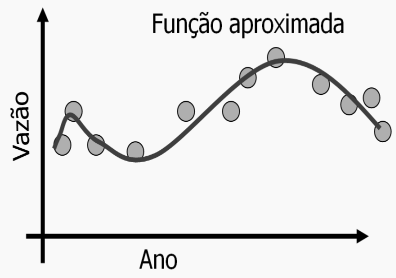
Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina

Regressão

Prof. Tiago A. Almeida

Regressão

- Ilustração da tarefa:



Regressão

Modelos preditivos

- Definição formal: dado conjunto de observações
- **D** = $\{(\mathbf{x}^{(i)}, f(\mathbf{x}^{(i)})), i = 1, ..., m\}$
  - f representa uma função desconhecida: função objetivo
    - Mapeia entradas em saídas correspondentes
  - Algoritmo preditivo aprende aproximação $\hat{f}$
    - Que permite estimar valor de f para novos objetos **x**

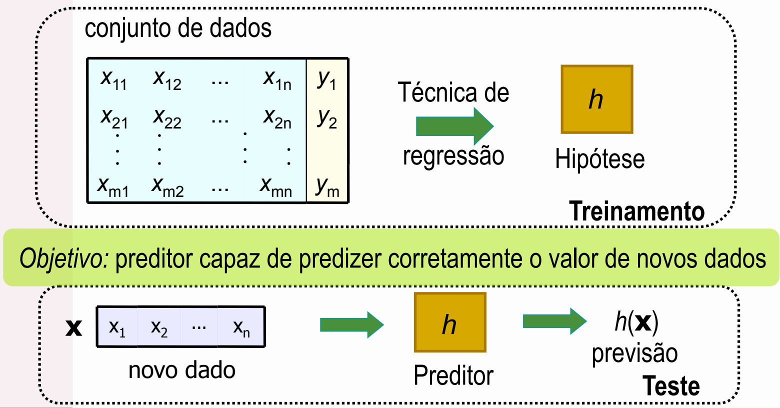
Regressão

$$y^{(i)} = f(\mathbf{x}^{(i)}) \in \Re$$

Regressão

- Regressão:
  - Meta: aprender função (curva aproximada) que relacione entradas a valores contínuos de saídas
- Exemplos:
  - Prever valor de mercado de um imóvel
  - Prever o lucro de um empréstimo bancário

Regressão: Modelo



Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina

Regressão Linear com uma Variável

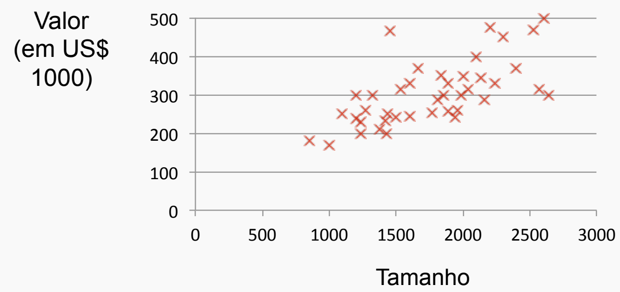
Regressão

- Técnicas de AM:
  - Regressão Linear
  - Árvores de Regressão
  - Redes Neurais Artificiais
  - Máquinas de Vetores de Suporte
  - Etc.

Cada técnica de AM utiliza um mecanismo distinto na aproximação da função objetivo

Regressão: exemplo

- Conjunto de treinamento (valores de imóveis)



Regressão: exemplo

- Conjunto de treinamento (valores de imóveis)

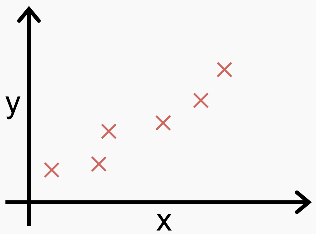
Tamanho (x)	Valor x U$ 1000 (y)
2104	460
1416	232
1534	315
852	178
...	...

Notação

m = número de amostras
x = atributos (entrada)
y = meta (saída)

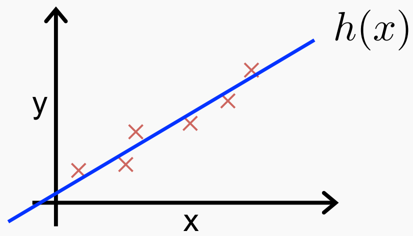
Representação da hipótese (h)

- Hipótese:



Representação da hipótese (h)

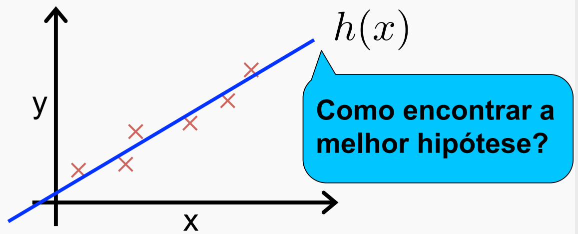
- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



- Regressão linear com uma variável
- Regressão linear univariada

Representação da hipótese (h)

- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



- Regressão linear com uma variável
- Regressão linear univariada

Escolha da hipótese

- Conjunto de treinamento (valores de imóveis)

Tamanho (x)	Valor x U$ 1000 (y)
2104	460
1416	232
1534	315
852	178
...	...

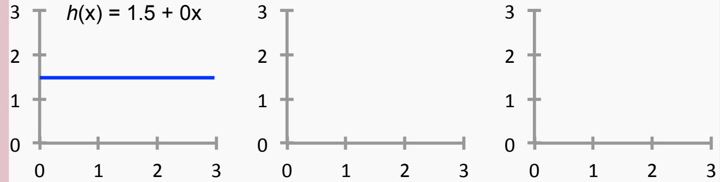
Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$

Parâmetros: θ_i

Como escolher bons valores para θ_i ?

Escolha de θ

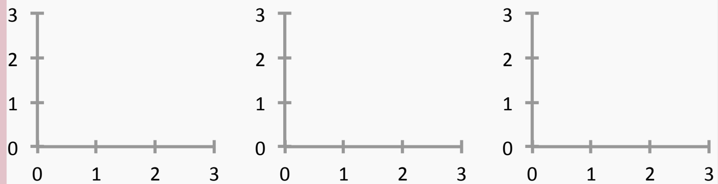
- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



$\theta_0 = 1.5$ $\theta_1 = 0$ | $\theta_0 = 0$ $\theta_1 = 0.5$ | $\theta_0 = 1$ $\theta_1 = 0.5$

Escolha de θ

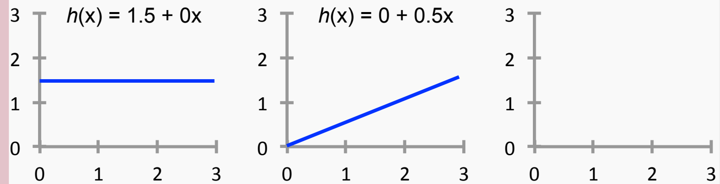
- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



$\theta_0 = 1.5$ $\theta_1 = 0$ | $\theta_0 = 0$ $\theta_1 = 0.5$ | $\theta_0 = 1$ $\theta_1 = 0.5$

Escolha de θ

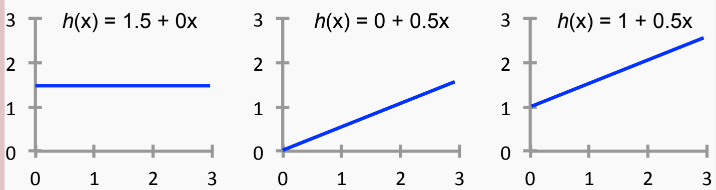
- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



$\theta_0 = 1.5$ $\theta_1 = 0$ | $\theta_0 = 0$ $\theta_1 = 0.5$ | $\theta_0 = 1$ $\theta_1 = 0.5$

Escolha de θ

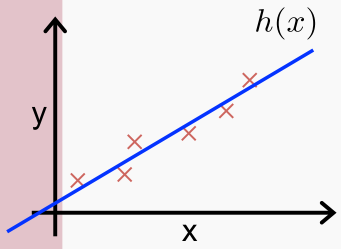
- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$



$\theta_0 = 1.5$	$\theta_0 = 0$	$\theta_0 = 1$
$\theta_1 = 0$	$\theta_1 = 0.5$	$\theta_1 = 0.5$

Escolha de θ

- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$

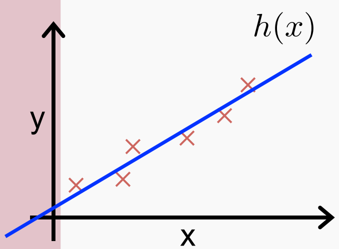


Em outras palavras:
- Escolher θ_0, θ_1 que minimize o **Erro Quadrático Médio** entre as predições (h(**x**)) e as saídas esperadas (***y***) para as amostras de treinamento.

Objetivo: encontrar θ_0, θ_1 de tal forma que *h*(**x**) aproxima ***y*** para os exemplos de treinamento.

Escolha de θ

- Hipótese: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$

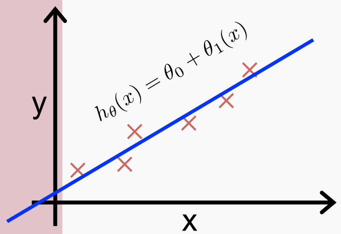


Objetivo: encontrar θ_0, θ_1 de tal forma que *h*(**x**) aproxima ***y*** para os exemplos de treinamento.

Função Custo (J)

- Erro quadrático médio

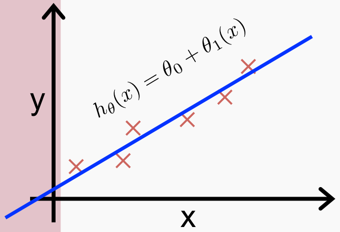
$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i)^2$$



Função Custo (J)

- Minimizar o erro:

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^i) - y^i)^2$$



$$\boxed{\min_{\theta_0, \theta_1} \; J(\theta_0, \theta_1)}$$

Objetivo: encontrar θ_0, θ_1 de tal forma que *h*(**x**) aproxima ***y*** para os exemplos de treinamento.

Função Custo (J): Interpretação

- Hipótese:
  $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$
- Parâmetros:
  θ_0, θ_1
- Função Custo:
  $J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^i) - y^i)^2$
- Objetivo:
  $\min_{\theta_0, \theta_1} \; J(\theta_0, \theta_1)$

Vamos supor que:

$h_\theta(x) = \theta_1 x$

θ_1

$J(\theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$

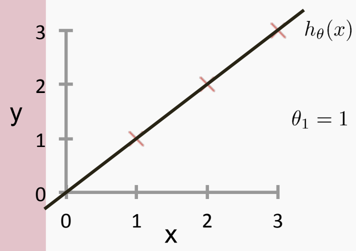
$\min_{\theta_1} \; J(\theta_1)$

Função Custo (J): Interpretação

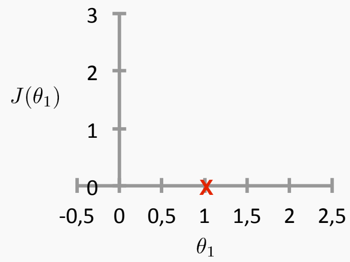
- Hipótese:
  $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$
- Parâmetros:
  θ_0, θ_1
- Função Custo:
  $J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^i) - y^i)^2$
- Objetivo:
  $\min_{\theta_0, \theta_1} \; J(\theta_0, \theta_1)$

Função Custo (J): Interpretação

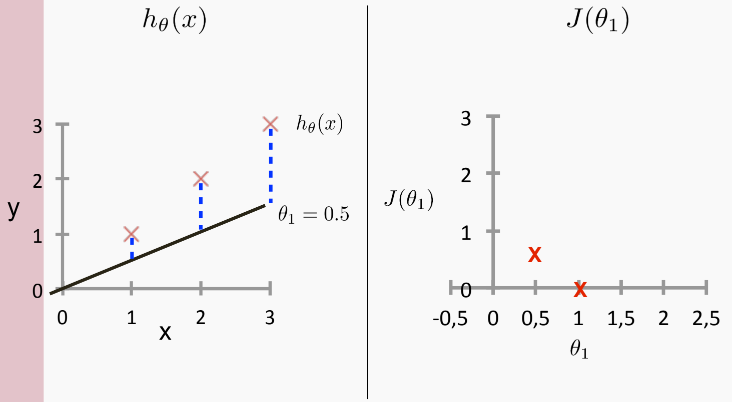
$h_\theta(x)$



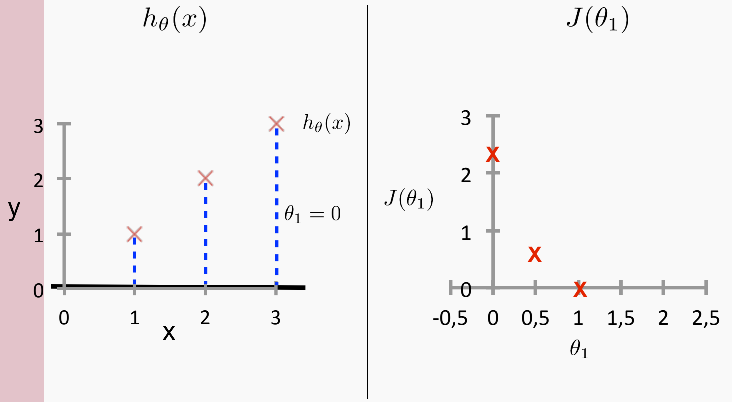
$J(\theta_1)$



Função Custo (J): Interpretação

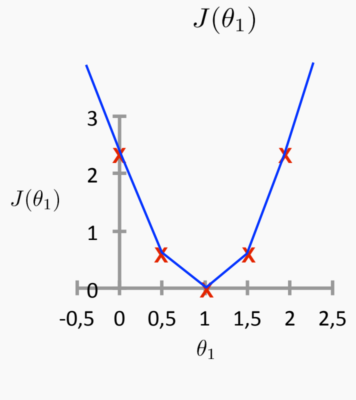


Função Custo (J): Interpretação



Função Custo (J): Interpretação

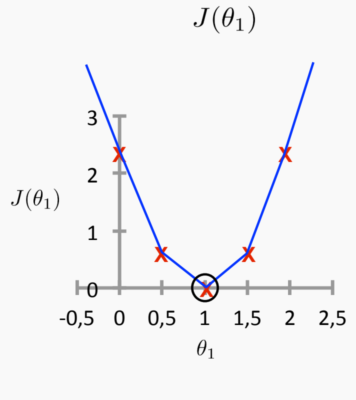
Variando θ_1 obtém-se uma parábola para $J(\theta_1)$



Função Custo (J): Interpretação

Variando θ_1 obtém-se uma parábola para $J(\theta_1)$

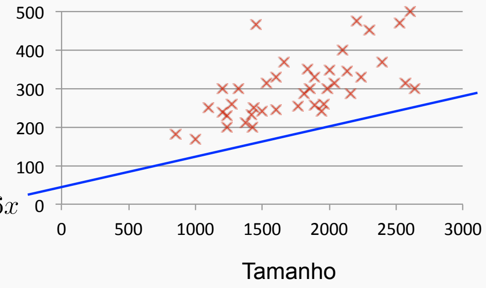
Como deseja-se obter θ_1 que minimize $J(\theta_1)$, então θ_1 = 1 é a melhor escolha para esse exemplo, pois $J(1) = 0$



Função Custo (J): Interpretação

- Conjunto de treinamento (valores de imóveis)

Valor (em US$ 1000)

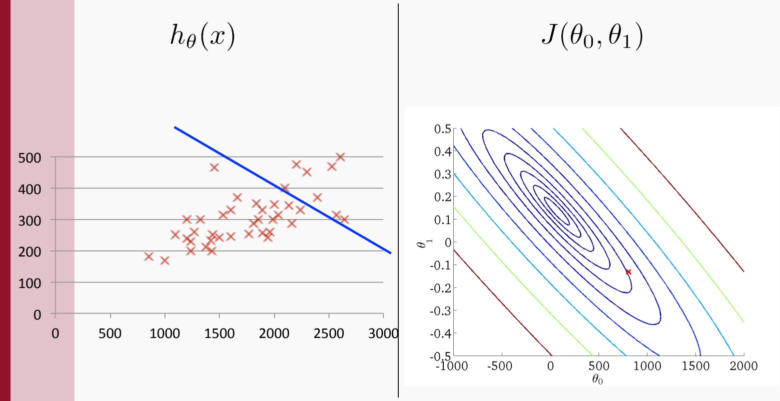


$h_\theta(x) = 50 + 0.06x$

$\theta_0 = 50$

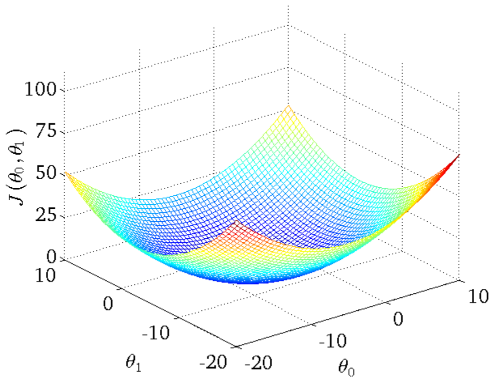
$\theta_1 = 0.06$

Função Custo (J): Interpretação

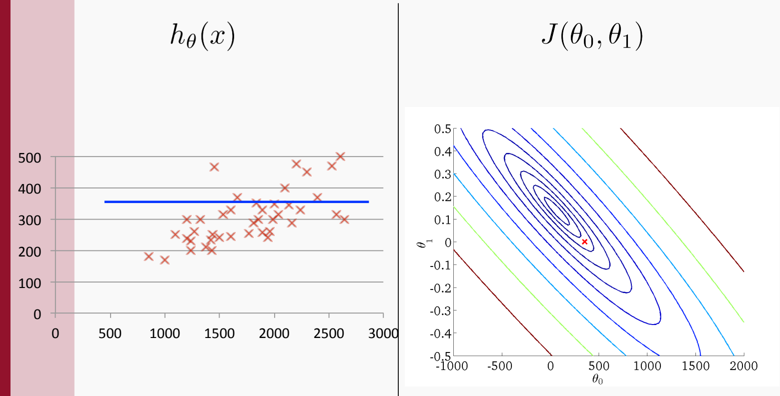


Função Custo (J): Interpretação

- $J(\theta_0, \theta_1)$

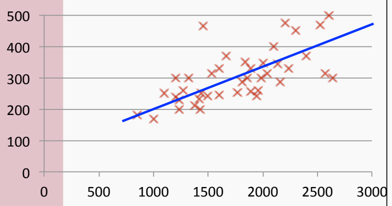


Função Custo (J): Interpretação

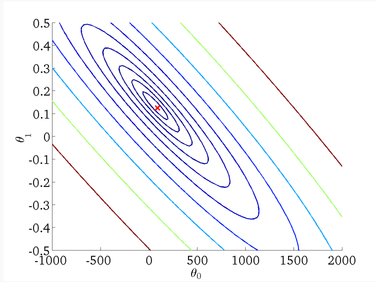


Função Custo (J): Interpretação

$h_\theta(x)$



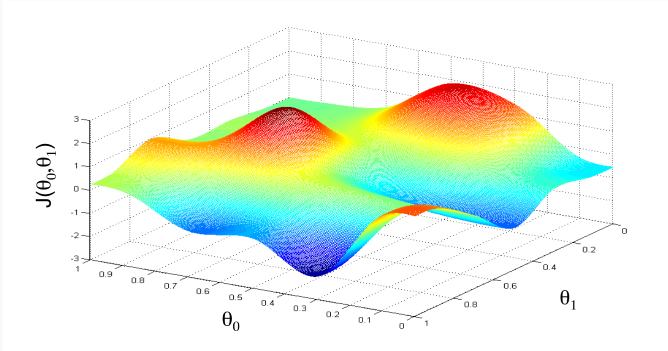
$J(\theta_0, \theta_1)$



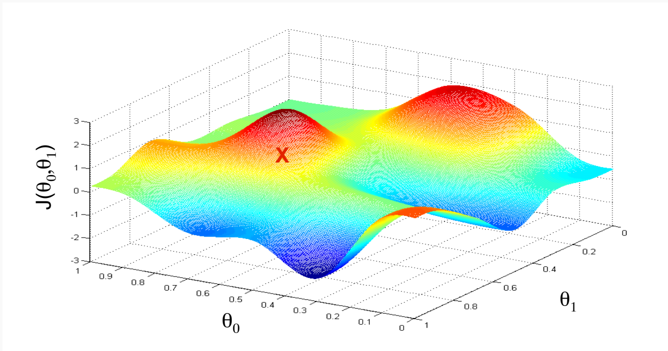
Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina

Gradiente Descendente

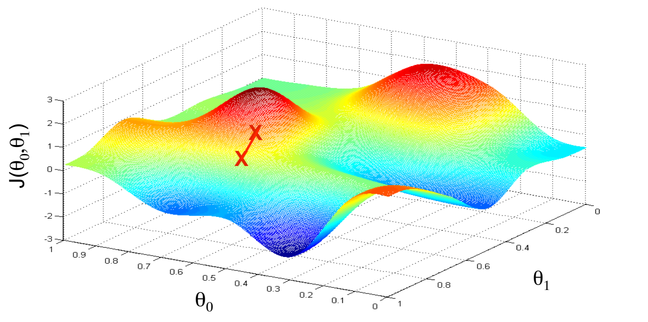
Gradiente descendente



Gradiente descendente

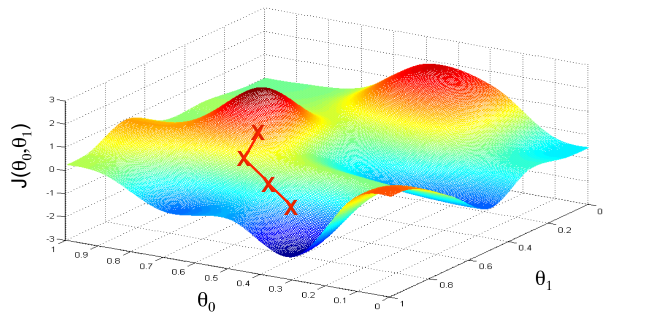


Gradiente descendente



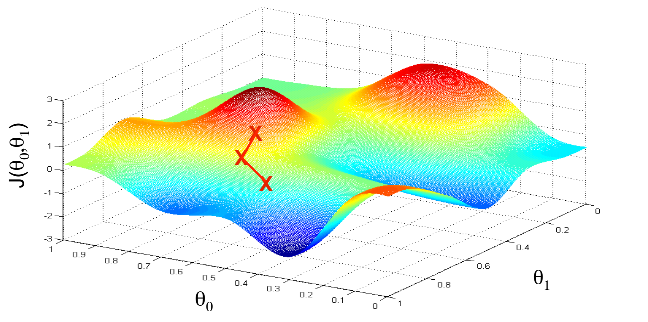
Tiago A. Almeida

Gradiente descendente



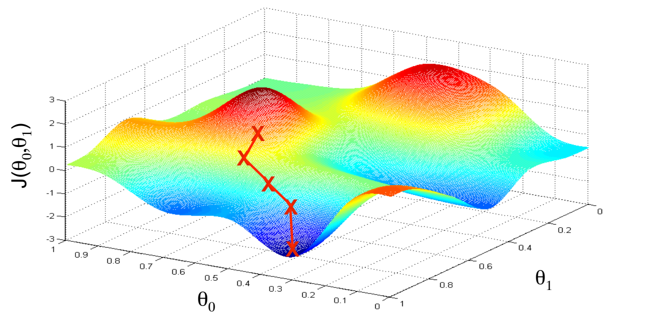
Tiago A. Almeida

Gradiente descendente



Tiago A. Almeida

Gradiente descendente



Gradiente descendente

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

A atualização dos θ_j deve ser "simultânea"

Gradiente descendente

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \underbrace{\alpha}_{\text{Taxa de aprendizagem}} \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

- Se α for muito pequeno, a convergência poderá ser lenta;
- Se α for muito grande, poderá não haver convergência.

Gradiente descendente

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \underbrace{\alpha}_{\text{Taxa de aprendizagem}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta_j}}_{\text{Derivada parcial}} J(\theta_0, \theta_1) \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

Gradiente descendente

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

- O método converge para um ótimo local mesmo se α for um valor fixo
- Conforme o ótimo for se aproximando, o método reduz o tamanho do passo automaticamente

Gradiente descendente para regressão linear

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} \boxed{J(\theta_0, \theta_1)} \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i)^2$$

$$\downarrow$$

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$$

Gradiente descendente para regressão linear

Repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1)} \quad \text{(para } j = 0 \text{ e } j = 1\text{)}$$

}

$$j = 0 : \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i)$$

$$j = 1 : \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x^i$$

Gradiente descendente para regressão linear

Algoritmo:

repetir até convergir {

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i)$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x^i$$

}

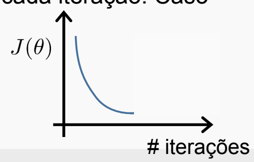
Atualizar "simultaneamente" θ_0 e θ_1

Gradiente descendente para regressão linear

- **Observações importantes**
  - GD é sensível à escala dos dados
    - É recomendável aplicar normalização por padronização para fazer com que $-1 \leq x_i \leq 1$

Gradiente descendente para regressão linear

- **Observações importantes**
  - GD é sensível à escala dos dados
    - É recomendável aplicar normalização por padronização para fazer com que $-1 \leq x_i \leq 1$
  - GD é sensível à taxa de aprendizagem
    - Recomendável testar α com ..., 0.001, 0.01, 0.1, 1, ...
    - Certifique-se de que $J(\theta)$ ***decresce*** a cada iteração. Caso contrário, reduza o valor de α



Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina

Regressão Linear com Múltiplas Variáveis

Regressão linear com múltiplas variáveis

Tamanho	#Cômodos	#Andares	#Anos	Valor (U$1000)
2104	5	1	45	460
1416	3	2	40	232
1534	3	2	30	315
852	2	1	36	178
...	...	...	...	...

Notação:

n = quantidade de atributos

$x^{(i)}$ = i^{th} amostra do conjunto de treinamento

$x_j^{(i)}$ = valor do atributo j da i^{th} amostra do conjunto de treinamento

Regressão linear com múltiplas variáveis

- **Regressão linear univariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$$

Regressão linear com múltiplas variáveis

- **Regressão linear univariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$$

- **Regressão linear multivariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

Regressão linear com múltiplas variáveis

- **Regressão linear univariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$$

- **Regressão linear multivariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

Para simplificar: $x_0 = 1$

Regressão linear com múltiplas variáveis

- **Regressão linear univariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$$

- **Regressão linear multivariada**

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

Para simplificar: $x_0 = 1$

$$\boxed{h_\theta(x) = \theta^T x}$$

Regressão linear com múltiplas variáveis

Hipótese: $h_\theta(x) = \theta^T x = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$

Parâmetros: $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$

Função de custo:

$$J(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Gradiente descendente

Repita $\{$

$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \ldots, \theta_n)$

$\}$

Regressão linear com múltiplas variáveis

Algoritmo:

repetir até convergir {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x_j^i$$

}

$\boxed{\text{Atualizar “simultaneamente” } \theta_j}$

Regressão linear com múltiplas variáveis

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x_j^i$$

$$\downarrow$$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x_0^i$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x_1^i$$

$$\theta_2 := \theta_2 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) x_2^i$$

...