高数基础班（19）

19	二重积分（概念、性质、计算方法及举例）	P213-222

主讲 武忠祥 教授

第九章　二重积分

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）二重积分的概念与性质

（二）二重积分计算

二. 常考题型方法与技巧

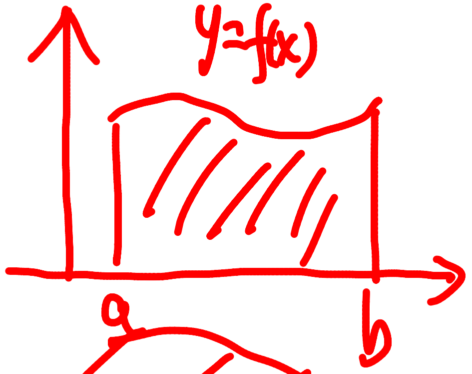
题型一　累次积分交换次序及计算

题型二　二重积分计算

考试内容概要

$f(x) \geq 0$

$\int_a^b f(x)dx = S$

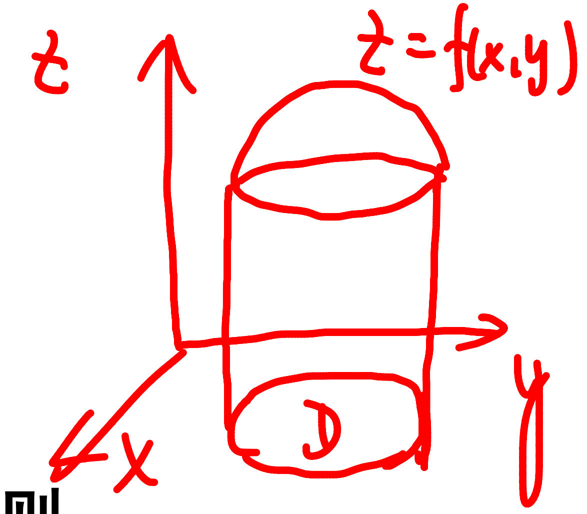


(一)二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

定义1 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$

几何意义 $z = f(x,y) \geq 0$



$f(x,y) = 1$

$\iint\limits_D 1 d\sigma = S_D$

2. 二重积分的性质

性质1（不等式）

（1）在 D 上若 $f(x,y) \leq g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

(2) 若在 D 上有 $m \le f(x,y) \le M$，则

$$mS \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MS,$$

其中 S 为区域 D 的面积。

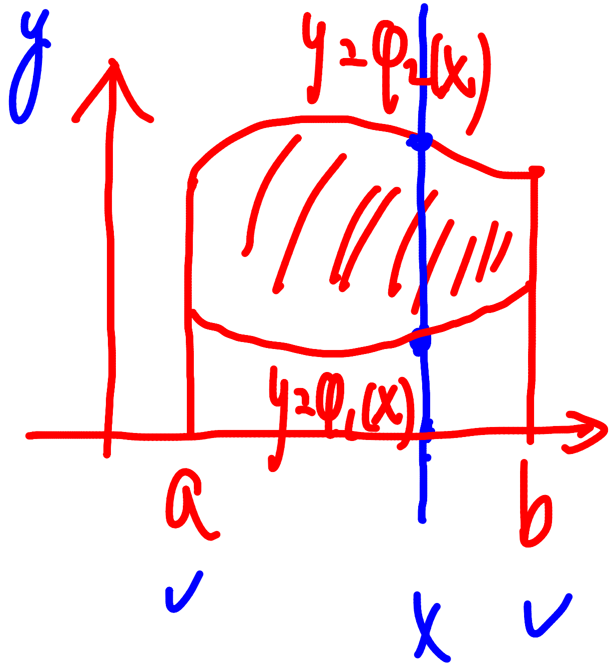
$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

$a \le x \le b$

(3) $$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质2（中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，S 为区域 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$$



(二) 二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

1）先 y 后 x $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

2）先 x 后 y $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ $d\sigma = \rho d\rho d\theta$

!!! $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$

2. 利用极坐标计算

1）先 ρ 后 θ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ $c \le y \le d$

【注】适合用极坐标计算的二重积分的特征

（1）适合用极坐标计算的被积函数： $F(\theta)$

$f(\rho)$

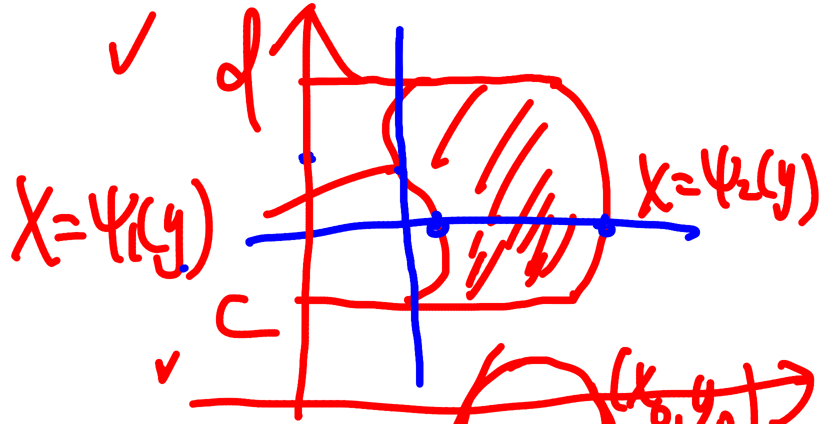
$$f(\sqrt{x^2+y^2}),\ f(\frac{y}{x}),\ f(\frac{x}{y});$$

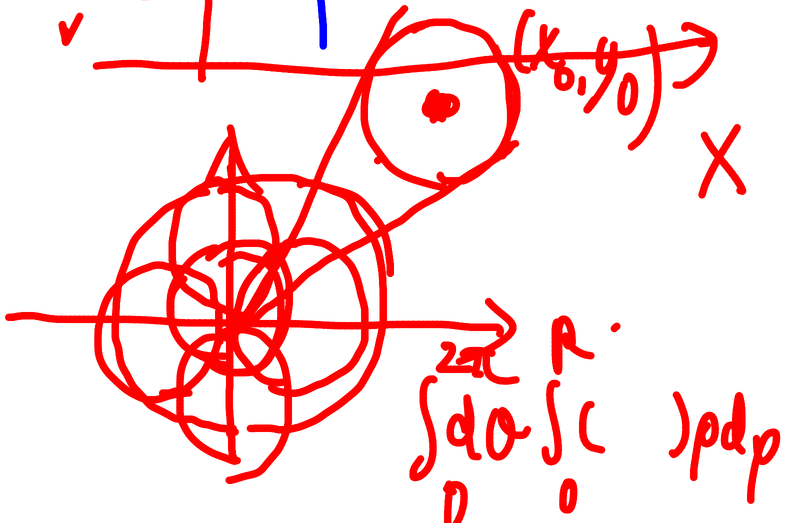
$x-x_0=\rho\cos\theta$
$y-y_0=\rho\sin\theta$

（2）适合用极坐标的积分域：如

$x^2+y^2 \le R^2$; $r^2 \le x^2+y^2 \le R^2$;

$x^2+y^2 \le 2ax$; $x^2+y^2 \le 2by$; $d\sigma = \rho d\rho d\theta$





3. 利用对称性和奇偶性计算

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & 奇 \\ 2\int_0^a & 偶 \end{cases}$

1）若积分域 D 关于 y 轴对称，则：

x ✓ 偶.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_{x\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma; & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0; & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

奇

2）若积分域 D 关于 x 轴对称，则：

y 偶

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_{y\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

y 奇

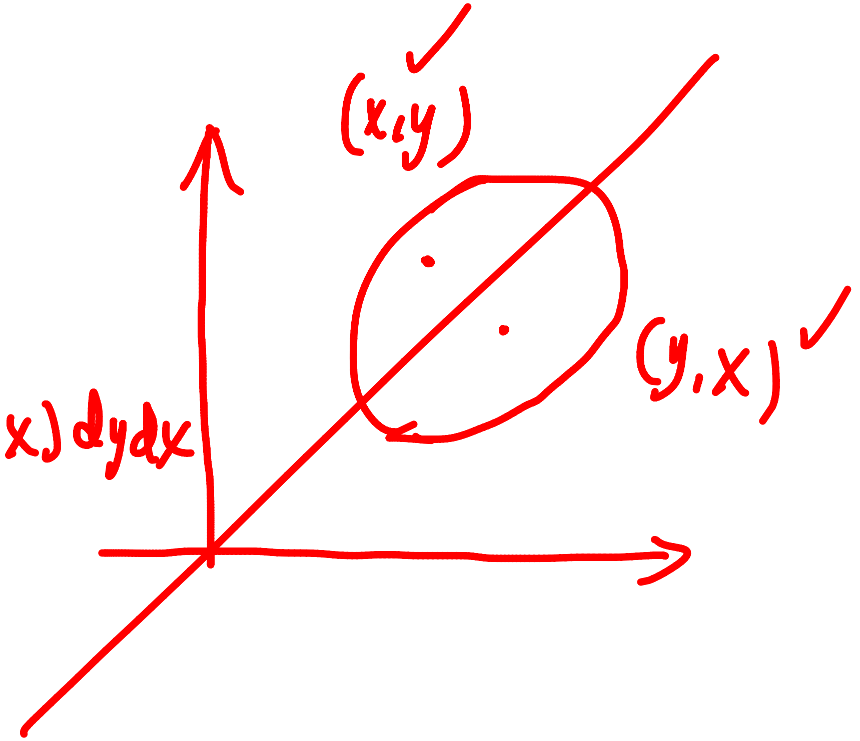
4. 利用变量对称性计算

若 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

$\iint\limits_{D_{(x,y)}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{(u,v)}} f(u,v)\,du\,dv = \iint\limits_{D_{(y,x)}} f(y,x)\,dy\,dx$

$=$



常考题型与典型例题

常考题型

1. 累次积分交换次序或计算

2. 二重积分计算

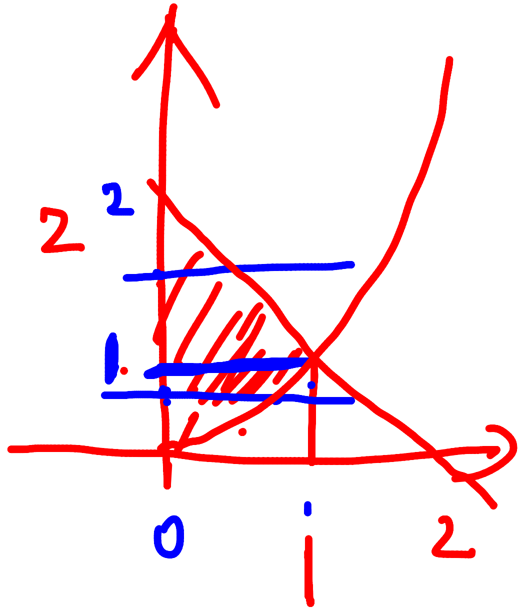
一.累次积分交换次序或计算

【例1】 交换累次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$ 的次序 ________.

$x+y=2$

$y=x^2$

$x=\sqrt{y}$



$y=2-x$

$y=x^2$

[解] ①画域

②定限

原式 $=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则

$$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$$ （C）

$x=4-y \Rightarrow x+y=4$

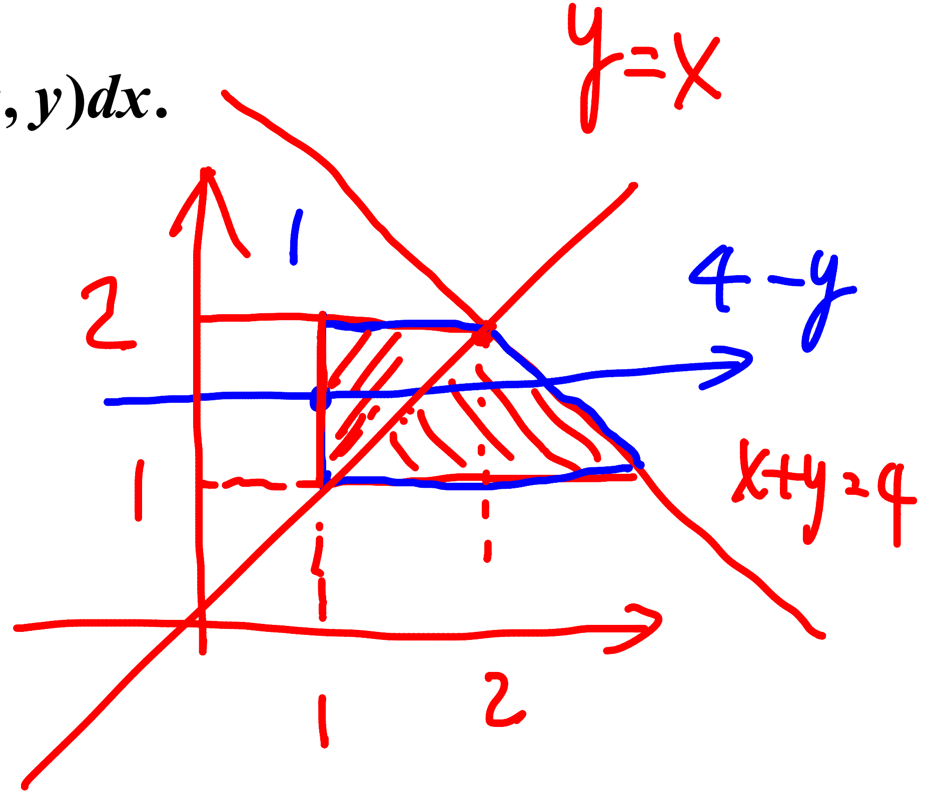
$x=y$

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy.$

(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy.$

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx.$

(D) $\int_1^2 dy\int_y^{2} f(x,y)dx.$



$y=2$

$y=x$

【例3】(1996年, 3) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$

可以写成 (D)

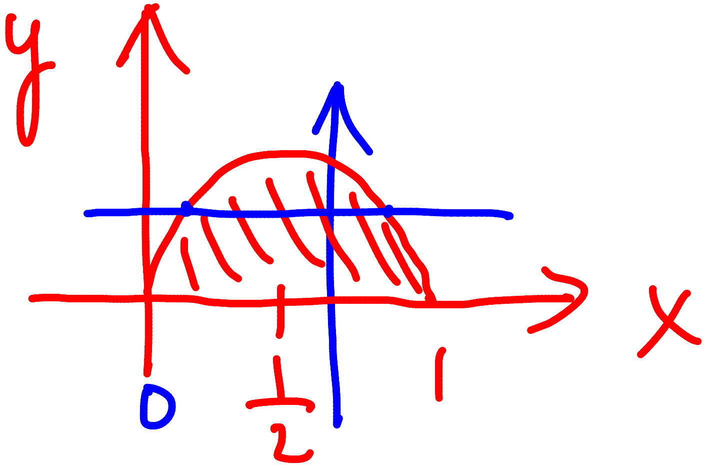
(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

①画域　$\rho = \cos\theta \Longrightarrow x^2+y^2 = x$

$\rho = 0$

②定限



【例4】（2017年2）积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx =$ ________.

$[-\ln\cos 1]$

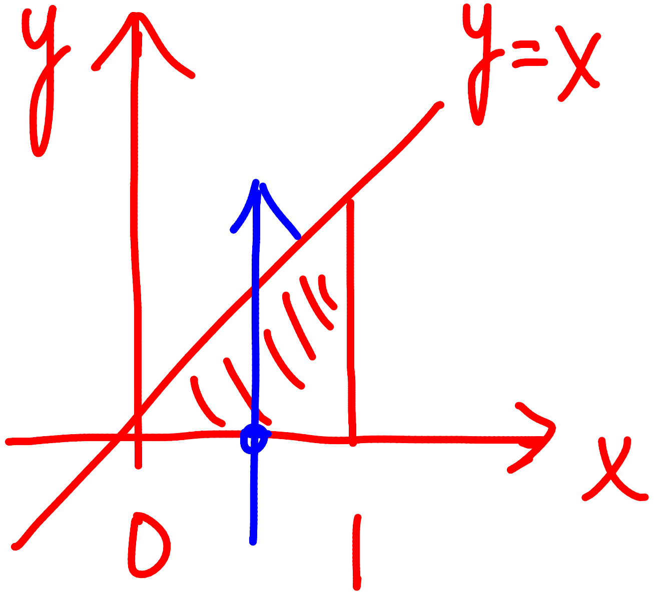
【解】原式 $= \int_0^1 dx\int_0^x \frac{\tan x}{x}dy$

交换,

$= \int_0^1 \tan x\, dx$

$= -\ln\cos x\Big|_0^1$

$= -\ln\cos 1$



【例5】 积分 $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ 的值等于 _______.

$[\frac{16}{9}]$

【解】原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho$

$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta$

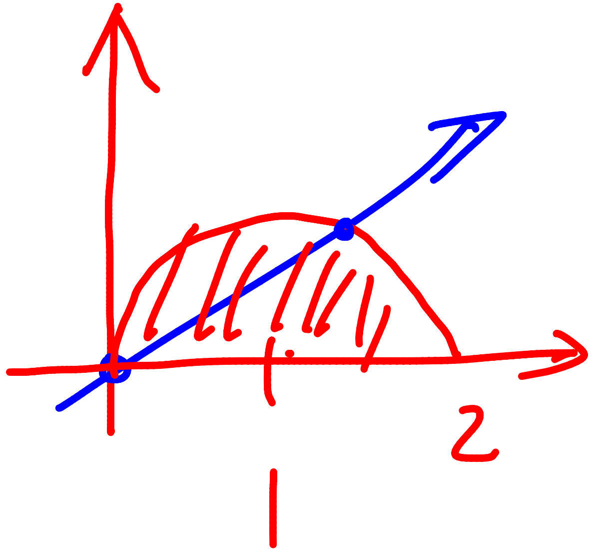
$=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}$

$y=\sqrt{2x-x^2}$

$x^2+y^2=2x$

$\rho^2=2\rho\cos\theta$

$\rho=2\cos\theta$



二. 二重积分计算

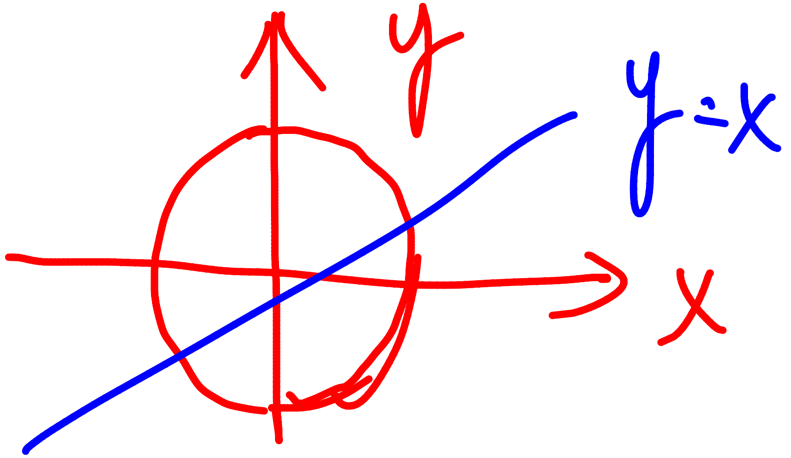
【例6】(2008年, 3) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$,

则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$ ________.

$[\frac{\pi}{4}]$

$\iint\limits_D y\,dxdy=0$ 奇.

原式 $=\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$ 对称,



$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\rho\,d\rho$

极. $=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$

【例7】（1991年, 1, 2）设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分, 则

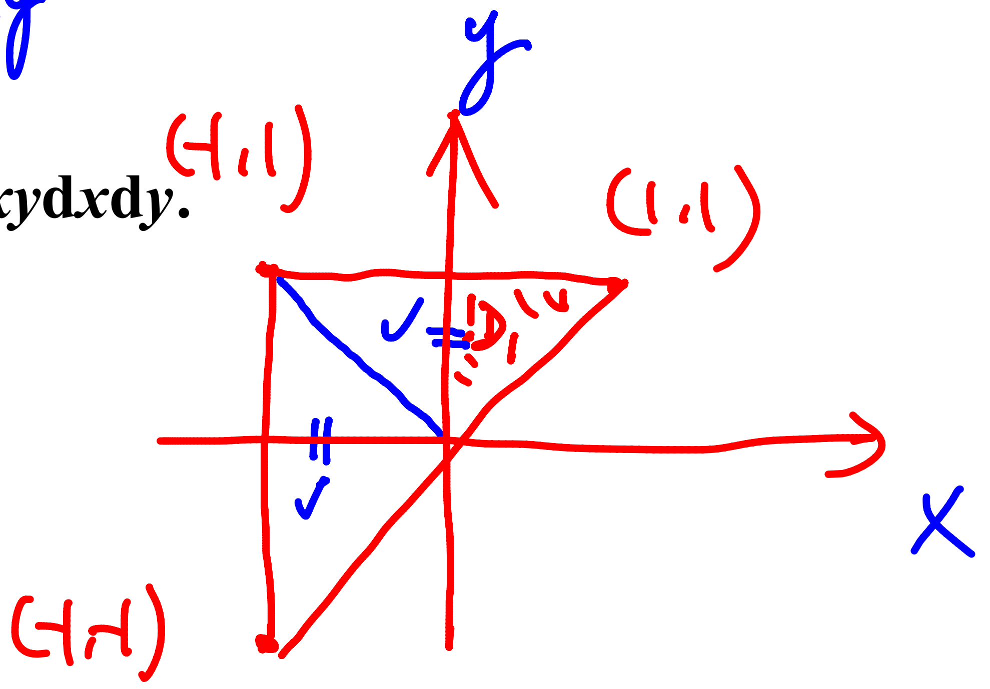
$$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

奇.

$\iint xy\,dxdy$

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（B）$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（D）0.



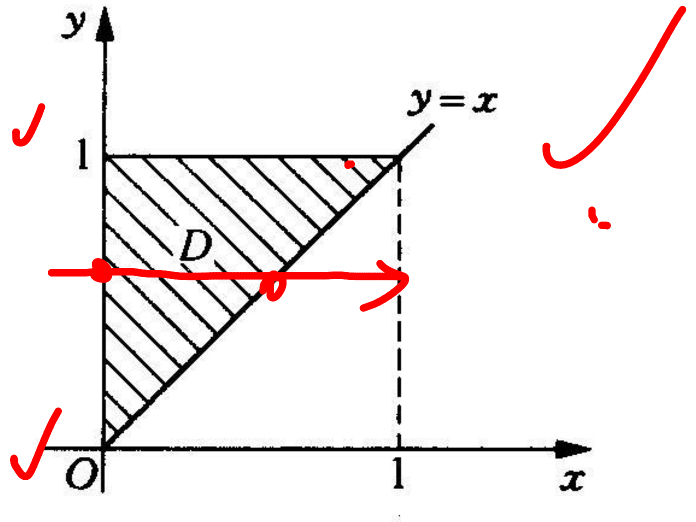
$$\iint\limits_D \cos x\sin y\,dxdy=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,dxdy$$

【例8】(2006年, 3) 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{y^2 - xy}dxdy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

【解】 原式 $= \int_0^1 \mathrm{d}\, y \int_0^y \sqrt{y^2 - xy}\, \mathrm{d}\, x$

$$= -\int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{y}(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y \mathrm{d}\, y$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}\, y = \frac{2}{9}.$$



【例】(2018年, 3) 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2dxdy$.

$[\frac{\sqrt{3}}{16}(\frac{\pi}{2}-1)]$

$2x^2=1$

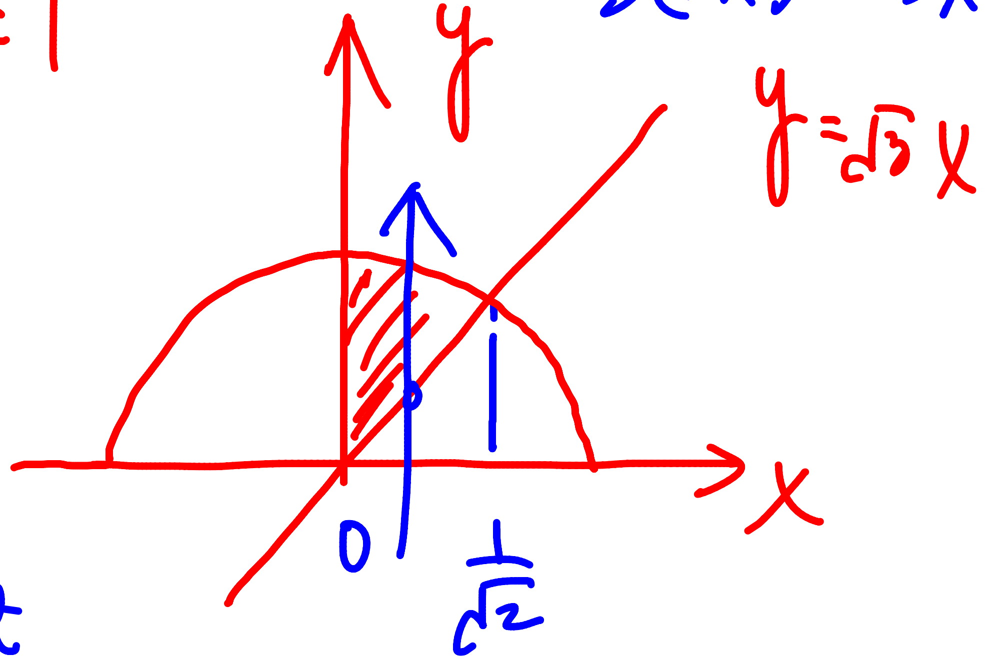
$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$3(1-x^2)=3x^2$

$x^2+\frac{y^2}{3}=1$

【解】 $\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2dy$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2(\sqrt{1-x^2}-x)dx$$



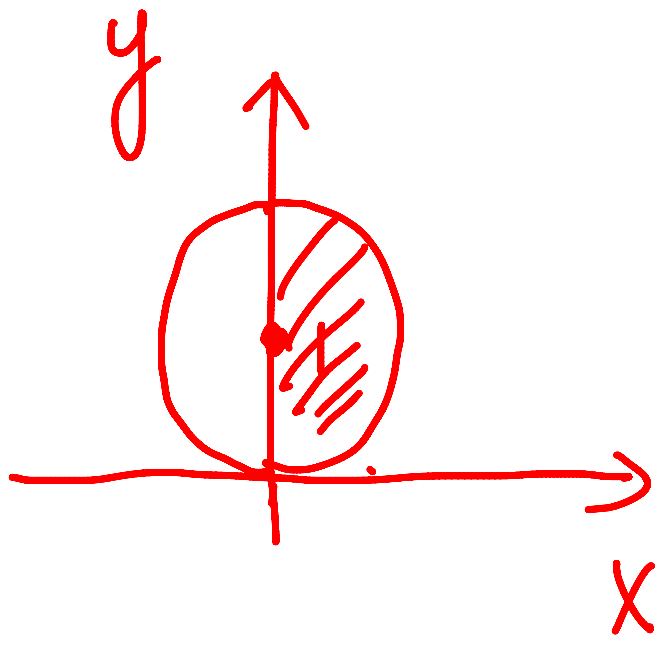
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2\sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin t}{=\!=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)dt=$$

【例9】（2017年2） 已知平面域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$

计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

0　π



【解】 $I=\iint\limits_D (x^2+\underline{2x}+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad \int_0^{\pi}$$

$$I=\iint\limits_D (x^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho+\pi$$

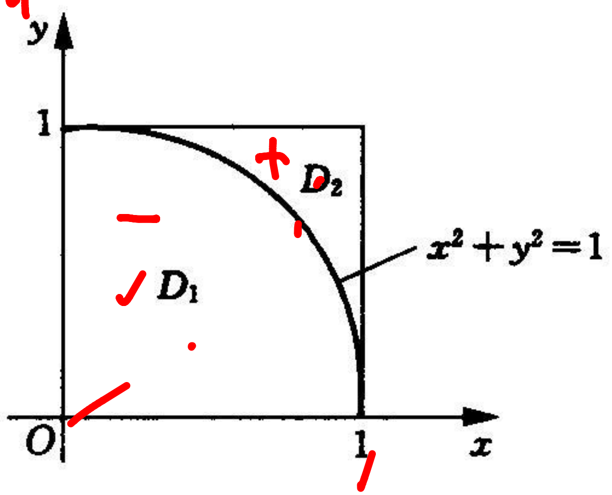
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta+\pi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta+\pi$$

$$=8\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\frac{5}{4}\pi$$

【例10】(2005年, 2, 3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$，

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



【解】 如图所示，将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.

极

$$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma.$$

?

$$=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\left[\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma\right]$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma]$$

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{8},$$

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2 - 1)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$$

因此 $$\iint\limits_D |x^2 + y^2 - 1|\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

$\|$

0

【例11】（14年2, 3） 设平面域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，

计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

【解1】由于积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

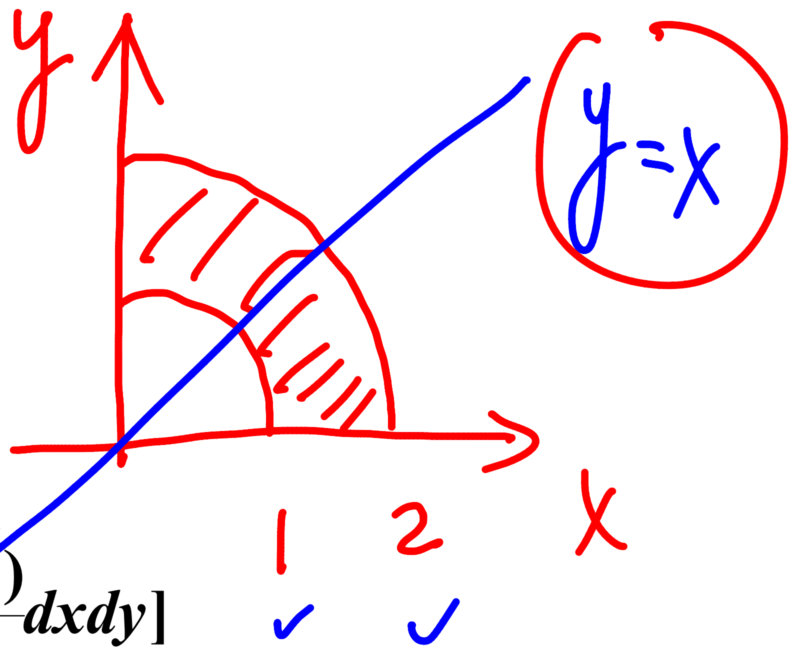
$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 \sin(\pi\rho)\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{4}\int_1^2 \rho d\cos(\pi\rho)=-\frac{3}{4}$$



【解2】 $$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy = \underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta} \cdot \underline{\int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)d\rho}$$

$\theta = \frac{\pi}{2} - t$

由于 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)d\rho = \frac{1}{\pi}\left(-\rho\cos\pi\rho + \frac{1}{\pi}\sin\pi\rho\right)\Big|_1^2 = -\frac{3}{\pi}$$

故 $$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy = -\frac{3}{4}$$

【例12】（13年2，3）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy\ (k=1,2,3,4)$，则（　）

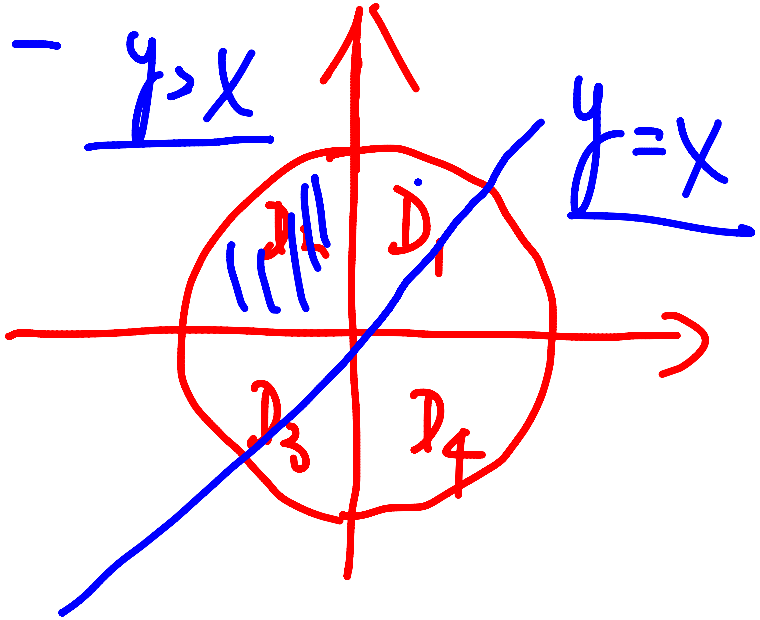
$y-x>0$　　　$y>x$

（A）$I_1>0$.　（B）$I_2>0$.　（C）$I_3>0$.　（D）$I_4>0$.

0　　$+$　　0　　$-$　$y>x$

$I_4<0$

$I_1=I_3=0$ ✓



$I_1=\iint\limits_{D_1}(y-x)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy=-I_1$

【例】(2019年2) 已知平面域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$, 记

$I_3 < I_2 < I_1$

$$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma\ \text{则}$$

$\boxed{r}$ $\boxed{\sin r}$ $\boxed{1-\cos r}$

(A) $I_3<I_2<I_1$ (B) $I_1<I_2<I_3$

(C) $I_2<I_1<I_3$ (D) $I_3<I_1<I_2$.

y $x+y=\pi$

$$\boxed{\sin x < x < \tan x\ (0<x<\frac{\pi}{2})}$$

【解1】 令 $\sqrt{x^2+y^2}=r\ (0\le r\le\frac{\pi}{2})$,

$\sin r < r$

$\sin r \ge \sin^2 r = 1-\cos^2 r \ge 1-\cos r$

【解2】 代点 $r=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$ $\sin\frac{\pi}{2}=1$ $1-\cos\frac{\pi}{2}=1$

【例】（2019年2）已知平面域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le \frac{\pi}{2}\}$，记

$$I_1=\iint\limits_D \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\boxed{r}}\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint\limits_D \underbrace{\sin\sqrt{x^2+y^2}}_{\boxed{\sin r}}\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint\limits_D \underbrace{(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})}_{\boxed{1-\cos r}}\mathrm{d}\sigma$$ 则

√ (A) $I_3<I_2<I_1$　　(B) $I_1<I_2<I_3$

(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_3<I_1<I_2$.

【解3】代点　$r=0$

$$(r)'=1$$

$$(\sin r)'=\cos r$$

$$(1-\cos r)'=\sin r$$

【解4】等价代换

$$\sin r<r$$

$$\sin r\sim r$$

$$1-\cos r\sim\frac{r^2}{2}$$

【解5】泰勒展开

$$r$$

$$\sin r=r-\frac{r^3}{3}+\cdots$$

$$1-\cos r=1-[1-\frac{r^2}{2}+\cdots]=\frac{r^2}{2}+\cdots$$


还不关注，你就慢了