2026考研

高等数学基础班

主讲 武忠祥

还不关注，你就慢了

高等数学基础班教学计划

第一章　函数 极限 连续 (10学时)

第二章　导数与微分（3学时)

第三章　微分中值定理及其应用（4学时)

第四章　不定积分（3学时)

第五章　定积分及反常积分（4学时)

第六章　定积分的应用（2学时)

第七章　微分方程（3学时)

第八章　多元微分及其应用（6学时)

第九章　二重积分（3学时)

√ 第十章　无穷级数（5学时)

第十一章 空间解析几何及其应用（1学时)

第十二章 三重积分及线面积分（4学时)

共计　48 学时

数二　前9章　38学时

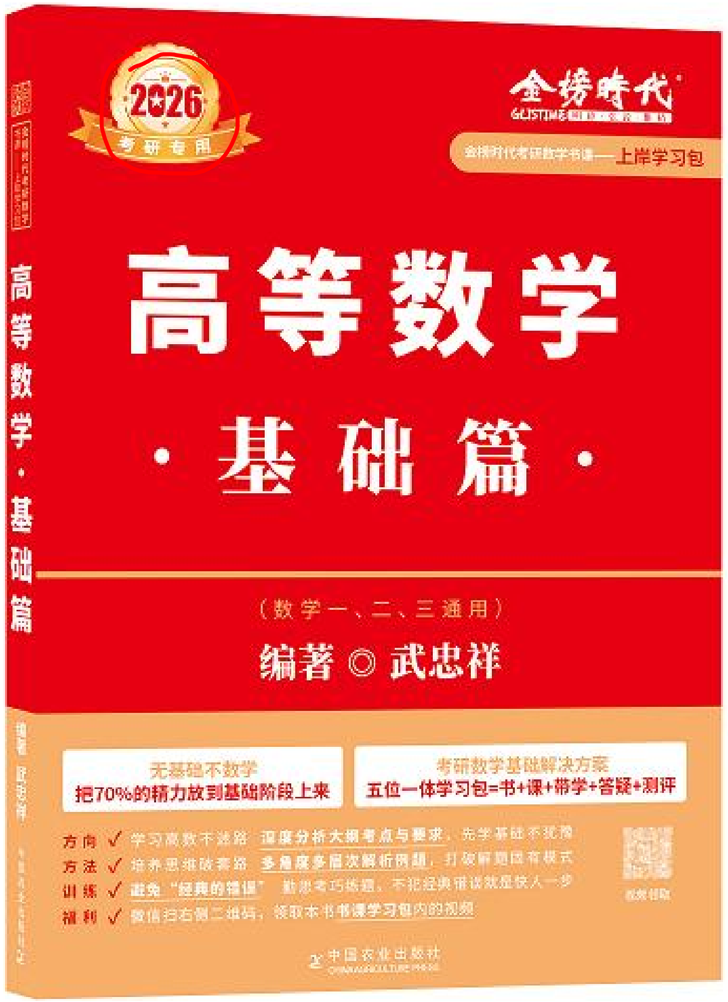
数三　前10章　43学时

数一　共12章　48学时

课次	内　　　　容	页码
1 ✓	函数概念及常见函数，函数性质，数列极限概念	P1-P11 ✓
2 ✓	函数极限概念，极限的性质，极限存在准则，无穷小及无穷大	P11-P22 ✓
3	常考题型举例：1.极限概念、性质、存在准则，2.求极限方法举例（基本极限；等价代换；有理运算）	P22-P35
4	求极限方法举例（洛必达法则；泰勒公式；夹逼原理；单调有界准则；定积分定义）	P35-P47
5	无穷小量阶的比较举例；函数连续性及常考题型举例	P47-P60
6	导数与微分的概念及几何意义，导数公式及求导法则（有理运算；隐函数、反函数、参数方程求导法；对数求导法）	P61-P72
7	高阶导数；常考题型举例（导数定义；复合、隐函数、参数方程求导；高阶导数；导数应用）	P73-P82
8	微分中值定理（罗尔，拉格朗日，柯西）；泰勒公式；函数的单调性，极值，曲线的凹向、拐点及渐近线，导数在经济学中的应用	P83-P91
9	常考题型举例(极值与最值；凹向与拐点；渐近线；方程根，证明不等式；微分中值定理证明题)	P92-P104
10	不定积分概念性质，3种主要积分法（凑微分；第二类换元，分部）3类能积得出的积分（有理函数，三角有理式，简单无理式）	P105-P119
11	不定积分举例；定积分的概念、性质及计算方法；变上限积分	P120-P131
12	定积分举例（定积分概念；定积分计算；变上限积分；）反常积分	P131-P149
13	反常积分举例（敛散性；计算），定积分应用（几何；物理）	P150-P161
14	微分方程概念，一阶方程，可降阶方程，高阶线性方程，	P162-P173
15	差分方程；微分方程举例（方程求解；综合题；应用题）	P173-P185
16	多元微分学的概念及关系（重极限、连续、偏导数及全微分）	P186-P195
17	多元函数微分法及举例（复合函数微分法；隐函数微分法）	P195-P206
18	多元函数的极值（无约束极值；条件极值）；最大最小值	P206-P212
19	二重积分（概念、性质、计算方法及举例）	P213-P222
20	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P223-P232
21	幂级数（概念、性质、函数展开为幂级数，级数求和及举例）	P232-P243
22	傅里叶级数；向量代数与空间解析几何；方向导数，曲面切的平面，曲线的法线	P243-P263
23	三重积分、线面积分的概念、计算方法及举例（三重积分，曲线积分）	P264-P277
24	曲面积分计算举例；多元积分应用（质量、质心、形心、转到惯量，变力沿曲线做功，场论初步（散度，旋度）	P277-P292

教学环节

1. 课前预习
2. 听课
3. 课后复习（内容、例题）
4. 作业题（定制）



①真题真刷（基础篇 1987-2008） ②660（A类）

高等数学

- 基础 重点 难点
  - 一元函数微积分
    - 微分学
      - 函数、极限、连续 —— $x_{n+1}=f(x_n)$
      - 导数与微分
      - 微分中值定理及导数的应用
    - 积分学
      - 不定积分
      - 定积分及反常积分
      - 定积分应用
- 对照 { 相同 / 不同 }
  - 多元函数微积分
    - 微分学
      - 函数、极限、连续
      - 偏导数与全微分
      - 微分学的应用(极值与最值)
    - 积分学
      - 重积分(数二和数三只考二重积分)
      - 线面积分（仅数一要求）
      - 积分应用（仅数一要求）
- 空间解析几何与向量代数（仅数一要求)
- 微分方程
  - 一阶方程
  - 可降阶方程（数三不要求）
  - 高阶线性方程
- 无穷级数 (数二不要求）
  - 常数项级数 敛散性
  - 幂级数 —— 求和
  - 傅里叶级数（数三不要求）

$f(x)$ $f(x)$

不要求：

1) 近似计算

2) 打*号

计算 *

基础：①求极限 ②求导数 ③求积分

数一（欧拉方程）

强化：难点、概念、理论

P1~11，

$\boxed{\text{下次 P11~22}}$

第一章 函数 极限 连续

第一节 函 数

第二节 极 限

第三节 连 续

还不关注，你就慢了

第一节　函　数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）函数的概念及常见函数

*（二）函数的性质

二. 常考题型与典型例题

* 题型一　函数的性质

题型二　复合函数

第一节　函　数

考试内容概要

（一）函数概念及常见函数

1. 函数概念

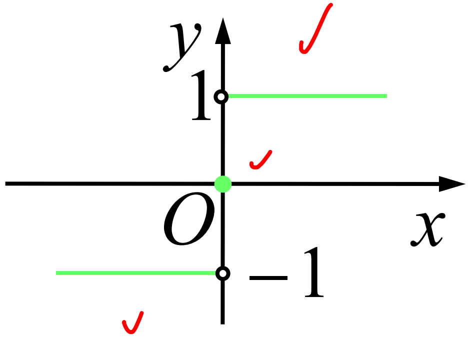
定义1　如果对于每个数 $x \in D$，变量 x 按照一定的法则总有一个确定的 y 和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y = f(x)$. 常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为**定义域**.

定义域　$D_f = D$.

值域　$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

【注】函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则.

【例1】函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为**符号函数**.



$3.2=3+\underline{0.2}$

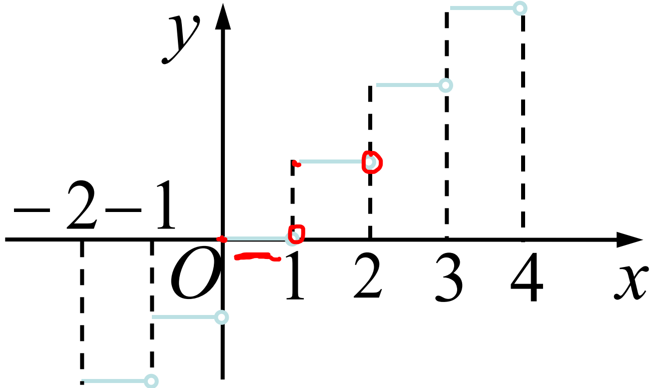
$-3.2=-4+\underline{0.8}$

$[3.2]=3$

【例2】设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**.

$[-3.2]=-4$

$$\boxed{x-1<[x]\leq x}$$



2. 复合函数

定义2 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, $u=g(x)$ 的定义域为 D_g 值域为 R_g, 若 $D_f \cap R_g \neq \phi$, 则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$f[g(x)] = \ln \sin x$

【注】 不是任何两个函数都可以复合，如

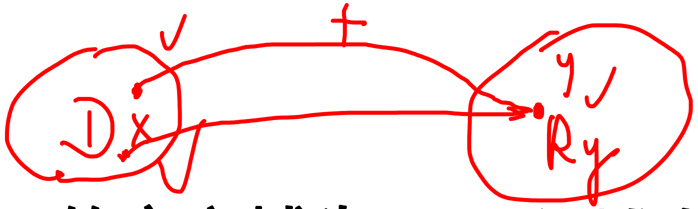
$$y=f(u)=\ln u, u=g(x)=\sin x-1,$$

$g(x)=\sin x$ $R_g=[-1,1]$

就不能复合，这是由于 $D_f=(0,+\infty), R_g=[-2,0], \quad D_f \cap R_g=\phi.$

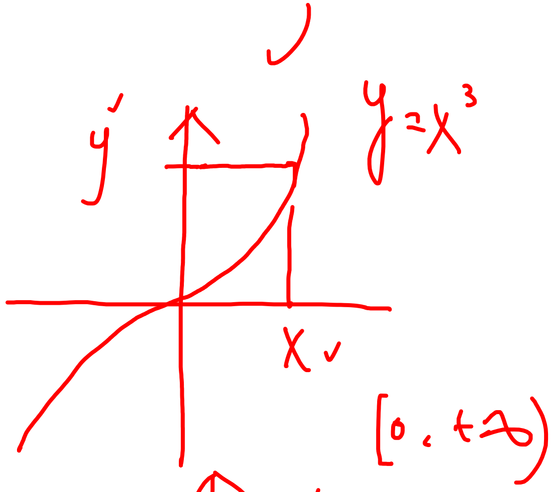
$y=\ln(\sin x-1)$

3. 反函数



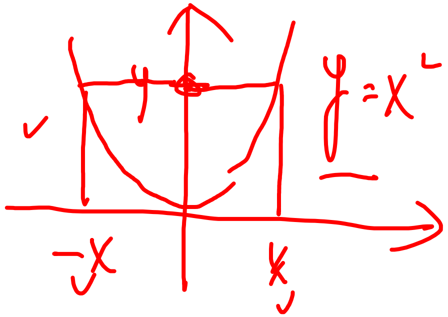
定义4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y. 若对任意 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$

称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.



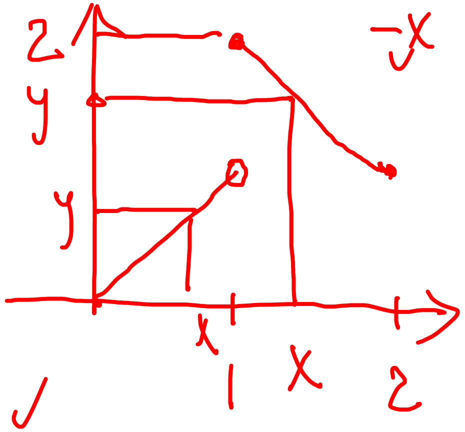
【注】（1）不是每个函数都有反函数. 如 $y=x^3$ 有反函数，而

$y=x^2$ 没有反函数；



（2）单调函数一定有反函数，但反之则不然，如

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 3-x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$



有反函数，但不单调.

$f(x)$ 有反函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1\neq x_2\in D$，$\rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ $\Longleftrightarrow$ f 一一映射

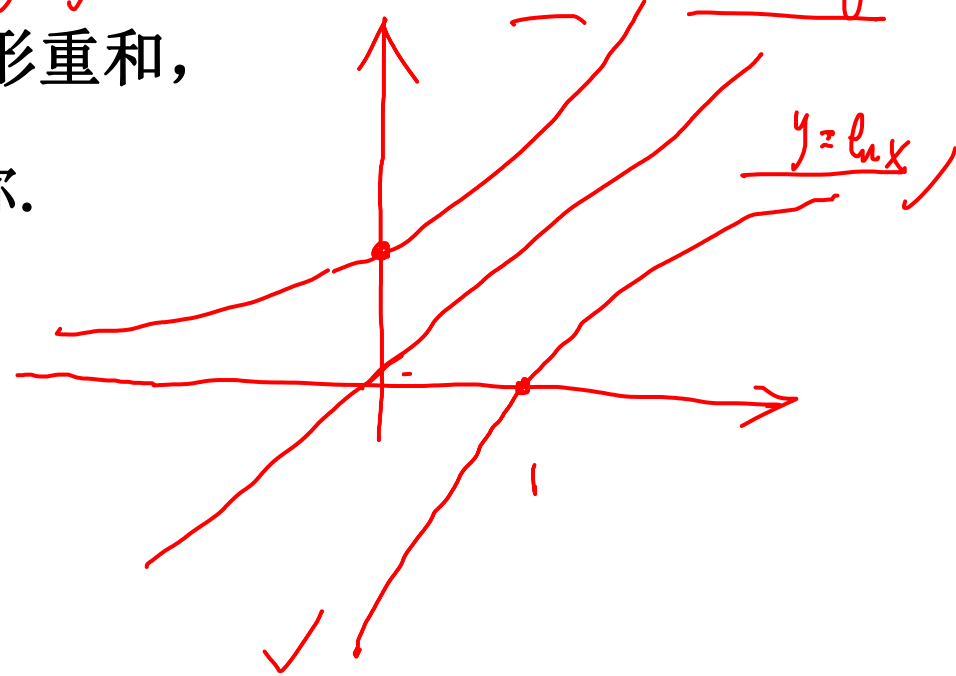
$y = e^x$　$x = \ln y$ 同一个函数　$y = \ln x$

(3) 有时也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$

在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重和，

$\boxed{y=f(x) \text{ 和 } y=f^{-1}(x)}$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

$f(x)=e^x$　　$f^{-1}(x)=\ln x$

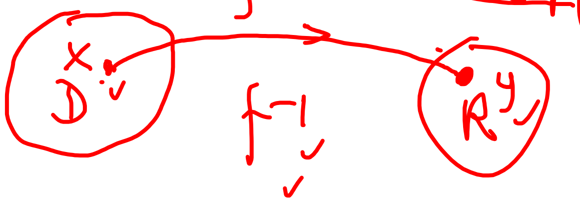


(4) $f^{-1}[f(x)]=x$,

$\ln(e^x)=x$

$f[f^{-1}(x)]=x$.

$e^{\ln x}=x$



【例3】求函数 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

$x = f^{-1}(y)$

【解】由 $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 知

$0 < e^{x} < +\infty$

$$e^{2x} - 2ye^{x} - 1 = 0$$

解得 $e^{x} = y + \sqrt{1 + y^{2}}$

① $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^{2}})$ ✓

则函数 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 的反函数为 ② $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^{2}})$. ✓

4. 初等函数

定义4 将幂函数，指数, 对数, 三角, 反三角统称为**基本初等函数**. 了解它们的定义域, 性质, 图形.

$y = \frac{2\sin x}{1+x^2}$

幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ 为实数）；

指数函数 $y = a^{x}$ （ $a > 0,\ a \neq 1$ ）

对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x$ $y = \cos x$, $y = \tan x$ $y = \cot x$

反三角函数 $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$,

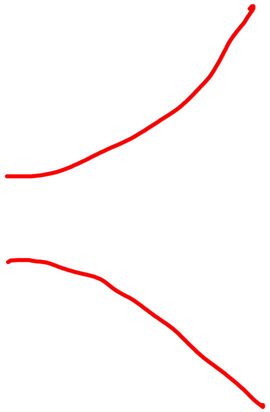
定义5 ① 由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、② 除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数, 称为**初等函数**.

（二）函数的性质

1. 单调性

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$$

定义2 如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$ 恒有

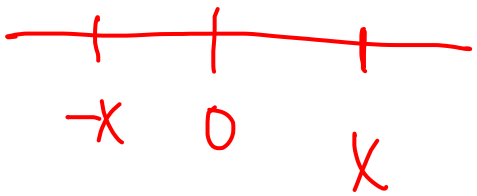


$f(x_1) < f(x_2)$ **单调增加**

$f(x_1) > f(x_2)$ **单调减少**

2. 奇偶性

定义3 设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, $\forall x \in D$



$f(-x) = f(x)$ **偶函数**

$f(-x) = -f(x)$ **奇函数**

【注】奇 $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln\frac{1-x}{1+x}, \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$

$\frac{e^x-1}{e^x+1}, f(x)-f(-x)$

偶 $x^2, |x|, \cos x, f(x)+f(-x)$

2）奇函数的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 y 轴对称.

$f(-x)=-f(x)$

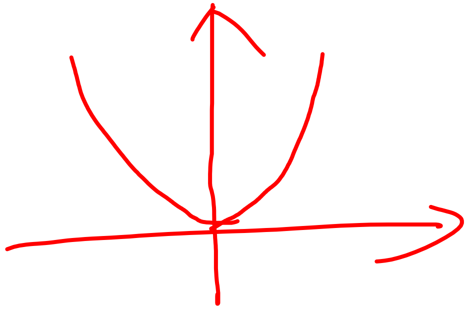
$f(0)=-f(0)$

$\Rightarrow f(0)=0$

3）奇+奇=奇；　偶+偶=偶；　奇 × 奇=偶

偶 × 偶=偶；　奇 × 偶= 奇；

$f(-x)=-f(x)$



【例4】 证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

【证】 由于 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

（有理化）

$$\int_{-1}^{1}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=0$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

则 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

3. 周期性

定义4 若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$

则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上式成立的最小正数 T

称为**最小正周期**，简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

【注】（1）$\sin x, \cos x$ 周期 2π; $\sin 2x$, $|\sin x|$ 周期 π;

（2）若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期.

$\sin(-5x+3)$

$\dfrac{2\pi}{|-5|}=\dfrac{2\pi}{5}$

4. 有界性

定义5 若存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\le M$

则称 $f(x)$ 在 X 上为**有界函数**.

$\Longleftrightarrow$ 有下界且有上界

$M_1 \le f(x)$

$f(x) \le M_2$

如果对任意的 $M>0$，至少存在一个 $x_0\in X$，使得

$|f(x_0)|>M$， 则 $f(x)$ 为 X 上的**无界函数**.

$x\to 0$

$\frac{1}{x}\to\infty$

$(0,1)$ 无界

$(1,2)$ 有界

【注】1）$f(x)$ 为有界函数

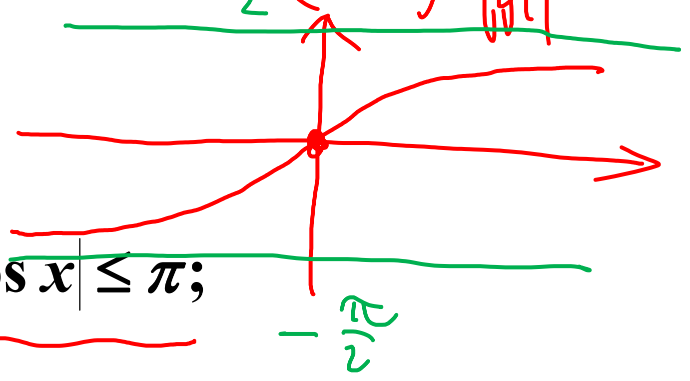
$|\sin x|\le 1$

$f(x)=\arctan x$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$

2）常见的有界函数

$|\sin x|\le 1$; $|\cos x|\le 1$; $|\arcsin x|\le\frac{\pi}{2}$; $\boxed{|\arctan x|<\frac{\pi}{2}}$, $|\arccos x|\le\pi$;



$+\infty$ 1

【例5】 证明函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数. $(-\infty,+\infty)$

$-\infty$ -1

$\forall M>0$, $\exists x_0\in D$, 使

【证】 由于 $f(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,

$|f(x_0)|>M$

所以，对于任意的 $M>0$，只要正整数 n 充分大

总有 $\left|f(2n\pi+\frac{\pi}{2})\right|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M$,

故函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

$n\to+\infty$

常考题型与典型例题

1. 函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定；

2. 复合函数；

（一）函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

【例6】（1987年3）$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是

（A）有界函数.　　　　（B）单调函数.

（C）周期函数　　　　（D）偶函数.

① 直接法

$\left|f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)e>M>0$ ② 排除法

（二）复合函数

【例7】(1997年2) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\ge 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=($ $)$

$x^2 \ge 0$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$ $-x\le 0$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 2+\cancel{x} & x\ge 0\end{cases}$$

【例8】(1988年1) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\ge 0$

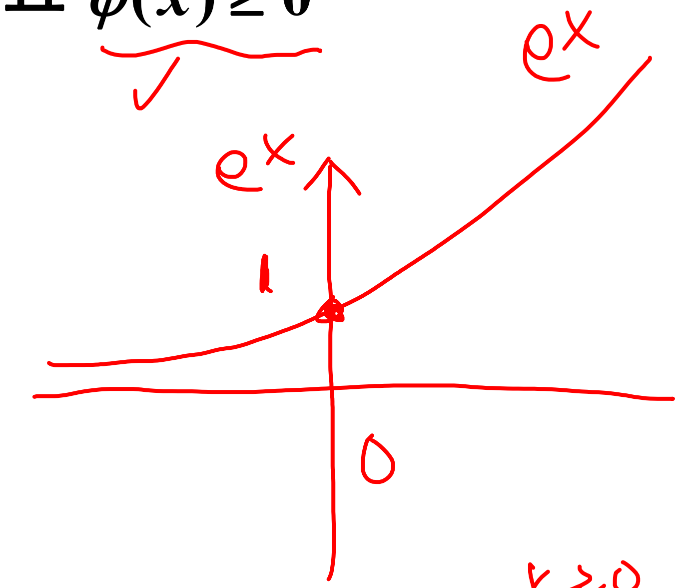
求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 由 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 知

$$e^{\overbrace{\varphi^2(x)}^{\ge 0}}=1-x \ge 1 \qquad (x\le 0)$$

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x) \qquad (x\le 0)$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)} \qquad (x\le 0)$$



$x\ge 0$: $e^x \ge 1$

第二节　极　限

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）极限的概念

（二）极限的性质

（三）极限存在准则

（四）无穷小

（五）无穷大

二. 常考题型与典型例题

选择 + 证明

题型一 极限的概念性质及存在准则 难

题型二 求极限 重点

题型三 无穷小量阶的比较

第二节 极 限

考试内容概要

（一）极限的概念

1. 数列的极限

定义1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$

【注】（1）ε 与 N 的作用；

（2）几何意义；

（3）数列 $\{x_n\}$ 的极限与前有限项无关；

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a \quad (k>0)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a.$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在

$x_{2k-1} = -1 \to -1$

$x_{2k} = 1 \to 1$

①唯一性；收敛 → 有界 $|x_n| \le M$，$-M \le x_n \le M$

②保号性：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，$\exists N$，当 $n>N$，$x_n > 0$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$c<a<b$ → $\exists N$，当 $n>N$，$c<x_n<b$

【例1】(2006年3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} =$ ________.

【解1】当 n 为奇数时 $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} = 1$$

当 n 为偶数时 $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = 1$$

【例1】(2006年3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} =$ ________.

【解2】 $\underset{\downarrow \atop 1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}$ 夹逼 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$

【解3】 $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{(-1)^n}{n}} \to e^0 = 1$

有界 无穷小

【解4】 $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to 0$

$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} \to 1$

【例2】试证明：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$, 但反之不成立；

*（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$.

$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

性质 定理 推论

条件 结论

[证] (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 知: $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 条件

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $\big||x_n|-|a|\big| < \varepsilon$ 结论

$x_n = (-1)^n$ $|(-1)^n| \to |1|$ $(-1)^n$ 反

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \iff \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$

$x\to\infty$

② 由① $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $\big||x_n| - 0\big| < \varepsilon$ 条件

$|x_n| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\forall \varepsilon$ - - - - - - . $|x_n - 0| < \varepsilon$ 结论

$|x_n| < \varepsilon$


还不关注，
你就慢了