高数基础班（5）

5	无穷小量阶的比较举例；函数连续性及常考题型举例	P47-P60

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了

三、无穷小量阶的比较

【例45】（2005年2） 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与

$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ______.

【解1】

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$f(x)=\sqrt{x}$

$$=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2[\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}]}$$

（有理化）

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}$$

$\frac{1}{2}x^2$

$$=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2k}\left[1+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4k}$$

则 $k=\frac{3}{4}$.

还不关注，你就慢了

【例45】（2005年2）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与

$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ______.

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

【解2】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$

$=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}[1-\cos x+x\arcsin x]}{x^2}$ $=\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2}+1\right]=\frac{3}{4k}$

$k=\frac{3}{4}$

【解3】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$\frac{1}{2}x\arcsin x$ $\quad -\left(-\frac{1}{4}x^2\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x\arcsin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}{kx^2}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2}{kx^2}$

$k=\frac{3}{4}$

【例46】(2001年2) 设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4

【解】

$(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{1}{2}x^4$

$x\sin x^n \sim x^{n+1}$

$e^{x^2}-1 \sim x^2$

$2 < n+1 < 4$

$n+1 = 3$

$n=2$

【例47】（2014年2） 当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A） $(2,+\infty)$ （B） $(1,2)$

（C） $(\frac{1}{2},1)$ （D） $(0,\frac{1}{2})$

【解】

$\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha$ $\alpha > 1$

$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim (\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$ $\frac{2}{\alpha} > 1 \Rightarrow 2 > \alpha$

【例48】（2016年2） 设

$$\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1.$$

当 $x \to 0^+$ 时，以上3个无穷小量从低阶到高阶的排序是

① 两两比

② 估阶

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.　　(B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$.

(C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$.　　(D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

【解】

$\alpha_1 \sim x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$　　2阶

$\alpha_2 \sim \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$　　$\frac{5}{6}$阶

$\alpha_3 \sim \frac{1}{3}x$　　1阶

$\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_1$

【例49】(2023年1, 2) 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$ ________.

$\frac{0}{0}$

【解1】由题设知 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bx^2+[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}{[1+x^2+o(x^2)]-[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\underset{=0}{(a+1)}x+(b-\frac{1}{2})x^2+o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}$$

$\frac{b-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=1$

则 $a=-1, b=2$. 故 $ab=-2$.

【例49】(2023年1,2) 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$ ________.

$\ln(1+x)-x$

【解2】 $g(x)=e^{x^2}-\cos x=(\overset{x^2}{e^{x^2}-1})-(\overset{-\frac{1}{2}x^2}{\cos x-1})\sim(x^2)-(-\frac{1}{2}x^2)=\frac{3}{2}x^2$

$a=-1$

$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$b=2$

$f(x)=bx^2+[\overset{-\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}]\sim\frac{3}{2}x^2$

$ab=-2$

$$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

第三节　函数的连续性

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）连续性的概念

（二）间断点及其分类

（三）连续性的运算与性质

（四）闭区间上连续函数的性质

二. 常考题型与典型例题

题型一 讨论函数连续性及间断点的类型 ✱

题型二 有关闭区间上连续函数性质的证明题 ✓

第三节 函数的连续性

考试内容概要

（一）连续性的概念

(a,b)

$[a,b]$

定义1 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ 则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义3 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ 则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 $f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 左连续且右连续

定义4 区间上的连续

【例1】（2017年1,2,3） 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0.\end{cases}$

在 $x=0$ 处连续，则（　）

✓（A）$ab=\dfrac{1}{2}$.　　　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$.

（C）$ab=0$.　　　　（D）$ab=2$.

【解】

$f(0-0)=b=f(0)$ 左连续 ✓

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\underline{\dfrac{1}{2a}=f(0)=b}$ 右连续

$\Rightarrow ab=\frac{1}{2}$

【例2】(1994年3) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$

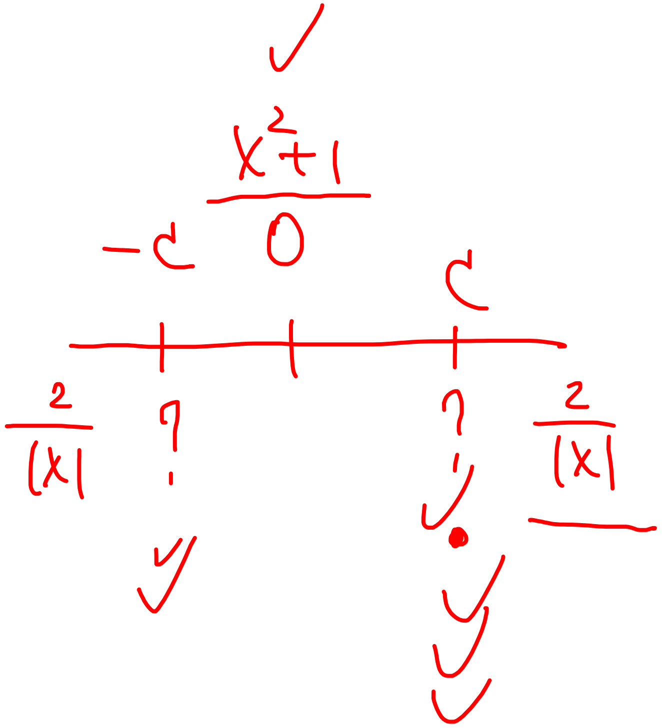
在 $(-\infty,+\infty)$ 处连续，则 $a=$ ________. [−2]

【解】

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=2+2a=f(0)=a$$

$$a=-2$$

【例3】(2008年3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le C, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>C \end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $C=$ ______. [1]



【解】

f(x) 偏

$$f(c-0)=c^2+1=f(c)=c^2+1$$

$$f(c+0)=\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\frac{2}{c}=f(c)=c^2+1$$

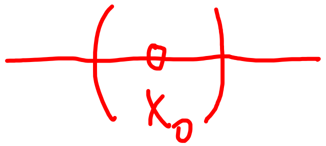
$$2=c^3+c$$

$$c^3-1+c-1=0$$

$$(c-1)\left[\underset{\neq 0}{c^2+c+2}\right]=0 \Rightarrow c=1$$

（二）间断点及其分类

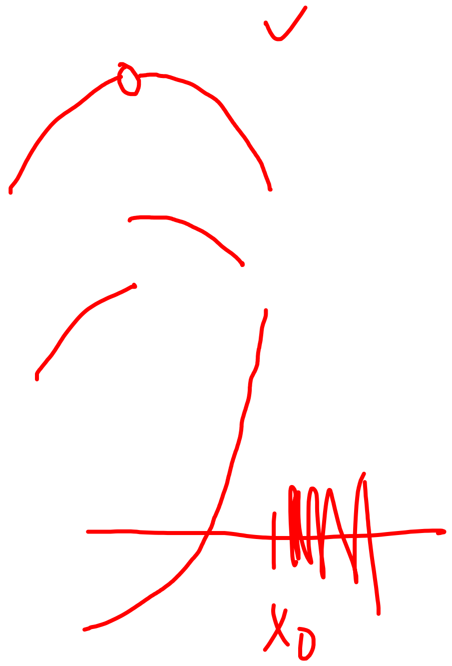
1. 间断点的定义



$\ln x$ $\quad$ $x=-1$

定义5 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**。

2. 间断点的分类



1）**第一类间断点**：左, 右极限均存在的间断点

可去间断点： 左极限 = 右极限

跳跃间断点： 左极限 ≠ 右极限

2）**第二类间断点**：左, 右极限中至少有一个不存在

无穷间断点 $\quad$ 振荡间断点

$\frac{1}{x}$ $\quad$ ∞ $\quad$ $\sin\frac{1}{x}$

【例4】(2008年2) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有（ ）

$x=0$　$x=1$

（A）1个可去间断点，1个跳跃间断点

（B）1个可去间断点，1个无穷间断点

（C）2个跳跃间断点　　（D）2个无穷间断点

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

【解】

$x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\underbrace{\ln|x|\cdot\sin x}_{\infty\cdot 0}=\lim_{x\to 0} x\ln|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}$$

可去

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\sin 1\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{|x-1|}=\sin 1\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+\\ -\sin 1, & x\to 1^-\end{cases}$$

跳跃

【例5】(2020年2, 3) 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为( )

$\infty \quad x=-1$

$0 \qquad 2$

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【解】间断点 $-1, 0, 1, 2.$

$\frac{1}{x-1}\to+\infty$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\infty \qquad =$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{2e}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=-\frac{1}{2e} \qquad -$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\infty \qquad =$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\infty \qquad =$$

(三) 连续性的运算与性质

定理1 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；

定理2 连续函数的复合仍为连续函数；

定理3 基本初等函数在其定义域内是连续；

定理4 初等函数在其定义区间内是连续；

$(0,1)$

$\frac{1}{x}$ $(0,+\infty)$

0

$f(x)=\sqrt{\cos x-1}=0$

-2π 0 2π 4π

(四) 闭区间上连续函数的性质

定理5（有界性定理）

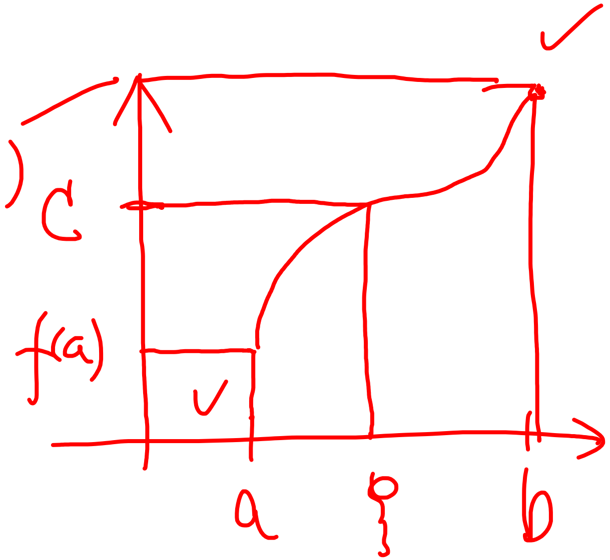
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上有界。

定理6（最值定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上必有最大值和最小值；

定理7（介值定理）

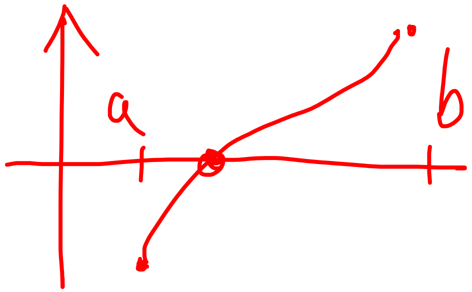
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\neq f(b)$, 则对 $f(a)$与 $f(b)$ 之间任一数C, 至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=C$.



*推论：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可取到介于它在 $[a,b]$ 上最小值与最大值之间的一切值.

定理8（零点定理）

若 $f(x)$在 $[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.



常考题型与典型例题

1。讨论函数的连续性及间断点的类型； *

2。有关闭区间上连续函数性质的证明题； 归结

【例6】（1997年2）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

1^∞

$-\frac{1}{2}x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$

【解】

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)=a$

$a=e^{-\frac{1}{2}}$

【例7】（2024年2） 函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数是（　）

0　1　2

（A）3.　　（B）2.　　（C）1.　　（D）0.

2^{∞}

【解】 $f(x)$ 有3个间断点，$x=0, x=1, x=2.$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=\infty$$

1^{∞}

$$-\frac{x-1}{(1-x)(x-2)}\to 1$$

则 $x=0$ 为第二类间断点. 由于

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=\lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=e$$

可去

则 $x=1$ 为第一类间断点. 由于

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=2^{+\infty}=+\infty$$

$\to +\infty$

则 $x=2$ 为第二类间断点，故应选C.

【例8】 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$

$x=0$　　$x(x+1)$　　± 1　　$(x+1)(x-1)$　　$x(x+1)$　　1

的可去间断点的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】 $f(x)$ 有三个间断点，$x=0,x=\pm1.$

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\lim\limits_{x\to0}\overset{0\cdot\infty}{x\ln|x|}\sin\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0}\overset{0\ \infty}{x\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

（无穷小量）

则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$x=0$ 为可去间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\ln|x|\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=0$　　可 则 $x=-1$ 为可去间断点.

$x(x+1)$

【例8】 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$ $=(x+1)(x-1)$

的可去间断点的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】

在 $x=1$ 处,

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln|x|\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

$$=\sin1\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=\sin1$$ 　　则 $x=1$ 为可去间断点.

【例9】(2024年3) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则 $f(x)$（　）

（A）在 $x=1, x=-1$ 处都连续.

（B）在 $x=1$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续.

（C）在 $x=1, x=-1$ 处都不连续.

（D）在 $x=1$ 处不连续，在 $x=-1$ 处连续.

$n^q \ll a^n$　$q>0$　$a>1$

$(x^2)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ \infty & |x|>1 \\ 1 & x=1 \\ \text{不存在} & x=-1 \end{cases}$$

0　-1　$1+x$　1　0

【解】① 当 $|x|\geq 1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}=0$

$\infty\cdot 0$

$$\lim_{n\to\infty} n x^{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n}=0$$

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}=1+x$

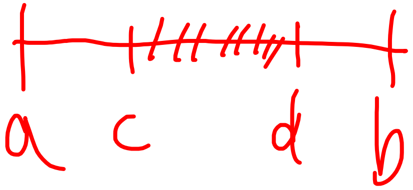
$f(-1-0)=0$　$f(-1)=0$　$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)=0$　连续.

a^n　$a>1$

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2$.　$f(1)=0$

【例10】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$. 试证对任意的正数 p,q，至少存在一个 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$



【解】

$$m \le f(x) \le M \qquad \frac{pf(c)+qf(d)}{p+q} = f(\xi)$$

[证] 由于 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则存在 m, M

$$m = \frac{pm+qm}{p+q} \le \frac{pf(c)+qf(d)}{p+q} \le \frac{pM+qM}{p+q} = M$$

① 最值
② 介值

则 $\exists\, \xi\in[c,d]$，使 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$

第一章　函数 极限 连续

函数

题型一　复合函数

题型二　函数性态

极限

题型一　极限的概念、性质及存在准则

题型二　求 极 限

题型三　无穷小量阶的比较

① ② ③

$\frac{0}{0}$

连续

题型一　讨论连续性及间断点类型

题型二　介值定理、最值定理及零点定理的证明题


还不关注，
你就慢了