高数基础班（3）

3	常考题型举例：1.极限概念、性质、存在准则，2.求极限方法举例（基本极限；等价代换；有理运算）	P22-P35

主讲 武忠祥 教授

常考题型与典型例题

1）极限的概念、性质及存在准则　难点　① 选择题　② 证明题

2）求极限　重点

3）无穷小量阶的比较

（一）极限的概念、性质及存在准则

【例13】（1999, 数二）“对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正数 N, 当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \le 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 为

（A） 充分条件但非必要条件；

（B） 必要条件但非充分条件.

（C） 充分必要条件.

（D）既非充分条件又非必要条件.

$\varepsilon < 2\varepsilon$

$\forall \varepsilon$

【解】

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$|x_n - a| < \varepsilon \xrightarrow{\quad} |x_n - a| \le 2\varepsilon$

$|x_n - a| < \varepsilon \xleftarrow{\ ?\ } |x_n - a| \le 2\varepsilon$

$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$

$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

【例14】（2015, 数三）设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$. ✓

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， ✓

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$. ✓

✓（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， ✗

【解】

$x_3 \quad x_6 \cdots$

$x_4 \quad x_7 \cdots$

$x_5 \quad x_8 \cdots$

x_{3n+2}

$\downarrow$

a

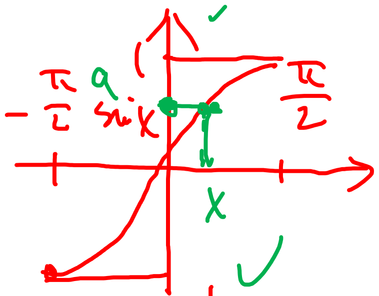
【例15】（2022, 数一, 数二）设有数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\dfrac{\pi}{2} \le x_n \le \dfrac{\pi}{2}$，则（　）

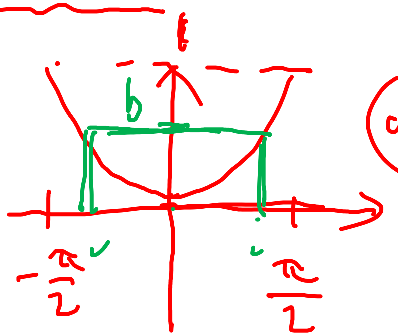
(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.　$=\cos 1$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.　$=\sin 1$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.　$=\cos 1$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.





$\cos x$

【解1】直接法

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n \overset{=a}{存在} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n \overset{=b}{存在} \not\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

$(-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在 $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

$f(x)$ 有反函数

【解2】排除法 $x_n = (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$

【例16】(1993, 数三) 当 $x\to 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　）

(A) 无穷小　　　　(B) 无穷大

(C) 有界的, 但不是无穷小;　　(D) 无界的, 但不是无穷大

$\frac{1}{x}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{x}=2n\pi$

由于对任意给定的 $M>0$ 及 $\delta>0$, 总存在

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ y_n=\frac{1}{2n\pi},$$

使得 $0<x_n<\delta$, $0<y_n<\delta$, 此时

+∞

$$\left|\frac{1}{x_n^2}\sin x_n\right|=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>M,\qquad \frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=0$$

（二）求 极 限

常用的求极限方法（8种）

方法1　利用基本极限求极限

方法2　利用等价无穷小代换求极限

方法3　利用有理运算法则求极限

方法4　利用洛必达法则求极限

方法5　利用泰勒公式求极限

方法6　利用夹逼原理求极限

方法7　利用单调有界准则求极限

方法8　利用定积分定义求极限

方法1　利用基本极限求极限

1）常用的基本极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e;$$

1^{∞}

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$　　$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$　　~

柔勒

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

$f(x)=$ 多项式 $+R_n(x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$\lim_{x\to0}\frac{x^5-2x^4}{x^3+x^2}=-2$

$n\to+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

e^{∞}

2) "1^{∞}" 型极限常用结论

若 $\lim \alpha(x)=0$, $\lim \beta(x)=\infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

1^{∞}

$\ln(1+\alpha)^{\beta}=\ln\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=e^{A}$

*可以归纳为以下三步:

1) 写标准形式　　原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2) 求极限　　$\lim \alpha(x)\beta(x)=A$;

3) 写结果　　原式 $=e^{A}$.

【例17】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}$ $=1$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}n\sin\dfrac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}$

$=\dfrac{1}{e}$

$n\sin\frac{1}{n}=\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1$

$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\to \cancel{1}$

$\dfrac{n^p}{(n+1)^p}\to 1$

$=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\dfrac{1}{e}$

$1^\infty\neq 1$

$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p\to 1$

1^p

【例18】(2022, 数二, 数三) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} =$ ________. 1^{∞}

【解】 ① $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)^{\cot x}$

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}\cdot\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{\overset{x}{e^x-1}}{2}\cdot\frac{\overset{1}{\cos x}}{\underset{x}{\sin x}} = \frac{1}{2}$

③ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} = e^{\frac{1}{2}}$

【例19】（2010，数一） 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ 1^∞

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

【解1】直接法

1^∞　1^∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\left(\frac{x}{x+b}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}$$

$$=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}$$

【例19】（2010, 数一）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

e^{-b}　　e^{b}

?

【解2】排除法　$a=0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x=e^{-b}$$

【例20】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0.$

a^0

1^∞

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

$\times$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a$$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right]^n$

① $0 \cdot \infty$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)n$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$

③ 原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$ ✓

方法2 利用等价无穷小代换求极限

$x\to 0$, $\tan x+\sin x \sim x+x=2x$

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\beta\left[\frac{\alpha}{\beta}-1\right]}{\beta_1\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right]}=1$$

$A-1\neq 0$

$\beta\sim\beta$

(1) 代换原则:

a) 乘除关系可以换

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

$x\to 0$ $\tan 2x-\sin x \sim 2x-x=x$

$\tan x-\sin x$ ~~$\sim$~~ $x-x$

$\tan 2x-x \sim 2x-x$

b) 加减关系在一定条件下可以换

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\boxed{\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1.}$ 则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1.$

又等价 $x\sim x$

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1.$ 则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1.$

$-(-\beta)$

$\frac{\alpha_1}{-\beta_1}$

(2）常用的等价无穷小： 当 $x \to 0$ 时

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}x^2$

一阶 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$

$a^x - 1 \sim x \ln a,\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

3阶

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 \qquad \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3 \qquad x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3 \qquad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$

*

$x = t$

$\arcsin t - t \sim \frac{1}{6}\arcsin^3 t \sim \frac{1}{6}t^3$

【例21】（2016, 数三） 已知函数 $f(x)$ 满足

$\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2,\quad 则\ \lim_{x\to 0}f(x)=\underline{\qquad\qquad}.$$

$\sim 3x$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$

$x\to 0$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$ 知，

$\to 0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$$

$$则\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

$$故\ \lim_{x\to 0}f(x)=6.$$

【例22】（2015，数一） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$　$\frac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$　$x\to1$

$\ln\boxed{x}=\ln[1+(x-1)]\sim\boxed{x}-1$　$x\to0$

等 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$　$\square\to1$　$\ln(1+x)\sim x$

$\ln\square\sim\square-1$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$　**（等价无穷小代换）**　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$\tan x\sim x$

洛　$f(x)=\ln x$

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=-\dfrac{1}{2}$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

拉

【解3】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x-\ln1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\xi}(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

【例23】(2009, 数三) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

$\dfrac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

等

① $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

② $e^x-1\sim x$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3e}{2}$

拉

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^1-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^\xi(1-\cos x)}{x^2}=3e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{3e}{2}$

e

$f(x)=e^x$

洛

【解3】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\sin x}{\frac{2}{3}x}=\dfrac{3e}{2}$

e

【例24】(2006, 数二）求极限 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

∞

1^∞

$\infty\cdot 0$

【解1】原式 $\overset{*}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]$

$\to 0$ 0

门推

$\boxed{e^{x}-1\sim x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\boxed{\frac{2+\cos x}{3}}\right)}{x^3}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2+\cos x}{3}-1}{x^2}$

（等价无穷小代换）

$\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$x\to0$

$\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

（等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【例24】（2006，数二）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$\dfrac{x^2}{\sin x}\to 0$

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)^x-1\right]$

$-\frac{1}{2}x^2$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x(\cos x-1)}{3}}{x^3}$

$(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1 \sim x^2\cdot\dfrac{1}{\sin x} \sim x$

$\to\infty$

0

$e^x-1\sim x$

【注】当 $x\to0$ 时，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$. 这个结论推广可得：

若 $\alpha(x)\to0,\alpha(x)\beta(x)\to0,$

则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$

$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1=e^{\beta(x)\ln[1+\alpha(x)]}-1$

$\sim\beta(x)\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha\beta$

【例25】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$. $[-\frac{1}{2}]$

$\frac{0}{0}$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\arcsin x-x]-[\sin x-x]}{[\arctan x-x]-[\tan x-x]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{6}x^3)-(-\frac{1}{6}x^3)}{(-\frac{1}{3}x^3)-(\frac{1}{3}x^3)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3}=-\frac{1}{2}$

方法3 利用有理运算法则求极限

$\sin x + |x|$

有理运算法则

若 $\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B,$ 那么:

$$\lim\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0)$$

【注】1）存在 ± 不存在 = 不存在;

2）不存在 ± 不存在 = 不一定.

3）存在×÷不存在 = 不一定;

4）不存在×÷不存在 = 不一定.

$f(x)\,g(x) = F(x)$

$\frac{F(x)}{f(x)}$ $\neq 0$

$n \to \infty$

$(-1)^n$

$f(x) + g(x) = F(x) \Rightarrow g(x) = F(x) - f(x)$

$n + n = 2n$ $\quad n + (-n) = 0$

$\frac{1}{n} \cdot n = 1$ $\quad \frac{1}{n} \cdot n^2 = n$

$n \times n = n^2$ $\quad (-1)^n \times (-1)^n = 1$

常用的结论： 1） $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A\lim g(x)$;

即：极限非零的因子的极限可先求出来.

2） $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在， $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$;

3） $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$;

① $\lim g(x)$ ∃

$= \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

② $\lim g(x)$ 不 ∃

$\rightarrow \lim f g$ 不存在

$= A \neq 0$

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} = g(x)$$

$$\frac{0}{A} = 0$$

$$\frac{f(x)g(x)\ \exists}{f(x)\ \exists} = g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = f(x)$$

$A \cdot 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1+x^2}$$

$\sin x \rightarrow 0$

∃

$1+x^2 \rightarrow 0$

【例26】(2010,数三) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 a 等于（　）

（A）0　　　（B）1　　　（C）2　　　（D）3

【解】 应选（C）

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-e^{x}}{x}\right]+a\lim_{x\to 0}e^{x}$$

$$=-1+a$$

则 $a=2$ 故应选（C）.

【例27】（2018, 数三） 已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求 a,b.

【解】 $2=\lim\limits_{x\to+\infty} be^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to+\infty}(axe^{\frac{1}{x}}-x)$

10分

$a-1=0$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)\quad (a=1)$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{x}$

$=b+1$

故 $a=b=1$.

【例28】（2004, 数三） 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$____，$b=$____.

$\to 0$　$\to 0$　$\neq 0$　$\checkmark$

$1-a$

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{\mathrm{e}^x-a}=5\neq 0$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0,$

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0,$　即　$a=1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\underbrace{\mathrm{e}^x-1}_{x}}(\cos x-b)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b$$

由 $1-b=5$ 得，$b=-4.$

【例29】(1997, 数二) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$x\to-\infty$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$=-x$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)\left[\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}\right]}{(-x)\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$=2-1+0=1$


还不关注，
你就慢了