Solución Concurso de Problemas - IX núm. 3

Ricardo Ruiz Fernández de Alba

06/09/2016

1. Determina todos los conjuntos de números naturales consecutivos cuya suma vale 91

Necesitamos hallar todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de números consecutivos que sumen 91.

$$\{m, m+1, m+2, ..., n\} \subset \mathbb{N}$$
$$\sum_{k=m}^{n} k = 91$$

Si pensamos que,

$$3+4+5 = (1+2+3+4+5) - (1+2)$$

generalizando, podemos expresar este conjunto como una diferencia entre dos *segmentos de sucesión natural.*

$$\{m, m+1, m+2, \ldots, n\} = |1, n| \setminus |1, m-1|$$

Así pues, la suma será

$$\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = 91$$

Y considerando la conocida fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

que queda demostrada en el anexo, podemos expresar la suma finalmente como

$$\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2} = 91$$

Como buscamos los $(n, m) \in \mathbb{N}$ que cumplan esta ecuación, se trataría de una *Ecuación "diofántica"(limitada a* $\mathbb{N}$*)*

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2} &= 91 \\ n(n+1) - m(m-1) &= 182 \\ n^2 + n - m^2 + m &= 182 \\ n^2 - m^2 + n + m &= 182 \\ (n+m)(n-m) + (n+m) &= 182 \end{aligned}$$

Y finalmente, sacando factor común, nos queda:

$$(n+m)(n-m+1) = 182$$

Si consideramos a 182 como producto de dos factores naturales b y c, podemos convertir la ecuación en un *Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.*

$$(n+m)(n-m+1) = 182 = bc$$

$$\begin{cases} n+m = b \\ n-m+1 = c \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por reducción, se obtiene:

$$n = \frac{b+c-1}{2}, m = \frac{b-c+1}{2}$$

Además, se tiene que cumplir que $n > 0$, $m > 0$ y que $n > m$

$$\begin{aligned} n = \frac{b+c-1}{2} &> 0; b > 1-c \\ m = \frac{b-c+1}{2} &> 0; b > c-1 \\ \frac{b+c-1}{2} &> \frac{b-c+1}{2} \\ 2c > 2; c > 1; c-1 &> 0 \end{aligned}$$

De tal manera que la condición resumen es

$$b > c-1 > 0$$

Siendo $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$, las únicas parejas de factores que cumplen esta condición son:

$$\begin{aligned} (I) &\quad b = 2 \cdot 7 = 14, c = 13 \\ (II) &\quad b = 2 \cdot 13 = 26, c = 7 \\ (III) &\quad b = 7 \cdot 13 = 91, c = 2 \end{aligned}$$

Y los correspondientes n y m serían:
(I)

$$\begin{aligned} n &= \frac{14+13-1}{2} = 13 \\ m &= \frac{14-13+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} n &= \frac{26+7-1}{2} = 16 \\ m &= \frac{26-7+1}{2} = 10 \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} n &= \frac{91+2-1}{2} = 46 \\ m &= \frac{91-2+1}{2} = 45 \end{aligned}$$

Por tanto, los subconjuntos de números consecutivos en $\mathbb{N}$ que suman 91 son:

$$\begin{aligned} \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \\ \{10,11,12,13,14,15,16\} \\ \{45,46\} \end{aligned}$$

2. Anexo: Demostración de la fórmula

Se va a demostrar por inducción la siguiente proposición.

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) $P(1)$ es cierta

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2) Suponiendo $P(n)$ cierta, demostramos $P(n+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \\ = \frac{n^2+2n+n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ \text{Y, por hipótesis de inducción,} \\ = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k \end{aligned}$$