

高数基础班 (8)

8

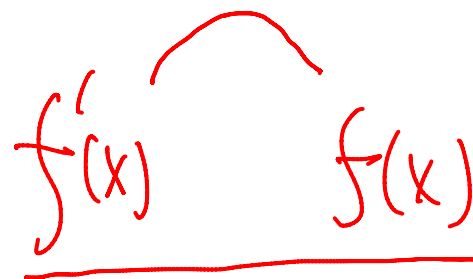
微分中值定理（罗尔，拉格朗日，柯西）；泰勒公式；函数的单调性，极值，曲线的凹向、拐点及渐近线，导数在经济学中的应用

P83-91

主讲 武忠祥 教授

第三章 微分中值定理及导数应用

本节内容要点



A handwritten red diagram. It features a curved line arching from the expression $f'(x)$ on the left to $f(x)$ on the right. Below these two expressions is a horizontal red line.

一. 考试内容概要

(一) 微分中值定理

(二) 导数的应用

二. 常考题型与典型例题

基本

题型一 函数的极值和最值, 曲线的凹向与拐点

题型二 曲线的渐近线

*

较难

题型三 方程的根

题型四 不等式的证明

难

题型五 中值定理的证明题

第三章 微分中值定理与导数的应用

考试内容概要

(一) 微分中值定理

定理1 (费马引理)

① + ②

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 那么

$$f'(x_0) = 0.$$

定理2 (罗尔定理)

① $m = 14$

若 1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

② $m \neq 14$

2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导;

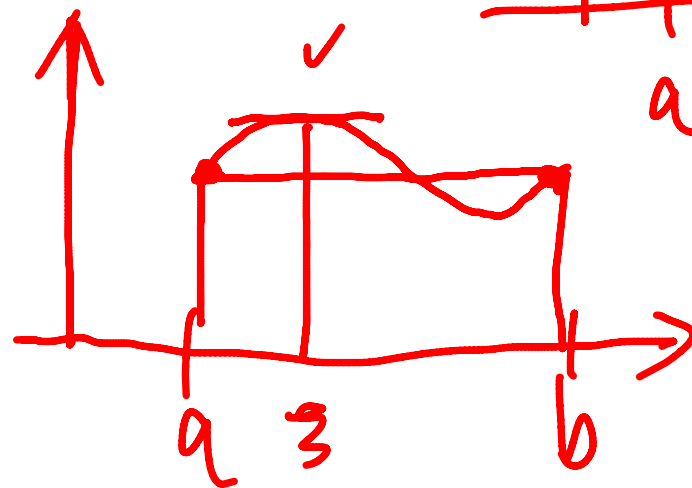
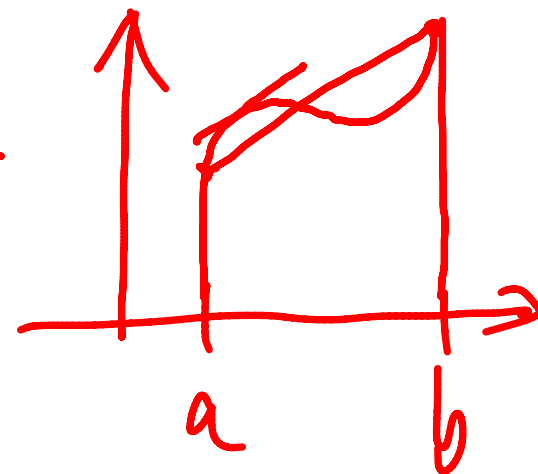
? 3) $f(a) = f(b)$; ✓

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

✓ $|x|$

∩

∪



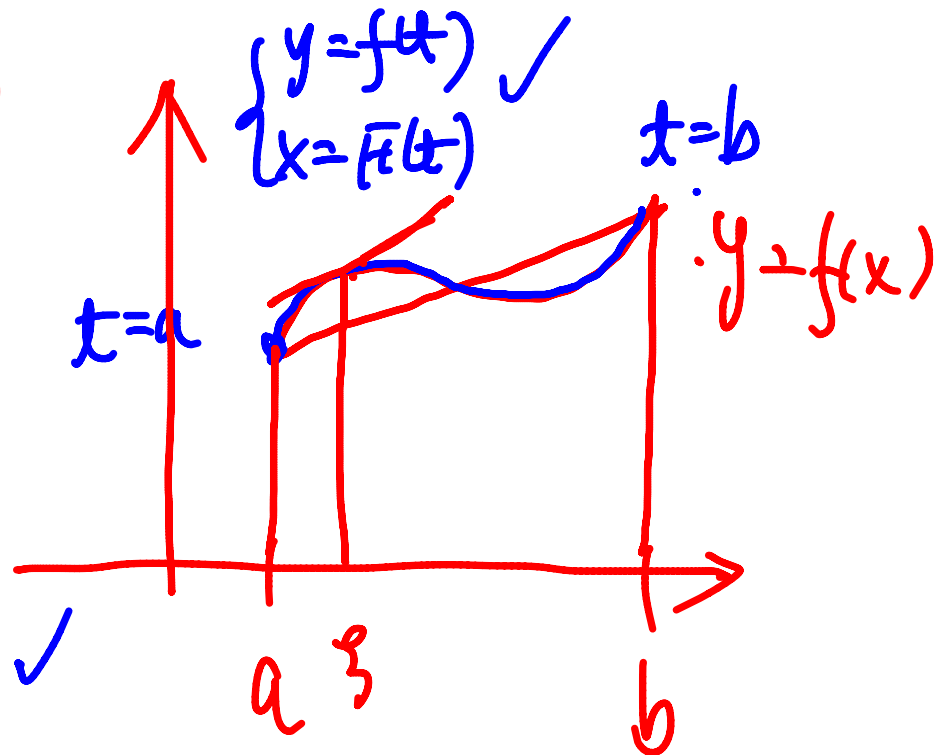
定理3 (拉格朗日中值定理)

若 1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
 2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导;
 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(a) = f(b)$$



定理4 (柯西中值定理)

若 1) $f(x), F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
 2) $f(x), F(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$;
 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

① 关系
 ② 关系
 * 推 *
 复 \rightarrow $f(x)$ \rightarrow $F(x)$
 $f(b) = f(a)$ 特例 $F(x) = x$

定理5 (皮亚诺型余项泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点 n 阶可导, 那么

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o(x - x_0)^n$, ($x \rightarrow x_0$)

若 $x_0 = 0$, 则得**麦克劳林公式**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

定理6 (拉格朗日型余项泰勒公式)

设 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a, b) 内 $n+1$ 阶可导, 那么对 $\forall x \in (a, b)$, 至少存在一个 ξ , 使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 在 x_0 与 x 之间.

共同点:

① 多项式逼近

② 余项 $\sim \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$

又同点:

1) 条件

2) 余项:

皮: 局部 { 极限

拉: 整体 { 取值 区间 a, b

x_0 ? 信息量.

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$(3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(4) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

(二) 导数应用

1. 函数的单调性

定理7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。

1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增;

2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减;

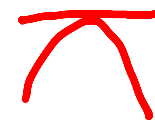


2. 函数的极值

定义 (极值) 若 $\exists \delta > 0$, 使得

$\forall x \in U(x_0, \delta)$ 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极小值**.

$\forall x \in U(x_0, \delta)$ 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极大值**.

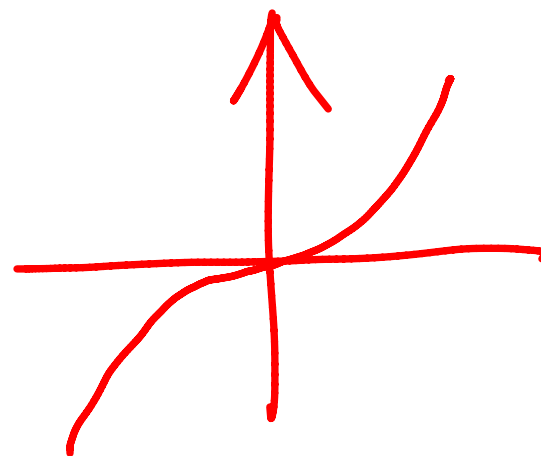


定理8 (极值的必要条件)

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则

$$\rightarrow f'(x_0) = 0$$

$|x|$
极值点 $\xleftrightarrow{x} x_0$ 驻点
 \xleftarrow{x}



$f(x)$ 可导



可得极值是 $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \text{ 不存在} \end{array} \right.$

定理9 (极值的第一充分条件)

①

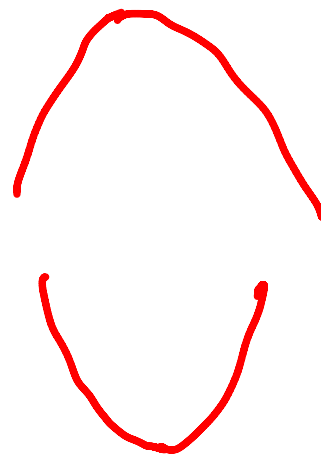
② $f'(x_0) \neq 0$

设 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续)

(1) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) \geq 0$; $x > x_0$ 时, $f'(x) \leq 0$, 则 f 在 x_0 处取极大值.

(2) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) \leq 0$; $x > x_0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 则 f 在 x_0 处取极小值.

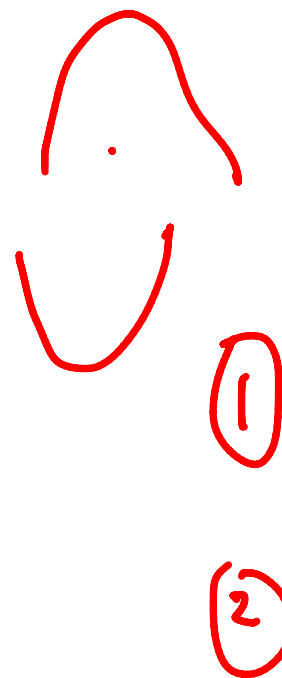
(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧不变号, 则 f 在 x_0 无极值.



定理10 (极值的第二充分条件) 设 \checkmark \checkmark
 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$

(1) 当 $f''(x_0) < 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

(2) 当 $f''(x_0) > 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.



3. 函数的最大最小值

(1) 求连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值

第一步：求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和不可导的点

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

第二步：求出函数值 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b);$

第三步：比较以上各点函数值.

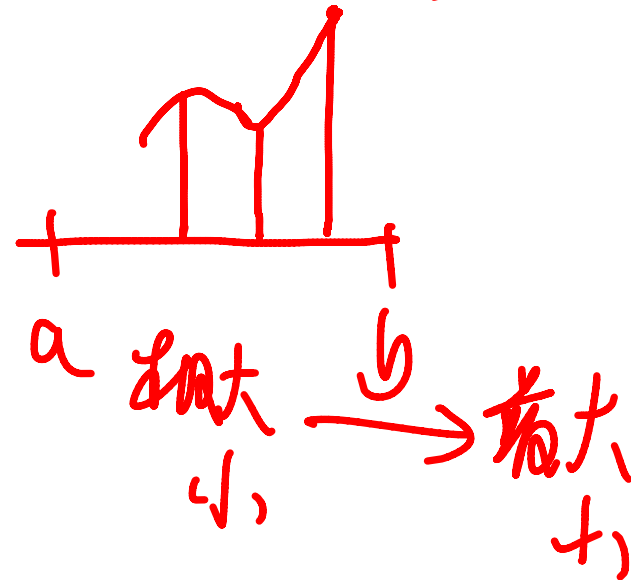
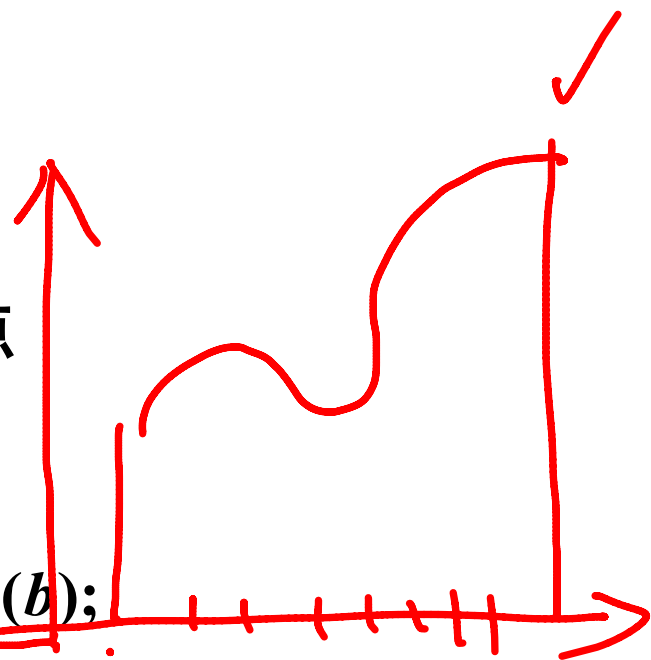
【注】若连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内仅有唯一极值点,

(2) 最大最小值的应用题

第一步：建立目标函数

$$y = f(x) \checkmark$$

第二步：



4. 曲线的凹凸性

定义 3

凹

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

凸

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

定理 11 若在区间 I 上 $f''(x) > 0$ (< 0), 则曲线

$y = f(x)$ 在 I 上是凹 (凸) 的。 $(x_0, f(x_0))$

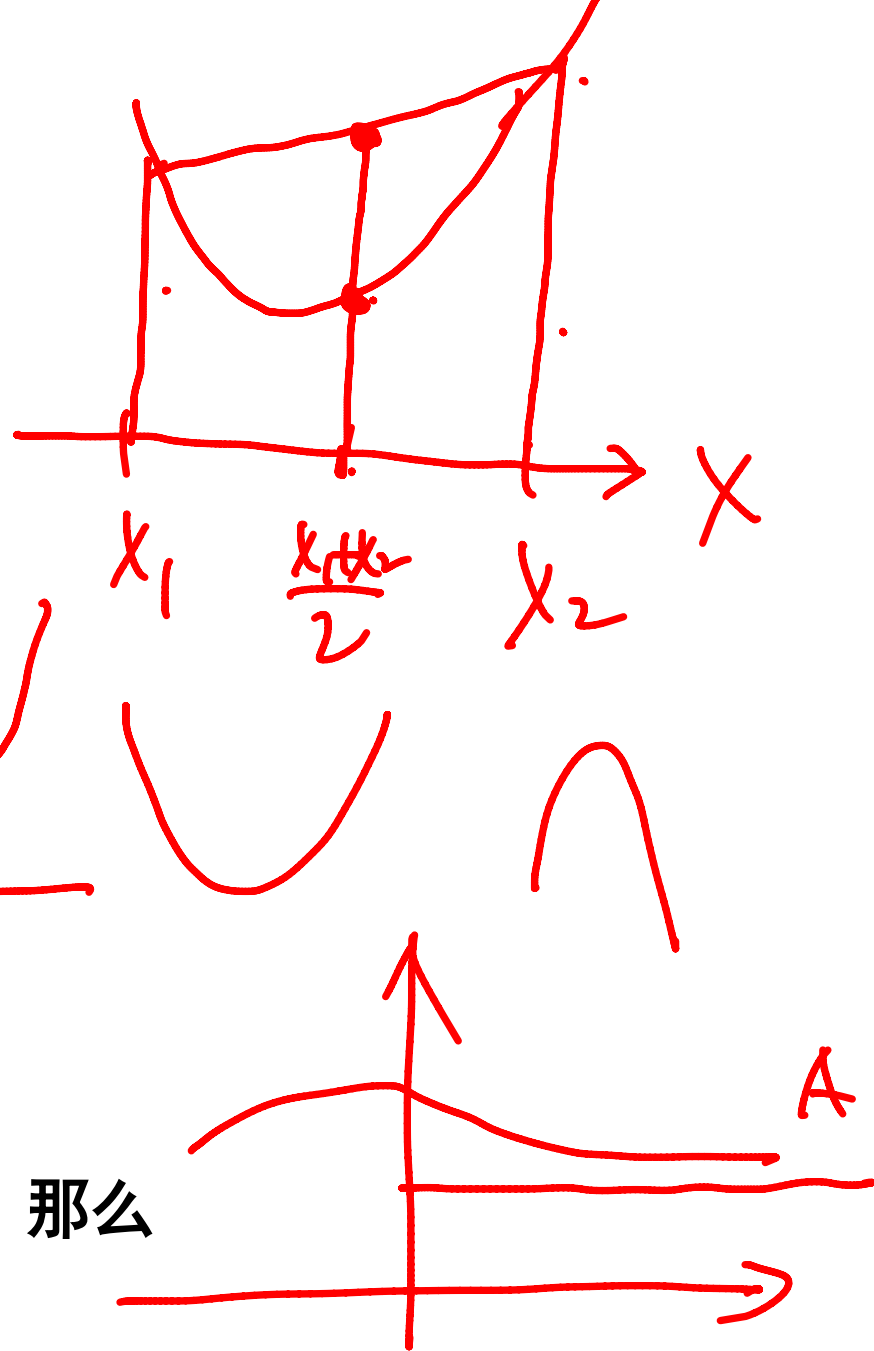
定义4 (拐点)

判定 (必要条件与充分条件)

5. 曲线的渐近线

1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$) 那么

$y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.



2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 那么 $x = x_0$ 是 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

3) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$, 那么 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

6. 函数的作图

7. 曲线的弧微分与曲率(数三不要求)

曲率

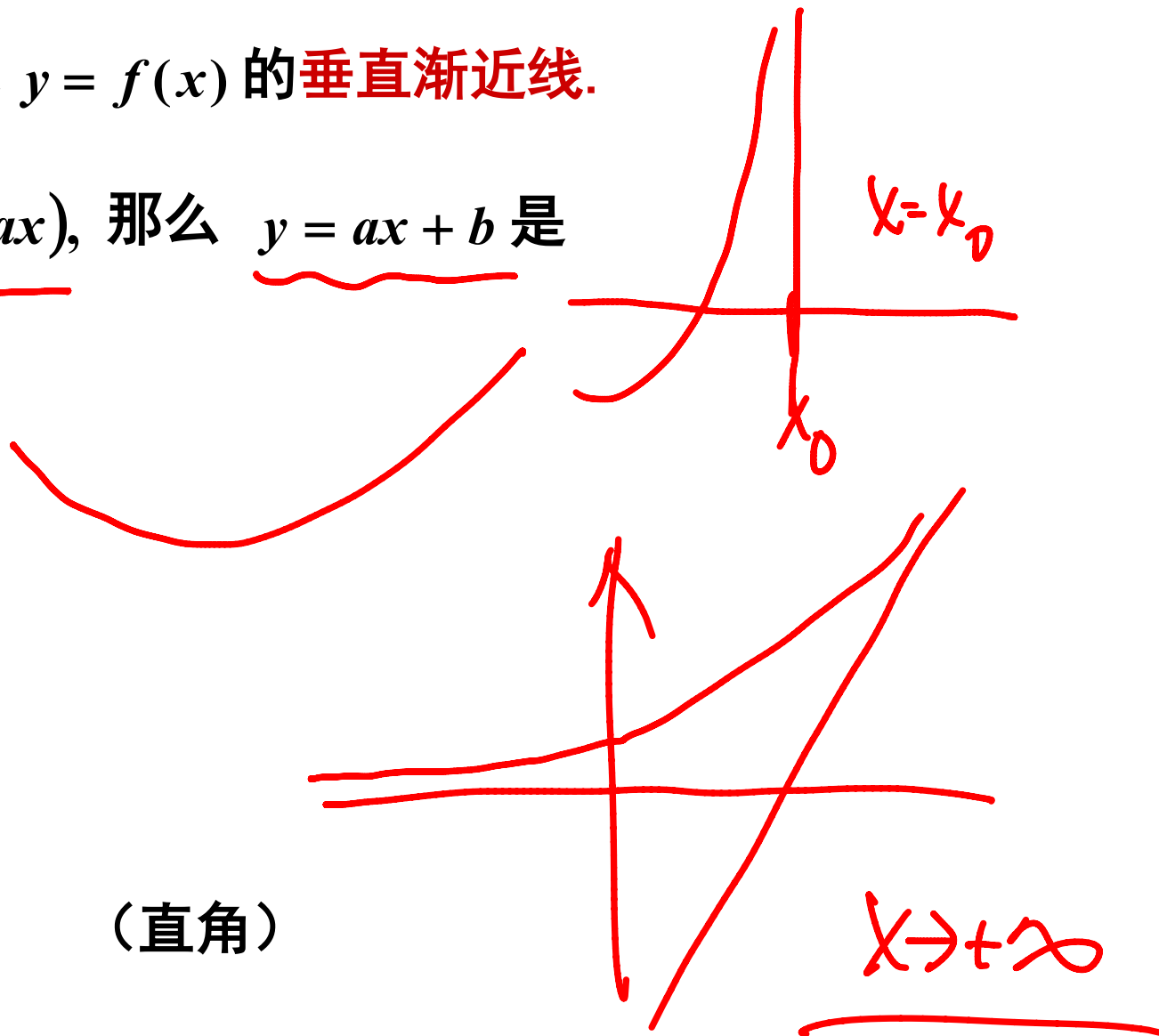
$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



(直角)

曲率半径

$$R = \frac{1}{K}$$



8. 导数在经济学中的应用 (仅数三要求)

1. 经济学中常见的函数

1) 需求函数: $x = \varphi(p)$

x 为某产品的需求量, 其 p 为价格. 需求函数的反函数

$p = \varphi^{-1}(x)$ 称为价格函数.

2) 供给函数: $x = \psi(p)$

x 为某产品的供给量, p 为价格.

3) 成本函数: $C = C(x) = C_1 + C_2(x)$.

C_1 为固定成本, $C_2(x)$ 为可变成本, x 表示产量.

平均成本 $AC = \bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}$

4) 收益函数 $R = R(x) = px$

销售量 x 与销售单价 p 之积.

5) 利润函数 $L = L(x) = R(x) - C(x)$

(x : 销售量)

2. 边际函数与边际分析

1) 边际函数: 设 $y = f(x)$ 可导, 则称 $f'(x)$ 为边际函数,
 $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的边际值.

(a) 边际成本 $MC = C'(q)$ q 是产量

(b) 边际收益 $MR = R'(q)$ q 是产量

(c) 边际利润 $ML = L'(q)$ q 是销售量

3.弹性函数与弹性分析

①弹性函数：设 $y = f(x)$ 可导，

$$\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

(a) 需求的价格弹性： $\eta_d = \frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p)$. $(\eta_d < 0)$

$$\eta_d = -\frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p) \quad (\eta_d > 0)$$

(b) 供给的价格弹性：

$$\eta_s = \frac{p}{\psi(p)} \psi'(p)$$

【例1】(2014) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格), 则该商品的边际收益为 _____.

【解】由题设知收益函数为

$$R = \underline{pQ} = \frac{40 - Q}{2} \cdot Q$$

则边际收益为

$$\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$$

【注】边际收益是“当商品的需求量在 Q 的基础上再增加一件所获得的收益”，所以边际收益为 $\frac{dR}{dQ}$. 部分考生错误的将 $\frac{dR}{dp}$ 当作边际收益.

【例2】(2017) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中产

量为 Q , 则边际成本为 _____.

【解】成本 $\checkmark C(Q) = \checkmark \bar{C}(Q) \checkmark Q = \checkmark Q(1 + e^{-Q})$

边际成本为 $\frac{dC}{dQ} = (1 + e^{-Q}) - Qe^{-Q} = 1 + (1 - Q)e^{-Q}$

$\bar{C} = \frac{C}{Q}$

【例3】(2009) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$: 其对应
价格 p 的弹性 $\xi_p = 0.2$, 则当需求量为10000件时, 价格
增加1元会使产品收益增加 12000 元。

【解】由题设知 $-\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \varepsilon_p = 0.2$

收益函数 $R = Qp$

收益微分为

$$\underline{dR} = p dQ + Q dp = Q \left(1 + \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) dp = \underline{Q(1 - \varepsilon_p)} \underline{dp}$$

当 $Q = 10000, dp = 1$ 时, 产品的收益增加

$$dR = 10000 \times (1 - 0.2) \times 1 = 8000 \text{ (元)}$$

【例4】(2010) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为

$1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

【解】 由题意知 $\frac{p}{R} \cdot \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$, 即

$$\underline{\frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{p} + p^2 \right) dp}$$

$$\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^3 + C$$

$$R(p) = p e^{\frac{1}{3} p^3 + C}, \text{ 由 } R(1) = 1 \text{ 得 } C = -\frac{1}{3}, \text{ 故}$$

$$R(p) = p e^{\frac{1}{3}(p^3 - 1)}$$



还不关注，
你就慢了

