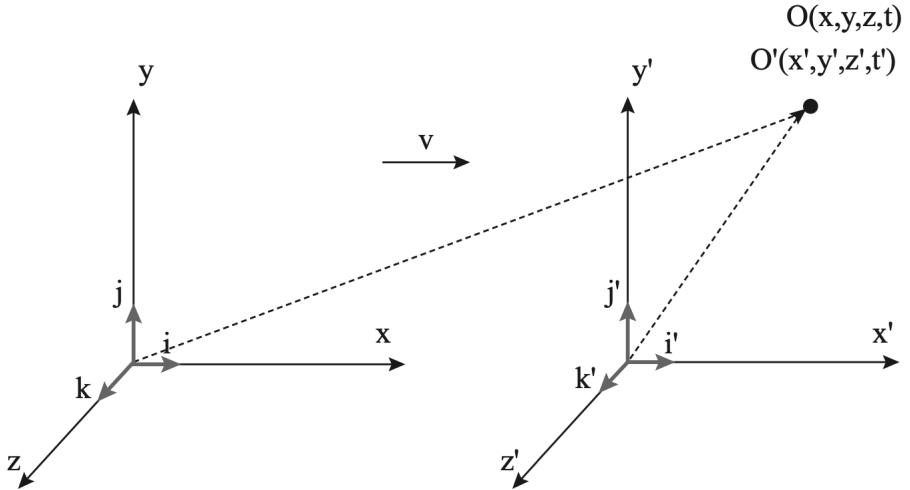


Figura 2.1: Un sistema di riferimento in moto con velocità v in direzione \hat{u}_x

Nel caso in cui la velocità del pion è prossima a quella della luce γ tenderà all'infinito e quindi le due particelle frutto del decadimento per l'osservatore in laboratorio sono collineari l'una rispetto all'altra.

Quindi le uniche due grandezze non determinabili a priori sono i due angoli di propagazione delle particelle; una volta determinati quelli tutte le altre variabili seguono di conseguenza.

2.1.2 Decadimenti a 3 corpi

La forma generale di un decadimento a tre corpi è $a \rightarrow b+c+d$. In questo caso le grandezze in gioco sono 9, di cui 5 non sono determinabili. Per questa ragione in questo caso non è possibile determinare univocamente l'energia delle particelle.

Consideriamo nel *rest frame* il caso del decadimento di un muone:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \quad (2.10)$$

soffermandoci in particolare sull'elettrone: è abbastanza facile determinare l'energia minima e massima dell'elettrone.

La sua energia minima sarà pari a 0 ed avviene nella configurazione cinematica in cui l'elettrone viene prodotto a riposo e il resto del quadrimomento sarà assorbito dai due neutrini.

L'energia massima sarà nella configurazione in cui l'elettrone viene emesso in una direzione e i due neutrini nella direzione opposta. Possiamo immaginarlo quindi come un decadimento a due corpi e dunque l'energia massima sarà data da:

$$E_{e^-}^{max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M} \quad (2.11)$$

e sarà circa pari a $M/2$.

2.1.3 Decadimenti in Meccanica Quantistica

In generale il fenomeno dei decadimenti è del tutto aleatorio e dunque studiabile solamente attraverso la meccanica quantistica. In fisica il decadimento di stati instabili in stati stabili è molto comune, basti pensare al caso dell'idrogeno; lo stato instabile 2p decade in circa 1.6 ns nello stato 1s, poiché rispetta tutte le regole di selezione ($\Delta\ell = \pm 1$, $\Delta s = 0$, $\Delta j = 0, \pm 1$).

La quantità caratteristica di un decadimento è l'*ampiezza di decadimento*. Viene indicata con la lettera Γ e rappresenta la probabilità per unità di tempo che una particella decada. La *vita media*, indicata con τ , è l'inverso di Γ .

La probabilità che avvenga un decadimento è data dalla Regola d'oro di Fermi.

$$\begin{aligned} R_{i \rightarrow f} &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle|^2 \rho(E) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle|^2 \int \prod \frac{V d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \delta \left(E_f + \sum_{k=1}^{N_f} E_k - E_i \right) \cdot \delta^3 \left(\vec{p}_f + \sum_{k=1}^{N_f} \vec{p}_k - \vec{p}_i \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove:

- E_f è l'energia della particella nello stato finale.
- V è il volume (arbitrario) su cui normalizziamo le funzioni d'onda.
- $\int \prod \frac{V d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}$ sono tutti i possibili stati finali.
- N_f è il numero di particelle finali.

Quindi posso dire che la funzione d'onda è legata al volume da una relazione del tipo $\psi \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$. L'elemento di matrice

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle f | \psi(t) \rangle = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle \quad (2.13)$$

quindi diventa $\frac{1}{V}$ che si semplifica con quello nella formula 2.12. Per comodità, quindi, scegliamo $V \rightarrow \infty$.

Il problema è che la 2.12 non comprende la relatività; io voglio cercare una forma della regola d'oro di Fermi che sia Lorentz-invariante.

Nell'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica la funzione d'onda è collegata alla probabilità di trovare la particella in una certa regione dello spazio. Vorrei che questa probabilità fosse un invariante relativistico, sul cui valore numerico concordano tutti gli osservatori inerziali.

$$\psi(\vec{x}, t) \longrightarrow P_V = \int_V |\psi|^2 d^3 \vec{x} \quad (2.14)$$

Se mi muovo, il volume non sarà più costante, infatti $d^3\vec{x} = dx dy dz \rightarrow d^3\vec{x}' = dx dy \gamma dz = \gamma d^3\vec{x}$ (se ho un boost di Lorentz verso z). Dalle equazioni 1.47 so che $\gamma \sim E$. Ma l'energia *NON* è un'invariante di Lorentz.

L'idea di Dirac è modificare la funzione d'onda dividendola per la radice di E:

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{E}}\psi \implies [\psi = \sqrt{E}\tilde{\psi}] \quad (2.15)$$

La probabilità sarà quindi:

$$P_{\gamma=1} = \int_V |\tilde{\psi}|^2 d^3\vec{x} \sim \int \frac{1}{E} |\psi|^2 d^3\vec{x} \sim E = P_{\gamma>1} \quad (2.16)$$

ovvero la nuova probabilità è un invariante di Lorentz.

Analizzo ora l'elemento di matrice $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{\text{NR}} = \langle f | \hat{H}_1(t) | i \rangle = \langle \psi_1, \dots, \psi_N | \hat{H}_1(t) | \psi_a^i \rangle$. Nel caso del decadimento ψ_a^i descrive la particella iniziale prima di decadere ($a \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + N$). Allora posso definire un nuovo elemento di matrice che abbia la proprietà di essere Lorentz-invariante¹.

$$\mathcal{M}^{\text{rel.}} = \sqrt{2E_a} \prod_{i=1}^{N_f} \sqrt{2E_i} \mathcal{M}^{\text{NR}} \quad (2.17)$$

L'ultima cosa che mi manca da analizzare è l'elemento nello spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z &\implies d^3\vec{p} = \gamma dp_x dp_y dp_z = \frac{E}{m} dp_x dp_y dp_z \sim E d^3\vec{p} \\ &\implies \frac{d^3\vec{p}}{h} \xrightarrow{2E\hbar(2\pi)} \frac{d^3\vec{p}}{2E_i 2\pi} \xrightarrow{\text{NU}} \frac{d^3\vec{p}}{2E_i 2\pi} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Quindi il nuovo elemento dello spazio delle fasi sarà diviso per un fattore correttivo che sarà dato dall'energia della particella.

Lo scopo è evitare che lo spazio delle fasi e la probabilità dipendano dai volumi. Combinando le equazioni 2.17 e 2.18 otteniamo la regola d'oro di fermi in forma relativistica.

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{\text{rel.}}|^2 (2\pi)^4 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3(2E_i)} \delta \left(E_a - \sum_{i=1}^{N_f} E_i \right) \delta^3 \left(\vec{p}_a - \sum_{i=1}^{N_f} \vec{p}_i \right) \quad (2.19)$$

oppure, equivalentemente,

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{\text{rel.}}|^2 (2\pi)^4 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3(2E_i)} \delta^4 \left(p_a^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right) \quad (2.20)$$

L'equazione 2.20 è Lorentz-invariante?

L'elemento di matrice e lo spazio delle fasi lo sono per quanto detto prima.

¹Il fattore 2 nella 2.17 è puramente un valore convenzionale

La

$$\delta^4 \left(p_a^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right) \quad (2.21)$$

si può far vedere che lo è; una spiegazione intuitiva è che la 2.21 corrisponde ad una legge di conservazione: il quadrimomento totale *dove* essere conservato nello stato finale di qualsiasi sistema di riferimento, qualunque cosa accada durante l'interazione.

$\frac{1}{2E_a}$ non è Lorentz-invariante, in quanto l'energia iniziale della particella non è un'invariante relativistica.

Malgrado tutti i nostri sforzi la formula 2.20 non è Lorentz-invariante

Il fatto che la regola d'oro non sia invariante è in realtà un bene poiché $\frac{1}{\Gamma} = \tau$ e il tempo non è un'invariante di Lorentz, quindi mi aspetto che la vita media calcolata in un qualsiasi sistema di riferimento sia maggiore della vita media misurata nel RF: $\tau = \gamma\tau_0$. Per convenzione, in fisica delle particelle, quando parliamo di *vita media* o *lifetime* (τ) ci riferiamo alla vita media calcolata nel Rest Frame della particella.

I primi decadimenti storicamente osservati (fine '800-inizio '900) erano i decadimenti nucleari, descritti da una legge di tipo esponenziale denominata *Formula empirica di Rutherford-Soddy*:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.22)$$

Oggi sappiamo che la 2.22 è una manifestazione di fenomeni quantistici.

Dimostrazione. Abbiamo tante particelle uguali tra loro che abbiano uguale ampiezza di decadimento. Supponiamo $\Gamma = \tau^{-1}$. Voglio trovare la probabilità di particelle che spariscano. Mi aspetto che sia $P(dt) = \Gamma dt$

$$\begin{aligned} N(t+dt) &< N(t) \\ N(t+dt) - N(t) &= -N(t)\Gamma dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

Questo vuol dire che posso definire $dN = -N(t)\Gamma dt$:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= -\Gamma dt \\ \implies N(t) &= N(t_0)e^{-\Gamma t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

□

Alcune particelle possono decadere in diversi modi; ad esempio il pione negativo può decadere in due modi principali:

- $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu \quad (99.98\%)$
- $\pi^- \rightarrow e^- + \nu_e \quad (0.01\%)$

di cui il primo è di gran lunga più probabile. Un altro esempio di decadimento è quello del kaone positivo, i cui branching ratio sono molto più equilibrati:

- $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (63.55%)
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ (20.66%)
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ (5.59%)
- $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ (5.07%)
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \mu^+ + \nu_\mu$ (3.35%)
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ (1.76%)

Dalla regola d'oro di Fermi (2.20) si vede che: $\Gamma = \Gamma_{a \rightarrow 1} + \Gamma_{a \rightarrow 2} + \dots + \Gamma_{a \rightarrow N}$. Introduciamo ora la *larghezza parziale* $\Gamma_{i \rightarrow f_j}$, quindi il rate totale sarà dato da $\Gamma = \sum_j \Gamma_{f_j}$.

Definizione 2.2. Il *branching ratio* indica la frazione di particelle che decadono seguendo un particolare canale di decadimento, rispetto al numero totale di particelle che decade in qualsiasi canale. Ovvero

$$BR = \frac{\Gamma_{i \rightarrow f_j}}{\Gamma} \quad (2.25)$$

Osservazione 2.1:

Non esistono vite medie parziali!

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i} \neq \sum_i \frac{1}{\Gamma_i} \quad (2.26)$$

In meccanica quantistica non relativistica non è previsto che le particelle possano sparire. Tuttavia si può modellizzare la distruzione - ovvero il decadimento - delle particelle introducendo un termine di smorzamento della funzione d'onda.

Definizione 2.3. Le *particelle instabili* sono tutte quelle soluzioni dell'equazione di Schrödinger tali che:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(t=0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.27)$$

Allora posso definire due classi di particelle:

- **Particella stabile:** $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$
- **Particella instabile:** $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{-\frac{t}{2\tau}}$

Le particelle *instabili* non sono più descritte da uno stato stazionario. Per il principio di indeterminazione di Heisenberg, nella versione energia-tempo ($\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$), se voglio aumentare la precisione sull'energia devo aumentare il tempo di osservazione (Δt). Quest'ultimo però - per la natura stessa dei decadimenti - non può essere più lungo di qualche

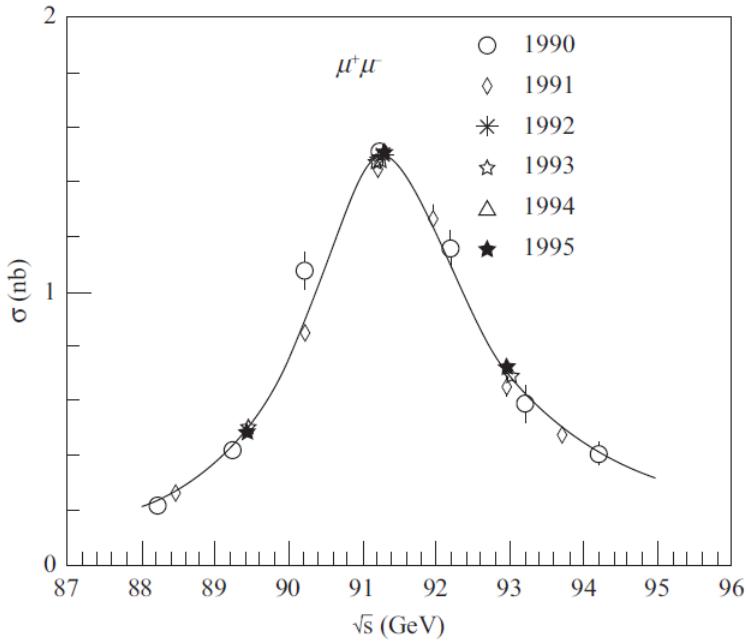


Figura 2.2: Energia e numero di particelle Z^0 per un acceleratore LEP

volta la vita media (τ). Come conseguenza di ciò, l'incertezza intrinseca sull'energia della particella non può essere più piccola di:

$$\Delta E \geq \frac{1}{2\tau} = \frac{\Gamma}{2} \quad (2.28)$$

Non posso misurare in modo arbitrariamente preciso l'energia di una particella instabile.

Si vuole ora vedere che cosa accade concretamente in un acceleratore quando vale la condizione 2.28.

Esempio 2.1

L'acceleratore LEP ad inizio anni '90 accelerava a circa 45 GeV elettroni e positroni, facendoli scontrare: in questo modo si creava un altissimo numero di Z^0 , la cui massa m_{Z^0} è altissima ed è circa pari a 91 GeV. Z^0 ha moltissimi modi per decadere: tra essi il più probabile ($BR \sim 70\%$) è il decadimento $Z^0 \rightarrow q^+ + q^-$.

Quello che fu osservato dai ricercatori, plottando in un grafico E e N_{Z^0} , è una distribuzione simile ad una gaussiana centrata intorno al valore M_{e^-} , ma con una larghezza $FWHM = \Gamma$ molto maggiore, pari a 2.50 GeV.

Ciò accade poiché Γ è quella della 2.19 e dunque inversa alla vita media τ : siccome la probabilità di decadimento è elevatissima, τ è piccolissima (nell'ordine di $3 \cdot 10^{25}$ s) e dunque Γ molto grande.

Ciò implica che, se anche andasse alla velocità della luce, Z^0 nella sua vita non percorrerebbe neppure la distanza di un atomo e sarebbe pressoché impossibile osservarla. Di conseguenza la sua incertezza, come si evince anche dal valore di Γ , sarà elevatissima. Paradossalmente quindi, se si fossero fatti collidere elettroni e positroni a 44 GeV, si sa-

rebbero potuti comunque osservare degli Z^0 , seppur in minore quantità. Questo concetto può essere riassunto nella seguente proposizione:

Proposizione 2.1

Il principio di indeterminazione di Heisenberg permette di osservare, alle volte, particelle anche al di sotto della loro soglia cinematica.

La curva riportata in figura 2.2 viene chiamata *curva di Breit-Wigner*. Adesso si vuole conoscerne la forma analitica. Esattamente come si può passare da un'espressione del tipo $\psi(x, t)$ ad una $f(\psi(p_x, t))$ per il fatto che x e p_x sono coniugati, si può scrivere il coniugato dell'energia: il tempo. Si passerà quindi da un'espressione di ψ in funzione di E ad una in funzione di t: lo strumento matematico che consente di fare questa operazione è la trasformata di Fourier.

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(x) e^{-iEt} e^{-t/2\tau} = \psi(x) \int_0^{+\infty} e^{-i\tilde{\epsilon}t} e^{-\Gamma/2t} e^{i\epsilon t} dt \propto \frac{i}{(E - \tilde{E}) + \frac{i\Gamma}{2}} \quad (2.29)$$

Quindi la probabilità di vedere una particella ad una certa energia E è:

$$P(E) = \frac{1}{(E - \tilde{E})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.30)$$

La 2.30 è anche la forma analitica della *distribuzione Breit-Wigner*.

Quindi da questa è possibile determinare \tilde{E} e di conseguenza la massa di Z^0 .

Osservazione 2.2:

Z^0 decade in alcuni modi difficili o addirittura impossibili da osservare: trascurarli comunque non è di alcun impedimento nella ricostruzione della distribuzione. Questo poiché, nonostante i diversi modi esistenti, Γ ha sempre lo stesso valore visto che τ è indipendente dal tipo di decadimento della particella.

2.2 Urti

In questa sezione si parlerà del fenomeno dello scattering. Il fine della trattazione, oltre a descrivere il fenomeno, è quello di capire se la Regola d'oro di Fermi è estendibile anche a casi diversi dai decadimenti.

Lo scattering è un fenomeno di diffusione in cui una particella, nel momento in cui giunge presso un cosiddetto *centro di diffusione*, che può essere ad esempio un potenziale o un corpo rigido, subisce una deviazione spaziale.

La quantità principale che descrive lo scattering è la *sezione d'urto*. Si può dare la definizione di *sezione d'urto differenziale* e di *sezione d'urto totale*. Di seguito verranno riportate entrambe.

Definizione 2.4. La *sezione d'urto differenziale* è il rapporto, per unità di tempo e di angolo solido Ω , tra numero di particelle scatterate e numero totale di particelle incidenti.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega} \frac{1}{F} \quad (2.31)$$

Nell'equazione soprastante, F viene chiamato **flusso** ed è definito come numero di particelle incidenti per unità di tempo e superficie.

La sezione d'urto differenziale ha come unità di misura m^2 .

Definizione 2.5. La *sezione d'urto totale* viene indicata con σ ed è definita come:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.32)$$

Si vuole ora capire il senso fisico della sezione d'urto. Per farlo, verrà riportato un esempio di fisica classica.

Esempio 2.2

Si consideri una particella che va verso un centro di diffusione con un *parametro d'impatto* b , che rappresenta la distanza tra la particella ed il centro stesso.

In fisica classica si tratta di un processo deterministico. Quando si conoscono la natura del centro diffusore e la direzione iniziale del moto, è possibile ricavare deterministicamente dove andrà la particella dopo lo scattering. In sostanza: si può ricavare l'angolo di diffusione θ in funzione di b .

Si immagini ora di considerare le particelle che si trovano nell'intorno di b , cioè nello spazio compreso tra b e $b + db$, e in un angolo iniziale compreso tra 0 e $0 + d\varphi$. Se si muove di poco b o θ la particella sarà scatterata in un angolo $\theta + d\varphi$, cioè in un angolo solido $\Omega + d\Omega$. Questo angolo solido è una parte della superficie ortogonale alla direzione del moto: esso è esattamente la sezione d'urto, o meglio la *sezione d'urto classica*, che è la rappresentazione geometrica della definizione precedente. Ecco il significato di sezione d'urto.

Si vede un esempio di calcolo di sezione d'urto.

Esempio 2.3

Si vuole calcolare σ per un PM con un certo parametro b che collide con una sfera indeformabile di raggio R e di massa molto maggiore di quella del punto. Sia z la direzione di propagazione del punto.

La particella, come messo in luce nella figura sopra, verrà "sparata via". Ciò che si vuole fare è determinare analiticamente la funzione che connette b e θ .

Dalla figura 2.3 è immediato ricavare che $\theta + 2\alpha = \pi$. Allora $b = R \sin \alpha = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}$.

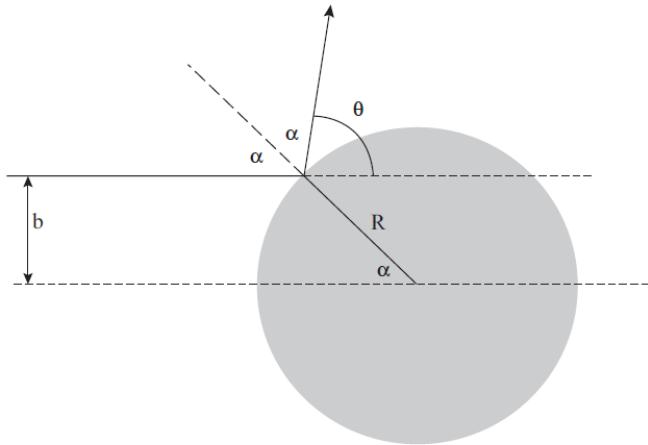


Figura 2.3: Scattering di un punto materiale su una sfera di raggio R

A questo punto è possibile calcolare $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e quindi σ . Si sa infatti che $d\sigma = bdbd\phi$ e che $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Si può quindi procedere:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|R \cos \frac{\theta}{2} d(R \cos \frac{\theta}{2})|}{|\sin \theta d\theta|} = \frac{R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{R^2}{4} \quad (2.33)$$

A questo punto è immediato trovare σ :

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} 4\pi = R^2 \pi \quad (2.34)$$

Osservazione 2.3:

La 2.34 mette in mostra come il valore della sezione d'urto sia costante. Inoltre suggerisce che, fintanto che $b < R$, la particella viene perturbata, mentre in caso contrario ciò non avviene.

Si vuole vedere la differenza tra sezione d'urto classica e quantistica. Si immagini di avere una particella, rappresentata da una funzione d'onda ψ con la sua incertezza ed un centro di diffusione. Tra θ e b non c'è più una relazione deterministica; ciò poiché, in primo luogo, b non può essere univocamente determinato in MQ e, in secondo luogo, poiché le probabilità di transizione non sono deterministiche.

Si immagini un caso molto semplice: se si spara una particella contro un cartoncino vi è una probabilità non nulla di vederla dall'altra parte del cartoncino. Il fenomeno è, dal punto di vista classico, una diffrazione: la cosa importante è che classicamente ciò vale solo per fenomeni ondulatori, in meccanica quantistica per qualsiasi punto materiale.

Come visto anche prima, l'unità di misura della sezione d'urto nel sistema internazionale è m^2 . In sistema naturale invece è eV^{-2} . Tuttavia quella più utilizzata in particelle è il *barn* e viene indicato con b (1 $b = 1 \text{ fm}^2$). 1 barn è una quantità enorme, solitamente si lavora con i suoi sottomultipli come il millibarn (mb), microbarn (μb), nanobarn (nb)...: si tenga a mente che $1 \text{ GeV}^{-2} \approx 0.39 \text{ mb}$.

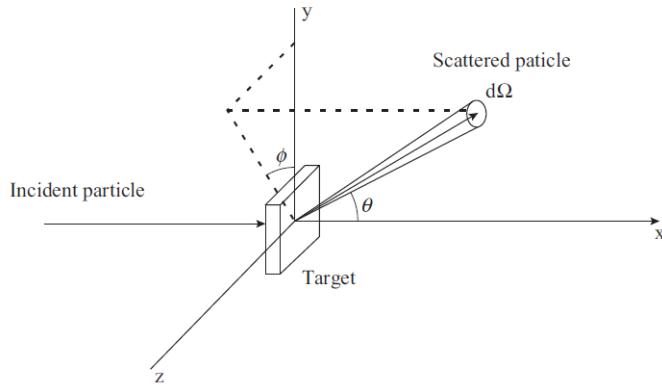


Figura 2.4: Scattering a targhetta fissa

In meccanica quantistica esistono due tipologie di scattering: *scattering a targhetta (bersaglio) fissa* e *scattering frontale*.

2.2.1 Scattering a targhetta fissa

Si immagini di avere un flusso di particelle che viene fatto collidere contro un bersaglio, quasi sempre allo stato solido. Ognuna delle particelle del flusso può interagire con uno dei tanti centri diffusori del bersaglio.

Ci si chiede il numero di centri diffusori effettivamente coinvolti nello scattering. Tutti quelli coinvolti saranno all'interno di una superficie che coincide con quella del fascio: essa viene chiamata *superficie efficace*. Essa è il minimo tra la superficie del bersaglio e quella del fascio di particelle.

Dalla 2.4 è immediato ricavare il numero di particelle coinvolte nel fenomeno per unità di tempo e comprese tra Ω e $d\Omega$.

$$\frac{dN}{d\Omega} = FA\tilde{N}dx \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.35)$$

Nella 2.35 A è la superficie efficace, \tilde{N} la densità di centri diffusori e dx lo spessore del bersaglio (supposto per comodità infinitesimo).

Si vuole vedere la ragione per cui è stata fatta questa scelta. Il numero di particelle che riesce ad attraversare un bersaglio di spessore $x + dx$ è dato da:

$$N(x + dx) = N(x) - \sigma N(x)\tilde{N}dx = N(x) + \frac{dN}{dx}dx \implies \frac{dN(x)}{N(x)} = -\sigma\tilde{N}dx \quad (2.36)$$

A questo punto si ricava facilmente lo spessore necessario a far passare un numero N arbitrario di particelle.

$$N(x) = N(x=0)e^{-\sigma\tilde{N}x} \quad (2.37)$$

Si possono infine definire il *coefficiente di attenuazione* $\mu \equiv \sigma\tilde{N}$ e la *lunghezza di attenuazione* $\lambda \equiv \mu^{-1}$. Quest'ultima rappresenta lo spessore della targhetta necessario

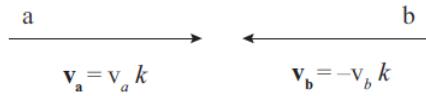


Figura 2.5: Scattering frontale

per schermare tutta la radiazione incidente; è immediato notare che risulta direttamente proporzionale al numero di centri diffusori e alla sezione d'urto totale.

2.2.2 Scattering frontale

Avviene, come suggerisce il nome, quando due particelle si scontrano uno contro l'altra. Come già visto in fisica classica, è quello che trasferisce la quantità massima di momento.

È quindi il caso più comodo da studiare sia per quanto concerne l'energia, sia per quanto concerne i conti veri e propri: il sistema di riferimento del CM coincide con quello del laboratorio.

La differenza principale rispetto al caso visto in precedenza è che prima si era certi che almeno una particella colpisce un centro diffusore, mentre in questo caso ciò non si verifica. Infatti se esse sono sufficientemente vicine tra loro interagiscono, in caso contrario no. La definizione di flusso data prima non va molto bene per questa descrizione, poiché non tiene conto dell'eventuale disallineamento delle particelle.

Va quindi definito un flusso generalizzato che indichi quante particelle per unità di tempo possono interagire con quelle che arrivano dall'altra parte: esso prende il nome di *luminosità*.

Definizione 2.6. *La luminosità, indicata con \mathcal{L} , è il rapporto tra il numero di particelle che interagiscono in unità di tempo, angolo solido e sezione d'urto differenziale. Quanto detto ora può essere espresso tramite:*

$$\frac{dN}{d\Omega} = \mathcal{L} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.38)$$

Osservazione 2.4:

La 2.38 è una definizione molto generale e rappresenta a tutti gli effetti il coefficiente di proporzionalità tra $\frac{dN}{d\Omega}$ (particelle scatterate) e $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (sezione d'urto). Nella vita reale la luminosità è una funzione dei parametri dell'acceleratore.

Si può anche definire la *luminosità istantanea*, indicandola con $\mathcal{L}(t)$. La relazione con la luminosità è:

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L}(t) dt \quad (2.39)$$

La luminosità ha le stesse dimensioni del flusso. In fisica delle particelle viene comodo esprimerla in $barn^{-1}$ poiché indica con maggior chiarezza quanta luminosità serve, in funzione di una sezione d'urto σ , per osservare almeno una particella: è quindi molto utile al fine della progettazione di un collider.

2.2.3 Scattering in meccanica quantistica

Ci si chiede ora quale sia la probabilità di interazione tra le particelle. Lo scattering può essere considerato una generalizzazione a due corpi del decadimento di una singola particella; in particolare, si può dire che sia una sorta di decadimento catalizzato. Quello che si vuole fare è quindi estendere la Regola d'oro di Fermi anche al caso dello scattering.

La prima cosa da fare è andare a ridefinire nel modo più generale possibile il concetto di flusso.

Definizione 2.7. *Il flusso è il numero di particelle che raggiungono il centro diffusore per unità di tempo ed energia.*

Questa definizione è vera fintanto che il centro diffusore è a riposo nel sistema di riferimento.

Si immagini ora che una particella a sia in moto verso un centro diffusore b , a sua volta in moto in direzione opposta ad a . Il flusso, che sarà maggiore rispetto al caso visto prima, dipende da dalla differenza delle velocità² $|v_a - v_b|$. Chiaramente se b si muove nella stessa direzione di a quanto detto ora non ha validità. Il flusso sarà quindi dato dall'espressione:

$$F = \frac{dN}{Adt} = \tilde{N}|v_a - v_b| \quad (2.40)$$

In questo caso si sta considerando un mezzo continuo, in cui il flusso dipende da $\rho(\vec{x})|v_a - v_b|$; nello specifico si è interessati al caso in cui una singola particella è racchiusa in un volume V arbitrario: $\rho(\vec{x})$ può quindi essere scritto come $\frac{1}{V}$. Si può ora andare a definire, sul modello della 2.12, il tasso di transizione:

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{|v_a - v_b|}{V} \sigma \quad (2.41)$$

A questo punto si può ricavare, sul modello della 2.20, la *Regola d'oro di Fermi relativistica per la sezione d'urto*:

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2E_a} \frac{1}{2E_b} \frac{1}{|v_a - v_b|} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right) \quad (2.42)$$

L'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2$ è un nuovo elemento di matrice relativistico che contiene l'elemento di matrice non relativistico dello scattering ed è dato dall'espressione:

$$|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 = (2E_a)(2E_b) \prod_{i=1}^{N_f} (2E_i) |\mathcal{M}^{NR}|^2 \quad (2.43)$$

²Questa differenza non è una semplice trasformazione di Galileo, ma una trasformazione di Lorentz delle velocità

Nonostante ciò la 2.42 risulta appunto essere non Lorentz-invariante: l'integrale lo è, ma il termine $|v_a - v_b|$ non lo è. Inoltre la sezione d'urto non può essere un'invariante di Lorentz, visto che rappresenta a tutti gli effetti una superficie.

Ciò che si vuole fare è quindi rendere Lorentz-invariante la 2.42. Per farlo ci si mette nell'insieme dei sistemi di riferimento inerziali per cui σ è invariante, cioè in tutti quelli *ortogonali* alla superficie stessa. Ai fini della trattazione viene introdotta una nuova grandezza.

Definizione 2.8. Il *Müller flux factor* è una grandezza data da:

$$F = 4E_a E_b |v_a - v_b| \quad (2.44)$$

Questa grandezza, che viene impropriamente chiamata flusso, è molto comoda perché è il denominatore che compare nella 2.42. Se ci si mette nella classe dei sistemi di riferimento enunciata in precedenza, la 2.44, anche detto può essere riscritta in modo invariante:

Teorema 2.1

$$F = 4\sqrt{(p_{a\mu} p_b^\mu)^2 - m_a^2 m_b^2} = 4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \quad (2.45)$$

per tutti gli osservatori che si muovono lungo la direzione del moto della particella a .

Per concludere la trattazione si può quindi andare a scrivere la *Sezione d'urto Lorentz-invariante*:

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{4[(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]} \int |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 \prod_{i=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a^\mu + p_b^\mu - \sum_{i=1}^{N_f} p_i^\mu \right) \quad (2.46)$$

Capitolo 3

Misure in fisica delle particelle

In questa sezione si concentra l'attenzione sulle metodologie utilizzate per osservare particelle. Il processo solitamente impiegato consiste nel caricare una particella, per poterla in seguito rivelare attraverso l'interazione elettromagnetica che avrà con altre particelle.

3.1 Particella carica pesante

La trattazione comincia descrivendo il caso di una particella carica pesante, la cui massa M è molto maggiore di quella dell'elettrone $M \gg m_e$. Si vuole studiarne il comportamento quando interagisce con un generico mezzo materiale. Quest'ultimo è da considerarsi come un aggregato di atomi, perciò costituito in gran parte da spazio vuoto. Quando la particella incontra un elettrone esso viene "sparato via" e questo processo le fa perdere energia. Un incontro col nucleo invece va a modificarne la traiettoria, senza tuttavia influenzare l'energia. Il fenomeno di nostro interesse è allora lo scattering con elettroni, poiché l'energia trasferita durante gli urti ci permette di rivelare le particelle incidenti.

Ci si chiede adesso quale sia la quantità di energia trasferita ad un singolo elettrone, estendendo poi il discorso ad un generico numero N . È importante specificare che la trattazione si basa su alcune approssimazioni, per certi versi un po' grossolane, fatte da Enrico Fermi:

1. $M \gg m_e$, da cui:
 - l'energia ceduta è molto minore di m_e , di conseguenza l'urto è *non relativistico*;
 - il moto della particella non viene perturbato dall'elettrone;
2. L'elettrone è in quiete prima dello scattering: $p_{in}^e = 0$.

Si consideri dunque una particella P di massa M e carica je , ($j \in \mathbb{Z}$), con un parametro d'impatto b , che si muove lungo la direzione x . Ad una generica distanza da un elettrone, interagisce con esso con una forza di tipo coulombiano. Siccome l'urto è non relativistico

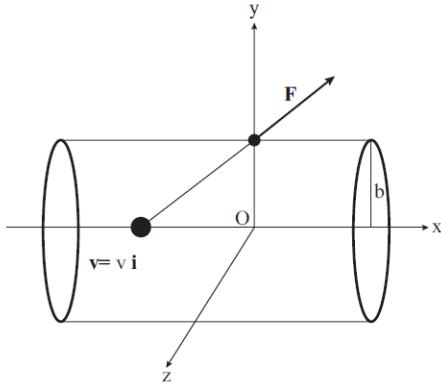


Figura 3.1: Particella carica pesante nell'approssimazione di Fermi

vale il teorema dell'impulso per l' e^- :

$$I = \Delta p = p_{fin} - p_{in} = p_{fin} \quad (3.1)$$

p_{in} è nullo siccome si è supposto che l'elettrone sia in quiete. L'impulso risultante dovrà necessariamente essere diretto nella direzione ortogonale al moto di P : $I = I_\perp$; si scriverà:

$$I = \int F dt = \int e E_\perp dt = e \int E_\perp dt = e \int E_\perp \frac{dt}{dx} dx = e \int E_\perp \frac{dx}{v} \simeq \frac{e}{v} \int E_\perp dx \quad (3.2)$$

Questo vale grazie alla prima approssimazione di Fermi, per cui la velocità rimane costante nel tempo. L'unica cosa che rimane da fare è calcolare l'integrale. Le assunzioni di Fermi, la seconda in particolare, collocano il problema nel campo dell'elettrostatica: ergo vale il teorema di Coulomb. Si può immaginare di rappresentare, nella figura 3.1, un cilindro di raggio b : in questo modo è possibile ricondursi ad un facile calcolo di flusso.

$$\Phi = \int 2\pi b E_\perp dx = \frac{je}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

$$\int E_\perp dx = \frac{je}{2\pi\epsilon_0 b} \implies I = \frac{je^2}{2\pi\epsilon_0 bv} = p_{fin} \quad (3.4)$$

L'elettrone quindi assorbe una quantità di energia ΔE data da:

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{|p_{fin}|^2}{2m_e} = \frac{j^2 e^4}{(2\pi\epsilon_0)^2 b^2 v^2 2m_e} = \frac{j^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} \quad (3.5)$$

Generalizziamo ora ad un numero arbitrario di elettroni. È plausibile supporre che il mezzo attraversato contenga un grande numero di elettroni, distribuiti uniformemente con densità N_e . All'interno del volume cilindrico infinitesimo $dV = d^3x = dx b db d\varphi$, l'energia

cinetica totale trasferita agli elettroni si scriverà:

$$-d^3E = \Delta E(b) N_e dV = \Delta E(b) N_e b db dx d\varphi \quad (3.6)$$

Osservazione 3.1:

Il segno meno attribuito a d^3E sta ad indicare che la particella *perde* la sua energia a causa dei fenomeni di scattering.

Si integra l'angolo su tutto il dominio $\varphi \in [0, 2\pi]$ e si sostituisce $\Delta E(b)$ con la sua forma funzionale:

$$-d^2E = \int_0^{2\pi} \Delta E(b) N_e b db dx d\varphi = \frac{j^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} N_e 2\pi b db dx \quad (3.7)$$

Semplificando:

$$-d^2E = \frac{j^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \frac{db}{b} dx \quad (3.8)$$

Infine, spostando dx a sinistra e integrando in $db \in [b_{min}, b_{max}]$, si ottiene l'energia persa per unità di lunghezza:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{j^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \log\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \quad (3.9)$$

La 3.9 viene chiamata *Formula classica di Bohr*. In quest'ultima, b_{min} e b_{max} sono parametri da determinare.

Osservazione 3.2:

Prima di procedere alla derivazione di b_{min} e b_{max} si ritiene importante fare alcune precisazioni di natura concettuale sulla struttura della formula classica di Bohr per la perdita di energia.

- È inversamente proporzionale al quadrato della velocità

Intuitivamente, più veloce si muove la particella nel mezzo, meno tempo avrà a disposizione per interagire con gli elettroni. L'impulso è una forza mediata nel tempo: più rapido è lo scattering, minore è l'energia trasferita.

- È direttamente proporzionale al quadrato della carica

Più è carica la particella, maggiori saranno i fenomeni di diffusione a parità di distanza dagli elettroni. Quest'ultimo parametro è rappresentato dalla densità elettronica N_e .

Una prima stima della densità elettronica si ottiene conoscendo densità $\rho(x)$ e numero atomico del mezzo Z :

$$N_e \simeq Z\rho(x) \text{ più precisamente: } N_e \simeq \frac{Z\rho(x)}{A} N_A \quad (3.10)$$

Dove N_A è il numero di Avogadro e A è il numero di massa del mezzo; generalmente:

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

Un modo più intelligente per esprimere la perdita di energia è normalizzare la formula alla densità del mezzo.

Definizione 3.1. *Se chiamiamo **mass thickness** la seguente quantità:*

$$\tilde{x} = \rho x \quad (3.12)$$

Possiamo definire la perdita di energia per mass thickness, che è circa uguale per tutti i materiali:

$$\frac{dE}{d\tilde{x}} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \quad \text{in S.I.} \quad \left[\frac{\text{MeV}}{\text{g}\cdot\text{cm}^2} \right] \quad (3.13)$$

3.1.1 Derivazione di b_{min} e b_{max}

3.1.1.1 b_{min}

Dalla forma funzionale della 3.5:

$$\Delta E(b) = \frac{j^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$$

è immediato notare che:

$$\Delta E^{max} = \Delta E(b_{min}) \wedge \Delta E^{min} = \Delta E(b_{max})$$

Sicuramente esiste un limite massimo di energia trasferibile, legato alla conservazione del quadrimomento, che si ottiene in situazioni di scontro frontale. Per questo $b_{min} \neq 0$ deve possedere un limite inferiore strettamente maggiore di zero. Il momento finale dell'elettrone può essere, al più, il doppio di quello di partenza. Stessa cosa vale per l'energia:

$$\Delta E^{max} = \Delta E(b_{min}) = 2m_e \gamma^2 v^2 \quad (3.14)$$

Naturalmente, combinando la 3.5 con la 3.14 si ottiene:

$$\Delta E(b_{min}) = \Delta E^{max} \implies 2\gamma^2 m v^2 = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 b_{min}^2 v^2 m} \quad (3.15)$$

da cui:

$$b_{min} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 v^2 m \gamma} \quad (3.16)$$

3.1.1.2 b_{max}

Meno banale è la derivazione di b_{max} . Occorre innanzitutto introdurre il concetto semi-classico di *frequenza orbitale media* $\bar{\nu}$:

Definizione 3.2. *Nel modello atomico di Bohr, $\bar{\nu}$ è la frequenza dell'orbita circolare degli elettroni, mediata per ogni stato legato.*

Quindi si propone un ragionamento intuitivo: maggiore è la distanza b tra particella e elettrone, maggiore sarà il tempo d'interazione coulombiana T . Quando T è maggiore o uguale al periodo dell'orbita, la forza elettrostatica media tende a zero, perciò la quantità d'energia trasferita è trascurabile. In altri termini, il b massimo corrisponde ad un'energia minima nulla $\Delta E^{min} = 0$ e si ottiene quando T e $\bar{\nu}^{-1}$ sono simili. Il tipico tempo d'interazione è $T \approx b/\gamma v$ nel sistema di riferimento del laboratorio, di conseguenza:

$$b_{max} \approx T\gamma v, T \approx \bar{\nu} \implies b_{max} \approx \frac{\gamma v}{\bar{\nu}} \quad (3.17)$$

In definitiva, sostituendo i valori stimati alle 3.16 e 3.17 nella 3.5 ricavata nella sezione precedente, si ottiene la forma operativa della *formula classica di Bohr*

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon^2 m v^2} \ln\left(\frac{4\pi\epsilon_0\gamma^2 v^3 m}{Ze^2 \langle \nu \rangle}\right) \quad (3.18)$$

3.1.2 Formula di Bethe

Si propone, a partire dalle stime di b_{min} e b_{max} , una formuletta empirica per la perdita di energia in unità di lunghezza, applicabile ad una particella carica pesante.

$$\alpha = 0.15 \frac{\text{MeV}}{\text{g cm}^2} = \frac{dE}{dx} = \frac{e^4 N_e}{4\pi\epsilon^2 m c^4} \quad (3.19)$$

Dove non s'è fatto altro che sostituire i termini noti, nel coefficiente già presente nella formula esplicita, con i loro valori numerici. Si noti che N_e è stato rimpiazzato con la relazione 3.10.

Osservazione 3.3:

La 3.18 ha il grande vantaggio di essere ricavabile dalla meccanica semi-classica con pochi accorgimenti. Tuttavia è troppo grossolana ed imprecisa, per cui ha poche applicazioni pratiche. Per questo motivo, si rende necessario migliorarla. Questo è stato fatto da Hans Bethe e richiede conoscenze di elettrodinamica quantistica. Non sarà possibile ricavarla rigorosamente, perciò ci si limita a studiarne in modo qualitativo il funzionamento.

Si presenta di seguito la *formula di Bethe*, con un piccolo accorgimento di pura notazione. D'ora in poi: $W_{max} = \Delta E^{max} = \Delta E(b_{min}) \approx 2\gamma^2 mv^2$, per $M \gg m_e$.

$$\frac{dE}{dx} = \alpha \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{2m\gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta(\gamma) - \frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z}\right) \right] \quad (3.20)$$

Definizione 3.3. Il termine I che compare - qui sopra - nella 3.20 è l'energia media di ionizzazione della specie chimica del mezzo; nel modello semi-classico di Bohr è circa la costante di Planck moltiplicata per la frequenza dell'orbita $\sim h\nu$

È evidente che non siamo distanti da quello che Bohr aveva previsto: sono i termini additivi il vero succo delle correzioni di Bethe. Ad ognuno di essi è associato un nome; obiettivo attuale della trattazione è studiarne il significato fisico, nonché il loro impatto sulla quantità di energia trasferita.

- $\delta(\gamma)$ density correction
- $\frac{2C(\beta\gamma, I)}{Z}$ shell correction
- $2\beta^2$ relativistic rise (crescita relativistica)

Per studiare qualitativamente le correzioni, è utile graficare il trasferimento di energia dE/dx in funzione della velocità, normalizzando per la densità.

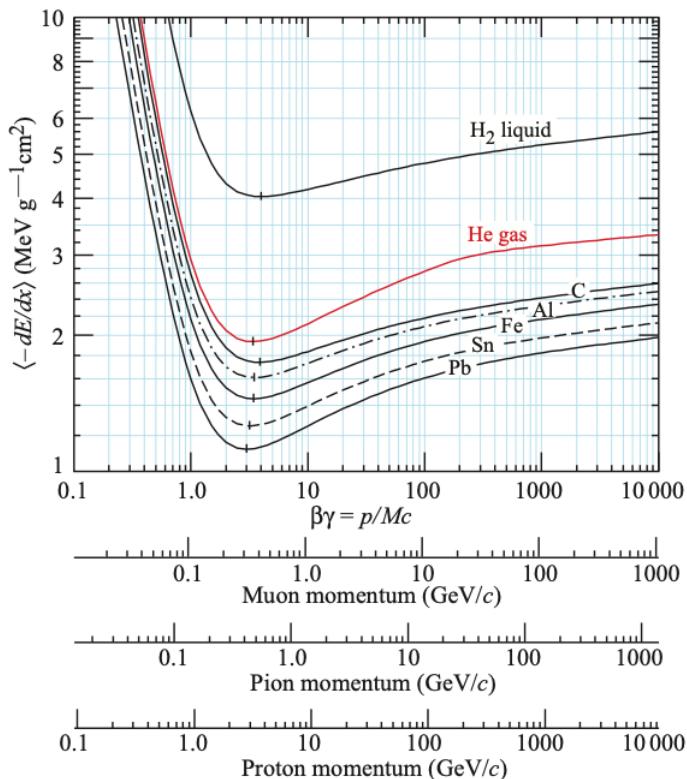


Figura 3.2: Perdita di energia in vari materiali data dalla formula 3.20. Per velocità molto piccole si osserva una grande perdita di E (parabolica $\sim \frac{1}{\beta^2}$); successivamente si raggiunge un minimo, seguito da una lieve ricrescita, che si esaurisce lentamente e termina in una linea orizzontale costante. La particella non accresce mai la sua energia, può soltanto dissiparla, pertanto la funzione esiste solamente nella semiretta positiva dell'asse x . Il limite superiore del dominio è la velocità della luce c , perciò quando β raggiunge 1, la curva s'interrompe. Sull'asse delle ascisse il termine $\beta\gamma$ è convertito nel momento di diverse particelle ben descritte dalla formula di Bethe.

Riassumendo i concetti già espressi in precedenza, alla luce di questo grafico: più lenta va una particella, maggiore è l'energia che cede; intuitivamente, perché interagisce per più tempo con gli elettroni. Restano da interpretare i termini additivi.

3.1.2.1 Correzioni di Bethe

Una cosa sorprendente è che - seppur di poco -, superato il minimo, l'energia ricomincia a salire.

Quantitativamente: il minimo, per la stragrande maggioranza dei materiali, è attorno agli 1 o 2 MeV/(g·cm²) e quell'effetto di risalita è del 20/30%, collocando la linea orizzontale attorno ai 2.5/3 MeV.

Questo comportamento prende il nome di *relativistic rise* ed è un fenomeno prettamente relativistico. Cerchiamo di spiegarlo qualitativamente.

Si ha una particella in movimento a velocità non relativistica e sottoposta a campo elettrico E “verticale”, ortogonale alla direzione del moto. E non è un invariante di Lorentz rispetto alla direzione del moto. Infatti, campi elettrici e campi magnetici fanno eccezione alla regola di invarianza nelle direzioni ortogonaliali. Difatti: subiscono una dilatazione. Campi più intensi determinano interazioni più forti, ergo più scambio di energia.

Osservazione 3.4:

Il fatto che E e B si dilatino in direzione ortogonale al moto è un'ottima spiegazione del perché le onde E.M. sono trasverse; E e B sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione.

Così, a velocità alte ($\beta \rightarrow 1$), il termine di relativistic rise farebbe tendere l'equazione all'infinito. È qui che entra in gioco il termine correttivo $\delta(\gamma)$: al crescere di gamma, stabilizza la crescita e va ad appianare la curva. Ma qual è il suo significato fisico?

Nel sistema di riferimento della particella S_P , gli elettroni sono in moto. Per questo motivo, quando $\gamma \rightarrow \infty$, generano campi elettrici intensissimi, che finiscono per polarizzare il mezzo in cui si muove P . È proprio questa polarizzazione, descritta dal termine di *density correction*, a schermare la relativistic rise.

Si vede, infine, l'ultimo termine correttivo: la *shell correction* $\frac{2C}{Z}$. In breve: descrive cosa succede alla funzione per $\beta \rightarrow 0$. Chiaramente, il limite della formula di Bohr 3.18 in 0 è infinito, ma non si può avere perdita infinita a velocità nulla. Se possiede $v \rightarrow 0$, la particella si è fermata nel mezzo, in qualche modo dovrà aver perso la capacità di trasferire ulteriore energia. Si pensi ad esempio ad un protone: se si trovasse fermo nel mezzo, strapperebbe un elettrone all'atomo più vicino per dare luogo ad uno stato più stabile e neutro, l'atomo di H; di conseguenza, l'energia trasferita crollerà bruscamente a zero. Naturalmente, in caso di particella carica negativamente, succederebbe il contrario: stavolta sarebbe lei ad essere catturata da un nucleo. Invariabilmente, in entrambi i casi, d'improvviso la particella diventa uno stato neutro e perde la capacità di interagire.

Questa, per tirare le somme, è l'interpretazione che si dà al termine di shell correction, che diventa dominante a velocità molto piccole.

3.1.3 Picco di Bragg

Una delle cose più affascinanti della *formula di Bethe* 3.20 è stata intuita da Bragg e riguarda il “tempismo” del trasferimento d’energia. Riassumendo quanto detto al paragrafo precedente: se una particella è veloce, perde un’energia compresa tra il minimo e la rise (tra 1 e 2.5 MeV/(g·cm²); se ci si pone esattamente al minimo ($\sim 0.94c$), P viene detta **MIP**, acronimo di *minimum ionizing particle*. È quando la particella rallenta ulteriormente che la perdita cresce di molto. Realisticamente ci si aspetta che, colpendo ripetutamente un bersaglio con particelle accelerate alla stessa energia iniziale E^{ini} , queste si arrestino - con buona probabilità - dopo la stessa distanza attraversata dx . Approssimando molto, si immagini che queste - inizialmente - si muovano di moto rettilineo uniforme, quindi si fermino bruscamente dopo uno spostamento R nel mezzo. Seguendo quest’idea, il grafico della perdita di energia avrebbe un andamento del tipo:

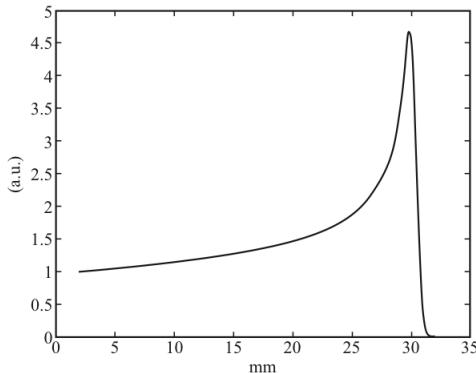


Figura 3.3: Perdita d’energia in funzione della distanza percorsa

Si osserva una perdita costante nella prima parte della funzione $x < R$, quindi un picco a distanza $x \sim R$, seguito a stretto giro da una repentina discesa a zero.

Definizione 3.4. *Il picco di energia trasferita è detto **picco di Bragg**. È stato quest’ultimo a notare che la perdita di energia è, in un certo senso, **localizzata**.*

La maggior parte delle particelle, mantenendo le medesime condizioni iniziali, arresta il proprio moto dopo un passo medio. Ciò ha numerose applicazioni, specialmente in campo medico, come il trattamento delle neoplasie. Nell’adroterapia - ad esempio - è importante che l’energia sia scaricata in un punto specifico del corpo, per non danneggiare i tessuti integri attraversati.

Definizione 3.5. *Lo spostamento ‘medio’ $dx = R$ compiuto da una particella in un mezzo è detto **range**.*

Si propone un metodo per stimare il range di una particella pesante:

$$R = \int_{E_{in}^{kin}}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_{in}^{kin}}^0 \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dx \quad (3.21)$$

Operativamente, inserendo l'inverso della formula di Bethe in nell'integrale della 3.21, si ottiene la distanza percorsa da P . Grazie a ciò, si può stimare l'energia cinetica iniziale che permette di ottenere un range specifico.

Tutto il discorso fatto finora era legato alle particelle cariche pesanti. Ora andiamo a vedere cosa succede alle particelle cariche leggere, cioè con masse simili a quella dell'elettrone.

3.2 Particelle cariche leggere

Si consideri ora una particella *leggera* L , con massa $M \simeq m_e$. La seconda approssimazione di Fermi non è più accettabile: nel singolo urto con e^- il moto di P verrà modificato significativamente. Ci aspettiamo perciò che il range per una particella leggera sia molto minore. Uno dei fattori che dovremo considerare è il *frenamento radiativo*: una carica in moto emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, in quantità proporzionale alla sua accelerazione. L'intensità di questo fenomeno è inversamente proporzionale al quadrato della massa di conseguenza, molto più presente in particelle leggere.

Esempio 3.1

Chiamiamo P l'effetto di frenamento radiativo, $P \propto \frac{1}{m^2} a$ e confrontiamo - a parità di accelerazione - la sua intensità per elettroni contro quella per protoni:

$$\frac{P_e}{P_p} \sim \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^2 \simeq 10^{-6} \quad (3.22)$$

questo significa che P è un milione di volte più intenso per gli elettroni. Insomma: nello studio di scattering di particelle leggere è un fenomeno caratteristico e dominante; risulta invece trascurabile per quelle pesanti, pure quando queste sono accelerate a energie molto grandi.

3.2.1 Studio qualitativo della perdita di energia per radiazione

Innanzitutto, s'introduce una grandezza propedeutica alla trattazione.

Definizione 3.6. *L'energia critica* è l'energia cinetica iniziale E_C per la quale l'energia persa descritta dalla formula di Bethe diventa circa uguale alla perdita di energia per radiazione:

$$E_{crit} = E \text{ t.c. } \left. \frac{dE}{dx} \right|_{Bethe} = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{rad} = P \quad (3.23)$$

Osservazione 3.5:

L'energia trasferita descritta dalla formula di Bethe è talvolta detta '*perdita di energia per ionizzazione*'. Questo perché una porzione dell'energia persa da P durante la penetrazione libera (transizione al continuo) gli elettroni e quindi ionizza gli atomi. Non è propriamente la stessa cosa, perché lo scattering potrebbe anche causare un salto a un livello discreto più energetico, con conseguente dissecitamento.

Si presenta una formula empirica per il calcolo dell'energia critica, applicabile ai materiali a stato solido:

$$E_c \simeq 610 \frac{\text{MeV}}{Z + 1.2} \quad (3.24)$$

- Piombo: $E_c = 9.51 \text{ MeV}$
- Aria: $E_c = 102 \text{ MeV}$
- Acqua: $E_c = 22.4 \text{ MeV}$

Naturalmente, maggiore è la densità del mezzo, maggiori sono gli urti e quindi l'accelerazione a cui è sottoposta la particella.

La perdita di energia in un mezzo di una particella leggera con energia iniziale $E \gg E_C$ è:

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}} \quad (3.25)$$

Dove X_0 è la *lunghezza di radiazione* e, operativamente:

$$X_0 \simeq \frac{1}{\rho} \frac{A \cdot 716 \text{ g/cm}^2}{Z(Z+1) \ln \frac{287}{\sqrt{z}}} \sim \frac{1}{\rho} \frac{1}{Z(Z+1)} \quad (3.26)$$

con A numero atomico del mezzo.

Osservazione 3.6:

Dopo 1 cm si perdono circa 2/3 dell'energia.

Grazie all'impiego delle formule trattate in questa sezione, si è resa possibile la scoperta dell'antimateria, oggetto del prossimo capitolo.

3.3 Scoperta dell'antimateria

La prima evidenza dell'esistenza dell'antimateria si ebbe grazie a Carl David Anderson. L'*esperimento di Anderson* venne svolto nel 1932 utilizzando una camera a nebbia, strumento inventato agli inizi del '900 per rivelare particelle. È sostanzialmente costituito da una camera immersa in un campo magnetico, al cui interno l'umidità è prossima al 100%. Al suo centro è posto uno strato di 6 mm di piombo. Il tutto, collegato ad un pistone in grado di alzarsi e abbassarsi: il suo innalzamento causa un'espansione adiabatica e

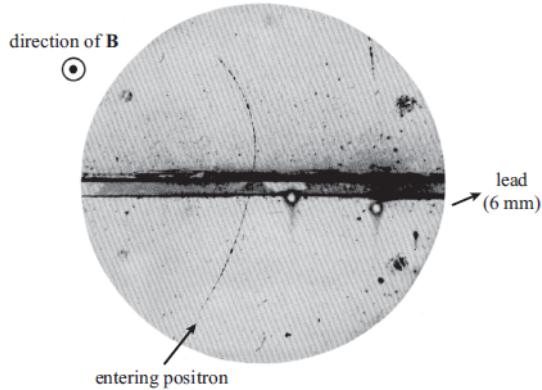


Figura 3.4: Esperimento di Anderson

un conseguente innalzamento della temperatura dell'aria interna, con la comparsa di una nebbiolina.

Ciò che fu osservato verso fine '800 è che se c'è una regione dello spazio in cui vi sono delle cariche elettriche, in questo caso ioni ed elettroni, le goccioline d'acqua tendono a condensare prima in questa zona. Si tratta, in buona sostanza, dello stesso meccanismo alla base della formazione delle nuvole.

Ciò che fece Anderson fu sollevare il pistone, scattare foto alla camera, quindi riabbassarlo, ripetendo il processo centinaia di volte. Vide una particella che entrava dal basso, attraversava il piombo e usciva incurvata fermandosi dopo circa 50 mm. Osservò circa 4/5 particelle con questo aspetto.

La cosa interessante dell'esperimento è che è possibile stabilire il momento della particella senza saperne la massa. Da subito fu chiaro, vista la sua traiettoria sotto l'effetto del campo magnetico, che fosse carica positivamente: si pensò allora che potesse essere un protone, quindi fu cercato un modo intelligente per ricavare il momento. Venne utilizzata una formula famosa, che va a legare il momento con il raggio di curvatura sotto campo magnetico:

$$p(\text{GeV}) = 0.3 \vec{B}(\text{T}) R(\text{m}) \quad (3.27)$$

Si sottolinea che il coefficiente 0.3 è un numero quasi del tutto esatto; per la precisione: è l'inverso della velocità della luce. Si vuole ora dimostrare la 3.27 nel caso relativistico.

Dimostrazione. Si parte dal concetto di forza di Lorentz: siccome \vec{E} in questo caso è pari a 0, essa risulterà:

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.28)$$

Questa formula, come le altre dell'elettrodinamica classica, è già relativistica. Tuttavia il momento non è più quello classico, ma si scrive come:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \implies \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) \quad (3.29)$$

Si suppone che la particella sia ortogonale al campo magnetico per semplificare il conto. \vec{B} agisce modificandone solamente la traiettoria: dal momento che non ne altera la velocità, è possibile spostare la gamma al di fuori dalla derivata $\dot{\vec{p}} = \gamma m \dot{\vec{v}}$. Di conseguenza si può scrivere:

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d|\vec{p}|}{dt} = q|\vec{v}||\vec{B}| \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.30)$$

Si può scrivere meglio quanto appena trovato introducendo la *frequenza di precessione*:

$$\vec{\omega}_B = \frac{qB}{\gamma m} \frac{c^2}{c^2} = \frac{qc^2 B}{E} \quad (3.31)$$

Ciò comporta che è possibile riscrivere la derivata della velocità nel seguente modo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\omega}_B \quad (3.32)$$

Questa non è altro che l'equazione di un moto circolare uniforme. Andando a risolvere l'equazione si trova:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \sin \omega_b t \\ v_y = v_{y0} \cos \omega_b t \end{cases} \quad (3.33)$$

Per calcolare il raggio di curvatura si ricorda la relazione che esso ha con la velocità angolare:

$$\omega_b = \frac{|\vec{v}|}{R} = \frac{1}{|\vec{p}|} \frac{d|\vec{p}|}{dt} = \frac{1}{|\vec{p}|} qvB \implies |\vec{p}| = qR|\vec{B}| \quad (3.34)$$

La formula appena ricavata è compatibile con la relatività ristretta e non tira in ballo la massa della particella, nonché la natura della particella stessa.

In ultimo atto, si va a dimostrare che la formula appena ricavata è equivalente a 3.27. L'energia nel sistema internazionale si misura in Joule, in quello naturale in eV: $E(SI) = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 \cdot E(\text{GeV})$. La quantità di moto, analogamente, si scrive:

$$\begin{aligned} p(SI) &= \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} p\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right) = qBR \\ &\implies \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} p\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right) = 1.6 \cdot 10^{-19} B(\text{T})R(\text{m}) \\ &\implies p\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right) = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} B(\text{T})R(\text{m}) = 0.3B(\text{T})R(\text{m}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

□

Guardando le fotografie scattate e applicando il metodo visto ora, Anderson si accorse che la particella aveva momento iniziale, prima di entrare nel piombo, pari a 63 MeV/c e momento finale pari a 23 MeV/c. Siccome non vi era dubbio che la particella fosse positiva e all'epoca si conosceva solo il protone, andò a calcolare la perdita di energia del protone per vedere se il risultato fosse compatibile.

La massa del protone m_p è circa 938 MeV e la sua energia iniziale è approssimabile alla massa stessa: β sarà circa pari a $0.07c$. Anderson, sul modello della 3.20, applicò la formula di Bethe: ciò che fu evidente è che, se la particella fosse davvero stata un protone, avrebbe fatto molta fatica ad oltrepassare il piombo e sicuramente non sarebbe riuscita a percorrere ulteriori 50 mm.

Tuttavia, lo scienziato si accorse che le cose cambiavano assumendo che la massa m della particella fosse pari a m_e . In questo caso $E_{\text{in}} \approx 63$ MeV e $E_{\text{fin}} \approx 23$ MeV. Stavolta, la dispersione energetica dell'elettrone non è ricavabile dalla formula di Bethe, ma va calcolata con la formula di radiazione 3.25.

$$E = E_0 e^{-\frac{6\text{mm}}{5\text{mm}}} \approx \frac{E_0}{3} \quad (3.36)$$

Risultato decisamente compatibile con quanto osservato: $23 \text{ MeV} \approx \frac{63 \text{ MeV}}{3}$. Inoltre, se si calcola il range (atteso) percorso dalla particella, questo è proprio intorno ai 50 mm. Anderson allora postulò l'esistenza di una nuova particella, chiamata *positrone*. Essa viene indicata con e^+ .

Curiosamente, il vero scopritore del positrone fu Giuseppe Occhialini: qualche anno prima fece lo stesso esperimento mettendo sopra e sotto la camera a nebbia dei contatori Geiger, sollevando il pistone solo quando scattavano i contatori. In questo modo raccolse decine e decine di foto di queste particelle, ma non credette che quanto da lui osservato fosse possibile, cercando un errore nel suo esperimento. Anderson fu il primo a credere alla veridicità del fenomeno.

La cosa importante dell'esistenza del positrone, ovvero che possa esistere una "particella gemella" del protone con carica opposta, è che lo stesso ragionamento si può estendere a tutte le particelle cariche conosciute. Dal 1932 al 1954 fu elaborata una teoria per cui è possibile definire, in meccanica quantistica, un operatore chiamato *C-parità* che, se applicato ad una funzione d'onda con determinato momento, spin, massa e carica, restituisce la stessa con carica opposta.

Definizione 3.7. Data una funzione d'onda $|\psi\rangle = |\vec{p}, \vec{s}, m, q\rangle \in \mathcal{H}$ l'operatore $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, detto di *C-parità*, vi agisce invertendo il segno della carica q .

$$C|\psi\rangle = C|\vec{p}, \vec{s}, m, q\rangle = C|\vec{p}, \vec{s}, m, -q\rangle \quad (3.37)$$

Ciò che successivamente si cercò di fare fu capire come mai alcune particelle neutre fossero coincidenti con le corrispondenti antiparticelle, mentre altre no: ad esempio il neutrone è distinto dall'antineutrone, mentre il fotone coincide con l'antifotone. Questo mistero venne risolto negli anni '60, si vedrà come più avanti nel corso. L'unica particella di cui ancora non si sa nulla è il neutrino. Nel 1954 venne elaborato un teorema, da Pauli e Lüders, che tenta di dare una spiegazione profonda all'esistenza delle antiparticelle, questo è il *Teorema CPT*.

Teorema 3.1 (CPT)

Si consideri una qualsiasi teoria compatibile con gli assiomi della relatività speciale e della meccanica quantistica. Se questa possiede una hamiltoniana autoaggiunta e locale (non ammette azione a distanza: vale per potenziali definiti in intorni del punto materiale), allora gode della seguente proprietà: data una funzione d'onda $\psi(x) = |\psi\rangle$ che descrive il sistema fisico, allora $CPT|\psi\rangle$ è anch'essa una soluzione dell'equazione del moto, con le stesse probabilità di transizione.

$$||\psi\rangle|^2 = |CPT|\psi\rangle|^2 \quad (3.38)$$

In altre parole, il sistema deve essere invariante per la simmetria di CPT, dove CPT è la combinazione degli operatori *c-parità*, *parità* e *t-parità*; quest'ultimo si comporta analogamente a *C*, cambiando il segno al tempo invece che alla carica.

Il teorema non verrà dimostrato poiché è estremamente difficile farlo.

La dimostrazione dell'esistenza delle antiparticelle apre ad una nuova vastissima gamma di decadimenti fino ad ora non trattati. Uno particolarmente ovvio è il decadimento $\gamma \rightarrow e^- + e^+$. Tuttavia, nel vuoto, questa cosa non può accadere: per dimostrarlo ci si mette nel sistema di riferimento del laboratorio.

Esempio 3.2

In questo sistema di riferimento, supponendo z direzione di propagazione, si ha che i quadrimomenti delle particelle considerate sono:

- Fotone: $p_\gamma^\mu = (p, 0, 0, p)$
- Elettrone: $p_{e^-}^\mu = (\sqrt{m^2 + p_{e^-}^2}, p_{xe^-}, p_{ye^-}, p_{ze^-}) = (\sqrt{m^2 + p_{e^-}^2}, p_{xe^-}, 0, p_{ze^-})$
- Positrone: $p_{e^+}^\mu = (\sqrt{m^2 + p_{e^+}^2}, p_{xe^+}, 0, p_{ze^+})$

. Se si applica la conservazione del quadrimomento si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = p_{xe^-} + p_{xe^+} \longrightarrow p_{xe^-} = -p_{xe^+} \\ p = p_{ze^-} + p_{ze^+} \longrightarrow p_{ze^-} = -p_{ze^+} \end{cases} \quad (3.39)$$

Se si considera però anche la conservazione dell'energia, si ha che:

$$p = p_{ze^-} + p_{ze^+} = \sqrt{m^2 + p_{xe^-}^2 + p_{ze^-}^2} + \sqrt{m^2 + p_{xe^+}^2 + p_{ze^+}^2} > p_{ze^-} + p_{ze^+} \quad (3.40)$$

Quanto appena ottenuto è ovviamente assurdo: è quindi impossibile soddisfare la conservazione del quadrimomento nel vuoto se il fotone spontaneamente si trasforma in una coppia elettrone-positrone.

Nell'universo questo ha un impatto considerevole: se così non fosse, la luce arriverebbe sotto forma di particelle cariche che, come visto, perdono energia per radiazione e difficilmente raggiungerebbero la Terra. Per altro, se quanto appena dimostrato fosse in realtà possibile, ci si potrebbe mettere nel RF della coppia: in esso un osservatore vedrebbe il centro di massa fermo e, per la conservazione del momento, vedrebbe allo stesso modo anche il fotone. Questo viola i principi della relatività ristretta, che vuole che il fotone si muova con velocità c .

3.4 Interazione dei fotoni con la materia

In questa sezione verrà trattata l'interazione dei fotoni con la materia, in particolare ad alte energie. Per capirci: si considereranno fotoni dai 10 keV fino un centinaio di GeV. Per energie comprese tra i 10 KeV e qualche MeV il fenomeno dominante è l'effetto fotoelettrico.

3.4.1 Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico avviene quando un fotone interagisce con un atomo, viene assorbito da esso e rilascia energia ad un singolo elettrone che può quindi lasciare l'atomo stesso, ionizzandolo.

Viene solitamente studiato nei corsi introduttivi poiché è una delle prime evidenze della quantizzazione del campo elettromagnetico. In essi, viene spesso introdotto nel caso particolare dei metalli, in cui vale la relazione:

$$E_e = h\nu - \Phi_{\text{work function}} \quad (3.41)$$

In questo corso viene invece trattato il caso generale in cui la precedente espressione si scrive come:

$$E_e = h\nu - E_{\text{legame}} \quad (3.42)$$

Il vantaggio dell'effetto fotoelettrico è l'assorbimento quasi totale dell'energia di una particella neutra da parte di una particella carica; lo svantaggio è l'andamento funzionale della sezione d'urto, che decresce molto rapidamente all'aumentare dell'energia.

Si può vedere sperimentalmente che la sezione d'urto ha approssimativamente il seguente andamento, descrivibile tramite l'equazione:

$$\sigma \simeq \frac{Z^5}{E^{\frac{7}{2}}} \quad (3.43)$$

In corrispondenza di determinate energie è possibile osservare nella figura 3.5 dei picchi: se un fotone ha energia pari a quella di legame dell'elettrone si ha un assorbimento

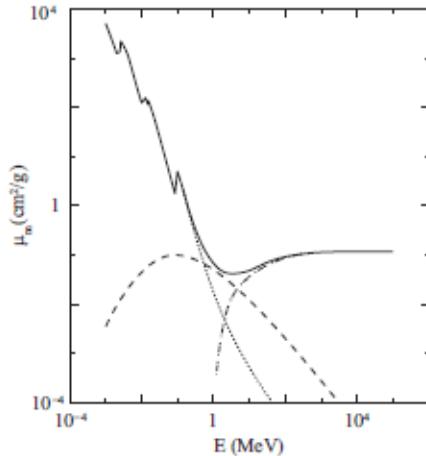


Figura 3.5: Andamento funzionale della sezione d’urto

risonante con un piccolo incremento della sezione d’urto. Il picco che avviene ad energia maggiore corrisponde ad elettroni che si trovano nello stato fondamentale ($n = 1, \ell = 0$) e viene chiamato *K-edge*. Le risonanze visibili ad energia più bassa corrispondono a $n = 2$ e vengono chiamate *L-edge*.

3.4.2 Effetto Compton

Questo è un altro effetto molto conosciuto, osservato per la prima volta nel 1923 e che in fisica delle particelle si cerca sistematicamente di evitare, poiché è una falsificazione diretta delle equazioni di Maxwell. In esso avviene l’urto direttamente tra fotone ed elettrone: il fotone scattera con angolo θ e l’elettrone viene messo in moto con un altro angolo φ . Ciò significa che il fotone perde energia: se ν è la frequenza iniziale, quella finale ν' è sempre minore. La relazione tra le due è espressa dalla *formula di Compton*:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma(1-\cos\theta)}{mc^2}} \quad (3.44)$$

Esso è considerato il peggior processo di interazione del fotone, poiché lo scaricamento di energia - che oltretutto risulta parziale - impedisce di risalire al suo valore iniziale. Sarebbe infatti necessario, come si evince dalla 3.44, conoscere l’angolo θ . Purtroppo, a livello sperimentale, risulta molto difficile ricostruire la traiettoria dell’elettrone.

Se si hanno tanti fotoni identici tra loro e si fa avvenire un numero altissimo di eventi di questo tipo, è possibile plottare il numero di eventi in funzione dell’energia cinetica dell’elettrone. Si può vedere che il grafico s’interrompe bruscamente quando avviene un urto frontale, caso per cui si assiste al massimo trasferimento di energia. A questo corrisponde un θ pari a π . Il punto del plot in cui si osserva questo fenomeno viene chiamato *Compton edge* o *spalla Compton*. L’energia massima dell’elettrone è quindi

determinata dalla formula:

$$T_{\max} = h\nu \frac{\frac{2h\nu}{mc^2}}{1 + \frac{2h\nu}{mc^2}} \quad (3.45)$$

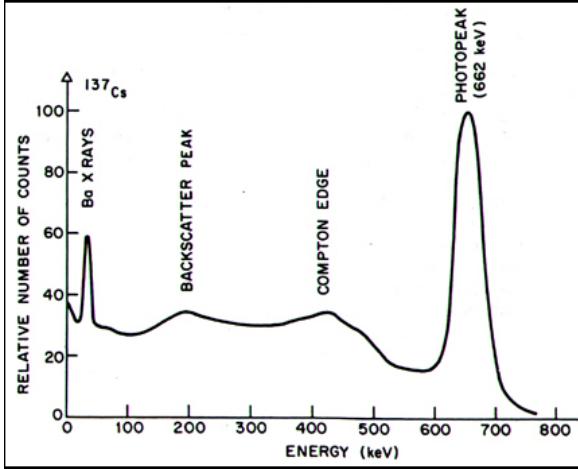


Figura 3.6: Numero di eventi osservati in funzione dell’energia

Il fotone subisce effetto fotoelettrico per un’energia maggiore di T_{\max} : se si immagina di unire sul medesimo grafico i due effetti, è possibile vedere come compaia, in sua corrispondenza, un picco più elevato, chiamato *fotopicco* (o *photopeak*). La differenza tra le due energie (fotopicco e spalla Compton) è data da:

$$\Delta = E_{\gamma} - T_{\max} = \frac{E_{\gamma}}{1 + \frac{2E_{\gamma}}{mc^2}} \simeq 250 \text{ keV} \quad (3.46)$$

L’effetto Compton dipende abbastanza blandamente da Z : in prima approssimazione infatti $\sigma \propto \frac{Z}{E}$ e tende a svanire per alte energie, risultando rilevante solo nella regione energetica 100 keV - 10 MeV. Se si utilizzano quindi Z molto elevati si riesce ad oscurare questo effetto: i migliori rivelatori di fotoni hanno questa caratteristica.

3.4.3 Produzione di coppie

La *pair production* è il fenomeno prevalente quando l’energia del fotone è molto grande (>10 MeV). Avviene quando un fotone, interagendo con un elettrone o un nucleo, scarica energia e si converte in una coppia elettrone-positrone.

Si è osservato qualche paragrafo fa che questo fenomeno nel vuoto non può avvenire: ci si era infatti messi nel sistema di riferimento della coppia e si era osservato che essa avrebbe momento 0 e di conseguenza anche il fotone, contraddicendo la relatività ristretta. In questo caso invece si considererà il sistema di riferimento di fotone e elettrone/nucleo con cui urta, uscendo dalla precedente situazione paradossale.

Si vuole ora determinare l’energia minima per cui questo processo possa avvenire. Se ci si mette nel sistema di riferimento del centro di massa delle particelle, si può con sicurezza affermare che la configurazione a minima energia è quella in cui tutte le particelle sono a

riposo. Il trucco per passare nel sistema di riferimento del laboratorio, quello interessante ai fini della trattazione, è selezionare un'invariante di Lorentz, in questo caso la *prima variabile di Mandelstam s* - data dalla equazione 2.2 - e capirne il valore nello stato iniziale.

Esempio 3.3

$s = (p_{\text{tot}}^\mu)^2$ dove $p_{\text{tot}}^\mu = p_\gamma^{\mu(SI)} + p_N^{\mu(SI)}$. N indica la generica particella con cui interagisce il fotone. Il quadrimomento iniziale del fotone scegliendo come riferimento l'asse z è :

$$p_\gamma^{\mu(SI)} = \left(\sqrt{m_\gamma^2 + |p|^2}, 0, 0, p_z \right) = (p, 0, 0, p) \quad (3.47)$$

Quello della particella è invece:

$$P_N^{\mu(SI)} = \left(\sqrt{M_N^2 + |p|^2}, 0, 0, 0 \right) = (M, 0, 0, 0) \quad (3.48)$$

Da ciò segue che

$$P_{\text{tot}}^\mu = (p, 0, 0, p) + (M, 0, 0, 0) = (p + M, 0, 0, p) \implies (p^\mu)^2 = M^2 + 2pM \quad (3.49)$$

Si può calcolare s_{fin} nel RF essendo invariante di Lorentz:

$$p_{\text{tot}}^\mu = (2m + M, 0, 0, 0) \implies s = (p_{\text{tot}}^\mu)^2 = (2m + M)^2 \quad (3.50)$$

Siccome si sa che $s_{in} = s_{fin}$, se si sostituisce si trova che l'energia minima del fotone è data da:

$$p = \frac{2m^2 + 2mM}{M} \quad (3.51)$$

Se la particella è un nucleo, $M \gg m$ e quindi $p \simeq 2m$; se invece è un elettrone, $M = m$ e quindi $p \simeq 4m$.

Per quanto visto fino ad ora, ci si aspetta che, per energia maggiore di 10 MeV, la produzione di coppie sia dominante: questo andamento è in effetti messo in evidenza nella figura 3.5.

Si vuole ora capire come interagisce il positrone con la materia. Essendo quest'ultimo carico, ci si aspetta che perda energia per Bethe (3.20) e per radiazione: quando l'energia è maggiore di quella critica domina il secondo modo, viceversa il primo. Più precisamente, all'inizio dell'interazione perde energia con i modi appena illustrati, successivamente, una volta persa tutta, si ferma e va a formare uno stato legato e^+e^- , chiamato *positronio*. Tuttavia, quest'ultimo è uno stato instabile: elettrone e positrone si annichilano andando a creare energia. Essi producono - per il solito discorso - due fotoni che vanno da parti opposte (*back to back*) aventi energia pari alla massa del positrone. Chiaramente - all'atto pratico - è una seccatura, poiché non è assolutamente scontato riuscire ad osservare questi due fotoni.

Quando si considera un sistema ad energia elevatissima, nell'ordine del GeV, bisogna considerare il diverso comportamento dei fotoni prodotti. Se interagiscono col rivelatore di particelle non c'è dubbio che si creino in coppia un e^+ e un e^- , entrambi con energia gigantesca, vicina ai 500 MeV. A questi livelli energetici domina la perdita di energia per radiazione: si può allora pensare che ogni elemento della coppia emetta un fotone di energia anch'esso molto elevata. Questi ultimi saranno di nuovo sufficientemente energetici da produrre un'ulteriore coppia elettrone-positrone, e così via.

In sintesi: un fotone di energia molto elevata interagisce con la materia dando luogo ad una cascata di particelle, che ha andamento esponenziale: questa viene chiamata *sciame elettromagnetico*.

Per calcolare, in modo approssimato, il numero di particelle prodotto nello sciame in funzione dell'energia iniziale si usa la cosiddetta *approssimazione di Rossi*.

Definizione 3.8. *Per energie molto maggiori di 10 MeV, in media, un elettrone e un positrone emettono un fotone ogni lunghezza di radiazione X_0 , la cui energia è la metà dell'energia iniziale. Un fotone si converte in una coppia elettrone-positrone ogni lunghezze di radiazione X_0 e l'energia di ciascun componente della coppia è circa la metà di quella iniziale.*

I risultati ottenuti con quest'approssimazione hanno accuratezza intorno al 30-40 %. Nei limiti in cui essa è vera, si può vedere che l'energia minima delle particelle prodotte è data da: se t è il numero di lunghezze di radiazione X_0 che attraversa lo sciame

$$E_{min} = \frac{E_{in}}{2^t} \quad (3.52)$$

$E_{t_{max}} = \frac{E_{min}}{2^{t_{max}}}$ è invece quella in cui lo sciame elettromagnetico cessa di esistere e corrisponde all'energia critica E_c . Al di sotto di essa, infatti, la perdita di energia è data soltanto dalla solita formula di Bethe: il frenamento radiativo è trascurabile. Dunque il numero di lunghezze di radiazione che fa uno sciame è dato da:

$$t_{max} = \log_2(E_{in}/E_c) = \frac{\ln(E_{in}/E_c)}{\ln(2)} \quad (3.53)$$

Questa formula dice quanto - in termini di spostamento - un fotone o un elettrone possano andare avanti in un mezzo materiale, se viene generato uno sciame elettromagnetico. È stata una svolta nella scoperta delle particelle più pesanti: se ci fosse stata solo la formula di Bethe, che dipende dalla densità del mezzo, scoprire una particella pesante avrebbe necessitato l'impiego di spessori dell'ordine dei chilometri. Con la formula 3.53, invece, la profondità di penetrazione scala in modo logaritmico con l'energia, rendendo la costruzione dei rivelatori parecchio più agevole.

3.5 Rivelatori

Esistono innumerevoli tipologie di rivelatori in fisica delle particelle, la cui analisi completa è al di fuori dallo scopo di questo corso; è però possibile classificarli in base ad un parametro di grande interesse: w . Occorre prima di tutto introdurre una nuova definizione:

Definizione 3.9. *Un **evento elementare** è il fenomeno che genera quantità osservabili a causa di una perdita di energia ΔE da parte di una particella.*

Definizione 3.10. *w è l'**energia media necessaria** a creare un singolo evento elementare in un dispositivo che produca un segnale visibile.*

Costruendo un detector con w piccoli sia l'efficienza che la risoluzione energetica migliorano poiché entrambe queste quantità dipendono dalle fluttuazioni statistiche nel numero di eventi elementari. Circa il 90% dei rivelatori fa parte di quattro categorie principali.

- **Rivelatori a ionizzazione:** l'evento elementare di questa tipologia di rivelatori è la formazione di una coppia ione-elettrone in un gas nobile, come l'argon. Per quest'ultimo, la reazione osservata è la seguente: $p^+ + Ar \longrightarrow p + Ar^+ + e^-$. Questi dispositivi funzionano con campi elettrici che fanno muovere ioni ed elettroni verso un anodo e un catodo, rispettivamente. Per l'argon $w \approx 26$ eV e in generale questi rivelatori hanno un $w \approx 30$ eV. Generalmente queste tipologie di rivelatori utilizzano gas nobili poiché sono gli elementi con elettronegatività più bassa e quindi sarà più difficile che riassorbano l'elettrone ionizzato (che poi andrà a generare un segnale). Un esempio di rivelatore a ionizzazione è la camera a ionizzazione oppure il contatore proporzionale, che analizzeremo più nel dettaglio nei paragrafi 3.5.1 e 3.5.2.
- **Bolometri:** i bolometri - o rivelatori termici - sfruttano come evento elementare la produzione di fononi (ovvero il quanto di vibrazione in un reticolo cristallino che descrive l'agitazione termica). I fononi producono un lieve aumento di temperatura, che viene misurato da termometri ad alta precisione. Il w è incredibilmente piccolo, pari a poche decine di μ eV; questo rende i bolometri gli strumenti di misura dell'energia più precisi che abbiamo. Tuttavia, proprio a causa dell'altissima precisione, i bolometri devono essere operati a temperature estremamente basse (≈ 10 mK) in modo da minimizzare il rumore termico.
- **Scintillatori:** gli scintillatori sono isolanti che producono luce visibile o UV in seguito al passaggio di una particella carica. Questo effetto è chiamato luminescenza ed è originata dall'aggiunta di alcuni livelli energetici tra le bande di valenza e di conduzione, ovvero nella cosiddetta *banda proibita*. L'energia depositata dalla particella sposta in banda di conduzione gli elettroni di valenza che, successivamente, si diseggitano su uno dei livelli della banda proibita. Infine, gli elettroni tornano

nella banda di valenza producendo fotoni, che non sono riassorbiti nello scintillatore poiché la loro energia è più piccola del *gap* tra le bande dell'isolante. Generalmente gli scintillatori hanno un *w* piuttosto elevato (circa 100 eV). Spesso accoppiati ad un *fotomoltiplicatore* (PMT), usati per osservare i fotoni visibili prodotti dallo strumento; i PMT hanno un'efficienza molto alta (circa 30-50%).

- **Rivelatori a semiconduttore** sono basati sui semiconduttori, in cui la perdita di energia produce una *coppia elettrone-lacuna* come evento elementare. In questo caso, un elettrone nella banda di valenza si muove in banda di conduzione, lasciando un eccesso di carica positiva: una “lacuna”. Quest’ultima si sposterà proprio come una particella positiva (figura 3.7). Elettroni e lacune si muovono verso anodo e catodo come nei rivelatori a ionizzazione, producendo un segnale proporzionale al numero di coppie elettrone-lacune. Il *w* per la produzione di una coppia vale ca. 3.6 eV nel silicio e 2.9 eV nel germanio. I rivelatori al silicio sono sicuramente i più comuni, poiché possono essere utilizzati a temperatura ambiente, mentre i *detectors* al germanio devono essere necessariamente raffreddati.

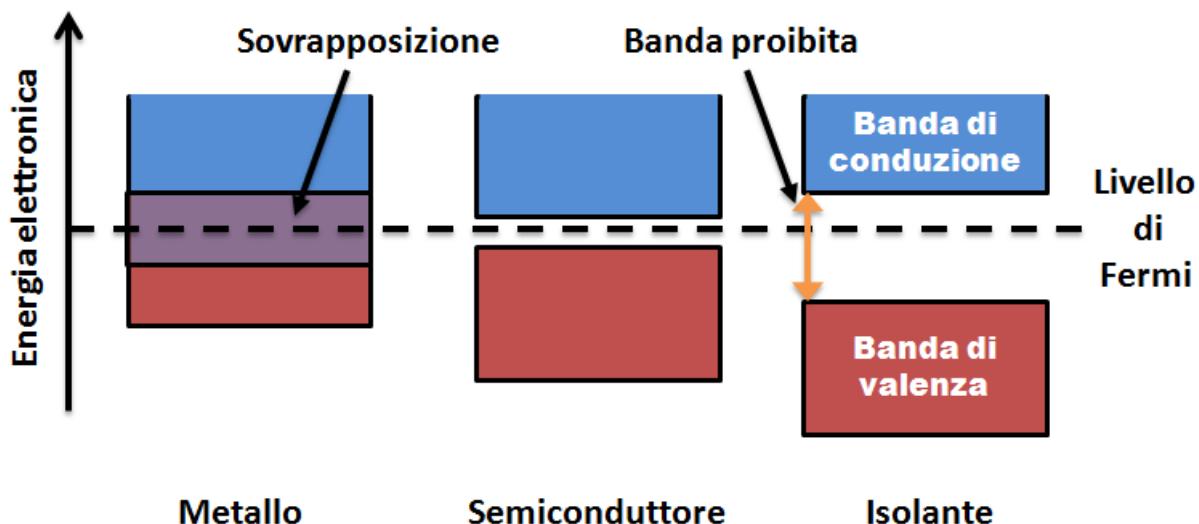


Figura 3.7: Schema semplificato della struttura elettronica a bande per metalli, semiconduttori e isolanti.

3.5.1 Camera a ionizzazione

Analizziamo adesso il rivelatore più semplice possibile: la *camera a ionizzazione*.

Una camera a ionizzazione è, schematicamente, un condensatore piano con un dielettrico gassoso (in genere argon). Il condensatore produce un campo elettrostatico; se questo è sufficientemente intenso, gli elettroni si muovono a velocità costante e indipendente dall'intensità del campo. La velocità di deriva degli elettroni è nell'ordine di $1 \text{ cm}/\mu\text{s}$ mentre gli ioni sono tre ordini di grandezza più lenti, con una velocità di circa $1 \text{ cm}/\text{ms}$.

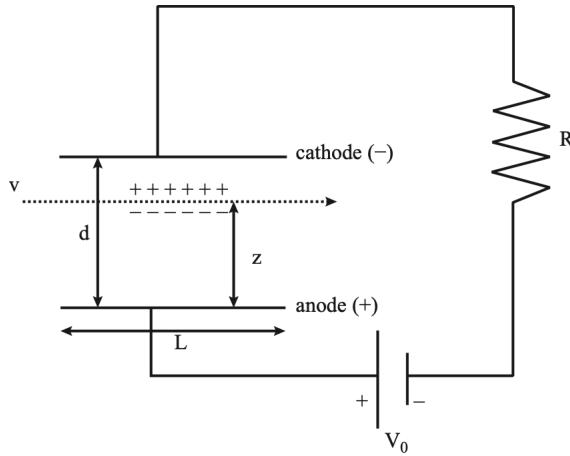


Figura 3.8: Rappresentazione schematica della camera a ionizzazione

In serie al condensatore sono collocati un generatore di tensione e una resistenza, in questo modo la caduta di potenziale ai capi della resistenza sarà proporzionale alla carica prodotta dal passaggio della particella nell'argon.

Se una particella carica attraversa un condensatore a distanza z genera un numero di coppie ione-elettrone pari a:

$$n_e = n_i \equiv n = \frac{dE}{dx} \frac{L\rho}{w} \quad (3.54)$$

dove L è la lunghezza del condensatore, $\frac{dE}{dx}$ è data dalla formula di Bethe (eqn. 3.20) e ρ la densità dell'argon. Per un condensatore di 10 cm, $n \simeq 10^3$, che è una quantità di carica minuscola. Quindi per quanto isolato sia il condensatore, il passaggio di una singola particella non cambia il voltaggio sul condensatore, quindi il campo elettrico che sentono le coppie ione-elettrone è costante $\vec{E}(t) \simeq |\vec{E}| \hat{u}_k$. In un tempo t , gli elettroni si muovono di una distanza $v_- t$ mentre gli ioni di $v_+ t$.

Da un punto di vista elettronico una camera a ionizzazione è un circuito RC connesso ad un generatore di tensione. Se la costante di tempo del circuito $\tau = RC$ è maggiore di qualche millisecondo, nel circuito non scorre alcuna corrente durante la deriva delle cariche e quindi l'energia necessaria a muovere le particelle deve arrivare dall'energia immagazzinata nel condensatore: $E = \frac{1}{2}CV_0^2$.

L'energia di un elettrone e di uno ione dopo un tempo t è:

$$\text{Elettrone: } q \int \vec{E} \cdot d\vec{x} = -e \cdot -|\vec{E}|v_- t = e\vec{E}v_- t \quad (3.55a)$$

$$\text{Ione: } q \int \vec{E} \cdot d\vec{x} = e \cdot |\vec{E}|v_+ t = e\vec{E}v_+ t \quad (3.55b)$$

La conservazione dell'energia per il condensatore ci da

$$\frac{1}{2}CV_0^2 = ne|\vec{E}|v_- t + ne|\vec{E}|v_+ t + \frac{1}{2}CV_f^2 \quad (3.56)$$

dove V_f è il voltaggio al tempo t ai capi del condensatore. La caduta di potenziale misurata sulla resistenza sarà quindi $V_R(t) = V_0 - V_f$ e se $n \simeq 10^3$, $V_R(t) \ll V_0$. Quindi posso riscrivere la 3.56 come:

$$\frac{1}{2}C(V_0^2 - V_f^2) = \frac{1}{2}C(V_0 - V_f)(V_0 + V_f) = ne|\vec{E}|(v_- + v_+)t \quad (3.57)$$

Posso riscrivere l'equazione 3.57 tenendo conto che $|\vec{E}| \simeq V_0/d$ e che posso approssimare $(V_0 - V_f)(V_0 + V_f) \simeq 2V_0V_R(t)$; così otteniamo un'espressione per $V_R(t)$:

$$V_R(t) = \frac{ne}{dC}(v_+ + v_-)t \quad (3.58)$$

Al tempo $t_- = z/v_-$ tutti gli elettroni hanno raggiunto l'anodo e non contribuiscono più al segnale. Per $t > t_-$:

$$V_R(t) = \frac{ne}{dC}(v_+t + z) \quad (3.59)$$

Infine per $t > t_+ = (d - z)/v_+$ tutti gli ioni hanno raggiunto il catodo e:

$$V_R(t) = \frac{ne}{dC}[(d - z) + z] = \frac{ne}{C} \quad (3.60)$$

L'equazione 3.60 è un risultato molto importante: una volta che tutte le cariche hanno raggiunto le piastre del condensatore, la caduta di potenziale sulla resistenza è la carica totale prodotta dal passaggio della particella divisa per la capacità del condensatore. Le condizioni iniziali sono ristabilite dal generatore di tensione dopo un tempo $t \simeq RC$.

Le camere a ionizzazione sono dispositivi molto semplici ed efficaci. Il principale problema è che il numero di elettroni prodotto è molto piccolo il quale risulta in una carica di 10^{-16} C; un valore di carica difficilmente distinguibile dal rumore elettronico. Per questo motivo le camere a ionizzazione vengono usate per misurare fenomeni dove il flusso di particelle è molto alto come ad esempio materiali radioattivi dove il numero di eventi al secondo è nell'ordine anche dei milioni.

3.5.2 Contatore Proporzionale

Un altro importante rivelatore è il contatore proporzionale, che supera il principale limite della camera a ionizzazione, ovvero la pochissima carica generata. Questo avviene amplificando il segnale all'interno del gas. Infatti, se il campo elettrico nel condensatore è così elevato che l'energia cinetica acquisita dall'elettrone in un cammino libero medio è maggiore dell'energia di prima ionizzazione del gas, un elettrone può ionizzare un atomo, che produrrà un'altra coppia ione-elettrone. In questo modo il numero di elettroni e di ioni cresce esponenzialmente dopo pochi cammini liberi medi, generando una 'cascata'.

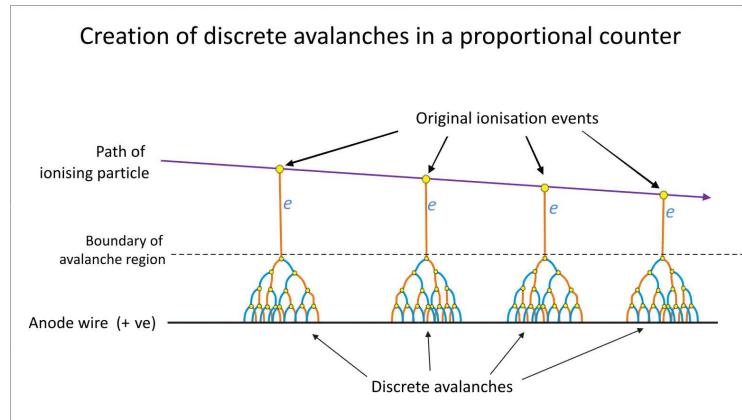


Figura 3.9: Generazione di una *valanga di Townsend* in un contatore proporzionale

Questo fenomeno è denominato *valanga di Townsend*.

$$n = n_0 e^{\alpha x} \quad (3.61)$$

dove α è una costante che dipende dal gas ed è chiamata *primo coefficiente di Townsend*.

Il modo più semplice per raggiungere valori di campo elettrico così elevati è sostituire il condensatore piano con una geometria che presenta delle singolarità come ad esempio quella cilindrica. In questo caso l'anodo del condensatore è semplicemente un filo metallico. Infatti il campo elettrico di un condensatore cilindrico è:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \hat{u}_r \quad (3.62)$$

quindi se a è molto piccolo, il campo massimo è molto intenso. Siccome $\vec{E} = -\nabla\varphi$, il potenziale elettrostatico sarà:

$$\varphi(r) = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.63)$$

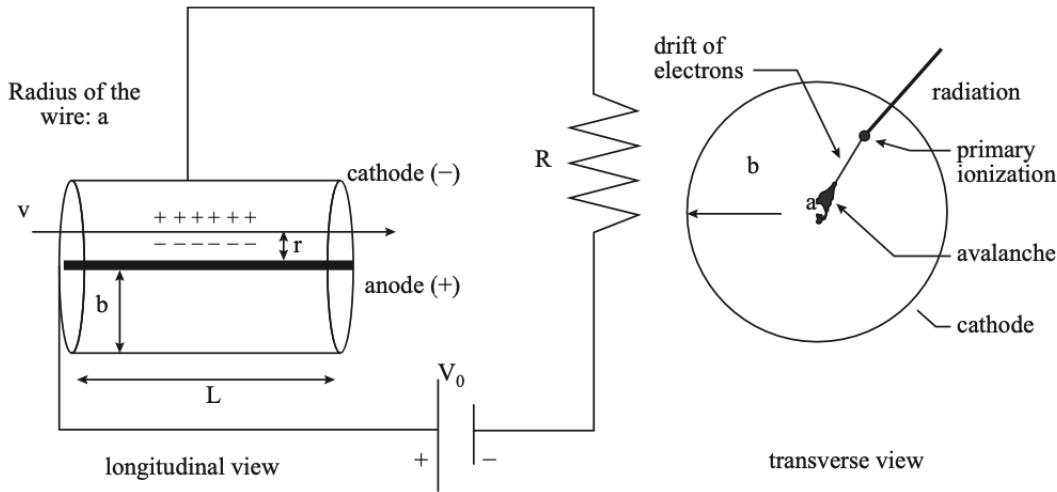


Figura 3.10: Rappresentazione schematica di un rivelatore proporzionale

All'interno del condensatore gli elettroni si spostano verso il filo (anodo) mentre gli ioni, molto più lentamente, si muovono verso b (catodo). La valanga avviene nella regione in prossimità del filo e:

$$n = n_0 e^{\alpha r'} = n_0 G \quad (3.64)$$

dove r' è la distanza dal filo dove inizia la valanga e generalmente vale che $a \approx a + r' \ll b$ e $r' \sim 1\mu\text{m}$. G è detto *guadagno* (o *gain*) del rivelatore e vale $10^3 \div 10^6$.

Il conto per l'ampiezza del segnale V_R ai capi della resistenza può essere fatto in modo analogo alla camera a ionizzazione (paragrafo 3.5.1). L'energia trasferita da un condensatore a una particella di carica q dopo uno spostamento dr è:

$$dE = q d\varphi = q \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) dr \quad (3.65)$$

e l'energia del condensatore sarà diminuita di una quantità:

$$dE = d \left(\frac{1}{2} CV_0^2 \right) = CV_0 dV \quad (3.66)$$

Nel contatore proporzionale la stragrande maggioranza delle cariche sono prodotte in prossimità del cavo, cosicché la distanza percorsa dall'elettrone è molto piccola ($r' - a$) in confronto con la distanza percorsa dallo ione ($b - r' - a \approx b$) e il tempo di volo è ancora inferiore in quanto $v_- \ll v_+$. Di conseguenza, la caduta di potenziale $V_-(t)$ prodotta sulla resistenza dalla deriva degli elettroni è trascurabile rispetto a $V_+(t)$ dovuta agli ioni. Mostriamolo partendo dal calcolare la differenza di potenziale infinitesima dovuta a uno spostamento infinitesimo degli elettroni:

$$dV = \frac{-e}{CV_0} \frac{d\varphi(r)}{dr} dr \quad (3.67)$$

La caduta di potenziale sulla resistenza al tempo $t_- = (r' - a)/v_-$, ovvero il momento in cui tutti gli elettroni raggiungono l'anodo, vale:

$$V_-(t) = -\frac{e}{CV_0} \int_{a+r'}^a \frac{d\varphi}{dr} dr \quad (3.68)$$

La capacità del condensatore è

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.69)$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ è la costante dielettrica del gas e L è la lunghezza del cilindro. Dall'equazione 3.63 possiamo calcolare la caduta potenziale dovuta a uno ione e ad un elettrone.

$$\text{Elettrone: } V_-(t_-) = -\frac{e}{2\pi\varepsilon L} \ln\left(\frac{a+r'}{a}\right) \quad (3.70a)$$

$$\text{Ione: } V_+(t_+) = -\frac{e}{2\pi\varepsilon L} \ln\left(\frac{b}{a+r'}\right) \quad (3.70b)$$

Siccome $n = n_- = n_+ \equiv Gn_0$ il segnale totale sarà:

$$V^{\text{fin.}} = V_-^{\text{fin.}} + V_+^{\text{fin.}} = -\frac{ne}{2\pi\varepsilon L} \left[\ln\left(\frac{a+r'}{a}\right) + \ln\left(\frac{b}{a+r'}\right) \right] = -\frac{ne}{C} \quad (3.71)$$

La caduta di potenziale finale (per $t > t_+$) è la stessa che per la camera di ionizzazione ma la quantità di carica è moltiplicata di un fattore G . Il contatore proporzionale è analogo ad amplificatore di segnale intrinseco con un guadagno G . Come ci si poteva aspettare $V^{\text{fin.}}$ è completamente dominato dagli ioni in quanto:

$$\frac{V_-^{\text{fin.}}}{V_+^{\text{fin.}}} = \frac{\ln\left(\frac{a+r'}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a+r'}\right)} \ll 1 \quad (3.72)$$

Qual è il rilevatore con risoluzione energetica maggiore tra camera di ionizzazione e il contatore proporzionale?

Nella camera di ionizzazione, la variabile fisica associata all'energia deposta dalla particella $\Delta E = nw$

L'errore su n è descritto dalla Poissoniana (classificazione di eventi rari: binomiale con numero di eventi $n \rightarrow \infty$ e probabilità $P \rightarrow 0$)

$$P(\mu, n) = \frac{e^{-\mu}}{n!} \mu^n \quad (3.73)$$

L'errore sui successi è la radice quadrata del numero stesso, allora l'errore su n è \sqrt{n} ; mentre l'errore su w è trascurabile perché è stata misurata da vari laboratori ed è nota (≈ 0)

Quindi l'errore relativo diventa:

$$\frac{\sigma_{\Delta E}}{\Delta E} = \frac{\sqrt{nw}}{nw} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (3.74)$$

Facciamo la stessa cosa per il contatore proporzionale, dove troviamo $n = n_0 G w$, quindi gli errori sono:

- $n_0 \rightarrow \sqrt{n_0}$
- $w \rightarrow \approx 0$
- $G \rightarrow \sigma_G$ (dipende dalla tensione applicata)

Quindi l'errore relativo diventa:

$$\frac{\sigma_{\Delta E}}{\Delta E} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{n_0})^2} + (\sigma_G)^2} > \frac{1}{\sqrt{n_0}} \quad (3.75)$$

A questo punto vediamo che il contatore proporzionale ha un errore relativo maggiore della camera di ionizzazione (anche se, essendo σ_G calcolata molto precisamente in laboratorio, i due metodi sono molto simili)

In realtà conviene usare il contatore proporzionale perché la differenza di potenziale misurata è molto più intensa a causa della valanga di Townsend, quindi supera il rumore elettronico e si misura meglio.

Cosa succede se aumentiamo la differenza di potenziale ai capi del condensatore nel contatore proporzionale?

Quando il numero degli elettroni prodotti a valanga diventa grandissimo ($10^6 \div 10^8$) ho milioni di ioni che driftano verso l'esterno e, siccome sono carichi positivamente, schermano il campo elettrico. Allora il prossimo elettrone che crea la valanga trova un campo elettrico meno intenso, per cui produce una valanga più piccola.

Per $G \approx 10^8$ si incontra il cosiddetto limite di Rutherford, dove si trova un segnale costante a prescindere dell'energia depositata dalla particella.

3.5.3 Contatore Geiger

Utilizzando la stessa struttura di un contatore proporzionale produciamo continuamente valanghe di elettroni, i quali ionizzano un atomo o fanno effetto photoelettrico con l'armatura esterna del condensatore: in entrambi i casi gli elettroni liberati creeranno ulteriori valanghe di Townsend. Questo fa scaricare il condensatore.

Dopo circa 20 valanghe il campo elettrico è così schermato che non fa fare più valanghe ed è per questo motivo che il segnale è costante a prescindere dall'energia depositata dalla particella.

Questo contatore conta le particelle ma non misura l'energia deposta.

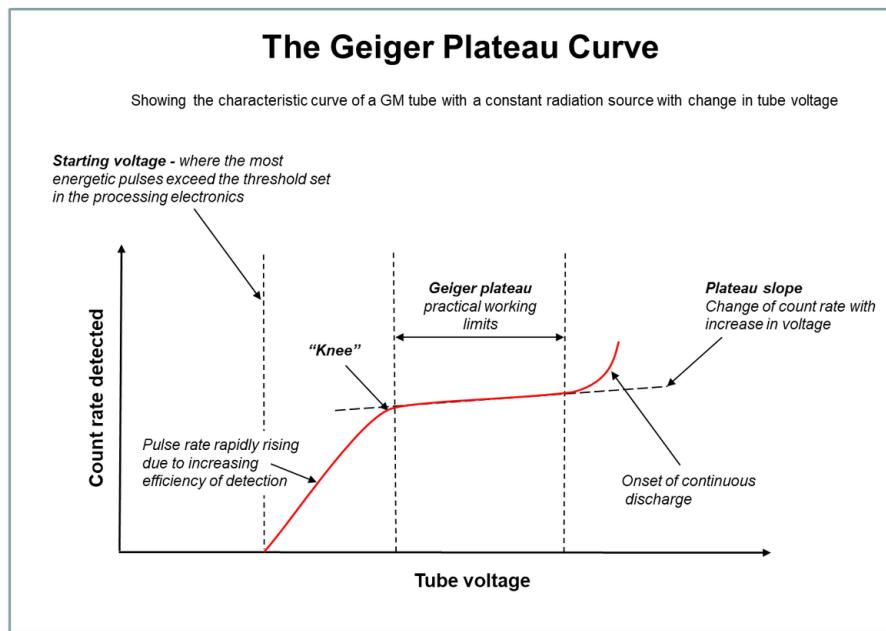


Figura 3.11: Grafico del gain in funzione della differenza di potenziale

3.5.4 Multiwire proportional chambers (MWPC)

È un contatore proporzionale che misura l'energia deposta dalla particella e traccia anche la traiettoria di essa. Gli elettroni prodotti migrano verso il filo più vicino lungo le linee di campo e inizia una valanga di Townsend, gli ioni migrano anche loro seguendo le linee di campo verso l' armatura positiva. per cui si misura una grande differenza di potenziale negativa.

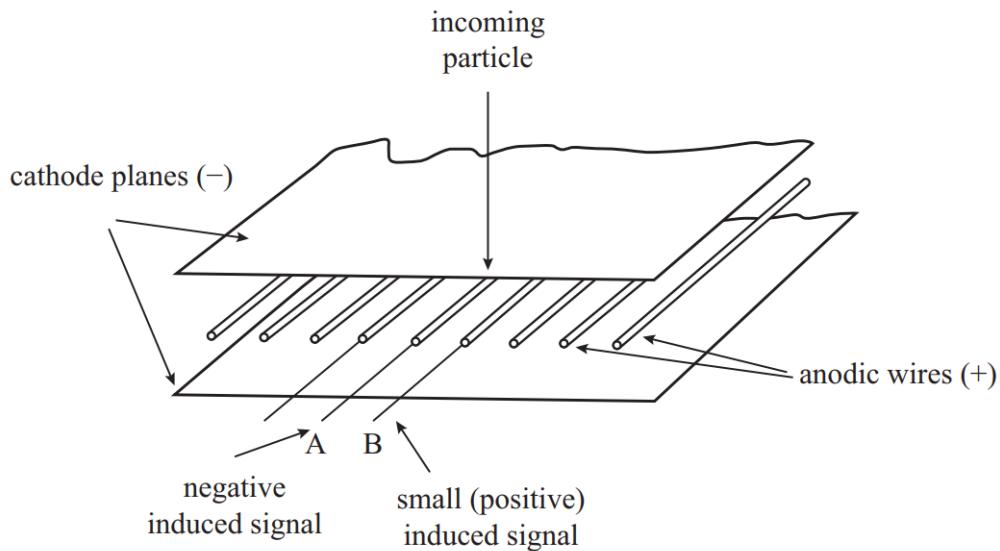


Figura 3.12: Schema di una MWPC.

Se gli altri fili non misurano nulla si trova il filo più vicino alla particella: identificando la coordinata x della particella e l'errore è lo spazio tra i fili.

Per sapere la posizione y metto dei fili ortogonali a quelli per la x .

I fili vicini a quello che prende l'elettrone sentono una carica indotta positiva dagli ioni; quindi il filo più vicino alla particella è l'unico che sente una corrente negativa.

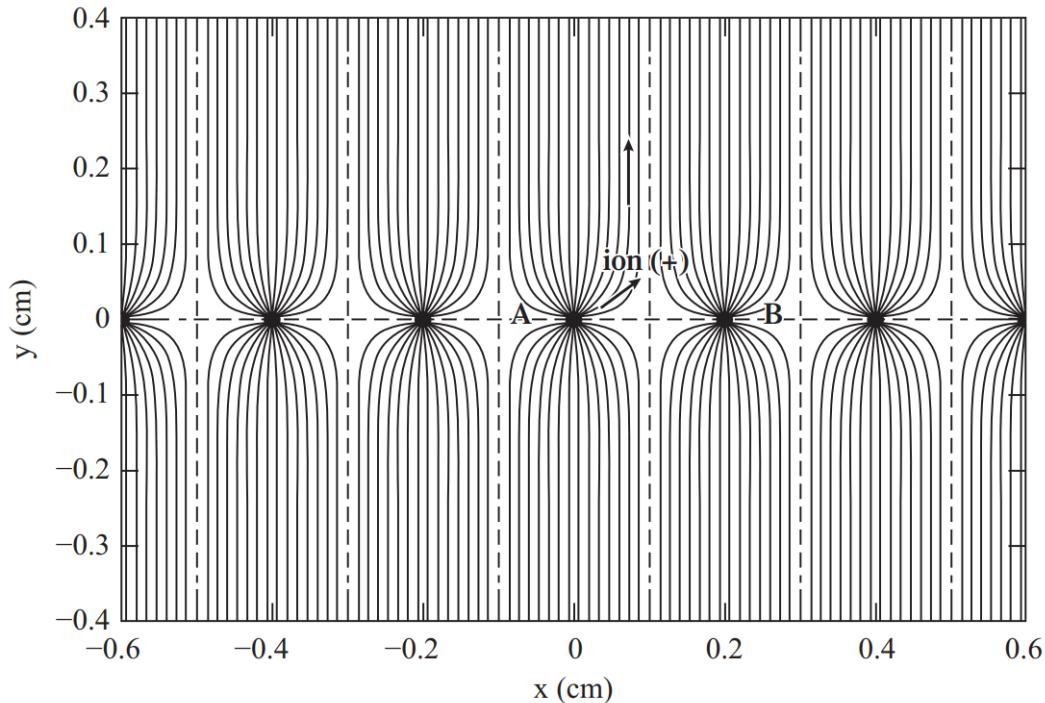


Figura 3.13: Linee del campo elettrico in una Multiwire proportional chamber.

Capitolo 4

Simmetrie in meccanica quantistica

Intuitivamente, le simmetrie sono particolari *trasformazioni delle variabili fisiche, che lasciano invariata la dinamica di un sistema*. In senso quantistico, la vera informazione fisica è la probabilità: per questo motivo, una *trasformazione di simmetria* la deve conservare. L'obiettivo è introdurre un tipo di operatore lineare che si occupi di trasformare gli stati, rispettando alcune condizioni specifiche. Si studieranno intuitivamente, nelle pagine seguenti, le caratteristiche che deve avere l'endomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ affinché sia una simmetria. Prima di iniziare, si introduce una definizione spesso mai vista prima.

Definizione 4.1. *L'operatore U è detto **antilineare** se, presi due elementi qualsiasi a e b in \mathcal{H} di Hilbert, vale:*

$$U(\alpha a + \beta b) = \bar{\alpha}U(a) + \bar{\beta}U(b), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

Dove la linea ad apice indica il complesso coniugato. D'ora in poi sarà estesamente impiegata la notazione *bra-ket*.

4.1 Operatori (anti)unitari

Si considerino due stati qualsiasi $|v\rangle, |u\rangle \in \mathcal{H}$ e si rammenti che la probabilità di transizione tra questi è definita come:

$$p_{v \rightarrow u} = |\langle u|v \rangle|^2 \quad (4.2)$$

Applicando la trasformazione U su questi ultimi, si ottengono due nuovi elementi di \mathcal{H} :

$$U|v\rangle = |\tilde{v}\rangle \quad \wedge \quad U|u\rangle = |\tilde{u}\rangle \quad (4.3)$$

Affinché la probabilità sia preservata, deve valere:

$$|\langle \tilde{v}|\tilde{u} \rangle|^2 = |\langle v|U^\dagger U|u \rangle|^2 = |\langle v|u \rangle|^2 \quad (4.4)$$

In altri termini, U deve rispettare la seguente condizione:

$$|\langle v|u \rangle| = |\langle \tilde{v}|\tilde{u} \rangle| \iff \langle \tilde{v}|\tilde{u} \rangle = \langle v|u \rangle \vee \langle \tilde{v}|\tilde{u} \rangle = \overline{\langle v|u \rangle} \quad (4.5)$$

È perciò necessario che U sia un operatore *unitario* ($U^\dagger = U^{-1}$), lineare o *antilineare*. In quest'ultimo caso si dirà *antiunitario*. Il concetto qui espresso è formalizzato dal *teorema di Wigner*.

Definizione 4.2. *L'endomorfismo lineare $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è detto:*

Unitario se $\langle v|U^\dagger U|u \rangle = \langle v|u \rangle$

Antiunitario se $\langle v|U^\dagger U|u \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}$

Osservazione 4.1:

Poiché il prodotto scalare $\langle | \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ è un operatore antisimmetrico, varrà:

$$\overline{\langle v|u \rangle} = \langle u|v \rangle \quad (4.6)$$

Teorema 4.1 (di Wigner)

Per ogni trasformazione di simmetria nello spazio di Hilbert \mathcal{H} esiste un operatore unitario, od antiunitario, univocamente determinato - a meno di un fattore di fase - che la implementa.

Osservazione 4.2:

Condizione necessaria e sufficiente perché due operatori $O, G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ siano *uguali a meno di una fase*

$$O = Ge^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4.7)$$

è:

$$|\langle v|O|u \rangle| = |\langle v|G|u \rangle|, \quad \forall |v\rangle, |u\rangle \in \mathcal{H} \quad (4.8)$$

Riassumendo: una trasformazione di simmetria consiste in una corrispondenza biunivoca fra elementi di \mathcal{H} che preserva il *modulo* dei prodotti scalari, nonché le probabilità di transizione.

Osservazione 4.3:

L'operatore \mathcal{T} di T-parità è *antiunitario*; \mathcal{P} di parità è *unitario*.

4.2 Azione degli operatori di simmetria

Applicare una trasformazione *qualsiasi* $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ad un sistema quantistico S significa riscrivere ogni variabile e ogni suo stato, mantenendo invariate le caratteristiche fisiche: gli autovalori e le probabilità di transizione. T instaura una corrispondenza uno a uno tra le

variabili: una data osservabile A viene trasformata in A' . Per ipotesi, gli spettri di questi due operatori devono coincidere, mentre gli autostati di A' saranno le trasformazioni di quelli di A . Se $|\tilde{a}\rangle$ è autostato di A' relativo all'autovalore \tilde{a} :

$$A'|\tilde{a}\rangle = \tilde{a}|\tilde{a}\rangle, |\tilde{a}\rangle = T|a\rangle \iff A|a\rangle = a|a\rangle \quad (4.9)$$

Osservazione 4.4:

In termini di operazioni di misura, si può immaginare che T sia applicata all'apparato sperimentale che raccoglie il valore di A . Questo viene reinterpretato come un apparato di misura sull'osservabile A' ; in questo modo si possono definire rotazioni, traslazioni e riflessioni del sistema di riferimento.

In seguito ad una misura, la probabilità che il sistema *collassi* dal generico stato $|\psi\rangle$ nell'autostato $|a\rangle$ dev'essere uguale alla probabilità che la stessa misura dia un risultato corrispondente allo stato $|\tilde{a}\rangle$, quando il sistema si trova in $|\tilde{\psi}\rangle$. In matematica:

$$|\langle\psi|a\rangle|^2 = |\langle\tilde{\psi}|\tilde{a}\rangle|^2 \quad (4.10)$$

Ciò è garantito dalla scelta adeguata di T , come prescritto dal teorema di Wigner.

4.3 Simmetrie e osservabili

Si va ora ad indagare il legame tra le simmetrie e le osservabili fisiche. Si consideri un operatore hermitiano $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ t.c. $A = A^\dagger$ e sia $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un generico stato. Dopo una trasformazione T , il valore medio di A su $|\psi\rangle$ cambia nel seguente modo:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A | \psi \rangle \rightarrow \langle \tilde{\psi} | A | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi | T^\dagger A T | \psi \rangle \quad (4.11)$$

Se si "sposta" l'azione di T dagli stati all'operatore stesso si ottiene:

$$A \longrightarrow T^\dagger A T \quad (4.12)$$

Questi ultimi, tuttavia, non sono necessariamente uguali. Questo avviene - ed è immediato verificarlo - quando T e A sono *compatibili*.

Teorema 4.2 (Conservazione dei valori medi)

Se A commuta con T , allora la trasformazione di simmetria ne *preserva* il valore medio.

$$[A, T] = 0, T \text{ unitario} \iff \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \tilde{\psi} | A | \tilde{\psi} \rangle \quad (4.13)$$

A verrà detto *invariante* rispetto a T .

Dimostrazione. Si verifica l'affermazione per l'implicazione da sinistra a destra.

$$[A, T] = 0 \implies TA = AT, \text{ moltiplicando a sinistra per } T^{-1} :$$

$$\begin{aligned} T^{-1}TA &= T^{-1}AT, \text{ dove} \\ T^{-1} &= T^\dagger \implies \mathbb{1} \cdot A = T^\dagger AT, \text{ da cui:} \\ \langle \tilde{\psi} | A | \tilde{\psi} \rangle &= \langle \psi | T^\dagger AT | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \end{aligned} \tag{4.14}$$

□

In particolare, quando l'osservabile in questione è l'operatore hamiltoniano H :

Definizione 4.3. All'interno di un sistema S , una trasformazione di simmetria T è detta **invarianza del moto** se e solo se non cambia l'energia: $H = T^\dagger HT$. Si dirà inoltre che S è invariante sotto la simmetria T .

Osservazione 4.5:

Per il teorema 4.2:

$$H = T^\dagger HT \iff [H, T] = 0 \tag{4.15}$$

Prima di proseguire, si propone una ulteriore dimostrazione al teorema 4.2, stavolta esplicitando il prodotto scalare. Si tenga comunque a mente che, parimenti alla precedente, questa è valida soltanto quando T è un operatore indipendente dal tempo.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle T \rangle &= \\ &= \frac{d}{dt} \int \psi^*(\vec{x}, t) T \psi(\vec{x}, t) d^3 \vec{x} = \int \frac{d}{dt} [\psi^*(\vec{x}, t) T \psi(\vec{x}, t)] d^3 \vec{x} = \\ &= \int \left(\frac{d\psi^\dagger}{dt} T \psi + \psi^\dagger T \frac{d\psi}{dt} \right) d^3 \vec{x} \quad (\text{per la regola di Leibniz}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Qui si usa l'equazione di Schrödinger per sostituire la derivata temporale della funzione d'onda.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{4.17}$$

il cui aggiunto è:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = H\psi^\dagger \tag{4.18}$$

Da cui:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H\psi \wedge \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} H\psi^\dagger \tag{4.19}$$

Sostituendo queste ultime relazioni nell'equazione 4.16:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle T \rangle &= \\ &= \frac{i}{\hbar} \int (\psi^\dagger H T \psi - \psi^\dagger T H \psi) d^3 \vec{x} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^\dagger [H, T] \psi d^3 \vec{x} = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ciò poiché, per ipotesi, H e T sono compatibili: $[H, T] = [T, H] = 0$. \square

È curioso osservare che, anche se posto diversamente, il risultato è il medesimo del ben noto *teorema di Ehrenfest*, nel caso $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

$$\frac{d}{dt} \langle U \rangle = \langle \frac{\partial U}{\partial t} \rangle + \langle [U, H] \rangle \quad (4.21)$$

In altri corsi si è già visto che, proprio in virtù del teorema 4.2, ogni invarianza del moto porta una legge di conservazione. In altri termini, per ogni simmetria a cui il sistema è invariante, esiste una *costante del moto* associata. Prima di procedere a parlare di questo risultato, si introduce una breve classificazione delle trasformazioni di simmetria.

4.4 Classificazione delle simmetrie

Le simmetrie possono dipendere da un parametro: un numero che quantifica la trasformazione applicata $T \rightarrow T(\alpha)$. Questi α possono essere discreti ($\in \mathbb{N}$) oppure continui ($\in \mathbb{R}$); a seconda della loro natura, T può essere scritto e implementato in modo diverso.

Definizione 4.4. *Le simmetrie a parametro reale sono dette **continue**; quelle a parametro intero sono dette **discrete**.*

Analogamente a quanto si fa per la natura numerica del parametro, le simmetrie si distinguono anche in base alla natura stessa della trasformazione.

Definizione 4.5. *Quando la trasformazione modifica il tempo e/o lo spazio, viene chiamata **esterna**; viceversa, si dirà **interna**.*

Entrando nello specifico con alcuni esempi:

- *Continue ed esterne* sono le trasformazioni che coinvolgono lo spazio e/o il tempo, che sono funzioni continue di parametri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, con $N \in \mathbb{N}$ finito.

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (4.22)$$

A questa categoria appartengono traslazioni ($\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$) e rotazioni ($\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$, R matrice reale e *ortogonale*, cioè uguale alla sua trasposta $R^T = R$).

- *Continue ed interne* sono le simmetrie continue che non coinvolgono né lo spazio né il tempo. Una di queste è la trasformazione di fase di funzioni d'onda:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\theta} \psi(\vec{x}, t) \quad (4.23)$$

- *Discrete esterne* sono dette le trasformazioni non continue - non quantificabili con un set di parametri continui - definite attraverso un numero finito di operatori unitari, che coinvolgono lo spazio e/o il tempo. Uno di questi è la parità \mathcal{P} ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$). Il suo effetto è quello di passare da una terna sinistrorsa a una terna destrorsa. Si vedrà che si tratta di un operatore unitario ($P^\dagger = P^{-1}$) autoaggiunto ($P = P^\dagger$), ergo uguale al suo inverso ($P^2 = PP = \mathbb{1}$), perciò una sua doppia applicazione restituisce semplicemente la situazione iniziale.
- *Discrete interne* sono quelle trasformazioni descritte da un numero finito di operatori che *non* coinvolgono spazio e tempo. La più famosa tra queste è la *C-parità classica*, la quale inverte i segni delle cariche; anch'essa, se applicata due volte, riporta alla situazione iniziale.

Dietro all'operatore di trasformazione di fase, risiede un concetto degno di nota.

Osservazione 4.6:

Tutte le quantità osservabili, in meccanica quantistica, non dipendono dalla fase della funzione d'onda. Specialmente: autovalori, probabilità di transizione e valori medi sono indipendenti dalla fase applicata alla funzione di stato che descrive il sistema. Da ciò consegue naturalmente che, se un sistema è associato ad una funzione d'onda ψ , esso è invariabilmente descritto anche da ogni sua trasformazione di fase $\psi e^{i\theta}$.

Definizione 4.6. L'insieme di tutte le trasformazioni di fase dell'elemento $\psi \in \mathcal{H}$ di Hilbert:

$$R_{\mathcal{H}} = \{|\tilde{\psi}\rangle \in \mathcal{H} \mid \tilde{\psi} = \psi e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\} \quad (4.24)$$

è detto **raggio di Hilbert**.

4.5 Simmetrie continue e costanti del moto

Ci si concentra, in prima battuta, sulla classe degli operatori di simmetria *continui*. Questi vengono implementati nella teoria attraverso una rappresentazione molto conveniente:

Teorema 4.3 (di Stone)

Se un operatore è (anti)unitario, continuo e differenziabile, allora potrà essere espresso come un esponenziale, nella forma:

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \alpha_j T_j} \quad (4.25)$$

Osservazione 4.7:

È fin da subito evidente che una trasformazione di simmetria, scritta in questo modo, preservi il modulo del prodotto scalare tra quantità trasformate.¹

Definizione 4.7. *Gli operatori T_j che implementano una trasformazione di simmetria U sono detti i suoi **generatori infinitesimi**.*

Osservazione 4.8:

Si rammenti il significato di *esponenziale di una matrice*:

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N} \implies e^M = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \quad (4.26)$$

Il nome di questi oggetti è presto spiegato: implementano le trasformazioni infinitesime nella teoria. Si vede subito cosa s'intende: quando i parametri α_j sono molto piccoli, l'oggetto $U(\alpha_j)$ può essere sviluppato in Taylor, ottenendo un risultato piuttosto semplice:

$$\alpha_j \ll 1 \implies e^{\frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j} = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j + o(\alpha_j) \quad (4.27)$$

Si verifica velocemente che gli operatori T_j devono essere autoaggiunti:

Teorema 4.4

$$U^\dagger = U^{-1}, UU^\dagger = \mathbb{1} \implies T_j = T_j^\dagger \quad \forall j \in [1, N] \subset \mathbb{N} \quad (4.28)$$

Dimostrazione. Esprimendo $U = U(\vec{\alpha})$ in forma esponenziale, scelto un generico j :

$$\begin{aligned} U^\dagger(\alpha_j) &= U^{-1}(\alpha_j), U^\dagger(\alpha_j) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j^\dagger} \\ &\implies U^\dagger U = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j^\dagger} e^{\frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j} = \mathbb{1} \\ &\iff e^{\frac{i}{\hbar} \alpha_j (T_j - T_j^\dagger)} = \mathbb{1} \iff T_j - T_j^\dagger = 0 \iff T \text{ autoaggiunto.} \end{aligned} \quad (4.29)$$

□

Osservazione 4.9:

Essendo operatori hermitiani, i generatori di trasformazione sono delle *osservabili*. Mentre il valor medio di una simmetria non ha alcun significato fisico, quello del suo generatore è un dato caratteristico del sistema. Per questo, il seguente risultato è di fondamentale importanza.

Teorema 4.5 (di Noether per simmetrie continue)

Se U è un'invarianza del moto per il sistema S , allora i suoi generatori infinitesimi T_i sono *costanti del moto*. In matematica:

$$U^\dagger = U^{-1}, [H, U] = 0 \text{ cioè } U^\dagger(\alpha) H U(\alpha) = H \implies [H, T_j] = 0; \quad \forall j \in [1, \dots, N] \quad (4.30)$$

¹Il modulo di un termine di fase $e^{i\alpha}$ è sempre 1.

Dimostrazione. La verifica è immediata se si fa uso dello sviluppo al primo ordine in Taylor di $U(\vec{\alpha})$, mostrato nella relazione 4.27. Scegliendo un j qualsiasi:

$$\left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j \right) H \left(\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \alpha_j T_j \right) = H \quad (4.31)$$

Escludendo i termini quadratici in α che compaiono nel prodotto:

$$H + \frac{i}{\hbar} \alpha_j [HT_j - T_j H] = H + \frac{i}{\hbar} \alpha_j [H, T_j] = H \iff [H, T_j] = 0 \quad (4.32)$$

□

Ciascun T_j è un'osservabile compatibile con l'hamiltoniana e il suo valore medio, come già mostrato, è costante nel tempo: $\langle T_j \rangle_{|\psi\rangle} = \text{cost.}$

Si prende in analisi il caso dell'operatore di *traslazione* Tr . Ogni insieme di trasformazioni è associato ad un gruppo, nel senso geometrico del termine. Non si scende nel dettaglio, si ricorda solamente che non tutti i gruppi godono della proprietà commutativa; quelli che la possiedono sono detti abeliani, o commutativi. Le traslazioni sono simmetrie associate ad un gruppo abeliano, ergo la loro azione non dipende dall'ordine con cui sono applicate.

Esempio 4.1 (*Traslazioni*)

Sia $|\psi(\vec{x})\rangle \in \mathcal{H}$ un generico stato e $Tr(\vec{\alpha}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ un operatore unitario tale che:

$$Tr(\vec{\alpha}) |\psi(\vec{x}, t)\rangle = |\psi(\vec{x} + \vec{\alpha}, t)\rangle \equiv |\psi'(\vec{x}, t)\rangle \quad (4.33)$$

Si vuole ora indagare la natura del generatore infinitesimo di Tr . È possibile verificare, esplicitando Tr in forma esponenziale, che questo è proprio la quantità di moto \vec{p} .

Verifica. Si parte ricordando la forma funzionale dell'operatore momento lineare in meccanica quantistica:

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \vec{p} \in \mathbb{R} \quad (4.34)$$

Da cui, se $n \in \mathbb{N}$:

$$Tr(\vec{\alpha}) = e^{\frac{i}{\hbar} k \vec{\alpha} \cdot \vec{p}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik}{\hbar n!} \alpha^n \cdot \nabla^n = - \frac{ik}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \quad (4.35)$$

Dove $k \in \mathbb{R}$ è un coefficiente moltiplicativo. Applicando Tr allo stato $|\psi\rangle$:

$$\psi'(\vec{x}) \equiv Tr(\vec{\alpha}) \psi(\vec{x}) = \frac{ik}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \frac{-\alpha_j^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \psi(\vec{x}) \quad (4.36)$$

Se si pone $k = \frac{\hbar}{i}$, la costante $\frac{i}{\hbar}$ si elide. Grazie a questa scelta, la relazione appena scritta risulta lo sviluppo in Taylor della funzione $\psi(\vec{x})$ attorno al punto $(\vec{x} + \vec{\alpha})$; sicché:

$$Tr(\vec{\alpha})\psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \frac{-\alpha_j^n}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial x_j^n} = \psi(\vec{x} + \vec{\alpha}) \quad (4.37)$$

□

Al prim'ordine, Tr si scriverà:

$$Tr^{(1)}(\vec{\alpha}) = \mathbb{1} + i\hbar \vec{p} \cdot \vec{\nabla} + o(\vec{\alpha}) \quad (4.38)$$

È chiaro che, per traslazioni nello spazio, i generatori delle trasformazioni lungo ciascun asse saranno le componenti corrispondenti della quantità di moto:

$$Tr(\vec{x}) = \begin{pmatrix} Tr(x) \\ Tr(y) \\ Tr(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}xp_x} \\ e^{\frac{i}{\hbar}yp_y} \\ e^{\frac{i}{\hbar}zp_z} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Naturalmente, in accordo con il teorema di Noether 4.5, in un sistema *invariante per traslazioni* il momento lineare è conservato:

$$\begin{aligned} [H, Tr] &= [Tr, H] = 0, \quad Tr \text{ invarianza del moto} \\ \implies [\vec{p}, H] &= [H, \vec{p}] = 0, \quad \vec{p} \text{ costante del moto} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Un esempio banale di sistema invariante per traslazioni è la *particella libera*:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (4.41)$$

Enunciamo ora una formulazione più generale del già presentato *teorema di Noether*, risalente al 1918.

Teorema 4.6 (di Noether generale)

Sia S un qualsiasi sistema fisico che ammette rappresentazione *lagrangiana*, vale a dire risolvibile tramite il *principio di minima azione*. Se \mathcal{L} è locale - non è ammessa azione a distanza - allora ad ogni invarianza del moto continua e differenziabile corrisponde una quantità fisica conservata.

Osservazione 4.10:

Posto in questo modo, il risultato di Noether è valido non soltanto in meccanica quantistica, ma in qualsiasi teoria fisica che ammetta rappresentazione lagrangiana.

Esempio 4.2 (Rotazioni)

Si presenta questo secondo esempio di simmetria continua esterna, ripercorrendo gli stessi passi fatti nello studio delle traslazioni. Si vuole definire una rappresentazione conveniente

per questa classe di trasformazioni, oltre che individuarne il generatore infinitesimo associato. Si faccia attenzione alle quantità vettoriali, poiché - per stavolta - sarà sottinteso il segno di vettore. Al lettore sarà resa intuibile dal contesto la natura delle variabili impiegate. Innanzitutto, è bene dire che le rotazioni sono simmetrie associate ad un gruppo non commutativo, ergo la loro azione *dipende dall'ordine* con cui sono applicate. Negli spazi reali finito-dimensional $\mathbb{R}^N, N \in \mathbb{N}$, le rotazioni $Ro : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sono operatori matriziali ortogonali. Ciò significa che ogni trasformazione di questo tipo possiede una matrice ortogonale associata $R \in \text{Mat}_{N \times N}(\mathbb{R})$.

Definizione 4.8. Lo spazio delle matrici $N \times N$ ortogonali di $\text{Mat}_{N \times N}(\mathbb{R})$ si indica con $O(N)$

Si rammenta che una matrice A è ortogonale se la sua trasposta è uguale alla sua inversa:

$$R^T = R^{-1} \implies RR^T = R^T R = \mathbb{1} \quad (4.42)$$

Queste, agendo sui vettori dello spazio corrispondente $x, y \in \mathbb{R}^N$, lasciano invariate le lunghezze e le distanze. In matematica:

$$x \cdot y \equiv \langle x | y \rangle = \langle Rx | Ry \rangle = \langle x' | y' \rangle \quad (4.43)$$

Si faccia attenzione a non confondere la matrice $R \in O(N)$ con l'operatore unitario Ro che descrive la trasformazione. In questi termini, considerando $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} Ro : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}; \psi \in H, (x, t) \mapsto \psi(x, t), x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R} \\ Ro\psi(x, t) &= \psi(Rx, t) \equiv \psi'(x, t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Si può mostrare che i generatori T_j di Ro sono nient'altro che gli operatori di momento angolare:

$$T_j = x_j \times p_j = L_j \quad (4.45)$$

Da ciò conseguirà che, se un sistema è *invariante per rotazione*, il momento angolare è conservato.

$$\begin{aligned} [H, Ro] &= [Ro, H] = 0, \text{ } Ro \text{ invarianza del moto} \\ \implies [L, H] &= [H, L] = 0, \text{ } L \text{ costante del moto} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Osservazione 4.11:

In \mathbb{R}^3 , le regole di commutazione dell'operatore L offrono una spiegazione della non-commutatività di questa classe di trasformazioni:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad (4.47)$$

per esempio, due rotazioni su x e y non commutano: invertendo l'ordine, il risultato differisce di una rotazione infinitesima in z .

4.5.1 Operatore evoluzione temporale

In meccanica classica, quantistica, relativistica e, più in generale, nelle teorie che comprendono forze conservative, la legge di conservazione dell'energia è strettamente legata alla *simmetria di traslazione temporale*. Per approfondire, si consideri un sistema stazionario $H(t) = H(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, in cui è possibile slegare la dipendenza temporale di $|\psi(x, t)\rangle \in \mathcal{H}$:

$$\begin{cases} H(t) = H(0) \\ \psi(x, t) = U(t)\psi(x, 0) \end{cases} \quad (4.48)$$

La forma funzionale di $U(t)$ si può ricavare dall'equazione di Schrödinger:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)\rangle &= H |\psi(x, t)\rangle \implies \\ i\hbar |\psi(x, 0)\rangle \frac{d}{dt} U(t) &= H |\psi(x, 0)\rangle U(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

La cui soluzione è banale:

Definizione 4.9. *L'oggetto che trasla funzioni d'onda nella dimensione temporale è detto operatore d'evoluzione temporale:*

$$\begin{aligned} U(t) : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, \quad t_0 \mapsto t_0 + t, \quad t_0, t \in \mathbb{R} \\ U(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Osservazione 4.12:

Chiaramente, $U(t)$ rientra nella classe delle simmetrie *continue esterne*. Grazie al suo aiuto, si può risalire alla forma della funzione d'onda $|\psi(t)\rangle$ in qualsiasi istante; è sufficiente conoscere lo stato del sistema ad un tempo fissato qualsiasi $|\psi(t_0)\rangle$.

Volendo, si può risalire alla forma esponenziale di $U(t)$ anche dallo sviluppo in Taylor dello stato $|\psi(t_0 + t)\rangle$, attorno al punto t_0 :

$$\psi(t_0 + t) = U(t)\psi(t_0) \simeq \psi(t_0) + t \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \left(1 + \frac{it}{\hbar} H\right) \psi(t) \quad (4.51)$$

dove si è sostituito $a \frac{\partial \psi}{\partial t}$ con $\frac{ia}{\hbar} H$, usando lo stesso trucchetto di 4.16, attraverso l'equazione di Schrödinger.

Come mostrato, il generatore delle traslazioni temporali è proprio l'hamiltoniana. È allora certo che $U(t)$ sia una invarianza del moto, poiché - tautologicamente - H commuta con se stesso. Ma la tautologia si cela, ancora prima, nell'ipotesi stessa del teorema di Noether: i sistemi fisici che ammettono rappresentazione lagrangiana sono tutti e soli quelli che hanno forze conservative. In poche parole: l'operatore $U(t)$ porta la conservazione dell'energia, ma le simmetrie *implicano* conservazioni solo se l'energia è conservata. *Non potrebbe essere altrimenti.*

4.6 Simmetrie discrete e costanti del moto

Sono stati presentati i risultati del teorema di Noether, valido per le simmetrie continue. Ora si vuole caratterizzare il caso discreto, discutendo del loro legame con le quantità conservate. Si consideri allora la classe delle simmetrie discrete; si ricorda: descritte da un numero finito di operatori. Caso particolarmente significativo sono le inversioni.

Definizione 4.10. Le *inversioni* sono trasformazioni di simmetria discrete U che godono della seguente proprietà:

$$U^2 = \mathbb{1} \iff U = U^{-1} \quad (4.52)$$

In parole: dev'essere uguale al suo inverso.

Si sono già incontrati, in precedenza, di operatori di questo tipo. Per esempio, sono inversioni le trasformazioni \mathcal{P}, \mathcal{T} e $\mathcal{C} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Considerando il generico stato $|\psi(x, q, t)\rangle \in \mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}^N$; $q, t \in \mathbb{R}$, le loro azioni sono:

$$\mathbf{P}\text{-parità classica: } \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \quad \psi(x, q, t) \mapsto \psi(-x, q, t) \mapsto \psi(x, q, t) \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{C}\text{-parità classica: } \mathcal{C}^2 = \mathbb{1}, \quad \psi(x, q, t) \mapsto \psi(x, -q, t) \mapsto \psi(x, q, t) \quad (4.53b)$$

$$\mathbf{T}\text{-parità classica: } \mathcal{T}^2 = \mathbb{1}, \quad \psi(x, q, t) \mapsto \psi(x, q, -t) \mapsto \psi(x, q, t) \quad (4.53c)$$

Le inversioni hanno un ruolo particolarmente rilevante quando sono hermitiane perché, in quel caso, possono portare leggi di conservazione. Brevemente: se un sistema è invariante per simmetria alla trasformazione D e quest'ultima è essa stessa un'osservabile, allora sarà anche una costante del moto.

$D : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $D^2 = \mathbb{1}$ inversione e $[H, D] = 0$ invarianza del moto, allora:

$\implies D$ costante del moto

Osservazione 4.13:

È importante afferrare che, quando un'inversione hermitiana D è invarianza del moto ($[D, H] = 0$), è **lei stessa** la quantità conservata.

Definizione 4.11. Sia S un sistema quantistico contenente due particelle *distinte* descritte - rispettivamente - dalle funzioni di stato $|\varphi_1\rangle = |j_1, \dots, j_n\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\varphi_2\rangle = |j'_1, \dots, j'_n\rangle \in \mathcal{H}_2$. Esse sono dette *indipendenti* se S ha funzione d'onda fattorizzabile:

$$\begin{aligned} &S \text{ descritto da } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \text{ t.c.} \\ &|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle = |j_1, \dots, j_n, j'_1, \dots, j'_n\rangle \end{aligned} \quad (4.54)$$

Teorema 4.7 (quantità additive e moltiplicative)

Si consideri un sistema di K particelle *distinte* e indipendenti. In esso, la quantità con-

servata associata ad una simmetria continua è additiva, mentre la quantità conservata di una inversione è moltiplicativa. In matematica:

Se U^k è una simmetria **continua** con generatore G^k , i cui autostati sono indicati con $|g^k\rangle$, ciascuno relativo all'autovalore g^k :

$$U^k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, U^k(\alpha)U^{k\dagger}(\alpha) = \mathbb{1}, U^k(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \cdot G^k}; \forall k \in [1, K], \alpha \in \mathbb{R}^N$$

$$|g\rangle \in \bigotimes_{k=1}^K \mathcal{H}_k, |g\rangle = |g^1\rangle \otimes \dots \otimes |g^K\rangle \quad (4.55)$$

Allora:

$$G|g\rangle = \bigotimes_{k=1}^K G|g^k\rangle = \sum_{j=1}^K \left(G^j \bigotimes_{k=1}^K |g^k\rangle \right) = \left(\sum_{j=1}^K g^j \right) |g\rangle \quad (4.56)$$

Mentre nel caso **discreto**, se D è un'inversione hermitiana - quindi a sua volta un'osservabile - con autovalori $d^k \in \mathbb{R}^N$:

$$DD = \mathbb{1}, D = D^\dagger, \frac{d}{dt} \langle D \rangle = 0 : D|d^k\rangle = d^k|d^k\rangle, \forall k \in [1, K] \quad (4.57)$$

Allora:

$$D|d\rangle = D \bigotimes_{k=1}^K |d^k\rangle = \bigotimes_{k=1}^K D|d^k\rangle = \left(\prod_{k=1}^K d^k \right) |d\rangle \quad (4.58)$$

Si riporta la verifica nel caso di due particelle distinte per l'operatore traslazione Tr in una dimensione x . È possibile dimostrare, per induzione matematica, il generico caso a N corpi.

Verifica - (simmetrie continue). Si indicheranno con $|p_x^1\rangle$ e $|p_x^2\rangle$ i generici autostati della quantità di moto delle due particelle. L'indice alto denota la singola particella, **non** ha niente a che fare con la notazione controvariante. Il generico autostato del *momento lineare composto* avrà la forma:

$$|p\rangle = |p_x^1\rangle \otimes |p_x^2\rangle = |p_x^1 p_x^2\rangle \quad (4.59)$$

Quindi, siano Tr^1, Tr^2 traslazioni lungo la direzione x , con generatori \hat{p}_x^1 e \hat{p}_x^2 , stavolta - per comodità - indicati col simbolo $\hat{}$.

Applicando l'operatore momento lineare $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ allo stato composto $|p\rangle$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{p}|p\rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (|p_x^1\rangle |p_x^2\rangle) = -i\hbar \frac{\partial |p_x^1\rangle}{\partial x} |p_x^2\rangle + i\hbar |p_x^1\rangle \frac{\partial |p_x^2\rangle}{\partial x} = \\ &= (\hat{p}_x^1 |p_x^1\rangle) |p_x^2\rangle + |p_x^1\rangle (\hat{p}_x^2 |p_x^2\rangle) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Per ipotesi - conseguenza del *teorema spettrale per operatori hermitiani* -, quando \hat{p}^j è applicato su un suo autostato $|p^j\rangle$ restituisce un autovalore *reale*:

$$\hat{p}_x^j |p_x^j\rangle = p_x^j |p_x^j\rangle, \text{ con: } \hat{p}_x^j \text{ operatore e } p_x^j \in \mathbb{R} \quad (4.61)$$

Effettuando la stessa sostituzione nella equazione 4.60:

$$\hat{p}|p\rangle = (p_x^1 + p_x^2)|p_x^1\rangle|p_x^2\rangle = (p_x^1 + p_x^2)|p_x^1 p_x^2\rangle \quad (4.62)$$

□

Teorema 4.8

Le inversioni hermitiane hanno, come unico autovalore, ± 1 .

Dimostrazione. Se ψ è autofunzione di D con autovalore associato d :

$$D^2 = \mathbb{1} \iff D^2\psi = \psi \text{ allora: } D(D\psi) = D(d\psi) = dD\psi = d^2\psi \iff d = \pm 1 \quad (4.63)$$

□

Esempio 4.3 (Operatore P)

Si consideri, come esemplificativo, il caso dell'operatore parità $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\psi(x) \mapsto \psi(-x)$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$, che troverà notevole spazio nel prosieguo della trattazione. Con un breve ragionamento sull'equazione agli autovalori di \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}\psi(x) = \lambda\psi(-x) \quad (4.64)$$

si può agevolmente concludere che:

- gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda' = -1$
- le autofunzioni associate a 1 sono tutte e sole le funzioni **pari**
- le autofunzioni associate a -1 sono tutte e sole le funzioni **dispari**

Osservazione 4.14:

Dal momento che posizione e momento non commutano: $[x, p] \neq 0$, anche la quantità di moto inverte il proprio segno sotto l'azione di \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}p = -p, \quad \gamma m \frac{dx}{dt} = -\gamma m \frac{dx}{dt} \quad (4.65)$$

Curiosamente, la doppia inversione di segno subita dall'operatore momento angolare L lo rende *invariante per parità*:

$$\mathcal{P}L = (-x) \times (-p) = x \times p \quad (4.66)$$

4.7 Operatore parità quantistica e parità intrinseca

Si sono già viste le caratteristiche salienti dell'operatore \mathcal{P} di parità, ora si vogliono riassumere in vista di un discorso organico sulla parità dei sistemi quantistici.

Definizione 4.12. Sia $|x\rangle \in \mathcal{H}$ un autostato dell'operatore posizione x

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (4.67)$$

Ogni autofunzione associata ad un autovalore x viene mandata in una con autovalore $-x$. Naturalmente:

$$\mathcal{P}|-x\rangle = |x\rangle \implies \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \text{ inversione} \quad (4.68)$$

Si può inoltre mostrare che è hermitiano:

Verifica - (hermitianità di \mathcal{P}). Per farlo, si utilizza il fatto che:

$$\langle x|\mathcal{P}|x'\rangle = \langle x'|\mathcal{P}|x\rangle \iff \mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger \quad (4.69)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \langle x|\mathcal{P}|x'\rangle &= \langle x| - x' \rangle = \delta(x + x') \\ \langle x'|\mathcal{P}|x\rangle &= \langle x'| \mathcal{P}|x\rangle = \langle x'| - x \rangle = \delta(x + x') \end{aligned} \quad (4.70)$$

Il risultato non cambia se si fa agire \mathcal{P} prima a destra o prima a sinistra: è autoaggiunto. \square

Qualunque funzione d'onda può essere sviluppata sul *sonc* degli stati della posizione, così si può generalizzare la sua azione: $\forall \psi(x) \in \mathcal{H}$

$$\psi(x) = \int_{\mathcal{H}} c(x)|x\rangle dx, \quad \mathcal{P}\psi(x) = \int_{\mathcal{H}} c(-x)|-x\rangle dx = \psi(-x) \quad (4.71)$$

Ricordando quanto visto nell'esempio 4.3, si assegna un nome all'autovalore di \mathcal{P} .

Definizione 4.13. Se la funzione d'onda $\psi(x, t)$ che descrive un sistema è autostato dell'operatore parità

$$\mathcal{P}\psi(x, t) = \pm\psi(x, t) \quad (4.72)$$

l'autovalore ($\mathbf{P} = \pm 1$) è detto **parità intrinseca del sistema**.

Osservazione 4.15:

La parità intrinseca di una particella è definita dalla sua funzione d'onda nel **rest frame**. Questo comporta alcune difficoltà, poiché esistono alcune particelle elementari per cui non è possibile definire uno stato di quiete, basti pensare al fotone.

Lo strumento matematico che permette di determinare la parità intrinseca del fotone è l'equazione di Dirac; esistono tuttavia dei metodi alternativi, utilizzati negli anni antecedenti alla costituzione del *modello standard*. L'idea è quella di studiare delle transizioni di sistemi quantistici, in cui sono note le parità intrinseche iniziale e finale del sistema, per risalire alle parità sconosciute di singoli elementi. L'assunto fondamentale per certi tipi di calcoli è la *conservazione della parità*.

Teorema 4.9 (*Conservazione della parità*)

Le transizioni ammesse in meccanica quantistica relativistica conservano la parità dei sistemi. Si consideri un sistema, inizialmente descritto dalla funzione di stato $|\psi_{ini}\rangle$, che transisce in uno stato finale $|\psi_{fin}\rangle$; deve valere:

$$\mathcal{P} |\psi_{ini}\rangle = \mathcal{P} |\psi_{fin}\rangle \quad (4.73)$$

Si vuole ora presentare un esempio del procedimento testé esposto, utilizzato per determinare teoricamente la parità intrinseca del fotone. Prima di farlo, si rammentano alcuni risultati di meccanica quantistica non relativistica.

4.7.0.1 Richiamo: funzione di stato dell'atomo d'idrogeno

L'equazione di Schrödinger dell'atomo di idrogeno è risolvibile esattamente. La funzione d'onda risultante è uno *stato stazionario fattorizzabile*: non dipende dal tempo e il moto radiale è separabile da quello angolare. Espressa in coordinate sferiche si scrive:

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \alpha) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \alpha) = \frac{u_{n\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \alpha) \quad (4.74)$$

Qui, $u_{n\ell}(r)$ è la combinazione di una potenza, di un polinomio L di grado $k = n - \ell - 1$ e di un esponenziale in r :

$$u_{n\ell}(r) = r^{\ell+1} L_k(r) e^{-\frac{r}{n}} \quad (4.75)$$

dove $L_k(r)$ sono i *polinomi generalizzati di Laguerre*. Per quanto riguarda la parte angolare $Y_{\ell m}(\theta, \alpha)$, queste sono le cosiddette *armoniche sferiche*, con la seguente forma:

$$Y_{\ell m}(\theta, \alpha) = \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)} \right] P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\alpha} \quad (4.76)$$

in cui P_{ℓ}^m sono i *polinomi generalizzati di Legendre*.

In notazione *bra-ket*, il generico stato stazionario potrà essere espresso attraverso i numeri quantici che lo descrivono:

$$\psi_{n\ell m} = |n\ell m\rangle \quad (4.77)$$

Si riassumono in breve i loro significati:

n numero quantico di livello energetico, può assumere qualsiasi valore intero strettamente positivo: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

ℓ numero quantico di momento angolare orbitale (L^2), il suo valore dev'essere positivo e strettamente minore di n : $0 \leq \ell < n$

m associato alla componente z di L , deve essere compreso nell'intervallo $[-\ell, \ell]$

Si ricordano, infine, le regole di selezione per transizioni di dipolo elettrico:

$$\langle Y_{\ell'm'} | z | Y_{\ell m} \rangle \sim \langle Y_{\ell'm'} | Y_{10} | Y_{\ell m} \rangle \neq 0 \iff \begin{cases} \Delta\ell = l' - l = \pm 1 \\ \Delta m = 0 \\ \ell = 0 \implies \Delta\ell \neq 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

4.7.1 Parità intrinseca del fotone

Si cerca ora di ricavare indirettamente il valore della parità intrinseca del fotone. Si considera come stato iniziale ψ_{ini} un atomo d'idrogeno nello stato eccitato $2p$, che può decadere rapidamente nel ground state $1s$ per emissione di radiazione elettromagnetica. Lo schema semplice del fenomeno è:

$$H^* \rightarrow H_{ground} + \gamma \quad (4.79)$$

Passando dalla notazione spettroscopica a quella *bra-ket*:

$$\begin{cases} 2p \equiv |21m\rangle & m = -1, 0, 1 \\ 1s \equiv |100\rangle \end{cases} \quad (4.80)$$

Se si interpreta lo stato finale come combinazione di $|100\rangle$ con la funzione d'onda del fotone $|\gamma\rangle$, la transizione si potrà descrivere così:

$$\begin{cases} \psi_{ini} = |21m\rangle \\ \psi_{fin} = |100\rangle \otimes |\gamma\rangle \end{cases} \quad \psi_{ini} \rightarrow \psi_{fin} \quad (4.81)$$

Si assumerà che l'interazione elettromagnetica conservi la parità; si potrà allora determinare la parità intrinseca del fotone imponendo che sia conservata quella totale del sistema. Per studiare il fenomeno nel dettaglio, occorre fare riferimento alla forma funzionale 4.74 degli stati dell'atomo di idrogeno. In coordinate sferiche, applicando \mathcal{P} a $\psi(r, \theta, \alpha)$, si ottiene l'elettrone specchiato rispetto all'origine, alla medesima distanza r . L'operatore, insomma, agisce esclusivamente sulle variabili angolari θ e α :

$$\begin{cases} \theta \mapsto \pi - \theta \\ \alpha \mapsto \pi + \alpha \end{cases} \quad (4.82)$$

Da questo, si intuisce che la parte radiale $u_{n\ell}(r)$ non è influenzata da \mathcal{P} , si dovrà però approfondire l'azione sulle armoniche sferiche 4.76. Il coefficiente numerico è indifferente alla simmetria; non resta che studiare la variazione del polinomio di Legendre e

dell'esponenziale.

$$\mathcal{P} Y_{n\ell m}(\theta, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{P} e^{im\alpha} = e^{im\alpha} e^{im\pi} = (-1)^m e^{im\alpha} \\ \mathcal{P} P_\ell^m(\cos \theta) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(\cos \theta) \end{cases} \quad (4.83)$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \psi_{n\ell m} &= \frac{U_{n\ell}(r)}{r} \mathcal{P} Y_{\ell m}(\theta, \alpha) \propto (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(\cos \theta) (-1)^m e^{im\alpha} \\ &= (-1)^{2m} (-1)^\ell \psi = (-1)^\ell \psi \end{aligned} \quad (4.84)$$

Osservazione 4.16:

Questo risultato si può riassumere con una semplice affermazione: le armoniche sferiche $Y_{\ell m}$ con ℓ pari sono pari e quelle con ℓ dispari sono dispari; così è immediato concludere che $\mathcal{P} Y_{\ell m} = (-1)^\ell Y_{\ell m}$. Si tenga bene a mente quest'informazione.

Ora: la parità deve conservarsi. Al principio ci si trova nello stato $\psi_{ini} = |21m\rangle$, con $\ell = 1$ dispari, per cui la parità iniziale del sistema è -1 ; nel ground state $|100\rangle$ invece la parità è 1 . Da questo si conclude che la parità intrinseca del fotone debba necessariamente essere -1 :

$$\begin{cases} \mathcal{P} \psi_{ini} = (-1) |21m\rangle \\ \mathcal{P} |100\rangle = |100\rangle \end{cases} \implies \mathcal{P} |\gamma\rangle = (-1) |\gamma\rangle, \mathbf{P}_\gamma = -1 \quad (4.85)$$

Si ribadisce un concetto fondamentale imparato in questa sede: quando si applica l'operatore di parità a delle particelle in un potenziale centrale, gli stati con ℓ dispari pagano un segno meno.

$$\mathcal{P} \psi_{spaziale} = Sc \psi_{spaziale} = (-1)^\ell \psi_{spaziale} \quad (4.86)$$

Domanda da esame: le transizioni di dipolo elettrico sono dominanti, ma ci sono anche dipoli magnetici e quadrupoli elettrici. Con transizioni diverse si ottengono parità intrinseche diverse per il fotone?

Terminata la trattazione riguardante il fotone, si introduce il prossimo paragrafo con una domanda: *come si stabilisce la parità intrinseca di particelle puntiformi?*

4.7.2 Parità intrinseca delle particelle elementari

Non hanno struttura interna, perciò non sappiamo come agisce su di esse l'operatore parità. Non abbiamo nemmeno osservabili fisiche che ci permettono di determinarle univocamente; ne segue che la parità intrinseca delle particelle elementari dovrà essere arbitraria. La si può scegliere a piacimento, ma poi va mantenuta: i valori saranno imposti, quindi si rimarrà consistenti con le decisioni prese. Si definisce la convenzione per le parità intrinseche:

Definizione 4.14. I *fermioni* elementari hanno parità intrinseca $\mathbf{P} = +1$.

Osservazione 4.17:

Includono tutte le particelle elementari con spin semintero; tra queste: elettrone (e^-), muone (μ^-), leptone tau (τ^-), neutrini (ν_e, ν_μ, ν_τ) e quark (u, d, s, c, b, t).

Definizione 4.15. Gli *antifermioni* elementari hanno parità intrinseca $\mathbf{P} = -1$.

Osservazione 4.18:

Questi ultimi sono tutte le corrispettive anti particelle dei fermioni precedentemente elencati; in ordine: antielettrone (e^+), antimuone (μ^+), antileptone tau (τ^+), antineutrini ($\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$) e antiquark ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}$).

Osservazione 4.19:

Particelle come protone e neutrone sono stati legati di quark, ergo la loro parità intrinseca può essere ricavata da quella fissata per i suoi componenti. Non si è visto ancora molto sulla struttura interna di questi nucleoni, si prenda - per ora - sulla fiducia che:

$$\begin{cases} |p\rangle = |uud\rangle \\ |n\rangle = |udd\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{P}|p\rangle = \mathbf{P}_u^2 \mathbf{P}_d |uud\rangle = (+1)|p\rangle \\ \mathcal{P}|n\rangle = \mathbf{P}_u \mathbf{P}_d^2 |udd\rangle = (+1)|n\rangle \end{cases} \quad (4.87)$$

In altri termini: protone e neutrone hanno $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}_n = +1$

Esempio 4.4

Altro esempio è il deuterio ${}^2\text{H}$, stato legato protone-neutrone $|pn\rangle = |uud\rangle \otimes |udd\rangle$, la cui parità intrinseca - si può verificare sperimentalmente - è il prodotto delle parità intrinseche di protone e neutrone.

$$\mathbf{P}_{deuterio} = \mathbf{P}_p \mathbf{P}_n = 1 \quad (4.88)$$

Per i bosoni la questione è un po' più delicata. Come visto per il fotone - quando possibile - la loro parità intrinseca viene determinata attraverso lo studio di interazioni note.

- Fotone - γ $\mathbf{P}_\gamma = -1$
- Gluoni - g_1, \dots, g_8 $\mathbf{P}_{g_i} = -1$
- Bosone di Higgs - H $\mathbf{P}_H = 1$
- Bosoni - W^\pm e Z^0 non hanno significato fisico

Osservazione 4.20:

I bosoni W^\pm e Z^0 , mediatori delle interazioni deboli, hanno parità indefinite, di solito scelte arbitrariamente = -1. Il motivo è che non esiste un'osservabile fisica che dipende da questa assegnazione: essi violano la parità. Non è garantito in alcuna interazione tra W^\pm e Z che la parità si conservi.

Prima di inoltrarci nel discorso sulle parità di sistemi di particelle, conviene richiamare qualche concetto di *composizione dei momenti angolari*.

4.7.2.1 Richiamo: particelle identiche

Definizione 4.16. Due o più particelle si dicono **identiche** quando non possono essere distinte le une dalle altre.

La meccanica quantistica si adatta perfettamente all'esistenza di particelle indistinguibili: per una coppia di particelle basta costruire la funzione d'onda in modo che non riveli in quale stato si trovi una e in quale l'altra. Se si hanno, ad esempio, due particelle rispettivamente negli stati $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, la funzione composita $|\psi\rangle$ dev'essere una combinazione lineare di tutti gli stati possibili del sistema. In poche parole:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle] \quad (4.89)$$

Così si scopre che la teoria ammette **due tipi** di particelle identiche: uno che richiede il segno + e l'altro il -. Questo risultato è riassunto nel *postulato d'indistinguibilità e simmetrizzazione*.

- I bosoni obbediscono alla *statistica di Bose-Einstein* e vogliono il +
- I fermioni obbediscono alla *statistica di Fermi-Dirac* e vogliono il -

Teorema 4.10 (*di simmetrizzazione*)

I sistemi fisici composti da bosoni indistinguibili devono essere totalmente **simmetrici** allo *scambio* di particelle; quelli costituiti da fermioni devono essere totalmente **antisimmetrici**.

Una prima conseguenza di questo postulato è il *principio di esclusione di Pauli*.

Teorema 4.11 (*Principio di esclusione di Pauli*)

Due particelle identiche fermioniche non possono *mai* occupare lo stesso stato quantico contemporaneamente. Intuitivamente:

$$|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle - |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle = 0$$

Osservazione 4.21:

In un atomo non possono esservi due elettroni caratterizzati dagli stessi numeri quantici $|n\ell m\rangle \otimes |\pm\rangle$.

Non resta che dare una presentazione più rigorosa al concetto di *scambio*.

Definizione 4.17. L'inversione $Sc : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $Sc^2 = \mathbb{1}$ è detto *operatore di scambio* e la sua azione sul sistema $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ è quella di invertire le particelle:

$$Sc (|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle) = (|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle) \quad (4.90)$$

4.7.2.2 Richiamo: costruzione degli autostati dell'atomo di elio

La prima cosa che ci interessa ricordare è la composizione dei momenti angolari di spin di due particelle fermioniche con $s = 1/2$.

Definizione 4.18. *Gli stati di spin ammessi $|s, m_s\rangle$ si scriveranno nel seguente modo:*

$$\begin{cases} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle \\ |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle \end{cases} \quad (4.91)$$

Per le regole di composizione del momento angolare, il numero quantico di spin totale j dev'essere un intero nell'intervallo $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]$, quindi $j \in 0, 1$. Il numero quantico m_j , associato alla componente z di J è compreso tra $-j$ e j . Per $j = 0$ si ha un solo stato $|00\rangle$ detto *singuletto*, mentre con $j = 1$ si hanno tre stati degeneri: $|1m_j\rangle$, $m_j \in -1, 0, 1$, il *tripletto*.

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \quad \begin{cases} |11\rangle = |++\rangle \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |1-1\rangle = |--\rangle \end{cases} \quad (4.92)$$

Osservazione 4.22:

È immediato notare che gli stati del tripletto sono totalmente simmetrici allo scambio, mentre il singuletto è totalmente antisimmetrico:

$$\begin{aligned} Sc|00\rangle &= Sc \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle - |+-\rangle) = -|00\rangle \\ Sc|1m_j\rangle &= |1m_j\rangle, \quad \forall m \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned} \quad (4.93)$$

L'hamiltoniana imperturbata dell'elio è, semplificando, la somma di due hamiltoniane d'idrogeno. Per descriverne il ground state sarà necessario che ciascun elettrone si trovi nello stato fondamentale di H $\psi_0 = |100\rangle$. Tuttavia, lo stato $\psi_0 \otimes \psi_0 = \psi_{00}$ è simmetrico, ragion per cui *non* è accettabile per due fermioni identici: lo stato va “antisimmetrizzato”. Ciò si può fare tenendo in considerazione lo spin e aggiungendo un autostato antisimmetrico del momento angolare: il singuletto $|00\rangle$

$$|He\rangle_{ground} = \psi_{00} \otimes |00\rangle \quad (4.94)$$

Nel primo livello eccitato dell'elio, è uno solo dei due e^- a trovarsi nel primo stato eccitato d'idrogeno $\psi_1 = |200\rangle$. Si hanno allora due possibili combinazioni: una simmetrica, a cui va aggiunto il singuletto, e una già antisimmetrica, compatibile con gli stati di tripletto.

$$\begin{cases} (\psi_{10} + \psi_{01}) \otimes |00\rangle \\ (\psi_{10} - \psi_{01}) \otimes |1m_j\rangle \end{cases} \quad (4.95)$$

Iterando questo procedimento è possibile costruire gli autostati relativi a ciascun livello energetico dell'atomo di elio.

Più in generale, per calcolare l'effetto dell'operatore scambio su una funzione d'onda, è importante comprendere come ne varia la parte di spin. È possibile *generalizzare* quanto valido per singoletto e tripletto riassumendo vari risultati sulle statistiche Fermi-Dirac e Bose-Einstein; si propone la seguente affermazione:

Teorema 4.12 (*Scambio e particelle identiche*)

Se s è il numero quantico di spin totale di un sistema fattorizzabile $|\psi\rangle = \psi_{spaziale}\psi_{spin}$, quando l'operatore Sc agisce sulla parte di spin restituisce:

- $(-1)^{s+1}$ per fermioni
- $(-1)^s$ per bosoni

Si può allora combinare l'equazione 4.86 con il risultato appena introdotto per realizzare due formule definitive. Queste potranno essere applicate a qualunque sistema $|\psi\rangle$ costituito da coppie di particelle in potenziale centrale per calcolarne la simmetria allo scambio. Saranno massivamente impiegate nel prosieguo della trattazione.

$$\begin{aligned} \textbf{BOSONI: } Sc |\psi\rangle &= Sc |b_1 b_2\rangle (-1)^{\ell+s} |\psi\rangle \\ \textbf{FERMIONI: } Sc |\psi\rangle &= Sc |f_1 f_2\rangle (-1)^{\ell+s+1} |\psi\rangle \end{aligned} \quad (4.96)$$

4.8 Parità intrinseca dei sistemi di particelle

Si vede ora come sia possibile determinare empiricamente, grazie alle nozioni di teoria trattate, il valore atteso della parità di particelle composte.

Esempio 4.5 (*Parità del pione negativo*)

La parità intrinseca del π^- è stata determinata sperimentalmente nel 1954 da Chinowsky e Steinberger². In breve: producevano fasci di pioni e li facevano urtare con dei nuclei di deuterio, d'ora in poi indicato con d . I pioni sono carichi e pesanti, ovvero ben descritti dalla formula di Bethe 3.20. Quando un atomo viene ionizzato, può capitare che il pione s'impadronisca del posto dell'elettrone, prendendo ad orbitare attorno al nucleo. Questa è una celebre configurazione atomica, tanto da avere un soprannome: *atomo mesico*. Hanno provato a studiare lo spettro di emissione di questi atomi mesici, proprio come fatto con gli elettroni. Si è scoperto che gli stati legati sono gli stessi, a meno che il pione non fosse a livelli energetici inferiori a $n = 7$, $\ell = 0$, con ℓ numero quantico di momento angolare orbitale. Il motivo intuitivo è semplice: i pioni sono stati legati di quark, perciò possono interagire anche per forza forte. Se si trovano troppo vicini ai nucleoni compaiono tutta una serie di fenomeni, non ravvisabili nell'atomo d'idrogeno. Quando il pione supera una

²Absorption of Negative Pions in Deuterium: Parity of the Pion, W. Chinowsky & J. Steinberger Phys. Rev. 95, 1561 – 15/09/1954, <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.95.1561>

distanza limite, l'atomo viene distrutto e vengono prodotti due neutroni. Si sono allora studiate queste reazioni; con le informazioni disponibili si è riuscita ad ottenere la parità del pion.

Lo schema da studiare è:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n, \text{ con: } \psi_{ini} = |700\rangle \quad (4.97)$$

L'intuizione è utilizzare il principio di conservazione del momento angolare, combinato con l'antisimmetria di una coppia di fermioni, per determinare lo stato finale del sistema. Una volta ottenuto, si può ricavare la parità del pion.

Innanzitutto occorre fare delle considerazioni sul momento angolare del sistema. In principio, quello orbitale è $\ell = 0$, quello di spin s invece è combinazione dei singoli spin di pion e deuterio, rispettivamente 0 e 1. Ne consegue che $s = 1$. Dal momento che deve essere conservato, anche lo stato finale - indipendentemente dalla sua forma - avrà $j = 1$; resta soltanto da determinare il valore finale ℓ' , che deve andare a combinarsi con $s = 0, 1$ per dare $j = 1$. Gli unici valori che lo permettono sono: $\ell' = 0, 1, 2$ tuttavia, fra questi, soltanto uno è compatibile col principio di esclusione di Pauli.

Sia ψ_{fin} la funzione d'onda che descrive il sistema $(n + n)$ e si supponga che essa sia fattorizzabile, cioè che sia possibile separarne la parte spaziale da quella di spin.

$$\psi_{fin} = \psi_{spaziale}\psi_{spin}$$

Si è visto, in precedenza, che l'operatore di parità agisce come l'operatore di scambio su $\psi_{spaziale}$ restituendo un segno $(-1)^{\ell'}$. Sulla parte di spin invece, come visto nel teorema 4.12, lo scambio Sc restituisce $(-1)^{s+1}$. Queste informazioni si sono combinate, risultando nelle equazioni A.8. Insomma: affinché lo stato finale sia antisimmetrico allo scambio, la somma $\ell' + s$ dev'essere pari.

$$Sc\psi_{fin} = (-1)^{\ell'}\psi_{spaziale}(-1)^{s+1}\psi_{spin}; \\ (-1)^{\ell'+s+1} = -1 \iff \ell' + s \text{ pari} \quad (4.98)$$

Quest'ultima condizione si aggiunge a $j = 1$: due condizioni sul momento angolare finale sono abbastanza per determinare i valori di ℓ' e s . L'unica combinazione possibile, capace di rispettare entrambi i requisiti, è $\ell' = s = 1$.

$$j = 1 \in [|\ell' - s|, \ell' + s] \quad \ell' \in \{0, 1, 2\} \wedge \ell' + s = \text{pari} \iff \ell' = s = 1 \quad (4.99)$$

Poiché $\ell' = 1$ è dispari, lo stato finale pagherà un segno meno se sottoposto all'azione di \mathcal{P} . Per conservazione della parità anche la funzione d'onda iniziale dovrà avere parità

intrinseca -1. Applicando quest'informazione è possibile risalire alla parità del pion π^- :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \psi_{fin} &= (-1)^\ell \psi_{fin} = -\psi_{fin} \implies \mathcal{P} \psi_{ini} = (-1) \psi_{ini}, \text{ dove} \\ \mathcal{P} \psi_{ini} &= (-1)^\ell \mathbf{P}_\pi \mathbf{P}_d = (-1) \psi_{ini}, \quad \ell = 0, \quad \mathbf{P}_d = 1 \iff \mathbf{P}_\pi = -1\end{aligned}\tag{4.100}$$

Si possono riassumere le regole definitive per il calcolo della parità dei sistemi di particelle:

$$\mathcal{P} |\psi\rangle = \mathcal{P} |p_1 p_2\rangle = (-1)^\ell |p_1 p_2\rangle \mathbf{P}_{p_1} \mathbf{P}_{p_2}\tag{4.101}$$

Quindi, ricordando che per coppie particella/antiparticella vale:

$$\mathbf{BOSONI:} \quad \mathbf{P}_b \mathbf{P}_{\bar{b}} = 1\tag{4.102a}$$

$$\mathbf{FERMIONI:} \quad \mathbf{P}_f \mathbf{P}_{\bar{f}} = -1\tag{4.102b}$$

La formula 4.101 prende la seguente forma nei casi particolari di sistemi particella/antiparticella:

$$\mathbf{BOSONI:} \quad \mathcal{P} |b_1 b_2\rangle = (-1)^\ell |b_1 b_2\rangle\tag{4.103a}$$

$$\mathbf{FERMIONI:} \quad \mathcal{P} |f_1 f_2\rangle = (-1)^{\ell+1} |\psi\rangle |f_1 f_2\rangle\tag{4.103b}$$

4.9 Proprietà dei sistemi legate alla parità intrinseca

Per coppie di particelle in potenziale centrale abbiamo imparato come si calcola la parità intrinseca. La regola definitiva è stata espressa nell'equazione 4.101, qui *riproposta*:

$$\mathcal{P} |\psi\rangle = \mathcal{P} |p_1 p_2\rangle = (-1)^\ell |p_1 p_2\rangle \mathbf{P}_{p_1} \mathbf{P}_{p_2}$$

Da questa e dalle formule particolari 4.103 è possibile trarre interessanti conclusioni sulla parità dei sistemi e sul suo legame col momento angolare. Si pensi ad una coppia qualsiasi di particelle con spin nullo ($s = 0$), ergo *bosoniche*. Poiché non possiedono momento intrinseco, applicarvi l'operatore di parità è come scambiarle. Riassumendo:

$$\mathcal{P} \psi = Sc \psi = (-1)^\ell \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \psi\tag{4.104}$$

Si è nondimeno detto che bosoni identici vogliono solamente funzioni di stato totalmente simmetriche allo scambio 4.10. In ragion di ciò, se le due particelle sono indistinguibili, non potrà esistere alcuno stato con ℓ dispari: i possibili stati sono dimezzati.

$$Sc \psi = (-1)^\ell \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \psi \equiv \psi \iff \ell \text{ pari}\tag{4.105}$$

4.10 Operatore C-parità

L'inversione \mathcal{C} di C-parità è già stata incontrata in precedenza; in breve: si tratta di una simmetria che manda una particella nella sua antiparticella. Se $|mspq\rangle$ è lo stato che descrive una particella qualsiasi:

$$\mathcal{C}|mspq\rangle = |msp-q\rangle \quad (4.106)$$

Si tratta di una inversione $C^2 = \mathbb{1}$ unitaria e hermitiana, perciò è un'osservabile. Quando un sistema è invariante per C-parità, essa sarà conservata. È immediato verificare che le particelle cariche non possono essere autostati di \mathcal{C} : se ψ_{e^+} è la funzione d'onda che descrive un elettrone, \mathcal{C}

$$\mathcal{C}\psi_{e^+} = \psi_{e^-} \neq \alpha\psi_{e^+} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.107)$$

non esiste alcun parametro reale α (autovalore) capace di soddisfare la relazione.

Definizione 4.19. *Gli autostati di \mathcal{C} sono **tutte e sole** le particelle **neutre** o i sistemi neutri. L'autovalore (± 1) associato è detto C-parità intrinseca **C**.*

Osservazione 4.23:

Si ribadisce: le particelle cariche non sono mai autostati di \mathcal{C} , pertanto non possono avere C-parità. In ultima analisi, hanno C-parità soltanto le particelle elementari che coincidono con le proprie antiparticelle.

Esempio 4.6 (Antineutron)

Il neutrone, che è uno stato legato di quark up e down, non è uguale alla sua antiparticella:

$$\mathcal{C}|n\rangle = \mathcal{C}|udd\rangle = |\bar{u}\bar{d}\bar{d}\rangle \neq |udd\rangle \quad (4.108)$$

Esempio 4.7 (Antipione)

Il pion π^0 invece gode di questa caratteristica:

$$\pi^0 = u\bar{u} + d\bar{d} \implies \mathcal{C}\pi^0 = \bar{u}u + \bar{d}d = \pi^0 \quad (4.109)$$

ed è banale notare che la sua C-parità intrinseca è **C = +1**

Non è altrettanto agevole determinare la C-parità intrinseca del fotone, sicché si dovrà dedurla - come nel caso della parità \mathbf{P}_γ - dai dati sperimentali. Anticipando il risultato:

$$\mathcal{C}|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \implies \mathbf{C}_\gamma = -1 \quad (4.110)$$

Sarebbe possibile verificarlo - in modo discretamente semplice - anche in elettrodinamica classica, dove è sufficiente mostrare che la C-parità classica del campo elettromagnetico è -1.

Definizione 4.20. La C-parità classica intrinseca del campo elettromagnetico (E, B) è -1

Ora che la C-parità è definita per il fotone, può essere verificata nuovamente quella del π^0 . Si sa infatti che esso può decadere in due fotoni perciò, sapendo che le interazioni elettromagnetiche conservano la C-parità, con un breve conto si ottiene:

$$\mathcal{C} |\gamma\gamma\rangle = \mathbf{C}_\gamma \mathbf{C}_\gamma |\gamma\gamma\rangle = |\gamma\gamma\rangle \quad (4.111)$$

3

Per conservazione della C-parità, lo stato π^0 dovrà avere $\mathbf{C} = +1$:

$$\mathcal{C} |\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle \quad (4.112)$$

È curioso vedere cosa succede se si applica l'operatore \mathcal{C} a due pioni π^+ e π^-

Esempio 4.8 (Sistema $\pi^+\pi^-$)

Entrambi questi pioni hanno spin nullo, perciò l'unica caratteristica che li distingue è la carica. Quando questa viene invertita, uno diventa l'altro e viceversa:

$$\mathcal{C} |\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^-\pi^+\rangle \quad (4.113)$$

sostanzialmente, l'operazione è analoga al ribaltamento delle loro posizioni; pertanto - in questo specifico caso - l'operatore \mathcal{C} coincide con l'operatore scambio. Quest'ultimo a sua volta agisce esattamente come l'operatore parità, poiché non vi è nessuno spin in gioco. Allora:

$$\mathcal{C} |\pi^+\pi^-\rangle = Sc |\pi^+\pi^-\rangle = \mathcal{P} |\pi^+\pi^-\rangle$$

Avendo già studiato l'azione di \mathcal{P} , è semplicissimo stabilire la C-parità del sistema:

$$\mathcal{C} |\pi^+\pi^-\rangle = \mathcal{P} |\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^\ell \mathbf{P}_{\pi^+} \mathbf{P}^{\pi^-} \quad (4.114)$$

Osservazione 4.24:

Nonostante la singola particella elementare carica non possieda C-parità, è possibile definirne una per i sistemi particella/antiparticella, la cui carica totale è chiaramente nulla. Un caso rilevante è quello di un sistema fermione/antifermione di spin $1/2$, il cui esempio più calzante è il *positronio*.

Teorema 4.13

La C-parità intrinseca di una coppia fermione/antifermione è pari a -1 ; quella di una coppia bosone/antibosone è $+1$.

Esempio 4.9 (C-parità del positronio)

S'immagini di avere avere elettrone e positrone in moto in versi opposti. Le direzioni degli

³L'operatore di C-parità applicato ad un fotone restituisce la parità intrinseca del fotone.

spin possono essere solo parallele o antiparallele alle direzioni del moto. Quando si applica l'operatore \mathcal{C} , l'elettrone diventerà positrone e viceversa, ma entrambi conserveranno posizione e spin iniziali. Si faccia riferimento agli schemi 4.9, da cui è evidente che - stavolta - l'azione di \mathcal{P} non è equivalente. Rimane invece uguale l'operatore Sc . Le azioni dei tre sono schematicizzate di seguito.

$$e^+ \xleftarrow{\text{C-parità}} e^- \quad e^- \xleftarrow{\text{C-parità}} e^+ \quad (4.115a)$$

$$e^+ \xleftarrow{\text{P-parità}} e^- \quad e^- \xleftarrow{\text{P-parità}} e^+ \quad (4.115b)$$

$$e^+ \xleftarrow{\text{Sc scambio}} e^- \quad e^- \xleftarrow{\text{Sc scambio}} e^+ \quad (4.115c)$$

Per cui è evidente che:

$$\mathcal{C} |e^+e^-\rangle = Sc |e^+e^-\rangle \quad (4.116)$$

Applicando le relazioni 4.101, quindi moltiplicando per la C-parità intrinseca di una coppia fermione-antifermione (-1, per il teorema 4.13), è possibile risalire alla C-parità del positronio:

$$\mathcal{C} |e^+e^-\rangle = (-1)^\ell (-1)^{s+1} \mathbf{C}_{e^+e^-} |e^+e^-\rangle \implies \mathcal{C} |e^+e^-\rangle = (-1)^{\ell+s} |e^+e^-\rangle \quad (4.117)$$

In realtà lo stesso risultato può essere esteso a tutte le coppie di particelle di questo tipo.

Teorema 4.14

La C-parità di un sistema particella/antiparticella a spin s è *sempre* $(-1)^{\ell+s}$; indipendentemente dalla loro natura fermionica o bosonica.

Verifica - (Bosoni). Una verifica semplice per fermioni è l'esempio del positronio. Per particelle con spin intero le uniche differenze sono:

- Le parti di spin con s pari sono simmetriche
- La C-parità intrinseca della coppia è 1

Combinando queste informazioni e indicando con b un generico bosone:

$$\mathcal{C} |b\bar{b}\rangle = Sc |b\bar{b}\rangle = (-1)^\ell (-1)^s \mathbf{C}_{b\bar{b}} |b\bar{b}\rangle \implies \mathcal{C} |b\bar{b}\rangle = (-1)^{\ell+s} |b\bar{b}\rangle \quad (4.118)$$

□

4.10.1 Decadimento del positronio e produzione di fotoni

In laboratorio di fisica nucleare si studia la conversione di una coppia elettrone/positrone in fotoni, conseguenza del processo di decadimento radioattivo del sodio ^{22}Na . L'apparato

sperimentale viene disposto *ad hoc* per rivelare una coppia di fotoni γ emessi *back-to-back*, ma questi non sono gli unici ad essere prodotti. La verità è che, fintanto che il quadrimomento è conservato, il positronio può decadere in un numero qualsiasi (> 1) di fotoni.

Entrando nello specifico: il sodio decade per emissione di positroni (β^+), che perdono energia per la formula di Bethe e rallentano, fermandosi infine quando incontrano un elettrone con cui instaurano uno stato legato di positronio. La domanda è: in quanti fotoni può decadere il positronio? Sicuramente dovranno essere *almeno* due, che non devono essere necessariamente *back-to-back*. Si vuole studiare nel dettaglio la relazione tra spin del sistema e numero di γ emessi.

Per farlo, occorre risolvere l'equazione di Schrödinger per il positronio; la soluzione, fortunatamente, è analoga a quella dell'atomo d'idrogeno (equazione 4.74). Gli stati combinati di spin, al solito, saranno i ben noti singoletto e tripletto.

$$|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle = |00\rangle \oplus |1m\rangle \quad (4.119)$$

Si vuole studiare il livello energetico a minima energia, in cui $n = 1$ e $\ell = 0$. L'autostato in questione è in realtà la sovrapposizione di due stati $|100\rangle \otimes (|00\rangle \oplus |1m\rangle)$.

Definizione 4.21. *I due stati degeneri nel ground state del positronio vengono detti:*

Para-positronio $|100\rangle \otimes |00\rangle$

Orto-positronio $|100\rangle \otimes |1m\rangle$

Si hanno allora due casi che, per conservazione della C-parità, devono decadere in modi diversi. Si ricordi che la C-parità intrinseca del fotone è $C_\gamma = -1$.

1 *Para-positronio* $\ell = s = 0$ la C-parità è:

$$C_{s=0} = (-1)^{\ell+s} = (-1)^{0+0} = +1 \quad (4.120)$$

Può decadere soltanto in un numero **pari** di fotoni.

2 *Orto-positronio* $\ell = 0 \wedge s = 0$ la C-parità è:

$$C_{s=1} = (-1)^{\ell+s} = (-1)^{0+1} = -1$$

Può decadere soltanto in un numero **dispari** di fotoni.

Non solo entrambi i fenomeni sono possibili, ma si può calcolare analiticamente che il rapporto tra probabilità che un para-positronio decada in due fotoni e probabilità che l'orto-positronio decada in tre è circa 1/137. Questo valore è comunemente detto *costante di struttura fine*; viene presentato brevemente meccanica quantistica come il rapporto tra l'hamiltoniana dell'atomo d'idrogeno e le sue correzioni relativistiche.

Qui, per ottenerlo, si opera banalmente il rapporto delle vite medie tra i due stati metastabili:

- PARA $\simeq 125 \text{ ps} = (125 \cdot 10^{-12} \text{ secondi})$
- ORTO $\simeq 142 \text{ ns} = (142 \cdot 10^{-9} \text{ secondi})$

$$\frac{\text{PARA}}{\text{ORTO}} \simeq \frac{1}{137} \simeq \alpha \quad (4.121)$$

Non abbiamo le conoscenze per estrapolare il seguente dato, ma più precisamente sarebbe:

$$4 \frac{\pi^2 - 9}{9\pi} \alpha$$

Osservazione 4.25:

La costante di struttura fine è una quantità introdotta da Sommerfeld nel 1918 ed è rilevante per il modello atomico di Bohr-Sommerfeld. Rigorosamente:

Definizione 4.22. *La costante di struttura fine α è il rapporto tra la velocità dell'elettrone nella prima orbita dell'atomo di Bohr e quella della luce.*

In formule:

$$\alpha = \frac{v_1}{c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (4.122)$$

Essendo un rapporto adimensionale tra grandezze fisiche, nel sistema naturale il valore numerico è lo stesso. Ciò è particolarmente interessante poiché, con un escamotage, si può utilizzare α per calcolare il valore della carica dell'elettrone in natural units:

$$\alpha_{\text{NU}} = \frac{e_{\text{NU}}^2}{4\pi} \implies e_{\text{NU}} = \sqrt{4\pi\alpha_{\text{NU}}} \simeq 0.3 \quad (4.123)$$

Capitolo 5

Interazioni elettromagnetiche

La trattazione sulle interazioni fondamentali inizia dall'elettromagnetismo: l'unica che può essere rappresentata classicamente.

5.1 Elettrodinamica classica e passaggio alla QED

L'elettrodinamica classica è descritta da un set di 5 equazioni: 4 sono quelle di Maxwell, la quinta è la forza di Lorentz. Esse esplicitano le dipendenze dei campi elettromagnetici, mostrando come evolvono in funzione delle sorgenti e del tempo, nonché come perturbano il moto delle particelle. Questa teoria può essere dedotta e ricostruita interamente a partire da tre assiomi.

1. Le leggi fisiche hanno la stessa forma funzionale per ogni sistema di riferimento inerziale (SRI)
2. La velocità della luce nel vuoto è pari a c per ogni SRI
3. Ad ogni punto materiale si può associare un valore $q \in \mathbb{R}$, detto *carica elettrica* e invariante di Lorentz. Questo è tale per cui, considerati due punti materiali q_1 e q_2 a riposo in un dato SRI, la forza esercitata dal primo sul secondo ha la seguente forma funzionale: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

Si noti che i primi due assiomi sono generali e attinenti alla relatività ristretta, mentre l'ultimo è specifico per l'elettrodinamica.

5.1.1 Il problema dell'elettrodinamica classica

Il problema grave legato a questa teoria sorge quando si cerca di legarla alla meccanica quantistica: in questa branca, infatti, il concetto di forza non viene introdotto. Le equazioni del moto di una particella sono descritte tramite l'equazione di Schrödinger, affermando che esiste una funzione capace di codificare tutte le informazioni legate alla

particella - la funzione d'onda - che deve soddisfare:

$$\hat{H}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (5.1)$$

Il problema sta nella forma dell'hamiltoniana elettromagnetica quantistica. Questa, generalmente, viene ricavata tramite la quantizzazione canonica, cioè sostituendo posizione e momento, nel sistema classico, con i rispettivi operatori quantistici. Tuttavia, l'hamiltoniana che si ottiene è una funzione di potenziali, non dei campi elettromagnetici. Il punto è che i potenziali non determinano univocamente i campi. Una delle conseguenze importanti di questo fatto è l'effetto Aharonov-Bohm.

Dimostrazione. Si sa che la relazione tra campo elettrico e potenziale è: $E = -\vec{\nabla}V$. Si supponga di fare la seguente trasformazione: $V \rightarrow V + b$, dove $b \in \mathbb{R}$. Siccome il campo elettrico dipende dal gradiente, la costante sparisce ed esso rimane uguale nonostante il potenziale diverso. In meccanica quantistica invece, la stessa operazione è sostanzialmente un disastro, poiché le osservabili fisiche dipendono dal valore assoluto del potenziale. È immediato da osservare che la scelta delle costanti di normalizzazione sul potenziale influisce direttamente sull'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + qV \quad (5.2)$$

Perciò, H finisce per perdere di significato fisico. L'origine di tutti i problemi legati alla quantizzazione del campo elettromagnetico è da imputarsi a questo, quindi si deve cercare un espediente per venirne a capo. \square

5.1.2 Trasformazioni classiche di gauge

In primis, occorre definire quali siano le più generali trasformazioni dei potenziali vettore A e scalare V che mantengono inalterato il campo elettromagnetico, ergo la dinamica delle particelle.

Si ricorda che in elettrodinamica classica valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}, t) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}(\vec{x}, t) \\ B(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (5.3)$$

Si consideri una generica trasformazione di un potenziale vettore e scalare. Essa avrà la forma:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{a}(\vec{x}, t) \\ V' = V + b(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Si vuole ricavare la forma analitica di $a(\vec{x}, t)$ e $b(\vec{x}, t)$, funzioni a tre componenti dipendenti da spazio e tempo. Affinché il campo elettromagnetico rimanga inalterato:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{B} \implies \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0 \quad (5.5)$$

La funzione $\vec{a}(\vec{x}, t)$ è un *campo irrotazionale*, visto che il suo rotore deve essere nullo in ogni punto dello spazio e del tempo. Da questo segue immediatamente che $\vec{a}(\vec{x}, t)$ è conservativo su domini semplicemente connessi¹ e nondimeno esiste una funzione scalare $\tilde{\alpha}$ che ne è *primitiva*:

$$\vec{a} = \vec{\nabla} \tilde{\alpha} \quad (5.6)$$

A questo punto, si potrà scrivere la trasformazione del potenziale A nella forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \tilde{\alpha} \quad (5.7)$$

Si applica ora quanto visto al campo elettrico E :

$$\vec{E}' = -(\vec{\nabla} V + \vec{\nabla} b) - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \right) = \vec{E} \quad (5.8)$$

Per soddisfare l'equazione 5.8 dovrà valere:

$$\vec{\nabla} b + \frac{\partial a}{\partial t} \equiv k(\vec{x}, t) = 0 \implies \vec{\nabla} \left(b + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.9)$$

Sostanzialmente si ottiene che la quantità $b + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}$ - chiamata per comodità $k(\vec{x}, t)$ - deve dipendere solamente dal tempo $k(\vec{x}, t) = k(t)$. Questo è l'unico vincolo da imporre alla funzione $b(\vec{x}, t)$ affinché il campo elettromagnetico rimanga inalterato. In altri termini: è una funzione arbitraria che può essere cambiata a piacimento, nei limiti di questa condizione.

A questo punto si può introdurre - per comodità di calcolo - una nuova funzione α , definita come:

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \int_0^t k(t') dt' \quad (5.10)$$

Con questa ridefinizione si potrà scrivere:

$$b = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (5.11)$$

Così si hanno tutti gli ingredienti necessari per formulare una definizione consistente:

Definizione 5.1. *Le trasformazioni più generali che mantengono inalterato il campo elettromagnetico prendono il nome di **trasformazioni classiche di gauge** e hanno la*

¹Il fatto che il dominio debba essere semplicemente connesso non dà alcun fastidio poiché in fisica delle particelle (e anche in natura) questi sono gli unici domini di interesse. Per costruire domini non semplicemente connessi servirebbe una quantità di energia infinita.

seguente forma:

$$\begin{cases} \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\alpha(\vec{x}, t) \\ V'(\vec{x}, t) = V(\vec{x}, t) - \frac{\partial\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (5.12)$$

Osservazione 5.1:

Il problema delle trasformazioni classiche di gauge è che tutte le osservabili fisiche *dipendono* dalla scelta arbitraria del gauge.

5.1.3 Teoria semi-classica dell'elettromagnetismo

Si vuole ora affrontare lo stesso problema in meccanica quantistica, cercando di ovviare ai limiti della trattazione classica. Si inizia facendo la quantizzazione canonica di un sistema classico semplice: una particella carica che interagisce con un campo elettromagnetico. Innanzitutto, si scrive la lagrangiana del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q(V(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) \quad (5.13)$$

Il momento coniugato di questo sistema è:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{x}, t) \implies \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A}) \quad (5.14)$$

Il problema di questa grandezza è che, quando si ha un potenziale che genera forze dipendenti dalla velocità - come nel caso considerato - esso è diverso dal “momento classico”.

L’hamiltoniana di questo sistema è:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t)]^2 + qV(\vec{x}, t) \quad (5.15)$$

Anche qui, il problema riscontrato al paragrafo 5.1.1 è evidente: H non descrive realmente l’energia della particella poiché, al suo interno, compaiono quantità arbitrarie che dipendono dalla scelta del gauge. Si tenga presente che l’hamiltoniana classica non è un osservabile fisico ma uno strumento matematico: la corrispondente osservabile è l’energia della particella. Questa - nel caso non relativistico - vale $E = \frac{1}{2}mv^2$ e non dipende dalla scelta di α , com’è verificato di seguito:

Dimostrazione. Se si sostituisce l’espressione della velocità si può vedere che l’energia della particella è data da:

$$E = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 \quad (5.16)$$

Se si cambia il gauge allora:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}' &= m\vec{v} + q\vec{A} + q\vec{\nabla}\alpha \\
 \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \\
 \implies p' - q\vec{A}' &= m\vec{v} + q\vec{A} + q\vec{\nabla}\alpha - q\vec{A} - q\vec{\nabla}\alpha = m\vec{v} \\
 \implies \frac{1}{2m}(\vec{p}' - q\vec{A}')^2 &= \frac{1}{2}mv^2
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

□

Si procede ora con la quantizzazione canonica dell'hamiltoniana. Essa diventa un operatore hermitiano dato da:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - q\vec{A})^2 + qV \tag{5.18}$$

S'impone $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$; non si dimentichi che anche l'operatore quantomeccanico \hat{p} è una quantità vettoriale.

Il problema è che il momento è una quantità fisica mentre, facendo così, lo si sta trattando come un momento coniugato. Ci si chiede quindi come devono cambiare l'hamiltoniana e la funzione d'onda di una particella carica affinché tutte le osservabili fisiche non dipendano da α .

Chiaramente, condizione sufficiente affinché questo avvenga è che le nuove hamiltoniana e funzione d'onda soddisfino anch'esse l'equazione di Schrödinger:

$$H'\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} \tag{5.19}$$

Quindi, se ψ è soluzione dell'equazione di Schrödinger e lo è, nondimeno, la sua trasformazione ψ' , allora le *probabilità di transizione* nei due sistemi sono le medesime.

La condizione necessaria e sufficiente affinché la relazione 5.19 sia soddisfatta è che la nuova funzione d'onda si possa scrivere come²:

$$\psi' = \psi e^{\frac{i}{\hbar}q\alpha(\vec{x},t)} \tag{5.20}$$

Osservazione 5.2:

Se l'unica variazione è un termine di fase (dipendente da α), allora si ha la garanzia che la nuova ψ preservi il modulo dei prodotti scalari. Questo fatto è già stato appurato esaurientemente nella trattazione sulle trasformazioni di simmetria continue (sez. 4.5). In più, se il parametro α non fosse dipendente da spazio e tempo, si tratterebbe di una simmetria del sistema. In particolare, la trasformazione sarebbe una *simmetria globale U(1)*, che è una proprietà generale della meccanica quantistica.

²Il conto completo, non presentato a lezione, si può trovare a pag. 172 del libro *A modern primer in particle and nuclear physics* di F. Terranova.

La decisione di far dipendere la fase della funzione d'onda dalla scelta del gauge del campo elettromagnetico è fondamentale: non si sta più credendo che una particella abbia vita propria e campo elettromagnetico proprio, ma si sta correlando la particella alle condizioni del campo elettromagnetico.

Definizione 5.2. *L'equazione 5.20 prende il nome di **trasformazione di gauge** $U(1)$. Per motivi storici è anche detta **simmetria di gauge** $U(1)$: anche se propriamente non è una simmetria, d'ora in poi sarà chiamata così.*

Questa “simmetria” sta alla base della teoria semi-classica dell'elettromagnetismo: determina la forma dell'hamiltoniana e il termine di interazione tra particelle e campo elettromagnetico. Inoltre è una *simmetria locale* $U(1)$: permette, insomma, di scegliere arbitrariamente in ciascun punto dello spazio-tempo il termine di fase della trasformazione d'onda.

Si noti bene: *locale*, non *globale*. In breve, occorrerà porre un vincolo molto più stringente: la funzione d'onda rimane inevitabilmente correlata ai potenziali elettromagnetici. È possibile riassumere più formalmente il concetto tramite la seguente proposizione:

Proposizione 5.1

*Una teoria la cui hamiltoniana ha una simmetria di gauge, che permette di correlare particelle e campi tramite un termine d'interazione, viene chiamata **teoria di gauge** e la corrispondente simmetria è sempre di tipo **locale**.*

Questa è la ragione per cui spesso si dice che la simmetria di gauge “genera” le interazioni elettromagnetiche.

5.2 Elettrodinamica quantistica (QED)

La costruzione dell'elettrodinamica semi-classica è una diretta applicazione del *principio di gauge*, che permette di generare un termine di interazione a partire da un campo libero, ovvero un campo senza alcun termine di interazione. Questo è ancora più importante nelle teorie quantistiche dei campi (QFT): in esse le funzioni d'onda delle particelle (cariche) sono sostituite da dei campi e vi è una simmetria tra descrizione quantica di campi e particelle. In particolare, nelle QFT, il *principio di gauge* permette di generare termini di interazione a partire da lagrangiane libere. In elettrodinamica quantistica (QED), che non è altro che un'estensione all'elettromagnetismo delle QFT, la lagrangiana libera descrive la dinamica di una particella carica di spin 1/2 attraverso una lagrangiana di Dirac.

L'elettrodinamica quantistica fornisce mezzi per determinare la sezione d'urto di qualsiasi set di particelle cariche e processi di scattering. Il suo approccio è abbastanza diverso rispetto a quanto visto fino a questo momento, siccome le osservabili considerate sono le ampiezze di scattering.³

³Per ulteriori approfondimenti, non trattati all'interno del corso, si invita a consultare la sezione 13.1.1 del libro *A modern primer in particle and nuclear physics* di F. Terranova.

Il principio di funzionamento dell'elettrodinamica quantistica è il seguente:

Definizione 5.3. *La QED descrive tutti i processi elettrodinamici attraverso lo scattering di fotoni e particelle cariche. Gli elementi di matrice Lorentz-invarianti $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ e le corrispondenti sezioni d'urto sono il mezzo per verificare l'esito e la probabilità di transizione dei vari processi.*

5.2.1 Diagrammi di Feynman

L'operazione di determinare le probabilità di transizione a partire da un'hamiltoniana è un'operazione complessa. Fortunatamente, nella maggior parte dei casi può essere gestita tramite la tecnica dei **diagrammi di Feynman**.

L'idea di base è che un'hamiltoniana possa essere scritta come la somma di una parte imperturbata più una piccola parte perturbata dipendente dal tempo, esprimendo gli elementi di matrice come una serie perturbativa in funzione della perturbazione H_1 .

Feynman, e prima di lui Schwinger, dimostrarono che gli elementi di matrice Lorentz-invarianti $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ che portano da uno stato iniziale ad uno finale hanno una forma di perturbazione nella costante di struttura fine come esemplificato dall'equazione sottostante:

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \alpha A^{(1)} + \alpha^2 A^{(2)} + \alpha^3 A^{(3)} + \dots \quad (5.21)$$

Da ciò segue che l'ampiezza di decadimento, data dalla Regola d'oro di Fermi (formula 2.20), andrà come il modulo al quadrato di \mathcal{M} e quindi sarà proporzionale ad α^2 , esattamente come le sezioni d'urto.

La tecnica dei diagrammi di Feynman permette di calcolare, senza fare conti, l'ordine di grandezza di tutte le ampiezze di decadimento e delle sezioni d'urto.

Definizione 5.4. *I diagrammi di Feynman sono una rappresentazione grafica della serie perturbativa, che implementano il principio di indeterminazione di Heisenberg.*

Si immagini di avere lo scattering di due particelle e di voler studiare la probabilità che esso generi due nuove particelle. Ciò che accade “nel mezzo” deve essere compatibile col principio d'indeterminazione. Per esempio, si consideri il caso di un elettrone ed un positrone che si scontrano tra loro producendo una particella Z^0 che, a sua volta, decade in un muone e un antimuone.

Classicamente, se la coppia elettrone-positrone avesse massa minore di 91 GeV, non si potrebbe vedere Z^0 . Siccome però vale il principio di indeterminazione di Heisenberg e la vita media della Z^0 è molto piccola, vi è un'incertezza intrinseca sull'energia che permette di osservare Z^0 seppur la coppia elettrone-positrone abbia un'energia leggermente minore di 91 GeV. Minore è il tempo, maggiore è l'incertezza associabile all'energia. In teoria perturbativa ciò significa che non vale più la relazione $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Questa idea venne formalizzata da Feynman tramite l'introduzione del concetto di *particelle off-shell*.

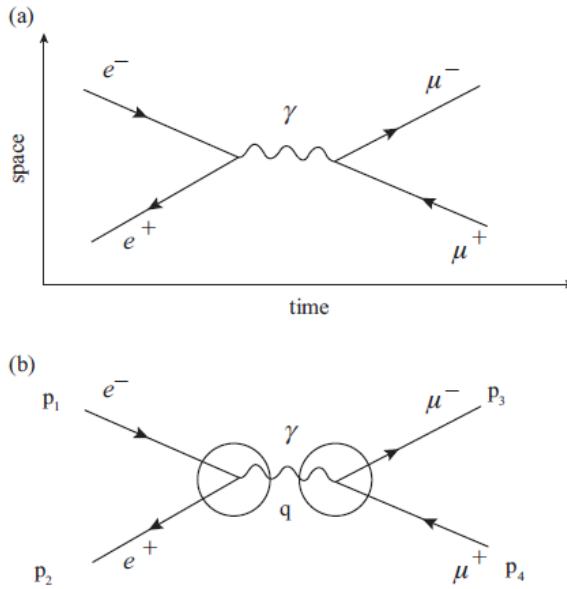


Figura 5.1: Diagramma di Feynman di una coppia elettrone-positrone che decade in una coppia muone-antimuone

Definizione 5.5. Le particelle **off-shell** sono particelle prodotte in un intervallo di tempo Δt tale che $\Delta E \Delta t >= \frac{\hbar}{2}$ e non soddisfano la relazione $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Osservazione 5.3:

Per abbreviare la notazione: $|\vec{p}|^2 = p^2$

Si dice che queste sono particelle virtuali poiché, se davvero si fosse in grado di rilevarle, si violerebbe la relatività. Quella delle particelle *off-shell* è un'idea per tener conto che in meccanica quantistica si possono avere stati intermedi di brevissima durata, teoricamente vietati, che decadono quasi subito in altre particelle.

5.2.2 Diagrammi al primo ordine

inizio a buttare giù un po' di righe mentre vedo la lezione, magari può essere d'aiuto a teo magari no

regole di feynman permettono di disegnare il diagramma, quindi calcolare l'elemento di matrice (ampiezza di probabilità di transizione) al primo ordine

impariamo a disegnarli e calcolare l'ordine di grandezza delle sezioni d'urto in QFT si fa in maniera più dettagliata

Definizione 5.6. Una particella è **on-shell** se rispetta la relazione di dispersione:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (5.22)$$

l'elemento n-esimo della serie perturbativa è dato dalla somma di tutti i diagrammi *connessi* nel piano (t, x) in uno scattering (a due corpi) che genera un certo numero di

particelle off-shell, che in ultima analisi danno luogo alle particelle nello stato finale:

$$a + b \rightarrow X \rightarrow c + d + e + \dots \quad (5.23)$$

questo elemento ennesimo è costruito così:

1. le particelle in stato iniziale e finale sono tutte *on-shell*
2. le particelle in stato intermedio sono, in generale, *off-shell*
3. il numero di vertici fotone-fermione è pari a $2n$, ovvero: ogni vertice contribuisce all'elemento n -esimo della serie perturbativa come $q\sqrt{\alpha}$
4. in ogni vertice, la carica e il quadrimomento si devono conservare

introduce alcune cose grafiche

- fermione: segmenti orientati, il cui verso di percorrenza va dal passato al futuro.
- antifermione: Stessa cosa dei fermioni, però con verso invertito (da futuro a passato)
- fotone: ondina; corrisponde colla sua antiparticella, quindi non c'è bisogno d'indicare il verso di percorrenza

esempio del più semplice scattering possibile

Esempio 5.1 (*Annichilazione positronio in coppia $\mu^+\mu^-$*)

Quali sono i diagrammi all'ordine più basso? ordine più basso, due corpi: i vertici devono essere 2 elettrone annichila con positrone, produce fotone off shell che a sua volta decade in coppia muone/antimuone.

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (5.24)$$

sezione d'urto? due vertici, che contribuiscono come $q\sqrt{\alpha}$; di conseguenza, l'elemento di matrice all'ordine più basso è proporzionale alla costante di struttura fine

$$|\mathcal{M}|^2 \sim \alpha^2$$

Così si potrà sostituire il valore della costante nella regola d'oro di Fermi 2.42.

$$\sigma \sim \int \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(\dots)$$

dove F è il *Müller flux factor*, che è simile alla prima variabile di Mandelstam quando l'energia è sufficientemente grande. $F \rightarrow s$ Quindi:

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2}{s}$$

Che è una previsione piuttosto accurata, per quanto approssimata.

Esempio 5.2 (*Scattering Bhabha*)

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad (5.25)$$

stato finale uguale a stato iniziale. Si annichilano, poi il fotone decade in un altro positrone ci sono due possibilità, quindi due diagrammi 1) uno analogo al caso dei muoni, 2) uno in cui le due particelle procedono anti-parallelamente e si scambiano un fotone

il primo diagramma è detto *s-channel* poiché l'energia del fotone prodotto dall'annichilazione è proporzionale alla prima variabile di Mandelstam, mentre il secondo viene chiamato *t-channel* essendo legato alla seconda variabile di Mandelstam *t*.

$$s = p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \text{ prima } t = p_1^\mu + p_3^\mu \text{ seconda } u = p_1^\mu + p_4^\mu \text{ terza}$$

Esempio 5.3 (*Scattering Müller*)

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \quad (5.26)$$

È più difficile, perché sono fermioni identici. Si devono eliminare tutti i diagrammi incompatibili con il principio di esclusione di Pauli. Un diagramma è banale: uguale a t-channel, solo con due elettroni

Le due particelle devono essere antisimmetriche allo scambio. *u-channel*, per cui non è semplice calcolare l'ordine di grandezza della sezione d'urto. Diagramma che va imparato a memoria.

Osservazione 5.4:

Occhio a non prendere alla lettera i diagrammi di Feynman. Non descrivono quello che succede, sono solo uno strumento matematico che aiuta a calcolare sezioni d'urto. Problemi legati alla probabilità nel vertice e alla causalità. I vertici dei diagrammi tipo s-channel sono eventi time-like

nei t-channel non può esserci causalità, perché i due vertici avvengono nello stesso istante. Quindi sono eventi space-like; chiaramente nella matematica funziona tutto perché il fotone è off-shell

5.2.3 Diagrammi al secondo ordine

Esempio 5.4 (*Annichilazione positronio in coppia $\mu^+\mu^-$ al secondo ordine*)

Quali sono i diagrammi al secondo ordine? ordine due, due corpi: i vertici devono essere 4 Stato finale e stato iniziale non devono essere toccati, il diagramma di partenza è quello del primo ordine. Vanno aggiunti due vertici nello stato intermedio.

ad esempio: - le particelle iniziali emettono radiazione che viene riassorbita da quelli finali (branch tral....) o anche una particella emette e riassorbe da sola radiazione - le particelle iniziali o finali scambiano radiazione in t-channel (vertex correction) - il fotone, nella fase intermedia, dà una coppia particella/antiparticella che annichila subito a dare lo stato finale (self energy)

vediamo ora un risultato anticipato in precedenza: perché è più probabile che ortopositronio decada in due fotoni, piuttosto che parapositronio decada in tre?

$$para \rightarrow \gamma + \gamma \quad (5.27)$$

al primo ordine della teoria perturbativa, c'è un solo diagramma di feynman a due vertici che ha positronio in iniziale e due fotoni in finale: prima di annichilarsi, una delle due particelle emette un fotone, quindi annichilano e emettono il secondo fotone è un t-channel

per il caso di para che ne emette tre: - prima di annichilare, entrambe le particelle emettono un fotone, quindi emettono il terzo annichilando - la stessa particella iniziale emette due fotoni prima di annichilare

chiaro che hanno più vertici dell'orto, quindi hanno meno sezione d'urto, ergo sono meno probabili

la vita media del para positronio è molto più piccola anche per questo motivo.

esempio positronio in particella/antiparticella in generale, al primo ordine sono sempre 2 vertici $\mathcal{M} \sim \alpha$ e mette il conto quasi-completo della sezione d'urto

paradossalmente, la sezione d'urto diminuisce al crescere dell'energia con cui si scontrano le particelle iniziali più sono lente, più tempo hanno a disposizione per interagire scambiando energia

iperbole/grafico sezione d'urto-energia si è visto che, in prima approssimazione, l'andamento era circa $\frac{1}{s}$

con l'avanzamento tecnologico, è stato sempre più possibile accelerare particelle ad energie maggiori per cui col passare degli anni si sono osservate diverse "risonanze" a energie specifiche, ciascuna associata ad una particella (anche stati legati) nello stato intermedio magari il fotone produce due quark off-shell e aumenta la sezione d'urto (non ho capito come siano correlate le due cose)

Se si vogliono scoprire nuove particelle, conviene scontrare frontalmente delle particelle. È più conveniente di uno scattering a targhetta fissa, ma ora si vuole quantificare la differenza di sezione d'urto.

$$a + b \rightarrow M \rightarrow c + d + e \quad (5.28)$$

Osservazione 5.5:

Se M è prodotta *on-shell* la sua massa invariante deve coincidere con quella di $a + b$, se prodotta *off-shell* dev'essere approssimativamente uguale.

prima variabile di mandelstam s

$$p_{TOT}^\mu = p_a^\mu + p_b^\mu \implies s = p_{TOT}^\mu p_{TOT\mu} = \quad (5.29)$$

$$E_{TOT} p_{TOT}^2 = (E_2 + E_3)^2 - (p_3^\mu + p_4^\mu)^2 \quad (5.30)$$

Sviluppiamo i calcoli, ricordando che per le particelle *on-shell* vale la relazione di dispersione $E = \sqrt{m^2 + p^2}$

$$\begin{aligned} E_{\text{TOT}} p_{\text{TOT}}^2 &= E_a^2 + E_b^2 + 2E_a E_b - p_a^2 - p_b^2 - 2p_a p_b = \\ m_a^2 + p_a^2 + m_b^2 + p_b^2 + 2E_a E_b - p_a^2 - p_b^2 - 2p_a p_b &= m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b - 2p_a p_b \end{aligned} \quad (5.31)$$

Il cui valore numerico dev'essere uguale per tutti gli osservatori inerziali, conservandosi nella transizione.

Formalizzando quanto osservato prima (oss. 5.5):

- On-shell: $s = M^2$
- Off-shell: $s \sim M^2$

Così si può prevedere quanto sia necessario accelerare le particelle iniziali per ottenerne una in particolare
sto impazzendo scusa
ricalcola la prima variabile di mandelstam per la targhetta fissa, a in moto e b ferma

Capitolo 6

Interazioni Forti

6.1 Quark e carica di colore

L'interazione forte è il primo tipo di interazione fondamentale che incontriamo a non possedere una descrizione classica. Vien da sé che, in questa fase, non si potrà procedere per quantizzazione canonica: non esiste alcun sistema classico da cui partire.

La prima evidenza sperimentale di una forza a corto raggio che tenesse insieme i nucleoni si ebbe grazie a Wigner, in seguito alla scoperta del neutrone negli anni trenta. Egli si accorse che le energie di legame dei nuclei di deuterio (${}^2_1\text{H}$: 2.2 MeV), trizio (${}^3_1\text{H}$: 8.5 MeV) e particella alfa (${}^4_2\text{He}$: 28 MeV) erano ordini di grandezza maggiori rispetto alla scala tipica delle interazioni elettromagnetiche. Inoltre, maggiore era il numero di protoni e neutroni, maggiore era la loro energia di legame. Wigner concluse che doveva esistere una forza a cortissimo raggio che legasse protoni e neutroni, la cui intensità doveva aumentare con il numero di massa.

Le interazioni forti furono comprese nel 1973, quando ci si rese conto che non erano altro che l'ennesima manifestazione del *principio di gauge* e sono interazioni tra *quark*.

Definizione 6.1. *I quark sono una classe di fermioni elementari composta da sei particelle con spin $\frac{1}{2}$ e carica elettrica frazionaria.*

A cavallo tra gli anni '50 e '60, i fisici avevano scoperto più di duecento particelle cosiddette elementari: un numero elevatissimo. Questa eccessiva varietà di particelle venne risolta nel 1963 da Gell-Mann. Egli calcolò le funzioni d'onda delle particelle fino ad allora scoperte, riconducendole a semplici combinazioni lineari di quark up, down e strange. In questo modo si accorse che - tante di queste - non erano per niente "elementari", bensì composte da stati legati di quark.

In realtà, il termine *quark* è piuttosto privo di significato, poiché non è possibile isolare uno ed identificarlo. Questo nonostante siano carichi elettricamente, pertanto - almeno in linea di principio - anche molto facili da individuare. Infatti, tramite la formula di Bethe (eqn. 3.20), si può calcolare la perdita di energia di una particella in funzione della distanza, ergo determinarne la carica elettrica. Tuttavia, non si era mai osservata prima

una carica minore di quella dell'elettrone. Si dovette aspettare fino al 1973 per avere una giustificazione teorica dell'impossibilità di osservare una carica frazionaria, quando fu formulato l'impianto teorico dell'interazione forte.

Nome	Simbolo	Carica	Massa	Anno di scoperta
up	u	+2/3 e	2 ± 0.9 MeV	1963
down	d	-1/3 e	5 ± 1 MeV	1963
strange	s	-1/3 e	95 ± 5 MeV	1963
charm	c	+2/3 e	1.2 GeV	1974
bottom/beauty	b	-1/3 e	4.2 GeV	1977
top/truth	t	+2/3 e	173 GeV	1995

Tabella 6.1: Tabella con le varie proprietà delle 6 tipologie o saperi/flavor di quark

Definizione 6.2. Le “cariche” delle interazioni forti, che nel loro complesso vengono chiamate **cariche di colore**, sono di tre tipi: **Rossa (R)**, **Verde (G)** e **Blu (B)**.

Si potrà allora scrivere la funzione d'onda più generale di un quark come la somma delle funzioni d'onda di un quark rosso, un quark verde e di un quark blu¹:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_R(\vec{x}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_G(\vec{x}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_B(\vec{x}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Osservazione 6.1:

Ogni quark può avere solo una delle tre cariche di colore, quindi può essere **solo** rosso, blu o verde.

Essendo fermioni dotati di massa, secondo l'equazione di Dirac, ad ogni quark dev'essere associata un'antiparticella: l'antiquark, che avrà carica elettrica e carica di colore *inverse* rispetto al suo quark.

6.2 Origine delle interazioni forti

Non esiste alcun esperimento che sia in grado di determinare univocamente la carica di colore di una particella, come - analogamente - in meccanica quantistica non v'è modo di distinguere due particelle identiche. In altri termini: è possibile ridefinire le cariche di colore in qualsiasi modo (ad esempio scambiando un quark rosso con un quark blu) lasciando immutate le ampiezze di transizione in un sistema.

Vogliamo ora determinare l'hamiltoniana delle interazioni forti, partendo proprio dal concetto di *ridefinizione di colore*.

¹L'equazione 6.1 è valida solo nel caso non relativistico, in cui la parte di spin si può fattorizzare. Fortunatamente, i risultati seguenti valgono anche nel caso relativistico, in cui verranno sostituite le $\psi_{R,G,B}$ con i rispettivi *spinori*.

Cambiare la definizione di *RGB* significa fare una trasformazione che lascia immutata la fisica di un sistema, per cui invariante. Si cerca di costruire un operatore del cambio di base che descriva, in uno spazio vettoriale tridimensionale a coefficienti complessi, la simmetria di colore.

Si tratta quindi di un problema in cui va determinata la funzione del cambio di base U :

$$\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix} \vec{\psi} \rightarrow U \vec{\psi} \quad (6.2)$$

La 6.2 è una trasformazione unitaria e continua quindi, come enunciato dal teorema di Stone 4.3, si può esprimere in forma esponenziale $U = e^{i \sum_j \alpha_j T_j}$. Avendo imposto l'invarianza sotto trasformazione di colore, U dovrà essere una simmetria in meccanica quantistica.

Definizione 6.3. U è detta **simmetria globale di $SU(3)_C$** “di colore”².

A questo punto, si definisce un analogo di colore alla simmetria di gauge (incontrata nella relazione 5.20), chiamata **simmetria locale di $SU(3)_C$** :

$$\vec{\psi} \rightarrow U \vec{\psi} = e^{i \sum_j \alpha_j(\vec{x}, t) T_j} \vec{\psi} \quad (6.3)$$

che rimane una simmetria nonostante i coefficienti α_j siano funzioni dello spazio e del tempo.

6.2.1 Teoria delle rappresentazioni

Si ricorda la definizione data in algebra lineare e geometria del concetto di gruppo.

Definizione 6.4. Un **gruppo** è una coppia costituita da un insieme e un operatore (G, \cdot) che gode di quattro proprietà:

1. **Chiusura:** se $g_1, g_2 \in G \implies g_1 \cdot g_2 \in G$
2. **Esistenza dell'identità:** $\exists \mathbb{1}$ tale che $g \cdot \mathbb{1} = g \quad \forall g \in G$
3. **Esistenza dell'inverso:** $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$
4. **Associatività:** $g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$

Esempio 6.1

Un esempio è il gruppo $U(1)$, degli *scalari unitari in \mathbb{C}* . Semplicemente: è l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z\bar{z} = |z|^2 = 1$; particolarmente lampante è il caso della fase: $e^{i\alpha_1} \cdot e^{i\alpha_2} = e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

²Il gruppo unitario speciale di grado n , che viene indicato con questo simbolo $SU(n)$ è il gruppo delle matrici unitarie d'ordine n con determinante uguale a 1. La “C” al pedice indica che la trasformazione agisce sulla funzione d'onda del colore

Proposizione 6.1

$SU(3)$ è un gruppo.

Dimostrazione. Suppongo $A, B \in SU(3)$ allora:

- $A \cdot B \in \text{Mat}_{3 \times 3}$
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$
- $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = (A \cdot A^t) \cdot (B \cdot B^t) = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$

□

Questa dimostrazione è particolarmente semplice poiché si serve di tutta una serie di teoremi dell'algebra lineare validi per le matrici quadrate. Si è però dato per scontato che sia sempre possibile mappare un gruppo arbitrario in un gruppo di matrici; la branca della matematica che si occupa di questo problema è detta *teoria delle rappresentazioni*.

Definizione 6.5. Una *rappresentazione* U è una mappa tra gli elementi del gruppo G e le matrici su un determinato spazio vettoriale V che gode delle seguenti proprietà:

$$U : G \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(V), \quad g \mapsto U(g); \quad g \in U(G), \quad U(g) \in \text{Mat}_{n \times n}(V) \quad t.c. : \quad (6.4)$$

1. $U(g_1 \cdot g_2) = U(g_1) \cdot U(g_2)$
2. $U(g^{-1}) = U(g)^{-1}$
3. $U(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_n$

Osservazione 6.2:

I gruppi ammettono rappresentazione in qualunque dimensione. L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} è un , quindi anche un gruppo. Ogni $z \in \mathbb{C}$ si può rappresentare come una matrice diagonale con dimensione arbitraria, nella forma:

$$U(z) = z\mathbb{1}_n \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

Esempio 6.2

Si consideri il gruppo $U(1)$. In una dimensione, il termine scalare $e^{i\alpha}$ ne è rappresentazione. La sua rappresentazione *bidimensionale* più generale sarà una matrice diagonale 2×2 ; sia $\vec{\psi} \in G$ una coppia ordinata:

$$\vec{\psi} = \psi_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Il cambio di fase U si potrà scrivere come:

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \longmapsto U(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\psi_a \\ e^{i\alpha}\psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = (e^{i\alpha}\mathbb{1}_2)\vec{\psi} \quad (6.6)$$

Ovviamente per noi è molto più comodo rappresentare il gruppo $U(1)$ in una dimensione.

Definizione 6.6. *Le rappresentazioni da cui è impossibile risalire all'intero spazio vettoriale originale sono dette **riducibili**. Quelle che lo permettono, invece, sono **irriducibili**.*

In maniera più formale:

Definizione 6.7. *Un sottospazio lineare $W \subset H$ è chiamato **G -invariante** se:*

$$U(g) \cdot w \in W, \quad \forall g \in G, \quad \forall w \in W \quad (6.7)$$

*Una rappresentazione del gruppo G su uno spazio vettoriale H di dimensione n è **irriducibile** se non esiste alcun sottospazio W di H che è G -invariante.*

Osservazione 6.3:

È interessante notare che le rappresentazioni riducibili danno sempre matrici che possono essere diagonalizzabili a blocchi.

Nella trattazione sulla teoria dell'interazione forte faremo riferimento sempre a gruppi continui e differenziabili detti anche *gruppi di Lie*³.

A noi come fisici, in particolare, interessano i gruppi $U(1)$, il generatore dell'interazione elettromagnetica, $SU(3)$, che genera le interazioni forti, e il gruppo $SU(2)$, del quale ci serviremo per il modello a quark.

Teorema 6.1

Qualunque gruppo $SU(n)$ ammette un massimo di $n^2 - 1$ generatori linearmente indipendenti. In particolare, $SU(3)$ è generato da 8 operatori hermitiani: le matrici autoaggiunte di una sua base sono proprio i suoi generatori infinitesimi.

Osservazione 6.4:

Il numero di generatori determina il numero di mediatori di una particolare interazione. Quindi, l'interazione elettromagnetica ha un solo mediatore (il fotone), mentre l'interazione forte è mediata da 8 particelle: i gluoni.

³In realtà da un punto di vista puramente formale i gruppi di Lie sono una classe leggermente più ampia, ma per i nostri scopi possiamo utilizzare i due termini come sinonimi.

6.3 Cromodinamica Quantistica (QCD)

6.3.1 I diagrammi di Feynman in QCD

I diagrammi di Feynman della QED sono basati vertice elettrone-fotone che corrisponde al termine di interazione nella lagrangiana tra l'elettrone e il fotone (figura 5.1). Nella sezione 5.2.1 abbiamo considerato solo l'elettrone e il muone, ma i diagrammi rimangono validi per qualunque particella di carica ze , ($z \in \mathbb{Z}$). I quark hanno carica elettrica oltre che di colore, per cui sono sensibili sia alle interazioni forti che a quelle elettromagnetiche. Tuttavia, questi vertici - e quindi tutte le ampiezze di scattering della QED - sono indipendenti dalla carica di colore dei quark, poiché le due interazioni sono completamente disaccoppiate.

In ogni caso, nonostante i quark siano suscettibili alle interazioni elettromagnetiche, la loro interazione forte prevale sull'interazione em. Il vertice di interazione della cromodinamica quantistica è mostrato in figura 6.1.

I mediatori dell'interazione forte sono i gluoni e, come in tutte le teorie di gauge, sono particelle massless di spin 1. Come accennato in precedenza (oss. 6.4), i gluoni sono tanti quanti i generatori linearmente indipendenti del gruppo di gauge associatogli (8 per $SU(3)$).

Quindi l'analogo della costante di struttura fine per l'interazione forte dovrà essere moltiplicata per una matrice 3×3 e queste matrici (λ_j) dovranno essere otto.

Definizione 6.8. *Queste otto matrici sono dette **matrici di Gell-Mann** e sono:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La forma di queste matrici suggerisce che i gluoni si accoppiano con numero limitato di cambi di colore. Per esempio, se associamo le cariche di colore come nell'equazione 6.1, esistono solo due gluoni che scatterano un quark rosso in un altro quark rosso poiché:

$$(1, \ 0, \ 0) \lambda_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

è diversa da zero soltanto se $j = 3$ e $j = 8$. Lo scattering di un quark blu in un quark blu avviene solo tramite λ_8 .

I gluoni possono pertanto cambiare il colore della carica portata dai quark: λ_1 e λ_2 trasformano un quark rosso in un quark verde, mentre λ_4 e λ_5 trasformano un quark rosso in un quark blu. Al contrario della QED, dove è ovvia la conservazione della carica - poiché la carica entrante in un vertice è uguale alla carica, visto che esiste un solo tipo di carica -, nella QCD i vertici possono cambiare il tipo della carica. È la *carica di colore totale* che deve essere conservata.

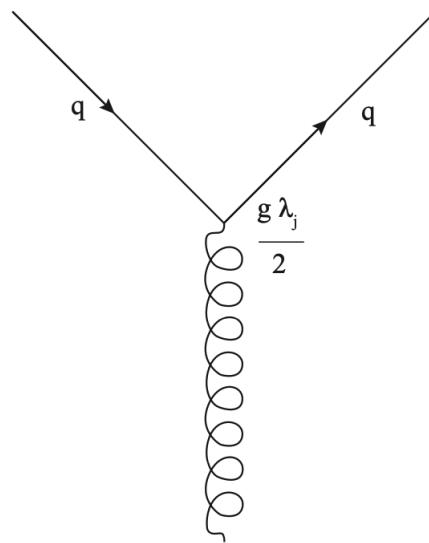


Figura 6.1: Diagramma di Feynman dell'interazione tra quark e gluone in QCD. λ_j è la j -esima matrice di Gell-Mann, q è il vettore a tre componenti che rappresenta il quark e g è la carica unitaria nell'interazione forte ($\alpha_s = g^2/4\pi$)

6.3.2 Scattering tra quark

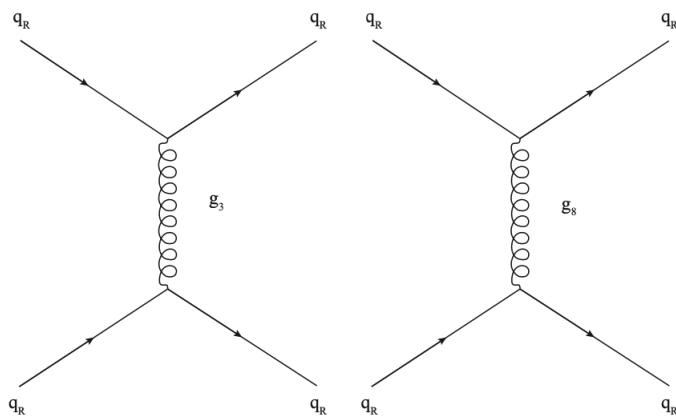


Figura 6.2: Urto tra due quark rossi. In questo caso: due gluoni (g_3 e g_8) contribuiscono all'ampiezza di scattering.

Introduciamo la *costante di struttura fine delle interazioni forti* o *α -strong*: α_s .

Dal momento che l'assegnazione del tipo di carica è convenzionale, le ampiezze di scattering devono essere indipendenti dall'equazione 6.1. Potevamo scegliere che il vettore $(1, 0, 0)$ rappresentasse un quark blu invece di un quark rosso, ma nessuna osservabile fisica dipende da questa scelta.

Proposizione 6.2

Siccome c'è un'apparente asimmetria tra il numero di gluoni che contribuiscono allo scattering rosso-rosso (2) e quelli che contribuiscono allo scattering blu-blu (1), si può dimostrare che le ampiezze di transizione sono le stesse.

Verifica. Per un'interazione blu-blu⁴:

$$(0, 0, 1) \frac{\lambda_8}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6.9)$$

Quindi l'elemento di matrice sarà proporzionale a:

$$\mathcal{M} \sim \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha_s} \right)^2 = \frac{1}{3} \alpha_s \quad (6.10)$$

Ora considero un'interazione rosso-rosso, la quale è mediata da 2 gluoni quindi:

$$(1, 0, 0) \frac{\lambda_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \quad (6.11a)$$

$$(1, 0, 0) \frac{\lambda_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0) \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (6.11b)$$

Quindi l'elemento di matrice sarà dato da:

$$\mathcal{M} \sim \left(\frac{1}{2} \right)^2 \alpha_s + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \alpha_s \quad (6.12)$$

Come si può facilmente notare dalle equazioni 6.10 e 6.12 le due ampiezze di transizione sono uguali. \square

Questo risultato non deve sorprendere: la simmetria di gauge $SU(3)_C$ pone alla base della propria definizione proprio l'invarianza di colore. *La cromodinamica quantistica garantisce l'invarianza di tutte le osservabili fisiche rispetto alle definizioni di rosso, verde e blu.*

⁴Il fattore $\frac{1}{2}$ è puramente convenzionale e aiuta a semplificare i conti

Teorema 6.2

Non possiamo ideare un esperimento che misuri il colore di un quark. L'origine stessa dell'interazione forte sono l'arbitrarietà della definizione di colore e la nostra impossibilità a distinguere quark di colori diversi.

Questo è un principio fondamentale della natura, proprio come il principio di esclusione di Pauli. In quel caso, la nostra impossibilità nel distinguere fermioni identici porta a funzioni d'onda totalmente antisimmetriche.

Ci si può chiedere se lo scattering di due quark up blu sia lo stesso di due quark down blu. La risposta è *quasi*. Infatti, l'interazione forte è sì insensibile alla carica elettrica del quark, tuttavia un quark up ha una massa diversa da un quark down, quindi sarà diverso anche il suo spazio delle fasi. Oltre a questo, le ampiezze QED sono più grandi per i quark up poiché hanno carica elettrica maggiore.

In ogni caso queste correzioni sono minuscole rispetto all'elemento di matrice delle interazioni forti, che è insensibile al sapore del quark. In maniera rigorosa:

Teorema 6.3 (Simmetria di flavor)

Se i quark hanno la stessa massa (quark degenerati) e trascuriamo le interazioni elettromagnetiche, nessuna osservabile della QCD dipende dal sapore dei quark.

6.3.3 Libertà Asintotica

Per molto tempo, si cercarono di spiegare le interazioni forti impiegando la teoria di gauge. Sino al termine degli anni '60 sembrava molto difficile riuscirci, sicché le loro proprietà si discostavano molto da quelle dell'elettrodinamica quantistica. Tutto cambiò all'inizio degli anni '70, quando il lavoro svolto da Gross, Politzer e Wilczek risolse in un colpo solo tutti i problemi. Per comprendere questo risultato bisogna tornare all'elettrodinamica quantistica: si considera un elettrone che si annichila con un positrone a produrre un fotone. Il diagramma di Feynman che rappresenta - in ottima approssimazione - questo fenomeno è quello più semplice, nonché quello all'ordine più basso. Ovviamente esistono anche diagrammi ad ordine più alto, che contribuiscono mano a mano sempre meno nella serie perturbativa. Se si considerano i diagrammi al secondo ordine, risultano particolarmente interessanti quelli in cui il fotone virtuale genera una coppia e^+e^- o $\mu^+\mu^-$, rappresentata da una sorta di "bolla", che viene poi distrutta senza lasciare traccia nel diagramma. Maggiore sarà l'ordine perturbativo, maggiore sarà il numero di "bolle". Questi diagrammi vengono chiamati *diagrammi di self-energy*. Negli anni '50 ci si iniziò a chiedere se le serie perturbative convergessero, perciò si iniziarono a studiare i vari problemi di convergenza. A questo proposito Landau, nel 1954, enunciò un elegante teorema:

Teorema 6.4

Dato un diagramma di Feynman, sommando a tutti gli ordini perturbativi il diagramma

relativo alla self-energy, la somma converge ed è equivalente al diagramma di ordine più basso, la cui costante di struttura fine è sostituita dall'espressione:

$$\alpha(s) = \frac{\alpha(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha(m_e^2)}{3\pi} \log(\frac{s}{m_e^2})} \quad (6.13)$$

Definizione 6.9. Nella relazione 6.13, $\alpha(m_e^2)$ viene chiamata **costante a basse energie** e vale circa $\frac{1}{137}$.

Il risultato appena trovato ha un importante significato fisico. I termini successivi della serie perturbativa, non sono altro che correzioni dovute al principio di indeterminazione, suggeriscono che la costante di struttura fine non sia in realtà una costante, quanto piuttosto una funzione dipendente dall'energia. Al variare dell'energia, quindi, cambia anche l'intensità delle interazioni elettromagnetiche.

Inoltre, andando a graficare la formula 6.13 in funzione di s , è subito possibile notare un andamento divergente. Landau constatò che, idealmente, mettendosi ad energie sufficientemente grandi, si potrebbe arrivare a valori di $\alpha(s)$ maggiori di 1; ciò renderebbe la serie divergente. Per di più, farebbe crollare l'intera logica dietro alla teoria delle perturbazioni, per cui si presume che il termine perturbativo sia significativamente minore rispetto a quello imperturbato. Ad energie molto alte quindi, Landau dedusse che i diagrammi di Feynman non sono più sfruttabili; di conseguenza, non si riescono a calcolare le sezioni d'urto.

L'energia che rende α_s pari a 1 è dell'ordine di 10^{34} GeV: non si conoscono fenomeni ed energie a questo ordine di grandezza. Fortunatamente, dunque, la teoria dell'elettrodinamica quantistica è salva.

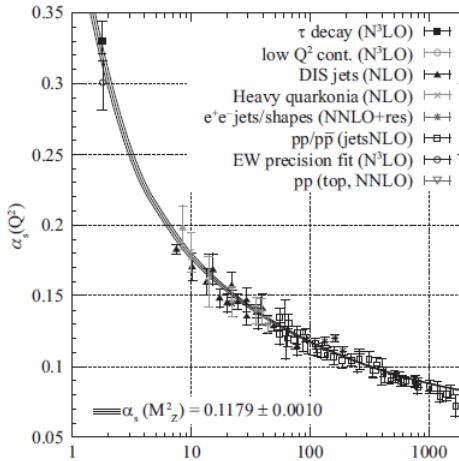
Questo risultato venne ripreso nel 1973 tramite la cromodinamica quantistica. All'epoca non si conosceva il valore di α_s , perciò non si sapeva da dove partire nell'impostare il conto. Si suppose allora che esistesse un'energia μ tale che $\alpha_s(\mu^2) < 1$: in tal caso, ci si può posizionare nelle vicinanze di μ e scrivere i diagrammi di Feynman della cromodinamica in quell'intorno, per poi proseguire con i soliti calcoli di Landau.

Si trovò che $\alpha_s(s)$ dipende da s tramite la seguente espressione:

$$\alpha_s(s) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\frac{33-F}{3}) \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \log(\frac{s}{\mu^2})} \quad (6.14)$$

Nella relazione appena enunciata, chiamata *Formula di Gross-Politzer-Wilczek*, F è il numero di flavor di quark, pari a 6 (loro ancora non lo sapevano). Essa, se graficata in funzione di s , mostra un andamento monotono decrescente, come evidenziato nella figura 6.3. La formula 6.14 dice quindi che le interazioni forti, al crescere dell'energia, si attenuano. Questa proprietà viene chiamata **libertà asintotica**.

Nel 1991, con l'esperimento LEP, α_s fu misurata con grande precisione e si scoprì che il suo valore, quando l'energia coincide con la massa di Z^0 è circa pari a $1/9$. Tutt'ora rimane


 Figura 6.3: Andamento di α_s in funzione di s

la misurazione più precisa mai fatta di α_s ad una determinata energia. A questo punto si inserì questo valore nella formula 6.14 e venne disegnata con precisione tutta la curva. Grazie a ciò fu calcolato il valore di energia per cui α_s diventa pari a 1. Chiaramente, contrariamente al fenomeno predetto da Landau, questo si verifica a bassa energia, circa 300 MeV: questo valore di riferimento viene indicato con Λ_{QCD} . Sotto questo valore quindi non si possono più utilizzare i diagrammi di Feynman.

Si vuole ora vedere cosa accade in natura quando si considerano fenomeni con energia minore di Λ_{QCD} . Si immagini di prendere un protone ed un antiproton e farli collidere. Si sa che il protone è uno stato legato uud , mentre l'antiproton è $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$. Al momento della collisione, potrebbe accadere che il quark down si annichili con quello *antidown* producendo un gluone, che a sua volta dà origine a due quark qualunque. Per comodità, s'immagina che questi ultimi siano un *up rosso* e un *antiup antirosso*.

Le due particelle sono in moto accelerato, perciò possono perdere energia per radiazione: la probabilità che venga emesso un gluone è proporzionale a α_s , quindi molto elevata. Se ciò accade, il quark up rosso avrà energia minore, ergo α_s maggiore: a questo punto è praticamente certo che emetta un secondo gluone. Si innesca dunque un meccanismo particolare: più particelle emette il quark, più probabilità avrà di emetterne altre. I gluoni a loro volta producono dei quark, dando vita ad una cascata di gluoni e quark. Dal momento in cui un quark avrà energia minore di 300 MeV ed emetterà un gluone non si sa più che cosa accada; questo punto prende il nome di *regione di adronizzazione*. Naturalmente, la cascata di gluoni non può procedere all'infinito, ma non si ha idea di come e quando si ferma. La cosa più “probabile” è che i gluoni continuino a perdere energia, mentre a sopravvivere siano solo gli stati legati non soggetti ad interazione forte, ovvero privi di colore. Questa considerazione può essere formalizzata nella cosiddetta ***congettura di confinamento***.

Proposizione 6.3 (*Conggettura di confinamento*)

Tutti gli stati finali delle interazioni forti sono stati legati di quark o di gluoni privi di carica e di colore, nonché invarianti per trasformazione di $SU(3)$ sul colore.

Definizione 6.10. Stati legati di questi tipo sono chiamati **singoletti di colore**.

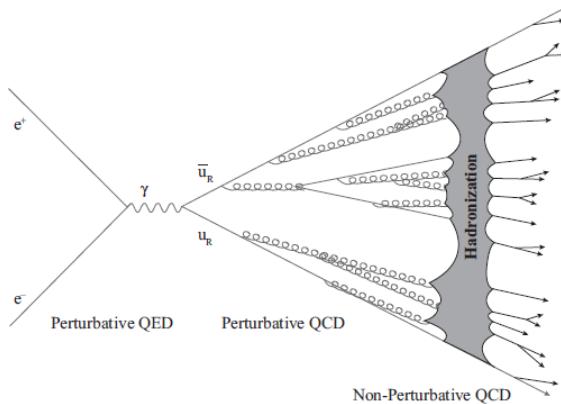


Figura 6.4: Collisione elettrone-positrone con regione di adronizzazione. Una coppia elettrone-positrone si annichila producendo un fotone che genera una coppia quark-antiquark (in questo caso quark di tipo “up” e con carica di colore rossa).

Questa proposizione viene chiamata congettura poiché non è mai stata trovata una soluzione analitica in grado di calcolare come evolvono le particelle nella regione di adronizzazione. Senza di essa, la congettura non può essere dimostrata e non può essere formalizzata in un problema. Questo è quello che viene chiamato *mass-gap problem*.

Se si riuscisse a trovarne la soluzione analitica, si potrebbero studiare tutte le teorie fisiche in regime perturbativo e non: questo è di grande interesse per i matematici. Ai fisici interessa meno: Wilson propose di scrivere l’equazione del moto, dividerne il dominio in tante parti più piccole, quindi dimostrare che il risultato converge per discretizzazione del dominio. Per così dire: risolse il problema numericamente. Sul finire degli anni ’80 un computer riuscì a completare il calcolo per lo specifico scattering presentato prima, mostrando che gli stati finali sono effettivamente singoletti di colore. La proposizione viene ancora chiamata congettura, siccome non è stata ancora risolta analiticamente, ma - perlomeno all’atto pratico - in fisica può essere considerata un vero e proprio teorema.

La proposizione 6.3 consente di risalire alla lista di tutte le particelle, semplicemente calcolando tutti i possibili stati legati di quark o gluoni che sono singoletti di colore.

6.4 Adroni nel modello a due quark

Si vogliono andare a studiare tutti i possibili stati legati che godono di questa proprietà, classificando tutte le particelle composte da quark *up* e *down* (Modello a 2 quark).

Definizione 6.11. I singoletti di colore si chiamano **adroni**. Ne esistono 5 tipi.

Nome	Forma
Mesone	$q_1 \bar{q}_2$
Barione \wedge [Antibarione]	$q_1 q_2 q_3 \wedge [\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_3]$
Glueball	$g_1 g_2$
Tetraquark	$q_1 \bar{q}_2 q_3 \bar{q}_4$
Pentaquark	$q_1 q_2 q_3 q_4 \bar{q}_5$

Tabella 6.2: Tabella con i vari tipi di adroni

Osservazione 6.5:

Gli ultimi tre sono stati scoperti molto recentemente, motivo per cui è comune dire che gli adroni sono di 2 tipi. Si noti anche che gli ultimi tre possono essere scritti come composizione dei primi due.

Ne si consideri ora la funzione d'onda. Quella di un mesone, ad esempio, ha forma:

$$\psi_{q_1 \bar{q}_2} = \psi_{spaziale} \psi_{spin} \psi_c \psi_f \quad (6.15)$$

La congettura di confinamento dice che, se viene applicata una simmetria $SU(3)$, ψ_c deve rimanere invariata. Si può dimostrare che l'unica funzione che non cambia mai per trasformazioni di questo tipo è:

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}} [q_1^B q_2^{\bar{B}} + q_1^R q_2^{\bar{R}} + q_1^G q_2^{\bar{G}}] \quad (6.16)$$

Osservazione 6.6:

Si noti che la formula 6.16 è simmetrica.

La stessa cosa si può fare con i barioni. Anche in questo caso esiste un'unica combinazione che rimane invariata:

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} [(q_1^R q_2^B - q_1^B q_2^R) q_3^G + (q_1^G q_2^R - q_1^R q_2^G) q_3^B + (q_1^B q_2^G - q_1^G q_2^B) q_3^R] \quad (6.17)$$

A differenza dei mesoni la funzione è totalmente antisimmetrica. Il fatto di avere queste simmetrie, che vengono chiamate di colore, è un vantaggio enorme poiché consente di risparmiare moltissimi calcoli. Attraverso di esse è possibile determinare integralmente la funzione d'onda di mesoni e barioni.

È importante sottolineare però che tutto quello che verrà ora sarà frutto di approssimazioni, mentre quella di colore è una vera simmetria in tutto e per tutto discendente dalla QCD.

Esiste una famosa simmetria chiamata **simmetria di flavor**: essa dice che né la QCD né la QED sono in grado di mutare i flavor di particelle. Un elettrone, ad esempio, non potrà mai trasformarsi in un muone tramite interazioni forti o elettromagnetiche.

Questa cosa può essere sfruttata in molti modi. Si immagini per esempio di voler calcolare la sezione d'urto tra *up rossi* e di confrontarla con quella tra *down rossi*. Per quanto concerne le interazioni forti, non ci si aspetta tra loro alcuna differenza se le masse dei quark *up* e *down* coincidono. Se si tiene conto anche delle interazioni elettromagnetiche, saltano fuori notevoli differenze. Le interazioni elettromagnetiche tuttavia sono molto meno intense delle interazioni forti, soprattutto in regime non perturbativo. La *simmetria di flavor* consiste proprio nel compiere l'approssimazione che i quark abbiano tutti la stessa massa, rendendo idealmente possibile scambiare simmetricamente quark *up* e *down*. A questo punto si potrebbe immaginare che la funzione d'onda ψ contenga anche informazioni legate alla natura del quark (*up*, *down*...); se si è detto che tutti i quark sono uguali, allora è possibile ridefinire il concetto di *up* o *down*. Se ciò è possibile, allora non devono cambiare le ampiezze di transizione. Si può quindi aggiungere alla funzione d'onda un nuovo pezzo, indicato con ψ_f , che indica la probabilità che un quark sia dei vari tipi.

$$\psi_f = \psi_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

A questo punto è possibile classificare tutti gli stati legati come quelli per cui, se si applica un qualsiasi rimescolamento della formula 6.18, la funzione d'onda rimane invariata. Si sta replicando col flavor quanto fatto col colore. La formula 6.18 prende il nome di *simmetria di flavor SU(6)*.

6.4.1 Simmetria di isospin

Si immagini di fare uno scattering ad un'energia molto minore della massa del quark *strange*. L'energia non è sufficiente per produrre quark di tipo diverso, per cui si può immaginare esistano solo quark *up* e *down*. Si può scrivere una nuova simmetria, detta di *isospin*, analoga alla simmetria di flavor ma bidimensionale [$SU(2)$]. Questa è un'ottima base di lavoro: sono le premesse con cui opera la branca della fisica nucleare.

In questa simmetria, quark *up* e *down* hanno la stessa massa. Essa fu proposta da Heisenberg, Breit e Condon nel 1936, nonostante all'epoca ancora non si conosceva l'esistenza dei quark. Furono loro ad accorgersi che, misurando le sezioni d'urto di due protoni, poi un neutrone e un protone, infine due neutroni, i risultati erano praticamente gli stessi.

Si riassume quanto detto precedentemente.

Proposizione 6.4

La simmetria di isospin vale quando l'energia del sistema non è sufficiente a creare quark più pesanti dei u e d (circa $E \ll 95$ MeV). Sotto queste ipotesi, le masse dei quark u e d si possono considerare uguali e pari a 0. Questo insieme di assunzioni viene chiamato approssimazione a due quark e possiede diversi vantaggi pratici.

Assumendo valida l'*approssimazione a due quark*, lo scattering tra nucleoni ha la stessa identica sezione d'urto. Questo vale poiché $p = uud$ e $n = udd$ sicché, considerando pari le masse dei due quark, non c'è più nulla che possa distinguerli. I due nucleoni diventano così due facce della stessa medaglia.

Osservazione 6.7:

Questa specie di simmetria viene denominata di isospin, ma non ha niente a che fare con il momento angolare intrinseco delle particelle.

Si chiama “di isospin” perché il gruppo $SU(2)$ - delle matrici 2×2 , unitarie, a determinante uguale a 1 - è localmente isomorfo al gruppo $SO(3)$ delle matrici 3×3 ortogonali con determinante uguale a 1. Sostanzialmente, ciò significa che gli isospin si potranno implementare nei calcoli proprio come gli spin “tradizionali”.

6.5 Barioni nel modello a due quark

Nel modello a due quark, descriviamo la ψ_f dei quark con la terza componente (z) dell'isospin \hat{I} e identifichiamo i quark u e d con le seguenti componenti

$$\text{up: } |I, I_z\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.19a)$$

$$\text{down: } |I, I_z\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.19b)$$

Osservazione 6.8:

Si sta considerando il quark come una particella di isospin $I = 1/2$, il cui flavor è determinato dal segno di I_z . Particelle con lo stesso isospin sono stati degeneri e *devono* avere la stessa massa. A scanso di equivoci: I è il numero quantico associato a \hat{I}^2 , mentre I_z è associato a \hat{I}_z .

I barioni sono uno stato legato di **tre** quark. Per creare questo stato finale combiniamo prima due soli quark, successivamente aggiungiamo il terzo. Combinando i primi due, sfruttando le regole della composizione dei momenti angolari, si ottiene:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (6.20)$$

Dove 0 indica la funzione d'onda di singoletto con $\hat{J}_z = 0$, mentre 1 è la funzione d'onda di tripletto con $\hat{J}_z = -1, 0, 1$.

Osservazione 6.9:

È bene notare che, poiché $\hbar = 1$ in natural units, il valore di una misura dell'operatore momento angolare \hat{J}_z coincide con il suo numero quantico associato M :

$$\begin{cases} \hat{J}^2 |JM\rangle = J(J+1) |JM\rangle \\ \hat{J}_z |JM\rangle = M |JM\rangle \end{cases}$$

La sovrapposizione di singoletto e tripletto combina con il terzo quark a dare:

$$I^{1,2} \otimes I^3 = I^{\text{tot}} : \quad (0 \oplus 1) \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \quad (6.21)$$

Quindi, nel modello a due quark, i barioni possono essere classificati in uno spazio vettoriale bidimensionale ($2I+1$ se $I = 1/2$) e uno quadridimensionale ($2I+1$ per $I = 3/2$). Per questo, ci aspettiamo sei diverse particelle: due con una massa piccola ($I = 1/2$) e quattro con masse superiori ($I = 3/2$).

Per sviluppare la funzione d'onda dei barioni sulle basi di isospin si utilizzano i coefficienti di Clebsch-Gordan, sempre per lo stesso motivo: $SU(2)$ è isomorfo a $SO(3)$.

Osservazione 6.10:

I *coefficienti di Clebsch-Gordan* sono i coefficienti di Fourier α_{CG} che compaiono nello sviluppo degli autostati dei momenti angolari individuali $|j^1, m^1, j^2, m^2\rangle$ sulla base di quelli del momento angolare totale $|j^1, j^2, J, M\rangle$

$$\alpha_{CG} = \langle j^1, j^2, J, M | j^1, m^1, j^2, m^2 \rangle \quad (6.22)$$

Presentiamo le funzioni d'onda per le particelle a isospin totale $I^{\text{tot}} = 1/2$. Di seguito: I_z^{tot} indica la componente z dell'isospin totale, $I^{1,2}$ l'isospin combinato dei primi due quark e I^3 l'isospin del terzo. In questa forma:

$$|I^{\text{tot}}, I_z^{\text{tot}}, I^{1,2}, I^3\rangle = \sum_{I_z^{1,2}, I_z^3} \alpha_{CG} |I^{1,2}, I_z^{1,2}, I^3, I_z^3\rangle \quad (6.23)$$

si scriverà:

$$\mathbf{uud} \quad \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.24)$$

$$\mathbf{udd} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.25)$$

Si noti che il valore di I_z “suggerisce” il numero di quark up e down nello stato legato. Possiamo riconoscere, nelle particelle con $I = 1/2$, il protone (eqn. 6.24, stato legato di due quark u e un d) e il neutrone (eqn. 6.25, stato legato di un u e due d). Protone e neutrone hanno quasi la stessa massa, 938 e 939 MeV rispettivamente. Differenza che non

è ravvisabile nel contesto dell'approssimazione a due quark: la massa del quark *up* è - in verità - leggermente minore di quella del quark *down*; inoltre, le due particelle hanno carica elettrica diversa, pertanto anche la QED gioca un ruolo nella determinazione della massa dei due nucleoni⁵.

Scriviamo adesso le funzioni d'onda per le particelle a $I = 3/2$, nella medesima forma della relazione 6.23:

$$\mathbf{uuu} \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.26)$$

$$\mathbf{uud} \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.27)$$

$$\mathbf{udd} \quad \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.28)$$

$$\mathbf{ddd} \quad \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.29)$$

La carica elettrica della particelle è data dalla somma della carica dei quark (ricordiamo che $Q_u = +2/3 e$ e $Q_d = -1/3 e$). Possiamo scrivere quindi la carica elettrica della particella definita dall'equazione 6.26:

$$Q_{uuu} = +\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e = +2e \quad (6.30)$$

Otteniamo quindi una particella elementare con carica uguale a 2.

Le particelle con $I = 3/2$ sono chiamate Delta (Δ) e hanno tutte la stessa massa, pari a 1232 MeV. Sono identificate dalla carica elettrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{uuu} &\longrightarrow \Delta^{++} \\ \mathbf{uud} &\longrightarrow \Delta^+ \\ \mathbf{udd} &\longrightarrow \Delta^0 \\ \mathbf{ddd} &\longrightarrow \Delta^- \end{aligned}$$

6.5.1 Possibili stati fisici dei barioni

Un dubbio che potrebbe sorgere è il seguente: combinando tre quark, in linea di principio, si possono formare $2^3 = 8$ stati legati; noi però abbiamo considerato solamente sei particelle. Vediamo le ragioni per cui queste sei sono tutte e sole le particelle che corrispondono a stati fisici.

Nuovamente, il motivo è il principio di esclusione di Pauli. Dal momento che stiamo considerando quark privi di massa, un quark *up* è semplicemente un quark *down* in un

⁵Il calcolo della differenza di massa tra il protone e il neutrone è ben oltre le possibilità del modello a due quark basato sulla simmetria di flavor. Questa differenza di massa è stata calcolata in modo esatto solamente nel 2015 tramite una tecnica denominata **QCD su reticolo**.

diverso stato di flavor. La funzione d'onda di un barione (eqn. 6.15) è una combinazione di fermioni in diversi stati posizionali, di spin, di colore e di flavor, che devono obbedire al principio di Pauli. Quindi:

Teorema 6.5

La funzione d'onda di un barione deve essere *antisimmetrica* per lo scambio tra due quark.

Verifichiamo adesso quali stati rispettano questo teorema.

La congettura di confinamento (prop. 6.3) richiede che la funzione di colore ψ_c per un tripletto di quark sia un singoletto di colore. Come abbiamo già visto, l'unica combinazione che sia invariante per trasformazione di $SU(3)$ è data dall'equazione 6.17. Questa è una funzione *totalmente antisimmetrica*.

La componente spaziale della funzione d'onda descrive la probabilità di trovare un quark in un determinato luogo dello spazio. Come già visto nel paragrafo 4.7 all'equazione 4.86, se invertiamo due quark tramite l'operatore di scambio Sc , la funzione d'onda si trasforma come

$$Sc \psi_{spaziale} = (-1)^\ell \psi_{spaziale} \quad (6.31)$$

noi stiamo considerando il caso a minore energia, con $\ell = 0$, quindi la funzione d'onda spaziale è *simmetrica* allo scambio.

Proposizione 6.5

Alla luce delle affermazioni precedenti su ψ_c e $\psi_{spaziale}$, possiamo dire che il prodotto $\psi_{spin}\psi_f$ delle parti di spin e flavor **dove essere** totalmente simmetrico.

Osservazione 6.11:

Le forme analitiche delle funzioni di flavor ψ_f sono state appena calcolate. Inoltre, per l'isomorfia accennata in predecenza, quelle di spin sono esattamente le stesse.

Consideriamo allora le risposte degli autostati di spin sottoposti a Sc . Combinando tre particelle a spin $S = 1/2$ si ottiene:

$$\psi_{spin} : \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \quad \left. \frac{3}{2} \right|_S \oplus \quad \left. \frac{1}{2} \right|_{M_{12}} \oplus \quad \left. \frac{1}{2} \right|_{M_{23}} \quad (6.32)$$

dove il pedice S indica che la funzione è simmetrica⁶, mentre il pedice M_{12} che è a simmetria “mista”, cioè simmetrica rispetto allo scambio di prima e seconda particella. M_{23} è analogo, ma si riferisce a seconda e terza.

La stessa cosa vale per la funzione d'onda di flavor. Combinando tre particelle a isospin $I = 1/2$ otteniamo:

$$\psi_{flavor} : \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \quad \left. \frac{3}{2} \right|_S \oplus \quad \left. \frac{1}{2} \right|_{M_{12}} \oplus \quad \left. \frac{1}{2} \right|_{M_{23}} \quad (6.33)$$

⁶Sviluppando la forma analitica della funzione d'onda si può dimostrare $\frac{3}{2}$ è totalmente simmetrica.

Osservazione 6.12:

Naturalmente, affinché $\psi_{spin}\psi_f$ sia simmetrico, occorrerà combinare questi stati (6.32 e 6.33) in modo adeguato. La composizione più immediata è certamente $\psi_f = \psi_{spin} = \frac{3}{2} \Big|_S$.

Le particelle in isospin $\frac{3}{2} \Big|_S$ richiedono necessariamente uno spin nella stessa configurazione:

$$\psi = \underbrace{\psi_{spaziale}^{\ell=0}}_{\frac{3}{2}} \underbrace{\psi_{spin}}_{\frac{3}{2}} \underbrace{\psi_c}_{\frac{3}{2}} \underbrace{\psi_{flavor}}_{\frac{3}{2}} \quad (6.34)$$

Queste particelle sono le delta Δ . Visto che rispettano il principio di esclusione, si può affermare con sicurezza che hanno spin $S = 3/2$.

Per quanto riguarda gli stati misti con isospin $1/2$ a simmetria mista, la loro composizione non è altrettanto banale. Per costruire combinazioni simmetriche si ricorre alla tecnica del determinante di Slater.

$$\psi_{spin}\psi_{flavor} = \frac{1}{2} \Big|_{M_{12}} \frac{1}{2} \Big|_{M_{12}} + \frac{1}{2} \Big|_{M_{13}} \frac{1}{2} \Big|_{M_{13}} + \frac{1}{2} \Big|_{M_{23}} \frac{1}{2} \Big|_{M_{23}} \quad (6.35)$$

dove

$$\frac{1}{2} \Big|_{M_{13}} = \frac{1}{2} \Big|_{M_{12}} + \frac{1}{2} \Big|_{M_{23}} \quad (6.36)$$

Queste saranno particelle con spin $S = 1/2$ e isospin $I = 1/2$, quindi $I_z = \pm 1/2$ con possibilità di avere solo due particelle: il protone e il neutrone.

Tutti gli altri barioni formati da quark u e d avranno necessariamente $\ell > 0$.

Osservazione 6.13:

Il modello a due quark ci permette di determinare *non solo* il numero di particelle ammesse, ma *predice* anche il loro spin.

Osservazione 6.14:

Il modello più moderno, correntemente in uso, è quello a 5 quark ($SU(5)$). Un ipotetico modello a 6 quark risulta del tutto inutile, poiché il sesto quark - il top - è talmente massivo da decadere prima di adronizzare. Insomma: non riesce a formare stati legati con altri quark.

6.5.2 La scoperta delle $\Delta(1232)$

Quando venne formulato il modello a due quark, da M. Gell-Mann e G. Zweig nel 1964, erano note decine di cosiddette “particelle elementari”, come già discusso alla fine della sezione 6.1. Tra queste particelle, c’erano anche le Δ .

La Δ fu scoperta nel 1952 da H.L. Anderson e da E. Fermi in un esperimento sui pioni, presso l’acceleratore di protoni dell’università di Chicago (figura 6.5). I pioni erano

prodotti da un ciclotrone, che accelerava protoni a 450 MeV facendoli urtare contro un bersaglio mobile di berillio. Le particelle finali prodotte erano adroni, specialmente pioni, con contaminazioni di protoni e neutroni.

Gli scienziati erano schermati dai neutroni grazie ad un muro di acciaio, posizionato tra la sala di controllo e l'acceleratore. Il ciclotrone produceva un campo magnetico ai bordi piuttosto elevato; questo venne mappato da Fermi durante la fase di costruzione dell'acceleratore, per poter prevedere dove i pioni carichi avrebbero impattato contro la parete. Successivamente, come riportato dallo stesso Anderson, Fermi fece forare la parete di acciaio in corrispondenza del punto di impatto dei pioni. Dietro la parete Anderson installò uno spettrometro magnetico e degli scintillatori per misurare il segno della carica e il momento dei pioni. La sezione d'urto totale era misurata contando il numero di pioni assorbiti da un bersaglio di idrogeno liquido.

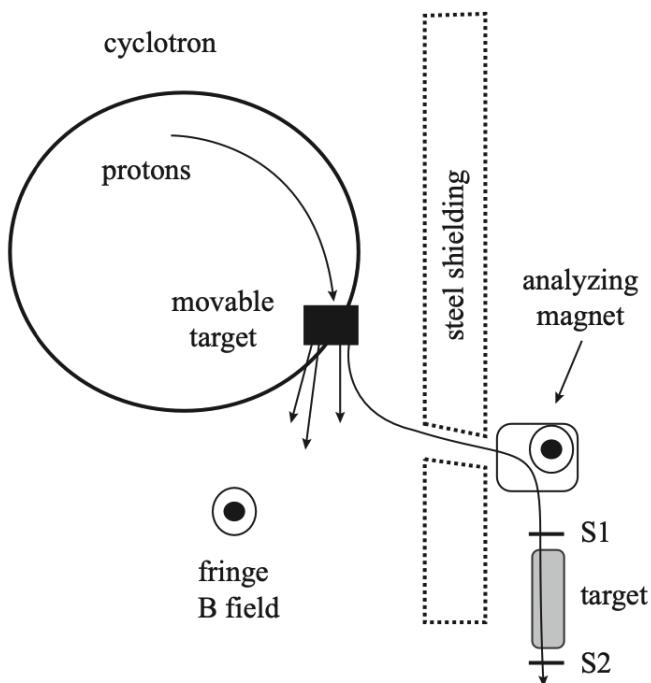


Figura 6.5: Schema semplificato dell'esperimento di Anderson e Fermi. I protoni provenienti dal ciclotrone colpivano il bersaglio mobile, producendo adroni. Un pione positivo π^+ era deviato verso il foro nella parete dal campo magnetico prodotto all'esterno del ciclotrone. Il momento del pione veniva misurato da un magnete che lo deviava verso il bersaglio. Il rate di pioni era dato dagli scintillatori S1 e S2.

L'esperimento di Anderson-Fermi è un esperimento a targhetta fissa (paragrafo 2.2.1), la cui reazione è la seguente:

$$p + \pi^+ \rightarrow X \rightarrow p + \pi^+ \quad (6.37)$$

La Δ non è stata osservata direttamente, ma riscontrando un grosso picco nella sezione d'urto (vedere figura 6.6).

Essendo uno scattering a targhetta fissa, l'energia cinetica della particella è data dalla

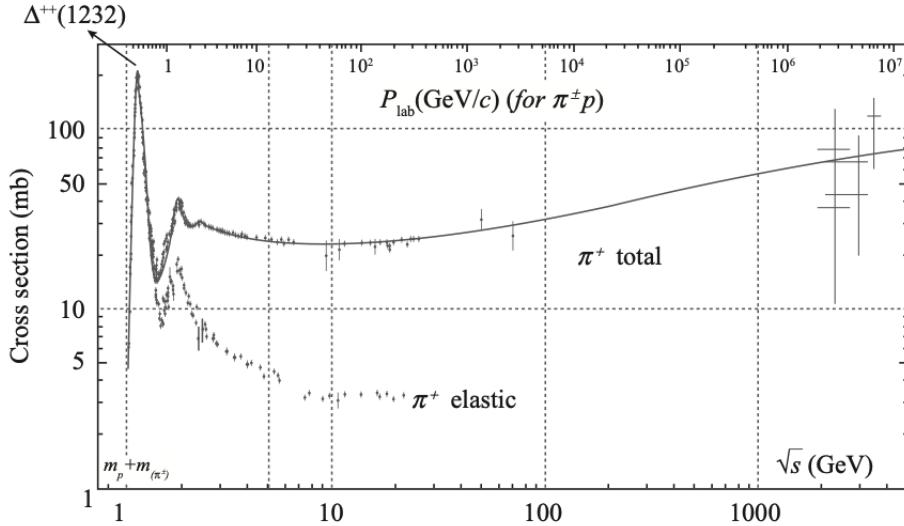


Figura 6.6: Sezione d’urto totale nell’esperimento di Anderson e Fermi per lo scattering $p + \pi^+ \rightarrow X$ in funzione della massa invariante \sqrt{s} (asse orizzontale in basso) o del momento del pion (asse orizzontale in alto).

seguente formula:

$$E_\pi = \frac{M_X^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} \quad \text{dove } E_\pi = K_\pi + m_\pi \simeq 330 \text{ MeV} \quad (6.38)$$

che si può riorganizzare per esprimere direttamente la massa invariante della particella X :

$$M_X = \sqrt{2m_p E_\pi + m_\pi^2 + m_p^2} \simeq 1232 \text{ MeV} \quad (6.39)$$

La vita media della particella può essere misurata come l’inverso della larghezza della corrispondente distribuzione Breit-Wigner (eqn. 2.30). Da una larghezza misurata di $\Gamma = 110$ MeV si può calcolare la vita media di questa particella misteriosa.

$$\Gamma = \Delta E \implies \tau \simeq \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar}{110 \text{ MeV}} \simeq 6 \cdot 10^{-24} \text{ s} \quad (6.40)$$

I dati dell’esperimento di Anderson-Fermi possono essere interpretati con la creazione di una particella a vita molto breve, di carica $Q = 2$ e massa $M = 1232$ MeV. Questa particella decade immediatamente in uno stato $p + \pi^+$. Quindi lo schema di decadimento avvenuto durante l’esperimento di Anderson e Fermi era il seguente:



Una vita così breve non deve stupire: il decadimento 6.41 è causato dall’interazione forte che - siccome la costante di struttura forte è molto più grande di quella di struttura fine per le interazioni elettromagnetiche - ha un’ampiezza di decadimento molto maggiore.

Questo è il motivo per il quale non si riesce ad osservare il decadimento in volo di una

Δ , o di qualsiasi altro stato che decade tramite processi forti. Infatti, anche assumendo la particella “boostata” nel sistema di riferimento del laboratorio, lo spazio percorso prima del decadimento è decisamente piccolo:

$$x = \gamma c \tau = \gamma \cdot 3 \cdot 10^8 \times 6 \cdot 10^{-24} \simeq \gamma \cdot 1.8 \text{ fm} \quad (6.42)$$

Anche per una particella con momento di 1 TeV ($\gamma = 830$), la distanza percorsa prima di decadere è inferiore al diametro di un atomo.

Lo stato osservato da Anderson e Fermi è oggi chiamato $\Delta^{++}(1232)$; usando lo stesso apparato sperimentale, selezionando pioni negativi, osservarono anche la Δ^0 . Successivi esperimenti poi confermarono l'esistenza di Δ^+ e Δ^- ; venne misurato anche il loro spin: pari a $3/2$.

6.6 Mesoni nel modello a due quark

Definizione 6.12. *I mesoni sono stati legati di una coppia quark-antiquark.*

Al contrario dei barioni, che possono essere formati da triplette di particelle identiche e quindi - per il principio di esclusione di Pauli - devono avere funzione d'onda totalmente antisimmetrica, i mesoni non hanno restrizioni sulla loro funzione d'onda.

Se in precedenza si è visto come rispondono i quark alle simmetrie di $SU(3)$, non si può dire lo stesso per gli antiquark. Il seguente risultato può essere ricavato dall'equazione di Dirac:

Definizione 6.13. *Gli antiquark trasformano come il complesso coniugato delle trasformazioni*

$$|q\rangle \rightarrow e^{i\sum_j \alpha_j T_j} |q\rangle \quad (6.43)$$

$$|\bar{q}\rangle \rightarrow e^{-i\sum_j \alpha_j T_j^*} |\bar{q}\rangle \quad (6.44)$$

La funzione d'onda di un mesone può essere scritta in modo analogo a quella di un barione (eqn 6.15). La riportiamo per chiarezza.

$$\psi_{q_1 \bar{q}_2} = \psi_{spaziale} \psi_{spin} \psi_{colore} \psi_{flavor} \quad (6.45)$$

Come già visto, si può dimostrare che l'unica funzione d'onda di colore che rispetta la congettura di confinamento (prop. 6.3) - cioè rimane invariata per una trasformazione di $SU(3)_C$ - è data dall'equazione 6.16.

La parte spaziale è particolarmente semplice, poiché le funzioni d'onda di due particelle in moto relativo nel sistema di riferimento del centro di massa sono semplicemente le

armoniche sferiche:

$$\psi_{spaziale} = Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \implies S c \psi_{spaziale} = (-1)^\ell \psi_{spaziale} \quad (6.46)$$

al solito, si considererà lo stato a minima energia, per cui $\ell = 0$.

La parte di spin è data dalla composizione di due particelle con spin $1/2$. Come visto innumerevoli volte (richiamo 4.7.2.1), questa combinazione restituisce singoletto e tripletto. Tenere a mente che - essendo il tripletto costituito da tre stati sovrapposti - con la scrittura $0 \oplus 1$ si rappresentano **quattro** stati.

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (6.47)$$

La parte di flavor è analoga alla parte di spin, visto che i due quark sono particelle ad isospin $1/2$.

Osservazione 6.15:

Ecco che qui si nota la differenza coi barioni: non essendo coinvolte particelle identiche, non v'è necessità di antisimmetrizzare il prodotto $\psi_{spin}\psi_f$. Spin e isospin hanno ciascuno quattro stati sovrapposti, ergo gli stati finali possibili sono 8: due con isospin $I = 0$ e sei con $I = 1$.

$$(0+1)_{spin} \otimes (0+1)_f = (0_{spin} \otimes 0_f) \oplus (0_{spin} \otimes 1_f) \oplus (1_{spin} \otimes 0_f) \oplus (1_{spin} \otimes 1_f)$$

Ciò significa che i mesoni, nel modello a due quark, sono 8: i pioni (π^\pm, π^0), i mesoni rho (ρ^\pm, ρ^0) e i mesoni eta (η ed η').

Isospin (I)	Quark contenuti	Carica (Q)	Spin $S = 0$	Spin $S = 1$
1	$u\bar{d}$	+1	π^+	ρ^+
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	0	π^0	ρ^0
	$\bar{u}d$	-1	π^-	ρ^-
0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	0	η	η'

Tabella 6.3: Tabella riassuntiva dei mesoni nel modello a due quark.

Il modello a quark fornisce anche informazioni sulla parità e sulla C-parità intrinseca delle particelle.

$$(-1)^\ell \mathbf{P}_q \mathbf{P}_{\bar{q}} = (-1)^{\ell+1}, \text{ poiché } \mathbf{P}_q = 1 = -\mathbf{P}_{\bar{q}} \quad (6.48)$$

Invece, in accordo con il teorema 4.14, la C-parità intrinseca di una coppia particella-antiparticella è:

$$(-1)^{\ell+s} \quad (6.49)$$

Possiamo utilizzare le equazioni 6.48 e 6.49 per riassumere le parità e C-parità intrinseche dei mesoni a isospin 1.

Particella	Quark Componenti	Parità intrinseca	C-parità intrinseca
π^+	$u\bar{d}$	-1	+1
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	-1	+1
π^-	$\bar{u}d$	-1	+1
ρ^+	$u\bar{d}$	-1	-1
ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	-1	-1
ρ^-	$\bar{u}d$	-1	-1

Tabella 6.4: Tabella riassuntiva delle parità dei mesoni a isospin 1 nel modello a due quark.

Capitolo 7

Interazioni Deboli

Le interazioni deboli sono quelle, in fisica delle particelle, caratterizzate dal minor numero di leggi di conservazione e sono una manifestazione delle simmetrie di gauge. Sono state scoperte ai tempi dell'esperimento di Rutherford, durante studi legati ai decadimenti radioattivi.

7.1 La natura delle interazioni deboli

7.1.1 Antefatto storico: la scoperta dei neutrini

Negli anni '20 fu scoperta una nuova classe di decadimenti: i decadimenti β . Apparentemente, un nucleo con un certo *numero di massa* A e un certo *numero atomico* Z decadeva mantenendo inalterato il valore di A , aumentando di uno il numero di protoni ed emettendo quello che - nell'apparato sperimentale - sembrava essere un elettrone. Il caso tipico è quello dell'uranio 236. Essendo un decadimento a due corpi, può essere determinata univocamente l'energia finale: ci si aspettava che quella dell'elettrone fosse data dalla differenza tra quella di uranio 236 e 237. In realtà però, l'energia dell'elettrone misurata sperimentalmente era sempre minore di quella attesa: sembrava di trovarsi di fronte ad un caso di violazione del principio di conservazione dell'energia.

Gli studiosi dell'epoca si divisero in due fazioni: la prima, capitanata da Bohr, sosteneva che in meccanica quantistica l'energia si conservasse su base statistica e che quindi fosse possibile che, osservando un singolo decadimento, venisse violata la conservazione; la seconda fazione, capitanata da Pauli, riteneva che vi fosse una spiegazione più semplice e immaginava che nel decadimento venisse emessa una nuova particella di massa molto piccola e carica nulla che si "portasse via" un po' di energia.

Alla fine, fu il secondo gruppo a trovarsi dalla parte della ragione.

Definizione 7.1. *Queste nuove particelle furono chiamate **neutrini**. Hanno spin 1/2, mentre carica elettrica e cariche di colore pari a 0.*

I neutrini che conosciamo sono il neutrino elettronico, quello muonico e quello tau.

Non possedendo alcuna carica, essi non sono soggetti né alle interazioni em né a quelle forti. Le uniche a cui sono suscettibili sono le *interazioni deboli*, il che significa che la loro sezione d’urto è molto piccola. Il primo a calcolarla fu Fermi, anche se sbagliò di diversi ordini di grandezza; essa è nell’ordine di 10^{-38}cm^2 . Ciò significa che per poter osservare dei neutrini è necessario produrne un numero altissimo, come avviene ad esempio nei reattori nucleari. Vennero individuati per la prima volta nel 1956, quando curiosamente era già data per scontata la loro esistenza.

Ciò che è oggetto di interesse ai fini di questa trattazione è la moderna teoria delle interazioni deboli.

7.1.2 Classificazione dei processi deboli

Per prima cosa, si vogliono classificare tutte le possibili interazioni deboli. A questo scopo, viene introdotto un nuovo termine.

Definizione 7.2. *Si dice leptone una particella che non è soggetta alle interazioni forti. In altri termini: tutte quelle che **non** possiedono carica di colore. Essi sono l’elettrone, il muone, tau, il neutrino elettronico, il neutrino muonico e il neutrino tauonico, insieme alle corrispondenti antiparticelle.*

Le interazioni deboli possono essere catalogate in tre grandi gruppi.

1. **Processi deboli puramente leptonici:** tutti i processi in cui si hanno esclusivamente leptoni nello stato iniziale e finale. Questi processi solitamente si riconoscono poiché vi compaiono i neutrini, tuttavia non sono gli unici sensibili alle interazioni deboli.
2. **Processi semileptonici:** processi in cui vi sono simultaneamente leptoni e quark nello stato iniziale o finale. I decadimenti β^- ne sono un esempio.
3. **Processi non leptonici.** In essi non vi sono leptoni né nello stato iniziale né in quello finale. È senza dubbio quello più odiato sia dagli studenti sia dagli addetti ai lavori. Per gli studenti siccome rende difficile individuare la natura debole dell’interazione: il campanello d’allarme è la variazione dei tipi di quark, in quanto le interazioni deboli **violano** la simmetria di flavor. È altrettanto odiato dai ricercatori perché rende molto più difficile calcolare la sezione d’urto di processi di questo tipo.

Osservazione 7.1:

Le interazioni deboli, come già accennato, non rispettano la conservazione del flavor; violano, inoltre, quasi tutte le leggi di conservazione precedentemente introdotte: parità, C-parità, T-parità e CP-parità, ovvero l’operatore che trasforma una particella in anti-particella cambiandone la posizione. È importante sottolineare che esse invece conservano

la CPT-parità: non è una sorpresa, poiché questo tipo di interazione rispetta il teorema CPT (3.1) già trattato nella sezione 3.3.

Le simmetrie delle interazioni deboli sono cinque. Le prime tre, cioè conservazione del momento, del momento angolare (invarianza per rotazione) e della carica elettrica, sono generali e già ampiamente trattate. Le ultime due, invece, sono specifiche per questo tipo di interazione. Si tratta della conservazione del *numero leptonico* e del *numero barionico*.

7.1.3 Conservazione dei numeri leptonico e barionico

Di seguito vengono approfondite le ultime due leggi di conservazione.

Definizione 7.3. *Il numero barionico è un numero quantico additivo che vale $1/3$ per i quark, $-1/3$ per gli antiquark e 0 per tutte le altre particelle.*

Sostanzialmente, funge da contatore per i quark. Viene chiamato numero barionico siccome i barioni, composti da 3 quark, hanno numero pari a 1. I mesoni - composti da un quark e un antiquark - hanno numero barionico pari a 0.

Osservazione 7.2:

Visto che il numero barionico si deve conservare, è immediato dedurre che le interazioni deboli lasciano inalterato il numero di quark nei due stati iniziale e finale. L'unica cosa che possono fare, a dirla tutta, è creare una coppia quark/antiquark.

Definizione 7.4. *Il numero leptonico è un numero quantico additivo che vale $+1$ per i leptoni, -1 per gli antileptoni e 0 per tutte le altre particelle. La somma di tutti i numeri leptonici dello stato iniziale deve essere uguale a quella dello stato finale.*

Oltre alla conservazione del numero leptonico, si riteneva ne esistesse una più stringente: la conservazione del flavor leptonico, molto spesso chiamata conservazione del *lepton family number*. Si pensava quindi che venisse conservato non solo il numero di leptoni, ma anche il loro tipo.

Nel 1998 si scoprì che questa idea è in realtà una simmetria approssimata delle interazioni deboli e si stabilì che valesse in modo esatto soltanto se i neutrini non hanno massa. Questa legge, ancora incompleta, venne sostituita da una più precisa.

Teorema 7.1

La conservazione del *lepton family number* è una simmetria esatta solo nell'istante in cui avviene lo scattering.

Osservazione 7.3:

Si giunse quest'ultima formulazione perché, nel 1998, venne scoperto il fenomeno dell'oscillazione dei neutrini. Si supponga di propagare nello spazio per grandi distanze un neutrino muonico: vi è una probabilità non nulla di osservarlo come un neutrino elettronico o tauonico. Chiaramente, un fenomeno simile è incompatibile con la prima legge proposta.

7.1.4 Decadimenti

Le leggi di conservazione presentate nel paragrafo precedente sono molto utili, non tanto per calcolare la sezione d'urto, ma per capire con precisione se avvenga o meno un processo fisico, come nel caso dei decadimenti.

Si vuole quindi vedere un esempio in cui, combinando le cinque leggi di conservazione, si identifica univocamente il decadimento di una particella.

Esempio 7.1

Fin dalla prima lezione si è visto che il muone decade nel seguente modo: $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Si vuole ora capire il perché. Per prima cosa si prende la lista delle particelle e si scelgono tutte quelle che hanno massa inferiore a quella del muone: esse sono e^- , ν_e , ν_μ , ν_τ , γ . Si provano ora tutte le possibili combinazioni di queste particelle, andando a vedere se soddisfano le leggi di conservazione. Il decadimento $\mu^- \rightarrow e^-$ non può avvenire poiché violerebbe la conservazione del quadrimomento, come tutti i decadimenti ad un corpo. Comunque è chiaro che, per conservare la carica elettrica, il muone deve per forza decadere in un elettrone, a cui però va aggiunta almeno un'altra particella. Si prova allora a considerare un decadimento a due corpi: l'altra particella potrebbe essere un neutrino o un antineutrino. Tuttavia ciò non potrebbe mai avvenire, sicché non sarebbe conservato il numero leptonico. Bisogna allora pensare ad un decadimento a tre corpi. Il decadimento $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \nu_\mu$ non va bene perché si ha lo stesso problema di prima. Per evitarlo, occorre avere un antineutrino. Il decadimento $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ non va ancora bene, perché non conserva il lepton family number. L'unica combinazione che soddisfa tutti i requisiti è $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Potrebbero avvenire anche combinazioni contenenti un fotone, ma la loro ampiezza di decadimento sarebbe 4 ordini di grandezza inferiore.

Si può fare la stessa cosa col neutrone e vedere che esso decade come $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

7.2 Violazione della Parità

Come visto precedentemente (sez. 7.1), le interazioni deboli rispettano meno leggi di conservazione rispetto alla QCD e alla QED. Nello specifico, si vuole analizzare la violazione della parità. Ci concentriamo in particolare su questa rottura di simmetria in quanto, storicamente, veniva considerata una proprietà scontata per le interazioni fondamentali. Nel 1958, quando si scoprì che non era così, ci fu un grosso impatto in tutte le branche della fisica.

Applicare l'operatore di parità ad un sistema fisico (sez. 4.7) significa cambiare le coordinate dei punti materiali in modo che $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$. Dal punto di vista geometrico, applicare la parità, equivale a passare da una terna di assi destrorsa ad una terna sinistrorsa. Fino a quel momento si credeva che *qualsiasi* sistema fisico fosse descrivibile equivalentemente con una terna destrorsa o sinistrorsa e che la scelta fosse una mera convenzione, esattamente come modificare l'origine del sistema di riferimento.

Osservazione 7.4:

In termini matematici, se un sistema non è invariante per parità, le ampiezze di transizione delle interazioni deboli non rimangono costanti sotto l'applicazione di \mathcal{P} .

Supponiamo di avere una particella dotata di spin $s = \frac{1}{2}$, ad esempio un protone, che si muove da sinistra verso destra. Dalla meccanica quantistica sappiamo che, misurando lo spin nella direzione parallela a quella del moto, esso può assumere solo due valori: $J_z = \pm \frac{1}{2}$; potrà insomma essere allineato alla direzione del moto oppure orientato in verso opposto.

Definizione 7.5. In fisica delle particelle diciamo che una particella ha elicità **right-handed (RH)** se la proiezione dello spin è concorde con il verso del moto.

Analogamente, definiamo una particella con elicità **left-handed (LH)** se la proiezione dello spin è discordante con il verso del moto.

In generale, si può definire l'elicità di una particella.

Definizione 7.6. L'elicità di una particella è definita come la proiezione del vettore di spin nella direzione della quantità di moto. In simboli:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{J}|} \quad (7.1)$$

Osservazione 7.5:

Come si può vedere dall'equazione 7.1, per una particella RH l'elicità vale +1, mentre per una LH vale -1.

Si può facilmente osservare che, per una particella massiva, l'elicità *non* è Lorentz-invariante. Infatti, se una particella è dotata di massa, ci si può sempre muovere ad una velocità maggiore, quindi superarla. Se così avviene, per un osservatore più veloce, la particella sembrerà muoversi in verso opposto, ma lo spin rimarrebbe inalterato. Ciò significa che l'elicità può invertire¹ il suo segno a seconda del sistema di riferimento.

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} \xrightarrow{\text{(RH)}} \\ \longrightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xrightarrow{\text{(LH)}} \\ \longleftarrow \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Al contrario, una particella massless come il fotone viaggia *sempre* alla velocità della luce: non esiste alcun sistema di riferimento che si muova a velocità maggiore. Questo ha importanti implicazioni fisiche:

Teorema 7.2 (Elicità di particelle massless)

L'elicità di una particella priva di massa è un *invariante di Lorentz*: ha lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali ed è una proprietà intrinseca della particella.

¹In maniera più formale posso, tramite una trasformazione di Lorentz che manda $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, cambiare il segno dell'elicità della particella. Vedere l'illustrazione (eqn. 7.2)

Definizione 7.7. Una **teoria chirale** è una teoria in cui la forza delle interazioni dipende dall'elicità delle particelle, quindi in cui viene violata la parità.

Esempio 7.2

Supponiamo di costruire *ex novo* un modello fisico che appartenga alla classe delle teorie dette *teorie chirali*. Ad esempio, si può costruire un modello in cui le particelle massless a elicità left-handed interagiscono con la materia, mentre le particelle massless a elicità right-handed *non* interagiscono con la materia (particella sterile). È immediato mostrare che una teoria simile viola la conservazione della parità. Infatti, l'operatore di parità modifica $\vec{p} \mapsto -\vec{p}$ lasciando $\vec{J} \mapsto \vec{J}$ (motivato all'osservazione 4.14, sez. 4.6), ergo l'elicità cambia di segno: $H \mapsto -H$ (vedere illustrazione eqn. 7.2). La particella - tutt'un tratto - prende ad interagire con la materia. Le sezioni d'urto ovviamente cambiano, ergo le ampiezze di probabilità saranno diverse nei due casi: il sistema non può essere invariante sotto trasformazioni di parità.

Le *teorie chirali* sono un risultato dovuto alla relatività speciale, che stabilisce un limite di velocità nell'universo, e alla meccanica quantistica, che definisce un momento angolare intrinseco delle particelle, lo spin.

L'errore commesso dai fisici fino a quel momento risiedeva proprio nell'idea che fosse possibile cambiare l'orientamento del sistema di riferimento impunemente. Non ci si era resi conto che era equivalente a cambiare una proprietà intrinseca della particella.

Osservazione 7.6:

L'esempio 7.2 è, a meno di piccole variazioni, proprio il modello che descrive l'interazione debole; quanto meno fino al 1998. In quell'anno si scoprì che i neutrini hanno una massa, seppur piccolissima.

D'altronde il neutrino era la particella perfetta per costruire questo modello. Agli albori, si riteneva fosse una particella massless con spin $s = \frac{1}{2}$ e $m_s = \pm \frac{1}{2}$. La teoria delle interazioni deboli - fino al 1998 - era basata sulla seguente affermazione:

Proposizione 7.1

Tutti i neutrini left-handed interagiscono con la materia attraverso le interazioni deboli. Viceversa, tutti i neutrini right-handed non interagiscono con la materia.

Osservazione 7.7:

Facendo tesoro dell'esempio 7.2, la dichiarazione 7.1 rientra di diritto nella classe delle teorie chirali. I neutrini hanno una massa piccola², per cui raggiungono approssimativamente la velocità della luce. In questo senso, sono pochi gli osservatori inerziali capaci di superarli³. Rimane in ogni caso una possibilità concreta, che determina la violazione della parità.

²Ad oggi, la determinazione della massa del neutrino è un campo di ricerca ancora molto attivo. Si stima che abbiano una massa compresa tra 1 e 30 meV.

³Con buona dose di certezza, se ho misurato un neutrino LH, la stragrande maggioranza degli osservatori continuerà a vederlo LH.

La velocità del neutrino è data dalla formula del β relativistico (eqn. 1.49). Se considero una massa finita e molto piccola posso scrivere:

$$\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}} = 1 - \varepsilon \quad (7.3)$$

Quindi tutti gli osservatori che si muovono con un β compreso tra -1 e $1 - \varepsilon$ concorderanno con la misura dell'elicità del neutrino. Tuttavia, gli osservatori che si muovono a velocità comprese tra $1 - \varepsilon$ e 1 vedranno il segno dell'elicità invertito.

A questo punto s'introduce una nuova osservabile fisica. Essa avrà le caratteristiche seguenti:

- è Lorentz-invariante
- comunica che la maggioranza degli osservatori veda il neutrino come LH
- agendo su una particella massless, coincide con l'elicità.

Definizione 7.8. Grazie ai lavori di Tsung-Dao Lee e Chen-Ning Yang sulle teorie chirali, negli anni cinquanta fu definito l'**operatore di chiralità** γ^5 . Se $|\psi\rangle$ è un **autostato di chiralità**, l'azione di γ^5 è⁴ 5:

$$\begin{aligned} \gamma^5 |\psi\rangle &= (+1) |\psi\rangle \implies \text{chiralità RH} \\ \gamma^5 |\psi\rangle &= (-1) |\psi\rangle \implies \text{chiralità LH} \end{aligned} \quad (7.5)$$

e, nel limite di particella massless, collassa nell'operatore di elicità.

$$\lim_{m \rightarrow 0} \gamma^5 = H = \frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{J}|} \quad (7.6)$$

Utilizzando l'equazione di Dirac si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 7.3

La probabilità che una particella con massa a riposo m abbia chiralità *discorde* dall'elicità è pari a $1 - \beta$.

La teoria che descrive in maniera piuttosto precisa il fenomeno delle interazioni deboli è stata formulata da Lee e Yang, poi sviluppata da altri fisici, in particolare Feynman, Sudarshan, Marshak e Gell-Mann e viene chiamata *teoria V-A*. Ne parleremo in modo più approfondito in seguito (sez. 7.4).

⁴Formalmente, γ^5 è il prodotto delle matrici di Dirac usate nell'equazione di Dirac.

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

⁵Rimanga tra me e te: la chiralità è una sorta di expediente matematico per assegnare un'elicità invariante (come quella del fotone) a particelle di massa molto piccola.

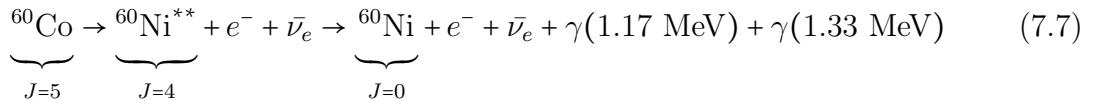
Definizione 7.9. La **teoria V-A** afferma che: le uniche particelle soggette alle interazioni deboli sono quelle a chiralità left-handed, nonché le **antiparticelle** a chiralità right-handed.

7.2.1 L'esperimento di Chien-Shiung Wu

Dopo l'elaborazione delle teorie chirali da parte di Lee e Yang, nel 1957 Chien-Shiung Wu mise a punto un apparato sperimentale che dimostrò - per la prima volta - la violazione della parità nei decadimenti beta.

7.2.1.1 La premessa teorica

L'esperimento si basa su un decadimento ben conosciuto del cobalto ^{60}Co in uno stato eccitato del nichel ^{60}Ni , che a sua volta decade per emissione di fotoni:



Osservazione 7.8:

Il primo decadimento è un processo semileptonico, con l'emissione di elettrone e di un antineutrino. Dal momento che l'isotopo del nichel che viene prodotto è in uno stato eccitato, esso si dissecchia emettendo due fotoni dall'energia di 1.17 e 1.33 MeV. In tutto ciò, J indica lo *spin nucleare*.

Se ora immaginiamo di allineare lo spin del ^{60}Co ad un campo magnetico esterno, la distribuzione angolare degli elettroni prodotti diventa un'osservabile sensibile ad un'eventuale violazione di parità: il prodotto $\vec{p} \cdot \vec{J}$, con \vec{p} momento dell'elettrone e \vec{J} spin nucleare del ^{60}Co .

Si supponga di misurare l'angolo θ tra la direzione degli elettroni emessi e lo spin \vec{J} . Se la distribuzione angolare $N(\theta)$ degli elettroni fosse una funzione del $\cos \theta$ allora la parità sarebbe violata⁶. Per esempio, si pensi ad una funzione lineare del coseno:

$$N(\theta) = f(\cos \theta) = 1 + \cos \theta \quad (7.8)$$

Dove il coseno dell'angolo tra il momento dell'elettrone e la direzione del campo magnetico, e quindi dello spin è:

$$\cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{J}|} \quad (7.9)$$

Sostituendo ed applicando l'operatore di parità a $\cos \theta$ si ottiene:

$$\mathcal{P} \cos \theta = \mathcal{P} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{J}|} \right) = \frac{(-\vec{p}) \cdot \vec{J}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{J}|} = -\cos \theta \quad (7.10)$$

⁶In generale mi basta che la distribuzione sia una funzione di sole potenze dispari del coseno dell'angolo.

Da un punto di vista ingegneristico, realizzare un esperimento basato sull'allineamento magnetico del nucleo di ^{60}Co è molto difficile, a causa del moto di agitazione termica che disturba l'orientamento dei nuclei. La forza per opporsi a questa agitazione termica sarà proporzionale a $\vec{\mu}_N \cdot \vec{B}$ dove $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ è il magnetone di Bohr. In particolare, per il ^{60}Co , vale $|\vec{\mu}| \approx 3.8\mu_N$.

Per polarizzare interi atomi basta allineare lo spin degli elettroni, processo che richiede già campi magnetici nell'ordine del Tesla. Per poter ottenere l'allineamento dei nuclei, invece, occorre agire sui protoni. Ecco che sorge una sfida: dal momento che la massa del protone è circa duemila volte maggiore della massa dell'elettrone, occorrerebbe impiegare un campo magnetico 2000 volte più grande di quello utilizzato per allineare gli atomi. A *temperatura ambiente*, un esperimento come quello di C.S. Wu risulta essere ben oltre le capacità umane⁷.

Si può però dimostrare che il numero di atomi polarizzati segue una distribuzione di Boltzmann:

$$\text{Polarizzazione} \equiv Pol \propto \exp\left(-\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{kT}\right) \quad (7.11)$$

Per raggiungere le condizioni desiderate, diventò necessario abbassare la temperatura del cobalto-60 fino a circa 10 mK.

7.2.1.2 L'apparato sperimentale

Il criostato era fatto come in figura 7.1. L'apparato consisteva in un cristallo diamagnetico denominato CMN (nitrato di cerio-magnesio) sopra al quale era posizionata una sorgente di ^{60}Co . Attorno alla regione interna erano posizionate bobine per generare un campo magnetico, mentre sopra la sorgente c'era uno scintillatore. Il segnale luminoso dello scintillatore veniva estratto e trasportato da una guida di luce verso un tubo fotomoltiplicatore. All'esterno del criostato vennero posizionati due rivelatori di fotoni allo ioduro di sodio, a circa 0° e 90° rispetto al ^{60}Co . Fare riferimento alla figura 7.1.

La tecnica di raffreddamento utilizzata è denominata *magnetizzazione adiabatica* ed è stata sviluppata, tra gli altri, proprio da Chien-Shiung Wu. Consideriamo un cristallo; se esso viene polarizzato, gli spin dei componenti del cristallo formeranno un macrostato ordinato. Termodinamicamente, ciò equivale a dire che l'entropia del cristallo polarizzato sarà minore di uno non polarizzato. Quindi è possibile, manipolando il campo magnetico esterno, modificare l'entropia del cristallo. Quest'ultimo risponde alla variazione cedendo calore, finché il campo non diventa troppo piccolo.

All'interno dell'esperimento ciò era realizzato tramite un ulteriore campo magnetico, diverso da quello usato per allineare i nuclei di ^{60}Co , con l'unico scopo di polarizzare i pezzi di cristallo di CMN. Questo secondo campo veniva poi ridotto adiabaticamente, in

⁷Attualmente, il campo magnetico più intenso prodotto artificialmente è di circa 45 T, realizzato presso il laboratorio "National High Magnetic Field Laboratory" dell'Università della Florida a Tallahassee.

7.2. VIOLAZIONE DELLA PARITÀ

modo da variare in modo continuo l'entropia del sistema. Così si dà vita ad un processo endotermico, che permette di raffreddare il CMN.

In questo modo, partendo dai 4 K dell'elio liquido, all'interno del criostato si raggiunse una temperatura di appena 10 mK per circa 5 minuti.

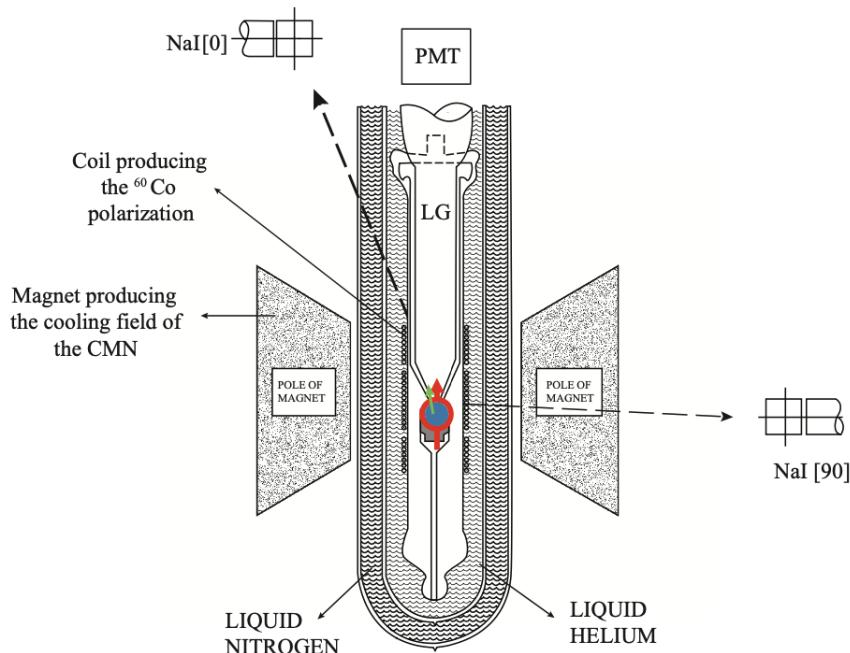


Figura 7.1: Schema dell'esperimento di Wu. Il fotomoltiplicatore (PMT) raccoglie la luce che viene dagli scintillatori (non in figura) installati al di sopra della sorgente (cerchio rosso). La guida di luce in materiale plastico (LG) trasporta la luce al di fuori del criostato verso il PMT. I due fotoni prodotti dalla diseccitazione del ^{60}Ni sono rappresentati dalle frecce tratteggiate. L'elettrone prodotto dal decadimento beta del ^{60}Co è rappresentato da una freccia verde. Lo spin del ^{60}Co (freccia rossa) è polarizzato a seconda della corrente prodotta nelle bobine. I due rivelatori di fotoni NaI[0] e NaI[90] raccolgono i fotoni emessi ad angoli rispettivamente di 0 e 90 gradi rispetto alla direzione del campo magnetico.

7.2.1.3 I risultati

Se la parità non fosse violata, ci si aspetterebbero due linee coincidenti - e pari a 1 - nella figura 7.2, a qualsiasi temperatura. Chien-Shiung Wu invece ottenne un risultato straordinario: il conteggio degli elettroni con polarizzazione inversa era significativamente maggiore rispetto a quelli allineati alla direzione del campo magnetico. Entrambe le curve poi - col passare del tempo - tendevano a 1 in quanto, mano a mano che il criostato si riscaldava, si perdeva la polarizzazione del ^{60}Co .

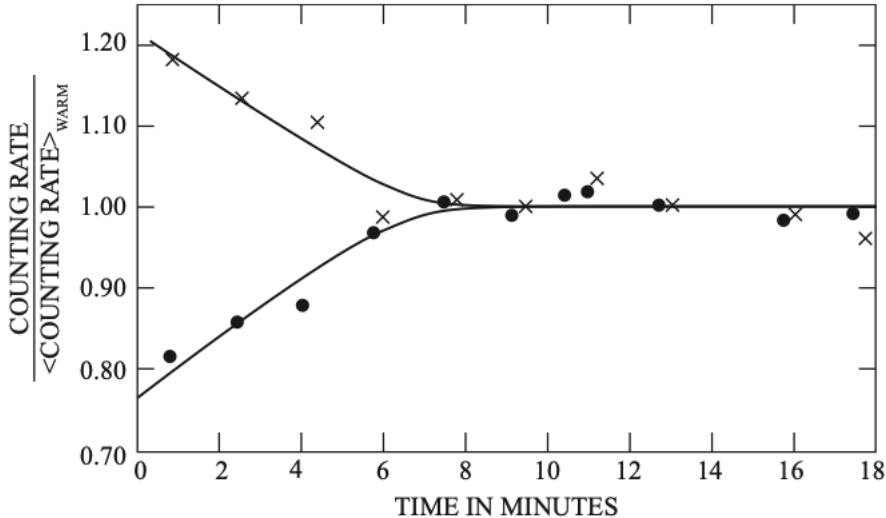


Figura 7.2: Grafico ottenuto da C.S. Wu. La curva in alto (con crocette) indica il rate degli elettroni rivelati dal PMT quando il campo magnetico era rivolto verso il basso, ovvero per elettroni emessi con spin antiparallelo alla direzione del moto. La curva in basso (con pallini) indica il rate degli elettroni rivelati con campo magnetico rivolto verso l'alto, ovvero per elettroni emessi con spin parallelo alla direzione del moto. Sull'asse delle ascisse è posizionato il tempo, sulle ordinate il rate normalizzato con i conteggi a 4 K.

Nel 1957, la Wu non conosceva la teoria V-A - che fu sviluppata in seguito al suo esperimento - ma noi sì; perciò questo risultato non deve stupire. Sappiamo che, nelle interazioni deboli, sono soltanto le particelle a chiralità LH e antiparticelle a chiralità RH (def. 7.9) ad interagire con la materia. Inoltre, sappiamo che l'orientazione relativa dello spin è un ottimo stimatore della chiralità di una particella, che a sua volta tende all'elicità per masse molto piccole. Quindi l'antineutrino, essendo prodotto da un'interazione debole, deve essere necessariamente RH: il suo spin deve essere orientato lungo la direzione del moto.

Per la conservazione del momento lineare l'elettrone verrà prodotto in direzione opposta a quella dell'antineutrino ma, per conservazione del momento angolare, avrà spin allineato al campo magnetico⁸, quindi sarà LH.

Si può mostrare che la forma analitica della distribuzione degli elettroni segue la seguente legge:

$$N(\theta) = 1 + a \text{Pol} \beta_e \cos \theta \quad (7.12)$$

dove β_e è la velocità dell'elettrone: ha una massa finita, ergo, per il teorema 7.3, la probabilità che una misura di chiralità sia discorda da una di elicità dipende dal β relativistico⁹.

⁸In principio si aveva $J = 5$. Nello stato finale si hanno: nichel, con $J = 4$, e due piccole particelle, entrambe con $J = 1/2$. Vien da sé che, per fare 5, tutti gli spin dei prodotti dovranno essere orientati nello stesso verso

⁹Nell'equazione 7.12 il termine a è un coefficiente che arriva dalla teoria V-A, la cui spiegazione è ben oltre i nostri obiettivi.

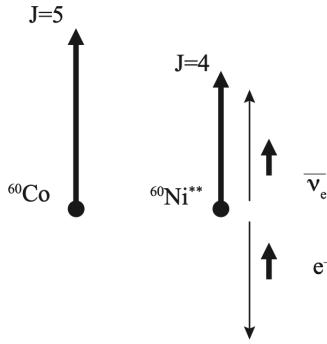


Figura 7.3: Un nucleo di ^{60}Co con $J = 5$ orientato nella direzione del campo magnetico esterno decade in un nucleo di $^{60}\text{Ni}^{**}$ con $J = 4$, un elettrone ($J = 1/2$) e un antineutrino elettronico ($J = 1/2$). In questa configurazione, l'elicità dell'elettrone è LH mentre quella dell'antineutrino è RH.

7.3 La chiralità del neutrino

Al contrario degli elettroni, una misura di elicità del neutrino è praticamente equivalente ad una misura della chiralità. Tuttavia individuare i neutrini è incredibilmente complesso, dal momento che hanno una sezione d'urto piccolissima.

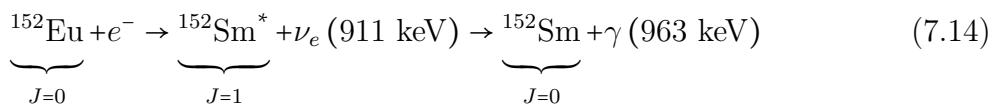
Nel 1958 però, M. Goldhaber, L. Grodzins e A.W. Sunyar idearono un esperimento molto famoso per determinare la chiralità del neutrino.

7.3.1 Cattura elettronica e auto-assorbimento del fotone

La cattura elettronica è un tipo di decadimento beta in cui un nucleo assorbe uno dei suoi elettroni, trasformando un protone in un neutrone ed emettendo un neutrino.

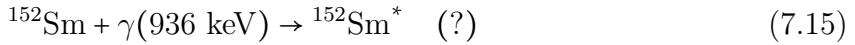


In quanto decadimento a due corpi, il neutrino è emesso sempre con la stessa energia. Per la realizzazione dell'esperimento, Goldhaber utilizzò una catena di decadimento molto particolare, dove un neutrino viene emesso con energia simile a quella di un fotone di diseccitazione. Scendendo nel dettaglio: il nucleo utilizzato era di Europio-152 (^{152}Eu), che decadeva in uno stato eccitato del Samario-152. Quest'ultimo quindi si diseccitava, tornando allo stato di ground attraverso l'emissione di un fotone.



Un importante processo che può avvenire in questa reazione è l'auto-assorbimento del fotone. Ci si chiede: se un nucleo di samario adiacente, in stato di ground, fosse colpito dal fotone prodotto, potrebbe essere eccitato? Più esplicitamente: è possibile che avvenga

la seguente reazione?



La risposta, in generale, è no: l'energia del fotone non è sufficiente ad indurre quella transizione. Parte dell'energia di diseccitazione è infatti dissipata nel rinculo del nucleo di ${}^{152}\text{Sm}$. Si può quantificare questa energia dispersa mettendosi in un sistema di riferimento in cui il ${}^{152}\text{Sm}^*$ sia a riposo. Consideriamo i quadrimomenti iniziale e finale dei nuclei di ${}^{152}\text{Sm}$, ${}^{152}\text{Sm}^*$ e del fotone:

$$p_i^\mu = (M, 0, 0, 0) \quad (7.16a)$$

$$p_f^\mu = (E_f, 0, 0, p_f) = (\sqrt{M_f^2 + p_f^2}, 0, 0, p_f) \quad (7.16b)$$

$$p_\gamma^\mu = (p, 0, 0, p) \quad (7.16c)$$

dove M è la massa del ${}^{152}\text{Sm}^*$, M_f è la massa del ${}^{152}\text{Sm}$, p è il momento del fotone e p_f è il momento dovuto al rinculo del nucleo di ${}^{152}\text{Sm}$. Applicando la conservazione del quadrimomento otteniamo:

$$0 = p_f + p \implies |p| = |p_f| \quad (7.17)$$

e applicando la conservazione dell'energia:

$$M = E_f + p = \sqrt{M_f^2 + p_f^2} + p = \sqrt{M_f^2 + p^2} + p \implies \sqrt{M_f^2 + p^2} = M - p \quad (7.18)$$

espandiamo adesso l'equazione 7.18 ed otteniamo:

$$\left(\sqrt{M_f^2 + p^2}\right)^2 = (M - p)^2 \implies M_f^2 + p^2 = M^2 + p^2 - 2Mp \quad (7.19)$$

Possiamo adesso calcolare l'energia che viene assorbita dal rinculo del ${}^{152}\text{Sm}$, che impedisce l'auto-assorbimento del fotone.

$$p = \frac{M^2 - M_f^2}{2M} = \frac{(M - M_f)(M + M_f)}{2M} \simeq M - M_f \quad (7.20)$$

L'ultima semplificazione è possibile poiché le due masse iniziale e finale sono molto simili. In effetti, il fotone emesso ha un'energia quasi trascurabile rispetto alla massa del nucleo: $M - M_f = 963 \text{ keV} \ll M_f = 152 \text{ GeV}$ e quindi $M + M_f \simeq 2M$.

Così si può determinare l'energia cinetica finale del nucleo di ${}^{152}\text{Sm}$ ¹⁰:

$$E_f = \frac{p_f^2}{2M} = \frac{(963 \text{ keV})^2}{2 \cdot 152 \text{ GeV}} \simeq 3 \text{ eV} \quad (7.21)$$

Osservazione 7.9:

Anche se la differenza di energia è molto piccola rispetto alle energie in gioco, è sufficiente

¹⁰Si assume che il nucleo sia non relativistico; cosa più che accettabile, per via della sua “pesantezza”.

a inibire il riassorbimento del fotone.

Ci si potrebbe chiedere se altri fenomeni, come il principio di indeterminazione e l'effetto doppler termico, possano compensare questi 3 eV. La risposta è no. Vediamo perché i loro contributi non bastano.

- **Il principio di indeterminazione di Heisenberg** ci dice che la risoluzione di una misura di energia è dell'ordine di $\Delta E \sim \frac{\hbar}{2\tau}$. Per la diseccitazione del Samario-152 ($^{152}\text{Sm}^* \rightarrow ^{152}\text{Sm} + \gamma$), la vita media determinata sperimentalmente è $\tau = 10^{-14}$ s. La risoluzione energetica vale quindi $\Delta E \simeq 10^{-2}$ eV.
- **L'effetto doppler termico** dovuto all'agitazione termica dei nuclei risulta in un allargamento della frequenza del fotone, che si può calcolare con la seguente formula:

$$\Delta p \simeq \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{M_f}} \simeq 0.9 \text{ eV} \quad (7.22)$$

dove kT , a temperatura ambiente, vale 26 meV.

Questo particolare decadimento fu scelto proprio perché c'è un solo fenomeno che permette al samario di riassorbire il fotone: lo spostamento doppler dovuto alla produzione di ^{152}Sm in “volo”¹¹. Mostriamo con i calcoli che la differenza di energia dovuta allo shift doppler tra un fotone emesso nella direzione del moto ed uno in direzione opposta è maggiore di 3 eV.

Come fatto in precedenza per ricavare l'equazione 7.21, possiamo scrivere l'energia cinetica del samario nello stato eccitato.

$$E_{\text{Sm}^*} = \frac{p_\nu^2}{2M_{\text{Sm}^*}} \simeq \frac{1}{2} M_{\text{Sm}^*} v^2 \quad (7.23)$$

Il momento del neutrino è 911 keV, allora la velocità del nucleo non relativistico è:

$$\beta_{\text{Sm}^*} = \sqrt{\frac{2E_{\text{Sm}^*}}{M_{\text{Sm}^*}}} = 5.8 \cdot 10^{-6} \quad (7.24)$$

Utilizzando la formula dell'effetto doppler relativistico possiamo calcolare il momento di un fotone “blue shifted”

$$p' = \gamma(1 + \beta)p = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} p \quad (7.25)$$

quindi la differenza di momento vale:

$$\Delta p = p' - p = \gamma(1 + \beta)p - p \simeq 5.3 \text{ eV} \quad (7.26)$$

¹¹Se il samario eccitato è in movimento, il fotone prodotto dalla diseccitazione è soggetto ad effetto doppler.

Quindi se il $^{152}\text{Sm}^*$ emette un fotone nella direzione del moto, questo aumenta la sua energia e potrà essere riassorbito. Un fotone emesso in direzione opposta è un fotone “red shifted” e non può essere riassorbito.

7.3.2 L'esperimento di Goldhaber

Gli studi effettuati da Grodzis sul decadimento del ^{152}Eu portarono allo sviluppo dell'esperimento su cui ci concentreremo ora. L'obiettivo era misurare l'elicità del neutrino prodotto dalla cattura elettronica, per cui era necessario che tutte le sue informazioni fossero trasferite al fotone di diseccitazione del $^{152}\text{Sm}^*$.

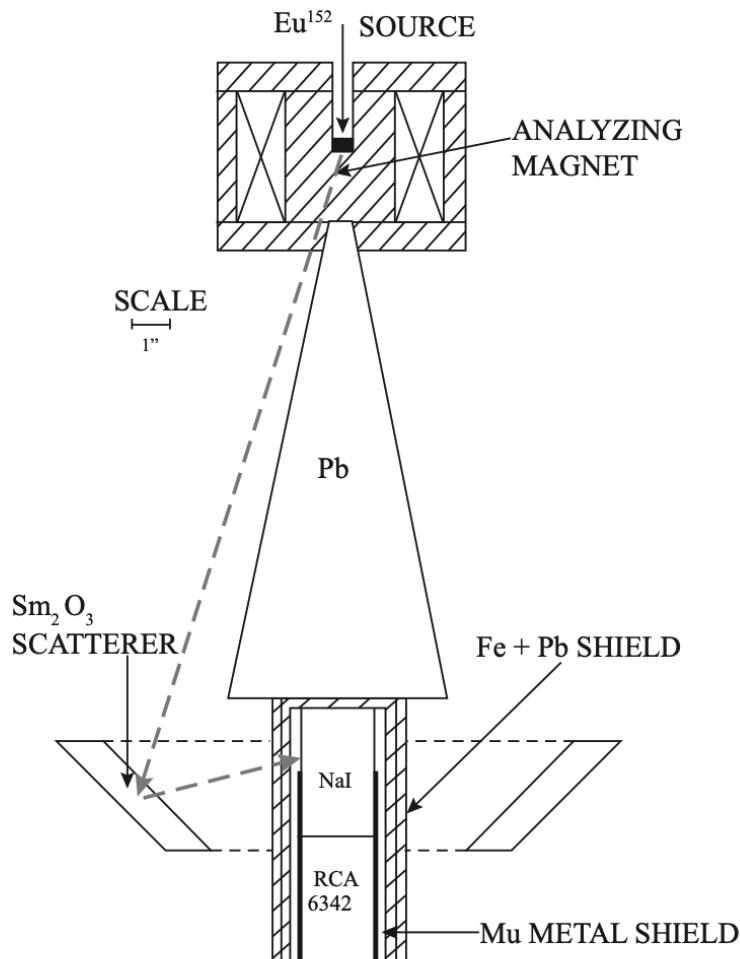


Figura 7.4: Schema dell'esperimento di Goldhaber per misurare l'elicità del neutrino. La sorgente è situata in alto, all'interno di una piattaforma di ferro magnetizzato. I fotoni più energetici, che non erano schermati dal ferro, raggiungevano una lastra di ossido di samario (Sm_2O_3) e venivano riemessi isotropicamente. A questo punto alcuni di questi fotoni venivano rivelati da degli scintillatori (NaI) collegati ad un fotomoltiplicatore (RCA 6342). Il cono di piombo serviva a schermare lo scintillatore dai fotoni emessi dalla sorgente.

L'esperimento di Goldhaber (figura 7.4) consisteva in una sorgente di ^{152}Eu posizionata su di una piattaforma di ferro magnetizzato, che aveva la funzione di selezionare l'elicità dei fotoni emessi dal samario. Se il campo magnetico era tale da allineare gli spin degli elettroni del ferro in direzione opposta allo spin del fotone, la sezione d'urto per l'effetto photoelettrico diventava molto grande, inducendo un'inversione dello spin del fotone. In questo caso, il ferro riduceva la quantità di fotoni RH¹². Se il campo magnetico veniva invertito venivano filtrati i fotoni LH.

Osservazione 7.10:

I fotoni emessi dalla catena di decadimento dell'europio (eqn. A.2) hanno energia sufficiente per interagire con il piombo per effetto photoelettrico; sicuramente non riescono a produrre coppie.

A quel punto i fotoni trasmessi raggiungevano una lastra di samario, dove venivano riassorbiti e riemessi isotropicamente. Il riassorbimento “seleziona” i fotoni più energetici, successivamente il campo magnetico ne “seleziona” l'elicità.

Non resta che capire quale sia la relazione tra l'elicità del neutrino e quella del fotone.

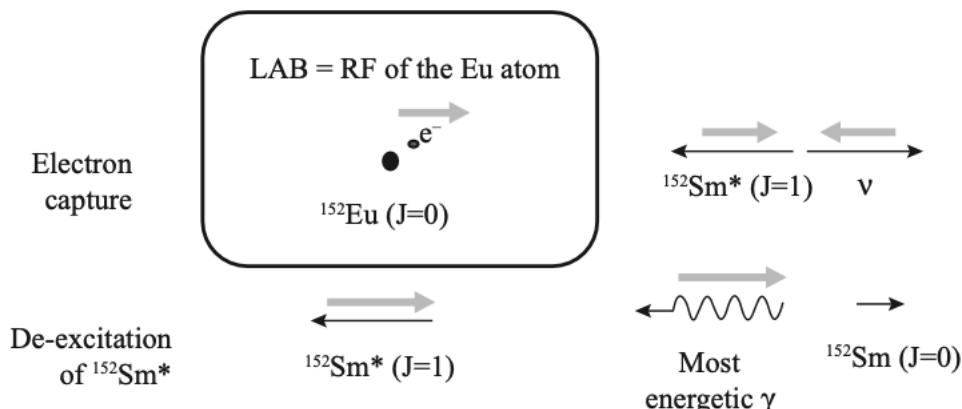


Figura 7.5: L'elicità del neutrino è identica all'elicità del fotone più energetico. L'unica fonte di momento angolare è lo spin dell'elettrone (freccia grigia). La cattura elettronica produce $^{152}\text{Sm}^*$ LH (RH) se il neutrino è LH (RH). Il fotone più energetico è prodotto nella direzione di volo del $^{152}\text{Sm}^*$. Questo fotone trasporta l'intero momento angolare del sistema perché $J(^{152}\text{Sm}) = 0$; quindi il fotone è LH (o RH) se il $^{152}\text{Sm}^*$ è LH (o RH).

Come si può vedere in figura 7.5, se il nucleo di ^{152}Eu è a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio e se i neutrini sono LH, allora il $^{152}\text{Sm}^*$ sarà emesso in direzione opposta rispetto al neutrino, e la conservazione del momento angolare implica che sarà LH anche il $^{152}\text{Sm}^*$.

¹²Siccome interagiscono con più probabilità, saranno più facilmente assorbiti dal ferro. Il tutto è dovuto alla conservazione del momento angolare: si sceglie l'orientamento dello spin degli elettroni per selezionare l'elicità dei fotoni

Quando il $^{152}\text{Sm}^*$ raggiunge lo stato di ground ^{152}Sm , il fotone emesso nella direzione di volo del samario eccitato trasporta tutto il suo momento angolare dal momento che $J(\text{Sm}) = 0$. La conservazione del momento angolare impone che anche il fotone sia LH.

Ripetendo queste affermazioni nel caso i neutrini emessi siano RH si giunge alla conclusione che: *nell'esperimento di Goldhaber, l'elicità del fotone più energetico è la stessa del neutrino.*

L'osservazione dei fotoni negli scintillatori per una data direzione del campo magnetico dimostrò che: *i neutrini prodotti nelle interazioni deboli sono particelle a chiralità LH.*

7.4 Teoria V-A

In seguito ai lavori di Wu, Goldhaber e dei loro collaboratori, a partire dal 1957, R. Marshak, E.C.G. Sudarshan, R. Feynman e M. Gell-Mann svilupparono una teoria chirale che potesse descrivere le interazioni deboli. Come abbiamo già visto (def. 7.9) questo modello è chiamata teoria V-A e stabilisce che:

Le particelle che interagiscono per mezzo delle interazioni deboli sono tutte le particelle a chiralità LH e tutte le antiparticelle a chiralità RH.

Questa teoria fu incredibilmente di successo in quanto tutti i risultati sperimentali ottenuti nei successivi 40 anni vennero confermati. Oltre a ciò, risolse anche innumerevoli problemi che i fisici avevano riscontrato nel corso del tempo: uno di questi è il decadimento del pion.

7.4.1 Decadimento del pion

Sappiamo che il pion positivo decade in un antimuone e in un neutrino muonico.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (7.27)$$

Si può dimostrare che l'equazione 7.27 è l'unico decadimento consentito per il pion positivo.

Iniziamo considerando che, per la conservazione dell'energia, tra i possibili prodotti vi sono solamente particelle con massa minore a quella del π^+ . Le uniche sono l'elettrone e il muone (e le relative antiparticelle), quindi solo due decadimenti sono consentiti.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (7.28)$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (7.29)$$

Vediamo ora perché il decadimento 7.29 in positrone è praticamente soppresso.

Intuitivamente, verrebbe da pensare che il branching ratio della 7.29 sia maggiore rispetto a quello della 7.27. Ciò poiché lo spazio fasi a disposizione del positrone è mag-

giore, dal momento che la sua massa (511 keV) è molto più piccola di quella del muone (106 MeV).

In uno dei primi esperimenti del CERN, G. Fidecaro dimostrò che il branching ratio del decadimento 7.29 è estremamente piccolo, seppur non nullo¹³.

Nel 1963, Sudarshan e Marshak notarono che, se elicità e chiralità fossero la stessa cosa, il pion sarebbe una particella stabile. Infatti, grazie alla teoria V-A, sappiamo che il neutrino è una particella LH, mentre antimuone e positrone sono due antiparticelle RH. Ma la conservazione del momento angolare - per annullare lo spin del neutrino - imporrebbe ai prodotti di avere spin orientato in direzione opposta a quella del moto, ovvero di avere elicità LH. Questo porta ad una contraddizione. Quindi, se considerassimo analoghe elicità e chiralità, non esisterebbe alcun decadimento del pion carico in una coppia leptone/neutrino.

Tuttavia, nel caso in analisi le particelle sono massive, perciò esiste una probabilità finita che un antileptone a *chiralità RH* abbia *elicità LH* e soddisfi la conservazione del momento angolare.

Come abbiamo visto precedentemente (teorema 7.3), la probabilità che chiralità ed elicità siano diverse è $1-\beta$. Dal momento che $m_\mu \gg m_e$ o equivalentemente $\beta_\mu \ll \beta_e$, la probabilità che chiralità ed elicità siano diverse è molto maggiore per l'antimuone che per il positrone ed è praticamente zero per il neutrino. È possibile calcolare il rapporto tra i branching ratio dei due decadimenti.

$$\frac{BR(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{BR(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} = \frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right) \simeq 1.26 \cdot 10^{-4} \quad (7.30)$$

Questo risultato è in perfetto accordo con i risultati sperimentali di Fidecaro.

7.5 Teoria Elettrodebole

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.1.3 e nel paragrafo 6.3, le interazioni elettromagnetiche e le interazioni forti possono essere descritte tramite delle teorie di gauge. Finora però non abbiamo mai parlato di simmetria di gauge. Questo perché la teoria V-A *non* è una teoria di gauge.

7.5.1 Dalla teoria V-A alla teoria elettrodebole

Consideriamo adesso il decadimento del muone in un elettrone, un antineutrino elettronico e in neutrino muonico.

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (7.31)$$

¹³Attorno allo 0.01%

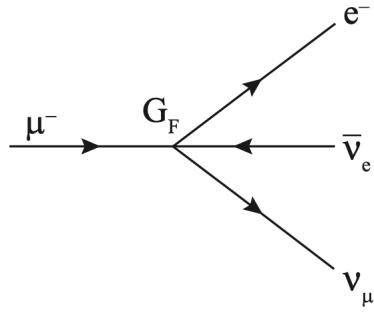


Figura 7.6: Diagramma di Feynman del decadimento del muone in un elettrone, un anti-neutrino elettronico e un neutrino muonico nella teoria V-A. Da notare che la costante di accoppiamento G_F è una quantità dimensionata.

Se la teoria V-A fosse una teoria di gauge, si potrebbe disegnare un diagramma di Feynman e definire un bosone mediatore, analogo al fotone e al gluone, che fa interagire le particelle. La teoria V-A interpreta questo decadimento come in figura 7.6, dove un muone, dal nulla, decade in elettrone e coppia neutrino-antineutrino.

Misurando la sezione d'urto di questa interazione è possibile determinare un analogo della costante di struttura fine. Si tratta di una costante empirica universale dimensionata, detta *costante di Fermi* G_F dal valore di:

$$G_F = 1.116 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (7.32)$$

Dal 1958 al 1971, i fisici hanno svolto innumerevoli esperimenti con interazioni deboli e tutti i risultati tornavano precisi. Uno dei grossi problemi di questa specie di teoria è dato dalla costante di Fermi. I fisici delle particelle si interrogavano infatti su come fosse possibile che una costante di struttura fine fosse addirittura dimensionata.

Il punto di svolta si ebbe 1967, grazie ai lavori di S. Weinberg, A. Salam e S.L. Glashow in cui si teorizzava l'esistenza del mediatore delle interazioni deboli: i bosoni W^\pm . In questo modo, quella specie di diagramma di Feynman del decadimento 7.31 (figura 7.6) si trasformava in un vero e proprio diagramma di Feynman, come si può vedere in figura 7.7.

Il muone si trasforma in un neutrino muonico perché interagisce con il mediatore delle forze deboli: una particella carica a spin 1 - analogamente al fotone - che a sua volta decade in un antineutrino elettronico e in un elettrone. Questa proposta fece storcere il naso a molti fisici. Infatti se questa ipotetica particella fosse stata una sorta di fotone *carico* si sarebbe potuto rivelarla. Glashow, Salam e Weinberg risolsero questo problema postulando che il bosone W^\pm avesse una massa incredibilmente grande (ca. 80 GeV), completamente al di fuori delle possibilità sperimentali dell'epoca. Naturalmente una particella così massiva decade in un tempo brevissimo, quindi non è possibile rivelarla direttamente; si possono osservare soltanto i prodotti del suo decadimento (in questo caso e^- e ν_e).

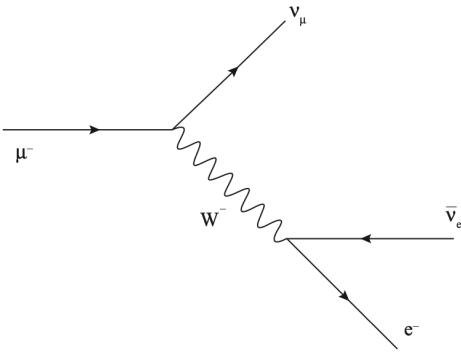


Figura 7.7: Diagramma di Feynman del decadimento del muone nella teoria elettrodebole. Come nella QED e nella QCD i vertici dell’interazione sono accoppiati tramite un bosone di spin 1. Da notare che la massa di W^- è diversa da zero.

Quindi la costante di Fermi (G_F) non è nient’altro che un’ipotetica costante di struttura fine delle interazioni deboli corretta per la massa della particella.

$$G_F \sim \frac{g}{M_W^2} \quad (7.33)$$

In questo modo anche le interazioni deboli erano concordi con le altre teorie delle interazioni fondamentali come la QCD e la QED dove gluone e fotone sono particelle mass-less.

Un altro punto fondamentale della teoria elettrodebole è il fatto che il bosone W sia carico. Al contrario di interazioni forti ed elettromagnetiche, che sono completamente disaccoppiate, i mediatori dell’interazione debole sono carichi quindi interagiscono con il campo elettromagnetico. In altre parole: mentre le sezione d’urto “di colore” ed elettromagnetica sono totalmente indipendenti l’una dall’altra, non si può dire lo stesso per le interazioni deboli. Le sezioni d’urto debole ed elettromagnetica sono indissolubilmente legate dai bosoni W^\pm .

L’intuizione geniale di S. Weinberg è stata quella di capire che è impossibile costruire una teoria consistente delle interazioni deboli senza includervi anche l’elettromagnetismo. *Non è possibile disaccoppiare le due interazioni.*

Definizione 7.10. *La teoria elettrodebole è la teoria unificata delle interazioni elettromagnetiche e delle interazioni deboli. È una teoria di gauge ed è basata sul gruppo di gauge $SU(2) \otimes U(1)$ ¹⁴.*

Osservazione 7.11:

Come tutte i gruppi $SU(N)$, il gruppo $SU(2)$ ha $N^2 - 1 = 3$ generatori, a cui si unisce

¹⁴A questo si aggiunge il cosiddetto “meccanismo di Higgs” che è una tecnica, in meccanica quantistica, per conferire una massa alle particelle che mediano l’interazione debole.

il generatore del gruppo $U(1)$. I generatori di questi gruppi corrispondono ai bosoni mediatori dell’interazione elettrodebole: i bosoni W^\pm , il bosone Z^0 e il fotone¹⁵.

I vertici dei diagrammi di Feynman del bosone W sono proporzionali al prodotto tra la costante di accoppiamento g e il proiettore LH, che seleziona solo le particelle a chiralità LH e le antiparticelle a chiralità RH.

La quarta particella, il bosone Z^0 , è una particella neutra ed è una sorta di ibrido tra il fotone e il bosone W^\pm : ha una massa molto elevata (circa 91 GeV), ha spin 1 ed è priva di carica di colore. I vertici dei diagrammi di Feynman della Z^0 sono proporzionali a una combinazione lineare del proiettore LH e del proiettore RH.

7.5.2 La scoperta delle correnti deboli neutre

Nei primi anni dopo il suo concepimento la teoria elettrodebole incontrò l’astio e la diffidenza del mondo scientifico. In particolar modo, a causa dell’inclusione del bosone Z^0 - fino a quel momento mai rivelato - oltre al fatto che fosse un ibrido tra interazioni LH e RH, cosa non possibile secondo la teoria V-A delle interazioni deboli.

Per molto tempo nessun laboratorio investì anche un solo centesimo per la verifica della teoria elettrodebole; tant’è che la prima prova sperimentale dell’esistenza della Z^0 avvenne nel 1973 in modo accidentale, mentre si stava cercando di individuare i neutrini. Non fu un’individuazione diretta della Z^0 , avvenuta solo nel 1983 da parte di C. Rubbia, ma l’osservazione di un’interazione ascrivibile solamente alla presenza di un bosone con le caratteristiche della Z^0 : *le correnti deboli neutre*.

7.5.2.1 Premesse teoriche: come vedere la Z^0

Consideriamo uno scattering tra un quark d e un neutrino muonico ν_μ . Quest’ultimo, interagendo debole, cambia il flavor del quark producendo un muone (figura 7.8a). Queste interazioni vengono chiamate *correnti cariche*.

Uno scattering tra un quark u e un neutrino muonico in cui il neutrino venisse “scagliato” via, lasciando inalterato il sapore del quark, non era previsto dalla teoria V-A. Questa interazione è un urto elastico ed è chiamata *corrente neutra*.

Quindi, se riuscissimo ad osservare una corrente neutra, avremmo la prova dell’esistenza della Z^0 .

¹⁵I bosoni W^\pm hanno una massa di circa 80 GeV; il bosone Z^0 ha una massa di circa 91 GeV (come già visto nell’esempio 2.1). Il fotone, come ben noto, è una particella mass-less.

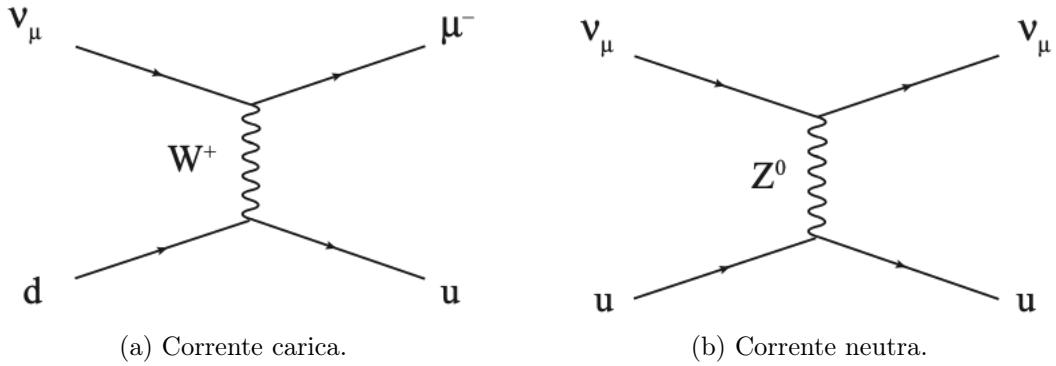


Figura 7.8: Diagramma di Feynman di correnti cariche e correnti neutre

7.5.2.2 Apparato sperimentale

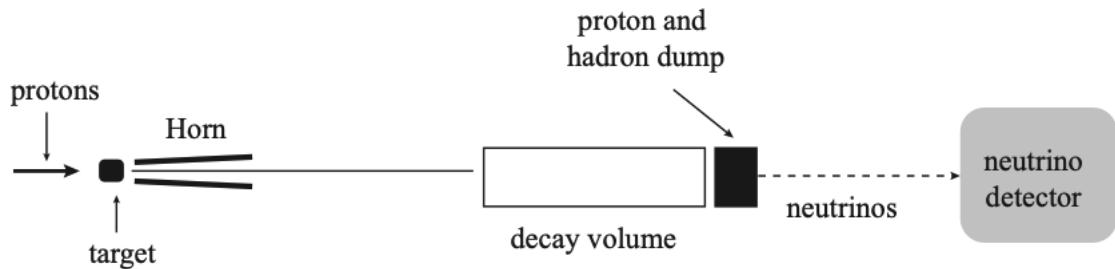


Figura 7.9: Schema di un acceleratore di neutrini. I protoni erano prodotti dal “Proton Synchrotron (PS)” del CERN e colpivano un bersaglio di berillio. I pioni prodotti erano poi concentrati da un magnetic horn e i neutrini venivano prodotti dal decadimento del piona ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). Essi venivano rivelati dalla camera a bolle denominata Gargamelle, dopo aver attraversato la schermatura di ferro.

Fin dal 1971, un gruppo di ricercatori del CERN stava studiando lo scattering dei neutrini con i protoni. Il fascio di neutrini era prodotto da un sincrotrone, che accelerava protoni fino a 25 GeV “sparandoli” su un bersaglio di berillio (figura 7.9).

Lo scattering di protoni ad alta energia produce uno sciame di adroni, in particolare pioni carichi. I pioni positivi venivano indirizzati verso il rivelatore di neutrini grazie a una lente magnetica inventata da S. Van der Meer denominata “magnetic horn”, che consisteva in un conduttore di alluminio con simmetria cilindrica. Come si può vedere in figura 7.10 i pioni positivi erano focalizzati dal campo magnetico, mentre quelli negativi venivano deflessi. Settanta metri dopo il magnetic horn tutte le particelle cariche erano fermate da una schermatura di ferro.

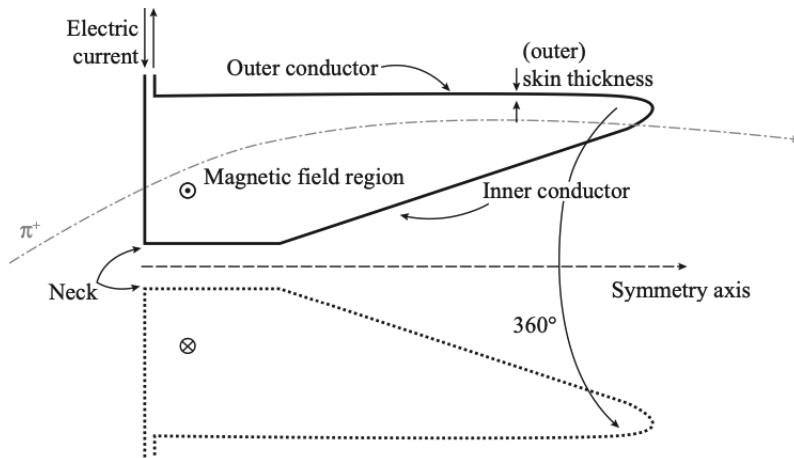


Figura 7.10: Schema di un magnetic horn. La direzione del campo magnetico in figura è quella utilizzata per focalizzare particelle positive.

Nel frattempo, una buona parte dei pioni era decaduta in muoni e neutrini ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). I muoni e i pioni non ancora decaduti venivano fermati dalla schermatura (proton and hadron dump) per ionizzazione e per interazione forte. In questo modo, al rivelatore arrivavano solamente neutrini.

Il rivelatore di neutrini, chiamato Gargamelle (figura 7.11), consisteva in una camera a bolle di 15 tonnellate riempita di gas freon (CF_3Br). Questo tipo di rivelatori fu inventato da D.A. Glaser nel 1952; brevemente: consistono in un volume riempito di freon appena al di sotto del suo punto di ebollizione. Il principio di funzionamento era virtualmente identico a quello di una camera a nebbia, come quella usata da Anderson per la scoperta dell'antimateria (paragrafo 3.3). Quando una particella entra nella camera, un pistone diminuisce la pressione del gas; a questo punto il freon raggiunge una fase di surriscaldamento molto instabile, per cui anche il minimo disturbo è capace di farlo ricondensare, portando alla formazione di bollicine. La presenza di ioni facilita la produzione di bolle. Queste permettevano poi di vedere le tracce delle particelle con una serie di fotografie, poiché tutta la camera era immersa in un campo magnetico che deviava le traiettorie.

Lo scopo primario di Gargamelle era capire quali fossero esattamente i componenti del protone e come interagissero quark e gluoni tra di loro. I neutrini si prestavano molto bene: interagendo poco con la materia, potevano trasferire momento sulle particelle tramite le correnti cariche.

Nella stragrande maggioranza dei casi videro proprio quello che si aspettavano, ovvero un neutrino muonico che si trasforma in un muone modificando un quark d in un quark u . La conversione del flavor veniva rilevata indirettamente, siccome i quark liberi non sono osservabili per la congettura di confinamento (sezione 6.3.3); la reazione è del tipo:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \quad (7.34)$$

In alcuni casi, il neutrino era talmente energetico da riuscire a “spaccare” il neutrone,



Figura 7.11: Il rivelatore di neutrini Gargamelle, oggi esposto nel giardino del museo Microcosm del CERN a Ginevra. Gli oblò ai lati della camera servivano per scattare le fotografie delle tracce lasciate dalle particelle.

producendo uno sciame di nuovi adroni¹⁶.

Sul finire degli anni settanta i fisici delle particelle cominciarono ad osservare dei neutrini che misteriosamente “apparivano” dal nulla. Addirittura, in alcuni casi, si osservava direttamente la cascata di particelle prodotta dal decadimento di questi neutroni.

C'erano due ipotesi che potevano giustificare questo comportamento:

- questi sciami misteriosi erano effettivamente prodotti da interazioni con i neutrini, quindi veniva confermata l'esistenza della Z^0 ;
- diversi studiosi, tra cui C. Rubbia, premio nobel nel 1984, erano fortemente scettici. La loro idea era che dal muro di ferro utilizzato per fermare le particelle cariche venissero prodotte tutta una serie di particelle, tramite delle banali interazioni elettromagnetiche. Tra queste particelle potevano esserci neutroni, che non vengono bloccati dal muro e si comportano in maniera analoga ai neutrini.

Fu il lavoro di A. Pullia e D. Heidth, a dimostrare che i neutroni non potevano essere i responsabili di questi risultati anomali. Calcolarono infatti le sezioni d'urto dei neutroni e si accorsero dell'incompatibilità con l'ipotesi di Rubbia.

¹⁶Generati dall'adronizzazione delle componenti del neutrone.

La probabilità che un neutrone interagisca è data da:

$$e^{-\lambda x} \quad \text{con } \lambda = \frac{1}{\tilde{n}\sigma} \quad (7.35)$$

dove \tilde{n} è la densità di centri diffusori e σ è la sezione d'urto.

La distribuzione osservata in funzione della distanza di questi eventi anomali era praticamente costante¹⁷, compatibile con quella dei neutrini che hanno λ praticamente infinito, nell'ordine delle decine di anni luce¹⁸.

¹⁷La distribuzione degli eventi anomali in realtà seguiva un andamento esponenziale per i primi centimetri. Quindi - come aveva previsto Rubbia - c'erano effettivamente dei neutroni, ma non abbastanza da poter giustificare i dati sperimentali.

¹⁸Interagiscono talmente poco che la loro sezione d'urto rimane sostanzialmente invariata nelle lunghezze considerate.

Parte II

Fisica Nucleare

Capitolo 8

Introduzione

8.1 Caratteristiche generali degli atomi e dei nuclidi

Un atomo è costituito da due elementi fondamentali: il nucleo e un guscio di elettroni. Il nucleo, situato al centro dell'atomo, è costituito da nucleoni, che possono essere **prottoni** o **neutroni**. I primi hanno massa di 938.27 MeV, spin 1/2 e carica positiva; i secondi hanno una massa leggermente maggiore pari a 939.56 MeV, spin 1/2 e carica nulla. Ogni nucleone è a sua volta composto da tre quark: nel caso del protone si tratta di due quark *up* e uno *down*, nel caso del neutrone di uno *up* e due *down*.

Le scale dimensionali con cui si ha a che fare in fisica nucleare sono dell'ordine del femtometro ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), mentre quelle energetiche sono dell'ordine del megaelettronvolt ($1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$).

Molto importante è il modo con cui i vari atomi vengono indicati e descritti. La prima grandezza fondamentale è il **numero atomico** Z : esso equivale al numero di protoni presente in un “nuclide”, ovvero un nucleo preso al di fuori del contesto atomico. È immediato quindi concludere che la carica elettrica di un qualsiasi nuclide è data da $+Ze$.

Altre due grandezze fondamentali sono la **massa atomica** A ed il **numero di neutroni** N presenti all'interno di un nuclide.

Notazione 8.1:

Un qualsiasi elemento X di fisica nucleare viene indicato nel seguente modo:

$${}^A_Z X_N$$

X è il simbolo chimico dell'elemento; N è il numero di neutroni, che solitamente non viene riportato, è dato da $A - Z$; Z , infine, è spesso non riportato in quanto definito da X .

Se più nuclidi hanno lo stesso Z si dicono **isotopi**, se hanno lo stesso A **isobari**, se hanno lo stesso N **isotoni** e infine se hanno lo stesso A e lo stesso Z **isomeri**. Gli isotopi possono essere poi a loro volta classificati in vari sottogruppi, tra cui i *radioisotopi*, ovvero isotopi instabili soggetti a decadimento radioattivo.

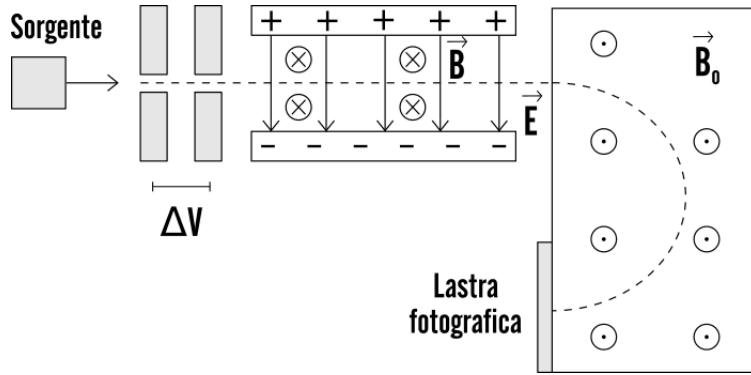


Figura 8.1: Schematizzazione dello spettrografo di massa

In fisica nucleare l'unità di misura più comunemente usata è l'unità di massa atomica, spesso chiamata AMU¹ (Atomic Mass Unit): 1 AMU vale $1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg.

Osservazione 8.1:

La massa di un nuclide è *diversa* della somma delle masse dei singoli nucleoni: va considerata anche l'energia di legame. Quest'ultima è - convenzionalmente - negativa, il che risulta in una massa totale leggermente minore. In simboli:

$$m_N(A, Z) \neq Zm_p + (A - Z)m_n \quad (8.1)$$

La misura della massa dei nuclei venne eseguita per la prima volta tramite la spettrometria di massa, che fu storicamente la prima tecnica ad alta precisione con la quale venne mappato per intero lo schema degli isotopi stabili. L'apparato consisteva in un tubo vuoto passante per un campo magnetico variabile e al cui fondo era posto un rivelatore. All'inizio del tubo il campione studiato veniva vaporizzato e trasformato mediante una scarica elettrica in ioni positivi. Gli ioni, all'interno del tubo, venivano poi separati, a seconda della loro massa, tramite un selettore di velocità ed un selettore di momento. Il primo lasciava passare solo ioni aventi velocità:

$$qE = qvB \implies v = \frac{E}{B} \quad (8.2)$$

mentre il secondo curvava gli ioni in modo circolare con raggio ricavabile semplicemente eguagliando forza centripeta e forza di Lorentz.

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \implies r = \frac{mv}{qB} \quad (8.3)$$

Tramite questa separazione era quindi possibile determinare le masse di elementi pesanti o molecole, a patto di conoscere con grande precisione r , E e B .

Lo spettrografo permette anche di stabilire l'abbondanza relativa ai vari isotopi di un elemento misurando la corrente al variare di E o B . Prendendo come riferimento la

¹Definita come un dodicesimo della massa del carbonio-12

figura 8.2, per stabilire l'abbondanza dei vari isotopi è sufficiente misurare l'area dei vari picchi.

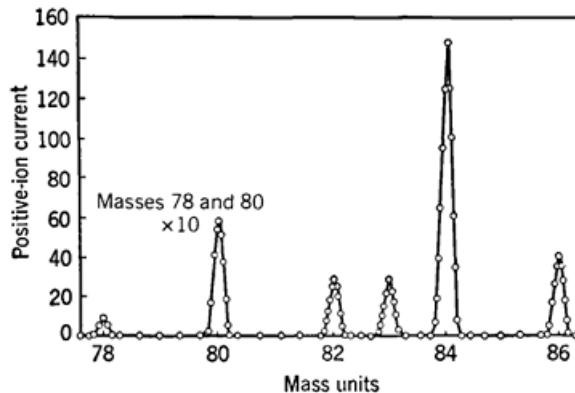


Figura 8.2: Abbondanza isotopica del Kripton. L'area dei picchi per il ^{78}Kr e ^{80}Kr è stata moltiplicata per 10 per renderli maggiormente visibili.

8.2 Proprietà generali dei nuclei

La coppia (A,Z) definisce quindi univocamente un nuclide denominato col nome del corrispondente elemento chimico. I nuclidi noti sono circa 1440, di cui 340 in natura e 1100 prodotti artificialmente tramite reazioni nucleari indotte; tra tutti questi, però, quelli stabili, ovvero quelli che non decadono spontaneamente in altri nuclidi, sono circa 285. Si sottolinea che vengono considerati stabili anche quelli a vita molto lunga. Tra essi circa 165 hanno N pari e Z pari (i cosiddetti nuclei *pari-pari*), circa 110 hanno N pari o Z pari mentre circa 10 hanno N dispari e Z dispari.

In natura i nuclidi si trasformano spontaneamente tramite i decadimenti. I decadimenti che modificano in numero di nucleoni in un nucleo sono di due tipi: alfa e beta.

- **Decadimento alfa:** si tratta di un decadimento a due corpi. Il nucleo padre perde un nucleo di elio-4 trasformandosi nell'elemento con numero atomico $Z-2$:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$$
- **Decadimento beta:** si tratta di un decadimento a tre corpi. Esistono tre tipi di decadimento beta, a seconda se il nucleo figlio aumenta o diminuisce il suo numero atomico.
 - *Decadimento β^- :* è un decadimento tipico dei nuclei aventi un eccesso di neutroni rispetto ai loro isobari stabili; il nucleo si trasforma in un suo isobaro con conseguente emissione di un elettrone e di un antineutrino elettronico secondo la legge:
$${}^A_Z X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + e^- + \bar{\nu}_e$$
 - *Decadimento β^+ :* è un decadimento tipico dei nuclei aventi un difetto di neutroni rispetto ai loro isobari stabili; il nucleo si trasforma in un suo isobaro con

conseguente emissione di un positrone e di un neutrino elettronico secondo la legge: ${}_{Z}^{A}\text{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{A}\text{Y} + e^+ + \nu_e$

- *Cattura elettronica*: è caratterizzata dalla cattura di un elettrone da parte del nucleo, con conseguente emissione di un neutrino (decadimento a 2 corpi) secondo lo schema: ${}_{Z}^{A}\text{X} + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^{A}\text{Y} + \nu_e$

Ogni elemento può avere anche molti isotopi stabili: l'abbondanza relativa a ciascuno di essi è generalmente uniforme, come si può vedere nella tavola dei nuclidi in figura 8.3

Osservazione 8.2:

La tavola dei nuclidi (fig. 8.3) dà diversi indizi sul tipo di decadimento radioattivo a cui è sottoposto ogni isotopo. Quando hanno numero di massa piccolo i nuclei stabili si trovano lungo la bisettrice ($N = Z$); mentre il numero atomico cresce, i nuclidi richiedono un maggior numero di neutroni.

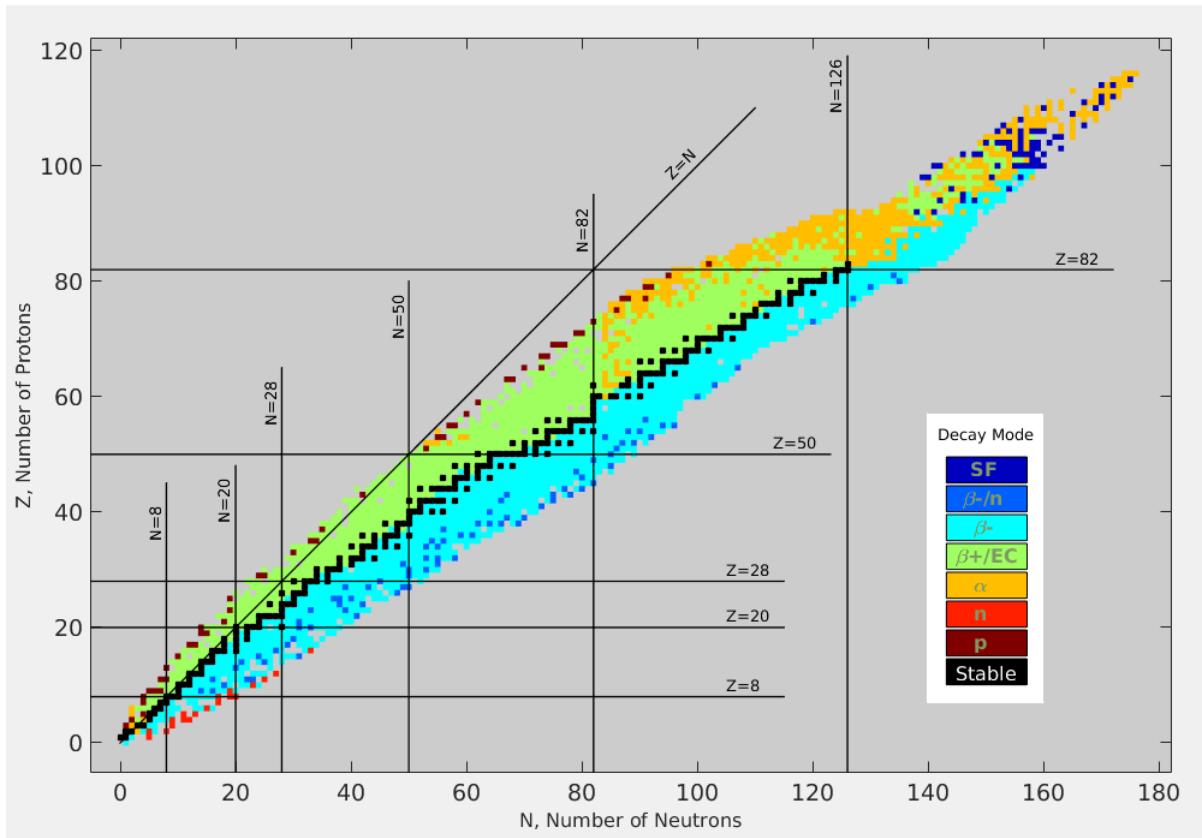


Figura 8.3: Tavola dei nuclidi. Sull'asse delle ascisse si trova il numero di neutroni mentre su quello delle ordinate si trova il numero atomico. Ogni quadratino del grafico rappresenta un nuclide. Le linee indicano particolari numeri atomici o di massa da cui originano stati particolarmente stabili.

In seguito a decadimenti nucleari ci si “muove” sulla tavola dei nuclidi nel modo indicato dalla figura 8.4:

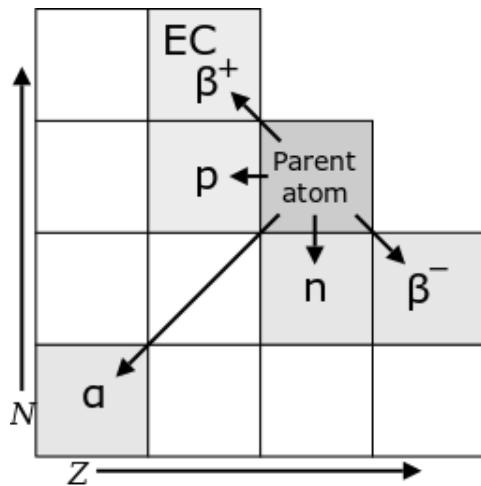


Figura 8.4: Spostamento nella tavola dei nuclidi causato da un decadimento. Un decadimento β^+ diminuisce Z ma aumenta il numero di neutroni (in quanto il numero di nucleoni rimane costante), quindi mi muovo in diagonale in basso a destra; analogamente un decadimento β^- aumenta Z ma diminuisce il numero di neutroni, portando ad un movimento diagonale in alto a sinistra. Il decadimento α invece mi fa muovere di due caselle verso il basso e verso sinistra in quanto il nucleo padre perde un nucleo di elio-4 (formato da due neutroni e due protoni).

8.2.1 Dimensioni dei nuclei

Adesso analizziamo le dimensioni dei nuclei per comprendere esattamente con quali scale dimensionali stiamo operando: esistono due diverse grandezze che hanno due significati profondamente differenti: la densità di carica e la densità di materia. Vedremo poi che le dimensioni nucleari, seppur diverse, hanno valori simili. Sperimentalmente esistono diversi metodi per determinare la dimensione dei nuclei, come ad esempio esaminando la radiazione diffusa dal nucleo, lo studio delle transizioni atomiche, lo studio dell'atomo muonico², differenza di energia coulombiana tra i nuclei...

Nella nostra analisi ci concentriamo solamente sulla diffusione.

8.2.1.1 Densità di carica

Iniziamo parlando della densità di carica nucleare ovvero la distribuzione dei protoni nel nucleo. Utilizziamo una tecnica detta “electron scattering” con il quale un fascio di elettroni con energia compresa tra 100 MeV e 1 GeV viene fatto incidere contro il nucleo bersaglio e viene studiata la figura di diffrazione.

La densità di carica è ben descritta dalla *distribuzione di Woods-Saxon*:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (8.4)$$

²Gli atomi muonici sono particolari tipi di atomi mesici. La loro differenza rispetto ad un atomo ordinario è dovuta alla presenza di uno o più muoni nella shell elettronica, che andranno a prendere il posto degli elettroni.

dove $a = 0.52 \text{ fm}$, è il raggio di Bohr.

Analizzando le distribuzioni di carica di vari nuclidi si osservano delle caratteristiche comuni.

- La densità di carica nucleare centrale è circa uguale per tutti i nuclei;
- i nucleoni NON sembrano riunirsi vicino al centro del nucleo;
- la materia nucleare è incomprimibile.

Tutto ciò ci permette di dire che la densità del nucleo è circa costante, in prima approssimazione, considerando un nucleo perfettamente sferico:

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim \text{cost} \quad (8.5)$$

quindi si ottiene una relazione di proporzionalità tra il numero di nucleoni A e il raggio nucleare R :

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (8.6)$$

con r_0 raggio nucleare medio, pari a 1.2 fm , determinata sperimentalmente tramite scattering elettronico.

8.2.1.2 Densità di materia nucleare

A differenza della densità di carica, la densità di materia nucleare considera anche i neutroni che non risentono della forza di Coulomb ma solo dell'interazione forte.

Per misurare la densità nucleare consideriamo lo scattering di una particella α con un nucleo pesante. La probabilità di diffusione ad un certo angolo dipende dall'energia della particella incidente tramite la cosiddetta formula di Rutherford (eqn. 8.7) che descrive la diffusione elastica di particelle cariche a causa della sola interazione coulombiana.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \propto E^{-2} \quad (8.7)$$

Man mano che l'energia della particella α aumenta, la repulsione di Coulomb viene superata e i nuclei di elio-4 si possono avvicinare abbastanza da permettere all'interazione forte di agire. Il punto in cui la repulsione coulombiana viene sovrastata dalla forza nucleare forte fornisce una misura del nucleo ed è possibile dimostrare che anche questa legge è del tipo dell'equazione 8.6; in questo caso la costante r_0 vale 1.4 fm e fornisce la scala sulla quale agisce l'interazione forte (capitolo 6).

Le due costanti rappresentano concetti differenti però assumono valori molto vicini l'una dall'altra quindi possiamo considerare un valore medio di 1.3 fm .

8.3 Storia della fisica nucleare

Vediamo adesso una breve carrellata di eventi fondamentali nello sviluppo della fisica nucleare.

- **1896** - Henri Becquerel scopre la radioattività.
- **1898** - Marie e Pierre Curie scoprono il radio. Ernest Rutherford distingue la radiazione α da quella β e presenta la legge di decadimento.
- **1911** - Rutherford scopre il nucleo atomico.
- **1928** - George Gamow sviluppa la teoria del decadimento α .
- **1930** - Wolfgang Pauli prevede l'esistenza del neutrino. Paul Dirac propone l'esistenza dell'antimateria.
- **1932** - James Chadwick scopre il neutrone.
- **1934** - Enrico Fermi sviluppa la teoria del decadimento β .
- **1935** - Hideki Yukawa propone una prima descrizione della forza nucleare forte.
- **1938** - Gamow, Carl Friedrich von Weizsäcker e Hans Bethe descrivono la fusione nucleare all'interno delle stelle.
- **1942** - Fermi realizza la prima reazione di fissione nucleare controllata. Robert Oppenheimer è a capo del Progetto Manhattan volto a sviluppare la prima arma a fissione.
- **1945** - Il 6 e 9 agosto vengono rilasciate le bombe atomiche su Hiroshima e Nagasaki.
- **1949** - Maria Goeppert Mayer propone il modello nucleare a shell.
- **1951** - Viene sviluppato il primo reattore nucleare per uso civile per produrre elettricità.
- **1952** - Gli Stati Uniti sperimentano la prima bomba a idrogeno che sfrutta la fusione nucleare invece che la fissione.
- **1956** - Frederick Reines e Clyde Cowan scoprono il neutrino.
- **1957** - Viene sviluppata la teoria della nucleosintesi stellare. È attivato il primo reattore nucleare di potenza commerciale.
- **1961** - A Brookhaven (USA) viene realizzata la prima PET (Positron Emission Tomography).
- **1964** - Murray Gell-Mann e George Zweig propongono l'esistenza dei quark.

- **1979** - Il reattore di Three Mile Island (USA) subisce una fusione parziale
- **1983** - Al CERN a Ginevra vengono scoperti i bosoni W e Z, mediatori dell'interazione debole.
- **1986** - Il reattore di Cernobyl (URSS, attuale Ucraina) subisce un meltdown con conseguente rilascio di grandi quantità di radiazioni.
- **2000** - Gli esperimenti Super-Kamiokande e SNO scoprono l'oscillazione del flavor dei neutrini.
- **2010** - Inizia la costruzione del reattore a fusione ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor).
- **2011** - A Fukushima (Giappone), la centrale nucleare subisce una fusione del nucleo a causa di uno tsunami che danneggia i generatori di riserva per il raffreddamento.

8.3.1 La scoperta del neutrone

Adesso vediamo nel dettaglio come è stato scoperto il neutrone. Nel 1930 Bothe e Becker bombardano un bersaglio di berillio con particelle alfa generate da una sorgente di polonio. Si accorgono che viene prodotta una radiazione sconosciuta altamente penetrante. Questa radiazione deve essere necessariamente neutra poiché, per quanto energetica, una particella carica non percorre più di qualche millimetro nel piombo utilizzato come schermatura.

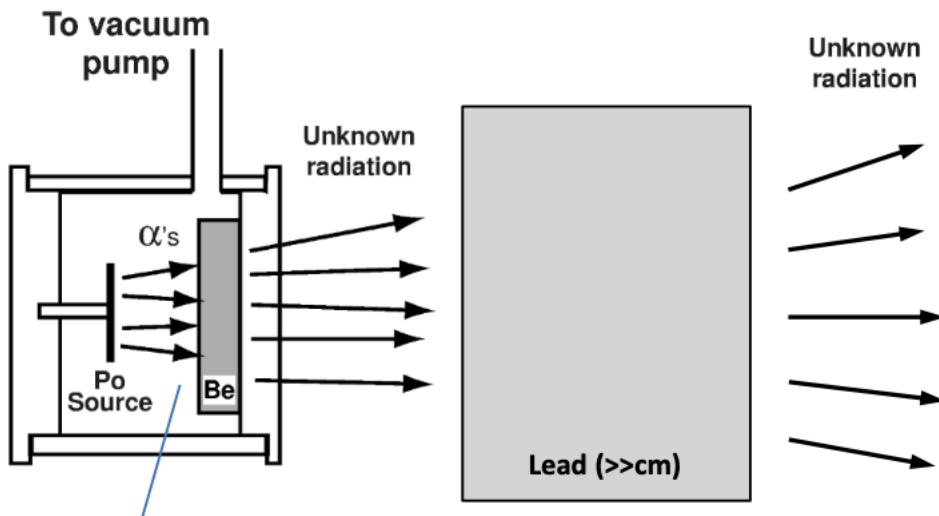


Figura 8.5: Schema dell'apparato sperimentale usato da Bothe e Becker

Frédéric Joliot e Irène Joliot-Curie, utilizzando un apparato simile, studiano questa radiazione non identificata mentre colpisce un bersaglio di paraffina. Attraverso la misura delle tracce in una camera a ionizzazione stimano che questa radiazione libera un protone con energia molto elevata, fino a 5.3 MeV. Ipotizzarono che questa radiazione altamente penetrante emessa dal berillio fosse costituita dall'unica particella neutra conosciuta a quel tempo: il fotone. In realtà la reazione che descrive ciò che succedeva è la seguente:



La radiazione misteriosa è quindi un neutrone.

Possiamo calcolare quale energia devono possedere i fotoni per liberare protoni da 5.3 MeV supponendo che effettuano scattering Compton (eqn. 3.44). Quindi l'energia del protone scatterato (E_R) è data dalla differenza tra l'energia del fotone incidente e diffuso:

$$E_R = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \frac{\frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (8.9)$$

l'energia massima trasferita al protone di rinculo si ha per $\theta = \pi$

$$E_R = \frac{2E_\gamma^2}{mc^2 + 2E_\gamma} \quad (8.10)$$

Per avere protoni con energia $E_R=5.3$ MeV sono necessari fotoni con energia di circa 53 MeV, molto più energetici dei gamma prodotti dai decadimenti radioattivi.

Nel 1932 James Chadwick, un collaboratore di Rutherford, fece esperimenti simili e si convinse che la radiazione emessa dal berillio fosse in realtà una particella neutra con massa simile a quella del protone.

Propose un argomento classico per lo scattering tra questa particella misteriosa (che indichiamo con "?") e il protone. La conservazione del momento e dell'energia cinetica esprime una relazione per ricavare la velocità finale del protone:

$$v_f^p = \left(\frac{m_p - m?}{m_p + m?} \right) v_i^p + \frac{2m?}{m_p + m?} v_i^? \quad (8.11)$$

se consideriamo una collisione "head-on", il primo termine si annulla:

$$v_f^p = \frac{2m?}{m_p + m?} v_i^? \quad (8.12)$$

Nei suoi esperimenti, Chadwick utilizzò vari bersagli con basso peso molecolare come paraffina (CH_2), elio ($A=4$), litio ($A=7$) e azoto ($A=14$). Consideriamo un bersaglio di

azoto.

$$\text{Idrogeno} \quad v_f^H = \frac{2m_?}{m_H + m_?} v_i^? = \frac{2m_?}{1 \cdot m_p + m_?} v_i^? \quad (8.13)$$

$$\text{Azoto} \quad v_f^N = \frac{2m_?}{m_N + m_?} v_i^? = \frac{2m_?}{14 \cdot m_p + m_?} v_i^? \quad (8.14)$$

Misurando sperimentalmente le velocità dell'azoto e dell'idrogeno si ottiene la massa della particella misteriosa.

$$\frac{v_f^H}{v_f^N} = \frac{14 \cdot m_p + m_?}{1 \cdot m_p + m_?} = \frac{3.3 \cdot 10^9 \text{ cm/s}}{4.7 \cdot 10^8 \text{ cm/s}} \implies m_? \simeq 1.15 m_p \quad (8.15)$$

Il fatto che questa nuova particella sia stata prodotta rompendo i nuclei con particelle α suggerisce che nei nuclei ci siano anche neutroni, quindi il nucleo atomico è formato da Z protoni e $A-Z$ neutroni.

8.3.2 Visione storica delle forze nucleari

I nucleoni, così come gli elettroni, sono dei fermioni, in quanto particelle a spin semintero. All'interno dell'atomo la massa degli elettroni è molto minore rispetto a quella del nucleo, quindi è possibile approssimare il moto di un elettrone come un moto radiale. Nel nucleo questa approssimazione non è possibile in quanto le masse dei protoni e neutroni sono simili e le particelle si muovono sotto l'influenza di mutue interazioni. Si definisce quindi un campo medio di forze, generato collettivamente dagli altri nucleoni, in cui ciascuna particella si muove, in maniera analoga al potenziale di Hartree nello studio di atomi a molti elettroni.

Siccome la carica del protone è maggiore di zero mentre il neutrone è, appunto, neutro, il potenziale $V(r)$ *non* può essere di origine elettromagnetica. È necessario introdurre un'interazione con alcune caratteristiche.

- Deve essere attrattiva sulla scala delle dimensioni nucleari.
- Deve agire a cortissimo raggio, nella scala di $r_0 = 1.4 \text{ fm}$.
- Non deve essere dipendente dalla carica elettrica.
- Deve essere molto più intensa dell'interazione elettromagnetica.

tale forza è stata denominata, con poca fantasia, *interazione nucleare forte*.

L'interazione forte tra i nucleoni è il “residuo” della forza forte tra i quark che costituiscono protoni e neutroni e, analogamente alla forza elettromagnetica che si sviluppa tra distribuzioni complessivamente neutre di carica come le forze di Van del Waals, si sviluppa tra stati legati di quark.

Le forze nucleari sono indipendenti dalla carica (a meno dell'elettromagnetismo, come già visto nella sezione 6.4.1) quindi le interazioni protone-protone, protone-neutrone e neutrone-neutrone sono identiche.

Il potenziale nucleone-nucleone è basato sulla densità di carica e di materia nucleare ed è formato da una parte attrattiva e da una parte repulsiva.

8.4 Energia di legame

Iniziamo adesso a considerare dei sistemi leggermente più complessi. Supponiamo di avere un protone e un neutrone infinitamente lontani e fermi, l'energia di questo sistema è semplicemente la somma dell'energia delle due particelle:

$$E = (m_p + m_n)c^2 \quad (8.16)$$

Consideriamo ora il nuclide più semplice, il deuterone o nucleo di deuterio ${}^2_1\text{H}$ che è uno stato legato di un protone e un neutrone. L'energia del sistema sarà quindi la somma delle energie di singola particella più l'energia di legame:

$$E' = (m_p + m_n)c^2 + E_b \quad (8.17)$$

Abbiamo uno stato legato se l'energia del sistema è minore della somma delle energie di singola particella ovvero $E' < E$; per comodità fissiamo a 0 l'energia per $R \rightarrow \infty$, e quindi si ottiene che l'energia di legame è negativa $E_b < 0$.

L'energia di legame è, quindi, l'energia che devo fornire al nucleo di deuterio per dissociarlo, oppure l'energia che viene liberata, tramite emissione di un fotone gamma, quando si forma un nucleo di deuterio. Si ha quindi:

$$E' = m_d c^2 < E = (m_p + m_n)c^2 \quad (8.18)$$

l'energia di legame del deuterio è pari a $E_b = 2.224 \text{ MeV}$ ed è l'equivalente per la fisica del nucleo di quello che in fisica atomica è l'energia di Rydberg che corrisponde all'energia dello stato legato protone-elettrone $E = 13.6 \text{ eV}$.

Per un generico nucleo di massa M si ha che l'energia di legame vale:

$$E_b = [Zm_p + (A - Z)m_n - M]c^2 = 931.48 \cdot [Zm_p + (A - Z) - M] \text{ MeV} \quad (8.19)$$

Siccome l'energia di legame cresce più o meno linearmente con A, risulta molto utile studiare *l'energia di legame media per nucleone*, E_b/A (figura 8.6).

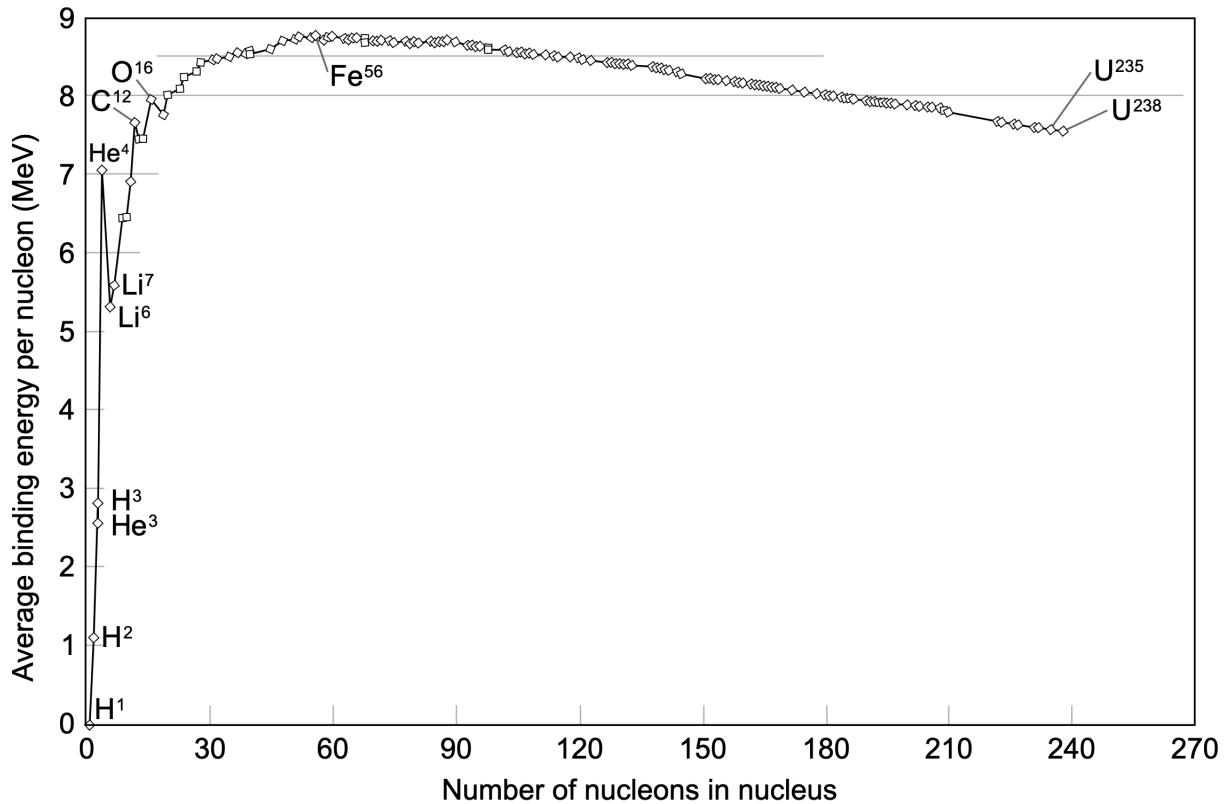


Figura 8.6: Energia di legame media per nucleone. Un valore grande di E_b/A comporta un nucleo molto legato e stabile. Il massimo si ha per $A \approx 60$, più precisamente per il ^{56}Fe che è il punto di arrivo per l'evoluzione stellare partendo dalla fusione di idrogeno ed elio³. Per $A > 10$ il valore dell'energia di legame si assesta sugli 8 MeV con fluttuazioni al massimo del 10%, questa è una conseguenza della cosiddetta proprietà di saturazione: un nucleone interagisce solo con i nucleoni adiacenti. Da notare come le scale di energia atomiche siano nell'ordine della decina di eV mentre qui si parla di MeV, questo perché la forza nucleare forte è $10^5 \div 10^6$ più intensa della forza elettromagnetica.

8.5 Momento angolare dei nucleoni

Dalla meccanica quantistica non relativistica sappiamo che se ci muoviamo in un potenziale radiale le soluzioni dell'equazione di Schrödinger possono essere fattorizzate in una parte dipendente solo dalla coordinata radiale e una parte dipendente solo dalle coordinate angolari: le armoniche sferiche.

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (8.20)$$

³In realtà il nucleo con la massima energia di legame è il ^{62}Ni con un valore di $E_b/A = 8.7948$ MeV mentre il ^{56}Fe ha un valore di poco inferiore, pari a 8.7906 MeV. Il ^{56}Fe detiene invece il primato del nucleo con la massa per nucleone minore, pari a 930.412 MeV.

Sappiamo anche che il momento angolare è una costante del moto (in particolare L^2) con valore di aspettazione:

$$L^2 = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \quad \text{con } \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.21)$$

Il principio di indeterminazione ci permette di conoscere una sola componente di \vec{L} alla volta e convenzionalmente si sceglie la proiezione lungo z che ha come valori di aspettazione.

$$L_z = \hbar m \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8.22)$$

I nucleoni, così come gli elettroni, sono fermioni e possiedono un numero quantico di spin (momento angolare intrinseco) pari a $1/2$.

$$S^2 = \hbar^2 s(s + 1) \quad \text{con } s = \frac{1}{2} \quad (8.23)$$

$$S_z = \hbar m_s \quad \text{con } m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (8.24)$$

Un nucleone che si muove in un potenziale centrale con momento angolare orbitale L e spin S ha un momento angolare totale dato da $J = L + S$:

$$J^2 = \hbar^2 j(j + 1) \quad \text{con } |\ell - s| < j < |\ell + s| \quad (8.25)$$

$$J_z = L_z + S_z = \hbar m_j \quad \text{con } m_j = 0, \dots, \pm j \quad (8.26)$$

dato che m è sempre intero, m_j è sempre semintero; inoltre abbiamo solo due possibili valori di $j = \ell \pm 1/2$.

Definisco il *momento angolare totale di un nucleo* contenente A nucleoni come la somma vettoriale dei momenti angolari totali di tutti i nucleoni.

$$I = \sum_{i=0}^A J_i \quad (8.27)$$

Questo nuovo momento angolare ha tutte le proprietà del momento angolare. Per molte applicazioni che implicano il momento angolare, il nucleo si comporta come se fosse una singola entità con momento angolare intrinseco (spin nucleare) I . Per rompere l'accoppiamento tra i nucleoni sono necessari campi elettromagnetici particolarmente intensi; per questo motivo I viene usato per descrivere gli stati nucleari.

Quindi useremo I per descrivere lo spin nucleare e J per il momento angolare totale di un singolo nucleone. Se A è dispari, $I \neq 0$ è semintero; se invece A è pari, I è intero. Se il numero di neutroni e di protoni è pari allora lo spin nucleare è pari a zero, infatti i nucleoni identici accoppiano gli spin in direzioni antiparallele; se invece il numero di neutroni e di protoni è dispari, lo spin nucleare è diverso da zero e abbiamo una particella di valenza che determina le proprietà nucleari in maniera del tutto analoga al caso dell'atomo. Queste proprietà saranno analizzate nel prossimo capitolo nel cosiddetto *modello a shell* (sec: 9.2).

Come abbiamo già visto nel capitolo 4 è possibile assegnare la parità ad un sistema di

molte particelle come il prodotto delle parità delle singole particella. Quindi la parità della funzione d'onda del sistema sarà pari se è combinazione di un numero qualsiasi di funzioni d'onda pari o un numero pari di funzioni dispari; sarà invece dispari se combinazione di un numero dispari di funzioni d'onda dispari. Proprio come per I , consideriamo la parità π come una proprietà globale dell'intero nucleo, quindi per ogni valore di I si può avere $\pi = \pm$, in simboli I^π .

8.6 Momenti elettrici e magnetici del nucleo

La maggior parte delle informazioni sulla struttura nucleare deriva dallo studio dell'interazione elettromagnetica dei nuclei piuttosto che dall'interazione nucleare forte. Infatti, quest'ultima stabilisce la distribuzione e il movimento dei nucleoni nel nucleo, e noi sondiamo questa distribuzione tramite l'interazione e.m.

Ad ogni carica presente viene assegnato un *momento di multipolo* associato a ciascuna dipendenza spaziale caratteristica: l'espansione del sistema in multipoli viene fatta tramite la somma di termini con momenti progressivamente più fini. Di seguito nella tabella viene illustrata la “ratio” utilizzata.

momento	Ordine del momento L
monopolio	0
dipolo	1
quadrupolo	2
ottupolo	3
esadecapolo	4

Tabella 8.1: Tabella in cui viene presentato l'ordine del momento assegnato ai vari tipi di multipolo

I nuclei tendono ad assumere la struttura più semplice e simmetrica possibile: per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche del nucleo è sufficiente calcolare solo i momenti di multipolo di ordine più basso.

Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una parità determinata dal comportamento dell'operatore quando si inverte il segno della coordinata radiale $r \rightarrow -r$:

- Parità del momento elettrico $\rightarrow P_E = (-1)^L$
- Parità del momento magnetico $\rightarrow P_B = (-1)^{L+1}$

Si tenga a mente che esistono solo multipoli elettrici con L pari (monopolio elettrico, quadrupolo elettrico) e che esistono solo multipoli magnetici con L dispari.

Il monopolio elettrico non è altro che la carica elettrica Ze , il successivo momento non nullo è il momento di dipolo magnetico

8.6.1 Momento magnetico del nucleo

In meccanica quantistica, il momento magnetico corrisponde alla direzione della più grande componente di L ed è dato dalla formula:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m}\ell \quad (8.28)$$

Nel caso dell'atomo viene definito il *magnetone di Bohr*, indicato con μ_B , che vale $5.7885 \cdot 10^{-5}$ eV/T; nel caso del nucleo si introduce invece il *magnetone nucleare*, indicato con μ_N , che vale $3.1525 \cdot 10^{-8}$ eV/T.

Per protoni e neutroni è quindi possibile scrivere il momento orbitale come:

$$\mu = \mu_N \ell g_l \quad (8.29)$$

g_l vale 1 nel caso dei protoni, 0 nel caso dei neutroni e viene chiamato *g factor*.

Se si considera poi il momento angolare di spin, pari a 1/2, si può scrivere:

$$\mu = \mu_N s g_s \quad (8.30)$$

g_s , chiamato *spin g factor*, vale 2 per gli elettroni⁴, 5.585 per i protoni e -3.826 per i neutroni, il quale pur essendo privo di carica elettrica possiede un momento magnetico..

Ne consegue dunque che i nucleoni non sono particelle elementari puntiformi. Si sottolinea anche che nei nuclei è favorito l'accoppiamento (pairing) dei nucleoni in modo che il loro momento angolare orbitale e di spin si sommino a zero.

8.6.2 Momento di quadrupolo elettrico

Il momento di quadrupolo elettrico dà indicazioni riguardo alla forma del nucleo. Classicamente si ottiene tramite l'espressione $eQ = e(3z^2 - r^2)$, mentre in meccanica quantistica tramite la formula:

$$eQ = e \int \psi^*(3\hat{z}^2 - \hat{r}^2)\psi dv \quad (8.31)$$

Quello che restituisce informazioni in merito alla forma del nucleo è il parametro Q.

- $Q=0 \rightarrow$ nucleo sferico
- $Q>0 \rightarrow$ nucleo prolato (sigaro)
- $Q<0 \rightarrow$ nucleo oblato (ciambella)

Osservando la forma del nucleo in funzione di N o Z si osserva la presenza di "numeri magici" in corrispondenza dei quali il nucleo è meno deformato e più sferico.

⁴Per particelle puntiformi come l'elettrone e il muone, l'equazione di Dirac ci dice che g_s vale 2, sperimentalmente 2.0023; questa discrepanza è dovuta a correzioni a ordini superiori della QED. Questo è un settore di ricerca ancora molto aperto.

Capitolo 9

Modelli Nucleari

Per i nuclei, al contrario dell'atomo, purtroppo non esiste un unico modello capace di spiegarne tutte le proprietà. Questo è dovuto al fatto che non esiste un corpo centrale di grande massa che rappresenti il centro di attrazione e che non si conosce in maniera esatta la struttura del potenziale di interazione nucleare.

Ciò che viene fatto è adottare una teoria volutamente semplificata per spiegare alcune proprietà nucleari e introdurre poi ulteriori termini per migliorarla.

Esistono moltissimi modelli, di seguito vengono presentati i principali (in grassetto sono segnati quelli che analizzeremo più nel dettaglio):

- Modello a gas di Fermi: dove i nucleoni vengono considerati come particelle confinate in un volume pari a $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ e l'interazione tra loro li confina in una buca di potenziale entro un raggio $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$;
- **Modello a goccia di liquido**
- **Modello a strati (shell)**
- Interacting Boson Model (IBM): dove protoni e neutroni si accoppiano, agendo essenzialmente come una singola particella di natura bosonica.
- Modelli collettivi

9.1 Modello a "goccia di liquido"

Il **modello nucleare a goccia** fu ipotizzato nel 1939 da Niels Bohr e da John Archibald Wheeler per spiegare la perdita di massa durante una fissione nucleare.

Definizione 9.1. *Il modello a goccia asserisce che quando un neutrone colpisce un nucleo quest'ultimo lo assorbe, risultando in un eccesso di energia che determina un moto oscillatorio (come una goccia di liquido quando assorbe energia meccanica). L'oscillazione provoca poi un allungamento del nucleo fin quando questo non si rompe (fissione nucleare).*

I concetti appena espressi possono essere riassunti in un'espressione, chiamata *formula semi-empirica di massa* o *formula di Weizsäcker*. Essa serve per determinare la massa di un nucleo generico.

$$m(Z, A) = NM_N + ZM_p - \frac{E}{c^2} \quad (9.1)$$

L'energia di legame E è data dal contributo di 5 termini:

- termine di volume;
- termine di superficie;
- termine coulombiano;
- termine di asimmetria;
- termine di pairing.

Analizziamoli adesso nel dettaglio.

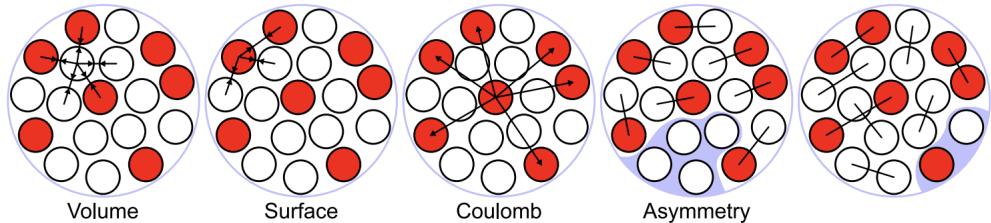


Figura 9.1: Illustrazione semplificata degli effetti dovuti ai termini del modello a goccia

9.1.1 Termine di volume

Il termine di volume è dato da:

$$a_v A \quad (9.2)$$

esso è proporzionale al volume del nucleo, non dipende da Z ed è dovuto all'interazione nucleare forte agente sui nucleoni. La dipendenza dal volume, e dunque dal numero dei nucleoni totali, discende dal fatto che l'interazione forte ha un raggio d'azione limitato e dunque un singolo nucleone interagisce in modo significativo soltanto coi nucleoni vicini.

Il termine a_v è invece un coefficiente il cui valore misurato è pari a 15.5 MeV.

9.1.2 Termine di superficie

Il termine è dato da:

$$-a_s A^{2/3} \quad (9.3)$$

Nasce come correzione al termine di volume ed è anch'esso dipendente dall'interazione forte. È dovuto al fatto che i nucleoni in superficie hanno meno nucleoni vicini coi quali

interagire e formano quindi un effetto simile alla tensione superficiale dell'acqua. Siccome nel nucleo $r \propto A^{1/3}$, allora il termine è proporzionale a $A^{2/3}$. Il coefficiente a_s sperimentalmente vale 16.8 MeV.

9.1.3 Termine coulombiano

Questo è dato da:

$$-a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (9.4)$$

È dovuto alla repulsione coulombiana che hanno i protoni all'interno del nucleo. Esso può essere intuitivamente rappresentato mediante una sfera con densità di carica puntiforme la cui energia potenziale è:

$$E = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q^2}{R} \quad (9.5)$$

Nel nucleo, il termine Q^2 può essere scritto come $Z^2 e^2$ mentre il raggio, come già visto, è proporzionale ad $A^{1/3}$. Se si prende in esame Z^2 , siccome la repulsione elettrostatica sussiste quando si ha più di un protone, ci si rende conto che può essere scritto come $Z(Z-1)$. Il resto dell'equazione 9.5 va a comporre il coefficiente a_c , che sperimentalmente si è visto che vale 0.72 MeV.

9.1.4 Termine asimmetrico

Questo termine è dato da

$$-a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (9.6)$$

È dovuto al principio di esclusione di Pauli: siccome sia protoni sia neutroni sono vincolati nell'occupazione di ciascun stato quantico, la differenza tra il numero di protoni e quello di neutroni provoca un eccesso di energia che sta alla base di questo termine. Ciascun nucleone è infatti vincolato ad occupare livelli energetici sempre più alti: l'energia totale aumenta a discapito dell'energia di legame che invece diminuisce. Il tutto è da "pesare" sul numero totale di nucleoni.

Il termine a_A vale sperimentalmente 23 MeV.

9.1.5 Termine di accoppiamento

Infine il termine di accoppiamento, indicato con $\delta(A, Z)$ è dato da:

$$\begin{cases} +a_P A^{-3/4} \rightarrow Z, N \text{ pari, } (A \text{ pari}) \\ 0 \rightarrow A \text{ dispari} \\ -a_P A^{-3/4} \rightarrow Z, N \text{ dispari, } (A \text{ pari}) \end{cases} \quad (9.7)$$

È anch'esso dovuto al principio di esclusione di Pauli: il nucleo ha energia minore se il numero di protoni con spin *up* è pari al numero di quelli con spin *down*, e lo stesso vale per i neutroni. Soltanto se N e Z sono pari vi è lo stesso numero di particelle *up* e *down* (ragione per cui la maggior parte dei nucleo sono pari-pari). La dipendenza da $A^{-3/4}$ deriva dal fatto che due nucleoni con spin identico hanno energia di legame maggiore e ciò spinge i nucleoni ad accoppiarsi formando coppie di spin opposto.

Riassumendo i vari risultati si ottiene la forma espansa della formula empirica di massa.

$$m(Z, A) = Z m_p + N m_n - \frac{1}{c^2} \left(a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A, Z) \right) \quad (9.8)$$

Si tenga presente che il valore dei coefficienti è stato ricavato interpolando la 9.8 coi dati sperimentali: la precisione di questa formula si aggira intorno ai 2 MeV, con forti deviazioni in corrispondenza della chiusura dei vari “strati nucleari”.

Termino	Valore (MeV)
Volume: a_V	15.5
Superficie: a_S	16.8
Coulombiano: a_C	0.72
Asimmetria: a_A	23
Paring: a_P	34

Tabella 9.1: Tabella riassuntiva con i valori delle varie costanti della formula 9.8

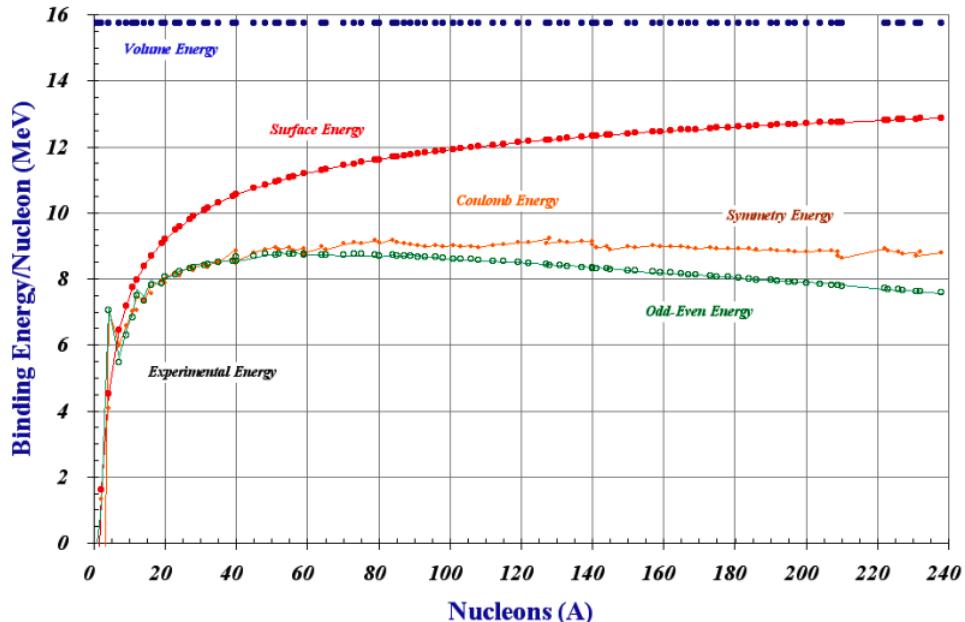


Figura 9.2: Andamento dei vari termini della formula semiempirica di massa. In ascissa è presente il numero di nucleoni mentre in ordinata l'energia di legame per nucleone E_b/A . Si nota l'andamento costante dell'energia di volume.

Per A costante, la formula semi-empirica di massa descrive una parabola al variare di Z , in cui sulle ascisse è riportato il numero atomico e sulle ordinate l'energia di legame. È evidente l'esistenza di una regione stabile, chiamata *regione di stabilità*¹. Inoltre il minimo della parabola si trova, considerando un nucleo con A dispari, quindi trascurando il termine di pairing, tramite la formula:

$$Z_{min} = \frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} = 0 \implies Z_{min} \frac{[M_n - M_p] + a_C A^{-\frac{1}{3}} + 4a_A}{2a_C A^{-\frac{1}{3}} + 8a_A A^{-1}} \simeq \frac{A}{2 + 0.015 A^{\frac{2}{3}}} \quad (9.9)$$

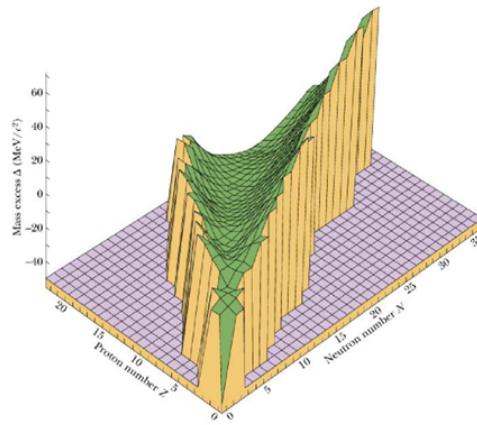


Figura 9.3: Parabola descritta dalla formula semiempirica in 3-D

L'equazione 9.9 dà, come già accennato, un'indicazione sulla β -stabilità nel piano $N-Z$: per A fissato, un nuclide è β -stabile se ha un valore di Z corrispondente ad un minimo per m . Per A piccoli, solitamente $Z_{min} \simeq A/2$, mentre per nuclei pesanti $Z/A \simeq 0.4$.

Si consideri, per finire, nuovamente il termine di accoppiamento: è possibile notare che per A pari l'equazione 9.7 produce 2 parabole, siccome il coefficiente può essere sia positivo sia negativo (come già visto nell'equazione 9.7). Questo significa che alcuni isotopi possono decadere sia β^+ sia β^- , come si evince dalla figura 9.3. Sono di particolare interesse ai fini della ricerca i decadimenti doppio β , decadimenti estremamente rari (vita media $\sim 10^{19}$ anni) che avvengono presso il minimo delle parabola, in quanto è stata teorizzata l'esistenza di questo tipo di decadimento senza l'emissione di neutrini, un fatto che violerebbe il modello standard (sec: 10.3.6).

¹Se si considerano tutti gli isotopi, l'andamento dell'energia di legame è ben più complesso.

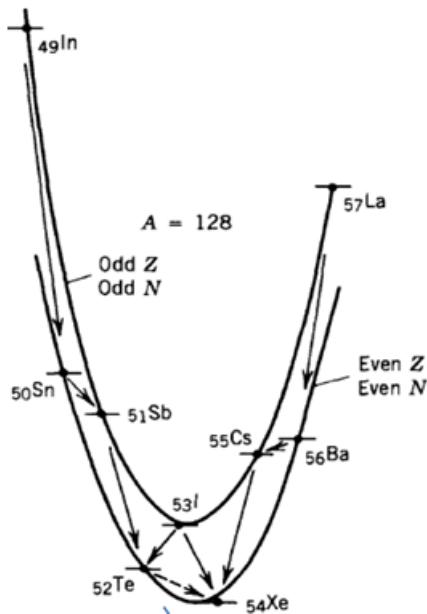


Figura 9.4: Le due possibili parabole determinate dal segno del termine di accoppiamento

Se ne studiamo la variazione in funzione di Z possiamo giustificare la tipologia di decadimento β a cui è sottoposto ciascun isotopo.

Osservazione 9.1:

Si tralascino per un momento il termine di accoppiamento e la relativa parabola doppia. La formula semi-empirica di massa (eqn 9.8) spiega perché, a seconda se ci troviamo sopra o sotto la valle di stabilità, si osservano decadimenti β^+ o β^- .

- Per A piccolo, Z_{min} è circa pari a $A/2$: metà dei nucleoni sono protoni
- Per A grande, Z_{min} tende ad essere sempre minore di $A/2$

La zona di β -stabilità spiega perché gli isotopi stabili si trovano al di sotto della bisettrice nella tavola dei nuclidi. Al crescere del numero di nucleoni, gli isotopi stabili hanno sempre più neutroni che protoni.

9.2 Modello a Shell

Il **modello nucleare a shell** è un modello del nucleo atomico che, tramite il principio di esclusione di Pauli, descrive la struttura del nucleo tramite livelli energetici, in maniera del tutto analoga al modello atomico.

Il modello a shell è stato sviluppato indipendentemente da Eugene Wigner, Maria Goeppert-Mayer e J. Hans D. Jensen nel 1949, i quali vinsero il premio Nobel per la fisica nel 1963 proprio per le loro scoperte.

Analogamente al modello atomico, l'obiettivo è derivare dalla natura delle forze nucleari le funzioni d'onda dei singoli nucleoni e dedurre le proprietà generali dei nuclidi.

L'analogia con il caso atomico è suggerita dall'esistenza dei cosiddetti “numeri magici”, ovvero un numero di nucleoni per il quale il nucleide è particolarmente stabile, che il modello a goccia non è in grado di spiegare. I numeri magici sono: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Ci sono diverse evidenze sperimentali che supportano l'esistenza dei numeri magici e delle shell nucleari.

- Energia di legame dell'ultimo neutrone in funzione del numero di neutroni (fig: 9.5): L'energia di legame misurata in corrispondenza dei numeri magici è significativamente più alta di quella prevista dalla formula semiempirica di massa (eqn: 9.8).
- Energia del I stato eccitato in funzione del numero di neutroni (fig 9.6): In un nucleo con il numero di neutroni pari ad un numero magico, l'energia del primo stato eccitato ha un'energia molto alta. Ad esempio il primo stato eccitato del nucleo di ^4He è doppiamente magico (2 protoni e 2 neutroni) ha un'energia di circa 20 MeV.
- Sezione d'urto di cattura di neutroni (fig: 9.7): La sezione d'urto di cattura per i neutroni, $n + {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^{A+1}X$ è particolarmente bassa quando un nucleo contiene 50, 82 o 126 neutroni.

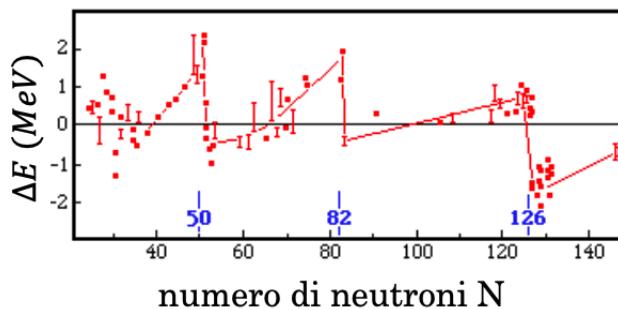


Figura 9.5: Energia di legame dell'ultimo neutrone in funzione del numero di neutroni. Si può notare la presenza di tre picchi molto accentuati in corrispondenza di $N = 50, 82, 126$.

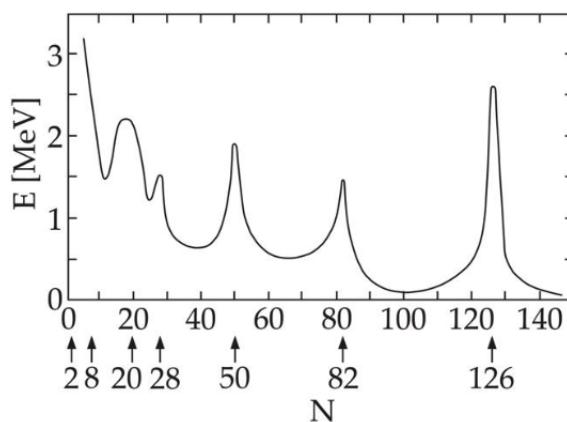


Figura 9.6: Energia del primo stato eccitato in funzione del numero di neutroni. Si noti come in corrispondenza dei vari numeri magici siano presenti dei picchi.

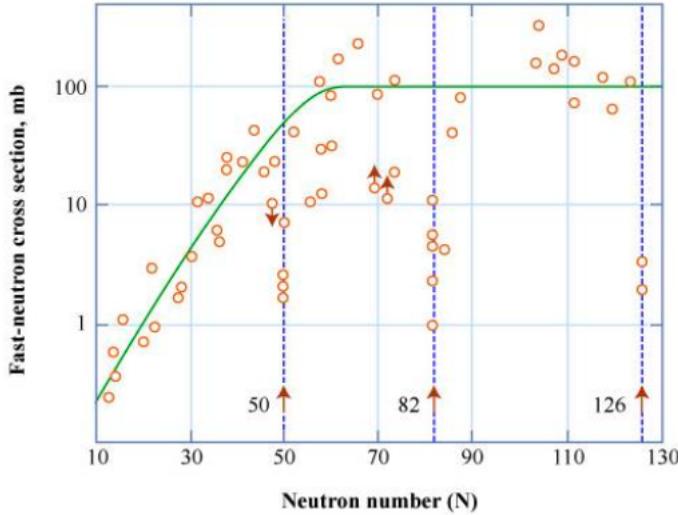


Figura 9.7: Sezione d’urto di cattura di neutroni veloci. È evidente come in corrispondenza dei numeri magici 50, 82 e 126, la sezione d’urto crolli anche di un fattore 100.

Il primo passo nello sviluppo del modello a shell è la scelta del potenziale. Iniziamo considerando due casi ben noti nella meccanica quantistica non relativistica: la buca di potenziale sferica infinita e l’oscillatore armonico.

Otteniamo dei livelli energetici diversi nei due casi, che prevedono entrambi i primi tre numeri magici (2, 8 e 20) ma per i livelli più alti entrambi i modelli falliscono e prevedono numeri completamente diversi da quelli osservati. Per la buca di potenziale i numeri magici risultano essere: 2, 8, 20, 34, 58, 92, 138; mentre per l’oscillatore armonico essi sono: 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168.

Consideriamo un potenziale più realistico, il quale non deve avere né una variazione così netta come quella della buca infinita né una troppo poco netta, come nel caso dell’oscillatore armonico.

Introduciamo il cosiddetto *potenziale di Woods-Saxon* (già incontrato nel capitolo precedente per la distribuzione di carica all’interno del nucleo: formula 8.4).

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (9.10)$$

dove il raggio medio e lo spessore della superficie sono scelti sulla base di quanto detto nella sezione 8.2.1 ($R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, $r_0 = 1.2$ fm, $a = 0.524$ fm, $V_0 \sim 50$ MeV). Al potenziale di Woods-Saxon va poi aggiunto il contributo di repulsione coulombiana dovuto ai protoni.

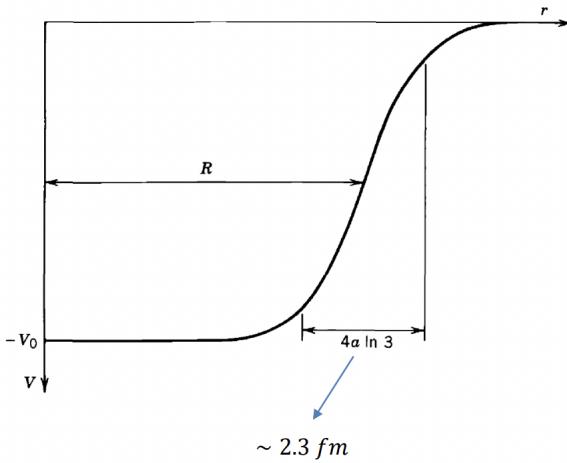


Figura 9.8: Forma funzionale del potenziale di Woods-Saxon

I livelli energetici nel caso del potenziale di Woods-Saxon risultano essere: 2, 8, 20, 40, 58, 92, 112. Anche in questo caso si giustificano i primi tre ma non gli altri numeri magici; per ottenere i numeri magici che si osservano sperimentalmente è necessario introdurre un nuovo termine dovuto all'interazione spin-orbita.

9.2.1 Interazione spin-orbita

Nel 1949, M. G. Meyer e, indipendentemente, H. Jensen proposero che fosse una forte interazione spin-orbita a modificare i livelli energetici; si tratta di un'ipotesi puramente fenomenologica. In questo modo il potenziale (eqn 9.10) viene modificato nel seguente modo:

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_{SO} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (9.11)$$

La forma di V_{SO} non è particolarmente importante in quanto è $\vec{L} \cdot \vec{S}$ che causa il riordinamento dei livelli. A differenza del caso atomico, in cui l'interazione spin-orbita nasce dall'interazione elettromagnetica del momento magnetico dell'elettrone con il campo magnetico generato dal suo moto attorno al nucleo, l'interazione spin-orbita nucleare *non* può essere di natura elettromagnetica in quanto sarebbe troppo debole.

Ricordando le regole di composizione dei momenti angolari possiamo riscrivere il prodotto $\vec{L} \cdot \vec{S}$ in funzione del momento angolare totale J .

$$J^2 = (L + S)^2 = L^2 + S^2 + 2 \vec{L} \cdot \vec{S} \implies \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \quad (9.12)$$

ricordando che il valore d'aspettazione del quadrato di un momento angolare vale $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ (eqn 8.21), allora possiamo scrivere il valore di aspettazione di $\vec{L} \cdot \vec{S}$ sapendo che i nucleoni

sono fermioni quindi $s = \frac{1}{2}$

$$E_{SO} \propto \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right) = \begin{cases} j = \ell + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\ell\hbar^2 \\ j = \ell - \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}(\ell+1)\hbar^2 \end{cases} \quad (9.13)$$

Quindi ogni livello ℓ si divide in due sottolivelli in seguito all'interazione spin-orbita, a seconda dei due valori di j e ciascuno dei due nuovi livelli contiene $2j + 1$ sottolivelli (degeneri) che corrispondono alle possibili orientazioni di \vec{J} .

La differenza di energia tra i due sottolivelli è data da:

$$\Delta E_{SO} \propto \left| E_{SO} \left(j + \frac{1}{2} \right) - E_{SO} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{2}\ell\hbar^2 + \frac{1}{2}(\ell+1)\hbar^2 \right| = \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \hbar^2 \quad (9.14)$$

si possono notare varie proprietà che permettono di spiegare i numeri magici più elevati. La differenza di energia aumenta al crescere di ℓ e quando diventa molto grande genera scavalcati rispetto all'ordinamento energetico fissato dal solo ℓ . Siccome $V_{SO} < 0$ il livello con $j = \ell - \frac{1}{2}$ ha energia più elevata di quello con $j = \ell + \frac{1}{2}$. Questo modello ha permesso di prevedere un nuovo numero magico non ancora osservato sperimentalmente: 184.

9.2.2 Pairing

Il modello a shell non considera il fenomeno del *pairing*, ovvero il fenomeno per il quale nucleoni identici tendono ad accoppiare il loro spin in maniera antiparallela. Con l'introduzione del pairing, però, il modello a strati permette di giustificare il momento angolare dei nuclei.

Nel caso sia il numero di protoni che di neutroni sia pari, il momento angolare totale del nucleo è pari a zero: $I = 0$.

Nel caso il numero di protoni sia pari e il numero di neutroni dispari (o viceversa), il momento angolare totale del nucleo è semplicemente dato dal modello a shell ovvero è pari al valore di j : $I = j$.

Nel caso sia il numero di protoni che di neutroni sia dispari ho un protone e un neutrone spaiati, ognuno con il suo j che contribuisce al momento angolare totale del nucleo: $I = |j_p \pm j_n|$.

Z	N	Nuclidi stabili
pari	pari	145
pari	dispari	53
dispari	pari	48
dispari	dispari	5

Tabella 9.2: Tabella riassuntiva con il numero di nuclidi stabili per parità del numero di nucleoni

Tenendo conto che lo spin è definito dal momento angolare dei nucleoni non accoppiati possiamo affermare che il momento magnetico dei nuclei pari-pari sia nullo. Al contrario, il momento magnetico dei nuclei con A dispari è definito dallo stato del nucleone non accoppiato. Il momento magnetico totale vale quindi:

$$\vec{\mu} = \mu_N(g_\ell \vec{L} + g_s \vec{S}) \quad (9.15)$$

Consideriamo \vec{J} che precede attorno a z (J_z costante) mentre \vec{L} e \vec{S} precedono attorno a \vec{J} . Le componenti di \vec{L} e \vec{S} lungo \vec{J} sono quindi costanti mentre L_z e S_z variano. Calcoliamo quindi:

$$\langle \mu \rangle = \frac{\vec{\mu}}{\mu_N} = \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{J}) \vec{J}}{|\vec{J}|^2} = \frac{g_\ell \vec{L} \cdot \vec{J} + g_s \vec{S} \cdot \vec{J}}{\hbar^2 j(j+1)} j \quad (9.16)$$

con

$$\vec{L} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}(J^2 + L^2 - S^2) = \frac{1}{2} \left(j(j+1) + \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right) \hbar^2 \quad (9.17)$$

$$\vec{S} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 + S^2) = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right) \hbar^2 \quad (9.18)$$

quindi ottengo due valori di $\langle \vec{\mu} \rangle$ a seconda del valore di $j = \ell \pm \frac{1}{2}$:

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} (j - \frac{1}{2})g_L + \frac{1}{2}g_S & j = \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1}[(j + \frac{3}{2})g_L - \frac{1}{2}g_S] & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9.19)$$

Ricordiamo i valori di g_L e g_S per protoni e neutroni:

	Protone	Neutrone
g_L	1	0
g_S	5.5855	-3.8263

Tabella 9.3: Tabella riassuntiva con i valori del rapporto giromagnetico per protoni e neutroni

Quindi se il nucleone non accoppiato è un protone (ovvero considero nuclei con un numero dispari di protoni):

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} j + 2.29 & j = \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1}(j - 1.29) & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9.20)$$

il momento magnetico proviene dal protone spaiato: $I = j_p$.

Se invece il nucleone non accoppiato è un neutrone (ovvero considero nuclei con un

numero dispari di neutroni:

$$\mu/\mu_N = \begin{cases} -1.9131 & j = \ell + \frac{1}{2} \\ 1.9131 \frac{j}{j+1} & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9.21)$$

il momento magnetico del nucleo proviene dal neutrone spaiato: $I = j_n$.

Capitolo 10

Decadimenti Radioattivi

In questo capitolo si vogliono trattare tutti i tipi di decadimenti osservabili in fisica nucleare (in maniera più approfondita e centrata sui nuclidi di quanto fatto nel capitolo 2.1).

10.1 Decadimenti nucleari

Definizione 10.1. *Il decadimento radioattivo è il processo mediante il quale un nucleo atomico perde energia.*

I decadimenti radioattivi sono caratterizzati da diverse proprietà utili per classificarli:

- Durata del processo di decadimento.
- Tipo di particella emessa; può essere emessa una particella α (ovvero un nucleo di ${}^4\text{He}$), una particella β (ovvero un elettrone) o γ (ovvero un fotone molto energetico). Possono essere emessi anche protoni e neutroni oppure si può verificare il processo di fissione spontanea.
- Energia della transizione.
- Conservazione di quantità fisiche (momento angolare, spin...)

10.1.1 Legge di decadimento radioattivo

Come abbiamo già visto nella sezione 2.1.3 la probabilità di decadimento nell'unità di tempo è una proprietà della sostanza e del processo di decadimento e *non* dipende dal tempo, ovvero la probabilità di decadimento per unità di tempo di un atomo è costante e non dipende dall'età dell'atomo. Inoltre, in una sostanza contenente N nuclei, la probabilità di decadimento nell'unità di tempo del singolo nucleo non dipende da N . Quindi la probabilità di decadimento in un intervallo di tempo infinitesimo dt è:

$$dP = \lambda dt \tag{10.1}$$

dove λ è la **costante di decadimento** caratteristica del processo e ha dimensioni $[s^{-1}]$. Se la sostanza radioattiva contiene N nuclei, con N grande allora si può scrivere

$$-dN = \lambda N dt \implies N(t) = N_0 e^{\lambda t} \quad (10.2)$$

che abbiamo già visto in precedenza come la legge del decadimento radioattivo (eqn 2.22). Diamo adesso alcune definizioni utili per il futuro.

Definizione 10.2. La **vita media** di un decadimento è data dal valor medio della distribuzione dei singoli tempi di decadimento.

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t N(t) dt}{\int_0^\infty N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} \quad (10.3)$$

Definizione 10.3. Il **tempo di dimezzamento** è l'intervallo di tempo in cui il numero di nuclei si dimezza.

$$N(\tau_{1/2}) = \int_0^{\tau_{1/2}} \lambda N(t) dt = \int_{\tau_{1/2}}^\infty \lambda N(t) dt = \frac{N_0}{2} \quad (10.4)$$

con $\tau_{1/2} = \tau \ln 2 = 0.693\tau$

Un ulteriore concetto importante è quello della **larghezza di decadimento** dovuto all'indeterminazione dell'energia dello stato non stazionario; se il sistema ha un valor medio del tempo di sopravvivenza nello stato $|i\rangle$, la sua energia è nota con un'incertezza definita dalla relazione di indeterminazione.

$$\Delta E = \Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \lambda \quad \text{con } \hbar = 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s} \quad (10.5)$$

Esempio 10.1

Se $\tau = 10^{-12}$ s allora l'incertezza sull'energia vale $\Delta E = 10^{-10}$ MeV. Possiamo quindi parlare di transizioni tra livelli energetici ben distinti.

10.1.2 Attività

In molte circostanze risulta molto difficile misurare il numero di nuclei $N(t)$ non ancora decaduti al tempo t . È molto più semplice misurare l'attività di una sostanza radioattiva ovvero il numero di decadimenti per unità di tempo.

$$A(t) = \lambda N(t) = \frac{N(t)}{\tau} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (10.6)$$

La misura del numero di conteggi in un intervallo temporale Δt ci restituisce l'attività della sorgente solo se τ non è né troppo lungo né troppo corto.

L'attività della sorgente ci dice solamente il numero di decadimenti che avvengono all'interno della sorgente ma non ci dice nulla a riguardo del tipo di radiazione e dell'e-

nergia rilasciata, quindi non è una quantità utile per conoscere gli effetti biologici della radiazione.

Esistono diverse unità di misura dell'attività.

- **Becquerel:** 1 Becquerel (Bq) è l'attività di una sostanza che ha un decadimento al secondo.
- **Curie:** 1 Curie (Ci) è l'attività di un grammo di ^{226}Ra e $1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

Esempio 10.2

Voglio calcolare l'attività di un grammo di ^{226}Ra . Il tempo di dimezzamento del radio-226 è $\tau_{1/2} = 1602$ anni, quindi il tempo di decadimento è dato da:

$$\tau = \frac{1602 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln 2} \text{ s} = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ s} \quad (10.7)$$

Adesso calcoliamo l'attività del grammo di radio:

$$A = \frac{N}{\tau} = \frac{N_A}{A \cdot \tau} = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{226 \cdot 7.3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \quad (10.8)$$

10.1.3 Decadimenti in più canali

Può succedere che un nucleo possa decadere in due o più modi differenti. Consideriamo il caso in cui si abbiano solo due canali di decadimento, *a* e *b*. Il rate di decadimento totale λ_t sarà:

$$-\frac{dN}{dt} \Big|_t = -\frac{dN}{dt} \Big|_a - \frac{dN}{dt} \Big|_b = N \lambda_t \quad (10.9)$$

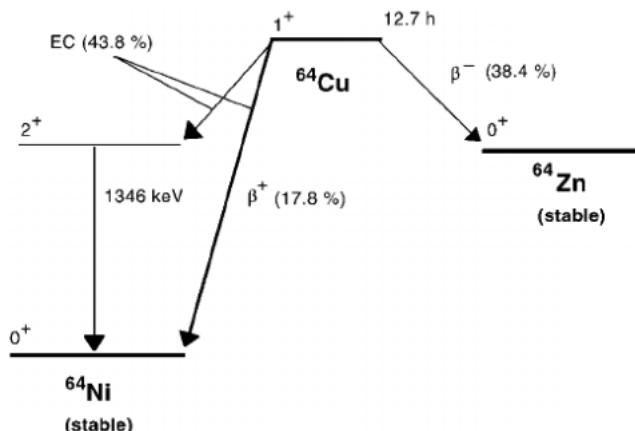


Figura 10.1: Schema del decadimento del ^{64}Cu . Il ^{64}Cu decade in tre modi possibili: β^- nel 38% dei casi decade sullo ^{64}Zn , β^+ nel 18% dei casi direttamente sul ^{64}Ni , infine nel 44% dei casi il rame fa cattura elettronica e decade su uno stato eccitato del ^{64}Ni che poi decade sullo stato fondamentale emettendo un fotone da 1346 keV

Introduciamo il cosiddetto rapporto di diramazione o *Branching ratio* (def. 2.2) come la frazione di casi in cui il decadimento avviene nell'i-esimo canale:

$$BR = \frac{\lambda_i}{\lambda_t} \quad (10.10)$$

È importante ricordarsi che il tempo di decadimento è una caratteristica propria del decadimento e non dipende dal canale di decadimento. Il tempo di decadimento della sorgente è lo stesso per tutti i canali di decadimento.

10.1.4 Catene di decadimenti radioattivi

Nel caso in cui un nuclide non decada su un altro nuclide figlio stabile, anch'esso decadrà fino a quando, dopo una serie di decadimenti successivi, viene raggiunto un nuclide stabile. Questo è quello che accade nella maggior parte dei nuclidi presenti in natura.

Consideriamo il caso in cui inizialmente si hanno solo N_0 nuclei padre, allora si può scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \\ \dots \end{cases} \quad (10.11)$$

dove aumenta N_i a causa del decadimento di N_{i-1} ma diminuisce a causa del suo stesso decadimento. Questo porta ad un'equazione per l'attività dell'n-esimo nuclide, detta equazione di Bateman.

$$A_n = N_0 \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i t} \quad (10.12)$$

dove

$$c_m = \frac{\prod_{i=1}^m \lambda_i}{\prod_{i \neq m}^n (\lambda_i - \lambda_m)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_2 - \lambda_m) \dots (\lambda_n - \lambda_m)} \quad (10.13)$$

Consideriamo una catena con un unico progenitore iniziale; si hanno le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} N_1(0) = N_0 \\ N_k(0) = 0 \quad \text{per } k \neq 1 \end{cases} \quad (10.14)$$

allora possiamo scrivere il sistema di equazioni 10.11 come:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_0 \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \\ \dots \end{cases} \quad (10.15)$$

Consideriamo una miscela di sostanze radioattive imperturbata, mettiamoci in un punto della catena e supponiamo che tutti i progenitori siano già decaduti e che $\lambda_s < \lambda_i \quad \forall i \neq s$ (indichiamo con “ s ” il nucleo padre e con “ i ” i nuclei figli) quindi $\tau_s > \tau_i$. Aspettiamo un tempo t tale che $\tau_i \ll t < \tau_s$ ovvero la vita media del padre è maggiore della vita media del figlio ma non così grande da poter trascurare il decadimento del padre per il periodo di osservazione, allora possiamo riscrivere il sistema 10.11 come:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_2(t) = \dots = N_{s-1}(t) = 0 \\ N_s(t) = N'_0 e^{-\lambda_s t} \\ N_{s+1}(t) = N'_0 \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_s} e^{-\lambda_s t} \\ \vdots \\ N_k(t) = N'_0 \frac{\lambda_s \lambda_{s+1} \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s) \dots (\lambda_k - \lambda_s)} e^{-\lambda_s t} \\ \vdots \end{cases} \quad (10.16)$$

Per tutti i $k \geq s$ il numero di nuclidi decresce con la stessa legge temporale: $e^{-\lambda_s t}$.

Quindi i rapporti

$$\frac{N_k(t)}{N_s(t)} = \frac{\lambda_s \lambda_{s+1} \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s) \dots (\lambda_k - \lambda_s)} \quad (10.17)$$

non dipendono dal tempo. Mi trovo in una situazione di **equilibrio transiente**.

Se invece $\lambda_k \gg \lambda_s$, quindi $\tau_k \ll \tau_s$ allora l'esponenziale $e^{-\lambda_s t}$ tende a 1. I rapporti tra il numero di nuclidi del figlio e del padre valgono:

$$\frac{N_k(t)}{N_s(t)} = \frac{\lambda_s \lambda_{s+1} \dots \lambda_{k-1}}{\lambda_{s+1} \lambda_{s+2} \dots \lambda_k} \simeq \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \simeq \frac{\tau_k}{\tau_s} \quad (10.18)$$

Mi trovo in una situazione di **equilibrio secolare** dove l'attività è la stessa per ogni nuclide. Questo equilibrio si ha quando la vita media del padre è così grande che l'attività del figlio, una volta raggiunto l'equilibrio, rimane costante ed uguale all'attività del padre. Questa è la condizione nella quale si trovano le catene radioattive naturali.

10.2 Decadimenti alfa

È un processo in cui in modo spontaneo un nucleone con un certo A ed un certo Z decade nel seguente modo:



L'elio-4 prodotto in questo processo viene chiamato *particella α* .

Questo tipo di decadimento avviene per particelle molto pesanti, tipicamente con $A \geq 200$.

Il fatto che a seguito del decadimento venga emessa una particella α è dovuto al fatto che il nucleo di elio è molto stabile con un'energia di legame di 28.3 MeV. Esse, essendo il decadimento a due corpi, sono monoenergetiche: le loro energie cinetiche variano in un piccolo intervallo compreso tra 4 e 8 MeV. L'emissione α può essere pensata come l'effetto della repulsione di Coulomb che diventa più importante per i nuclei pesanti, infatti essa cresce come Z^2 mentre l'energia di legame con A.

La teoria del decadimento α è stata sviluppata dal fisico ucraino George Gamow e si basa sul cosiddetto effetto tunnel.

10.2.1 Cinematica del decadimento alfa

Si vuole ora analizzare nel dettaglio la cinematica del decadimento: per farlo ci si mette nel sistema di riferimento del nucleo “progenitore”. Valgono la conservazione dell'energia totale e del momento, motivo per cui:

$$\begin{cases} M_X c^2 = M_Y c^2 + M_\alpha c^2 + K_Y + K_\alpha \\ p_Y + p_\alpha = 0 \end{cases} \quad (10.20)$$

allora possiamo scrivere:

$$(M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = \frac{p^2}{2m_Y} + \frac{p^2}{2M_\alpha} = \frac{p^2}{2M_\alpha} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) = Q \quad (10.21)$$

Si vuole vedere ora nello specifico i due termini di energia cinetica. Nel caso in cui $M_X \gg M_\alpha$ allora si ha:

$$\begin{cases} K_\alpha = \frac{Q}{1+M_\alpha/M_Y} \approx Q(1 - \frac{4}{A}) \\ K_Y = Q \frac{M_\alpha/M_Y}{1+M_\alpha/M_Y} \approx \frac{4Q}{A} \end{cases} \quad (10.22)$$

È evidente quindi che $K_\alpha \gg K_Y$, visto che K_α vale tra i 4 e 8 MeV e K_Y tra 80 e 160 keV.

Vediamo adesso per quali valori di A e Z il decadimento α è energeticamente possibile.

Come abbiamo già visto, in un decadimento parte della massa dello stato iniziale è convertita in energia cinetica dei prodotti finali. Il decadimento può avvenire solo se l'energia del nucleone aumenta. L'andamento dell'energia di legame per nucleone, $\langle E_b \rangle = E_b/A$ in funzione di A (fig: 8.6) indica che questo avviene nella regione dei nuclei con $A > 60$ dove $\frac{\partial \langle E_b \rangle}{\partial A} < 0$. L'energia rilasciata dal decadimento, indicata con Q vale:

$$\begin{aligned} Q = M_X - M_Y - M_\alpha &= -A\langle E_b \rangle^X + (A-4)\langle E_b \rangle^Y + 4\langle E_b \rangle^\alpha = \\ &= A(\langle E_b \rangle^Y - \langle E_b \rangle^X) - 4(\langle E_b \rangle - \langle E_b \rangle^\alpha) > 0 \end{aligned} \quad (10.23)$$

Il decadimento avviene in modo spontaneo solo se $Q > 0$, la somma delle masse dei prodotti di decadimento deve essere minore della massa del nucleo originale.

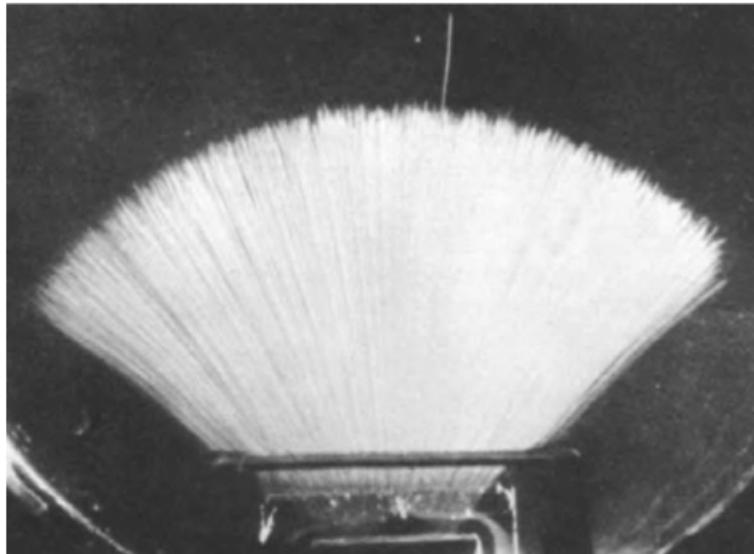


Figura 10.2: Fotografia di una camera a nebbia con tracce prodotte a una sorgente α di ^{210}Po ($Q = 7.8$ MeV). Intorno al 1920 si ebbe la conferma che le particelle emesse dal decadimento alfa fossero monoenergetiche osservando il loro range in camera a nebbia come questa.

L'energia di legame media per nucleone della particella alfa vale circa 7.1 MeV, minore di quella dei nuclei pesanti quindi il secondo termine dell'equazione è positivo e la soglia di instabilità sarà nettamente maggiore di $A=60$.

La formula di Weizsäcker (formula 9.8) può essere d'aiuto per determinare in modo quantitativo la soglia di instabilità. Trascurando il termine di pairing, l'energia rilasciata Q può essere approssimata come:

$$Q \approx \langle E_b \rangle^\alpha - 4a_v + 4 \left[\frac{2}{3}a_s + a_c Z \left(1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-\frac{1}{3}} - 4a_A \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2 \quad (10.24)$$

È possibile, per valori di Q fissati, riscontrare una relazione tra A e Z , come evidenziato nella figura 10.3¹.

10.2.2 Energia delle particelle alfa

Se in un piano cartesiano si inseriscono i valori di Q in funzione di A , con Z fissato, è possibile notare un andamento regolare ben descritto dalla formula semiempirica di massa. In corrispondenza dei “numeri magici”, tuttavia, si può notare dei forti sbalzi che costituiscono il cosiddetto *effetto strati*.

È inoltre possibile osservare sperimentalmente una correlazione tra la vita media e l'energia della particella α : ad una vita breve è associata un'energia elevata, e viceversa. Essa infatti ha una forte correlazione con l'energia cinetica, basti pensare che nell'intervallo

¹Per maggiori informazioni ed approfondimenti si invita a consultare il seguente link: <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>

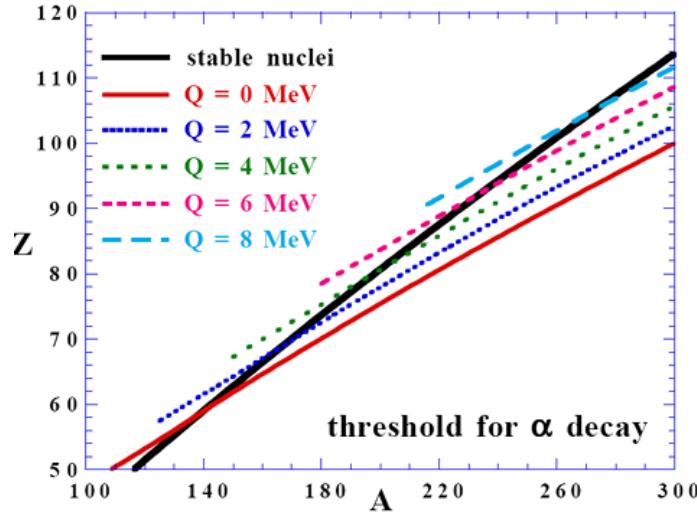


Figura 10.3: Andamento della relazione tra A e Z in un decadimento α

energetico tipico delle particelle alfa (4-8 MeV), la vita media può variare per più di 20 ordini di grandezza.

La *legge di Geiger-Nuttall*, formulata nel 1911, descrive formalmente quanto appena detto. La sua formulazione moderna è la seguente:

$$\log_{10} \tau_{1/2} = a \frac{Z}{\sqrt{Q}} - b \quad (10.25)$$

In questa formula λ è la costante di decadimento, mentre a e b due costanti approssimabili rispettivamente a 1.45 e 46.8.

Un’ulteriore rappresentazione visiva di quanto appena enunciato è fornita dalla figura 10.4.

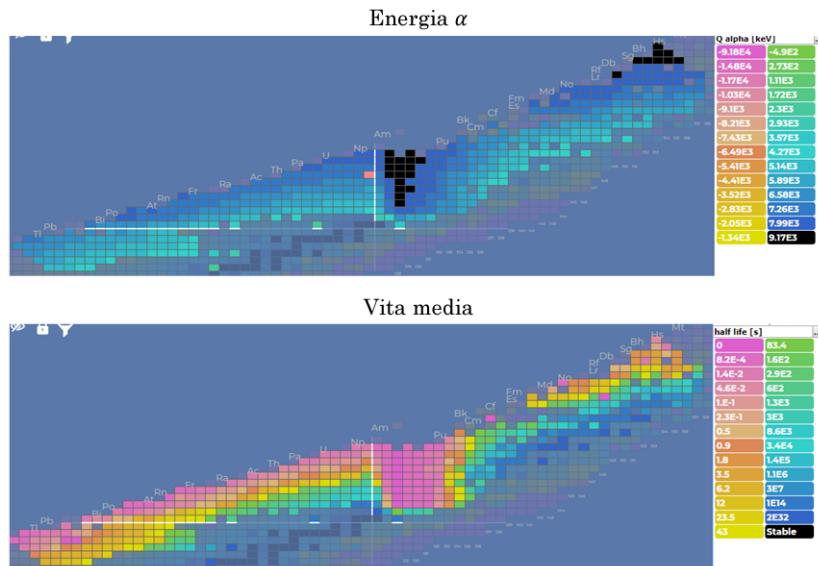


Figura 10.4: Vita media ed energia delle particelle α sulla tavola dei nuclidi

10.2.3 Modello di Gamow

La prima trattazione teorica del decadimento alfa fu proposta nel 1929 da George Gamow e, in maniera indipendente da Edward Condon e Rondald W. Gurney.

Il processo di decadimento è spiegabile assumendo che la particella α esista nel nucleo, in un opportuno potenziale radiale $V(r)$, prima di essere emessa. Questo modello viene chiamato **modello di Gamow**. Secondo la visione classica essa rimane confinata all'interno della buca di potenziale; quantisticamente, invece, esiste l'effetto tunnel che permette alla particella di oltrepassare la barriera. L'esistenza di questa barriera spiega il motivo per cui i nuclei instabili non decadano immediatamente: la particella α “colpisce” ripetutamente la barriera di potenziale fino a quando non riesce a penetrarla.

Esempio 10.3

Per l' ^{238}U la probabilità di attraversare la barriera è così piccola che la particella α deve colpire in media 10^{38} volte la barriera prima di uscire, ovvero 10^{21} volte al secondo per 10^9 anni!

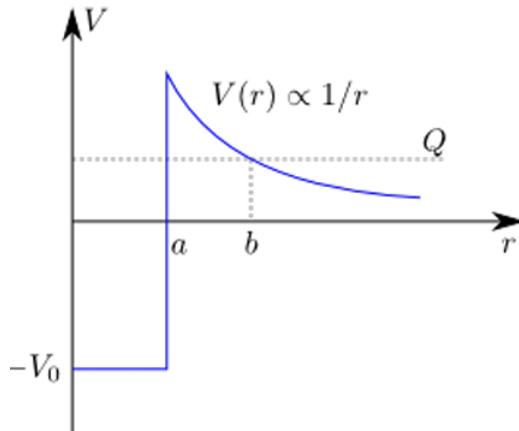


Figura 10.5: Potenziale con cui può essere approssimata la dinamica del decadimento α

La forma analitica del potenziale è la seguente:

$$V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (10.26)$$

La costante di decadimento λ può allora essere scritta, tramite la cosiddetta trattazione semiclassica, come:

$$\lambda = f \cdot P \quad (10.27)$$

dove f è la frequenza con cui la particella colpisce la barriera e P è la probabilità di attraversarla.

È possibile stimare f e P in modo semplificato e non totalmente corretto, ma buono per avere un'idea dei loro valori.

Si inizia dalla frequenza. Il numero di urti per unità di tempo è fornito da:

$$f = \frac{v_\alpha}{R} \quad (10.28)$$

Si può approssimare la velocità della particella alfa come:

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(V_0 + Q)}{m}} \simeq 10^9 \text{ cm/s} \quad (10.29)$$

e il raggio atomico come $R \simeq 10^{-12}$ cm. Usando i valori tipici $V_0 = 35$ MeV e $Q = 5$ MeV si ottiene che la frequenza è $f \simeq 6 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$.

Ci si occupa ora della probabilità. Essa può essere ottenuta attraverso un calcolo molto simile al problema della barriera di potenziale in una dimensione.² Si immagini quindi una funzione d'onda di energia E che impatta una barriera di potenziale rettangolare, alta V_B e larga a . Si può calcolare il coefficiente di trasmissione T come:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_B^2}{4E(V_B - E)} \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{2m(V_B - E)}{\hbar^2}} \cdot a \right)} \quad (10.30)$$

La probabilità dunque dipende unicamente dall'altezza e larghezza della barriera e dall'energia della particella. È possibile stimare l'altezza B della barriera di Coulomb come:

$$B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z(Z-z)e^2}{a} \quad (10.31)$$

Ai fini della trattazione si ricava anche l'espressione di b, ovvero la distanza alla quale il potenziale assume il valore Q:

$$b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z(Z-z)e^2}{Q} \quad (10.32)$$

dove $z = 2$ è il numero atomico della particella α . Allora posso sostituire nell'espressione del seno iperbolico i seguenti valori;

$$\begin{aligned} V_B - E &\sim \frac{1}{2}(B - Q) \\ a &\sim \frac{1}{2}(b - a) \end{aligned} \quad (10.33)$$

Con questa nuova notazione il quadrato del seno iperbolico può essere riscritto come:

$$\sinh^2 \left(\sqrt{\frac{2m\frac{1}{2}(B-Q)}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{2}(b-a) \right) \sim \frac{e^{2x}}{4} \quad (10.34)$$

²Formalmente questo tipo di calcolo non è applicabile direttamente al potenziale coulombiano $\propto 1/r$, ma l'oggetto di interesse è soltanto l'ordine di grandezza.

in quanto l'argomento del seno iperbolico era molto minore di uno.

Nel caso approssimato appena trattato, dunque, la probabilità P può essere scritta nel seguente modo:

$$P \cong \exp\left(-2\sqrt{\frac{2m\frac{1}{2}(B-Q)}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{2}(b-a)\right) = \exp\left(\sqrt{\frac{m(B-Q)}{\hbar^2}}(b-a)\right) \quad (10.35)$$

Esempio 10.4

Se $Q=6$ MeV si ha che $P \sim 2 \cdot 10^{-25}$; quindi

$$\lambda = fP = (6 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}) \cdot (2 \cdot 10^{-25}) \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1} \implies \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \sim 700 \text{ s} \quad (10.36)$$

Da notare come una piccola variazione di Q comporterebbe una notevole variazione di τ . Se ad esempio $Q = 5$ MeV, si avrebbe una probabilità di $P \simeq 10^{-30}$ e un tempo di dimezzamento pari a $\tau_{1/2} \sim 10^8$ s.

Il calcolo esatto della probabilità è molto simile all'approssimazione appena fatta: si immagina la barriera coulombiana composta da una serie di barriere rettangolari infinitesimali. La probabilità di penetrare queste barriere è:

$$dP = \exp\left(-2\sqrt{\frac{2m(V(r)-Q)}{\hbar^2}}\right) \quad (10.37)$$

Si ha quindi che la probabilità di penetrare l'intera barriera risulta quindi essere:

$$P = e^{-2G} \quad (10.38)$$

G è chiamato *potenziale di Gamow* e si scrive tramite:

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_a^b \sqrt{[V(r)-Q]} dr \quad (10.39)$$

10.2.3.1 Stima delle vite medie degli emettitori α

Con alcuni risultati della meccanica quantistica è possibile trovare una forma approssimata del potenziale di Gamow che si scrive come:

$$G \approx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 Q}} \frac{z(Z-z)e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{Q}{B}} \right) \quad (10.40)$$

Inoltre è possibile riscrivere la costante di decadimento come:

$$\lambda = fP \rightarrow \lambda = \frac{v_\alpha}{R} e^{-2G} \quad (10.41)$$

Se ne facciamo il logaritmo si ottiene:

$$\log \lambda = \log \frac{v_\alpha}{R} - 2G \approx \log \frac{v_\alpha}{R} - 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 Q}} \frac{z(Z-z)e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{Q}{B}} \right) \quad (10.42)$$

È adesso possibile calcolare i tempi di dimezzamento in maniera più precisa; consideriamo gli isotopi che decadono alfa del torio.

A	Q (MeV)	$\tau_{1/2}$ misurato (s)	$\tau_{1/2}$ calcolato (s)
220	8.95	10^{-5}	$3.3 \cdot 10^{-7}$
222	8.13	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$
224	7.31	1.04	$3.3 \cdot 10^{-2}$
226	6.45	1854	60
228	5.52	$6.0 \cdot 10^7$	$2.4 \cdot 10^6$
230	4.77	$2.5 \cdot 10^{12}$	$1.0 \cdot 10^{11}$
232	4.08	$4.4 \cdot 10^{17}$	$2.6 \cdot 10^{16}$

Tabella 10.1: Tabella riassuntiva con i tempi di decadimento dei vari isotopi del torio.

Si può notare come l'accordo tra questo calcolo e i tempi di dimezzamento per gli isotopi pari del torio non è esatto, ma il calcolo è in grado di riprodurre l'andamento dei tempi di dimezzamento entro al massimo un paio di ordini di grandezza su un intervallo di oltre 20 ordini di grandezza. Nell'effettuare questo conto abbiamo trascurato importanti dettagli come il momento angolare della particella alfa e abbiamo assunto i nuclei sferici; infatti i nuclei con $A > 230$ hanno forme molto deformate rispetto al modello sferico e il tempo di dimezzamento è estremamente sensibile a piccole variazioni del raggio tant'è che una variazione del 4% comporta una variazione del tempo di dimezzamento di un fattore 5.

Questo modello presenta alcune criticità. Innanzitutto quando si considera dei nuclei molto pesanti non ne viene tenuta in conto la deformazione conseguente al cambiamento del raggio. Inoltre non viene chiarito se effettivamente le particelle α “pre-esistono” all'interno del nucleo; non è neanche corretto assumere la buca di potenziale per forza quadrata o sferica. Infine non si fa cenno agli stati eccitati: la particella α appena emessa potrebbe ipoteticamente eccitare il nuclide figlio.

10.2.3.2 Decadimento su stati eccitati

Si accenna brevemente alla dinamica di un decadimento α su stati eccitati.

Il generico nucleo ${}^A_Z X$ può decadere in uno stato eccitato ${}^{A-4}_{Z-2} Y^*$, il quale a sua volta decade nello stato fondamentale con conseguente emissione di raggi γ . In un caso di questo tipo, si può scrivere l'energia emessa come:

$$Q \approx K_\alpha + E_\gamma \quad (10.43)$$

Si evidenzia che i decadimenti α “cercano” sempre di andare sullo stato fondamentale, quindi normalmente sono pochi i raggi γ emessi.

10.2.4 Momento angolare e parità nei decadimenti alfa

Fino a questo momento si è trascurato il momento angolare della particella α . Come già visto nel corso di meccanica quantistica se sono in un potenziale radiale appare un termine centrifugo da aggiungere all’equazione di Schrödinger.

$$V \propto \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_\alpha r^2} \quad (10.44)$$

Indicato con I_i il momento dello stato nucleare iniziale e con I_f quello dello stato nucleare finale, allora il momento della particella alfa deve essere compreso tra $|I_i - I_f|$ e $I_i + I_f$.

Le particelle α sono composte da 2 protoni e 2 neutroni accoppiati in modo da essere bosoni a spin pari a 0. Il momento angolare totale della particella è dunque solo orbitale e viene indicato con ℓ_α .

La variazione di parità associata all’emissione della particella è perciò $(-1)^{\ell_\alpha}$.

Momento e parità devono essere conservati, ragione per cui esistono delle regole di selezione, che ci dicono quali transizioni sono permesse e quali proibite, apposite per il decadimento α :

- se stato iniziale e finale hanno la stessa parità allora ℓ_α è pari
- se stato iniziale e finale hanno parità differente allora ℓ_α è dispari

Esempio 10.5

Alcuni esempi di decadimenti permessi sono:

$$0^+ \rightarrow 2^+ \quad (10.45)$$

$$0^+ \rightarrow 3^- \quad (10.46)$$

Alcuni esempi di decadimenti proibiti sono:

$$0^+ \rightarrow 2^- \quad (10.47)$$

$$0^+ \rightarrow 3^+ \quad (10.48)$$

10.3 Decadimenti beta

I decadimenti beta sono processi spontanei dovuti all’interazione debole che riguardano diversi nuclidi e che consistono nella trasformazione di un protone in un neutrone o di un neutrone in un protone. Esistono tre tipi di decadimento β :

- β^- : È un decadimento tipico dei nuclei aventi un eccesso di neutroni rispetto ai loro isobari stabili; il nucleo si trasforma in un suo isobarico con conseguente emissione di un elettrone e di un antineutrino elettronico secondo la legge:



- β^+ : È un decadimento tipico dei nuclei aventi un difetto di neutroni rispetto ai loro isobari stabili; il nucleo si trasforma in un suo isobarico con conseguente emissione di un positrone e di un neutrino elettronico secondo la legge:



- Cattura elettronica: È caratterizzata dalla cattura di un elettrone da parte del nucleo, con conseguente emissione di un neutrino monoenergetico secondo lo schema:



I decadimenti β cambiano sia Z che N di un'unità e quindi A rimane costante:

$$Z \rightarrow Z \pm 1 \quad N \rightarrow N \mp 1 \implies A = Z + N = \text{cost.} \quad (10.52)$$

I decadimenti beta permettono ai nuclei di “scivolare” lungo la parabola delle masse per A costante (figura 10.6) fino ad arrivare al nucleo stabile. Nel caso di un nucleo con A dispari abbiamo solo una parabola, altrimenti, se A è pari avremo due parabole a causa del termine di accoppiamento (come si può vedere in figura 9.4).

È importante far presente che *tutti* i nuclei possono decadere beta, al contrario dei decadimenti alfa dove ci sono restrizioni energetiche; le energie dei decadimenti beta possono essere molto diverse.

Esempio 10.6

Un esempio delle scale energetiche che sono coinvolte nei decadimenti β può essere il decadimento del renio-187 in osmio-187:



che libera solo 2.5 keV di energia. Completamente opposto abbiamo il decadimento del boro-12 in carbonio-12:



che libera 13.4 MeV di energia, variando di ben quattro ordini di grandezza la scala di energie sulla quale può accadere il decadimento beta.

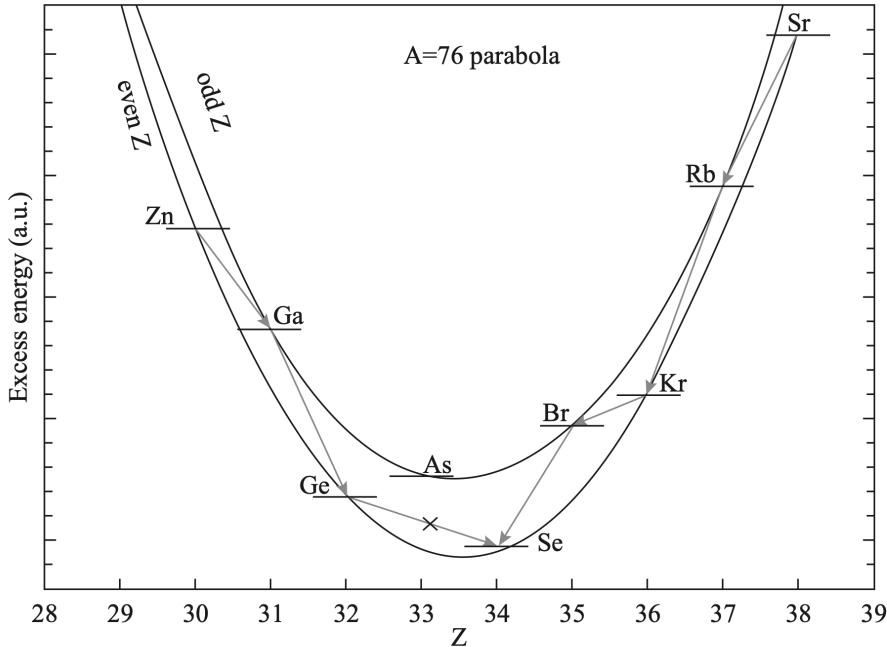


Figura 10.6: Energia di legame per $A=76$ calcolati dalla formula semiempirica di massa. Al contrario dei nuclei con A dispari, le catene con A pari presentano due parabole a energie diverse e, tramite decadimenti beta successivi, si va dall'una all'altra finché il nucleo raggiunge lo stato ad energia più bassa. I decadimenti a destra sono di tipo β^+ mentre a sinistra sono di β^- . Le frecce mostrano i decadimenti permessi³.

10.3.1 Cinematica del decadimento beta

Al contrario di quello alfa, il quale è un decadimento a due corpi, il decadimento beta è un processo a 3 corpi quindi non presenta uno spettro discreto in corrispondenza del valore di Q , ma uno *spettro continuo* tra 0 e il Q valore della transizione.

Storicamente ciò ha comportato un problema in quanto l'osservazione del neutrino è incredibilmente difficile. Nel 1931 Wolfgang Pauli ipotizzò che nel decadimento venisse emessa una seconda particella (in aggiunta all'elettrone/positrone) chiama successivamente **neutrino** da Enrico Fermi. Essendo il neutrino una particella molto penetrante la probabilità di interazione del rivelatore stesso è praticamente nulla quindi il neutrino si “porta via” parte dell’energia rilasciata dal processo. Per la conservazione della carica e del momento angolare, questo neutrino doveva avere carica elettrica nulla e spin pari ad $1/2$.

Per studiare la cinematica del processo beta iniziamo con l’analizzare il decadimento del neutrone libero che decade in circa 15 minuti.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (10.55)$$

³Da notare che, anche se il decadimento $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ (freccia grigia con la croce) è proibito, può accedere tramite processi al secondo ordine.

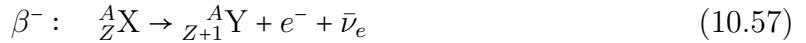
10.3. DECADIMENTI BETA

Il Q valore del decadimento è dato dalla differenza tra la massa dello stato iniziale e la massa dello stato finale:

$$\begin{aligned} Q &= (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2 \\ &= 939.573 \text{ MeV} - 938.928 \text{ MeV} - 0.511 \text{ MeV} - m_{\bar{\nu}}c^2 \\ &= 0.782 \text{ MeV} - m_{\bar{\nu}}c^2 \end{aligned} \quad (10.56)$$

Sperimentalmente si misurò un'energia massima degli elettroni emessi in questo decadimento pari a 0.782 ± 0.013 MeV, che fornisce un primo limite sperimentale di 13 keV sulla massa del neutrino.

Consideriamo adesso il decadimento β^- , trascurando la massa del neutrino:



Il Q valore della transizione vale:

$$Q_{\beta^-} = [m({}_Z^A X) - m({}_{Z+1}^A Y) - m_e]c^2 \quad (10.58)$$

Consideriamo la massa atomica

$$m({}_Z^A X)c^2 = [m_N({}_Z^A X) + Zm_e]c^2 - \sum_{i=1}^Z B_i \quad (10.59)$$

dove B_i è l'energia di legame degli elettroni.

Quindi possiamo riscrivere l'equazione 10.58 in funzione della massa atomica:

$$Q_{\beta^-} = \{[m({}_Z^A X) - Zm_e] - [m({}_{Z+1}^A Y) - (Z+1)m_e] - m_e\}c^2 + \left(\sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right) \quad (10.60)$$

si può trascurare la differenza tra le energie di legame degli elettroni in quanto è uguale all'energia di legame del singolo elettrone ovvero l'energia di prima ionizzazione che è nell'ordine dell'elettronvolt mentre le masse nucleari sono nell'ordine del GeV. Inoltre, in questo caso, tutte le masse degli elettroni si semplificano lasciando la seguente formula per il Q valore del decadimento β^- :

$$Q_{\beta^-} = [m({}_Z^A X) - m({}_{Z+1}^A Y)]c^2 \quad (10.61)$$

Q_{β^-} è l'energia disponibile a seguito del decadimento che viene suddivisa tra l'elettrone e l'antineutrino. Da notare che se la massa del neutrino è maggiore di zero possiamo scrivere l'equazione 10.61 come:

$$Q'_{\beta^-} = [m({}_Z^A X) - m({}_{Z+1}^A Y) - m_{\nu}]c^2 = Q_{\beta^-} - m_{\nu}c^2 \implies m_{\nu} = Q - (K_e)_{\max} \quad (10.62)$$

Questa è una potenziale tecnica per la misura della massa del neutrino che vedremo successivamente nella sezione 10.3.2.4.

Per un decadimento β^+ i conti sono analoghi al caso del β^- con la differenza che il Q valore vale:

$$Q_{\beta^+} = [m({}_Z^A X) - m({}_{Z+1}^A Y) - 2m_e]c^2 \quad (10.63)$$

il che comporta che esista una soglia oltre la quale il decadimento β^+ è possibile; tale soglia è fissata a due volte la massa dell'elettrone pari quindi a 1.022 MeV.

Il caso della cattura elettronica è leggermente diverso in quanto si tratta di un processo a due corpi, quindi l'energia del neutrino emesso è ben definita. Il Q valore della transizione vale:

$$Q_\varepsilon = [m({}_Z^A X) - m({}_{Z+1}^A Y)]c^2 - B_n \quad (10.64)$$

dove B_n è l'energia di legame della shell n (con $n=K, L, \dots$) che comporta l'emissione di raggi X tipici del nucleo figlio (~ 100 keV).

In conclusione si può dire che un decadimento è energeticamente possibile se $Q > 0$. I decadimenti β^+ e ε portano dallo stesso nucleo iniziale ${}_Z^A X$ allo stesso nucleo finale ${}_{Z-1}^A Y$ ma in alcuni casi solo la cattura elettronica è possibile, in particolare ciò avviene quando $B_n \ll 2m_e c^2 = 1.022$ MeV.

10.3.2 Teoria di Fermi

Il primo impianto teorico della teoria del decadimento beta fu realizzato da E. Fermi che nel 1933 pubblicò un articolo fondamentale nella comprensione teorica di questo fenomeno.

Il decadimento β non può essere trattato come quello α per vari motivi: innanzitutto non esiste una barriera di potenziale in quanto elettrone e protone hanno carica opposte; in secondo luogo, l'elettrone e il neutrino non si possono supporre preesistenti all'interno del nucleo come il nucleo di ${}^4\text{He}$.

La meccanica quantistica ci fornisce una formula per descrivere la probabilità di transizione per unità di tempo da uno stato iniziale $|i\rangle$ ad uno stato finale $|f\rangle$; la regola d'oro di Fermi (eqn 2.12):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (10.65)$$

dove ricordiamo che $\langle f | V | i \rangle = V_{fi}$ è detto *elemento di matrice* ed è pari a:

$$V_{fi} = \int \bar{\psi}_f V \psi_i dV \quad (10.66)$$

e che $\rho(E_f)$ è la *densità di stati finali* che rappresenta il numero di stati finali dn

nell'intervallo di energia infinitesimo dE_f ed è pari a:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad (10.67)$$

quindi la probabilità di transizione è maggiore se c'è un elevato numero di stati finali accessibili.

Analizziamo separatamente questi due elementi.

10.3.2.1 Elemento di matrice nel decadimento β

La funzione d'onda dello stato finale deve includere, oltre al nucleo figlio, anche l'elettrone e il neutrino.

$$V_{fi} = g \int (\bar{\psi}_f \varphi_e \bar{\varphi}_\nu) O_X \psi_i dV \quad (10.68)$$

dove g è una costante che determina l'intensità dell'interazione già incontrata nella sezione 7.5.1 e O_X è un generico operatore compatibile con la relatività speciale, in quanto Fermi non conosceva la forma del potenziale di interazione. Le funzioni d'onda di elettrone e neutrino hanno sono funzioni d'onda di particella libera in quanto non hanno interazioni nucleari:

$$\varphi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (10.69)$$

con \vec{r} raggio del nucleo e V volume entro il quale sono contenuti elettrone e neutrino.

Adesso introduciamo un approssimazione che ci semplifica di molto i conti. Per un elettrone con energia cinetica di 1 MeV si ha $p = 1.4 \text{ MeV}/c$ quindi $\frac{p}{\hbar} = 0.007 \text{ fm}^{-1}$ allora $pr \ll 1$ e quindi si può espandere l'esponenziale in serie.

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = 1 + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} + \dots \approx 1 \quad (10.70)$$

allora le funzioni d'onda di elettrone e neutrino saranno uguali e pari a:

$$\varphi_e(r) = \varphi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (10.71)$$

Con questa approssimazione gli unici fattori che dipendono dall'energia dell'elettrone e del neutrino derivano dalla densità degli stati finali.

Soltanente viene definito l'*elemento di matrice nucleare* come:

$$\mathcal{M}_{fi} = V_{fi} \frac{V}{g} = \int \bar{\psi}_f O_X \psi_i dV \quad (10.72)$$

10.3.2.2 Densità degli stati finali

La densità degli stati finali, all'ordine più basso, determina la forma dello spettro beta. Per conoscere la densità degli stati dobbiamo conoscere il numero di stati finali accessibili

ai prodotti del decadimento. Chiamiamo p il momento dell'elettrone/positrone e q il momento del neutrino/antineutrino.

Nello spazio dei momenti, in un cubo di lato V , il numero di stati finali per l'elettrone dn_e che hanno momento compreso nell'intervallo $[p, p + dp]$ si trovano su un guscio sferico di raggio $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ e di spessore dp ; se lo esprimo in coordinate sferiche ottengo:

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} V \quad (10.73)$$

In modo analogo per il neutrino posso scrivere:

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq}{h^3} V \quad (10.74)$$

Quindi il numero di stati finali che hanno simultaneamente l'elettrone e il neutrino con il momento corretto sarà dato semplicemente dal prodotto del numero di stati delle singole particelle:

$$d^2n = dn_e dn_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 q^2 dp dq}{h^6} \quad (10.75)$$

10.3.2.3 Spettro beta

Inseriamo i risultati ottenuti per la densità di stati e per la matrice nucleare nella formula 10.65 e otteniamo il rate di decadimento degli elettroni e neutrini con momento compreso tra $[p, p + dp]$ e $[q, q + dq]$:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 q^2}{h^6} \frac{dp}{dE_f} \frac{dq}{c} \quad (10.76)$$

Nella teoria di Fermi il neutrino ha massa nulla, quindi possiede solo energia cinetica, pari a qc . L'energia finale sarà:

$$E_f = E_e + E_\nu = E_e + qc \quad (10.77)$$

allora, fissata l'energia dell'elettrone, si avrà che:

$$\frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c} \quad (10.78)$$

Siccome siamo interessati allo spettro dell'elettrone, tutti i fattori che non coinvolgono il momento possono essere riuniti in una costante C ; allora il numero di elettroni con momento compreso tra $[p, p + dp]$ sarà:

$$N(p) dp = Cp^2 q^2 dp \quad (10.79)$$

se trascuriamo il rinculo del nucleo, possiamo scrivere un'espressione per il momento del

neutrino ricordando l'equazione 10.62:

$$q = \frac{Q - K_e}{c} = \frac{Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2}{c} \quad (10.80)$$

Allora l'espressione per il numero di elettroni (eqn 10.79) diventa:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - K_e)^2 = \frac{C}{c^2} p^2 \left(Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 \right)^2 \quad (10.81)$$

Spesso però siamo interessati allo spettro energetico degli elettroni emessi invece che lo spettro dei momenti. Scriviamo allora il momento in funzione dell'energia cinetica:

$$c^2 p \, dp = (K_e + m_e c^2) \, dK_e \quad (10.82)$$

sostituendo questa espressione nell'equazione 10.81:

$$N(K_e) = \frac{C}{c^5} \sqrt{K_e^2 + 2K_e m_e c^2} (Q - K_e)^2 (K_e + m_e c^2) \quad (10.83)$$

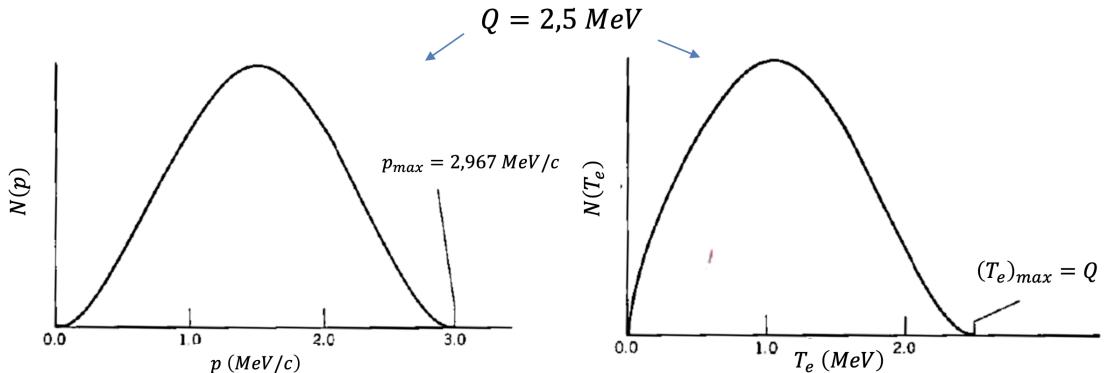


Figura 10.7: Spettro energetico e dei momenti di un decadimento β con un Q valore di 2.5 MeV

La formula appena ricavata, tuttavia, differisce dagli spettri sperimentali a causa di alcuni fattori correttivi:

- Modifica dovuta all'attrazione/repulsione degli elettroni/positroni dal nucleo. Il fattore correttivo $F(Z', p)$ è detto *funzione di Fermi* e dipende dalla carica del nucleo figlio.
- Effetti legati alla matrice nucleare. L'approssimazione introdotta nel calcolo della matrice nucleare ($e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \approx 1$) funziona molto bene nella maggior parte dei casi, ma può capitare che \mathcal{M}_{fi} si annulli se si considera solo il primo termine, quindi dobbiamo considerare i termini successivi che portano ai cosiddetti decadimenti proibiti (**forbidden decays**). Il fattore correttivo $S(p, q)$ è detto *shape factor* ed è dipendente dal momento dell'elettrone e del neutrino.

Tenendo conto di questi fattori la formula 10.81 diventa:

$$N(p) \propto p^2(Q - K_e)^2 F(Z', p) S(p, q) \quad (10.84)$$

detta *formula di Fermi-Kurie* proposta da F.N.D. Kurie nel 1936.

È utile rappresentare questi risultati in quello che viene detto Fermi-Kurie plot, ovvero un grafico di

$$K(E_e) \equiv \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p) S(p, q)}} \quad \text{vs.} \quad E_e \equiv (Q - K_e) \quad (10.85)$$

Un Fermi-Kurie plot, nella teoria di Fermi, è lineare con coefficiente angolare che dipende dal nucleo. L'endpoint del Fermi-Kurie plot è il valore dell'energia dell'elettrone quando $K(E_e) = 0$. La presenza dello shape factor permette, nel caso delle transizioni proibite, linearizzare il F-K plot in maniera analoga a quella delle transizioni permesse.

10.3.2.4 Massa del neutrino

Nella teoria di Fermi ci si basa sull'assunzione che la massa del neutrino sia nulla. Una massa non nulla del neutrino comporta una variazione nella posizione dell'endpoint dello spettro beta in quanto:

$$Q = K_e + E_\nu = K_e + K_\nu + m_\nu \implies Q' = K_e + K_\nu = Q - m_\nu \quad (10.86)$$

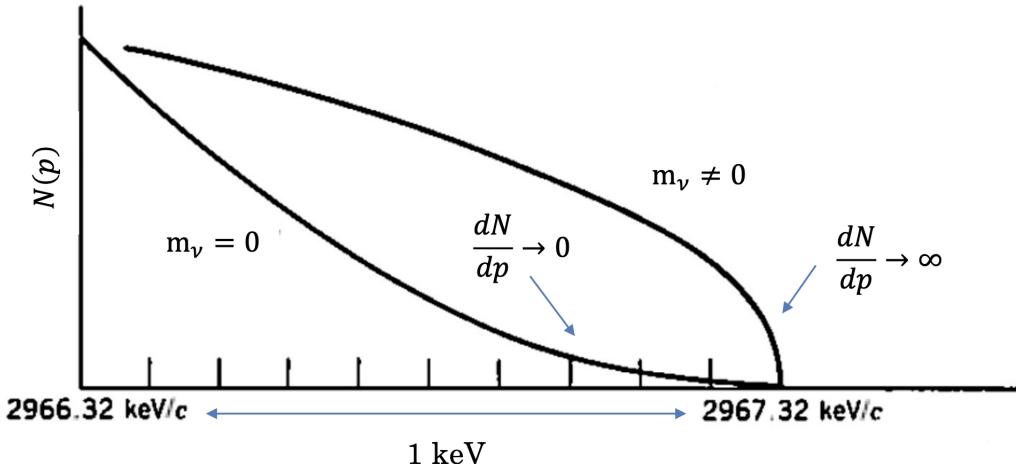


Figura 10.8: Ingrandimento dell'endpoint in una regione di 1 keV nello spettro dei momenti dell'elettrone della figura 10.7. Da notare come venga modificata la forma dello spettro nell'intorno dell'endpoint, infatti, nel caso la massa del neutrino sia nulla, la pendenza dello spettro tende a zero; se, al contrario il neutrino è una particella massiva, la pendenza dello spettro tende ad infinito. Lo spettro energetico ha la medesima forma.

Se il neutrino è una particella massiva, si può notare una differente forma dello spettro nelle vicinanze dell'endpoint.

10.3. DECADIMENTI BETA

Dal punto di vista sperimentale questa è una misura estremamente complicata, soprattutto perché la frazione di eventi all'endpoint è molto piccola e inoltre servono rivelatori con una risoluzione energetica molto buona. Il numero di eventi nella parte terminale dello spettro energetico è dato da:

$$\frac{N(\Delta E)}{N_{\text{tot}}} \propto \left(\frac{\Delta E}{Q} \right)^3 \quad (10.87)$$

Esempio 10.7

Considero un decadimento con un Q valore molto basso, pari a 18.6 keV, quello del trizio.



Se voglio studiare gli ultimi 2 elettronvolt dello spettro energetico ho un evento ogni 10^{12} , quindi ho bisogno di una statistica enorme.

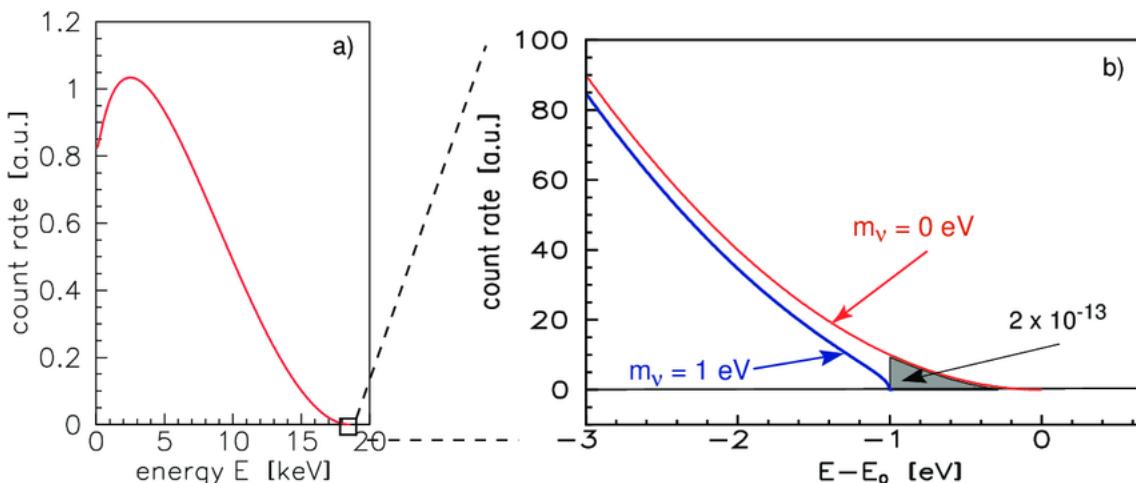


Figura 10.9: Spettro energetico dell'elettrone del decadimento β del trizio: (a) completo e (b) un ingrandimento della regione intorno all'endpoint. In rosso lo spettro β per un neutrino mass-less e in blu lo spettro atteso per un neutrino con massa pari a $1 \text{ eV}/c^2$

Ad oggi diversi esperimenti cercano di misurare la massa del neutrino attraverso lo studio dello spettro β o la cattura elettronica. Un paio di esempi:

- KATRIN: Un esperimento portato avanti dal Karlsruhe Institute of Technology (KIT) in Germania che utilizza trizio con un Q valore di 18.6 keV in uno spettrometro da 200 tonnellate. L'obiettivo finale dell'esperimento è porre il limite superiore alla massa del neutrino pari a 0.3 eV. Ad oggi (risultati del 2021) è l'autore della stima più precisa della massa del neutrino pari a 0.9 eV.
- HOLMES: Un esperimento portato avanti dall'università di Milano-Bicocca che utilizza olmio-163 tramite una reazione di cattura elettronica che decade su uno stato

eccitato del disporio-163.



Il decadimento ha un Q valore eccezionalmente basso, pari a 2.5 keV; lo spettro è misurato tramite calorimetri, quindi tutto l'apparato sperimentale è mantenuto a temperature criogeniche. L'obiettivo è porre il limite superiore alla massa del neutrino a 0.4 eV.

10.3.2.5 Tempi di decadimento

Se integro l'espressione 10.83 ottengo una formula per λ e quindi per il tempo di decadimento (trascuro la funzione di Fermi e lo shape factor):

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = \int_0^{K_{\max}} \frac{C}{c^5} \sqrt{K_e^2 + 2K_e m_e c^2} (Q - K_e)^2 (K_e + m_e c^2) dK_e \propto K_e^5 \quad (10.90)$$

Il tempo di decadimento ha una dipendenza meno forte di quella vista nei decadimenti alfa che avevano una dipendenza esponenziale dall'energia.

Per determinare il tasso di decadimento β è necessario integrare l'equazione 10.76 su tutti i possibili valori del momento:

$$\lambda = \int d\lambda(p) = \frac{g^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (Q - K_e)^2 dp \quad (10.91)$$

I valori dell'integrale di Fermi sono tabulati e, per convenzione posti adimensionali:

$$f(Z', E_0) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (10.92)$$

Spesso si introduce la grandezza *ft-value* o comparative half-life:

$$ft_{1/2} = f \frac{\ln 2}{\lambda} = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |\mathcal{M}_{fi}|^2} \quad (10.93)$$

che permette di confrontare differenti elementi di matrice nucleare e quindi studiare le differenti funzioni d'onda nucleari in quanto non dipende da Z' e E_0 (la dipendenza da Z' e da E_0 è nell'integrale di Fermi).

I decadimenti β hanno tempi di dimezzamento molto differenti tra loro. *ft* è compreso tra 10^3 e 10^{20} s.

- Se $\log ft \sim 3 - 4 \rightarrow$ Superallowed decay.
- Se $\log ft \sim 6 - 9 \rightarrow$ Prima transizione proibita.
- Se $\log ft \sim 10 - 13 \rightarrow$ Seconda transizione proibita.

10.3.3 Regole di selezione

Ricordiamo l'approssimazione sulla funzione d'onda fatta in precedenza, sia per l'elettrone che per il neutrino:

$$\varphi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \implies e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = 1 + i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} + \frac{1}{2} \frac{(i \vec{p} \cdot \vec{r})^2}{\hbar^2} + \dots \cong 1 \quad (10.94)$$

Se ci fermiamo al primo termine dell'espansione dell'esponenziale parliamo di transizione permessa; se ci fermiamo al secondo, si parla di 1° proibita; se invece arrestiamo l'espansione al termine quadratico, si parla di 2° proibita e così via ...

10.3.3.1 Transizioni permesse

Analizziamo quindi la variazione del momento angolare totale considerando in prima battuta solo il caso delle transizioni permesse (allowed).

Dato che in questa approssimazione elettrone e neutrino non hanno momento angolare orbitale ($\ell = 0$), la variazione del momento angolare del nucleo ΔI è dovuta solamente allo spin delle due particelle (entrambi pari a 1/2).

Nel caso gli spin siano antiparalleli, lo spin totale è pari a zero $S = 0$, quindi anche la variazione di momento angolare totale è pari a 0 ($\Delta I = I_i - I_f = 0$); allora si parla di **transizioni di Fermi**. Al contrario, se gli spin sono paralleli, lo spin totale è pari a 1 ($S = 1$), quindi la variazione di momento angolare totale assume due possibili valori ($\Delta I = 0, 1$); allora si parla di **transizioni di Gamow-Teller (GT)**.

Se l'elettrone e il neutrino non hanno momento angolare orbitale, la parità dello stato iniziale è finale deve essere la stessa.

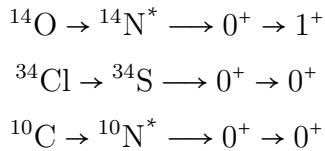
$$\ell = 0 \implies \mathcal{P} = (-1)^\ell = +1 \quad (10.95)$$

Quindi, per i decadimenti beta permessi abbiamo le seguenti **regole di selezione**:

$$\Delta I = 0, 1 \quad \Delta \mathcal{P} = +1 \quad (10.96)$$

Esempio 10.8

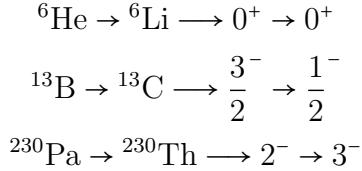
Vediamo adesso qualche esempio di transizioni di Fermi:



sono tutte transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$ e quindi siamo sicuri che non possono essere processi GT.

Esempio 10.9

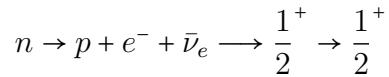
Vediamo qualche esempio di transizioni di Gamow-Teller.



sono tutte transizioni con $\Delta I = 1$ e quindi siamo sicuri che possano essere solo GT.

Esempio 10.10

Un esempio di transizione che è sia di Fermi che di Gamow-Teller è il decadimento del neutrone libero:



che soddisfa sia le condizioni per un processo GT che per una transizione di Fermi con $\Delta I = 0$. Per il calcolo del rate di decadimento l'elemento di matrice è la somma dei singoli elementi di matrice di Fermi e di Gamow-Teller: $g^2|\mathcal{M}_{fi}| \rightarrow g_F^2|\mathcal{M}_F|^2 + g_{GT}^2|\mathcal{M}_{GT}|^2$

10.3.3.2 Transizioni proibite

Le transizioni definite proibite, ovvero con $\ell \neq 0$, in realtà non sono proibite; spesso sono meno probabili ma, in alcuni casi, se l'elemento di matrice delle transizioni permesse si annulla possono essere l'unico tipo di decadimento.

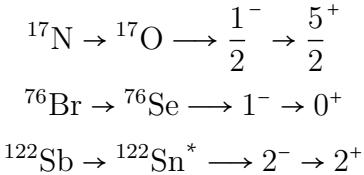
$$\begin{aligned} \textbf{1° proibita} \quad \ell = 1 \quad & \begin{cases} S = 0 \longrightarrow \Delta I = 0, 1 \\ S = 1 \longrightarrow \Delta I = 0, 1, 2 \end{cases} \quad \Delta \mathcal{P} = -1 \\ \textbf{2° proibita} \quad \ell = 2 \quad & \begin{cases} S = 0 \longrightarrow \Delta I = 0, 1, 2 \\ S = 1 \longrightarrow \Delta I = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \quad \Delta \mathcal{P} = +1 \\ \textbf{3° proibita} \quad \ell = 3 \quad & \begin{cases} S = 0 \longrightarrow \Delta I = 0, 1, 2, 3 \\ S = 1 \longrightarrow \Delta I = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \Delta \mathcal{P} = -1 \end{aligned}$$

Le transizioni proibite con $\Delta I = 0, 1$ sono sopprese di un fattore $10^3 \div 10^6$ perché sono dominate da quelle permesse dato che ad ogni ordine la probabilità cala.

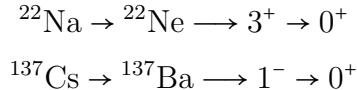
Esempio 10.11

Vediamo qualche esempio di transizioni proibite:

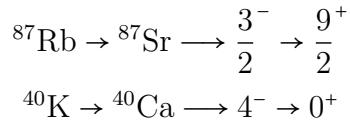
- 1° proibita:



- 2° proibita:



- 3° proibita:



I decadimenti β hanno vite medie che vanno dai microsecondi a 10^{16} anni; tale differenza è legata alla difficoltà di creare un neutrino e un elettrone in uno stato con momento angolare $\ell > 0$.

10.3.4 Cattura Elettronica

La cattura elettronica è un processo dove un nucleo ricco di protoni di atomo neutro assorbe uno degli elettroni atomici interno, in genere dalle shell K o L. In simboli:

$$\varepsilon : {}_Z^A\text{X} + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^A\text{Y} + \nu_e \quad (10.97)$$

Dal momento che il processo è a due corpi, il neutrino emesso sarà monoenergetico. In seguito alla cattura di un elettrone nelle shell interne, un elettrone degli strati più esterni sostituisce l'elettrone interno con conseguente emissione di raggi X caratteristici, che sono l'unica evidenza sperimentale della cattura elettronica.

10.3.5 Fisica del Neutrino

Soltamente non consideravamo il neutrino poiché interagisce molto poco con la materia ma se ho un rivelatore con una grande massa posso pensare al processo “inverso” della cattura elettronica.

$$\varepsilon : p + e^- \rightarrow n + \nu_e \longrightarrow \begin{cases} \nu_e + n \rightarrow p + e^- \\ \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \end{cases} \quad (10.98)$$

Capiamo adesso cosa vuol dire “grande massa” calcolando la sezione d’urto dei neutrini. Dalla regola d’oro di Fermi possiamo scrivere:

$$\sigma = \frac{P}{f} = \frac{2\pi}{\hbar c} g^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{4\pi p E}{h^3 c} \quad (10.99)$$

dove P è la probabilità per atomo bersaglio che la reazione avvenga, e f è il flusso di neutrini. Se consideriamo un neutrino con energia pari a 2.5 MeV, la sezione d’urto sarà: $\sigma \approx 10^{-19}$ b $\approx 10^{-43}$ cm 2 . La probabilità di interazione per unità di lunghezza in un materiale con densità ordinaria ($N = 10^{24}$ cm $^{-3}$) vale circa:

$$W = \sigma \cdot N = 10^{-43} \text{ cm}^2 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3} = 10^{-19} \text{ cm}^{-1} \quad (10.100)$$

Quindi un neutrino prima di interagire con un protone percorre mediamente 10¹⁴ km ovvero 11 anni luce!

La bassissima probabilità di interazione del neutrino per noi può essere un problema ma ci permette di studiare fenomeni che sono insondabili in altro modo. Ad esempio i fotoni solari che giungono sulla terra sono quelli prodotti sulla superficie e non ci dicono niente sulle reazioni di fusione nucleare al centro del sole. I neutrini prodotti dalla fusione nucleare, al contrario, riescono a penetrare senza problemi i vari strati solari fino a giungere a noi.

10.3.6 Decadimento doppio beta

Se il decadimento β è proibito o fortemente soppresso, allora risulta possibile osservare in alcuni nuclei un tipo di decadimento estremamente raro, che può essere pensato come due decadimenti beta che avvengono simultaneamente.



Il decadimento doppio beta è un processo al secondo ordine quindi con probabilità molto più basse tant’è che le vite medie di questi processi sono nell’ordine di 10¹⁸ ÷ 10²² anni.

Esistono 35 isotopi che sono in grado di decadere doppio beta anche se nella pratica questo processo può essere osservato solo se il β singolo è proibito dalla conservazione dell’energia, che accade per elementi con un numero pari sia di protoni che di neutroni. Anche quando il nucleo può decadere α generalmente il tasso di decadimento del doppio β è troppo basso per essere osservato⁴.

Nella pratica esistono 14 isotopi che sono stati osservati sperimentalmente effettuare un decadimento doppio beta.

⁴Nel caso del ${}^{238}\text{U}$ che è tipicamente un emettitore alfa, si è riusciti ad osservare il doppio β tramite tecniche radiochimiche.

Nuclide	$\tau_{1/2}$ (y)	Metodo
^{48}Ca	$6.4 \cdot 10^{19}$	diretto
^{76}Ge	$1.9 \cdot 10^{21}$	diretto
^{78}Kr	$9.2 \cdot 10^{21}$	diretto
^{82}Se	$9.6 \cdot 10^{19}$	diretto
^{96}Zr	$2.4 \cdot 10^{19}$	diretto
^{100}Mo	$6.9 \cdot 10^{18}$	diretto
^{116}Cd	$2.8 \cdot 10^{19}$	diretto
^{124}Xe	$1.8 \cdot 10^{22}$	diretto
^{128}Te	$2.0 \cdot 10^{24}$	geochimico
^{130}Ba	$1.6 \cdot 10^{21}$	geochimico
^{130}Te	$8.2 \cdot 10^{20}$	diretto
^{136}Xe	$2.1 \cdot 10^{21}$	diretto
^{150}Nd	$6.7 \cdot 10^{18}$	diretto
^{238}U	$2.0 \cdot 10^{21}$	radiochimico

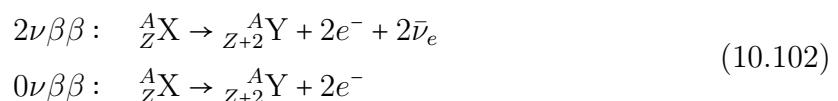
Tabella 10.2: Tabella riassuntivi di tutti gli isotopi osservati che decadono doppio beta

La misura del doppio beta può essere effettuata in diversi modi, ma i principali sono due:

- **Esperimenti geochimici:** studio della concentrazione del figlio stabile del decadimento tramite spettroscopia di massa in minerali di età geologica nota.
- **Esperimenti diretti;** studio in cui viene misurata direttamente l'energia trasferita agli elettroni del decadimento. Sono molto complessi a causa delle vite medie estremamente lunghe quindi è necessario avere sorgenti molto pure. Nonostante la complessità di questo metodo, la maggioranza degli esperimenti che cercano il $\beta\beta$ senza emissioni di neutrini misurano direttamente lo spettro energetico degli elettroni.

10.3.6.1 Decadimento doppio beta senza emissione di neutrini ($0\nu\beta\beta$)

Il decadimento doppio β senza emissione di neutrini è un decadimento radioattivo teorico che va oltre il modello standard non ancora osservato ma cercato da diversi esperimenti.



L'esistenza di questo tipo di decadimento permette di studiare se il neutrino è una particella di Majorana, ovvero se è uguale alla sua antiparticella, inoltre perché questo decadimento possa avvenire il neutrino deve essere una particella massiva (dimostrato nel 1998 da diversi esperimenti). L'esistenza del doppio β senza neutrini comporterebbe ad una violazione del numero leptonico $\Delta L = 2$. Inoltre il tempo di decadimento del $0\nu\beta\beta$

permetterebbe di calcolare la massa efficace del neutrino.

$$(\tau_{1/2}^{0\nu\beta\beta})^{-1} = G^0(Q, Z) |\mathcal{M}_{0\nu}|^2 \frac{|\langle m_{\beta\beta} \rangle|^2}{m_e^2} \quad (10.103)$$

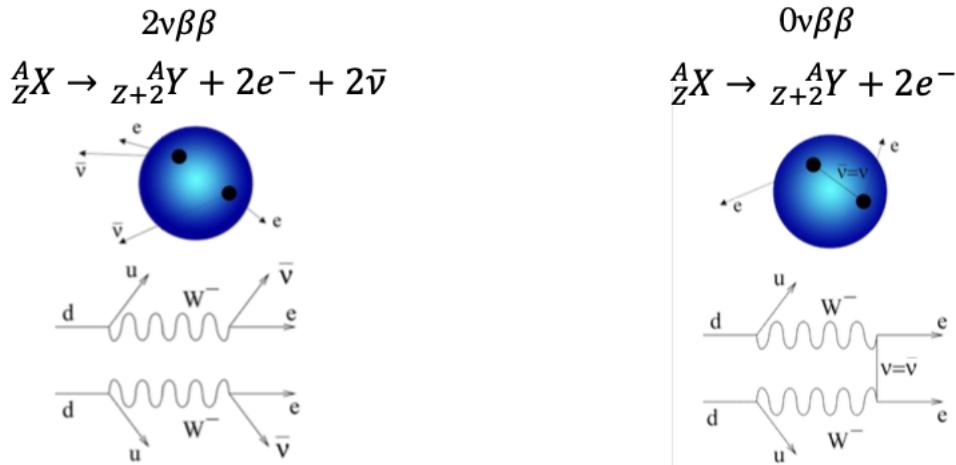


Figura 10.10: Schema del decadimento doppio beta con e senza emissione di neutrini. Se il neutrino è una particella di Majorana allora si annichila con la sua antiparticella all'interno del sito di reazione non emettendo neutrini all'esterno da osservare

Per osservare questo processo estremamente raro si cerca un picco (ovvero un aumento della sezione d'urto), all'interno dello spettro β nella regione in cui gli elettroni hanno energia cinetica massima (end-point), pari al totale del Q valore della transizione: $2K_e = Q_{0\nu\beta\beta}$.

Isotopo	Esperimento	$Q_{\beta\beta}$ (keV)	Massa del campione (kg)	$\tau_{1/2}^{0\nu\beta\beta}$ (y)
${}^{76}\text{Ge}$	GERDA-I	2039	15	$> 2 \cdot 10^{25}$
${}^{100}\text{Mo}$	NEMO-3	3034	6.9	$> 1 \cdot 10^{24}$
${}^{130}\text{Te}$	CUPID-Mo	2528	2.3	$> 1.5 \cdot 10^{24}$
${}^{136}\text{Xe}$	CUORE	2528	206	$> 2.2 \cdot 10^{25}$
${}^{136}\text{Xe}$	EXO-2000	2458	300	$> 4 \cdot 10^{25}$
	KamLAND-Zen			

Tabella 10.3: Tabella riassuntiva sulle caratteristiche degli esperimenti che studiano il decadimento doppio beta senza emissione di neutrini.

10.4 Decadimenti gamma

I decadimenti gamma furono scoperti da Paul Villard nel 1900 e si capì molto presto che si trattava di emissione di fotoni ad alta energia (0.1-10 MeV) da parte dei nuclei. L'identificazione della cosiddetta “radiazione gamma” con i fotoni fu effettuata da E. Rutherford e E. Andreade nel 1914; nei loro esperimenti osservarono fenomeni di scattering simili alla diffrazione a raggi X ma con una lunghezza d'onda dei fotoni molto più piccola rispetto a quella delle transizioni atomiche.

La maggior parte dei processi nucleari e dei decadimenti α e β lasciano il nucleo su uno stato eccitato che si dissecita direttamente sullo stato fondamentale, o su un altro stato eccitato che si disseciterà a sua volta, con conseguente emissione di uno o più raggi γ .



Lo studio dei raggi γ è diventata la tecnica standard per la spettroscopia nucleare perché ci permettono di studiare gli strati nucleari eccitati in modo dettagliato deducendone parità e spin. Inoltre misurare raggi γ è relativamente semplice in quanto i materiali “inerti” posti tra sorgente e rivelatore hanno un assorbimento trascurabile della radiazione γ . Infine i rivelatori di fotoni energetici hanno un'elevata precisione energetica.

Esistono diversi modi con i quali si possono ottenere stati nucleari eccitati come ad esempio:

- Assorbimento di raggi γ .
- Eccitazione coulombiana; bombardamento del nucleo con particelle cariche, come α e protoni, con energie sotto la barriera coulombiana per evitare reazioni nucleari.
- Interazioni con neutroni; scattering di neutroni “veloci” oppure tramite cattura neutronica.
- Decadimento α e β su stati eccitati.

10.4.1 Cinematica del decadimento gamma

Consideriamo il decadimento di un nucleo fermo da uno stato iniziale E_i ad uno stato finale E_f . Le leggi di conservazione di energia e momento implicano che:

$$\begin{cases} E_i = E_f + E_\gamma + K_R \\ 0 = \vec{p}_R + \vec{p}_\gamma \end{cases} \quad (10.105)$$

dove \vec{p}_R è il momento finale del nucleo $K_R = \frac{\vec{p}_R^2}{2M}$ è l'energia cinetica dovuta al rinculo del nucleo. Definiamo ΔE come la differenza di energia tra stato iniziale e finale, e

considerando la relazione relativistica $E_\gamma = cp_\gamma$, possiamo scrivere:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (10.106)$$

esprimendo la relazione in funzione dell'energia del fotone ed espandendo in serie la radice⁵:

$$E_\gamma = Mc^2 \left(-1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2}} \right) \cong \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} \quad (10.107)$$

Quindi l'energia del fotone è inferiore alla differenza di energia tra stato iniziale e stato finale a causa del rinculo nucleare. La correzione è comunque trascurabile in quanto molto spesso è inferiore alla precisione sperimentale; quindi si può considerare semplicemente:

$$E_\gamma = \Delta E \quad (10.108)$$

10.4.2 Conversione interna

La conversione interna è un decadimento radioattivo nel quale un nucleo eccitato interagisce con un elettrone di uno degli orbitali atomici più interni causando l'emissione dell'elettrone dall'atomo che, a differenza di un decadimento β , non viene creato ma esiste a priori nel nucleo, secondo il seguente schema:



L'elettrone emesso possiede un energia cinetica pari a:

$$K_e = \Delta E - E_b \quad (10.110)$$

dove E_b è l'energia di legame dell'elettrone atomico emesso, ovvero l'energia di ionizzazione, al quale segue l'emissione di raggi X caratteristici del nucleo figlio a causa degli elettroni più esterni che vanno ad occupare la shell interna. In realtà non è un processo in due passaggi (produzione di γ + interazione con elettrone atomico) ma è direttamente il campo elettromagnetico del nucleo che interagisce con l'elettrone atomico.

Gli elettroni emessi per conversione interna sono etichettati in base alla shell dalla quale provengono e sono quindi legati al numero quantico atomico principale⁶. Inoltre, se il rivelatore è ad altissima risoluzione è possibile vedere la sotto-struttura corrispondente ai singoli elettroni nella shell.

⁵Dato che ΔE è nell'ordine del MeV mentre Mc^2 è nell'ordine del centinaio di GeV ($A \cdot 10^3$ MeV) si possono considerare solo i primi tre termini dell'espansione della radice.

⁶Storicamente alle shell atomiche si è assegnato una lettera in base al numero quantico principale corrispondente: K (n=1), L (n=2), M (n=3), N (n=4).

Introduciamo il *coefficiente di conversione* come il rapporto tra il numero di elettroni e di fotoni emessi:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma} \quad (10.111)$$

in questo modo la costante di decadimento gamma deve essere corretta per la probabilità totale che venga emesso un elettrone invece di un fotone:

$$\lambda = \lambda_\gamma(1 + \alpha) = \lambda_\gamma(1 + \alpha_K + \alpha_L + \dots) \quad (10.112)$$

La conversione interna è favorita per nuclei pesanti, con piccole differenze energetiche tra stato iniziale e finale, con grandi differenze in momento angolare totale e piccoli numeri quantici. Infatti il tasso di conversione interna decresce come $\propto n^{-3}$ quindi ad esempio il rapporto tra le conversioni sulla shell K rispetto a quelle sulla shell L vale $\alpha_K/\alpha_L = 8$.

La conversione interna è uno strumento essenziale per l'osservazione delle transizioni di monopolo elettrico, alle quali è vietato decadere con emissione di radiazione elettromagnetica perché il momento di monopolo nucleare, ovvero la sua carica, non irradia. Quindi l'unico possibile decadimento per $0^+ \rightarrow 0^+$ è la conversione interna

10.4.3 Sviluppo in multipoli e regole di selezione

Spesso quando due fotoni sono emessi in rapida successione dallo stesso nucleo non sono emessi isotropicamente, infatti la direzione del secondo è definita da quella del primo. Si può verificare sperimentalmente tale fatto: mettendo in coincidenza due rivelatori, facendo variare l'angolo tra uno e l'altro e misuro gli eventi correlati. Ci si accorge che i conteggi dipendono dall'angolo. Tale effetto può essere spiegato attraverso lo sviluppo in multipoli

Due stati diversi dello stesso nuclide corrispondono a due diverse distribuzioni di carica elettrica. Definiamo al solito l'ordine del multipolo: $L = 1$ per il dipolo, $L = 2$ per il quadrupolo, $L = 3$ per l'ottupolo... (tab 8.6). Indichiamo con E il campo elettrico mentre con M il campo magnetico.

Si può dimostrare che la parità del campo di radiazione è:

$$\begin{aligned} \text{magnetico : } \mathcal{P}(ML) &= (-1)^{L+1} \\ \text{elettrico : } \mathcal{P}(EL) &= (-1)^L \end{aligned} \quad (10.113)$$

Possiamo quindi studiare la probabilità di transizione tra lo stato iniziale e lo stato finale analizzando l'elemento di matrice dell'operatore di multipolo:

$$\mathcal{M}_{fi}(\sigma L) = \int \bar{\psi}_f m(\sigma L) \psi_i \, dV \quad (10.114)$$

dove $m(\sigma L)$ (con $\sigma = E, M$) è l'operatore che cambia lo stato nucleare da ψ_i a ψ_f e contemporaneamente crea un fotone della giusta energia, parità e ordine di multipolo.

Se conoscessi le autofunzioni nucleari, si potrebbe calcolare nel dettaglio $m(\sigma L)$ e quindi fare previsioni sulla vita media. In realtà ciò può essere fatto solo in alcuni casi come nel caso dei modelli a particella singola, di cui fa parte il modello a shell, in cui sono facilmente trattabili i casi di nuclei con A dispari in cui gli stati eccitati del nucleo corrispondono agli stati eccitati nucleone spaiato. In generale si può dire che τ aumenta all'aumentare di ΔI e al diminuire di ΔE .

In ogni caso sappiamo che i multipoli permessi di ordine più basso dominano sugli altri e che i multipoli elettrici sono più probabili dei rispettivi multipoli magnetici di un fattore 100:

$$\frac{\lambda(E, L)}{\lambda(M, L)} \simeq 10^2 \quad (10.115)$$

L'emissione di multipoli di ordine $L + 1$ è circa centomila volte meno probabile dell'emissione di multipoli di ordine L :

$$\frac{\lambda(E, L+1)}{\lambda(E, L)} \simeq 10^{-5} \quad \frac{\lambda(M, L+1)}{\lambda(M, L)} \simeq 10^{-5} \quad (10.116)$$

Combinando le due equazioni precedenti otteniamo:

$$\frac{\lambda(E, L+1)}{\lambda(M, L)} \simeq 10^{-3} \quad \frac{\lambda(M, L+1)}{\lambda(E, L)} \simeq 10^{-7} \quad (10.117)$$

dove possiamo trascurare il secondo termine. Quindi il quadrupolo elettrico “compete” con il dipolo magnetico, l'ottupolo elettrico con il quadrupolo magnetico e così via...

Il fotone è una particella a spin pari a 1 con solo due polarizzazioni e quindi si “porta via” un valore di momento angolare L , il cui minimo è 1. Quindi le transizioni $0 \rightarrow 0$ sono proibite. Se indichiamo con \vec{I}_i il momento angolare totale iniziale e con \vec{I}_f il momento angolare totale finale possiamo scrivere $\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f$ e

$$|I_i - I_f| \leq L \leq |I_i + I_f| \quad (10.118)$$

Esempio 10.12

Se $I_i = 3/2$ e $I_f = 5/2$ i possibili valori di L sono $L = 1, 2, 3, 4$. In questo caso la radiazione è una combinazione di stati di dipolo, quadropolo, ottupolo e esadecapolo.

Per determinare se la radiazione emessa è elettrica o magnetica è necessario considerare la parità dello stato iniziale e di quello finale.

Possiamo adesso scrivere le regole di selezione per i primi tre multipoli:

Multipolo	E1	M1	E2	M2	E3	M3
L	1	1	2	2	3	3
Variazione di parità	sì	no	no	sì	si	no

Tabella 10.4: Tabella riassuntiva con le regole di selezione del decadimento gamma per i primi tre ordini di multiplo

o in maniera equivalente:

- $|I_i - I_f| \leq L \leq |I_i + I_f|$.
- La parità del nucleo iniziale è diversa dalla parità del nucleo finale se l'ordine del multipolo elettrico è dispari o se l'ordine del multipolo magnetico è pari.
- Altrimenti la parità del nucleo rimane invariata.

Le vite medie tipiche dei decadimenti gamma variano di molto, infatti $10^{-16} \text{ s} \geq \tau \geq 10^8 \text{ s}$. Si parla di isomero o *stato metastabile* quando un nuclide su uno stato eccitato ha una vita media molto lunga ($\tau > 0.1 \text{ s}$) e viene indicato solitamente con una “m” di fianco al peso atomico. Uno stato metastabile generalmente ha $\Delta I > 3$ e una differenza di energia tra stato iniziale e finale piccola.

Esempio 10.13

Un tipico esempio di isomero nucleare stabile è il argento-110 (^{110m}Ag) con una vita media di 249 giorni, il quale si trova su uno stato eccitato con momento angolare pari a 6^+ . Quando si disecca emette un γ a 116 keV per andare su uno stato con momento angolare 2^- in una transizione al quarto ordine di momento magnetico (quindi molto poco probabile). Questo secondo stato eccitato ha una vita media molto breve, pari a 600 ns, e si disecca emettendo un fotone a bassa energia (1.16 keV) su uno stato con momento angolare 1^+ . Successivamente dopo circa 25 s, il ^{110}Ag nello stato fondamentale decade in due possibili canali: nello 0.3% dei casi, tramite cattura elettronica in palladio-110 ($^{110}\text{Ag} \rightarrow ^{110}\text{Pd}$) oppure, nel 99.7% delle volte, tramite β^- in cadmio-110 ($^{110}\text{Ag} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$).

10.4.4 Assorbimento risonante

Può accadere che un nucleo riassorba un fotone emesso da un nucleo identico. Normalmente abbiamo trascurato il rinculo nucleare, ma in questo caso non è possibile, infatti per avere riassorbimento è necessario avere la stessa variazione di energia. Come visto nell'equazione 10.106 nel caso dell'emissione; analogamente si può far vedere come nel caso dell'assorbimento la differenza di energia è pari a:

$$\Delta E = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (10.119)$$

Quindi se gli stati stazionari avessero energie “esatte” non potrebbero verificarsi fenomeni di assorbimento della radiazione.

Però gli stati stazionari non sono esatti a causa sia del principio di indeterminazione di Heisenberg che porta una larghezza intrinseca della riga di assorbimento che del effetto doppler termico.

Ogni stato con vita media τ ha una larghezza di riga pari a $\Gamma = \hbar/\tau$ data da una distribuzione di Breit-Wigner:

$$\sigma(E_\gamma) = \sigma_0 \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(E_\gamma - \Delta E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (10.120)$$

con $E_R = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$ energia del rinculo nucleare e σ_0 sezione d'urto per assorbimento risonante che dipende dal coefficiente di conversione interna e dagli spin dello stato fondamentale e di quello eccitato.

Questa tecnica consente di misurare la vita media di vari isotopi. Per stati nucleari con vite medie dai nanosecondi ai picosecondi ($10^{-9} \div 10^{-12}$ s) si hanno larghezze Γ comprese tra $10^{-6} \div 10^{-3}$ eV).

Nella pratica però è difficile osservare la larghezza di riga a causa di diversi effetti, primo tra tutti l'allargamento Doppler termico Δ dovuto al fatto che i nuclei non sono fermi ma in agitazione termica.

L'allargamento doppler può essere calcolato ed è pari a:

$$\Delta = 2\sqrt{\ln 2} E_\gamma \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}} \quad (10.121)$$

Per un nucleo medio e per una transizione tipica di 100 keV, l'allargamento doppler a temperatura ambiente vale circa 0.1 eV; la situazione non migliora neanche se ci poniamo a temperatura criogenica, infatti anche a 4 K, $\Delta \approx 0.01$ eV. L'allargamento doppler dovuto all'agitazione termica domina la larghezza di riga; si ha una piccola sovrapposizione tra la riga di assorbimento e quella di emissione quindi una piccola probabilità di eccitazione risonante.

Esistono diverse tecniche per superare la differenza di energia ($2E_R$) dovuta al rinculo nucleare e quindi permettere l'eccitazione risonante come aumentare la temperatura della sorgente per aumentare l'allargamento doppler oppure muovere la sorgente su un disco rotante ad alta velocità. Entrambe queste tecniche sono estremamente complicate; si sfrutta quindi un fenomeno denominato *effetto Mössbauer*.

10.4.4.1 Effetto Mössbauer

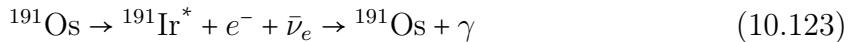
L'effetto Mössbauer consiste nell'emissione senza rinculo di raggi gamma da parte di un nucleo, e nel conseguente assorbimento di questi da parte di un altro nucleo.

Supponiamo che il nucleo emettitore e assorbitore siano legati da un reticolo cristallino. Il moto del nucleo nel reticolo è assimilabile al moto di un oscillatore armonico. Se l'energia

di rinculo non è sufficiente a far passare l'oscillatore dallo stato fondamentale al primo stato eccitato, il cristallo rincula nel suo insieme e quindi

$$\frac{\Delta E^2}{2M_{\text{cry}}c^2} \sim 0 \quad (10.122)$$

dove M_{cry} è la massa dell'intero cristallo. Rudolf Mössbauer nel 1958 dimostrò l'assorbimento risonante utilizzando un cristallo di iridio-191, sfruttando il decadimento β dell' ^{191}Os sullo stato eccitato dell'iridio, che successivamente si dissecita tramite emissione di un fotone:

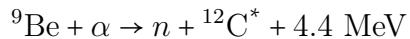


L'energia del fotone emesso è di 128 keV mentre l'energia di rinculo vale $E_R = 0.047$ eV; tipicamente le energie di legame in un reticolo cristallo sono tipicamente nell'ordine dell'elettronvolt. Sfruttando questo effetto si avrà una probabilità non nulla di riassorbimento.

Anche in questo caso, la sorgente e l'assorbitore si devono muovere uno rispetto all'altro ma in questo caso le velocità sono notevolmente ridotte, nell'ordine del cm/s. Grazie all'effetto Mössbauer è possibile misurare variazioni dell'ordine di 10^{-5} eV per fotoni con energie di 10^5 eV.

10.4.4.2 Effetto Doppler cinetico

Se il nucleo padre decade in uno stato eccitato a vita molto breve del figlio , il fotone viene emesso mentre il nucleo figlio è ancora *in volo*. Se il fotone è emesso in verso concorde al prodotto di decadimento, è soggetto ad un *blue shift*: la sua energia aumenta ed è in grado di essere riassorbito. Un esempio di questo fenomeno è la cattura di un alpha da parte del berillio-9, che produce uno stato eccitato del carbonio-12; questo decade in 61 fs ($= 10^{-15}$ s) emettendo un γ da 4.4 MeV.



Una situazione analoga è quella vista nell'esperimento di Goldhaber per la dimostrazione della chiralità del neutrino (sezione 7.3.1); in quel caso è stato usato il decadimento dell'europio in samario.

Capitolo 11

Radioattività

11.1 Radioattività ambientale

Quando si parla di radioattività ambientale si intende la presenza di radioisotopi nell'ambiente. Ciò che sarà oggetto di questa trattazione è la principale manifestazione di questo fenomeno, oggetto di interesse di un settore chiamato *radioprotezione*, ovvero le *radiazioni ionizzanti*.

Definizione 11.1. *Per radiazione ionizzante si intende una radiazione che possiede energia sufficiente a liberare elettroni da atomi o molecole. A sua volta può essere ionizzante direttamente o indirettamente: una radiazione **direttamente** ionizzante è costituita da particelle cariche, una **indirettamente** ionizzante invece da particelle elettricamente neutre.*

Sono un esempio di radiazioni direttamente ionizzanti le particelle α e β , mentre quelle indirettamente ionizzanti sono fotoni e neutroni.

Per quanto riguarda la radioattività ambientale è possibile compiere la seguente classificazione.

- **Radioattività naturale**

- *Radionuclidi fossili*
- *Radionuclidi secondari*

- **Radioattività artificiale**

- **Radioattività cosmica**

- *Raggi cosmici primari e secondari*
- *Radioattività cosmogenica*

In natura è possibile trovare 4 grandi famiglie radioattive. Esse sono chiamate serie del radio (dell'uranio), serie dell'attinio, serie del torio e serie del nettunio. I capostipiti

11.1. RADIOATTIVITÀ AMBIENTALE

di queste catene sono rispettivamente: ^{238}U , ^{232}Th , ^{235}U e ^{233}Np . Di queste 4 catene, in realtà in natura si trovano solo le prime tre, questo perché il tempo di decadimento del ^{233}Np è $\tau = 2 \cdot 10^6$ anni, molto minore della vita della terra e ad oggi è già decaduto quasi interamente.

Ciascun isotopo di queste catene di decadimento può essere rappresentato rispettivamente con $A = 4n + 2$, $A = 4n + 3$, $A = 4n$ e $A = 4n + 1$. I tempi di decadimento di queste catene sono molto ampi, nell'ordine della vita del pianeta Terra.

Dal momento che il $\tau_{\text{capostipite}} \gg \tau_{\text{figli}}$ speso le famiglie sono in una condizione di equilibrio secolare (capitolo 10.1.4). In tal caso il tasso di produzione del figlio rimane costante nella scala di tempo utilizzata e si raggiunge, dopo circa una decina di tempi di dimezzamento del figlio, la condizione di equilibrio secolare. Si vuole ora trattare le catene (eccetto quella del nettunio) in maniera specifica.

11.1.1 Famiglia radioattiva ^{238}U : serie del radio

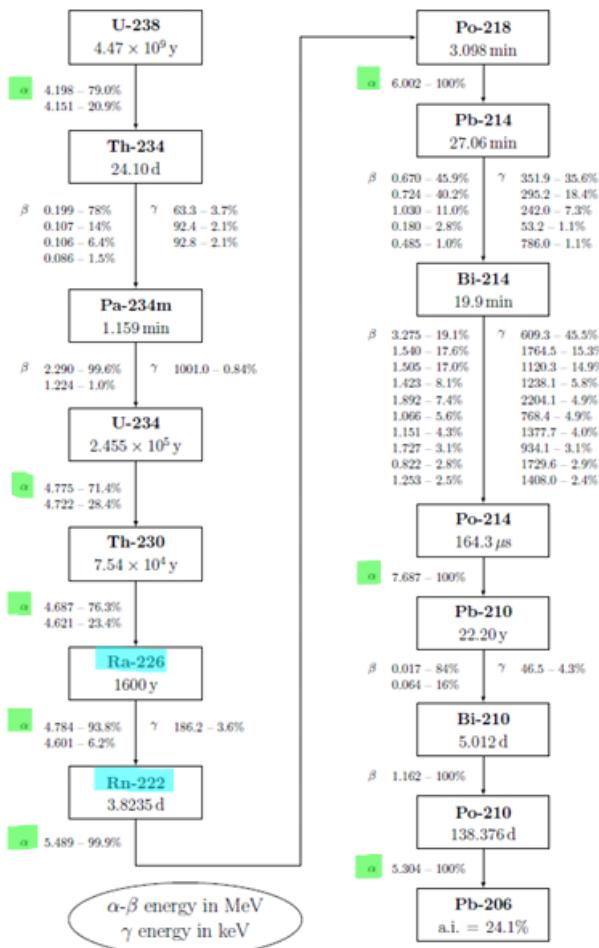


Figura 11.1: Immagine riassuntiva di tutti i decadimenti facente parte della serie del radio

In questa serie di decadimenti, presentata nella figura 11.1, è possibile trovare degli elementi ricorrenti che permettono di fare alcune considerazioni.

In primo luogo è possibile osservare che a seguito di un decadimento α si verifica quasi sempre un decadimento β , in particolare di tipo β^- , dovuti alla presenza eccessiva di neutroni. I decadimenti γ avvengono quasi sempre dopo decadimenti β , poiché quelli α vanno tendenzialmente sullo stato fondamentale.

Inoltre è stato riscontrato che maggiore è il valore di Q , minore è il tempo medio τ .

Infine si noti che in condizione di equilibrio secolare, siccome agiscono diversi elementi fisici e chimici sugli elementi dei decadimenti, può avvenire il fenomeno della *rottura della catena* e la formazione di nuove con diversi tempi di decadimento rispetto a quella originale. Ad esempio, il radio, essendo un metallo alcalino, si lega molto facilmente all'acqua e quindi riesce ad uscire dalle rocce. Un altro esempio è dato dal radon, che essendo un gas nobile sfugge facilmente dalle rocce.

11.1.2 Famiglia radioattiva ^{235}U : serie dell'attinio

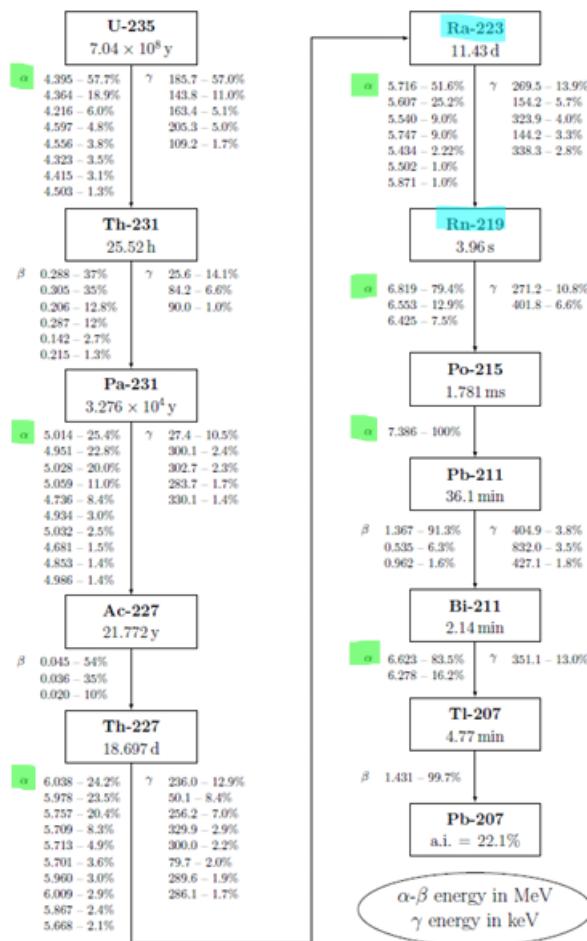


Figura 11.2: Tutti i vari decadimenti che compongono la serie dell'attinio

Per questa serie di decadimenti valgono tutte le considerazioni fatte nel precedente paragrafo ??.

Tuttavia c'è una differenza rispetto a quanto visto prima, riguardante l'equilibrio secolare. La rottura della catena è meno probabile rispetto al caso precedentemente analizzato,

siccome i tempi di decadimento del ^{223}Ra e del ^{219}Rn sono molto più brevi. In base alle abbondanze isotopiche e conoscendo i tempi di decadimento è possibile stimare in modo approssimativo quando è stato prodotto l'uranio, e tutti gli altri nuclei pesanti, presenti in natura.

11.1.3 Famiglia radioattiva ^{232}Th : serie del torio

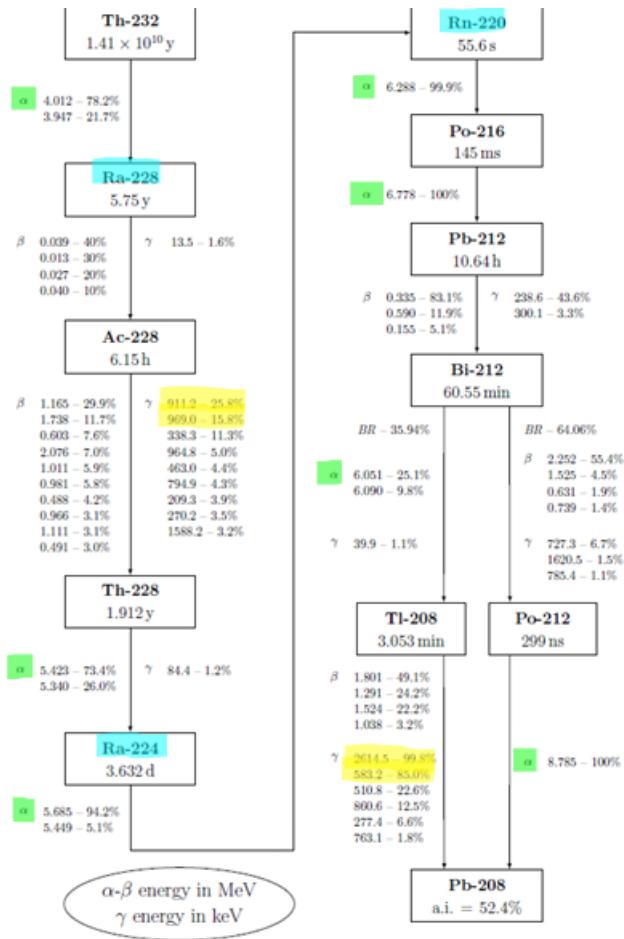


Figura 11.3: Decadimenti che compongono la serie del torio

Anche per questa serie valgono considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente. Si noti che essendo il ^{232}Th il capostipite con la vita più lunga, gli isotopi di questa catena sono quelli con maggiore attività in natura.

Si è quindi visto che i nuclidi delle catene decadono prevalentemente α . Ciò avviene anche perché siccome per A elevati si ha stabilità per $N/Z \approx 1.5$, per mantenere i nuclidi nella fascia di stabilità β bisognerebbe emettere 3 neutroni ogni 2 protoni; conseguentemente i nuclidi sono troppo ricchi di neutroni e decadono dunque β^- . Alcuni nuclidi possono decadere in entrambi i modi, con maggior probabilità in favore del decadimento α .

Esempio 11.1

Il polonio 218 ha due canali di decadimento: nel 99.98% delle volte decade α su un

11.1. RADIOATTIVITÀ AMBIENTALE

isotopo radioattivo del piombo, ^{214}Pb ; nello 0.02% dei casi decade β^- su un isotopo dell'astato, ^{218}At .

Le tre catene naturali si concludono su un isotopo del piombo, che è un elemento particolarmente stabile in quanto ha $Z = 82$ che è un numero magico; infatti il piombo è l'ultimo elemento con almeno un isotopo stabile¹.

L'emissione di molti raggi γ è dovuta al fatto che molti decadimenti avvengono su stati eccitati.

11.1.4 Altre forme di radioattività osservabili in natura

Oltre ai fenomeni appena illustrati è possibile osservarne altri in natura, sia naturali sia artificiali. Di origine naturale sono tutti gli isotopi a vita media che non fanno parte di nessuna catena di decadimento. Artificiali sono invece i fenomeni di “fall-out” dovuti al rilascio intenzionale o accidentale di radiazioni nell’atmosfera (bombe nucleari, disastri nucleari come Chernobyl...) e tutta la produzione di nuclidi per applicazioni mediche ed industriali.

Isotopo	$\tau_{1/2}$ (y)
^{40}K	$1.3 \cdot 10^9$
^{113}Cd	$9 \cdot 10^{15}$
^{115}In	$4.4 \cdot 10^{14}$
^{187}Re	$5.0 \cdot 10^{10}$

Tabella 11.1: Tabella riassuntiva di alcuni nuclidi di origine naturale di lunga vita media al di fuori delle catene

Isotopo	$\tau_{1/2}$
^3H	12.3 y
^{129}I	8.04 d
^{131}I	$1.6 \cdot 10^7$ y
^{137}Cs	30.2 y

Tabella 11.2: Tabella riassuntiva di alcuni nuclidi di origine artificiale da esperimenti militari o incidenti

¹Il bismuto è stato a lungo creduto l’ultimo elemento stabile (non radioattivo) della tavola periodica. La sua instabilità, sospettata teoricamente fin dal 1972, ha avuto una conferma sperimentale solo nel 2003, quando i ricercatori dell’Institut d’Astrophysique Spatiale di Orsay hanno misurato il tempo di dimezzamento per decadimento alfa dell’isotopo ^{209}Bi , ricavando il valore di $1.9 \cdot 10^{19}$ anni un tempo che è oltre un miliardo di volte superiore all’attuale stima dell’età dell’Universo. Pertanto, ai fini pratici il bismuto può essere di fatto considerato un elemento stabile per qualsiasi applicazione e può essere trattato come ogni altro materiale non radioattivo.

Isotopo	$\tau_{1/2}$	Decadimento	Applicazione
^{60}Co	5.26 y	γ	medicina, industria
^{55}Fe	2.73 y	ε	medicina, calibrazione
^{63}Ni	100 y	β^-	rivelatori a cattura elettronica
^{90}Sr	28 y	β^-	rivelatori a cattura elettronica
^{137}Cs	30 y	γ	medicina, industria
^{192}Ir	75 d	γ	medicina, industria
^{210}Po	138 d	α	antistatico
^{241}Am	458 y	α	antistatico, sensori di fumo, industria
^{99m}Tc	6.03 h	γ	diagnostica clinica

Tabella 11.3: Tabella riassuntiva di alcuni isotopi ad uso civile

11.1.5 Cenni di dosimetria

Come già detto, il settore della radioprotezione è molto ben sviluppato ed importante, visto che quotidianamente molte persone si ritrovano esposte a dosi più o meno massicce di radiazioni. Ecco alcune informazioni pratiche.

Decadimento	Energie tipiche	Attenuazione nei solidi
$\alpha : {}_Z^A\text{X} \rightarrow {}_{Z-2}^A\text{Y} + {}_2^4\text{He}$	4-8 MeV	μm
$\beta^- : {}_Z^A\text{X} \rightarrow {}_{Z+1}^A\text{Y} + e^- + \bar{\nu}_e$		
$\beta^+ : {}_Z^A\text{X} \rightarrow {}_{Z-1}^A\text{Y} + e^+ + \nu_e$	< 5 MeV	mm
$\varepsilon : {}_Z^A\text{X} + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^A\text{Y} + \nu_e$		
$\gamma : {}_Z^A\text{X}^* \rightarrow {}_Z^A\text{X} + \gamma$	< 2615 keV	cm

Tabella 11.4: Tabella riassuntiva con alcune informazioni pratiche riguardo energia e lunghezza di attenuazione per i vari decadimenti radioattivi

Generalmente si pone come limite superiore per l'energia dei processi gamma l'energia del decadimento del ^{208}Tl proprio a 2615 keV; ad energie maggiori ci sono solo pochi γ , dovuti principalmente al ^{214}Bi ma con branching ratios molto bassi.

Siccome l'attività di una sorgente non ci da nessuna informazione sull'energia rilasciata dobbiamo introdurre alcune nuove grandezze, prima tra tutte l'**esposizione alla radiazione** (definita solo per raggi X e γ)

$$X = \frac{Q}{m} \quad (11.1)$$

definita come la carica totale presente nell'aria dovuta alla ionizzazione generata dagli elettroni secondari prodotti dalla radiazione in un chilogrammo di aria e completamente frenati nell'ambiente circostante. Nel sistema internazionale si misura in C/kg, storicamente l'unità di misura utilizzata era il Röntgen (R) e $1 \text{ R} = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$.

Tuttavia l'esposizione alla radiazione è una grandezza praticamente impossibile da misurare direttamente. È però possibile calcolare il tasso di esposizione partendo da

11.1. RADIOATTIVITÀ AMBIENTALE

alcune semplici ipotesi; si presuppone una sorgente puntiforme, nessuna attenuazione dovuta ad eventuale materiale interposto e vengono contati solo i fotoni diretti

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = \Gamma_\delta \frac{A}{d^2} \quad [\text{R} \cdot \text{h}^{-1}] \quad (11.2)$$

dove A è l'attività della sorgente misurata in mCi, d è la distanza dalla sorgente in centimetri e Γ_δ è una costante tabulata per vari radioisotopi misurata in $\text{R cm}^2 \text{ h}^{-1} \text{ mCi}^{-1}$.

Dal momento che materiali diversi esposti alla stessa sorgente radioattiva assorbono quantità di energia diversa è necessario introdurre una nuova unità di misura: la **dose assorbita**, il gray (Gy). Un'esposizione di un gray corrisponde a una radiazione che deposita un joule per chilogrammo di materia. In unità SI si usa il gray, storicamente si è usato il rad (Radiation Absorbed Dose) e vale $1 \text{ rad} = 100 \text{ erg/g} = 0.01 \text{ Gy}$. La dose assorbita dovrebbe ben rappresentare gli effetti chimico-fisici dati dall'esposizione ad una certa radiazione.

Negli organismi viventi, la stessa dose assorbita può provocare diversi effetti biologici; per questo motivo è stato necessario introdurre una terza unità di misura: la **dose equivalente** definita come la dose assorbita moltiplicata per un fattore adimensionale detto *Q factor (QF)*.

$$DE = D \cdot QF \quad (11.3)$$

Quindi dimensionalmente la dose assorbita è equivalente alla dose equivalente e sono entrambe sinonimi di J/kg . L'unità di misura della dose equivalente nel sistema internazionale è il sievert (Sv); storicamente l'unità di misura utilizzata era il rem (Röntgen Equivalent Man) pari a 0.01 Sv.

Radiazione	<i>QF</i>
Raggi X, β , γ	1
Protoni e neutroni a bassa energia ($\sim \text{keV}$)	2-5
Protoni e neutroni ad alta energia ($\sim \text{MeV}$)	5-10
α	20

Tabella 11.5: Tabella con i valori tipici del Q factor

Quantità	Misura di...	Unità tradizionale	Unità SI
Attività (A)	Rate di decadimento	curie (Ci)	becquerel (Bq)
Esposizione (X)	Ionizzazione in aria	röntgen (R)	C/kg
Dose assorbita (D)	Assorbimento energetico	rad	gray (Gy)
Dose equivalente (DE)	Effetti biologici	rem	sievert (Sv)

Tabella 11.6: Tabella riassuntiva delle quantità dosimetriche

11.1. RADIOATTIVITÀ AMBIENTALE

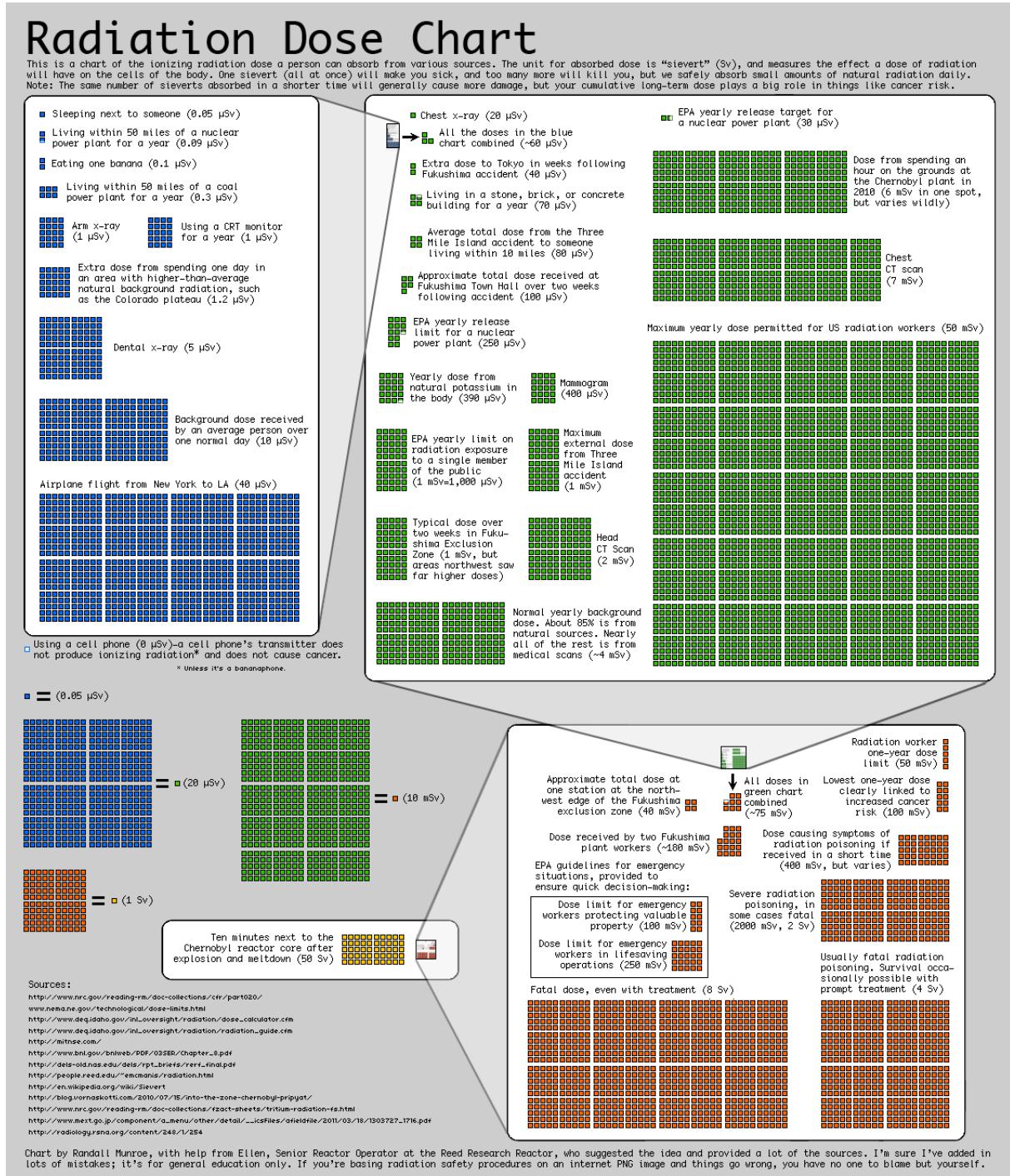


Figura 11.4: Grafico con la dose di radiazione assorbita. Il grafico mostra la dose di radiazione ionizzante che è possibile assorbire da varie fonti (in Sv). Una dose di 4 Sv da il 50% di probabilità di sopravvivenza. Per una versione dell'immagine a dimensioni reali: <https://xkcd.com/radiation/>.

11.2 Raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle provenienti dallo spazio esterno. La loro natura è molto varia tant'è che l'energia cinetica di queste particelle è distribuita su più di 14 ordini di grandezza, così come è varia la loro origine: il Sole, le altre stelle, fenomeni energetici come novae e supernovae, fino ad oggetti remoti extragalattici come i quasar. I raggi cosmici si dividono in due categorie: raggi cosmici primari e secondari.

11.2.1 Raggi cosmici primari

I raggi cosmici primari, come dice il nome, sono particelle cariche prodotte nello spazio che arrivano direttamente a terra e possono avere origine solare, galattica o extragalattica. I raggi cosmici primari sono costituiti quasi interamente da protoni (circa il 90%) e da nuclei di elio (quasi il 10%); tuttavia, anche elettroni ed altri nuclei leggeri, fotoni, neutrini ed in minima parte positroni e antiprotoni. Presentano uno spettro continuo con energie fino a 10^{20} eV (decine di joule concentrati in una singola particella subatomica!)

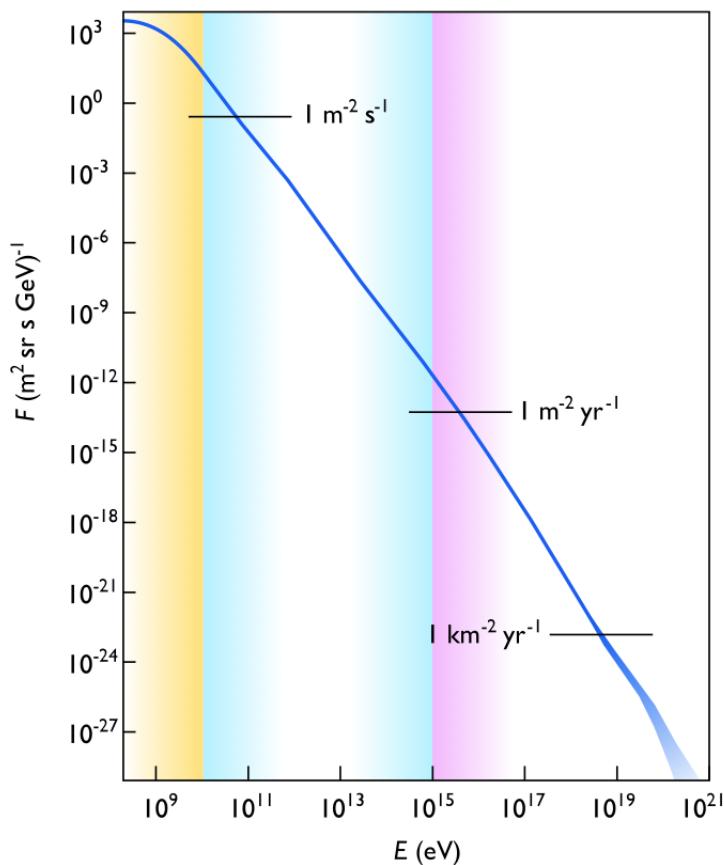


Figura 11.5: Flusso dei raggi cosmici in funzione della loro energia. La parte su sfondo giallo è ritenuta essere di origine solare, la parte su sfondo azzurro di origine mentre la parte ad energia più alta, sfondo viola, di origine extragalattica.

La pendenza dello spettro energetico (figura 11.5) segue una legge di potenza del tipo:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\gamma} \quad (11.4)$$

con $\gamma = 2.7$ per valori di energia inferiori a 10^{15} eV. Per valori superiori dell'energia, si ha un "irripidimento", con γ che diviene pari a 3. Il punto in cui si ha questo cambio di pendenza viene detto ginocchio (*knee*). Per energie ancora più alte, intorno ai $10^{18} \div 10^{19}$ eV, lo spettro dei raggi cosmici torna ad essere meno ripido, dando luogo ad un ulteriore cambio di pendenza che viene chiamato caviglia (*knee*).

Il flusso dei raggi cosmici primari è modulato nel tempo dall'attività solare ed è modificato dal campo geomagnetico; infatti la distribuzione del flusso dei raggi cosmici è funzione della latitudine secondo al seguente relazione:

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta \quad (11.5)$$

11.2.2 Raggi cosmici secondari

I raggi cosmici secondari sono prodotti dalla interazione di quelli primari con l'atmosfera. Sotto i 3 km di altezza quasi la totalità dei raggi cosmici sono secondari, e sono composta una gran serie di particelle, compresi sciami adronici e sciami elettromagnetici (figura 11.6).

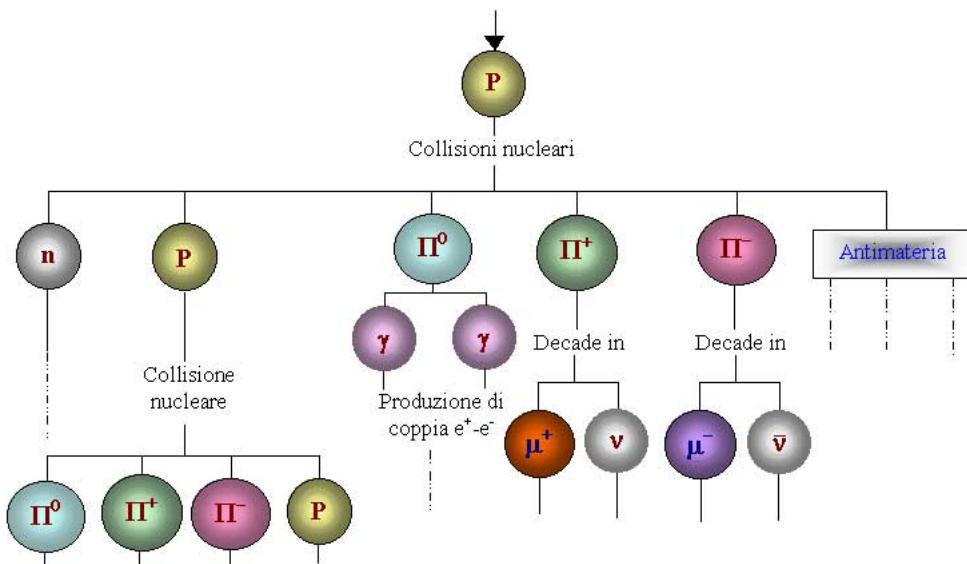


Figura 11.6: Schema di formazione dei raggi cosmici secondari. La particella primaria, generalmente un protone, urta con un nucleo di ossigeno o azoto dell'alta atmosfera. Da questa collisione vengono generati neutroni, protoni, pioni, antimateria, kaoni e iperoni (barioni che contengono il quark strange). I π^0 decadono elettromagneticamente in due fotoni e questi ultimi possono materializzarsi in coppie elettrone/positrone. I pioni carichi possono interagire con altri nuclei presenti in atmosfera o decadere in muoni e neutrini. Gli elettroni irradiano energia sotto forma di raggi γ a causa della radiazione di frenamento.

A livello del mare, nell'intorno della verticale si ha un flusso totale di circa $1.1 \cdot 10^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Si stima che il flusso medio a livello del mare abbia un'energia media di circa 3 GeV.

I raggi cosmici sono stati fondamentali per lo sviluppo della fisica delle particelle: dallo studio di tale radiazione sono state scoperte particelle come il positrone (prima evidenza dell'antimateria), il muone, e le particelle “strane”, in un'epoca nella quale la tecnologia degli acceleratori non era sviluppata.

Nei casi in cui manchi la schermatura dovuta all'atmosfera, come nei satelliti artificiali, i raggi cosmici pongono un problema notevole; l'elettronica di bordo deve essere irrobustita e schermata e, nel caso di missioni con equipaggio umano, gli astronauti sono sottoposti agli effetti ionizzanti dovuti alla radiazione. I raggi cosmici sono un problema molto minore a terra, tranne nel caso di misure di precisione; per questo motivo molti laboratori si trovano sotto terra come ad esempio il CERN di Ginevra e i Laboratori del Gran Sasso.

11.3 Cenni di radiodatazione

Non possiamo predire con certezza quando un nucleo decadrà ma possiamo conoscere con certezza quanto tempo ci vorrà per avere la metà di un elevato numero di nuclei a causa del loro decadimento. I nuclei radioattivi sono quindi degli affidabili orologi. Se conosciamo λ , la diminuzione esponenziale dell'attività di un campione può essere utilizzata per misurare il tempo.

Consideriamo come esempio, il decadimento di un isotopo padre, indicato con “ P ”, in un isotopo figlio, indicato con “ D ” e contiamo il numero al tempo t_1 di atomi P e D , $N_P(t_1)$ e $N_D(t_1)$.

$$\begin{cases} N_D(t_1) + N_P(t_1) = N_P(t_0) \\ N_P(t_1) = N_P(t_0)e^{-\lambda(t_1-t_0)} \end{cases} \implies \Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{N_P(t_0)}{N_P(t_1)} \right) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{N_D(t_1)}{N_P(t_1)} \right) \quad (11.6)$$

Quindi conoscendo il rapporto attuale tra i nuclide padre e figlio possiamo calcolare Δt .

Questo è il caso più semplice in cui sono state fatte molte assunzioni:

- al tempo t_0 non erano presenti atomi dell'isotopo figlio ($N_D(t_0) = 0$);
- nessun atomo, sia padre che figlio, esce dal campione;
- non vengono prodotti nuovi atomi del nucleo padre (per esempio da decadimenti precedenti o attivazione cosmogenica).

Queste limitazioni sono in parte risolvibili confrontando le concentrazioni dei diversi radioisotopi presenti nelle rocce.

Isotopo padre/figlio	Decadimento	$\tau_{1/2}$ (y)	Range di datazione (y)
$^{40}\text{K}/^{40}\text{Ar}$	β^- (89%) $\varepsilon + \beta^+$ (11%)	$1.3 \cdot 10^9$	$10^3 \div 10^{10}$
$^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$	β^-	$4.8 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^6 \div 3 \cdot 10^9$
$^{147}\text{Sm}/^{143}\text{Nd}$	α	$1.1 \cdot 10^{11}$	$10^8 \div 10^{10}$
$^{176}\text{Lu}/^{176}\text{Hf}$	β^- (97%) ε (3%)	$3.8 \cdot 10^{10}$	$10^7 \div 10^9$
$^{187}\text{Re}/^{187}\text{Os}$	β^-	$5.0 \cdot 10^{10}$	$10^3 \div 10^{10}$

Tabella 11.7: Tabella con alcuni nuclidi utilizzati per fare radiodatazione in archeologia, geologia e mineralogia

Per la datazione di campioni più recenti di origine organica viene utilizzato il celeberrimo carbonio 14 o radiocarbonio (^{14}C). Il carbonio 14 è un isotopo radioattivo del carbonio avente 6 protoni e 8 neutroni con una vita media di 5730 anni. La stragrande maggioranza della CO_2 assorbita dal materiale organico è composta quasi esclusivamente da ^{12}C (98.89 %). Il ^{14}C si forma, e si è formato in modo stabile nel corso dei secoli, nella parte superiore dell'atmosfera per interazione di raggi cosmici, in particolare di neutroni termici, con l'azoto:



Grazie alla sua lunga vita media rispetto alla vita degli organismi viventi, il carbonio-14 rimane integrato in ogni sistema organico vivente. Dopo la morte, l'organismo smette di essere in equilibrio con l'ambiente a causa del ^{14}C che decade al suo interno. Studiando l'attività dovuta al carbonio-14 è possibile datare il campione organico. Purtroppo in futuro non sarà più possibile sfruttare la datazione al radiocarbonio in quanto i test nucleari superficiali eseguiti da molti paesi tra il 1945 e il 1980 hanno drammaticamente aumentato la quantità di ^{14}C in atmosfera e quindi anche nella biosfera. Da quando i test sono stati sospesi la concentrazione dell'isotopo ha iniziato a diminuire ma occorrerà ancora diverso tempo perché la concentrazione torni a livelli pre-1945.

Capitolo 12

Fissione & Fusione Nucleare

12.1 Fissione nucleare

La fissione nucleare è una reazione nucleare in cui un nucleo atomico pesante decade in nuclei di atomi di numero atomico inferiore, e quindi di minore massa, con emissione di una grande quantità di energia e radiazione.



con $k \sim 2 - 4$.

Può avvenire spontaneamente in natura oppure può essere indotta artificialmente tramite opportuno bombardamento di neutroni. È la reazione nucleare comunemente utilizzata nei reattori nucleari e nel tipo più semplice di arma nucleare: la bomba atomica.

12.1.1 Fissione spontanea

La fissione spontanea è una forma di decadimento radioattivo caratteristica di isotopi molto pesanti. È teoricamente possibile per qualsiasi nucleo con $A > 100$; nella pratica, tuttavia, la fissione spontanea è energicamente fattibile solo per nuclidi con masse atomiche superiori a 230. Gli elementi più suscettibili a fissione spontanea sono gli attinoidi ad alto numero atomico, come il mendelevio (${}_{101}^{\text{Md}}$) e il laurenzo (${}_{103}^{\text{Lr}}$) e gli elementi trans-attinoidi, come il rutherfordio (${}_{104}^{\text{Rf}}$).

Per l'uranio e il torio, la modalità di decadimento per fissione spontanea è presente ma con branching ratios bassissimi e viene considerata solo per misure molto precise sull'attività del nucleo. Ad esempio il B.R. di fissione spontanea per ${}^{235}\text{U}$ è $7 \cdot 10^{-11}$, mentre per ${}^{238}\text{U}$ è leggermente più alto, pari a $5.5 \cdot 10^{-7}$.

Empiricamente si è trovato un criterio per stimare se un nucleo possa fare fissione spontanea;

$$\frac{Z^2}{A} \geq 47 \quad (12.2)$$

La fissione spontanea si presenta, come altri decadimenti, a causa dell'effetto tunnel, senza che l'atomo sia stato colpito da un neutrone o da altre particelle come nella fissione indotta.

I prodotti della fissione sono isotopi che tipicamente possiedono un alto numero di neutroni, quindi sono scorie che, nella maggior parte dei casi, decadono beta. Difficilmente i due frammenti hanno la stessa massa (figura 12.1).

La fissione è un prodotto dell'interazione forte e generalmente vengono rilasciati circa 180 MeV di energia distribuiti nel seguente modo: circa 160 MeV ai frammenti, circa 5 MeV ai neutroni e circa 5 MeV ai raggi gamma.

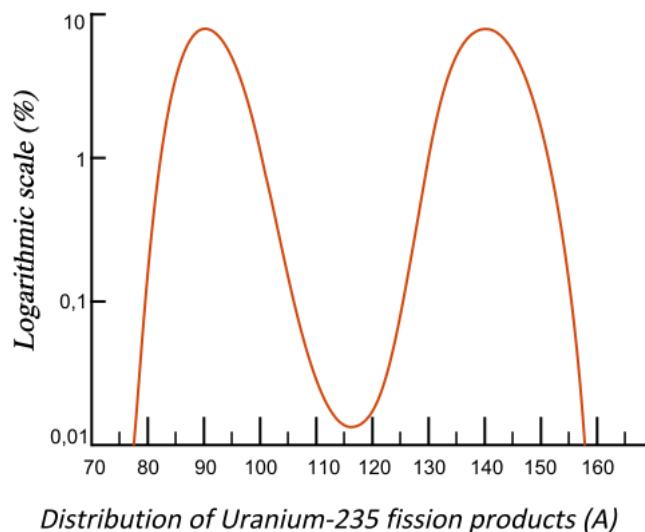


Figura 12.1: Distribuzione dei prodotti di fissione dell' ^{235}U

12.1.2 Fissione indotta

Il processo di fissione indotta è alla base della produzione di energia nucleare. La fissione spontanea non è in grado di produrre una potenza apprezzabile ed è quindi necessario ricorrere alla fissione indotta da neutroni.

Quando un neutrone urta con un nucleo atomico possono avvenire diversi processi.

- Cattura del neutrone da parte del nucleo e fissione con emissione di altri neutroni.
- Cattura del neutrone e diseccitazione per emissione gamma.
- Scattering elastico del neutrone.

Chiaramente noi siamo interessati alla reazione di fissione, la quale è favorita a basse energie (neutroni termici) per l'uranio 235. Per l' ^{238}U la soglia energetica per l'inizio delle reazioni di fissione è intorno a 1.5 MeV ma la sezione d'urto è soppressa di 2-3 ordini di grandezza rispetto a quella dell' ^{235}U ; per questo motivo si utilizza normalmente uranio arricchito con un alta percentuale di ^{235}U .

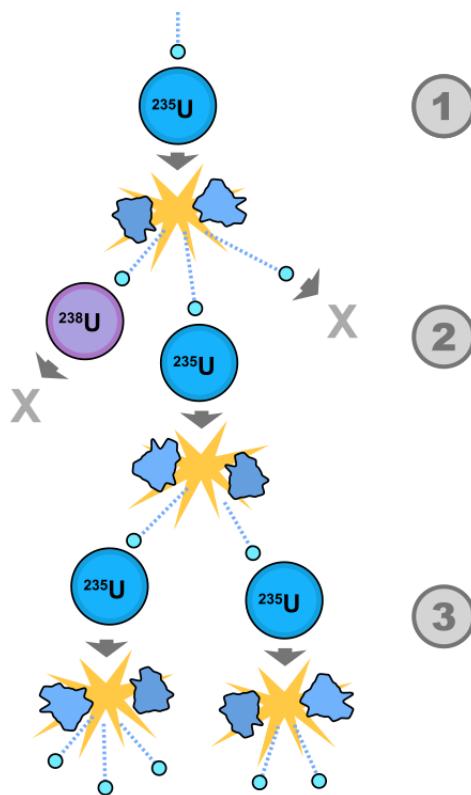


Figura 12.2: Schema di una reazione di fissione nucleare.

- 1) Un nucleo di ^{235}U viene bombardato da un neutrone e avviene la fissione che spezza il nucleo in due atomi più leggeri, liberando tre neutroni e dell'energia.
- 2) Uno di questi neutroni è assorbito da un altro nucleo di ^{238}U ed è perso nel bilancio. Un secondo può “fuggire” dal sistema o essere assorbito da un elemento che non continua la reazione. Il terzo neutrone viene assorbito da un nucleo di ^{235}U che si spezza in due atomi liberando due neutroni ed energia.
- 3) I due neutroni liberati si scontrano con due nuclei di ^{235}U e ogni nucleo libera da uno a tre neutroni continuando la reazione a catena.

I neutroni che sono prodotti direttamente dalla fissione (*neutroni prompt*) trasportano circa il 2.6% dell'energia e il loro numero medio è pari a 2.5. La distribuzione del numero di neutroni prodotti e della loro energia è molto ampia ($0 < n < 6$ neutroni, 0.5-4 MeV). Il numero di neutroni è poi aumentato dai decadimenti beta dei prodotti di reazione che producono i cosiddetti *neutroni ritardati* che trasportano circa il 13% dell'energia di fissione. I decadimenti β producono anche un grande flusso di neutrini, che avendo una sezione d’urto 18 ordini di grandezza minore di quella dei neutroni, la loro energia è realisticamente persa in ogni dispositivo.

Un parametro fondamentale di ogni reazione di fissione è il *tasso di moltiplicazione* K definito come il rapporto tra il numero di neutroni presenti in questa generazione e il numero di neutroni presenti in quella precedente. Il caso di $K = 1$ corrisponde alla condizione di **criticalità**: la reazione a catena di fissione si auto-sostiene e la potenza prodotta dal reattore è quasi costante; questa è la situazione che si vuole idealmente

raggiungere in un reattore per la produzione di elettricità. Se $K < 1$ siamo in condizioni **subcritiche** e la reazione si ferma dopo poco tempo. Se $K > 1$, la reazione si dice **supercritica** ed è la condizione normalmente ricercata negli ordigni nucleari dove, un aumento della potenza generata finché tutto il combustibile è esaurito molto rapidamente, porta ad una reazione esplosiva che, a seconda che si tratti di una bomba o un reattore, può essere l'effetto auspicato o un gravissimo incidente.

12.1.2.1 Reattori nucleari

Un reattore nucleare produce calore generato da una reazione a catena di fissione controllato; questo calore viene utilizzato per scaldare un fluido, acqua in genere, e trasformato in energia elettrica tramite delle turbine.

Le componenti di un reattore nucleare sono:

- **Combustibile:** il più comune combustibile per reattori di potenza è uranio naturale e arricchito, dove la percentuale di ^{235}U è del 2-3 %. Reattori speciali possono utilizzare ^{239}Pu o ^{233}U .
- **Moderatore:** rallenta i neutroni veloci in modo da ridurre l'assorbimento risonante e la cattura da parte dell' ^{238}U . Se il combustibile è uranio naturale, il moderatore deve compensare la bassa quantità di ^{235}U minimizzando la perdita di neutroni. L'acqua normale non è un buon moderatore a causa dell'alta sezione d'urto di produzione del deuterio ($n + p \rightarrow d + \gamma$), che diminuisce il flusso di neutroni. L'acqua pesante, dove all'idrogeno è sostituito il deuterio, è al contrario un ottimo moderatore in quanto riduce le perdite neutroniche. Un moderatore con prestazioni ancora migliori è la grafite che è molto meno costosa dell'acqua pesante; il problema della grafite sono i rischi di sicurezza che comporta (il reattore di Chernobyl era moderato a grafite). Se il combustibile del reattore è arricchito e la perdita di neutroni non è un problema viene usata senza problemi l'acqua normale.
- **Barre di controllo:** danno un indicazione per stabilizzare la potenza del reattore e operare in condizioni sicure in regione critica. Normalmente sono fatte di cadmio che è un ottimo assorbitore di neutroni. La velocità alla quale deve essere mossa una barra di controllo è data dal rate di aumento del numero di neutroni per piccole variazioni di K .

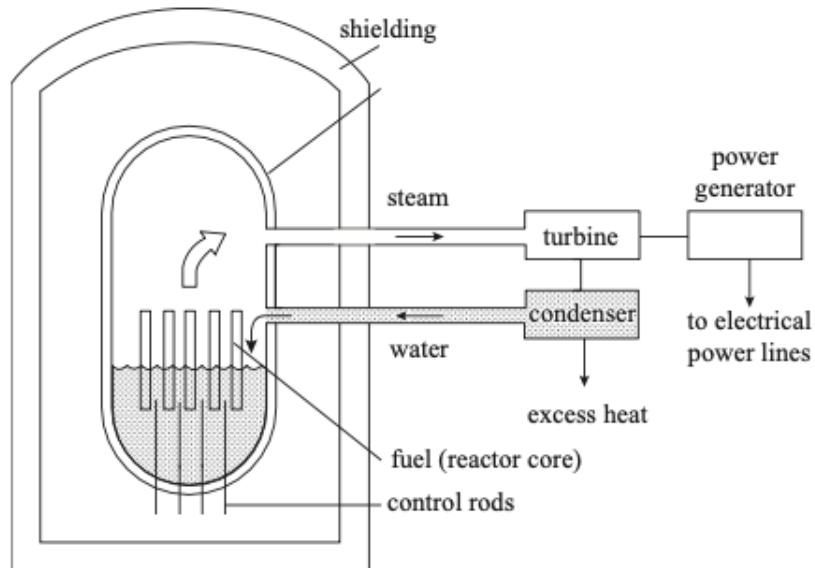


Figura 12.3: Schema semplificato di un reattore a vapore (BWR). Le barre di grafite moderano i neutroni; la potenza prodotta dal reattore può essere regolata in maniera molto fine dalle barre di controllo. L’acqua evapora nella parte superiore del nocciolo del reattore e il vapore generato aziona una turbina per generare energia elettrica. La turbina è collegata ad un condensatore, il quale fa condensare l’acqua che ritorna nel nucleo e viene utilizzata come refrigerante.

Il nucleo (o nocciolo) del reattore è il luogo dove avvengono le reazioni di fissione e dove sono collocati combustibile e moderatori. In figura 12.3 è rappresentato uno schema di un reattore ad acqua bollente (BWR), uno dei design più popolari e rodati. Un’opzione più sicura sarebbe un reattore ad acqua pesante, dove una perdita di refrigerante comporterebbe ad una perdita di moderatore; in questo modo il reattore diventa subcritico molto prima di iniziare una fissione del nocciolo.

I reattori nucleari producono diversi GWh di energia termica, con costi di manutenzione molto piccoli rispetto all’investimento iniziale, di conseguenza gli impianti nucleari sono studiati per operare per decenni. Ad oggi circa il 10% dell’intera produzione di elettricità dell’umanità è generata tramite energia nucleare e in tutto il mondo ci sono circa 450 impianti attivi. Nonostante numerosi vantaggi (il costo per GWh, efficienza, disponibilità immediata e costante, controllo della potenza erogata, limitate emissioni di gas serra...) ci sono tre grossi problemi che affliggono i reattori nucleari.

In primo luogo, gli *incidenti*. Incidenti in impianti nucleari non solo mettono in pericolo la vita degli operatori della centrale ma anche di intere regioni perché possono contaminare l’ambiente con una grande quantità di isotopi radioattivi di lunga vita. Gli incidenti sono **estremamente rari**, specialmente nei reattori di nuova generazione e la maggior parte di esse è avvunuta in impianti molto vecchi. I due maggiori incidenti nucleari sono: Chernobyl, nel 1986, dove un grave errore di progettazione di un reattore scarsamente manutentato e vecchio ha portato all’esplosione del reattore e Fukushima, nel 2011, dove

in seguito ad uno tsunami che ha colpito le coste del Giappone, i generatori diesel che mantenevano l'impianto refrigerato sono andati in avaria; in questo caso non c'è stata un'esplosione come a Chernobyl ma solamente la fusione del nucleo. Esistono vari design di reattori che operano sempre in regione subcritica, come gli ADS (Accelerator Driven Subcritical) dove i neutroni che mancano per sostenere la reazione sono generati da un acceleratore di particelle.

Il secondo problema che presentano i reattori nucleari è lo *smaltimento delle scorie nucleari*, poiché il carburante esausto di ogni reattore è ricco di isotopi radioattivi a lunga vita. Ad oggi non esiste altra soluzione se non la conservazione in depositi sotterranei, dove il materiale rimarrà attivo e pericoloso per centinaia di anni. Esistono alcuni progetti per utilizzare nuovamente acceleratori di particelle per trasmettere gli isotopi più pericolosi in isotopi più instabili a vita più breve.

Infine un reattore nucleare può essere utilizzato per *produrre armi nucleari*.

12.1.3 Reattore nucleare a fissione naturale

Un reattore a fissione nucleare naturale è un luogo dove si è verificata una reazione di fissione nucleare auto-sostenuta senza l'intervento dell'uomo. L'unico esempio noto è una miniera di uranio in Gabon, scoperta nel 1972, dove, circa 1.7 miliardi di anni fa, si sono verificate reazioni di fissione nucleari. La reazione è stata possibile grazie all'abbondanza all'epoca di ^{235}U , circa il 3%, e alla presenza di acqua. Si ritiene che il reattore sia rimasto in funzione per alcune centinaia di migliaia di anni con una potenza di circa 100 kW.

Per avere un reattore naturale c'è bisogno di condizioni speciali; innanzitutto deve essere presente un deposito con almeno il 10% di uranio, con una concentrazione di ^{235}U di almeno del 3% e di spessore di 3 m; deve essere presente un moderatore, verosimilmente acqua; infine non devono essere presenti troppi materiali assorbitori di neutroni.

In Gabon si verificarono tutte queste condizioni quando il deposito di minerale ricco di uranio venne inondato da una falda acquifera; a questo punto l'acqua fungeva da moderatore per i neutroni alimentando la reazione a catena e produceva calore; il calore faceva evaporare l'acqua e quindi senza il moderatore la reazione rallentava, abbassando la temperatura e facendo continuare il ciclo.

12.2 Fusione nucleare

La fusione nucleare è una reazione nucleare nella quale i nuclei di due o più atomi si uniscono tra loro formando il nucleo di un nuovo elemento chimico.

Perché la fusione sia possibile i nuclei devono essere avvicinati tra loro, impiegando una grande energia per superare la repulsione elettromagnetica. La fusione degli elementi fino ai numeri atomici 26 e 28 (ferro e nichel) è una reazione esotermica, cioè produce energia,

poiché il nuclide prodotto dalla reazione ha massa minore della somma delle masse dei nuclei reagenti (come già visto nella sezione 8.4).

Per iniziare il processo di fusione è necessario superare la barriera di repulsione coulombiana tra i nuclei, quindi è necessaria un'alta energia cinetica. Il potenziale coulombiano nella reazione deuterio-trizio (${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n$) vale:

$$V_{\text{barriera}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon} \frac{Z_a Z_b}{R_a + R_b} \simeq 0.4 \text{ MeV} \quad (12.3)$$

Per ottenere questi valori di energia cinetica non conviene utilizzare acceleratori: non è pratico poiché dovrei accelerare moltissimo materiale e l'idrogeno essendo molto “piccolo” è difficile da confinare. Sfrutto allora l'energia termica; scaldando ad altissime temperature un plasma di deuterio-trizio riesco ad innescare reazioni di fusione. Infatti, a temperature di 10^7 K, l'energia cinetica media delle particelle è dell'ordine del keV, tuttavia alcune particelle, situate nella coda della distribuzione di Maxwell-Boltzmann, avranno energie molto più alte, sufficienti a superare la barriera di potenziale; inoltre grazie all'effetto tunnel, è possibile che un numero maggiore di nuclei di deuterio e trizio superino la repulsione coulombiana.

L'utilizzo della fusione nucleare per la generazione di energia elettrica presenta numerosi vantaggi.

- I combustibili primari sono disponibili in grandi quantità quasi ovunque nel mondo.
- I prodotti delle reazioni sono elementi stabili, come ${}^4\text{He}$ e neutroni.
- I materiali attivati dal bombardamento neutronico rimangono radioattivi per meno tempo rispetto alle scorie usate in un reattore a fissione; dopo circa un centinaio di anni possono essere riutilizzati.
- Non è possibile una reazione auto-sostenuta incontrollata.

Lo svantaggio principale è riuscire a generare e confinare un plasma caldo (10-100 MK) evitando il contatto con le pareti del reattore; per il confinamento si utilizzano intensi campi magnetici.

Ad oggi esistono diversi impianti sperimentali che realizzano reazioni di fusione per pochi secondi come ad esempio JET (Joint European Torus), che sfrutta la reazione deuterio-trizio e, che nel febbraio 2022, ha prodotto 59 MJ di energia in un intervallo di cinque secondi, in cui la fissione è stata mantenuta per tutto il tempo previsto per il funzionamento dei magneti superconduttori e dei sistemi di raffreddamento.

Uno dei progetti più promettenti è ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) che sta venendo costruito a Cadarache, nel sud della Francia, e si prevede che potrà entrare in funzione entro il 2025/2026 con l'obiettivo di raggiungere 500 MW di potenza per almeno 300 secondi e, successivamente, dimostrare il funzionamento in regime stazionario, producendo almeno 300 MW per un'ora.

Appendice: Domande tipiche orale

Appendice A

Fisica Subnucleare - Terranova

A.1 Bethe-Block

La formula di Bethe corregge la formula di Bohr aggiungendo tre termini additivi. Sicuramente: più lenta va una particella più energia rilascia. Sorprendentemente: a $v \simeq 0,94c$ l'energia trasferita è minima, oltre ritorna a crescere.

Relativistic rise $-2\beta^2$

I campi elettromagnetici si dilatano in direzione ortogonale al moto (non sono invarianti di Lorenz). Campi più intensi determinano interazioni più forti, ergo più scambio di energia.

Density correction $\delta(\gamma)$

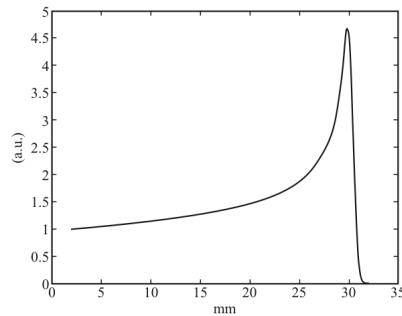
Quando $\beta \rightarrow 1$ si ha che $\gamma \rightarrow \infty$: la dilatazione dei campi diventa infinita e l'energia trasferita tenderebbe ad infinito. Per evitare la divergenza si introduce la density correction, che stabilizza la crescita e appiana la curva. Nel sistema di riferimento della particella sono gli elettroni del moto ad essere in moto a velocità altissime, perciò generano campi magnetici molto intensi. Questi finiscono per polarizzare il mezzo, rallentando il trasferimento di energia.

Shell correction $\frac{2C(\beta\gamma,I)}{Z}$

Infine la shell correction corregge la divergenza della formula in $\beta \rightarrow 0$: non ha senso avere perdita infinita a velocità nulla. L'ipotesi è che quando la particella si ferma nel mezzo cessi bruscamente di trasferire energia, formando uno stato legato. Una particella carica negativamente sarebbe catturata da un nucleo, una positiva invece strapperebbe un elettrone, spendendo tutta la sua energia residua.

Picco di Bragg

Il risultato più affascinante della formula di Bethe riguarda il tempismo del trasferimento di energia. Una particella perde energia più o meno in modo costante mentre rallenta, ma quando scende al di sotto del minimo ($\beta \approx 0.94$) scarica in pochissimo tempo quella che le resta. Particelle dello stesso tipo, accelerate alla stessa velocità e sparate contro lo stesso mezzo tenderanno a scaricare molta energia dopo una distanza media detta *range*. Il picco di trasferimento, posizionato in corrispondenza del range, è il picco di Bragg.



A.2 Camera a ionizzazione

La camera a ionizzazione è il rivelatore più semplice. Schematicamente è un condensatore C piano con un dielettrico gassoso, di solito argon, alimentato da un generatore a tensione costante V_0 . Lo scopo dello strumento è misurare le variazioni di differenza di potenziale ai capi di una resistenza R provocate dal passaggio di particelle cariche. Quando la particella attraversa il gas ne ionizza gli atomi, liberando n elettroni da n ioni. Il fattore chiave è scegliere i due componenti in modo che $RC \gg t$, dove t è il tempo medio che una particella impiega per colpire una delle armature del condensatore. Per tempi così piccoli si può approssimare il moto delle particelle come rettilineo uniforme. Tipicamente gli elettroni hanno uno spostamento trasversale di $1 \text{ cm}/\mu\text{s}$ e gli ioni di $1 \text{ mm}/\mu\text{s}$. Una carica passando nel condensatore provoca una variazione del potenziale. Il tempo caratteristico con cui il generatore ripristina V_0 è proprio $\tau = RC$. Dal momento che ho scelto τ grosso, il potenziale non viene ripristinato mentre passa la particella. Quindi, per i primi microsecondi, il sistema diventa elettrostatico e vale la conservazione dell'energia. In questo breve lasso di tempo il condensatore si scarica cedendo energia alle cariche. L'energia contenuta all'interno del circuito a generatore spento è $\frac{1}{2}CV_0^2$; questa viene utilizzata per accelerare trasversalmente le cariche in transito. $\Delta V = V_0 - V_f$ è la tensione che misuriamo ai capi della resistenza. Il lavoro compiuto su un elettrone è $F \cdot s = qE_x v^- t$, sullo ione invece $(-q)(-E_x)v^+t$ (gli ioni hanno carica opposta agli elettroni ma sono anche accelerati

in verso opposto):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}CV_0^2 &= \frac{1}{2}CV_f^2 + nqE_xv^-t + nqE_xv^+t \\ \frac{1}{2}C(V_0^2 - V_f^2) &= nqE_xv^-t + nqE_xv^+t\end{aligned}$$

Differenza di quadrati: $V_0^2 - V_f^2 = (V_0 - V_f)(V_0 + V_f)$ dove $V_0 + V_f \simeq 2V_0$ perché gli atomi ionizzati sono nell'ordine delle migliaia, ma le cariche sono piccolissime.

$$\frac{1}{2}C(V_0^2 - V_f^2) = \frac{1}{2}C\Delta V 2V_0 = nqE_xv^-t + nqE_xv^+t$$

Esplicitando il campo elettrico del condensatore: $E_x = \frac{V_0}{d} \simeq \frac{V_f}{d}$:

$$\begin{aligned}C\Delta V V_0 &= nq \frac{V_0}{d} (v^+ + v^-) t \\ \Delta V &= \frac{nq}{Cd} (v^+ + v^-) t\end{aligned}$$

Ad un certo punto, col passare del tempo, gli elettroni arrivano all'armatura del condensatore: rimane solo v^+ ; quando anche gli ioni arrivano conta soltanto la lunghezza del condensatore. Se gli elettroni percorrono x , gli ioni percorrono $d - x$:

$$\Delta V = \frac{nq}{Cd} (x + d - x) = \frac{nq}{C}$$

Il segnale spiana, misurando ΔV posso risalire al numero di eventi elementari n (ionizzazioni), da cui si può calcolare l'energia scaricata. Vantaggio: semplice, svantaggio: la perdita di energia è piccolissima $\frac{dE}{dx} \simeq 2 \text{ MeV/g cm}^2$, densità dell'argon 10^{-3} g/cm^3 , l'energia liberata da un evento è 2 keV, l'energia media necessaria per la ionizzazione è $w = 26 \text{ eV}$. Il numero di eventi è circa 100. Significa che il rivelatore dovrebbe avere un ENC minore di 100 per vedere il singolo evento. Rimane utile se le gli eventi sono tantissimi.

A.3 Contatore proporzionale

Cerca di ovviare al problema della camera a ionizzazione della bassa sensibilità al singolo evento. L'energia ceduta in un libero cammino medio è maggiore di w , un singolo evento genera una valanga di Townsend: una cascata esponenziale di eventi di ionizzazione. Il fattore di moltiplicazione del numero di elettroni prodotti, il GAIN, è $G = e^{\alpha x}$, $n = n_0 G$; α è il primo coefficiente di Townsend. È una camera a ionizzazione basata su un condensatore cilindrico. L'anodo del condensatore è semplicemente un filo metallico. Infatti il campo

elettrico di un condensatore cilindrico è:

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \hat{u}_r \quad (\text{A.1})$$

quindi se a è molto piccolo, il campo massimo è molto intenso. Le particelle cariche vengono accelerate molto e quando arrivano nelle vicinanze del filo scatta la valanga. Uso la stessa ipotesi della camera a ionizzazione: $\tau = RC \gg t$ tempo di raccolta delle cariche. Gli elettroni si muovono verso il filo, gli ioni verso l'esterno. L'energia iniziale del condensatore cilindrico è $W = \frac{1}{2}CV_i^2$. L'energia fornita ad una carica in uno spostamento infinitesimo dr è:

$$dW = CV_i dV = q d\varphi$$

Il contatore proporzionale ha un errore relativo maggiore della camera di ionizzazione, ma conviene usare il contatore proporzionale perché la differenza di potenziale misurata è molto più intensa a causa della valanga di Townsend, quindi supera il rumore elettronico: si misura più facilmente.

Quando il numero degli elettroni prodotti a valanga diventa grandissimo ($10^6 \div 10^8$) ho milioni di ioni che driftano verso l'esterno e, siccome sono carichi positivamente, schermano il campo elettrico. Allora il prossimo elettrone che crea la valanga trova un campo elettrico meno intenso, per cui produce una valanga più piccola. Per $G \simeq 10^8$ si incontra il cosiddetto limite di Rutherford, dove si trova un segnale costante a prescindere dell'energia depositata dalla particella.

A.4 Contatore Geiger

Utilizzando la stessa struttura di un contatore proporzionale produciamo continuamente valanghe di elettroni, i quali ionizzano un atomo o fanno effetto fotoelettrico con l'armatura esterna del condensatore: in entrambi i casi gli elettroni liberati creeranno ulteriori valanghe di Townsend. Questo fa scaricare il condensatore. Dopo circa 20 valanghe il campo elettrico è così schermato (limite di Rutherford) che non fa fare più valanghe ed è per questo motivo che il segnale è costante a prescindere dall'energia depositata dalla particella. Conta le particelle ma non misura l'energia depositata.

A.5 MWPC

È un contatore proporzionale che misura l'energia depositata dalla particella e ne traccia anche la traiettoria. Gli elettroni prodotti migrano verso il filo più vicino lungo le linee di campo e inizia una valanga di Townsend, migrano anche gli ioni seguendo le linee di campo verso l'armatura positiva. Perciò si misura una grande differenza di potenziale negativa. Se gli altri fili non misurano nulla, si trova il filo più vicino alla particella: identificando la

coordinata x della particella, l'errore è lo spazio tra i fili. Per sapere la posizione y metto dei fili ortogonali a quelli per la x . I fili vicini a quello che prende l'elettrone sentono una carica indotta positiva dagli ioni; quindi il filo più vicino alla particella è l'unico che sente una corrente negativa.

A.6 Interazione fotone materia

Che succede se $E_\gamma \simeq 10 \text{ GeV}$?

A seconda della sua energia, un fotone ha una sezione d'urto maggiore per determinate interazioni.

Effetto photoelettrico

L'effetto photoelettrico avviene quando un fotone interagisce con un atomo, viene assorbito da esso e rilascia energia ad un singolo elettrone che può quindi lasciare l'atomo stesso, ionizzandolo. L'energia del fotone perché avvenga questo processo dev'essere maggiore del potenziale coulombiano che lega l'elettrone al nucleo:

$$E_e^{\text{finale}} = h\nu - E_{\text{legame}}$$

Il vantaggio è che praticamente tutta l'energia del fotone è scaricata agli elettroni, che successivamente possono essere misurati. Lo svantaggio è che è praticamente impossibile sotto l'energia soglia (di legame) e la sua sezione d'urto diminuisce molto all'aumentare dell'energia.

Effetto Compton

Si presenta quando avviene l'urto direttamente tra fotone ed elettrone: l'elettrone non viene liberato e il fotone viene deviato con energia minore. L'energia è scaricata in modo parziale per cui, anche se riuscissi a misurare la cinetica di e^- , mi perderei la fetta di energia che è rimasta in γ . Perciò non si riesce a risalire all'energia iniziale. La relazione tra frequenze iniziale e finale è espressa dalla formula di Compton:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma(1-\cos\theta)}{mc^2}}$$

L'energia rilasciata per effetto Compton ha un limite: la massima energia trasferibile si ha negli urti frontali. In corrispondenza di quell'energia allora si vede il grafico dei conteggi interrompersi bruscamente = *spalla Compton*. L'effetto Compton tende a svanire per alte energie e risulta significativo nella regione 100 keV - 10 MeV. Se si usano materiali con Z molto alti, quindi con più elettroni, si ovvia al problema: magari un fotone scatterato, prima di uscire dal rivelatore, colpisce un altro elettrone e fa photoelettrico. La regione

tra spalla Compton e fotopicco è riempita dai fotoni che fanno più volte scattering (multi Compton).

Produzione di coppie

È il fenomeno prevalente quando l'energia del fotone è molto grande ($>10\text{MeV}$). Un fotone interagisce con un elettrone o un nucleo e, scaricando energia, si converte in una coppia elettrone-positrone. Chiaramente, perché ciò avvenga (interagendo con un nucleo), l'energia minima è quella del positronio stesso ($2m_e \approx 1022 \text{ keV}$). Se interagisce con un elettrone servirà $\approx 4m_e$. Il positrone emesso perde energia per frenamento radiativo, finché non rallenta al punto da formare uno stato legato con un elettrone. Quando il positronio si annichila vengono emessi due fotoni *back-to-back* da 511 keV ciascuno.

Esempio fotone 10 GeV

Quasi sicuramente i fotoni, interagendo con il rivelatore, produrranno coppie elettrone/positrone ad energie altissime: 5 GeV ciascuno. A questi livelli domina la perdita di energia per radiazione: come se emettessero fotoni molto energetici. Questi ultimi sono sufficientemente energetici da produrre nuove coppie, e così via. Il fenomeno viene detto sciam elettromagnetico.

Per calcolare il numero di particelle prodotto nello sciam in funzione dell'energia si usa l'approssimazione di Rossi.

$\gg 10 \text{ MeV}$ in media, elettroni e positroni emettono fotoni con metà dell'energia iniziale dopo una lunghezza di radiazione X_0 . Un fotone si converte in una coppia dopo una lunghezza X_0

L'energia minima delle particelle prodotte è una frazione di quella iniziale, che dipende dal numero di divisioni N :

$$E_{min} = \frac{E_{ini}}{2^N}$$

Al di sotto dell'energia critica E_C (100 MeV aria/10 MeV piombo) il frenamento radiativo diventa trascurabile, quindi dopo un certo numero di emissioni il processo s'interrompe.

A.7 Parità

L'operatore di simmetria \mathcal{P} di parità è un'inversione unitaria:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}\mathcal{P} = \mathbb{1} \quad \wedge \quad \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^{-1}$$

La caratteristica curiosa delle inversioni è che sono hermitiane. Quando \mathcal{P} commuta con l'hamiltoniano del sistema è un'invarianza del moto e l'osservabile conservata associata a

A.8. DIMOSTRARE CHE LA C-PARITÀ DI UNA COPPIA PARTICELLA/ANTIPARTICELLA È $(-1)^{\ell+s}$

questa simmetria è la parità stessa.

$$[\mathcal{P}, H] = 0 \implies \mathcal{P} \text{ si conserva}$$

Le particelle elementari puntiformi non hanno struttura interna, perciò non sappiamo come agisce su di esse l'operatore parità. Perciò si assegnano arbitrariamente i valori di parità intrinseca. Fermioni 1 e antifermioni -1.

A.8 Dimostrare che la C-parità di una coppia particella/antiparticella è $(-1)^{\ell+s}$

Si suppone di avere una coppia particella/antiparticella in un potenziale centrale descritta dallo stato $|p\bar{p}\rangle = \psi_{spazio}\psi_{spin}$. Si considera innanzitutto la parte spaziale. Applicare l'operatore \mathcal{C} di C-parità significa mandare ogni particella nella sua antiparticella; nel sistema in analisi ciò equivale a invertire le posizioni delle due particelle, compito dell'operatore scambio Sc . Riassumendo:

$$\mathcal{C}\psi_{spazio} = Sc\psi_{spazio} = (-1)^\ell \psi_{spazio}$$

Si può mostrare anche che l'azione di \mathcal{C} e Sc , in questo caso particolare, è identica anche sulla parte di spin. Si hanno allora due casi: uno per bosoni e uno per fermioni:

$$\begin{aligned} \text{BOSONI: } Sc|\psi\rangle &= (-1)^{\ell+s}|\psi\rangle \\ \text{FERMIONI: } Sc|\psi\rangle &= (-1)^{\ell+s+1}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Per calcolare la C-parità del sistema dovremo aggiungere la C-parità intrinseca di una coppia bosonica/fermionica. Nel caso di bosoni si moltiplica per 1 e non cambia nulla, nel caso di fermioni ad esponente compare un 2, ergo $(-1)^2 = 1$.

A.9 Chinowski-Steinberger - parità intrinseca π^-

Riassunto dell'esperimento. Perché si considerano livelli energetici $n \geq 7$?

Chinowsky e Steinberger hanno ideato un esperimento per determinare la parità intrinseca del piona π^- . In breve: producevano fasci di pioni e li facevano urtare con dei nuclei di deuterio d . Quando un atomo viene ionizzato, può capitare che il piona prenda il posto dell'elettrone, e inizi ad orbitare attorno al nucleo. Studiando lo spettro di emissione di questo *atomo mesico* si scopre che gli stati legati sono gli stessi, a meno che il piona non fosse a livelli energetici inferiori a $n = 7$, $\ell = 0$. Il motivo intuitivo è semplice: i pioni sono stati legati di quark, perciò possono interagire anche per forza forte. Quando superano una distanza limite, l'atomo viene distrutto e vengono prodotti due neutroni.

Lo schema da studiare è:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n, \text{ con: } \psi_{ini} = |700\rangle$$

Si hanno tre informazioni fondamentali:

- Il momento angolare totale iniziale coincide con quello di spin: la somma diretta degli spin di d ($s = 1$) e π^- ($s = 0$) dà $j = 1$
- Il momento angolare totale si conserva: nello stato finale devo avere lo stesso $j = 1$
- Lo stato finale, composto da due fermioni, dev'essere antisimmetrico allo scambio

Lo stato finale, sottoposto a scambio, restituisce:

$$Sc \psi_{fin} = (-1)^{\ell'} \psi_{spaziale} (-1)^{s+1} \psi_{spin};$$

$$(-1)^{\ell'+s+1} = -1 \iff \ell' + s \text{ pari}$$

L'unica combinazione di ℓ' e $s \in 0, 1$ con somma pari, che può combinare a dare $j = 1$ è $\ell' = s = 1$. Quindi nello stato finale la parità del sistema è:

$$\mathbf{P}_{\psi_{fin}} = (-1)^{\ell'} \mathbf{P}_n \mathbf{P}_n = -1$$

E allora, per conservazione della parità, anche la parità dello stato iniziale dev'essere -1 ; sapendo che la parità intrinseca del deuterio è $+1$ (prodotto di P_p e P_n):

$$\mathbf{P}_{\psi_{ini}} = (-1)^0 \mathbf{P}_d \mathbf{P}_{\pi^-} = -1 \iff \mathbf{P}_{\pi^-} = -1$$

A.10 Libertà asintotica

3 questioni da risolvere:

- Perché le interazioni forti sono più forti delle elettromagnetiche.
- Perché nessuno ha mai visto un quark libero.
- Perché l'interazione forte diminuisce così tanto con la distanza.

Un teorema di Landau afferma che lo sviluppo in serie dell'elemento di matrice può essere sostituito da una funzione dell'energia. Dato un diagramma di Feynman, sommando a tutti gli ordini perturbativi il diagramma relativo alla self-energy, la somma converge ed è equivalente al diagramma di ordine più basso, con costante di struttura fine variabile:

$$\alpha(s) = \frac{\alpha(m_e)}{1 - \frac{\alpha(m_e)}{3\pi} \ln \frac{s}{m_e^2}}$$

dove $\alpha(m_e) = \frac{1}{137}$ è la costante di struttura fine a basse energie (massa dell'elettrone). Notò che c'era un problema. Idealmente, mettendosi ad energie sufficientemente grandi (10^{34} GeV), si potrebbe arrivare a valori di $\alpha(s)$ maggiori di 1; ciò renderebbe la serie divergente. Ad energie molto alte i diagrammi di Feynman non si possono usare; fortunatamente non si conoscono fenomeni così energetici: l'elettrodinamica quantistica si salva. Lo stesso concetto si applica alla cromodinamica quantistica per calcolare la costante di struttura fine delle interazioni forti. Si suppose che esistesse un'energia μ tale che $\alpha_S(\mu) < 1$ fosse sufficientemente piccola. In un intorno di quella energia si può fare il calcolo che ha fatto Landau. La grande differenza è che stavolta c'è un più a denominatore invece di un meno: è monotona decrescente invece che crescente. La formula di Gross-Politzer-Wilczek mostra che, al crescere dell'energia, le interazioni forti si attenuano. Questa proprietà è detta *libertà asintotica*, perché i quark ad alte energie non risentono più dell'interazione forte e si trasformano in particelle libere. Alpha strong è stata misurata da LEP per energie pari alla massa della Z^0 (91 GeV), per cui vale circa 1/9. Grazie a questo si stabilì che $\alpha_S \rightarrow 1$ quando l'energia scende sotto $\Lambda_{QCD} \simeq 300$ MeV.

A.11 Congettura di confinamento

Se da un qualche processo viene emesso un quark energetico, perderà energia per l'analogo del frenamento radiativo: invece di emettere fotoni emette gluoni. Dopo aver prodotto un gluone la sua energia diminuisce, che però implica un aumento di α_S (vedere domanda A.10 su libertà asintotica). Al crescere di alpha strong la probabilità di emettere un altro gluone cresce (aumenta l'elemento di matrice, quindi la sezione d'urto). Un quark entra in un circolo vizioso: più diminuisce l'energia più sono emessi facilmente i gluoni. Quando l'energia diventa troppo piccola si entra nella regione di *adronizzazione*: non sappiamo che succede. Sicuramente sappiamo che ad un certo punto la cosa si deve fermare: prima o poi l'energia finisce. La cosa più probabile che avvenga è che gli unici quark a sopravvivere siano stati legati di quark con cariche di colore nulle; insomma: i quark si mettono insieme ad annullare la carica. La congettura di confinamento afferma: Tutti gli stati finali delle interazioni forti sono stati legati di quark o di gluoni privi di carica e di colore, nonché invarianti per trasformazione di $SU(3)$ sul colore. Questi stati sono detti singoletti di colore.

Non si è ancora trovata una soluzione analitica del problema dell'adronizzazione, per questo è una congettura. Nonostante ciò, consente di risalire a tutte le particelle (singoletti di colore) che sono stati legati di quark.

A.12 Probabilità che elicità coincida con la chiralità

L'elicità è un'invariante di Lorentz solo per particelle massless. Il neutrino ha una massa molto piccola, perciò può raggiungere $\beta \simeq 1 = 1 - \varepsilon$. Tutti gli osservatori che si muovono con un β compreso tra -1 e $1 - \varepsilon$ concorderanno con la misura dell'elicità del neutrino. Tuttavia, gli osservatori che si muovono a velocità comprese tra $1 - \varepsilon$ e 1 vedranno il segno dell'elicità invertito.

A questo punto s'introduce una nuova osservabile fisica: la chiralità. Essa avrà le caratteristiche seguenti:

- è Lorentz-invariante
- comunica che la maggioranza degli osservatori veda il neutrino come LH
- agendo su una particella massless, coincide con l'elicità.

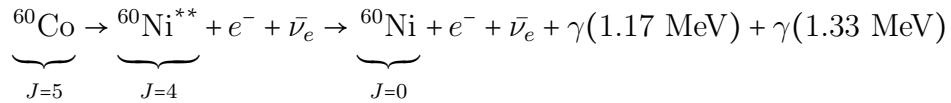
In generale, per particelle prive di massa l'elicità coincide con la chiralità moltiplicata per il modulo dello spin. Utilizzando l'equazione di Dirac si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema A.1

La probabilità che una particella con massa a riposo m abbia chiralità *discorde* dall'elicità è pari a $1 - \beta$.

A.13 Esperimento Wu - violazione parità int. deboli

L'esperimento di Chien-Shiung Wu, ideato con Lee e Yang, dimostrò la violazione della parità nei decadimenti beta. Si basa un decadimento ben conosciuto del ^{60}Co in uno stato eccitato del ^{60}Ni , che a sua volta decade per emissione di fotoni:



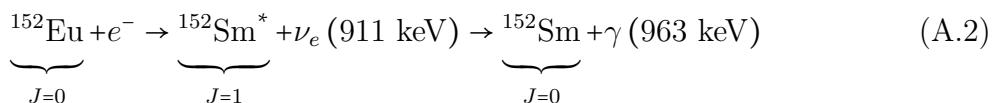
I nuclei di cobalto-60 erano raffreddati a circa lo zero assoluto e allineati in un campo magnetico uniforme; la bassa temperatura era necessaria affinché l'agitazione termica non rovinasse la polarizzazione nucleare. La tecnica di raffreddamento utilizzata è la magnetizzazione adiabatica: usarono un cristallo (CMN) che diminuisce la sua entropia per polarizzazione. Se si ordinano i suoi spin atomici cede calore; raggiunsero i 10 mK per circa 5 minuti.

I raggi gamma sono fotoni, e il loro rilascio dai nuclei di nichel-60 è un processo elettromagnetico (EM). Questo è importante perché è noto che l'interazione EM conservi la parità. Quindi, la distribuzione dei raggi gamma emessi è servita come controllo della polarizzazione degli elettroni emessi tramite l'interazione debole. Se gli elettroni fossero

sempre visti emessi nella stessa direzione e nella stessa proporzione dei raggi gamma, sarebbe vera la conservazione-P. Se ci fosse una direzione preferita di decadimento, ovvero, se la distribuzione degli elettroni non seguisse la distribuzione dei raggi gamma, allora ci sarebbe la violazione-P. La Wu invece osserva che il rate di elettroni è maggiore per elettroni con spin antiparallelo (LH). Sappiamo infatti, dalla teoria V-A, che gli antineutrini interagiscono colla materia se sono RH. e^- e $\bar{\nu}$ sono emessi in versi opposti per conservazione della quantità di moto, ma hanno spin concordi per la conservazione dello spin: $J_i = 5; J_f = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. È quindi chiaro che gli elettroni LH osservati sono di meno; la parità è violata.

A.14 Riassorbimento del fotone Samario

La cattura elettronica di un nucleo di europio-152, che successivamente decade in uno stato eccitato del samario-152 emettendo un neutrino per conservazione del numero leptonico.



Il gamma emesso per diseccitazione del samario può essere riassorbito in un caso particolare: se viene emesso nella direzione del volo.

A.15 Goldhaber - chiralità del neutrino

L'obiettivo era misurare l'elicità del neutrino prodotto nel decadimento per cattura elettronica ($s = 1/2$) dall'europio-152 ($J = 0$). La sorgente era posizionata su una piattaforma di ferro magnetizzato, che selezionava l'elicità dei fotoni emessi dal samario ($J = 1$). Il campo magnetico agiva sulla polarizzazione degli elettroni: quando questi erano allineati in direzione opposta allo spin di un fotone la sezione d'urto per effetto fotoelettrico cresceva, diminuendo la quantità di fotoni emessi con quello spin. In questo caso, si cercava di ridurre la quantità di fotoni RH.

L'europio ($J = 0$) cattura un e^- ($s = 1/2$) e decade (due corpi) in samario ($J = 1$) e un neutrino ($s = 1/2$). Entrambi i prodotti sono LH (o RH) e sono emessi uno opposto all'altro. Il fotone più energetico, che permette il riassorbimento, è emesso concorde al samario ed ha la medesima elicità LH (o RH), che è la stessa anche del neutrino. Per misurare l'elicità dei fotoni riassorbiti si varia il campo magnetico polarizzatore e si contano i fotoni. È stato verificato che sono di più quando riduco gli RH: quindi i fotoni sono emessi LH, quindi i neutrini sono LH.

A.16 Modello a 2 quark

I singoletti di colore si chiamano *adroni*. Nell'approssimazione a due quark si assume che esistano solamente quark up e down, che la loro massa sia uguale e pari a zero. La simmetria che ne genera è un caso particolare di quella di flavor: i due quark vengono identificati dall'isospin come se fossero due suoi autostati:

$$\begin{aligned} up : |+\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ down : |-\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Essendoci solo due flavor il gruppo $SU(2)$ delle matrici di flavor 2x2 è isomorfo a quello delle matrici di spin $SO(3)$. Quindi si può implementare come lo spin tradizionale: è il segno di I_z ad identificare il flavor del quark.

Barioni a 2 quark

I barioni sono adroni costituiti da un tripletto di quark, come neutrone e protone. Se si combinano gli isospin di tre quark $| \pm \rangle \otimes | \pm \rangle \otimes | \pm \rangle$ si ottengono i singoletti di colore che descrivono i barioni. Dal momento che si combinano tre isospin $1/2$ si potranno ottenere stati finali con spin $1/2$ o $3/2$. Quelli con $1/2$ sono protone e neutrone, gli altri sono le Delta.

Mesoni a 2 quark

I mesoni sono adroni costituiti da un quark e un antiquark, ad esempio i pioni:

- $\pi^+ = u\bar{d}$
- $\pi^- = \bar{u}d$
- $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}u\bar{d} + \bar{u}d$

Due quark di isospin $1/2$ combinano a dare 4 stati: uno di singoletto e tre di tripletto. La stessa cosa succede per gli spin. Siccome non c'è bisogno di antisimmetrizzare, come invece va fatto per i barioni, gli stati finali saranno $4+4=8$: esistono 8 mesoni nel modello a due quark.

A.17 Conservazione del numero barionico

Il numero *barionico* è un numero quantico additivo che vale $1/3$ per i quark, $-1/3$ per gli antiquark e 0 per tutte le altre particelle. Sostanzialmente, funge da contatore per i quark. Viene chiamato numero barionico siccome i barioni, composti da 3 quark, hanno numero

pari a 1. I mesoni - composti da un quark e un antiquark - hanno numero barionico pari a 0.

Questa conservazione è una simmetria caratteristica delle interazioni deboli. Visto che il numero barionico si deve conservare, è immediato dedurre che le interazioni deboli lasciano inalterato il numero di quark nei due stati iniziale e finale. L'unica cosa che possono fare, a dirla tutta, è creare una coppia quark/antiquark.

A.18 Decadimento a 2 corpi

La forma più generale di decadimento è $a \rightarrow b + c$. Siccome vale la conservazione del quadrimomento si ha che $p_a^\mu = p_b^\mu + p_c^\mu$. Ci si mette nel rest frame della particella padre: $p_a^\mu = (M_a, 0, 0, 0)$. La prima variabile di Mandelstam è un'invariante di Lorentz e si deve conservare:

$$(p_a^\mu)^2 = M_a^2 = (p_b^\mu)^2 + (p_c^\mu)^2 + 2p_b^\mu p_c^\mu$$

La norma secondo Minkowski di p^μ è sempre uguale alla massa a riposo, il quadrivettore p_a^μ ha solo un'entrata, quindi invece che esplicitare a esplicito uno dei due prodotti:

$$\begin{aligned} (p_b^\mu)^2 &= (p_a^\mu - p_c^\mu)^2 = (p_a^\mu)^2 + (p_c^\mu)^2 - 2p_a^\mu p_c^\mu \\ (p_b^\mu)^2 &= (M_b)^2 = (M_a)^2 + (M_c)^2 - 2M_a E_c \end{aligned}$$

Da questa si ricava E_c ; stessa cosa si può fare per ricavare E_b :

$$E_c = \frac{(M_b)^2 + (M_c)^2 - (M_a)^2}{2M_a}$$

Le energie dei prodotti sono univocamente determinate; inoltre va rispettata la condizione: $m_a \geq m_b + m_c$

A.19 Perché $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \gg \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu$?

Per la conservazione dell'energia, tra i possibili prodotti del π^+ vi sono solamente particelle con massa minore a quella del π^+ . Le uniche sono l'elettrone e il muone (e le relative anti-particelle), quindi solo due decadimenti sono consentiti in cui carica e il numero leptonico si conservano:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{A.3}$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \tag{A.4}$$

Il decadimento in positrone però è quasi totalmente soppresso. Inizialmente verrebbe da pensare che il decadimento in e^+ sia favorito, visto che la massa del muone è 200 volte

quella del positrone.

Grazie al modello a due quark sappiamo che il π^+ è un mesone di spin 0. Grazie alla teoria V-A sappiamo che il neutrino ($s=1/2$) è LH, mentre antimuone e positrone sono RH ($s=1/2$). Tuttavia, per conservazione del momento lineare, i prodotti di decadimento devono essere scagliati in versi opposti: non c'è conservazione del momento angolare, non dovrebbe accadere nessuno dei due decadimenti.

$$NO: \pi^+ \rightarrow e^+/\mu^+ \rightleftharpoons \nu_e$$

Se elicità e chiralità fossero la stessa cosa, il pion sarebbe stabile e non decadrebbe mai. Tuttavia, le particelle prese in esame sono tutte massive, quindi esiste una probabilità che la loro chiralità non coincida con l'elicità. Questa probabilità dipende dal beta relativistico:

$$p = 1 - \beta$$

Proprio in virtù della sua maggiore massa, l'antimuone ha una probabilità maggiore di avere elicità LH. Tecnicamente allora anche il decadimento in positrone non è impossibile: soltanto molto improbabile. Il rapporto tra i branching ratio dei due è:

$$\frac{BR(e^+)}{BR(\mu^+)} \simeq 10^{-4}$$

A.20 Sezione d'urto

La quantità principale che descrive lo scattering è la *sezione d'urto*. Si può dare la definizione di *sezione d'urto differenziale* e di *sezione d'urto totale*.

La *sezione d'urto differenziale* è il rapporto, per unità di tempo e di angolo solido Ω , tra numero di particelle scatterate e numero totale di particelle incidenti. La *sezione d'urto totale* viene indicata con σ ed è definita come:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

L'unità di misura della sezione d'urto nel sistema internazionale è m^2 . In sistema naturale invece è eV^{-2} . Tuttavia quella più utilizzata in particelle è il *barn* e viene indicato con b (1 b = 1 fm^2). 1 barn è una quantità enorme, solitamente si lavora con i suoi sottomultipli (1 $\text{GeV}^{-2} \simeq 0.39 \text{ mb}$).

Appendice B

Fisica Nucleare - Gironi

B.1 Attività, legge di decadimento, vari equilibri

Un decadimento radioattivo è un processo attraverso cui un nucleo perde energia. La legge di decadimento segue ipotesi della distribuzione di Poisson, che sono tre:

1. Gli eventi sono indipendenti fra loro
2. La frequenza media λ degli eventi è costante
3. La probabilità che in un tempo $t \ll \lambda$ avvenga più di un evento è nulla

La legge di decadimento, nel caso di singolo isotopo, è:

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

un dato di particolare importanza è il tempo di dimezzamento:

$$\tau_{1/2} \text{ t.c. } N(\tau_{1/2}) = \frac{N(0)}{2}; \quad \tau_{1/2} = \tau \ln 2$$

L'attività di una sostanza è definita come il numero di decadimenti al secondo:

$$A(t) = \lambda N(t) = \frac{N(t)}{\tau}$$

Quando i rapporti tra numero di nuclei padre e numero di nuclei figli non dipende dal tempo si dice *equilibrio transiente*.

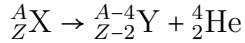
$$\frac{d}{dt} \frac{N_k(t)}{N_s(t)} = 0$$

Quando l'attività è la stessa per ogni nuclide si dice *equilibrio secolare*. Si raggiunge quando la vita media del padre è così grande che l'attività del figlio, una volta raggiunto l'equilibrio, rimane costante ed uguale all'attività del padre.

B.2 Decadimento alfa

Il decadimento α è tipico dei nuclei pesanti, con $A > 200$. Le particelle α sono in realtà nuclei di elio-4, particolarmente stabili poiché possiedono due numeri magici: 2p e 2n.

Schema



Cinematica

Ci si pone nel SdR del nucleo padre. Nuclei pesanti significa non relativistici. Per determinare l'energia convertita in cinetica dei prodotti è utile definire il *Q-valore* cioè la differenza tra le masse a riposo di reagenti e prodotti. Partiamo scrivendo le leggi di conservazione per urti elastici:

$$\begin{cases} M_X c^2 = M_Y c^2 + K_Y + M_\alpha c^2 + K_\alpha \\ p_x = 0 = p_Y + p_\alpha \implies p_Y = p = -p_\alpha \end{cases}$$

Con $K_Y = \frac{p_Y}{2M_Y}$ e $K_\alpha = \frac{p_\alpha}{2M_\alpha}$:

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = \frac{p_Y}{2M_Y} + \frac{p_\alpha}{2M_\alpha} = \frac{p^2}{2M_\alpha} \left[1 - \frac{M_\alpha}{M_Y} \right]$$

Considerando che $\frac{M_\alpha}{M_Y} \sim \frac{4}{A-4}$, praticamente tutto il Q-valore della transizione va in energia cinetica della α , praticamente nullo è invece il rinculo nucleare.

Soglia di decadimento (di instabilità α)

Un decadimento può avvenire spontaneamente solo se lo stato finale è a energia minore: il Q valore di transizione dev'essere maggiore di zero. Ciò è possibile solo se l'energia di legame per nucleone ($\overline{BE} = BE/A$) aumenta. Sicuramente allora il numero di massa A dev'essere maggiore di 60¹. Poiché il numero di nucleoni non cambia, la differenza tra le masse è in realtà la differenza fra le energie di legame (che sono intrinsecamente negative):

$$Q_\alpha = M_X - M_Y - M_\alpha = -A\overline{BE}_X + (A-4)\overline{BE}_Y + 4\overline{BE}_\alpha > 0$$

Da cui:

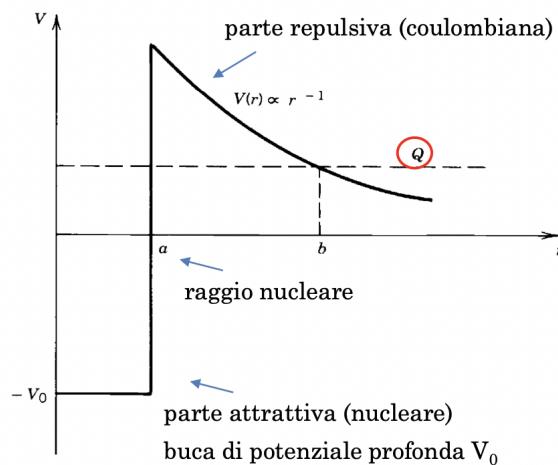
$$\begin{aligned} Q_\alpha &= A(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_X) - 4(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_\alpha) > 0 \\ &\implies A(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_X) > 4(\overline{BE}_Y - \overline{BE}_\alpha) \end{aligned}$$

¹Si passa da un nuclide A ad uno $A-4$, che può avere energia per nucleone maggiore solo se il padre si trova a destra della massima \overline{BE}

L'energia di legame per nucleone della particella α è nota ed è minore (in valore assoluto) a quella di qualsiasi nuclide con $A > 60$ (vedere figura 8.6, quindi il secondo termine è sicuramente positivo. Servirà un A grande per rispettare la condizione. Si può determinare, attraverso la formula semi-empirica di massa, che ciò si verifica per $A > 200$.

Modello teorico: potenziale di Gamow

Si assume che la α sia già nel nucleo, prima di essere emessa, confinata da un potenziale centrale $V(r)$. Si tratta di una barriera finita di potenziale, che al di fuori del raggio atomico a diventa il potenziale elettrostatico.



Classicamente non potrebbe uscirne, quantisticamente invece subentra l'effetto tunnel. La costante di decadimento λ è il prodotto tra frequenza media di decadimento e probabilità dello stesso. La probabilità non è altro che il coefficiente di trasmissione T ($2 \cdot 10^{25}$). La frequenza invece si può stimare semplicemente. Se v_α è la velocità della α e a il raggio nucleare:

$$f \simeq \frac{v_\alpha}{a}$$

Il raggio atomico è nell'ordine del *femtometro*, mentre la velocità si ricava dall'energia cinetica, il cui valore massimo è la differenza tra Q -valore e potenziale di legame:

$$v_\alpha = \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2(V_0 + Q)}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^7 \text{ m/s}$$

In cui si è inserito un potenziale tipico $V_0 = 35$ MeV e un $Q = 5$ MeV. Da ciò si ricava una frequenza attorno di $f \simeq 6 \cdot 10^{21}$ Hz, quindi $\lambda \simeq 10^{-3}$ Hz. Problemi:

- Le α pre-esistono nel nucleo?
- La buca di potenziale è arbitraria
- Non spiega i decadimenti su stati eccitati

Regole di selezione α

La particella alfa è un nucleo di elio, composto da due coppie di fermioni: lo spin totale è nullo. Il momento angolare totale coincide con quello orbitale, indicato con ℓ_α . La variazione di parità dovuta ad un decadimento è $(-1)^{\ell_\alpha}$. Chiaramente, se I_i e I_f sono i momenti totali iniziale e finale, dovrà essere: $|I_i - I_f| \leq \ell_\alpha \leq I_i + I_f$. Ad esempio:

- $0^+ \rightarrow 2^+$ permesso
- $0^+ \rightarrow 2^-$ proibito
- $0^+ \rightarrow 3^+$ proibito
- $0^+ \rightarrow 3^-$ permesso

B.3 Modelli nucleari, con qualche ordine di grandezza

Non esiste un unico modello capace di spiegare ogni caratteristica del nucleo. I motivi principali sono:

- non esiste un unico centro di attrazione
- non si conosce la forma analitica del potenziale d'interazione nucleare

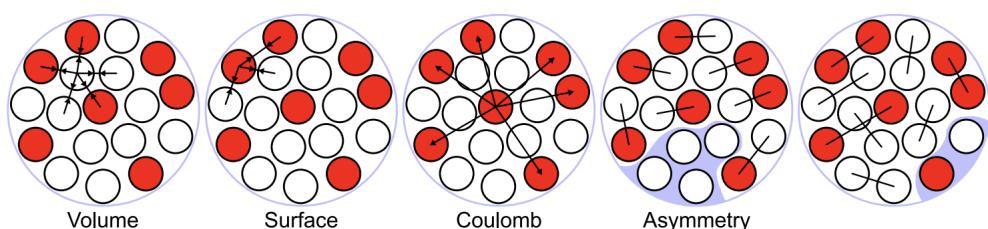
Per questo, a seconda della proprietà studiata, si adotta un modello particolare, che sia in grado di prevedere le osservazioni empiriche di quel determinato fenomeno.

Modello a goccia di liquido

Ideato nel 1939 per spiegare il difetto di massa successivo ad una fissione nucleare. L'assorbimento di un neutrone da parte del nucleo causa un eccesso di energia, che determina un moto oscillatorio. Questo causa un allungamento del nucleo finché questo non si rompe. La formula semi-empirica di massa predice la massa nucleare in funzione di diversi coefficienti determinati sperimentalmente. $M_n = 939.6$ MeV e $M_p = 938.3$ MeV, ma la massa di un nucleo è diversa dalla semplice somma delle masse dei nucleoni:

$$M \neq NM_n + ZM_p; \quad N = A - Z$$

Va considerata l'energia di legame BE . Vediamo i termini che concorrono alla sua determinazione:



Sperimentalmente si ricavano i seguenti valori:

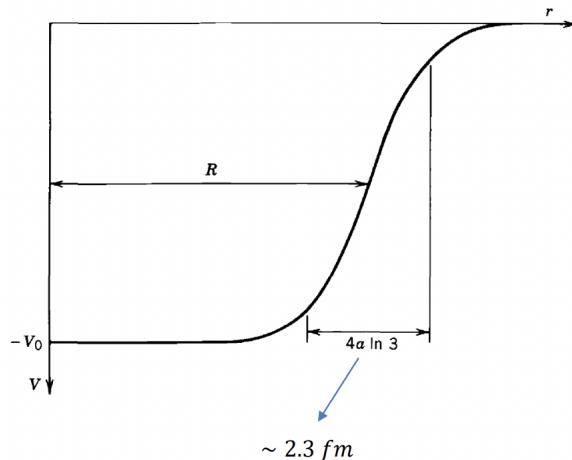
- $a_1 = 15.5 \text{ MeV}$
- $a_2 = 16.8 \text{ MeV}$
- $a_3 = 0.72 \text{ MeV}$
- $a_4 = 23.0 \text{ MeV}$
- $a_5 = 34.0 \text{ MeV}$

La stima del raggio nucleare è in ottimo accordo con i dati sperimentali $r_0 = 1.237 \text{ fm}$. La precisione delle previsioni è di circa 2 MeV. L'energia di legame per nucleone varia tra gli 0 e i 9 MeV.

Modello a *shell*

Il modello a shell nasce per spiegare l'esistenza dei *numeri magici*. In questo caso si teorizza un possibile potenziale centrale. Buca di potenziale infinita non va bene, altrimenti non si spiegherebbero i decadimenti; stessa cosa vale per oscillatore armonico, che ha il pregio di avere una crescita meno repentina. Il potenziale scelto è quello di Woods-Saxon, al quale va aggiunto il contributo di repulsione coulombiana fra protoni:

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{(r-R)}{a}}}$$



Non basta. Nel 1949 s'introduce un'interazione spin-orbita che fa tornare i conti:

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_{SO}(\vec{L} \cdot \vec{S})$$

B.4. VALLE DI STABILITÀ E DOVE ARRIVA (RAGGIUNTA CON DEC. BETA E CATTURA ELETTRONICA)

Ogni livello j si divide in due sottolivelli. n e p sono fermioni (spin 1/2):

$$E_{SO} \propto \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) = \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right)$$

Siccome $j = \ell \pm \frac{1}{2}$:

$$E_{SO} \propto \begin{cases} \frac{1}{2} \ell \hbar^2 \\ \frac{1}{2} (\ell + 1) \hbar^2 \end{cases} \implies \Delta E_{SO} = \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \hbar^2$$

Lo split dei livelli energetici causato dall'interazione spin-orbita spiega i numeri magici; è riuscito anche a prevederne uno nuovo: il 184. ΔE_{SO} cresce al crescere di ℓ e genera scavalcamenti rispetto all'ordinamento energetico originario. Tuttavia il modello a shell non spiega il fenomeno del *pairing*.

B.4 Valle di stabilità e dove arriva (raggiunta con dec. Beta e cattura elettronica)

La valle di stabilità è quella zona, all'interno della tavola dei nuclidi, in cui si trovano gli isotopi stabili (in nero). È possibile prevedere la stabilità di un isotopo a partire dalla formula semi-empirica di massa $M(Z, A)$. L'approssimazione però vale se non si considera il termine di *pairing*, perciò solo per nuclidi con A dispari. Si calcola la derivata in Z : $\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z}$ e se ne cerca il minimo. Questo corrisponde al numero atomico che minimizza l'energia di legame, per un determinato numero di massa A .

$$Z_{min} \simeq \frac{A}{2 + 0.015A^{\frac{2}{3}}}$$

Da ciò si possono trarre due conclusioni:

- per A piccolo, $Z_{min} \simeq A/2$
- per A grande, $Z_{min} < A/2$

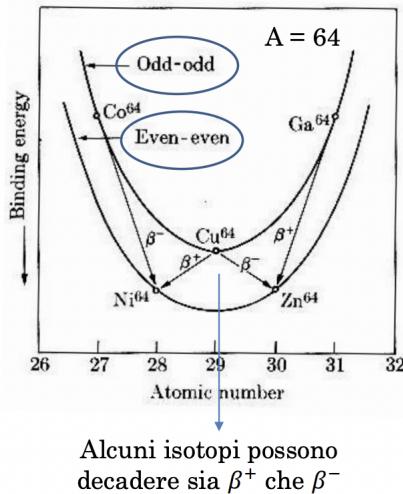
Per nuclei pesanti $Z_{min} \simeq 0.4$, infatti la valle di stabilità tende, al crescere di A , a scendere sotto la bisettrice della tavola dei nuclidi.

B.5 A pari vs A dispari (due parabole)

Nella domanda B.4 si sono considerati soltanto i nuclidi con numero di massa dispari. Se si considerano quelli con A pari occorre studiare il termine di *pairing*.

$$\begin{cases} -a_5 A^{\frac{3}{4}} & \text{pari-pari} \\ a_5 A^{\frac{3}{4}} & \text{dispari-dispari} \end{cases}$$

Per ogni A fissato ci sono due parabole (split dei livelli energetici) $\frac{\partial M(Z,A)}{\partial Z}$: una per i nuclidi pari-pari (minore energia) e una per quelli dispari-dispari.



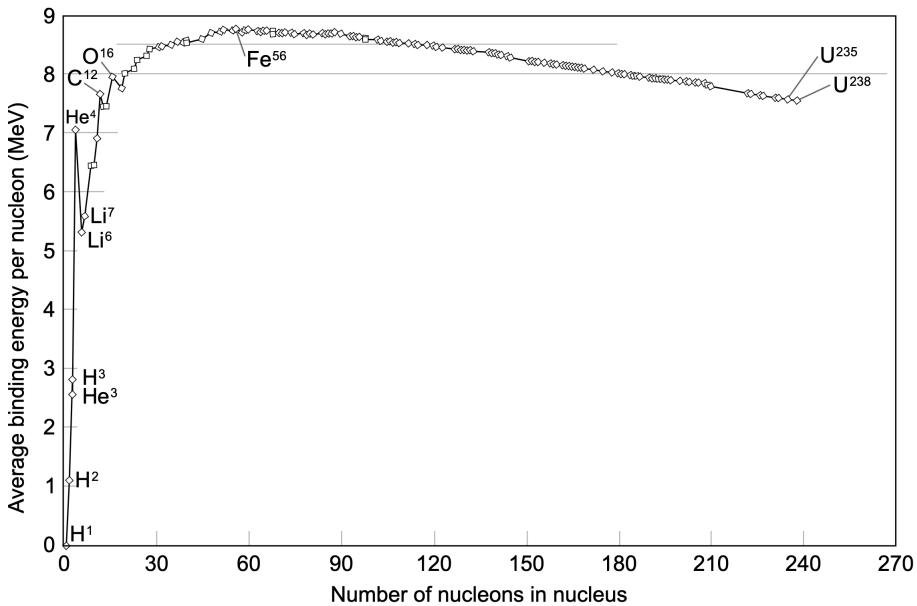
Grazie a questo si possono spiegare il beta doppio e la capacità di alcuni isotopi di decadere sia β^+ che β^- .

B.6 Cos'è l'energia di legame?

L'energia di legame per nucleone è l'energia necessaria a strappare un nucleone dal nucleo. Ci si rende conto che la massa dello stato legato di due o più nucleoni è minore della semplice somma delle masse. Il difetto di massa è proprio dovuto all'energia di legame che caratterizza lo stato. L'energia di legame del deuterone ($|pn\rangle$) è di circa 2.2 MeV.

B.7 Grafico E_b/A e premesse teoriche

L'energia di legame è strettamente legata al numero di massa A , per cui risulta utile studiare l'energia di legame media per nucleone E_b/A :



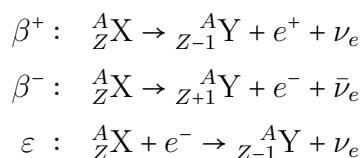
- Maggiore è E_b/A , più stabile il nucleo
- Cresce fino ad $A = 60$, quindi diminuisce lentamente

Il modello teorico che fornisce la formula per calcolare l'energia di legame è quello a *goccia di liquido*. Per il dettaglio vedere la domanda B.3.

B.8 Decadimento beta

A differenza di α , tutti gli isotopi possono decadere beta. I Q-valori di un decadimento alpha sono tipicamente tra i 4 e i 10 MeV, quelli del β hanno uno spettro molto più ampio: si va dai 2.5 keV del ^{187}Re , ai 13.4 MeV del ^{12}Be . Generalmente un nuclide decade β^+ se ha un eccesso di protoni e β^- se ha un eccesso di neutroni. Si intuisce che non è un decadimento a due corpi perché l'energia cinetica degli elettroni prodotti non è ben definita, ma è descritta da uno spettro continuo.

Schemi β



Quando A è dispari ho un solo tipo di decadimento β . Se A è pari ho due parabole (dispari-dispari e pari-pari), grazie cui si spiega la capacità di alcuni isotopi di fare entrambi.

Cinematica β^- per neutrone libero

$$\beta^- : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Calcolo il Q-valore di transizione:

$$Q = (m_n - m_p - m_e - m_\nu)c^2 = K_p + K_e + K_\nu \simeq 0.782 \text{ MeV} - m_\nu c^2$$

Poiché il protone ha massa circa 2000 volte maggiore dell'elettrone, il suo rinculo sarà circa trascurabile. Allora, misurando l'energia *massima* dell'elettrone emesso, posso risalire al limite superiore della massa del $\bar{\nu}$. Una prima stima fu $E_{max}^{e^-} = 0.782 \text{ MeV} \pm 13 \text{ keV}$ si può concludere che $m_\nu \leq 13 \text{ keV}$. Per migliorare la precisione sul limite di massa occorrono strumenti sempre più precisi e performanti, in grado di misurare con sensibilità altissime (piccoli errori) l'energia dell'elettrone.

Cinematica β^- per nucleo generico

$$\beta^- : {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A Y + e^- + \bar{\nu}_e$$

La massa del neutrino è certamente più piccola di tutte le altre: la trascurro. Si considera la massa atomica (m) che tiene conto delle energie di legame elettroniche (B_i), a differenza della massa nucleare (m_N).

$$m({}^A X) = m_N({}^A X) + Zm_e - \sum_{i=1}^Z B_i \implies m_N({}^A X) = m({}^A X) - Zm_e + \sum_{i=1}^Z B_i$$

Il Q-valore della transizione è:

$$Q_{\beta^-} = [m_N({}^A_Z X) - m_N({}_{Z+1}^A Y) - m_e] c^2$$

Riscrivo in funzione della massa atomica:

$$\frac{1}{c^2} Q_{\beta^-} = [m({}^A_Z X) - Zm_e] - [m({}_{Z+1}^A Y) - (Z+1)m_e] - m_e + \sum_{i=1}^{Z+1} B_i - \sum_{i=1}^Z B_i$$

Semplificando m_e e trascurando le energie di legame si ottiene la semplice differenza tra le masse atomiche, che viene convertita in cinetica di elettrone e neutrino:

$$Q_{\beta^-} = [m({}^A_Z X) - m({}_{Z+1}^A Y)] c^2 = K_{e^-} + K_{\bar{\nu}}$$

Nel β^+ non si semplificano gli elettroni, perciò la differenza di massa tra padre e figlio dev'essere maggiore della massa di due elettroni:

$$Q_{\beta^+} = [m({}^A_Z X) - m({}_{Z-1}^A Y) - 2m_e] c^2$$

Modello teorico β : teoria di Fermi

Si può usare la regola d'oro di Fermi per spiegare il decadimento beta in termini perturbativi. Ci sono due cose da determinare: l'elemento di matrice (V_{fi}) e la densità degli stati finali ($\rho(E_f)$).

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}^2| \rho(E_f)$$

Elemento di matrice: l'elemento di matrice è ottenuto considerando elettrone e neutrino come particelle libere, quindi con funzione d'onda:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (\text{B.1})$$

Consideriamo l'approssimazione in cui $pr \ll 1$; allora posso espandere in serie l'esponenziale e considerando solo il primo termine (costante) otteniamo che le funzioni d'onda di neutrino ed elettrone sono costanti e pari a $\frac{1}{\sqrt{V}}$

Allora l'elemento di matrice nucleare viene definito in questo modo:

$$\mathcal{M}_{fi} = V_{fi} \frac{V}{g} = \int \bar{\psi}_f O_X \psi_i \, dV \quad (\text{B.2})$$

Densità degli stati finali: la densità degli stati finali determina la forma dello spettro beta; per calcolarla dobbiamo conoscere il numero di stati finali accessibili. Indichiamo con p il momento dell'elettrone e con q il momento del neutrino. Il numero di stati finali per l'elettrone, nello spazio dei momenti, in coordinate sferiche, nell'intervallo $[p, p + dp]$ vale:

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{V}{g} \quad (\text{B.3})$$

analogamente per il neutrino;

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq}{h^3} \frac{V}{g} \quad (\text{B.4})$$

Quindi il numero di stati finali che hanno il momento corretto sia per l'elettrone che per il neutrino è dato dal prodotto:

$$d^2n = dn_e dn_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 q^2 \, dp dq}{h^6} \quad (\text{B.5})$$

B.9 Regole di transizione decadimento beta

Decadimenti β permessi

Elettrone e neutrino hanno spin $s_e = s_\nu = \frac{1}{2}$. Si hanno due possibili combinazioni che, insieme alle condizioni sulla parità, costituiscono le condizioni per le transizioni permesse:

- antiparalleli: $\Delta I = 0$, transizioni di Fermi
- paralleli: $\Delta I = 0 \vee 1$, transizioni di Gamow-Teller

Inoltre, se nessuna delle due particelle ha momento angolare \vec{L} , la parità non deve cambiare: $\Delta \mathbf{P} = (-1)^\ell = (-1)^0$.

Decadimenti β proibiti

Le transizioni con $\ell \neq 0$ sono definite *proibite*, anche se in realtà sono semplicemente meno probabili. Nella teoria di Fermi, le transizioni proibite sono descritte dai termini di ordine superiore che compaiono nello sviluppo in Taylor delle onde piane (funzioni d'onda di particella libera). In breve: oltre agli spin ($s_e = s_\nu$) va considerata ℓ , perciò ΔI sarà data da una combinazione di tutti i tre termini. L'ordine della transizione proibita è dato dal valore di ℓ : si dirà ℓ -esima proibita. L'ampiezza di probabilità diminuisce di un fattore 100 per ogni ordine superiore di ℓ .

B.10 Soglie del decadimento beta

Vedere la domanda B.8 per una descrizione più approfondita.

- β^- : massa dell'atomo padre maggiore del figlio
- β^+ : differenza tra masse atomiche maggiore di $2m_e$

B.11 Come uso i decadimenti beta per misurare la massa neutrino

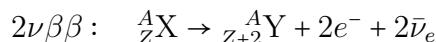
In seguito ad un decadimento β vengono emesse tre particelle: le energie dei prodotti non sono ben definite. Poiché il protone ha massa circa 2000 volte maggiore dell'elettrone, il rinculo del nucleo sarà trascurabile. Si può ragionevolmente supporre che il Q-valore di transizione sia convertito completamente in cinetica di elettrone e neutrone. Allora, misurando l'energia *massima* dell'elettrone emesso, posso risalire al limite superiore della massa del $\bar{\nu}$. Una prima stima fu $E_{max}^{e^-} = 0.782 \text{ MeV} \pm 13 \text{ keV}$: all'interno di quei 13 keV non sappiamo nulla, la massa del neutrino dev'essere considerata $m_\nu \leq 13 \text{ keV}$. Se però riuscissimo a migliorare la precisione dello strumento, riducendone l'errore, il limite di massa del neutrino sarà ridimensionato. Occorrono perciò strumenti sempre più precisi e performanti, in grado di misurare con sensibilità altissime (piccoli errori) l'energia dell'elettrone.

B.12 Cos'è l'end-point, limite superiore massa del neutrino

L'esperimento KATRIN ha stabilito un limite superiore sulla massa del neutrino di 0.8 eV. L'end-point cinematico del decadimento β^- è il punto in cui l'energia traferita all'elettrone è massima, cioè pari alla differenza netta tra le masse di neutrone e protone ($E_{max} \simeq 1.3$ MeV). Le distorsioni dello spettro in quella regione mettono in evidenza la massa del neutrino.

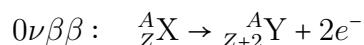
B.13 Doppio beta senza neutrini

Quando il β è *proibito* - cioè poco probabile - o soppresso dalle regole di selezione, è possibile osservare il doppio beta:



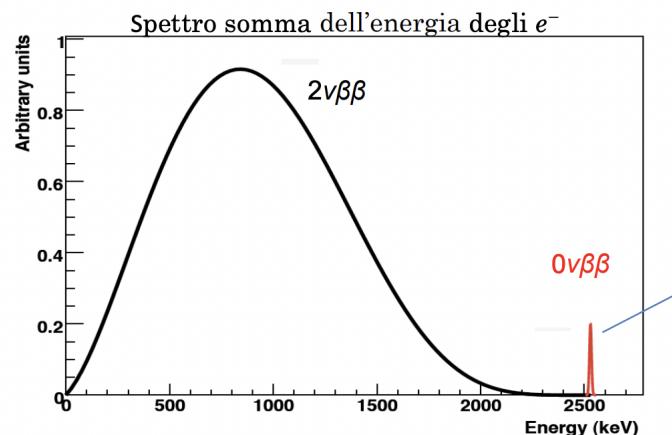
Soltanto i nuclei pari-pari possono fare due volte di seguito il β^- . Ad esempio succede per evitare β singoli con elevate differenze di momento angolare, quindi molto poco probabili.

Il doppio beta senza neutrini è un decadimento mai osservato, che avrebbe svariate implicazioni a livello teorico.



- Viola la conservazione del numero leptonico: non sarebbe una simmetria della natura
- Il neutrino dovrebbe essere una particella *massless*
- Il neutrino dovrebbe essere una particella di Majorana ($\nu = \bar{\nu}$)

Per osservarlo si cerca d'individuare un picco (aumento della sezione d'urto) all'interno dello spettro doppio β^- nella regione in cui gli elettroni hanno energia cinetica massima (*end-point*), pari al totale del Q-valore della transizione: $2K_e = Q_{0\nu\beta\beta}$.



B.14 Catene radioattive e radioattività ambientale

La radioattività ambientale può essere schematizzata in questo modo:

- Naturale
 - Radionuclidi fossili (capostipiti)
 - Radionuclidi secondari (prodotti)
- Artificiale
- Cosmica
 - Primari/Diretti
 - Secondari: prodotti post interazione con atmosfera
 - Cosmogenici: nuclidi attivati da raggi cosmici

Naturale

La radioattività naturale è presente ovunque, per via della presenza di radionuclidi. Le tre maggiori catene di decadimento con capostipiti (fossili) ancora 'vivi' sono ^{235}U , ^{238}U e ^{232}Th . Tutte e tre terminano in un isotopo stabile del piombo. Le catene in equilibrio secolare possono essere interrotte da diversi fenomeni. Degni di nota, per quanto riguarda l'uranio-238, sono il discioglimento in acqua del ^{226}Ra e la fuga dalle rocce del ^{222}Rn ($\tau \approx 3$ d) gassoso. Nella catena dell'uranio-235 è presente il ^{219}Rn , che vive meno di un minuto, per cui la fuga è meno probabile. Poiché il torio-232 è il capostipite più longevo, gli isotopi della sua catena hanno un'attività maggiore. È curioso sapere che l'attività di una banana, dovuta al suo contenuto di potassio-40, è di circa 15 Bq: emette γ da 1460 keV. Un altro fatto degno di nota è che il gamma ambientale più energetico è quello a 2615 keV derivante dal decadimento del ^{208}Tl . Esistono gamma con energie maggiori ma hanno basso branching ratio.

Artificiale

La radioattività artificiale è riconducibile ad attività umane, in cui vengono impiegati materiali radioattivi: produzione di energia nucleare, apparecchiature mediche per diagnosi e cure, apparecchiature industriali, attività di ricerca. Esempi degni di nota sono: ^{137}Ce e ^{241}Am . Il cesio-137 è prodotto prevalentemente da attività antropiche: spesso è un campanello d'allarme di attività nucleari artificiali; si tratta del radioisotopo che ha destato preoccupazione riguardo la situazione di Chernobyl. L'americio-241 è spesso utilizzato nei sensori di fumo. Un rivelatore conta costantemente i decadimenti α della sorgente, quando del fumo s'insinua nel dispositivo i conteggi vengono alterati e scatta l'allarme.

Raggi cosmici

I raggi cosmici hanno energie comprese tra i 10^8 e i 10^{20} eV; si ritiene che le sorgenti dei raggi più energetici ($> 10^{19}$) siano extragalattiche. Sotto i tre chilometri d'altitudine si rivelano praticamente solo secondari; al livello del mare c'è circa un muone per palmo della mano al secondo. I muoni hanno un'energia pari circa a 2 GeV, perciò sono dette minimum ionizing particles (MIP). I tipici radionuclidi cosmogenici, prodotti da collisioni di raggi cosmici con isotopi stabili, sono trizio ^3H (12 y), carbonio-14 (5730 y) e berillio-7.

B.15 Perché fissione con ^{235}U

Il motivo risiede nella probabilità di assorbimento neutronico da parte dei nuclei di uranio. La sezione d'urto della fissione di ^{235}U è favorita a basse energie, cioè per neutroni termici: circa 0.025 eV, proprio come l'energia termica kT a temperatura ambiente. Al crescere dell'energia l'uranio-235 privilegia emissioni di γ o protoni, oppure gli scattering elastici. Il discorso è completamente opposto per l'uranio-238, che ha sezioni d'urto di cattura neutronica praticamente nulle prima del MeV. Per neutroni *veloci* (1.5 MeV) la sezione d'urto è massima, ma comunque quasi mille volte più piccola del picco di ^{235}U . Si può riassumere il vantaggio di utilizzare l'isotopo 235 sul 238 con due affermazioni:

- Non c'è necessità di rallentare artificialmente i neutroni
- Le sezioni d'urto di cattura neutronica sono più elevate, quindi la reazione a catena è più facile da mantenere.

Di contro, circa il 99.3% di uranio presente in natura è ^{238}U , mentre il 235 è appena il 0.7%. Generalmente nelle centrali si utilizza uranio con concentrazioni di ^{235}U intorno al 5%, per cui è necessario arricchire il combustibile. Indicativamente, per produrre 1 kg di materiale arricchito a queste concentrazioni sono necessari 12 kg di uranio. La parte di scarto del processo di arricchimento è il cosiddetto *uranio impoverito*.

B.16 Dove modello a goccia sbaglia e che modello si usa

Il modello a goccia non è in grado di descrivere e prevedere i numeri magici, per questo si ricorre al *modello a shell*. Per una descrizione dettagliata del modello a shell vedere B.3

B.17 Decadimento gamma

Quando un nucleo si dissecchia emette dei fotoni gamma. Le energie tipiche del processo sono comprese tra 0.1 e 10 MeV. La tipica vita media di uno stato eccitato è compresa tra

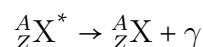
10^{-16} e 10^8 s; quando uno stato eccitato ha vita media maggiore di un decimo di secondo si parla di *stato metastabile*. Ad esempio ^{110m}Ag ha una vita media di 1 anno.

Origine dei fotoni γ

Un nucleo può eccitarsi in diversi modi:

1. assorbimento di γ
2. eccitazione coulombiana (bombardamento con particelle cariche)
3. interazioni fra neutroni (scattering/cattura neutronica)
4. decadimenti α e β su stati eccitati (α tendono al ground state)

Schema γ



Ma spesso una diseccitazione avviene, a sua volta, su uno stato eccitato.

Cinematica γ

L'energia di eccitazione si converte in energia del fotone (E_γ) e in cinetica di rinculo nucleare (K_R).

$$\begin{cases} E_i = E_f + E_\gamma + K_R = E_f + cp_\gamma + \frac{p_R^2}{2M} \\ 0 = p_\gamma + p_R \implies p_\gamma = -p_R \end{cases}$$

Da cui:

$$E_i - E_f = \Delta E = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2}{2M} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

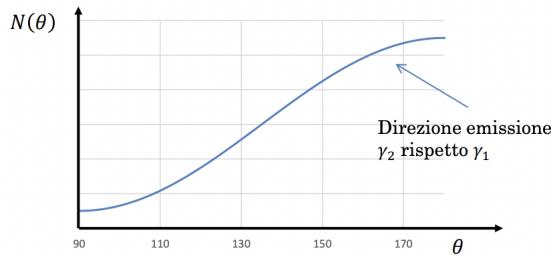
Al primo ordine risulta: $E_\gamma = \Delta E$. Il termine di rinculo nucleare è quasi sempre trascurabile. Grazie a quest'ultima relazione, la spettroscopia γ dà informazioni utili sui livelli energetici nucleari.

Interazione fotone-materia

Vedere domanda A.6 di *subnucleare*.

Direzioni dei fotoni: correlazione angolare

I fotoni *non* sono emessi isotropicamente: ci sono delle direzioni privilegiate. Quando due γ sono emessi a stretto giro, la direzione del secondo è definita da quella del primo. Verifica sperimentale: metto in coincidenza due rivelatori, facendo variare l'angolo tra uno e l'altro e misuro gli eventi correlati. Ci si accorge che i conteggi dipendono dall'angolo:



Ciò può essere spiegato con lo sviluppo in multipoli, poiché sono le interazioni elettromagnetiche a mediare le transizioni tra livelli energetici. I multipoli permessi di ordine più basso dominano e, a parità di ordine, quelli elettrici sono 100 volte più probabili dei magnetici. La parità delle transizioni di ordine L varia come:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M_L) &= (-1)^{L+1} \\ \mathbf{P}(E_L) &= (-1)^L\end{aligned}$$

Regole di selezione γ

Per la conservazione del momento angolare:

$$\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f \implies |I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad L \neq 0$$

Per determinare se la transizione è elettrica o magnetica si usa la conservazione della parità:

Multipolo	E1	M1	E2	M2	E3	M3
L	1	1	2	2	3	3
Variazione di parità	sì	no	no	sì	si	no

B.18 Rinculo del gamma e assorbimento risonante

Quando si studia il riassorbimento dei fotoni gamma non si può trascurare il rinculo nucleare. L'energia del fotone emesse è leggermente minore della differenza tra i livelli energetici: il gamma non può essere riassorbito, a meno che non intervengano ulteriori fattori.

- Indeterminazione di Heisenberg
- Effetto Doppler **termico**

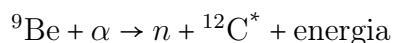
Non bastano, neanche se si 'aiuta' l'effetto doppler scaldando e mettendo in moto la sorgente rispetto al campione assorbente. Ci sono due effetti rilevanti che permettono questo fenomeno.

Effetto Mössbauer

Si tratta di un processo in cui il nucleo si diseccita per emissione γ senza rinculare. Se i nuclei emettitore e assorbitore sono “bloccati” in un reticolo cristallino, il loro rinculo sarà minimo. Quando si va a valutare la conservazione della quantità di moto, il momento trasferito al singolo nucleo è trascurabile, poiché va considerata l’intera massa del cristallo. In altri termini: se l’energia di rinculo non è sufficiente a rompere il legame tra i nuclei, allora è tutto il reticolo che rincula, perciò $E_\gamma = \Delta E$. Sfruttando questo effetto e i precedenti si avrà una probabilità non nulla di riassorbimento.

Effetto Doppler “cinetico”

Se il nucleo padre P decade in uno stato eccitato molto breve del figlio F , il fotone viene emesso mentre F è ancora *in volo*. Se il γ è emesso in verso concorde al prodotto di decadimento è soggetto ad un *blue shift*: la sua energia aumenta ed è in grado di essere riassorbito. Un esempio di questo fenomeno è la cattura di una particella alfa da parte del berillio-9, che produce uno stato eccitato del carbonio-12; questo decade in 61 fs (fs = 10^{-15} s) emettendo un γ da 4.4 MeV.



Per l’esempio del decadimento di europio in samario vedere domanda A.14 di *subnucleare*.

B.19 Definizione del Curie (Ci)

Il curie, simbolo Ci, è un’unità di misura caduta in disuso dell’attività di un radionuclide. 1 Ci è pari all’attività di un grammo di ^{226}Ra , materiale scoperto proprio da Marie e Pierre Curie. Equivale a 37 miliardi di decadimenti al secondo, ovvero 37 GBq (giga becquerel):

$$1 \text{ Ci} = 37 \cdot 10^9 \text{ Bq}$$

Dimensionalmente è una *frequenza* $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$

B.20 Carbonio-14

Il carbonio-14 è un radioisotopo cosmogenico, prodotto da collisioni tra raggi cosmici e isotopi stabili dell’azoto. Viene dunque prodotto in atmosfera, quindi gli organismi viventi lo accumulano fintanto che sono in vita. Perciò trova grande applicazione nella radiodatazione di forme di vita. A causa dell’attività antropica la concentrazione di carbonio-14 non è più costante perciò, in futuro, non sarà più possibile utilizzare questa tecnica.

Cenni di radiodatazione

I decadimenti radioattivi sono descritti da una legge ben definita. Si assuma di avere, inizialmente (t_0), soltanto l'isotopo padre P , che man mano decade nel figlio F . Si assume inoltre che P e F non fuoriescano mai dal campione e che non ci sia produzione ex novo di P dopo t_0 .

$$N_P(t_0) = N_0 \wedge N_F(t_0) = 0 \implies N_P(t) + N_F(t) = N_0$$

Applicando la legge di decadimento a P e sostituendo con la formula qui sopra:

$$N_P(t) = N_0 e^{-\lambda_P(t-t_0)} = [N_P(t) + N_F(t)] e^{-\lambda_P(t-t_0)}$$

Da cui:

$$\frac{N_P(t) + N_F(t)}{N_P(t)} = e^{\lambda_P(t-t_0)} \implies \Delta t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{N_F}{N_P} \right)$$

B.21 Termalizzazione dei neutroni (fissione)

Siccome i neutroni prodotti dalla fissione di ^{235}U sono *veloci* ($\sim \text{MeV}$), occorrerà rallentarli per massimizzare la sezione d'urto. Per farlo si ricorre all'acqua, per gran parte costituita da idrogeno. Molto semplicemente, le barre di uranio vengono immerse in acqua e i neutroni si *termalizzano*. Letteralmente: riduco la loro energia a quella di un neutrone termico (25 meV). Un'alternativa all'acqua è l'acqua pesante, in cui il deuterio ^2H sostituisce l'idrogeno. Quest'ultimo infatti ha una probabilità non trascurabile di cattura neutronica, per cui può assorbire neutroni, togliendoli alla reazione a catena. Il deuterio soffre meno di questo problema: ciò mi permette di arricchire meno le barre di combustibile. Un altro materiale utilizzato a questo scopo è la grafite, per la facile reperibilità e implementazione del carbonio allo stato solido. Facile da ricavare e da sagomare, costa poco ed è denso. C'è un però: l'acqua è molto più facile da pulire, quindi da riutilizzare e in seguito smaltire. La grafite invece viene attivata dai neutroni e poi diventa scoria. La fissione è mantenuta grazie ad una reazione a catena, in cui è fondamentale mantenere costante il numero di neutroni prodotti. Tramite la termalizzazione si manipola la quantità di neutroni assorbiti. Il fattore di moltiplicazione K , che indica il rapporto tra i neutroni assorbiti e quelli prodotti, deve mantenersi pari a 1. Quando $K > 1$ si parla di massa *sovracritica* (bomba), *sottocritica* (spegnimento) per $K < 1$, infine *critica* (la massa critica per l' ^{235}U è di 50 kg, ovvero una sfera di 8.6 cm di raggio).

B.22 Perchè il piombo non viene usato come moderatore

Il piombo è un nucleide gigantesco, con 82 protoni e un numero di nucleoni attorno al 200. Ciò gli permette di avere alta probabilità d'interagire con gamma, alfa e tutti i tipi di radiazione carica. Tuttavia, scatterando con un neutrone, un nucleo di piombo ha un'alta probabilità di rimandarlo indietro per urto elastico. Semplicemente, se viene colpito da un neutrone, lo rispedisce al mittente con pari energia. Per schermare particelle neutre come neutroni occorrono materiali costituiti da nuclidi leggeri. Un esempio è l'acqua, usata per la termalizzazione dei neutroni. ^1H è un nucleide di dimensioni simili a un neutrone, per cui tra loro interagiscono con urti elastici, facendo perdere energia al neutrone. Un materiale solido, con densità maggiore dell'acqua, utile per schermare i neutroni è il polietilene. Il motivo è lo stesso indicato: è per la maggior parte costituito d'idrogeno.

B.23 Fusione

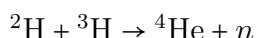
La fusione interessa i nuclei nella parte sinistra del grafico E_b/A , cioè quelli con $A < 60$. Siccome si parla di nuclei costituiti da una piccola manciata di nucleoni, l'energia in valore assoluto di un processo di fusione è minore rispetto alla fissione, ma è maggiore per singolo nucleone. Per attivare la fusione si deve superare la barriera di repulsione coulombiana tra i nuclei, quindi è necessaria un'alta energia cinetica:

$$V_{\text{barriera}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_a Z_b}{R_a + R_b} \simeq 0.4 \text{ MeV}$$

Non conviene usare acceleratori: non è pratico, dovrei accelerare troppo materiale, l'idrogeno è molto piccolo ed è difficile da confinare. Sfrutto allora l'energia termica kT che a $T = 10^7 \text{ K}$ è nell'ordine del keV. Tuttavia, grazie ad effetto tunnel e distribuzione di Maxwell-Boltzmann, è sufficiente per attivare la fusione. Vantaggi della fusione:

- Combustibili primari molto abbondanti
- Prodotti delle reazioni sono stabili (^4He , n)
- I materiali utilizzati che sono attivati dai neutroni veloci sono riutilizzabili dopo 100 anni
- Non sono possibili reazioni autosostenute incontrollate

Il massimo dell'energia per nucleone si ottiene con:



Elenco delle figure

1.1	Cono di luce	19
2.1	Un sistema di riferimento in moto con velocità v in direzione \hat{u}_x	29
2.2	Energia e numero di particelle Z^0 per un acceleratore LEP	34
2.3	Scattering di un punto materiale su una sfera di raggio R	37
2.4	Scattering a targhetta fissa	38
2.5	Scattering frontale	39
3.1	Particella carica pesante nell'approssimazione di Fermi	43
3.2	Perdita di energia in vari materiali data dalla formula 3.20	47
3.3	Perdita d'energia in funzione della distanza percorsa	49
3.4	Esperimento di Anderson	52
3.5	Andamento funzionale della sezione d'urto	57
3.6	Numero di eventi osservati in funzione dell'energia	58
3.7	Schema della struttura elettronica a bande	62
3.8	Rappresentazione schematica della camera a ionizzazione	63
3.9	Generazione di una <i>valanga di Townsend</i> in un contatore proporzionale .	65
3.10	Rappresentazione schematica di un rivelatore proporzionale	66
3.11	Grafico del gain in funzione della differenza di potenziale	69
3.12	Schema di una MWPC.	69
3.13	Linee del campo elettrico in una Multiwire proportional chamber.	70
5.1	Diagramma di Feynman di una coppia elettrone-positrone che decade in una coppia muone-antimuone	107
6.1	Diagramma di Feynman dell'interazione tra quark e gluone in QCD.	118
6.2	Urto tra due quark rossi	118
6.3	Andamento di α_s in funzione di s	122
6.4	Collisione elettrone-positrone con regione di adronizzazione	123
6.5	Schema dell'esperimento di Anderson-Fermi	131
6.6	Sezione d'urto nell'esperimento di Anderson-Fermi	132
7.1	Schema dell'esperimento di Wu	145

7.2	Grafico ottenuto da C.S. Wu	146
7.3	Schema dei momenti angolari della reazione utilizzata dalla Wu	147
7.4	Schema dell'esperimento di Goldhaber	150
7.5	Elicità del neutrino e del fotone	151
7.6	Diagramma di Feynman del decadimento del muone nella teoria V-A . . .	154
7.7	Diagramma di Feynman del decadimento del muone in teoria elettrodebole	155
7.8	Diagramma di Feynman di correnti cariche e correnti neutre	157
7.9	Schema di un acceleratore di neutrini	157
7.10	Schema di un corno magnetico	158
7.11	Il rivelatore di neutrini Gargamelle	159
8.1	Schematizzazione dello spettrografo di massa	163
8.2	Abbondanza isotopica del Kripton	164
8.3	Tavola dei nuclidi.	165
8.4	Spostamento nella tavola dei nuclidi causato da un decadimento.	166
8.5	Schema dell'apparato sperimentale usato da Bothe e Becker	169
8.6	Energia di legame media per nucleone	173
9.1	Illustrazione semplificata degli effetti dovuti ai termini del modello a goccia	178
9.2	Andamento dei vari termini della formula semiempirica di massa.	180
9.3	Parabola descritta dalla formula semiempirica in 3-D	181
9.4	Le due possibili parabole determinate dal segno del termine di accoppiamento	182
9.5	Energia di legame dell'ultimo neutrone	183
9.6	Energia del I stato eccitato	183
9.7	Sezione d'urto di cattura del neutrone	184
9.8	Potenziale di Woods-Saxon	185
10.1	Schema del decadimento del rame-64	191
10.2	Fotografia di una camera a nebbia con tracce prodotte da una sorgente α .	195
10.3	Andamento della relazione tra A e Z in un decadimento α	196
10.4	Vita media ed energia delle particelle α sulla tavola dei nuclidi	196
10.5	Potenziale con cui può essere approssimata la dinamica del decadimento α	197
10.6	Energia di legame per A=76	203
10.7	Spettro energetico e dei momenti di un decadimento beta	208
10.8	Ingrandimento dell'endpoint della figura 10.7	209
10.9	Spettro energetico dell'elettrone del decadimento β del trizio	210
10.10	Schema del decadimento doppio beta con e senza emissione di neutrini . .	217
11.1	Serie del radio	226
11.2	Tutti i vari decadimenti che compongono la serie dell'attinio	227
11.3	Decadimenti che compongono la serie del torio	228

ELENCO DELLE FIGURE

11.4 Grafico con la dose di radiazione assorbita	232
11.5 Flusso dei raggi cosmici in funzione della loro energia	233
11.6 Schema di formazione dei raggi cosmici secondari	234
12.1 Distribuzione dei prodotti di fissione dell' ^{235}U	238
12.2 Schema di una reazione di fissione	239
12.3 Schema semplificato di un reattore a vapore (BWR)	241

Elenco delle tabelle

6.1	Tabella con le varie proprietà delle 6 tipologie o sapori/flavor di quark	113
6.2	Tabella con i vari tipi di adroni	124
6.3	Tabella riassuntiva dei mesoni nel modello a due quark.	134
6.4	Tabella riassuntiva delle parità dei mesoni a isospin 1 nel modello a due quark.	135
8.1	Tabella in cui viene presentato l'ordine del momento assegnato ai vari tipi di multipolo	175
9.1	Tabella riassuntiva con i valori delle varie costanti della formula 9.8	180
9.2	Tabella riassuntiva con il numero di nuclidi stabili per parità del numero di nucleoni	186
9.3	Tabella riassuntiva con i valori del rapporto giromagnetico per protoni e neutroni	187
10.1	Tabella riassuntiva con i tempi di decadimento dei vari isotopi del torio.	200
10.2	Tabella riassuntivi di tutti gli isotopi osservati che decadono doppio beta	216
10.3	Tabella riassuntiva sulle caratteristiche degli esperimenti che studiano il decadimento doppio beta senza emissione di neutrini.	217
10.4	Tabella riassuntiva con le regole di selezione del decadimento gamma per i primi tre ordini di multiplo	222
11.1	Tabella riassuntiva di alcuni nuclidi di origine naturale di lunga vita media al di fuori delle catene	229
11.2	Tabella riassuntiva di alcuni nuclidi di origine artificiale da esperimenti militari o incidenti	229
11.3	Tabella riassuntiva di alcuni isotopi ad uso civile	230
11.4	Tabella riassuntiva con alcune informazioni pratiche riguardo energia e lunghezza di attenuazione per i vari decadimenti radioattivi	230
11.5	Tabella con i valori tipici del Q factor	231
11.6	Tabella riassuntiva delle quantità dosimetriche	231
11.7	Tabella con alcuni nuclidi utilizzati per fare radiodatazione in archeologia, geologia e mineralogia	236