

高数基础班 (14)

14	微分方程概念，一阶方程，可降阶方程，高阶线性方程，	P162-P173
----	---------------------------	-----------

主讲 武忠祥 教授

第七章 常微分方程

本章内容要点

一. 考试内容概要

- (一) 常微分方程的基本概念
- (二) 一阶微分方程
- (三) 可降阶的高阶方程 (数三不要求)
- (四) 高阶线性微分方程
- (五) 差分方程 (仅数三要求)

二. 常考题型与典型例题

题型一 微分方程求解

题型二 综合题

题型三 应用题

(一) 常微分方程的基本概念 ²

1. 微分方程

$$y' = y + x,$$

$$\underline{y'' + y^3 = x},$$

$$\checkmark y'' = e^x$$

2. 微分方程的阶

3. 微分方程的解 \checkmark

4. 微分方程的通解

5. 微分方程的特解

6. 初始条件

7. 积分曲线

② $\checkmark \checkmark$

$$\underline{y = e^x} \checkmark$$

$$y' = e^x + c_1$$

$$\text{通解 } y = e^x + \underline{c_1 x} + \underline{c_2} \checkmark$$

$$\underline{y = e^x + c} \checkmark$$

(二) 一阶微分方程

$$y' = f(x, y)$$

1) 可分离变量的方程 $y' = \overset{\vee}{f(x)} \overset{\vee}{g(y)}$

$$\underline{\frac{dy}{dx}} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \underline{\frac{dy}{g(y)}} = \int \underline{f(x)dx}$$

【例1】(2006年1, 2) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____.

$$(y = Cxe^{-x})$$

$$[解] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-x}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1$$

$$|y| = e^{\ln|x| - x + C_1} = e^{C_1}|x|e^{-x}$$

$$y = (\pm e^{C_1}) x e^{-x} = C x e^{-x}$$

2) 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$

$$\boxed{\text{令 } \frac{y}{x} = u} \Rightarrow y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

【例2】(1993年1, 2) 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件

$y(1) = 1$ 的特解.

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \quad \text{可解}$$

【解】原方程为齐次方程 $y' = (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$\underline{xu' + u = u^2 - u}, \quad \underline{xu' = u^2 - 2u}.$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{u - (u-2)}{u(u-2)} du$$

$$* \quad \frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{1}{x} dx \quad \frac{1}{2} [\ln|u-2| - \ln|u|] = \ln|x| + C_1, \quad \frac{u-2}{u} = Cx^2$$

$$\frac{y-2x}{y} = Cx^2$$

由 $y(1) = 1$, 得 $C = -1$, 即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y} = -x^2, \quad \text{即 } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

3) 线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ ✓✓

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

① 线性.

通解

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right]$$

② $x > 0$

$x > 0$

【例3】(2008年2, 4) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$

$$\frac{dx}{x} \checkmark$$

的通解是 _____.

$$y = x(C - e^{-x})$$

$$\frac{dx}{x} \checkmark$$

$$[解] \quad y + x^2 e^{-x} - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x e^{-x} \quad (*)$$

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{-x} e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left[-e^{-x} + C \right] = x \left[C - e^{-x} \right]$$

4) 伯努利方程 (仅数学一要求)

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 1)$$

$$(y^{1-\alpha} = u) \rightarrow \text{线性}$$

5) 全微分方程 (仅数学一要求)

$$dF(x,y) = P(x,y)\underline{dx} + Q(x,y)\underline{dy} = 0.$$

$$F(x,y) = C$$

a) 判定: $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

b) 解法:

1) 偏积分

2) 凑微分

3) 线积分

(三) 可降阶方程 (数三不要求)

1) $y'' = f(x)$

2) $y'' = f(x, y')$

$(y' = P) \quad y'' = \frac{dP}{dx}$

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y'' = e^x$$

$$y' = e^x + c_1$$

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

【例4】(2000年1) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 _____ . $(y = C_1 + \frac{C_2}{x^2})$

[解] 令 $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$, $x \frac{dp}{dx} + 3p = 0$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{3}{x} dx$$

$$\ln|p| = -3 \ln|x| + C$$

$$|p| = e^{-3 \ln|x| + C} = \frac{e^C}{|x|^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^3}$$

$$y = \frac{C_2}{x^2} + C_1$$

$$p = \pm e^C \frac{1}{x^3} = \frac{C_1}{x^3}$$

✓ 3) $y'' = f(y, y')$ ($y' = P, y'' = P \frac{dP}{dy}$)

$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dx} = f(y, p)$

【例5】(2002年1, 2) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件

$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 $y = \sqrt{x+1}$. ($y = \sqrt{x+1}$)

$y' = \frac{dp}{dy} p$

[解] 令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} p, yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{y} dy$

$\ln|p| = -\ln|y| + C_1$

$|p| = e^{-\ln|y| + C_1} = e^{C_1} \cdot \frac{1}{|y|}$

$p = \pm e^{C_1} \frac{1}{y} = \frac{C}{y} \quad \frac{1}{2} = \frac{C}{1} \quad \checkmark$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

$2y dy = dx$

$y^2 = x + C_1 \Rightarrow y^2 = x + 1$

$y = \sqrt{x+1}$
 $y = \pm \sqrt{x+1}$

(四) 高阶线性微分方程

1) 线性微分方程的解的结构

✓ 齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1) \quad \checkmark$$

非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \underline{f(x)} \quad (2)$$

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$ 无关

定理1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

就是方程 (1) 的通解.

定理2 如果 y^* 是非齐次方程 (2) 的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$$

✓
✓
通 + 非特 = 非通.

是非齐次微分方程 (2) 的通解.

定理3 如果 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 是非齐次方程 (2) 的两个特解, 则

$$y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$$

是齐次微分方程 (1) 的解.

定理4 如果 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \checkmark$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x) \quad \checkmark$$

的特解, 则

$$y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的一个特解.

2) 常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \checkmark \checkmark$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0 \quad \checkmark \times$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1) 不等实根: $r_1 \neq r_2$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$$

2) 相等实根: $r_1 = r_2 = r$

$$y = e^{rx} (C_1 + C_2 x)$$

$$\frac{e^{rx}}{\quad}, \frac{x e^{rx}}{\quad}$$

3) 共轭复根: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

【例6】(2013年3) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 _____.

$$(y = e^{\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x))$$

【解】 $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ $(r - \frac{1}{2})^2 = 0$ $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$

$$y = e^{\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x)$$

【例7】(1996年3) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为

$y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x))$$

【解】 $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$
$$= -1 \pm 2i$$

$$\alpha = -1, \beta = 2$$

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

【例8】(2010年2) 3阶常系数线性齐次微分方程

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

【解】

$$\underline{r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0}$$

$$(r-2)(r^2+1) = 0$$

$$\begin{array}{l} r_1 = 2 \quad \checkmark \quad \checkmark \\ r_{2,3} = \pm i \quad \checkmark \end{array}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$y = \underline{C_1 e^{2x}} + \underline{(C_2 \cos x + C_3 \sin x)}$$

3) 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

✓ 1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ ✓ 令 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ ✓

✓ 2. $f(x) = e^{\alpha x} [P_l^{(1)}(x) \cos \beta x + P_n^{(2)}(x) \sin \beta x]$

令 $y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$. $m = \max\{l, n\}$

λ

$\alpha + i\beta$

【例9】(1995年3) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = -2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

① $y^* = -2x$ $e^{0x}(-2x)$

【解】 $r^2 + 1 = 0, r_{1,2} = \pm i. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ $\int \frac{1}{t} dt$

② 令 $y^* = e^{0x}(ax+b) = ax+b$ $\lambda = 0$

$ax+b = -2x \Rightarrow a = -2, b = 0$

$y^* = -2x$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x$

【例10】(2007年1, 2) 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2e^{2x})$$

【解】① $r^2 - 4r + 3 = 0, \quad (r-3)(r-1) = 0 \Rightarrow \underline{r_1 = 3, r_2 = 1}$

~~齐次~~ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$

② 令 $y^* = \underline{a e^{2x}}$ $\lambda = 2$

$4a - 8a + 3a = 2$

~~齐次~~ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - e^{2x}$

$-a = 2 \Rightarrow a = -2, \quad \underline{y^* = -e^{2x}}$

4) 欧拉方程 (仅数一要求)

$$\underbrace{x^n y^{(n)}} + a_1 \underbrace{x^{n-1} y^{(n-1)}} + \cdots + a_{n-1} \underbrace{xy'} + a_n \underline{y} = f(x)$$

令 $\boxed{x = e^t}$, $\underline{x^k y^{(k)}} = \underline{D(D-1)\cdots(D-k+1)y}$

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

【例11】(2004年1) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$

的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2})$$

【解】

$$\underline{x = e^t}$$

$$(D(D-1)y + 4Dy + 2y = 0$$

$$(D^2 - D)y + 4Dy + 2y = 0$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \quad *$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$(r+1)(r+2) = 0 \quad r_1 = -1, r_2 = -2$$



还不关注，
你就慢了

