高数基础班（4）

4	求极限方法举例（洛必达法则；泰勒公式；夹逼原理；单调有界准则；定积分定义）	P35-P47

主讲 武忠祥 教授

方法4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

若 1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\,(\infty)$;

2） $f(x)$ 和 $g(x)$在 x_0的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

* 3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞ ）；

$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$0\cdot\infty$

注：1）适用类型 $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0.

2）解题思路 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0\cdot\infty \\ \infty-\infty \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases}$

1） 原式 $=\lim(1+\alpha)^\beta$

2） $\lim\alpha\beta=A$

3） 原式 $=e^A$

*

【例30】求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

$\dfrac{0}{0}$

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ （洛必达法则） $\dfrac{0}{0}$

$x\to0\quad \tan x\sim x$

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ $(\tan(x-1)\sim x-1)$

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ （洛必达法则）

$=-\dfrac{4}{\pi^2}$

【例31】（1988年3）求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$.

$0 \cdot \infty$

【解】原式 $= \lim\limits_{x\to1}(1+x)(1-x)\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

2 1

$= 2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x} = 2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \dfrac{4}{\pi}$

【例32】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

∞^0

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$ $\frac{0}{0}$

【解1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ （洛必达法则）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2}$$

$$=1$$

（导数定义）连续导数

1) $f(x)$ n阶可导. $f^{(n-1)}(x)$

2) $f(x)$有n阶 $f^{(n)}(x)$

【注】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=1$ 经典的错误 标准的0分

$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 存在　$f''(x)$ 连续

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

【解2】 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

即 $f(x)=x+x^2+o(x^2)$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

方法5 利用泰勒公式求极限

定理（泰勒公式） 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha = \beta + o(\beta)$

几个常用的泰勒公式 $x=0$

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(2) $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(3) $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

【例34】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

x^8　x^4　$\dfrac{0}{0}$

"最低次幂"

① 洛
② 等
③ 泰

【解1】 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}(-\dfrac{x^2}{2})^2+o(x^4)$

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}-\cdots$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x^5}{2x^2-3x^3}$

【解2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}-x}{4x^3}$　洛

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)-x(1-e^{-\frac{x^2}{2}})}{x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1}{6}x^3)-(\frac{1}{2}x^3)}{x^3}=-\frac{1}{12}$$

等

【例35】（1994年3）设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（ ）.

$=0$

（A） $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ ∞ （B） $a=0,b=-2$ $\dfrac{0}{0}$

（C） $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ （D） $a=1,b=-2$

【解1】 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]-(ax+bx^2)}{x^2}$ 泰勒 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overset{=0}{(1-a)}x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)}{x^2}$ $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$

$-\frac{1}{2}x^2$ $-\frac{1}{2}-b=2$

【解2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x}=0$ $a=1,$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}-b=2,$ $b=-\dfrac{5}{2}$.

选

【解3】代入法 $a=0$ ✗ $\Rightarrow a=1$

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$. $=0$

（6x）

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）∞

【解1】 $0=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\dfrac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$

未知

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36$$

$\parallel$ 36

【注】 $0=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)\overset{\times}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$　**经典的错误 标准的0分**

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

6x

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）

【解2】 $$0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= -36 + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$=36$

【例36】（2000年2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 36

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，$\alpha(x)\to 0$

（A） 0　　（B） 6　　（C） 36　　（D）

【解3】 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x)\to 0$， $\Rightarrow f(x)$

【解4】排除法 $\sin 6x+xf(x)=0 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{\sin 6x}{x}$

【例37】（2009年2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

$\dfrac{0}{0}$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{[x-\tan x]-[\ln(1+\tan x)-\tan x]}{x^2}$$

等

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{[-\frac{1}{3}x^3]-[-\frac{1}{2}\tan^2 x]}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

【例37】(2009年2)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【解2】原式 $\overset{\text{等于}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$　　$(1+\tan x)\to 1$ ✓

$\overset{\text{洛}}{=}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}$ ✓

$-\tan^2 x$

$\overset{\text{等于}}{=}\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+(1-\sec^2 x)}{x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\tan^2 x}{x}$

$=\dfrac{1}{4}$

【例37】（2009年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

$\frac{0}{0}$

【解3】 原式 $\overset{\text{等}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

① 洛

② 等

③ 泰

$$\overset{\text{泰勒}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-[\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o(\tan^2 x)]}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\overset{-\frac{1}{3}x^3}{x-\tan x}}{x^2}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\overset{x^2}{\tan^2 x}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{4}$$

方法6　利用夹逼原理求极限

$n \to +\infty$

有限

【例38】（1995年3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right] = \frac{1}{2}$

小　大

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \le [\quad] \le \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} \to \frac{1}{2}$$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

【例39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n} = 3$　　∞^0

$1^0 = 1$

[解1] 原式 $= 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \infty & |x|>1 \\ 1 & x=1 \\ \text{不存在} & x=-1 \end{cases}$

[解2] $\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{3} \le \sqrt[n]{1+2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 3^n}$

小　　大

$\sqrt[n]{3}\to 1$, $\sqrt[n]{3^n}\to 3$, $\sqrt[n]{3\cdot 3^n}\to 3$

【例40】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underline{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_m^{\ n}}}$, 其中 $\underline{a_i}>0,(i=1,2,\cdots m)$

$\checkmark \quad = \max\{a_i\} = a \ \checkmark$

$\checkmark$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3$

【解】

$$\sqrt[n]{a^n} \le \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} \le \sqrt[n]{\underline{m}\,a^n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$a \qquad\qquad\qquad\qquad \underset{\approx}{a}$$

【例41】（2008年4）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

（A） a　　　（B） a^{-1}

（C） b　　　（D） b^{-1}

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}\to\frac{1}{a}$$

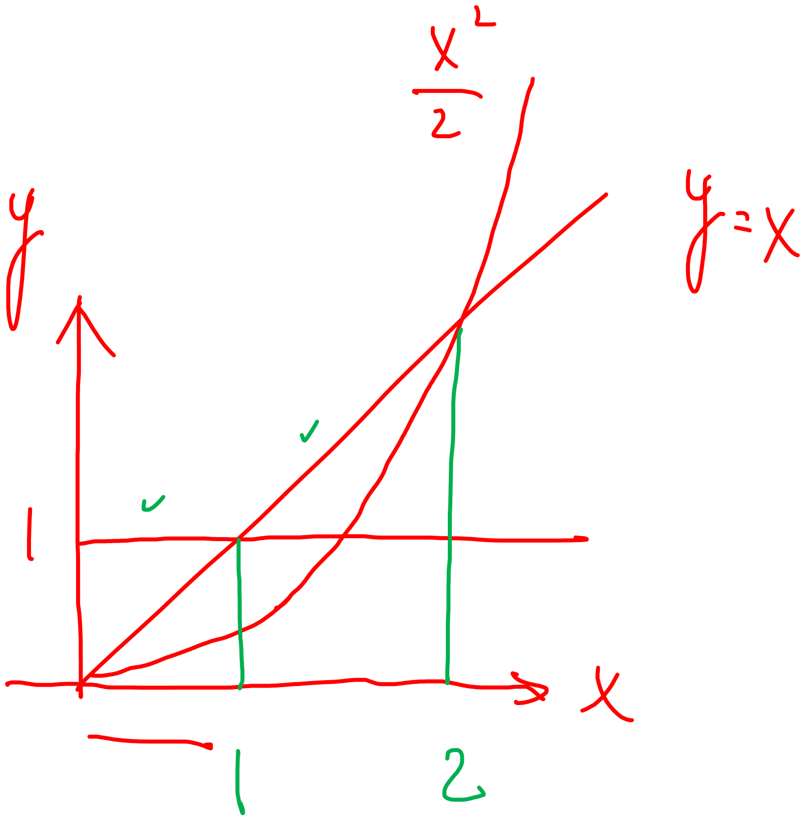
【例42】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $(x>0)$.

2

100 $\quad 1^n+1^n$

【解】 原式 $=\max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}$

$$=\begin{cases} 1 & 0<x\le 1 \\ x & 1<x\le 2 \\ \frac{x^2}{2} & x>2 \end{cases}$$



方法7 利用单调有界准则求极限

$x_{n+1}=f(x_n)$ * ① 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在（单调有界）*

【例43】设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right), n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

② $a=f(a)\Rightarrow a$

【解】由题设知 $x_n>0$, 且

[解] 由 $x_1>0$，则归纳设知 $x_n>0$

$2ab\le a^2+b^2$

$x_1=1, 0, 1, 0, 1 \cdots$

$x_{n+1}=1-x_n$

$a=1-a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\ge\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x_n^2}{x_n}\le 0$$

$x_n\ge 1$

$x_n\downarrow$

或 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{x_n^2}\right]\le\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1}\right]=1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$a=1$

② 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad \lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\Rightarrow a=\frac{1}{a}\Rightarrow a^2=1,\ a=\pm1$

方法8 利用定积分定义求极限

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>0)$ $\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1)<\frac{1}{n+1}$

【例44】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$ $=\ln 2$

$\stackrel{?}{=}\int_a^b f(x)dx$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

主体 变 n等分

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$

$\stackrel{*}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$

“找可爱的 $\frac{1}{n}$”

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right]$$

夹 ✓

主　变

次量级 $\leftarrow \dfrac{变}{主} = \dfrac{n+n}{n^2} \to 0$

?

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$$

定积分

主体　变

同量级 $\leftarrow \dfrac{变}{主体} = \dfrac{n}{n} \to 1 \neq 0$

$\dfrac{1}{n}$