高数基础班（21）

21	幂级数（概念、性质、函数展开为幂级数，级数求和及举例）	P232-P243

主讲 武忠祥 教授

第二节　幂级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）收敛半径 收敛区间 收敛域

（二）幂级数的性质

（三）函数的幂级数展开

二. 常考题型与典型例题

题型一 求收敛半径、收敛区间及收敛域

题型二 将函数展开为幂级数

题型三 级数求和

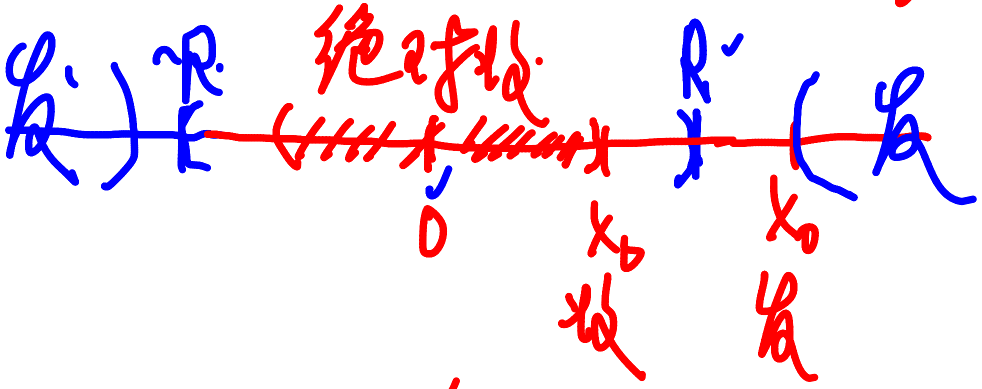
考试内容概要

（一）幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

定义1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$

$x - x_0 = t$



定理1（阿贝尔定理）

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 时收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有以下三种可能

（1）对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都收敛；　$R = +\infty$

（2）仅在 $x = 0$ 处收敛；　$R = 0$

（3）存在一个正数 R, 当 $|x| < R$ 时绝对收敛，当 $|x| > R$ 时发散.

【注】 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛，则点 x_0 必为该幂级数收敛区间 $(-R, R)$ 的一个端点.

定理3 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则 $R = \dfrac{1}{\rho}$.

$\rho = +\infty$, $R = 0$

$\rho = 0$　$R = +\infty$

定理4 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $R = \dfrac{1}{\rho}$.

$(-R, R)$ 收敛区间

$x = \pm R$ 收敛域

（二）幂级数的性质

1）有理运算性质

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，

令 $R = \min\{R_1, R_2\}$，则当 $x \in (-R, R)$

$R_1 \neq R_2$,

$R_1 = 1$　$R_2 = 1$

$\sum (-x^n)$

$+$

$\sum x^n$

$R_1 = R_2$　$= \sum 0 x^n$

$R = +\infty$

（1）加减法： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

（2）乘法： $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

(3) 除法：$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

2) 分析性质：

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 和函数为 $S(x)$. 则

(1) 连续性：$S(x)$ 在收敛域上连续；

(2) 可导性：$S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且可逐项求导,

任意阶可导

半径不变. 即

R

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) 可积性：$S(x)$ 在收敛域上可积，且可逐项积分，半径不变. 即

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}.\quad R$$

(三) 函数的幂级数展开

x_0 $\qquad \int_0^1 e^{x^2}\,dx$

定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，则，其展开式是唯一的，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \stackrel{?}{=} f(x)$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

定理2 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛于 $f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

中的余项.

几个常用的展开式

$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int 1 - x + x^2 - x^3$

(1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots;$ $\quad (-1 < x < 1)$

(2) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$ 直 ✓

(3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$ 直 ✓

(4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$ 间

(5) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$ $\quad (-1 < x \le 1)$ 间

(6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ 间

$(-1 < x < 1)$

函数展开为幂级数的两种方法

1）直接展开法

第一步 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

第二步 考查 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$

是否成立.

2）间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则运算，逐项求导，逐项积分）及变量代换等方法，求得所给函数的展开式.

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1.求收敛半径、收敛区间、收敛域；

2.将函数展成幂级数；

3.求幂级数的和函数. * 难·重

一．求收敛半径、收敛区间及收敛域

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $|q|<1$

【例1】（09年3）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________. [$\frac{1}{e}$]

【解1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{e^n-(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e+(-\frac{1}{e})^n}{1-(-\frac{1}{e})^n}\cdot\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = e$

$R=\frac{1}{e}$

∞^0 $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 0$

【解2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}} \overset{*}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e\sqrt[n]{1-(-\frac{1}{e})^n}}{(\sqrt[n]{n})^2} = e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$R=\frac{1}{e}$

【例2】（1995年1）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ ________.

x^{2n} $=(x^2)^n$

x^n

$(-3)^n$

[$\sqrt{3}$]

缺项

【解】 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}$

$\sqrt[n]{n}\to 1$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^n\to 0$

$=\frac{1}{3}=\rho$

$\cancel{R=\frac{1}{\rho}=3}$

$|x^2|<3$

$\Downarrow$

$|x|<\sqrt{3}$

$R=\sqrt{3}$

【例3】(00年1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

$\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}}$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}](n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3}=\rho$

$\to \frac{2}{3}<1$

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+(-\frac{2}{3})^n}}=\frac{1}{3}$

所以收敛半径为3, 收敛区间为 $(-3,3)$

$(-R,R)$

当 $x=3$ 时, $\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 原级数发散.

收敛域

当 $x=-3$ 时, $\frac{(-3)^n+2^n-2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$

$[-3,3)$

且都收敛, 原级数收敛.

【例4】（2008年1）已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 ________.

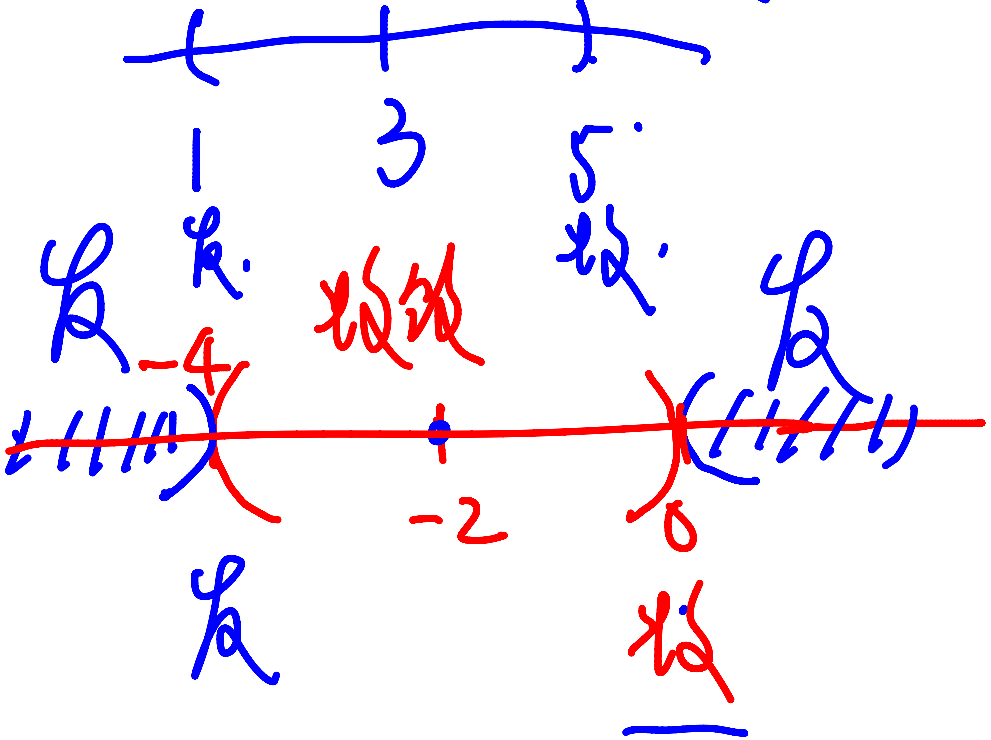
$(1, 5)$

$(1, 5]$

【解】

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$$

$(-4, 0]$



阿贝尔定理 大

【例5】若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

（A）收敛点，收敛点.　　（B）收敛点，发散点.

（C）发散点，收敛点.　　（D）发散点，发散点.

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$

【解】由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则 $x=2$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛区间的端点，

$= \sum a_n$

(0, 2)

绝对收敛

外

收

②

$x=2$

条件

故其收敛半径为 1. 由幂级数的性质可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛半径也为 1.

1　$\sqrt{3}$　2　3

收　条件

③

由于 $|\sqrt{3}-1|<1, |3-1|>1$. 则 $x=\sqrt{3}$ 为收敛点，

$x=3$ 为发散点，故应选（B）.

二．将函数展开为幂级数

【例6】（06年1）将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$\dfrac{1}{1-x}$

【解】因为 $\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$

$\dfrac{1}{1+x}$

$\dfrac{1}{3}\dfrac{(2-x)+(1+x)}{(2-x)(1+x)}$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad |x|<2$$

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1},\quad |x|<1.$$

【例7】(2007年3) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

$\dfrac{1}{5}\dfrac{(x+1)-(x-4)}{(x-4)(x+1)}$

$\dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{1}{1+x}$

【解】 因为 $$\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{(x-1)-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,\quad x\in(-2,4)$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n,\quad x\in(-1,3)$$

所以 $$\frac{1}{x^2-3x-4}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,\quad x\in(-1,3).$$

【例8】将函数 $f(x)=\ln(x^2+x)$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

$[\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\frac{1}{2^n})(x-1)^n, |x-1|<1]$

【解】

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}}$$

$x-1$

$x=0$

$$f(x)=\ln x(x+1)=\ln x+\ln(x+1)$$

$$=\ln[1+(x-1)]+\ln[2+(x-1)]$$

$$=\ln[1+(x-1)]+\ln 2+\ln\left[1+\frac{x-1}{2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$|x-1|<1$

$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$

$|x-1|<2$

【例9】将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

$x=0$

【解】 $f(x)=\sin[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})]$ $x-\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

【例10】将函数 $f(x)=\arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

$[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}x^{4n+2}, |x|<1]$

【解】

$f(0)=0$

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}=2x\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n+1}$

$|x^4|<1$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad |x|<1$

$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$

$|x|<1$

$f(x)$

$+C$

三．级数求和

【例11】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

$\left[(-1,1); \dfrac{x}{(1-x)^2}\right]$

$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

展开式

求和式

【解】

$R=1$ $\quad x=\pm1$ 发 $\quad (-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

① 公式

② 性质

【例12】（2017年1）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\right)$

$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n}$

【解】 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n)'$

$=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$

$\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right]'=\left[-\left(\frac{1}{1+x}-1\right]\right)'$

$\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$\frac{1}{(1+x)^2}$

【例13】（2014年3）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【解】 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, $R=1$, 当 $x=\pm1$ 时原级数显然发散，则其收敛域为 $(-1,1)$.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

x^{n+2} x^{n+1}

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)''+\left(\frac{x-1+1}{1-x}\right)'$$

$$=\left(-(x+1)+\frac{1}{1-x}\right)''+\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{3-x}{(1-x)^3}\qquad x\in(-1,1).$$

【例14】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解: $S(x)$

$-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left[-\ln(1-x)-x\right]$

【解】 $R=1$. $x=\pm1$ 收敛: $[-1,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}x^n=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(x\neq0)$$

$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left[-\ln(1-x)-x\right]\quad(x\neq0)$$

$0<|x|\le1$

$$S(x)=\begin{cases} -\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left[-\ln(1-x)-x\right], & -1\le x<0,\ 0<x\le1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

【注】可利用结论: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\ (-1\le x<1)$.

{[−1,1]; $1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)$}

【例15】（2010年1）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

【解】 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$ 因此收敛半径 $R=1$.

$u_n=\frac{1}{2n-1}\downarrow \to 0$

当 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，因收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\ (-1\le x\le 1)$ $=\arctan x$ $\quad x \quad (x^2)^{n-1}$

则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$

$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx$

又 $S(0)=0$，故 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x,\ x\in[-1,1]$.

【例16】(24年1, 3) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = $ ( )

$a_n(-x)^n$ $-x$

(A) $-\frac{1}{6}$.　(B) $-\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{6}$.　(D) $\frac{1}{3}$.

$\ln(1+x)$

【解1】 $\ln(2+x) = \ln 2 + \ln(1+\frac{x}{2}) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$　x^n　x^{2n}

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n \cdot 2^{2n}} = -\frac{1}{n2^{2n+1}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{1}{6}$$

【解2】 $\frac{1}{2}[\ln(2+x)+\ln(2-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$　$\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_{2n} x^{2n-1}$　$x=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x}\right]\Bigg|_{x=1} = -\frac{1}{6}$$


还不关注，
你就慢了