高数基础班（22）

22	傅里叶级数；向量代数与空间解析几何；方向导数，曲面切平面，曲线法线	P243-P263

主讲 武忠祥 教授

第三节　傅里叶级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数 ①

（二）收敛定理（狄利克雷） ②

（三）函数展开为傅里叶级数

二. 常考题型方法与技巧

题型一　有关收敛定理的问题

题型二　将函数展开为傅里叶级数

考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

√ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$

√ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$

√

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

（二）收敛定理（狄利克雷）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

1) $S(x)=f(x)$ 　　当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

2) $S(x)=\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ 　　当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

3) $S(x)=\dfrac{f((-\pi)^+)+f(\pi^-)}{2}$ 　　当 $x=\pm\pi$.

（三）周期为 2π 的函数的展开

(1) $[-\pi,\pi]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开.

i）$f(x)$ 为奇函数

$$a_n=0, \qquad n=0,1,2\cdots$$

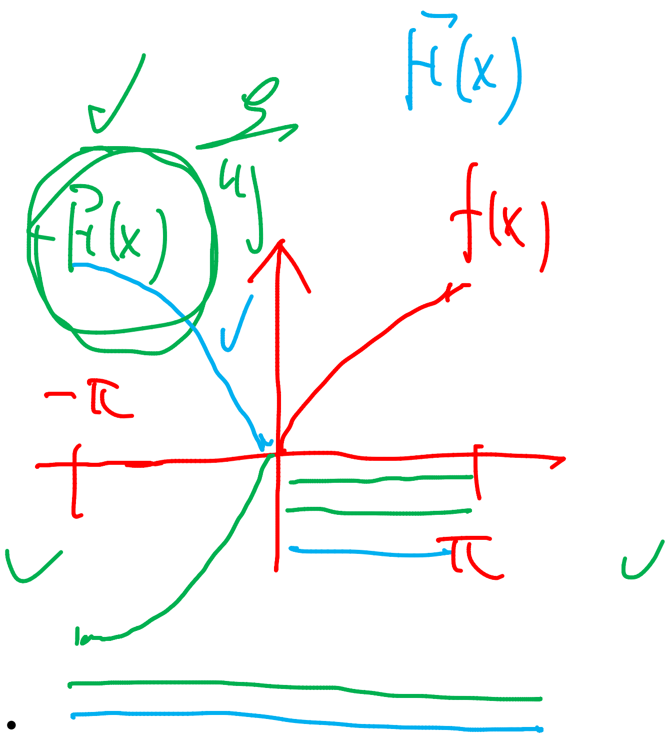
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

ii) $f(x)$ 为**偶函数**.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

(3) 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦.



i) 展为**正弦**.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ii) 展为**余弦**.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

（四）周期为 $2l$ 的函数的展开

(1) $[-l,l]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

√

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开.

i） $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

i i） $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

(3)在 $[0,l]$ 上展为正弦或展为余弦.

i）展为正弦.

$a_n = 0,$ $\quad n = 0,1,2\cdots$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ $\quad n = 1,2\cdots$

ii）展为余弦.

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ $\quad n = 0,1,2\cdots$

$b_n = 0$ $\quad n = 1,2\cdots$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

1.狄利克雷收敛定理

2.将函数展为傅里叶级数

1.狄利克雷收敛定理

【例1】（1988年1）设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数在 $x=1$ 处收敛于 ______. [$\frac{3}{2}$]

【解】

$$\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

【例2】（1989年1） 设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$$

其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,3,\cdots$ 则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 等于（ ）

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$

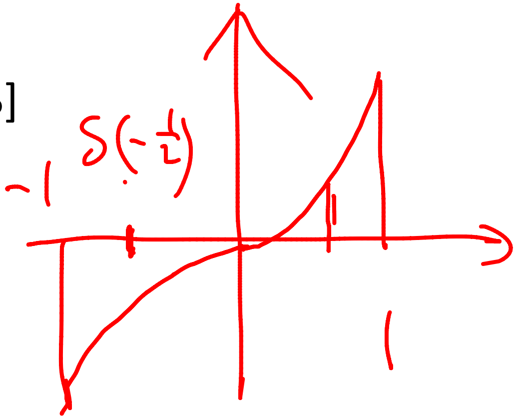
(C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

$T=2l=2$

$l=1$

奇延拓

[B]



【解】

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

【例3】(2023年) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$,

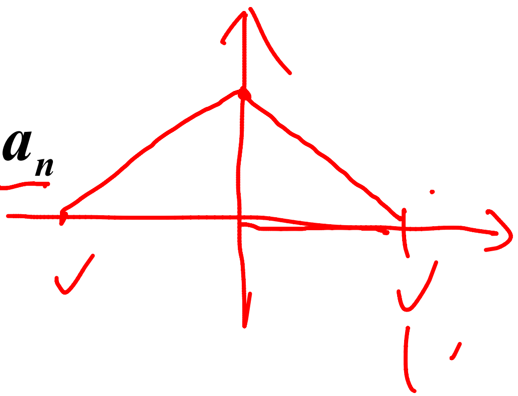
若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$ ________.

$T=2l=2$

【解1】 由题设知本题是将 $f(x)$ 作偶延拓展开的，由狄利克雷收敛定理知

$l=1$

$$1-x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x \qquad x\in[0,1]$$



上式中分别令 $x=0, x=1$ 得 $\quad 1=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \qquad 0=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

$$1=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n} \qquad a_0=2\int_0^1(1-x)dx=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0.$$

【解2】 $a_n=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x dx=\dfrac{2}{n\pi}\int_0^1(1-x)d\sin n\pi x$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] \qquad a_{2n}=0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$$

2.将函数展为傅里叶级数

【例4】（1993, 数一）设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 ______. $[\frac{2}{3}\pi]$

$T=2\pi$

$l=\pi$

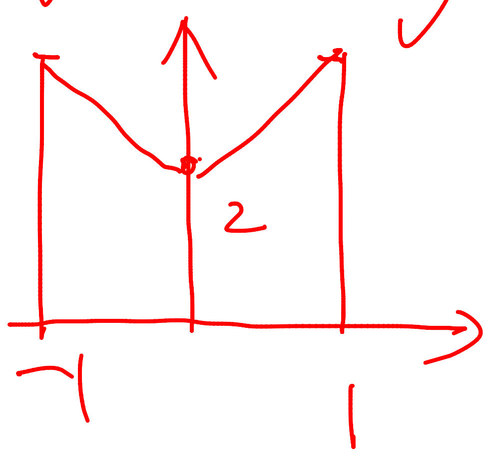
$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,dx$$

$-\frac{1}{3}d\cos 3x$

$=\frac{2}{3}\pi$

【例5】（1991，数一） 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和 $=a$

$T=2$ ， $l=1$



【解】 由于 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 是偶函数，所以

① $b_n=0,\ n=1,2,\cdots \qquad a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5,$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\qquad n=1,2,\cdots$$

② $$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$-1\le x\le 1$

当 $x=0$ 时，$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

$a=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}a$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$\frac{3}{4}a=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow a=\frac{\pi^2}{6}$

【例6】(1995, 数一) 将 $f(x)=x-1\ (0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

T = 4

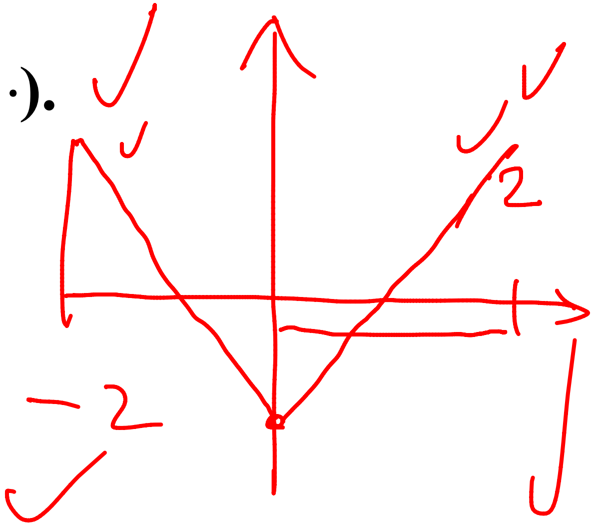
l = 2

【解】 $a_0=\dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^2 (x-1)dx=0,$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\qquad x\in[0,2]$$

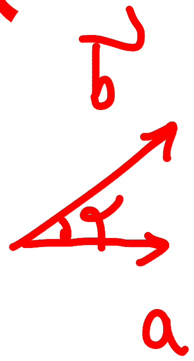


第十一章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节 向量代数

1. 数量积

1）几何表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$



2）代数表示：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

3）运算规律：

i）交换律：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

ii）分配律：$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$

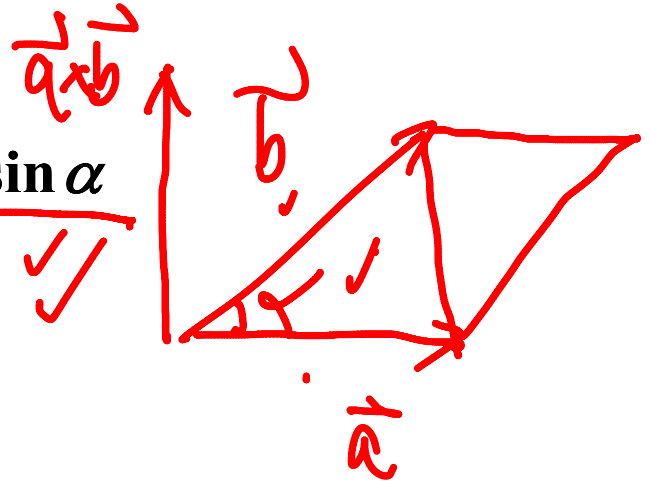
4）几何应用：

i）求模：$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$

ii）求夹角：$\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

iii）判定两向量垂直：$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

2. 向量积



1） 几何表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 是一向量　　模：$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

方向：右手法则.

2） 代数表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

3） 运算规律

i）$a\times b=-(b\times a)$

i i） 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

4） 几何应用：

i） 求同时垂直于 a 和 b 的向量： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

i i） 求以 a 和 b 为邻边的平行四边形面积： $S=|a\times b|$

i i i） 判定两向量平行： $\mathbf{a}//\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$

3. 混合积: $(abc)=(a\times b)\cdot c$

① 1）代数表示: $(abc)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

② 2）运算规律:

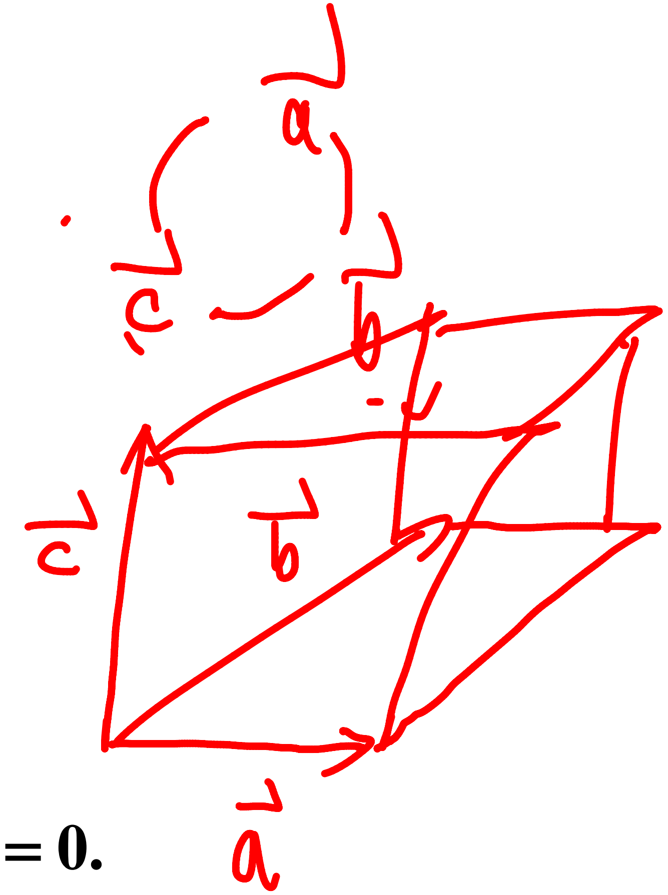
i）轮换对称性: $(abc)=(bca)=(cab)$ ✓

ii）交换变号: $(abc)=-(acb)$ ✓

③ 3）几何应用

i）$V_{平行六面体}=|(abc)|$

ii）判定三向量共面: a,b,c 共面 $\Leftrightarrow (abc)=0.$



常考题型与典型例题

常考题型

向量的计算

【例1】(1995年) 设 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=2$, 则

$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=$ ________

【解】$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)\ =[a\times b+a\times c+b\times b+b\times c]\cdot(c+a)$

$=(a\times b)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot c+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot a$

$=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a$

$=2(a\times b)\cdot c\ =4$

第二节 空间平面与直线

1. 平面方程

1）一般式： $Ax + By + Cz + D = 0.$　　$\mathbf{n} = \{A, B, C\}$

2） 点法式： $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

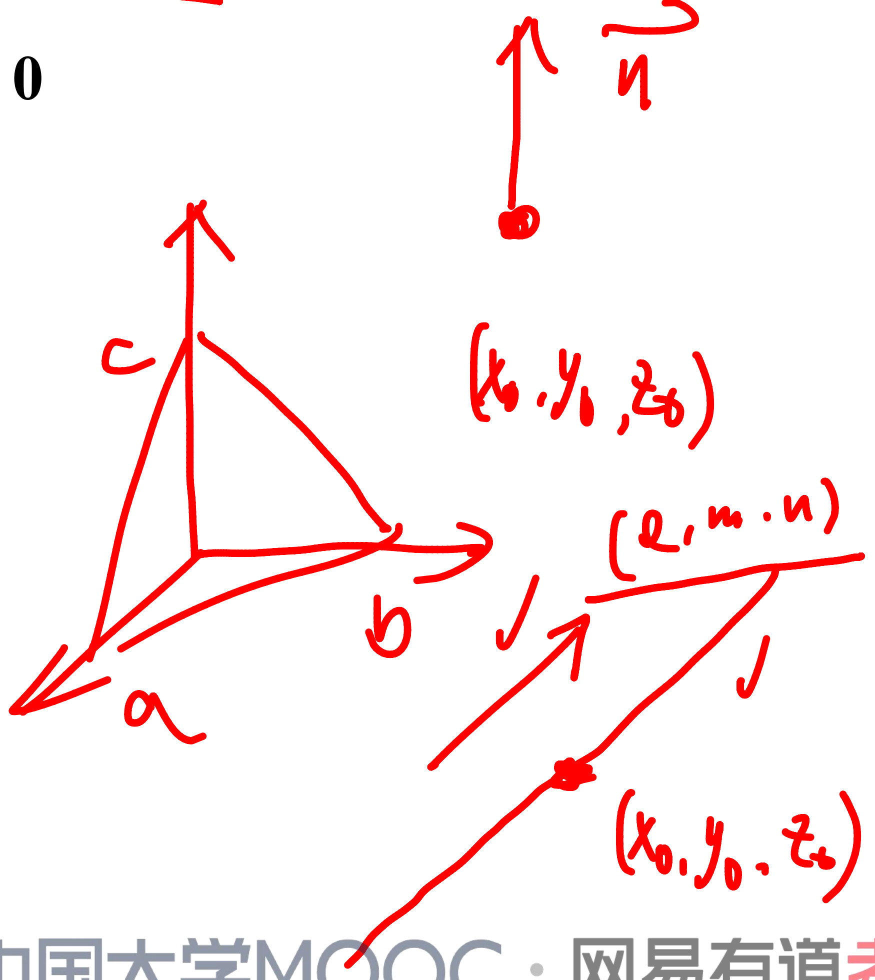
3） 截距式： $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

2. 直线方程

1）一般式： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2）对称式： $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$

3）参数式： $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt.$



9

3. 平面与直线的位置关系（平行、垂直、夹角）

关键： 平面的法线向量，直线的方向向量。

4. 点到面的距离

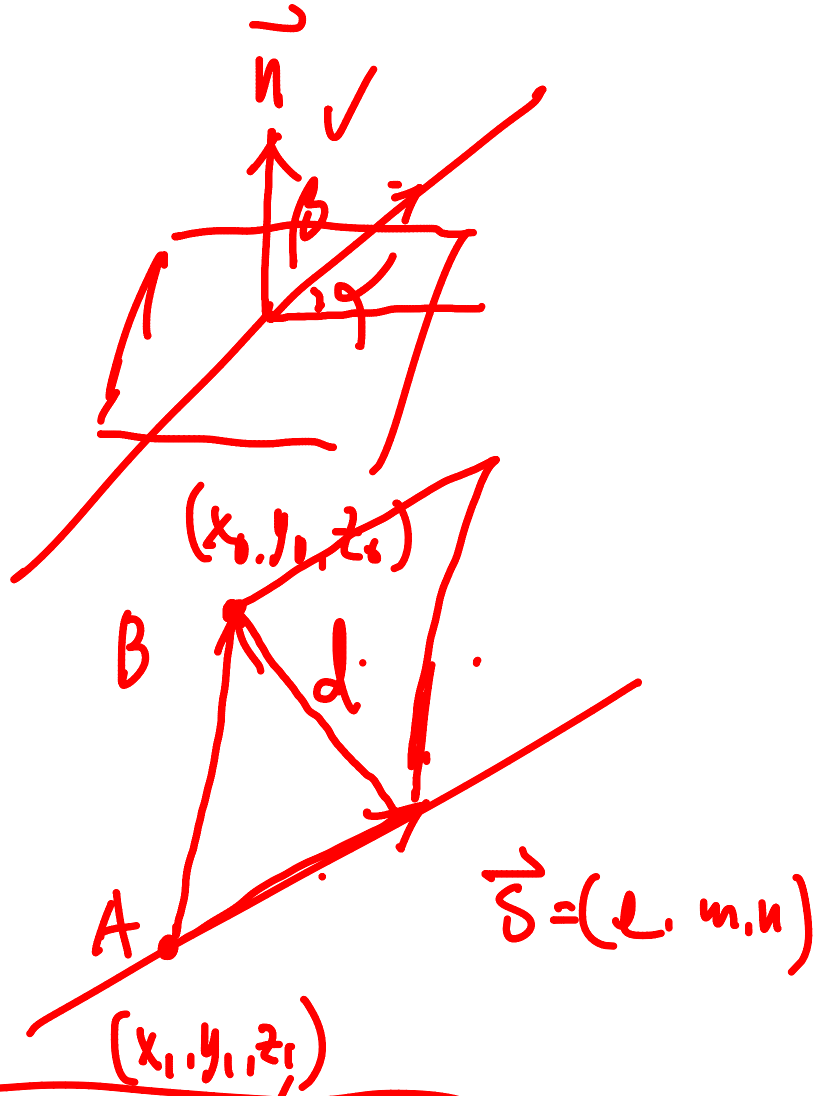
点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cy + D = 0$ 的距离.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. 点到直线距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

$$d = \frac{|\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \times \{l, m, n\}|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



$|\vec{AB} \times \vec{s}| = |\vec{s}|\, d$

常考题型与典型例题

常考题型

建立平面和直线方程

【例1】(1987年1)与两直线 $\underbrace{\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}}_{\checkmark}$ 及 $\underbrace{\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}}_{\checkmark}$

l_1 l_2

都平行, 且过原点的平面方程为 ________.

$\vec{s}_1=(0,1,1)$ $\vec{s}_2=(1,2,1)$ $(1,-1,1)$

$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,1,-1)$

$1\cdot(x-0)+(-1)(y-0)+1\cdot(z-0)=0$

$x-y+z=0$

$[x-y+z=0]$

第三节 曲面与空间曲线

1. 曲面方程: 一般式 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$

2. 空间曲线:

i）参数式：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ ii）一般式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

3. 常见曲面

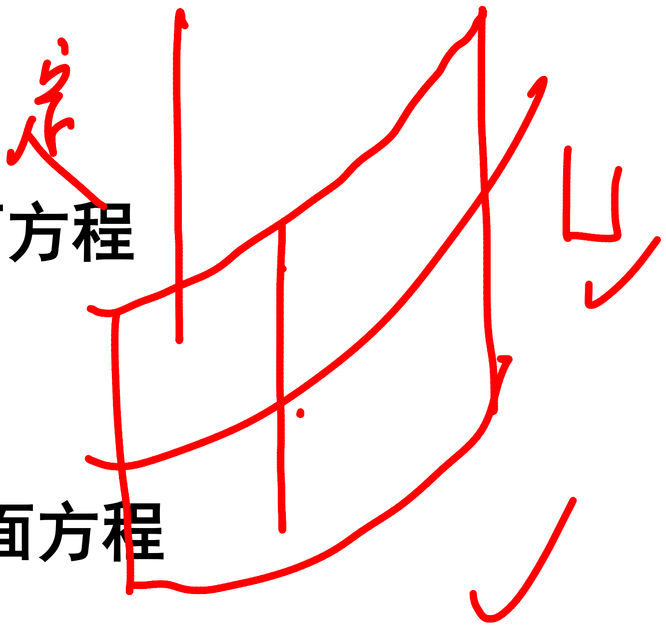
1）旋转面：一条平面曲线绕平面上一条直线旋转；

设 L 是 yoz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，则

（1） L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

（2） L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

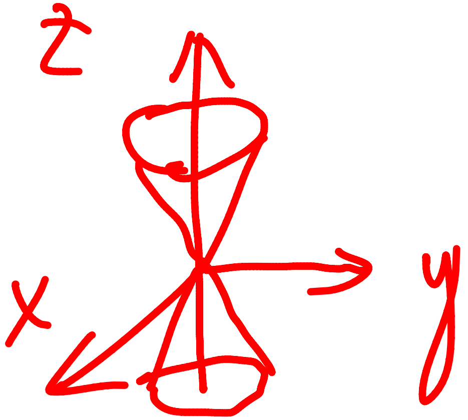
2.柱面: 平行于定直线并沿定曲线移动的直线L形成的轨迹;



（1）准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$;

（2）准线为 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $H(x,y)=0$.

3. 二次曲面



（1）椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$;　　特别的:圆锥面 $x^2+y^2=z^2$

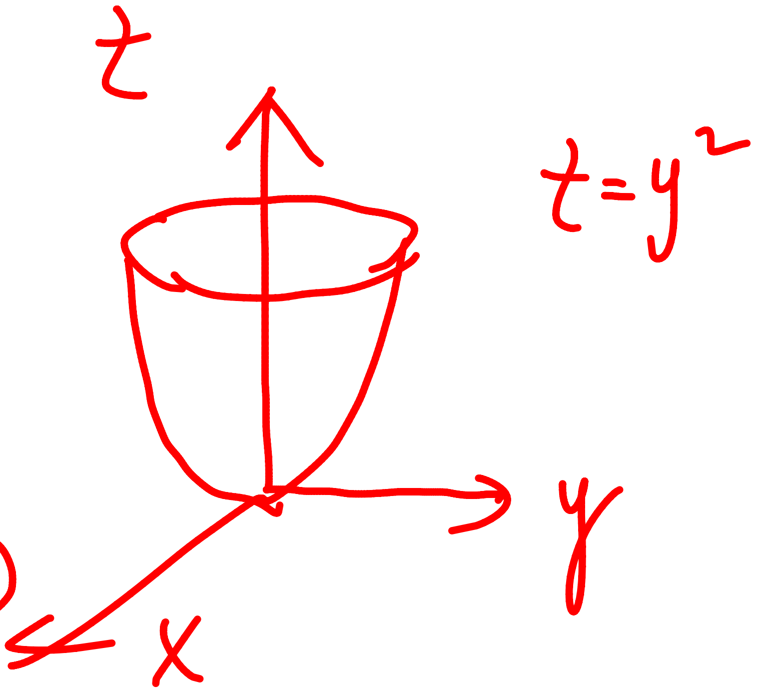
（2）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 特别的:球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z;$

特别的：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$



（6）双曲抛物面 （马鞍面） $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

4）空间曲线投影

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例1】求以曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.

【解】 将 $z=x^2+y^2$ 代入 $x^2+y^2+2z^2=1$ 得

$$x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$$

即 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 为所要求的柱面.

【例2】求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

【解】 1）绕 x 轴： $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$

绕 y 轴： $2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$

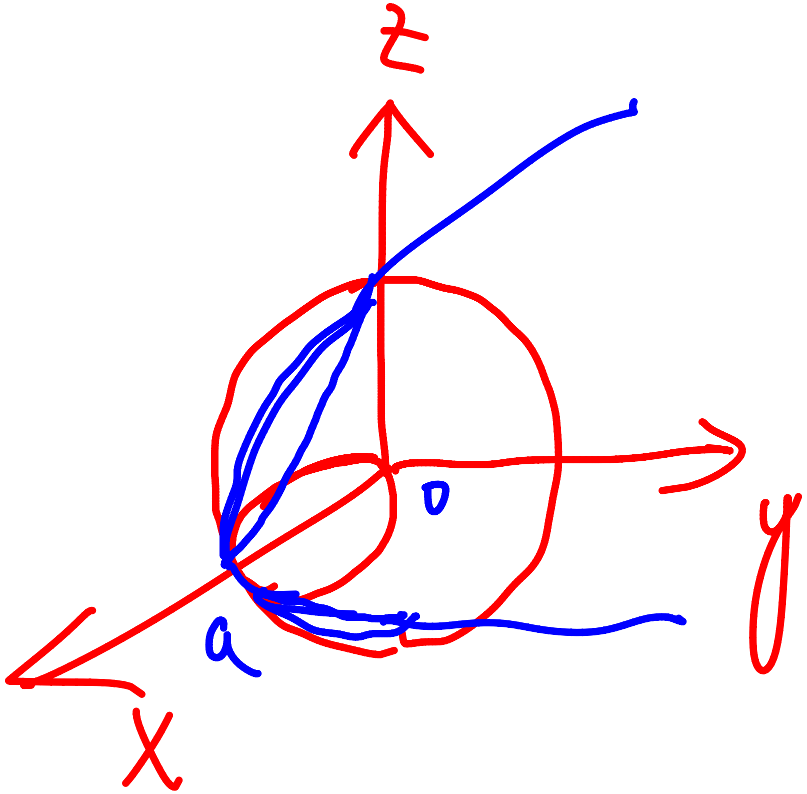
2）绕 y 轴： $x^2 + z^2 = y^4$

绕 z 轴： $z = y^2 + x^2$

【例3】求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2(a>0) \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 在 xoy 面和 xoz 面上的投影曲线方程.

【解】在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ z=0 \end{cases}$

在 xoz 面上的投影为 $\begin{cases} z^2+ax=a^2,(0\le x\le a) \\ y=0 \end{cases}$



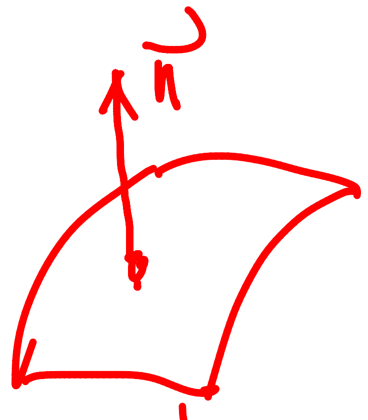
第四节 多元微分在几何上的应用

1. 曲面的切平面与法线

$f(x,y)-z=0$

1） 曲面 $F(x,y,z)=0$ 法向量：$\mathbf{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$

2） 曲面 $z=f(x,y)$ 法向量：$\mathbf{n}=\{f_x,f_y,-1\}$



2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 切向量：$\tau=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$

2) 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 切向量：$\tau=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$

其中 $\mathbf{n}_1=\{F_x,F_y,F_z\}$, $\mathbf{n}_2=\{G_x,G_y,G_z\}$

常 考 题 型 与 典 型 例 题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面

【例1】(2023) 曲面 $z = x + 2y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在 $(0,0,0)$ 点处的切平面为__________.

【解】由于 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = \left.\left(1 + \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}\right)\right|_{(0,0,0)} = 1$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = \left.\left(2 + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\right)\right|_{(0,0,0)} = 2$$

$\vec{n} = (z_x, z_y, -1)$

$= (1, 2, -1)$

则该曲面在 $(0,0,0)$ 点处的切平面为

$$-x - 2y + z = 0$$

$1\cdot(x-0) + 2(y-0) - 1\cdot(z-0) = 0$

即 $x + 2y - z = 0.$

$x + 2y - z = 0$

【例2】（1993年）由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕轴 y 旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

$(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})$

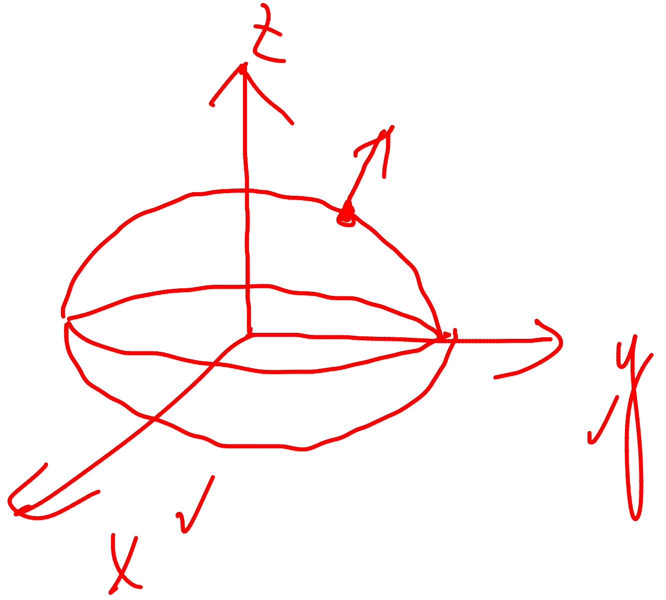
【解】

$3(x^2+z^2)+2y^2-12=0$

$6x \quad 4y \quad 6z$

$3x \quad 2y \quad 3z$

$\vec{n}=(0 \quad 2\sqrt{3} \quad 3\sqrt{2})$



$|\vec{n}|=\sqrt{12+18}=\sqrt{30}$

$\vec{n}^0=\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}},\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}}\right)=\left(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

$\sqrt{5\cdot 6}$

【例3】（2003年）曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是 ________.

$\vec{n}_1=(2,4,-1)$

$2x+4y-z=5$

【解】

$\vec{n}=(2x,2y,-1)$

$$\frac{2x}{2}=\frac{2y}{4}=\frac{-1}{-1}=1$$

$x=1,\quad y=2,\quad z=5$

$2(x-1)+4(y-2)-1(z-5)=0$

$2x+4y-z-5=0$

$x_0 = \frac{\pi}{2} - 1 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 2\sqrt{2}$

【例4】 求曲线 $x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

【解】

$$\vec{\tau} = \left(1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$$

$$1\cdot\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + 1\cdot(y - 1) + \sqrt{2}\left(z - 2\sqrt{2}\right) = 0$$

切线方程为 $$\frac{x + 1 - \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

法平面方程为 $$x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$$

【例5】求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程

【解】

$\vec{n}_1=(1,-2,1)$

$\vec{n}_2=(1,1,1)$.

$\vec{\tau}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(-3,0,3)$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$

$-3(x-1)+0(y+2)+3(z-1)=0$

法平面方程为 $x-z=0$

还不关注，你就慢了