2.25 2 つの点電荷 $Q_1 = 250\,\mu\mathrm{C}$ と $Q_2 = -300\,\mu\mathrm{C}$ がそれぞれ $(5,0,0)\,\mathrm{m}$ と $(0,0,-5)\,\mathrm{m}$ にある．Q_2 に働く力を求めよ．

[解] 問題の図を図 2.8 に示します．ここで，問題が Q_2 に働く力なので Q_1 による Q_2 への影響を考えて $\boldsymbol{R}_{12}$ は図より，

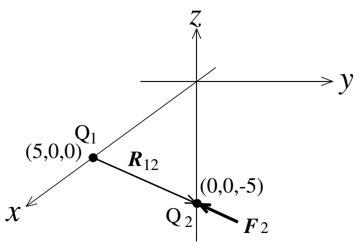

図 **2.8** 問題 2.25 の図

$$\boldsymbol{R}_{12} = -5\boldsymbol{a}_x - 5\boldsymbol{a}_z$$

となりますから，その単位ベクトルは，

$$\boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{-5\boldsymbol{a}_x - 5\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{-\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}$$

となります．よって，

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\boldsymbol{a}_{12} = \frac{(250\times 10^{-6})(-300\times 10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5\sqrt{2})^2}\boldsymbol{a}_{12}$$
$$= (-13.5)\left(\frac{-\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right) = (13.5)\left(\frac{\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right)\ [\mathrm{N}]$$

2.26 2 つの点電荷 $Q_1 = 30\,\mu\mathrm{C}$ と $Q_2 = -100\,\mu\mathrm{C}$ がそれぞれ $(2,0,5)\,\mathrm{m}$ と $(-1,0,-2)\,\mathrm{m}$ にある。Q_1 に働く力を求めよ．

[解] この場合の図を図 2.9 に示します．問題が Q_1 に働く力なので Q_2 による Q_1 への影響を考えて $\boldsymbol{R}_{21}$ は図 2.9 より，

$$\boldsymbol{R}_{21} = 3\boldsymbol{a}_x + 7\boldsymbol{a}_z$$

となります．したがって，単位ベクトルは，

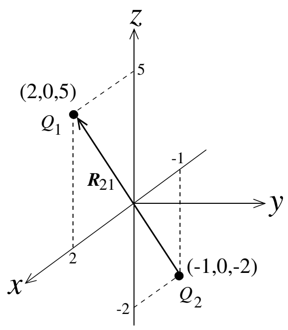

図 **2.9**　問題 2.26 の図

$$\boldsymbol{a}_{21} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{3\boldsymbol{a}_x + 7\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{3^2+7^2}} = \frac{3\boldsymbol{a}_x + 7\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{58}}$$

となり，Q_1 に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1 &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2}\boldsymbol{a}_{21} = \frac{(30\times10^{-6})(-100\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(\sqrt{58})^2}\boldsymbol{a}_{21} \\ &= (-0.466)\left(\frac{3\boldsymbol{a}_x + 7\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{58}}\right) = (0.466)\left(\frac{-3\boldsymbol{a}_x - 7\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{58}}\right)\ \text{[N]}\end{aligned}$$

2.35　一様な密度 ρ_l の，無限に長くまっすぐな電荷分布によって生じる $\boldsymbol{E}$ は直角座標でどのように表されるか．

[解]　まず，問題の図を図 2.10 に示しておきます．円柱座標を用いた値は，演習問題 **2.9** で既に与えられており，

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r$$

となっています．これを直角座標として表すために，図 2.10 を参照し，原点から点 P までの距離 r を x, y で表せば，

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

であり，単位ベクトル $\boldsymbol{a}_r$ も

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ですから，これらを円柱座標の式に代入すれば，

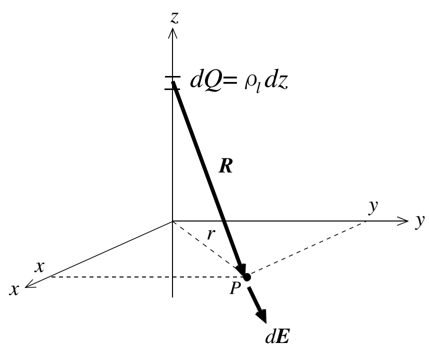

図 **2.10**　問題 2.35 の図

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y}{x^2+y^2}$$

2.42　一様な電荷密度 $\rho_s = (10^{-9}/6\pi)\,\mathrm{C/m^2}$ の 2 つの無限シートが $z = -5\,\mathrm{m}$ と $y = -5\,\mathrm{m}$ にある．線電荷が $z = 0$，$y = 0$ にあるとして，$(4,2,2)\,\mathrm{m}$ で同じ値の $\boldsymbol{E}$ を生じさせるのに必要な，一様な線電荷密度 ρ_l を求めよ．

[解]　この問題は 2 つの問題に切り分けることが出来ます．
(1) 2 つの無限シートにより，点 $(4,2,2)$ につくられる電界を求める問題．
(2) 点 $(4,2,2)$ につくられる電界が (1) と同じになる線電荷密度を求める問題．
　まず，2 つの無限シートが $z = -5\,\mathrm{m}$ と $y = -5\,\mathrm{m}$ にあるときの図を図 2.11 に示します．無限に広がる面電荷による電界は，

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a}_n$$

であり，面からの距離には無関係という性質があります．ここで，$z = -5$ のシートによる電界を $\boldsymbol{E}_z$，$y = -5$ のシートによる電界を $\boldsymbol{E}_y$ と表すことにします．それぞれは，

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a}_z \quad \boldsymbol{E}_y = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a}_y$$

となります．面電荷密度は，$\rho_s = (10^{-9}/6\pi)\,\mathrm{C/m^2}$ ですから電界の強さは，

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = \frac{10^{-9}/6\pi}{2(10^{-9}/36\pi)} = 3$$

となります．点 $(4,2,2)$ に 2 つの無限シートによりつくられる電界 $\boldsymbol{E}$ は，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{E}_y = 3\boldsymbol{a}_z + 3\boldsymbol{a}_y = 3\sqrt{2}\left(\frac{\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

と求まります．すなわり，電界の強さは $3\sqrt{2}$ となっていることに注意してください．

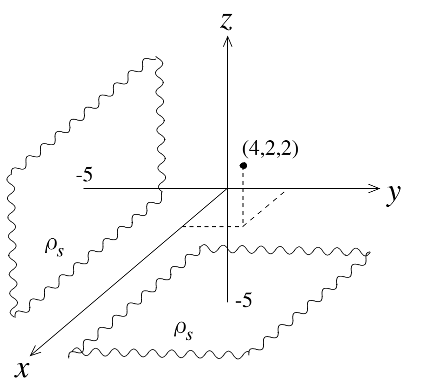

図 **2.11**　問題 2.42 の面電荷

次に，線電荷が $z = 0$，$y = 0$ にあるとは，x 軸上に線電荷が分布しているということですから図 2.12 のようになっています．

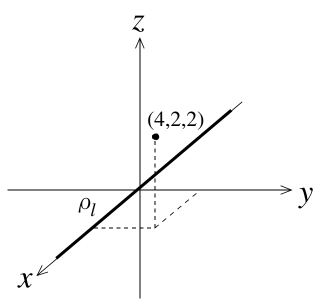

図 **2.12**　問題 2.42 の線電荷

線電荷によってつくられる電界 $\boldsymbol{E}$ は，

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r$$

ですから，図 2.12 より，線電荷と点 $(4, 2, 2)$ の垂直方向の距離は，$r = 2\sqrt{2}$ です．よって，

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 2\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

となりますから，上式と (1) の結果が等しくなるとの条件より，

$$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 2\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

が成り立ち，未知数である線電荷密度 ρ_l は，

$$\rho_l = 4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 0.667 \times 10^{-9} = 0.667[\mathrm{nC/m}]$$

2.43　次のような 2 つの一様な電荷分布がある：$y = 2\,\mathrm{m}$ に置かれた一様な電荷密度 $\rho_s = -50\,\mathrm{nC/m^2}$ のシート，および，$z = 2\,\mathrm{m}$ と $y = -1\,\mathrm{m}$ に置かれた $\rho_l = 0.2\,\mu\mathrm{C/m}$ の一様な線電荷．この領域のどの点で $\boldsymbol{E}$ は 0 となるか．

[解]　面電荷による電界 $\boldsymbol{E}_s$ と線電荷による電界 $\boldsymbol{E}_l$ は，それぞれ，

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a}_n, \qquad \boldsymbol{E}_l = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r$$

で求められます．$\rho_s = -50\,\mathrm{nC/m^2}$ なので図 2.13 に示したように $y < 2$ の領域では，$\boldsymbol{E}_s$ は $+y$ 方向となります．これに対し，$\rho_l = 0.2\,\mu\mathrm{C/m}$ による電界 $\boldsymbol{E}_l$ は，図のように $y = -1$ の左右で逆方向になります．したがって，$\boldsymbol{E}$ が 0 となる点は $y < -1$ にあることは明らかで，その点では $\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{E}_s$ となります．

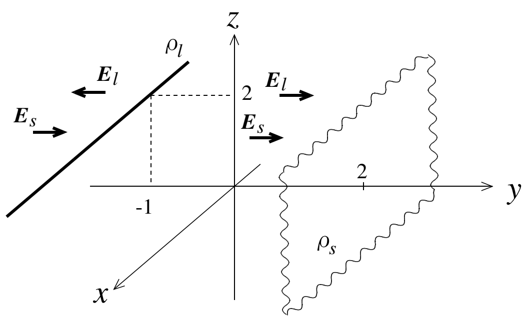

図 **2.13**　問題 2.43 の図

それぞれの電界の具体的な値は，

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{-50 \times 10^{-9}}{2(10^{-9}/36\pi)}\boldsymbol{a}_y = -900\pi\boldsymbol{a}_y$$

$$\boldsymbol{E}_l = \frac{0.2\times10^{-6}}{2\pi(10^{-9}/36\pi)r}\boldsymbol{a}_r = \frac{3.6\times10^3}{r}\boldsymbol{a}_r$$

$z=2$ で，$y<-1$ での $\boldsymbol{E}_l$ の方向は $\boldsymbol{a}_r \to \boldsymbol{a}_y$ となっていますから，$\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{E}_s$ は具体的に

$$\frac{3.6\times10^3}{r}(-\boldsymbol{a}_y) = 900\pi\boldsymbol{a}_y$$

となり，r は，

$$r = \frac{3.6\times10^3(-\boldsymbol{a}_y)}{900\pi\boldsymbol{a}_y} = -1.273$$

となります．線電荷から -1.273 の距離での電界が，面電荷によるものと大きさが等しく，方向が逆になるということであり，線電荷は $y=-1$ の位置ですから座標の値としては $y=-2.273$ となり，答えは $(x,-2.273,2.0)$ となります．

2.46　$\rho_l = 3.30\,\mathrm{nC/m}$ の一様な線電荷が $x=3\,\mathrm{m}$，$y=4\,\mathrm{m}$ にある．点電荷 Q は原点から $2\,\mathrm{m}$ 離れている．原点での電界がゼロになるような電荷 Q とその位置を求めよ．

[解]　問題の図を図 2.14 に示します．

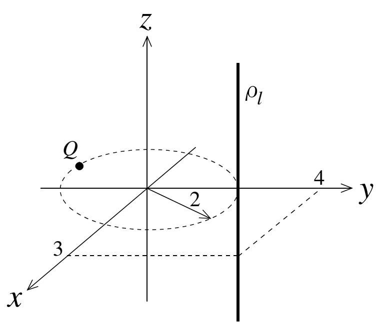

図 **2.14**　問題 2.46 の図

この線電荷が原点につくる電界を求めるために図 2.14 を $+z$ 方向から見た図を図 2.15 に示します．

ベクトル $\boldsymbol{R}$ と単位ベクトルは，図 2.15 より，

$$\boldsymbol{R} = -x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y = -3\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y$$

$$R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

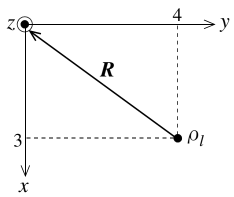

図 **2.15**　問題 2.46 の+z 方向からの図

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{-3\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y}{5}$$

となり，線電荷による電界は，

$$\boldsymbol{E}_l = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r = \frac{3.3\times 10^{-9}}{2\pi(10^{-9}/36\pi)5}\left(\frac{-3\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y}{5}\right) = 11.88\left(\frac{-3\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y}{5}\right)$$

と求まります．この $\boldsymbol{E}_l$ に対して，原点での電界をゼロにするためには，点電荷が大きさが同じで逆方向の電界 $\boldsymbol{E}_Q$ をつくればよい．

すなわち，

$$\boldsymbol{E}_Q = 11.88\left(\frac{3\boldsymbol{a}_x + 4\boldsymbol{a}_y}{5}\right)$$

であり，大きさに着目すれば，

$$|\boldsymbol{E}_Q| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(2)^2} = 11.88$$

より

$$Q = \frac{11.88\times 4}{9\times 10^9} = 5.28\times 10^{-9} = 5.28\ [\mathrm{nC}]$$

と点電荷の電荷量が求まります．そして，距離が $r = 2$ で位置は $\boldsymbol{E}_Q$ と逆方向ですから

$$2\left(\frac{-3\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y}{5}\right) = 2(-0.6\boldsymbol{a}_x - 0.8\boldsymbol{a}_y) = -1.2\boldsymbol{a}_x - 1.6\boldsymbol{a}_y$$

となり，点電荷 Q の位置は，$(-1.2, -1.6, 0)$ となります．

2.50　密度 $\rho_s = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}\ (\mathrm{C/m^2})$ の有限なシート電荷が，$z = 0$ 平面の $0 \le x \le 2\,\mathrm{m}$，$0 \le y \le 2\,\mathrm{m}$ の範囲にある．$(0, 0, 2)\,\mathrm{m}$ での $\boldsymbol{E}$ を求めよ．

[解]　問題の図を図 2.16 に示します．図より，ベクトル $\boldsymbol{R}$ や単位ベクトルは，

$$\boldsymbol{R} = -x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z = -x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + 2\boldsymbol{a}_z$$

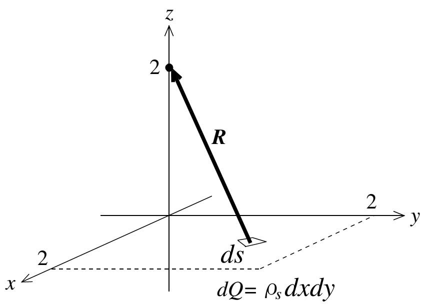

図 **2.16**　問題 2.50 の図

$$R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$$

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{-x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + 2\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$$

となります．そして，微分電荷 dQ による微分電界 $d\boldsymbol{E}$ は，

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{E} &= \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R = \frac{2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}dxdy}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + 4)}\left(\frac{-x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + 2\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}\right) \\
&= \frac{xdxdy}{2\pi\varepsilon_0}(-x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + 2\boldsymbol{a}_z) \\
&= (18 \times 10^9)xdxdy(-x\boldsymbol{a}_x - y\boldsymbol{a}_y + 2\boldsymbol{a}_z) \\
&= (18 \times 10^9)(-x^2dxdy\boldsymbol{a}_x - xydxdy\boldsymbol{a}_y + 2xdxdy\boldsymbol{a}_z)
\end{aligned}$$

となります．電界 $\boldsymbol{E}$ は積分により

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= (18 \times 10^9)\left(-\int_0^2\int_0^2 x^2dxdy\boldsymbol{a}_x - \int_0^2\int_0^2 xydxdy\boldsymbol{a}_y + 2\int_0^2\int_0^2 xdxdy\boldsymbol{a}_z\right) \\
&= (18 \times 10^9)\left(-\int_0^2 x^2dx\int_0^2 dy\boldsymbol{a}_x - \int_0^2 xdx\int_0^2 ydy\boldsymbol{a}_y + 2\int_0^2 xdx\int_0^2 dy\boldsymbol{a}_z\right) \\
&= (18 \times 10^9)\left(-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\Big[y\Big]_0^2\boldsymbol{a}_x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2\boldsymbol{a}_y + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\Big[y\Big]_0^2\boldsymbol{a}_z\right) \\
&= (18 \times 10^9)\left(-\frac{16}{3}\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y + 8\boldsymbol{a}_z\right)
\end{aligned}$$