高数基础班（2）

2	函数极限概念，极限的性质，极限存在准则，无穷小及无穷大	P11-P22

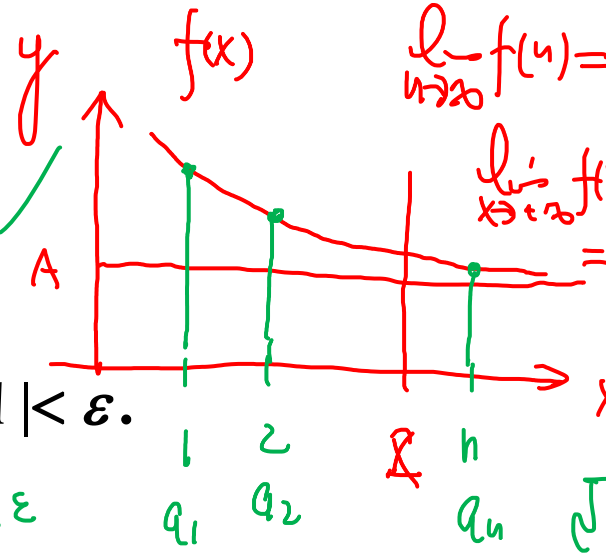
主讲 武忠祥 教授

2. 函数的极限

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$; $a_n = f(n)$ $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$

$f(x)=\sin(\pi x)$ $f(n)=\sin(n\pi)=0$ $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$

1)自变量趋于无穷大时函数的极限



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sin(\pi x)$ 不存在

定义2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(n)=A$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时 ... $|f(n)-A|<\varepsilon$ $\sqrt{x^2}=|x|$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

$x=\sqrt{x^2}$ $x=-\sqrt{x^2}$ $(x\to-\infty)$ 不存在 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ ✗

$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

$|x|\to+\infty \Longleftrightarrow x\to\infty$ $n\to\infty \Longleftrightarrow n\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

定理1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

2)自变量趋于有限值时函数的极限

定义5 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A}$

f(x)有定义

$x_0-\delta$　x_0　$x_0+\delta$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{\Box\to0}\frac{\sin\Box}{\Box}=1$　($\Box\neq0$)

$\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$　($\Delta\neq0$) $x\sin\frac{1}{x}$

【注】(1) ε 与 δ 的作用，ε 的任意性；

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

(2) 几何意义；　$x\to x_0$，时，$f(x)\to A$

$f(x)=A$

(3) $x\to x_0$，但 $x\neq x_0$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}=1$　$x\sin\frac{1}{x}\to0$

不存在

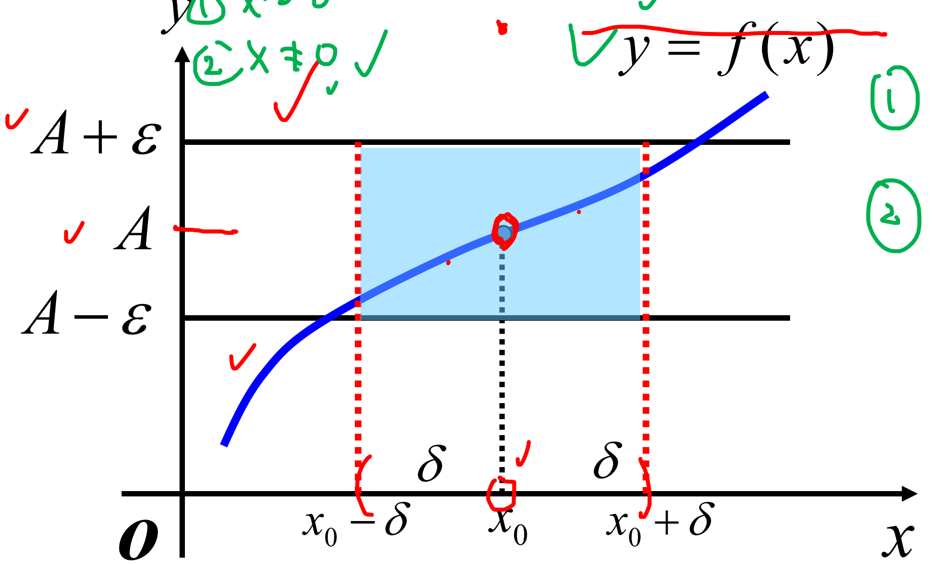
① $x\to0$

② $x\neq0$

① $x\sin\frac{1}{x}\to0$

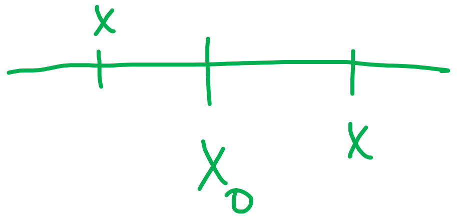
② $x\sin\frac{1}{x}\neq0$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关



左极限： $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0 - 0)$

右极限： $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0 + 0)$



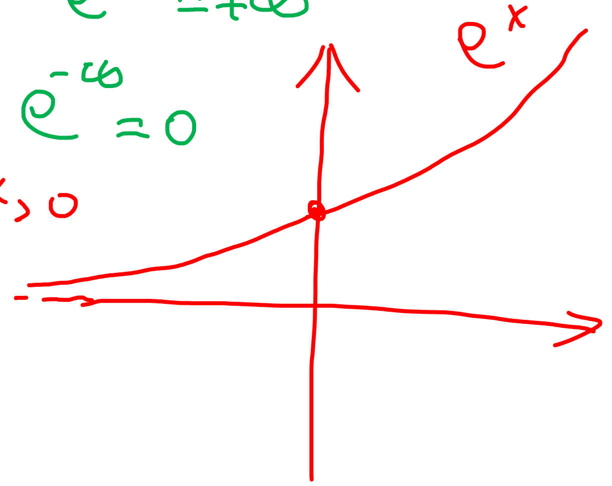
定理2 $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A}$

需要分左、右极限求极限的问题主要有三种：

$e^{\infty} \neq \infty$　　$e^{+\infty}=+\infty$　　$e^{-\infty}=0$　　$e^x>0$

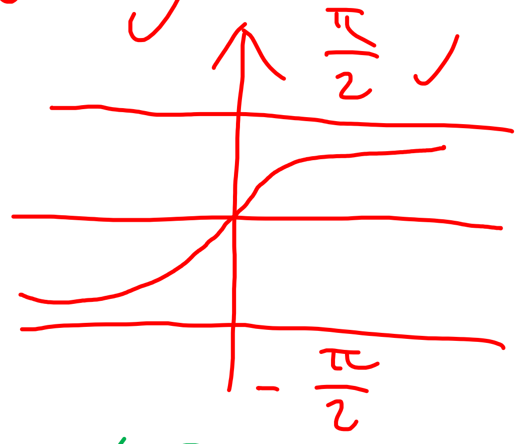
（1）分段函数在分界点处的极限（在该分界点两侧函数表达式不同）

（2）e^{∞}型极限　（如 $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}\cancel{=\infty}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}\cancel{=\infty}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cancel{=\infty}$）



$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$　　$\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　$\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

（3）$\arctan\infty$型极限　（如 $\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$）



$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$　$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

$\arctan\infty \neq \frac{\pi}{2}$

$\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$，$\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

【例3】(1992年1,2,3)当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（ ）

$\ne 1$

$(x+1) \to 2$

e^{∞}

(A) 等于2　　(B) 等于0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

【解】应选 (D)

本题中出现 e^{∞}，所以要分左、右极限

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\times 0=0$$

$-\infty$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

$+\infty$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在，但不是 ∞，应选 (D).

【例4】（2021年3）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

$a=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$

【解】

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi a}{2}+e^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi a}{2}+e$$

$-\infty$, $+\infty$

$\arctan\infty$

$$\pi a=e^{-1}-e$$

$$a=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$$

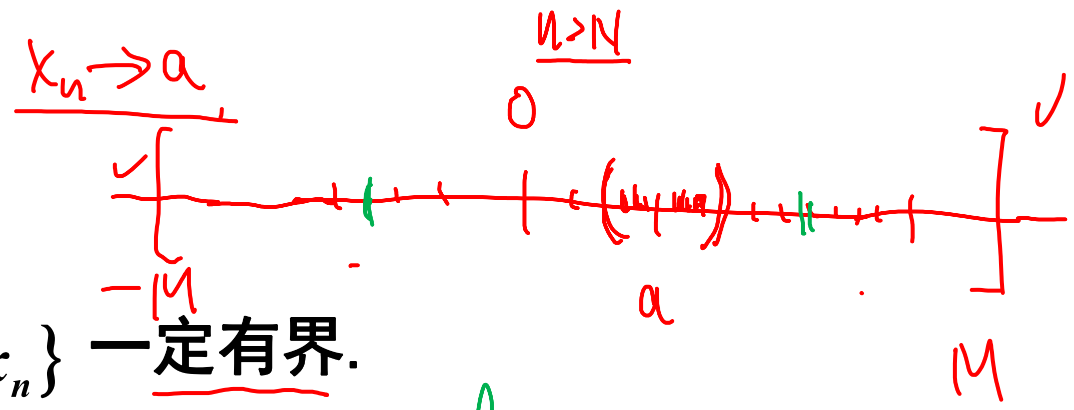
（二）极限性质

$-M \le x_n \le M$ $|x_n| \le M$

$(-1)^n$ ✓

1）有界性

收敛 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有界



1）（数列）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f(x)$ 在 x_0 局部有界

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$

2）（函数）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有界（即局部有界）.

$x_0=0$

2）保号性

$\frac{(-1)^n}{n} \to 0$

1)（数列） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \neq 0$

（1）如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$（或 $x_n<0$）；

$A \geq 0 \;\; A=0 \;\; \cancel{\longrightarrow} \;\; x_n \geq 0$

（2）如果存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$ 则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$），

$x_n > 0 \;\; \cancel{\longrightarrow} \;\; A>0$

$\longrightarrow A \geq 0$

$\frac{1}{n}$

2)（函数） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

（1）如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（2）如果存在 $\delta>0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），那么 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$

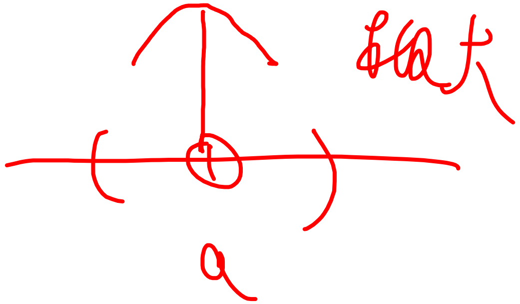
$A \; \cancel{>} \; B \qquad \cancel{A-B>0} \;\; A-B \geq 0$

$A \geq B$

【例5】(1995年3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$ <0，则在点 $x=a$ 处（　　）

（A）$f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　（B）$f(x)$ 取得极大值

（C）$f(x)$ 取得极小值　　（D）$f(x)$ 的导数不存在.



【解1】直接法　应选（B）

由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$ 及极限的保号性可知，在点 $x=a$

① $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2_{+}}<0$ 保号性

即 $f(x)-f(a)<0$

② 极值定义

【例5】(1995年3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）

$f(x)=-(x-a)^2$

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

【解2】排除法　应选 (B)

① 何时用？(一般来说)

② 如何用？(具体来说)

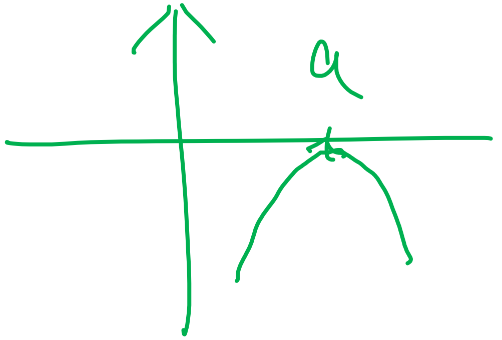
令 $f(x)=-(x-a)^2$, 显然 $f(x)$ 符合题设条件，但在点

$f'(x)=-2(x-a)$

$x=a$ 处, $f(x)$ 可导, 且 $f'(a)=0$, 并取得极大值,

$f'(a)=0$

则选项(A)(C)(D)都不正确，故应选 (B).



3）极限值与无穷小之间的关系;

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \qquad \text{其中} \quad \lim \alpha(x) = 0.$$

$f(x) - A = \varphi(x) \to 0$

$f(x) = A + \varphi(x)$

（三）极限存在准则

1）夹逼准则

a

若存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \le y_n \le z_n$，

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

n 级 知

2）单调有界准则

单调有界数列必有极限.

$x_{n+1} = f(x_n)$

单调增、有上界的数列必有极限；

单调减、有下界的数列必有极限；

【例6】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right]$. $=0$

有限项!!!

小　　　大

【解】由于

n项

$n\to+\infty$

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right]\le\frac{n^2}{n^2+1}$$

大　　　小

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right]=1.$

【例7】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]$.

0 ∞

$\boxed{x-1<[x]\le x}$

【解】由于 $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$

上式两端同乘以 x 得

$$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]=1$

【例8】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\dfrac{2}{n}$ ✓ $= 0$

【解1】由于

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2\times\boxed{2\times2\times\cdots}\times2}{1\times\boxed{2\times3\times\cdots}\times n} < \frac{4}{n}$$

<1 $\downarrow$ $\downarrow$ 0

$$a_{n+1} = a_n\frac{2}{n+1}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n} = 0,$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$

【例8】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

【解2】令 $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$，则 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2}{n+1}$

1

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1}\le 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减，又 $x_n=\dfrac{2^n}{n!}>0$，即 $\{x_n\}$ 下有界，由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

2

等式 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2}{n+1}$ 两端取极限得 $a=a\cdot 0$

则 $a=0$.

(四) 无穷小量

1) 无穷小量的概念 若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ ）时的极限为零，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ ）时的无穷小量.

2) 无穷小的比较 设 $\alpha(x) \to 0,\ \beta(x) \to 0$

（1）**高阶**： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$； 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

（2）**低阶**： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$;

（3）**同阶**：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

（4）**等价**：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$； 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

（5）**无穷小的阶**： 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

$x^2 = o(x)$

$x^{100} = o(x)$

$x \to 0$

x

$\dfrac{x^2}{x^{100}}$

2

100

$\sin x$ 1

$1-\cos x$ 2

【例9】(2013年2) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x}$

则当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小量；　　（B）比 x 低阶的无穷小量；

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小量；　　（D）与 x 等价的无穷小量.

【解】由于 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，则

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\sin\alpha(x)=0,\ \text{又}\ |\alpha(x)|<\frac{\pi}{2},\quad \text{则}\ \lim_{x\to0}\alpha(x)=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}$$

3) 无穷小的性质

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1\to 1$

$\alpha(x)\cdot\beta(x)\to 0$

（1）有限个无穷小的和仍是无穷小. 4个

（2）有限个无穷小的积仍是无穷小.

（3）无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

$\alpha(x)+\beta(x)$, $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to 0$

$n\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$

有界

$x\to 0$ 无穷小

不存在 不存在

=

（五）无穷大量

$x \to 0$ ✓ $\frac{1}{x} \to \infty$

1）无穷大量的概念 若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时趋向于无穷，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

即：若对任意给定的 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$.

2）常用的一些无穷大量的比较

（1）当 $x \to +\infty$ 时

$$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1.$

（2）当 $n \to \infty$ 时。

$$\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{0.0}} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(100000)^n}{n!} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{10000}}{2^n} = 0$

$\dfrac{2^n}{n!} = 0$

【例10】（2010年3）设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$

则当 x 充分大时，有（　）.

（A）$g(x) < h(x) < f(x)$　　（B）$h(x) < g(x) < f(x)$

（C）$f(x) < g(x) < h(x)$　　（D）$g(x) < f(x) < h(x)$

3）无穷大量的性质

（1）两个无穷大量的积仍为无穷大量；

（2）无穷大量与有界变量之和仍为无穷大量.

无穷小

① 积

② 和

③ 有界 × 无穷小 = 无穷小

无穷大

X ① X，$(n)+(-n)=0$

② $|a_n \cdot b_n| = |a_n||b_n|$ ✓

无穷大 + 有界 = 0 X ③ 有界 × 无穷大 X 无穷大

4）无穷大量与无界变量的关系：

$x_n \to \infty$

1) 数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：

$\forall M > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > M$.

N

$x_1 \;\; x_2 \; \cdots \; x_n \; \cdots$

$|x_n|$ 会很大

有界：

$\exists M, \forall n, |x_n| \le M$

2) 数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：

$\forall M > 0, \exists N > 0,$ 使 $|x_N| > M$.

$|x_n|$ 有很大

$\forall \quad \exists$

无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量

$\not\Leftarrow$

$1, 0, 3, 0, \cdots n \; 0 - 0 \; 0$ $a_n = n$ 无穷大

无界

【例11】数列 $x_n = \begin{cases} n, & n\text{为奇数}, \\ 0, & n\text{为偶数}. \end{cases}$ 是无界变量但不是无穷大量.

【例12】（1991年5）设数列的通项为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若n为奇数,\\ \dfrac{1}{n}, & 若n为偶数,\end{cases}$$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是（　　）

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量　　(D) 无界变量

【解】应选（D）

当 n 为奇数时 $x_n=\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}=n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$$

当 n 为偶数时 $x_n=\dfrac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

5）无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

0

$\dfrac{1}{0}$

【例13】 $f(x)\equiv 0$，是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，但 $\dfrac{1}{f(x)}$ 无意义.