Solución Problema - Vol. IX-3

Ricardo Ruiz Fernández de Alba 2 Bach - IES Alborán

24/09/2016

Determina todos los conjuntos de números naturales consecutivos cuya suma vale 91

Necesitamos hallar todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de números consecutivos que sumen 91, es decir, que tengan la forma:

$$\{m, m+1, m+2, ..., n\} \subset \mathbb{N}$$

Y la suma de todos sus elementos será:

$$\sum_{k=m}^{n} k = 91$$

Si pensamos que,

$$3+4+5 = (1+2+3+4+5) - (1+2)$$

y generalizamos, podemos expresar este conjunto como la diferencia entre dos *segmentos de sucesión natural.*

$$\{m, m+1, m+2, \ldots, n\} = |1, n| \setminus |1, m-1|$$

Así pues, la suma será

$$\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = 91$$

Y, considerando la conocida fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

que queda demostrada en el anexo, podemos expresar la suma finalmente como

$$\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{n(n+1)-m(m-1)}{2} = 91$$

Como buscamos los $(n, m) \in \mathbb{N}$ que cumplan esta ecuación, se trataría de una *Ecuación "diofántica"(limitada a* $\mathbb{N}$ *en lugar de* $\mathbb{Z}$)

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)-m(m-1)}{2} &= 91 \\ n(n+1)-m(m-1) &= 182 \\ n^2+n-m^2+m &= 182 \\ n^2-m^2+n+m &= 182 \\ (n+m)(n-m)+(n+m) &= 182 \end{aligned}$$

Y finalmente, sacando factor común, nos queda:

$$(n+m)(n-m+1) = 182$$

Si consideramos a 182 como producto de dos factores naturales b y c, podemos convertir la ecuación en un *Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.*

$$(n+m)(n-m+1) = 182 = bc$$

$$\begin{cases} n+m = b \\ n-m+1 = c \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por reducción, se obtiene:

$$n = \frac{b+c-1}{2}, m = \frac{b-c+1}{2}$$

Además, se tiene que cumplir que $n > 0$, $m > 0$ y que $n > m$

$$
\begin{aligned}
n = \frac{b+c-1}{2} &> 0; b > 1-c \\
m = \frac{b-c+1}{2} &> 0; b > c-1 \\
\frac{b+c-1}{2} &> \frac{b-c+1}{2} \\
2c > 2; c > 1; c-1 &> 0
\end{aligned}
$$

De tal manera que la condición resumen es

$$b > c-1 > 0$$

Siendo $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$, las únicas parejas de factores que cumplen esta condición son:

$$
\begin{aligned}
(I) &\quad b = 2 \cdot 7 = 14, c = 13 \\
(II) &\quad b = 2 \cdot 13 = 26, c = 7 \\
(III) &\quad b = 7 \cdot 13 = 91, c = 2
\end{aligned}
$$

Y los correspondientes n y m serían:
(I)

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{14+13-1}{2} = 13 \\
m &= \frac{14-13+1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

(II)

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{26+7-1}{2} = 16 \\
m &= \frac{26-7+1}{2} = 10
\end{aligned}
$$

(III)

$$n = \frac{91+2-1}{2} = 46$$
$$m = \frac{91-2+1}{2} = 45$$

Por tanto, los subconjuntos de números consecutivos en $\mathbb{N}$ que suman 91 son:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$
$$\{10,11,12,13,14,15,16\}$$
$$\{45,46\}$$

Anexo: Demostración de la fórmula utilizada

Se va a demostrar por inducción la siguiente proposición.

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) $P(1)$ es cierta

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2) Suponiendo $P(n)$ cierta, demostramos $P(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$
$$= \frac{n^2+2n+n+2}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$$

Y, por hipótesis de inducción,

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k$$