

高数基础班 (20)

20	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P223-P232
----	-------------------------	-----------

主讲 武忠祥 教授

第十章 无穷级数

(数二不要求)

第一节 常数项级数 ✓

第二节 幂级数

第三节 傅里叶级数 (数三不要求)

第一节 常数项级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

(一) 级数的概念与性质

(二) 级数的审敛准则

二. 常考题型与典型例题

常数项级数敛散性的判定

考试内容概要

(一) 概念与性质

1. 级数的概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

无穷级数

部分和

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$

收. 发.

① 存在性. — 收敛性. *

② 值. — 和

$$S \approx s_n$$

【例1】判定下列级数敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$; ✓

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$). ✓

【解】 (1) $s_n = \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{n})$

$$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln(2 \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}) = \ln(n+1)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 发散.

$$(2) \quad \underline{s_n} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

$$a \left(\underline{1-1+1-1-\dots} \right)$$

0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & |q| < 1 \text{ 且 } \\ \infty & |q| > 1 \\ \frac{a(1-(-1)^n)}{2} & \left. \begin{matrix} q=1 \\ q=-1 \end{matrix} \right\} \text{ 无 } \end{cases}$$

2. 级数的性质

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ . 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 $\overset{\checkmark}{\text{收敛}} \pm \overset{\checkmark}{\text{发散}} = \text{发散}; \quad \text{发散} \pm \text{发散} = \text{不确定}$

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1) 加括号收敛 $\xrightarrow{\times}$ 原级数收敛;

2) 加括号发散 \longrightarrow 原级数发散;

✓ ✓
 $(1-1)+(1-1)+\dots$
0 0
 S_n
发散.

5) (级数收敛必要条件)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \xrightarrow{\times} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$\frac{1}{n}$ 反例
 $S_n - S_{n-1} = u_n$
↓ ↓
S S

$$S_n = \sqrt{n}$$

(二) 级数的审敛准则

(1) 正项级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0)$

S_n ↗

基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 上有界

$S_n \rightarrow +\infty$

1) 比较判别法: 设 $\frac{S_n}{u_n} \leq S_{n+1}$, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\rightarrow S_n \rightarrow +\infty$

收 ✓
发 ✓

放大
 $u_n \leq v_n$ 收.

$v_n \leq u_n$ 发.

2) 比较法极限形式: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

两个常用级数

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ✓ ✓

$p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \checkmark$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \ (a > 0, q > 0)$ ✓ ✓

$q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散.

3) 比值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \underline{\rho < 1}, \\ \text{发散,} & \underline{\rho > 1}, \\ \text{不一定,} & \underline{\rho = 1}, \end{cases}$

4) 根值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \underline{\rho < 1}, \\ \text{发散,} & \underline{\rho > 1}, \\ \text{不一定,} & \underline{\rho = 1}, \end{cases}$

$$\frac{n^p \cdot e_n \cdot n!}{\sqrt[n]{a n^n}} \rightarrow e$$

$$\frac{a^n \cdot n! \cdot n^n}{n! \cdot n^n}$$

3) 4).

$$n \geq \frac{1}{a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

1) 2)

优
适用广

缺点
不方便

适用范围

方便

3) 4)

1) 2)

3) 4)

* 5) 积分判别法: 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上 单调减, 非负 的 连续函数, 且 $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

✓ 【例2】证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. ✓

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n), \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散

✓ 【例3】判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 的敛散性. $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散

(证). $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $[2, +\infty)$

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} = f(n)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

发散

(2) 交错级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0)$

莱不尼兹准则: 若 (1) u_n 单调减; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

【注】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛. $\Leftrightarrow u_n$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

【例】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛, 但 $u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1-1}} = \frac{1}{2^n}$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

$\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ 收敛

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛, 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

① 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 条件收敛的级数的所有正项 (或负项) 构成的级数一定发散. 即:

正项 $u_n > 0$ 和 $u_n < 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散.

$\frac{u_n + |u_n|}{2} = u_n$ (当 $u_n \geq 0$)
 $\frac{u_n - |u_n|}{2} = -u_n$ (当 $u_n < 0$)

常考题型与典型例题

常考题型

常数项级数敛散性判定

【例4】(2015年3) 下列级数中发散的是()

~~(A)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ $\cdot a^n$

✓ (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

~~(B)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$

~~(D)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

【解1】直接法

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$\cancel{a} + \cancel{a}' = \cancel{a}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} = 1$$

【解2】排除法

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

(B) $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ \cancel{a}

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n^n}$

$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$
 $\ln n < n$
 $= 1$ \times

【例5】(2013年3) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ()

X (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;

X (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$;

X (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在;

✓ (D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

$\rightarrow 1$
 $a_n = (1 + \frac{1}{n})$ ✓

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ ✓

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n \ln^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n} = +\infty$

X 【解1】直接法

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在 $A \neq 0$
 $= 0$

【解2】排除法

$a_n < \frac{1}{n^p}$ ✓
 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty}$
 \cdot ✓

【例4】(09年1) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

- ~~(A)~~ 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
~~(B)~~ 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
 \checkmark (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛;
~~(D)~~ 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n \rightarrow 0$$

$$\sum b_n \text{ 收敛} \rightarrow \sum b_n a_n \text{ 收敛} \quad (\text{正项})$$

$$\sum \frac{1}{n^4}$$

【解1】直接法

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ 收敛} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \text{ 收敛}$$

$$|b_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |b_n| < 1, \Rightarrow |b_n| > b_n^2$$

【解2】排除法

$$\sum b_n \text{ 收敛} \rightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$a_n \rightarrow 0 \quad |a_n| < 1 \quad a_n^2 < 1, \Rightarrow a_n^2 b_n^2 \leq b_n^2$$

【例5】(2011年3) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是()

✓ (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. ✓

✗ (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

✗ (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

✗ (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$(1-1) + (1-1) + (1-1) - \dots$
0 0 0
la

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ la

$u_n = 1$ la

✗ 【解1】直接法

【解2】排除法

$\sum (u_{2n-1} - u_{2n})$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})$
 $= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \dots \rightarrow +\infty$ la

【例1】(2019年1) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$
 $u_n \rightarrow a \neq 0$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{u_n}{u_{n+1}})$
 $\frac{1}{u_{n+1}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$
 $u_n \rightarrow 1$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

$= [u_2^2 - u_1^2] + [u_3^2 - u_2^2]$
 $S_n = u_{n+1}^2 - u_1^2 + [u_{n+1}^2 - u_n^2]$
 \downarrow
 $a^2 - u_1^2$

【解1】直接法 选 D

$$S_n = u_{n+1}^2 - u_1^2$$

【解2】排除法 $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ 排除 A B.

$u_n = -\frac{1}{n}$ $1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n}$ 排除 C.

【例2】(2019年3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

X A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛

✓ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

X C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛

X D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

$$v_n = (-1)^n$$

$$|nu_n \cdot \frac{v_n}{n}| = |u_n v_n|$$

【解1】直接法 选 B

$$|u_n v_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right| \leq |nu_n|$$

【解2】排除法 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, v_n = (-1)^n$. 排除 A C.

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. 排除 D.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$



还不关注，
你就慢了

