

電気回路I及び演習

9. 直列並列共振、電力の複素数表示



学習目標

- 直列回路及び並列回路における共振現象の概要を理解する
- 複素電力を用いた有効電力、無効電力、皮相 電力の算出法を理解する



Quiz

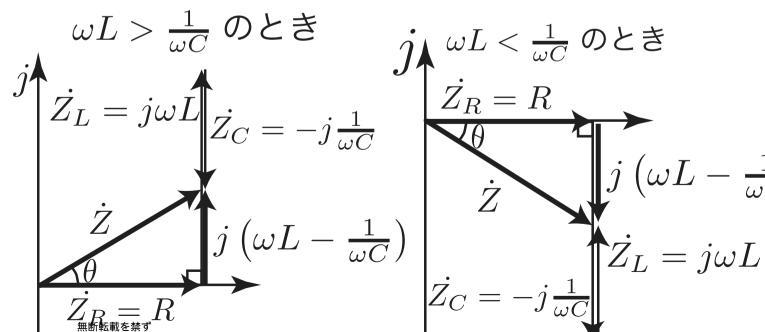
RLC直列回路のイン

$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) ... (4.76)$$

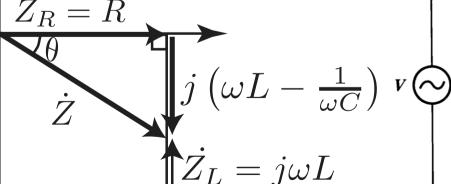
$$= |\dot{Z}|e^{j\theta} = |\dot{Z}| \underline{\angle \theta} \dots$$

大きさ
$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

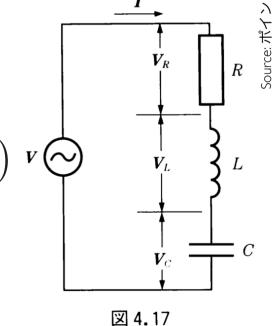
偏角
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \dots (4.77)$$



$$_{lack}\;\omega L<rac{1}{\omega C}$$
 のとき

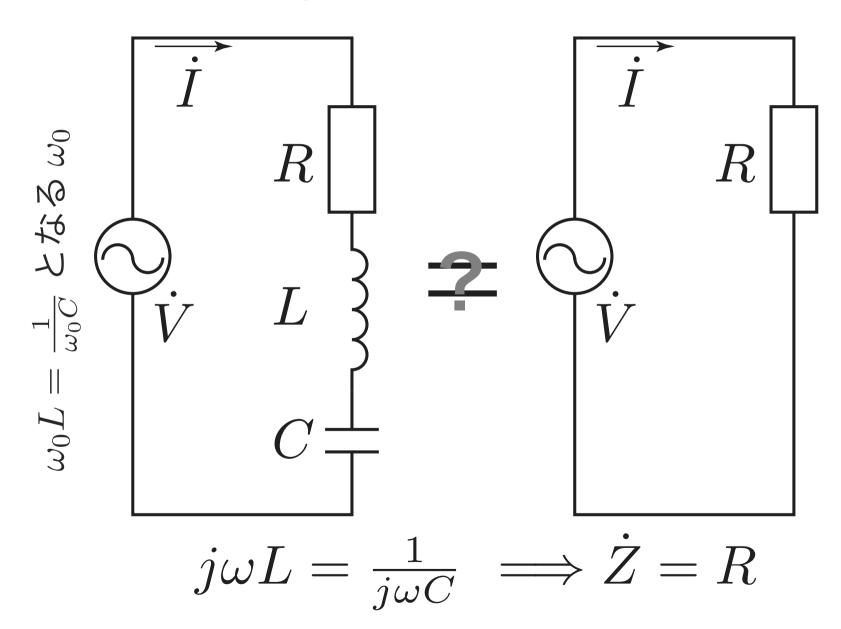


$$\dot{Z_C} = -j\frac{1}{\omega C}$$



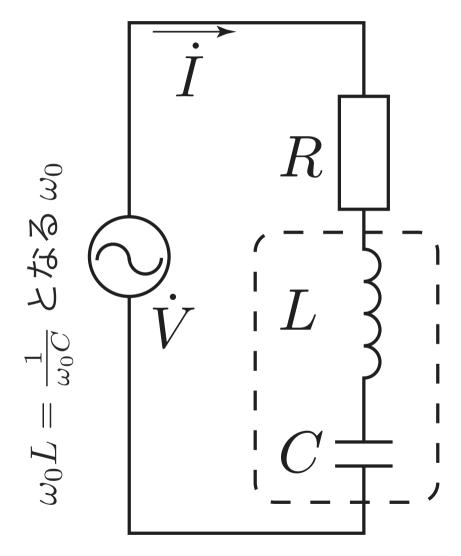
ある周波数 ω_0 で $\omega_0 L = rac{1}{\omega_0 C}$

数式通りL,Cは無視できるか?



ALKA KA

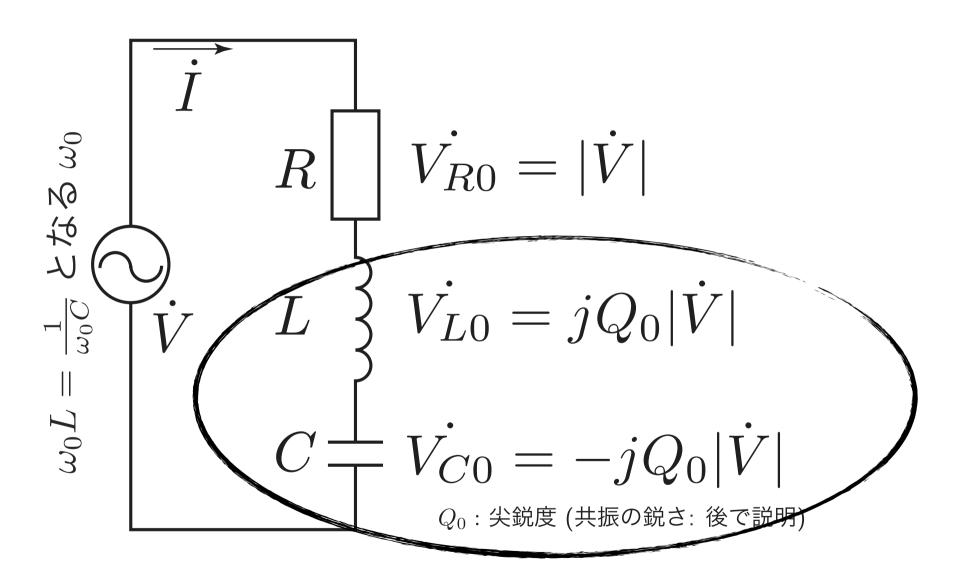
L, Cで別の現象が発生する



ある周波数 ω_0 で $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ インピーダンス $\dot{Z} = R$

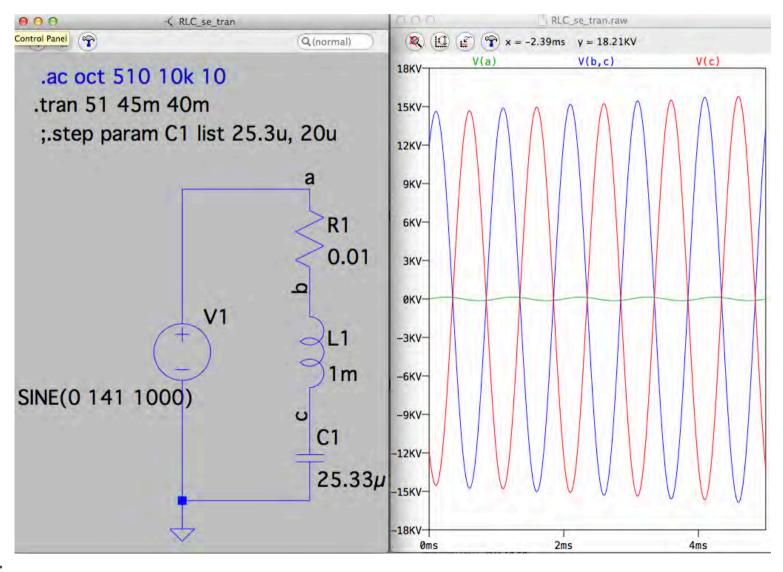


LとCの直列共振

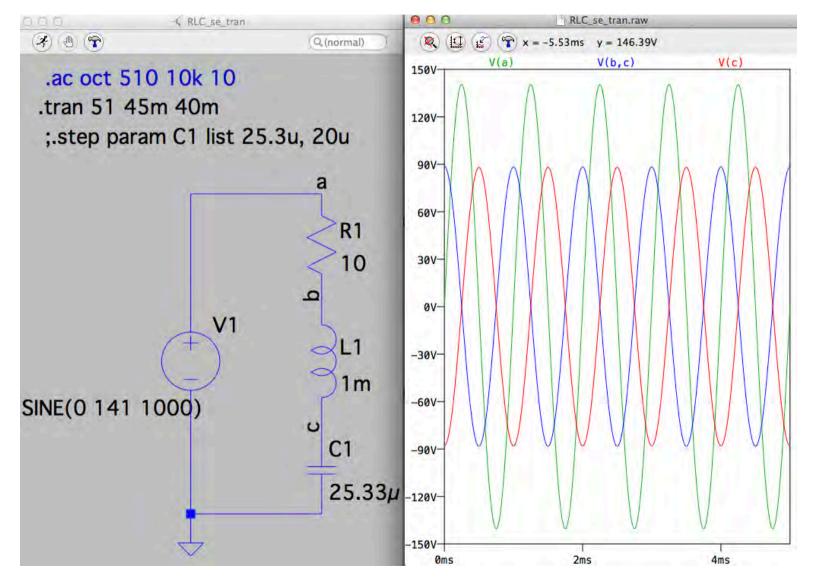


常に打ち消し合う

1kHzで共振(抵抗が小さい=Q。が大きい場合)



1kHzで共振(抵抗が大きい= $Q_{ m o}$ が小さい場合)





直列共振 (p.107)

リアクタンス X=0 となる状態を直列共振と呼び、この時の角周波数 ω_0 、共振周波数 f_0 と表わす。

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \dots (4.78)$$

より

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\dots(4.79)$$

周波数特性と共振の関係(アルのア)

インピーダンス \dot{Z} は $\dot{Z}=R$ で最小となり偏角は $\theta=0$ になる。 従って電圧 \dot{V} と電流 \dot{I} は同相になり、電流の大きさ $|\dot{I}|$ は

$$|\dot{I}| = \frac{|\dot{V}|}{|\dot{Z}|} = \frac{|\dot{V}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \dots (4.80)$$

より共振時には最大値となり共振電流と呼ぶ。

共振電流
$$I_0 = \frac{|\dot{V}|}{R}$$

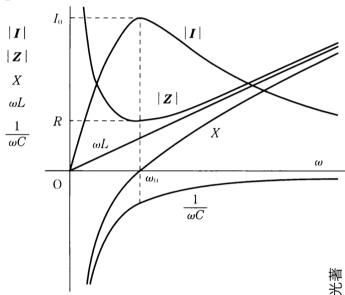
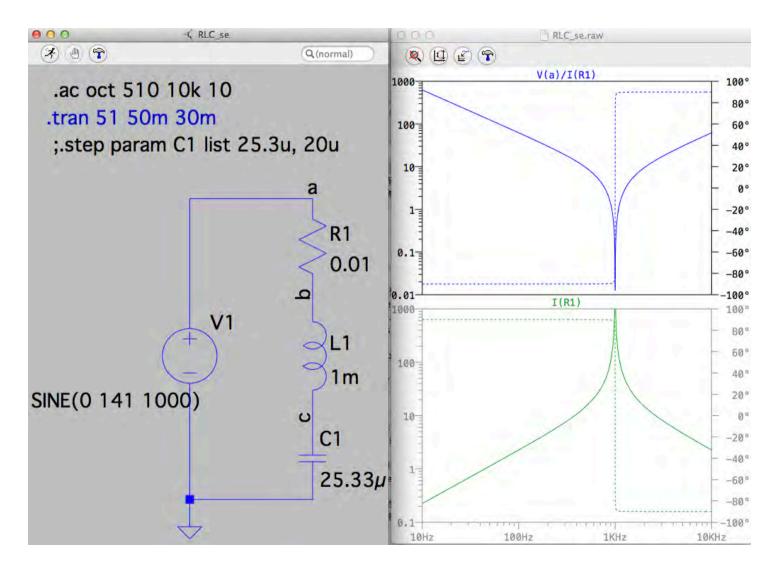


図 4.19

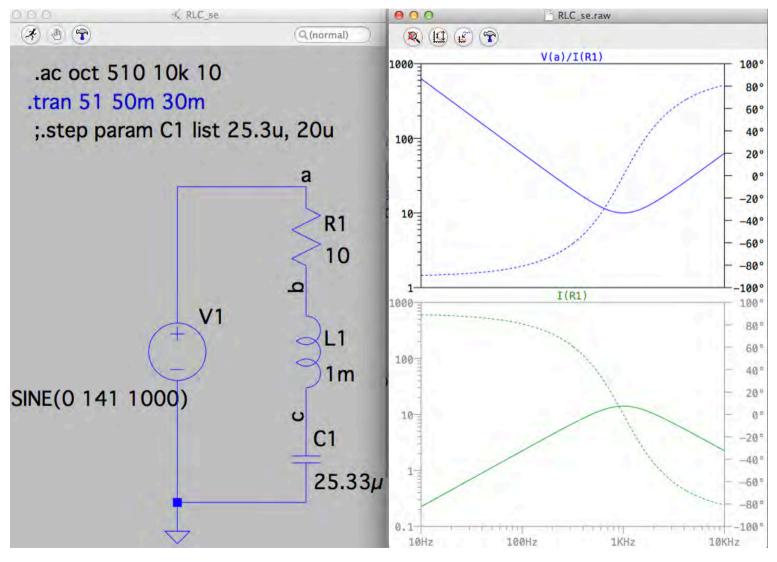
共振電流 I_0 は L および C にも流れるため R,L,C にかかる電圧 $\dot{V_{R0}},\dot{V_{L0}},\dot{V_{C0}}$ は

$$\dot{V_{R0}} = |\dot{V}| = I_0 R = R \frac{|\dot{V}|}{R} = |\dot{V}| \dots (4.91)$$
 $\dot{V_{L0}} = j\omega_0 L I_0 = j \frac{\omega_0 L}{R} |\dot{V}| \dots (4.92)$
 $\dot{V_{L0}} = \frac{I_0}{j\omega_0 C} = -j \frac{1}{\omega_0 C R} |\dot{V}| \dots (4.93)$

尖鋭度が高い場合の周波数特性



尖鋭度が低い場合の周波数特性





共振周波数前後での周波数特性

 $\omega L < \frac{1}{\omega C} \quad \omega L > \frac{1}{\omega C}$ Source: ポイソトで学ぶ電気回路, 三浦光藩 Source: ポイソトで学ぶ電気回路, 三浦光藩 Source: ポイソト 1 I Z X L 1 Source: ポイソト 1 I Z X L 1 Source $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ |z|R低 R 0 $\frac{1}{\omega C}$ 高 R **(b)** 図 4.19 (c)

図 8 - 2 ωに対する直列回路の Z , θ , Y Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J. A.





直列共振の尖鋭度(p.108)

$$\dot{V_{R0}} = |\dot{V}| = I_0 R$$
 (1)

$$\dot{V_{L0}} = j\omega_0 L I_0 = j\frac{\omega_0 L}{R} |\dot{V}|$$
 (2)

$$\dot{V_{C0}} = \frac{I_0}{j\omega_0 C} = -j\frac{1}{\omega_0 C R} |\dot{V}|$$
 (3)

ここで $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ より、共振の鋭さを示す尖鋭度を定義する。

尖鋭度
$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \dots (4.83)$$

また、式(2),(3)より

$$\dot{V}_{R0} = |\dot{V}| = I_0 R \dots (4.91)$$

$$\dot{V}_{L0} = j \frac{\omega_0 L}{R} |\dot{V}| = j Q_0 |\dot{V}| \dots (4.92)$$

$$\dot{V}_{C0} = -j \frac{1}{\omega_0 CR} |\dot{V}| = -j Q_0 |\dot{V}| \dots (4.93)$$

となり Q_0 は下式からも求まる。

尖鋭度
$$Q_0 = \frac{|\dot{V}_{C0}|}{|\dot{V}|} = \frac{|\dot{V}_{L0}|}{|\dot{V}|}$$

尖鋭度が1より大きいと

共振により電源電圧以上の電圧がL,Cに発生する

直列共振と電力の周波数特性(p.1108)

共振時に抵抗 R で消費される電力は $|\dot{I}|^2R$ となる。共振周波数の前後での電力特性を考える。ここで共振していない状態の電流の大きさ $|\dot{I}|$ と I_0 の比を考えると、

$$\begin{split} \frac{|\dot{I}|}{I_0} &= \frac{\frac{|\dot{V}|}{|\dot{Z}|}}{\frac{|\dot{V}|}{R}} = \frac{R}{|\dot{Z}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \dots (4.81) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \left(\omega L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \left[\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \dots (4.82) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \dots (4.84) \end{split}$$

直列共振と電力の周波数特性2(p.108)

電力が 1/2 になる状態を考えると、 $|\dot{I}|^2R=rac{I_0^2}{2}R=\left(rac{I_0}{\sqrt{2}}
ight)^2R\dots(4.85)$ となる。よって式 (4.84) との関係より

$$\frac{|\dot{I}|}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots (4.86)$$

が成り立つのは分母が等しいときなので

$$Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1\dots(4.87)$$

となる。この結果より

$$\frac{\omega_1}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_1}=-\frac{1}{Q_0}, \frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_2}=\frac{1}{Q_0}\dots(4.88)$$
 Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

 $(\omega_1 < \omega_0$ のとき $)(\omega_2 < \omega_0$ のとき)

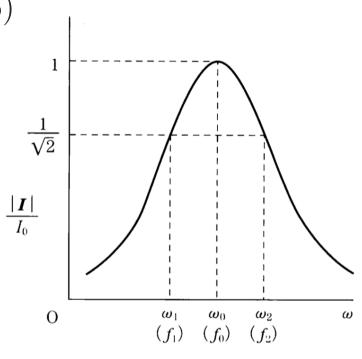


図 4.20

ωι,ω₂を半電力周波数とも呼ぶ

式 (4.88) の 2 式より式 (4.89)(4.90) が求まる (証明は課題で)

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \dots (4.89)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\Delta f} \dots (4.90)$$

尖鋭度 Q_0 は上式以外にも様々な式から求まる

$$Q_{0} = \frac{\omega_{0}L}{R} = \frac{1}{\omega_{0}CR} = \frac{|\dot{V}_{C0}|}{|\dot{V}|} = \frac{|\dot{V}_{L0}|}{|\dot{V}|} \dots (4.83)$$

$$\omega_{0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \succeq \vec{\pm} (4.83) \ \, \sharp \ \, \mathcal{D}$$

$$Q_{0} = \frac{\omega_{0}L}{R} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \dots (4.94)$$

RLC 直列回路において $R=10[\Omega], L=0.3[H], C=$

 $0.5[\mu F]$ であり、これに実効値 10[V] の電圧を加えた。回

路に流れる電流が最大になる時の周波数 (共振周波数) f_0 、

最大電流 (共振電流) I_0 、尖鋭度 Q_0 、この時の R, L, C の

端子電圧 $\dot{V_{R0}}, \dot{V_{L0}}, \dot{V_{C0}}$ を求めよ

RLC 直列回路において $R=10[\Omega], L=0.3[H], C=$

 $0.5[\mu F]$ であり、これに<u>実効値 10[V] の電圧</u>を加えた。回複素電圧 $\mathbf{V}=\mathbf{I0.0}_{\angle}\mathbf{0}^{\circ}$

路に流れる電流が最大になる時の周波数 (共振周波数) f_0 、LとCから共振周波数を求める(式(4.79))

最大電流 (共振電流) I_0 、 尖鋭度 Q_0 、 この時の R, L, C の I_0 =|**V**|/R 式(4.83)

端子電圧 $\dot{V_{R0}},\dot{V_{L0}},\dot{V_{C0}}$ を求めよ

式(4.91)~(4.93)

例題 4.5 解答例

RLC 直列回路で電流が最大となるのは共振時のため、

共振周波数
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.3\times0.5\times10^{-6}}} = 411[Hz]$$

共振電流 $I_0 = \frac{|\dot{V}|}{R} = \frac{10}{10} = 1[A]$
尖鋭度 $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi\times411\times0.3}{10} = 77.5$

$$Q_0 = 77.5 \, \text{L} \, \text{D}$$

$$\dot{V}_{R0} = |\dot{V}| = 10[V]$$
 $\dot{V}_{L0} = jQ_0|\dot{V}| = j775[V]$
 $\dot{V}_{C0} = -jQ_0|\dot{V}| = -j775[V]$



4.6.2 並列共振 (p.111)

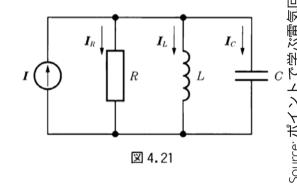
4.6.2 *RLC*並列回路(**p** 路)

図 4.21 の回路の合成アドミタンス \dot{Y} は

$$\dot{Y} = \dot{Y_R} + \dot{Y_L} + \dot{Y_C} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \dots (4.95)$$

また、複素空間でのベクトルとして扱えるので

$$\dot{Y}=|\dot{Y}|e^{j\theta}=|\dot{Y}|\angle\theta\dots$$
 大きさ $|\dot{Y}|=\sqrt{\left(rac{1}{R}
ight)^2+\left(\omega C-rac{1}{\omega L}
ight)^2}$ 偏角 $\theta= an^{-1}rac{\omega C-rac{1}{\omega L}}{rac{1}{R}}\dots(4.77)$



並列共振(pIII) 日本大学理工学部電気工学科 電気回路I及び演習(門馬)

直列共振のリアクタンス同様に、アドミタンス $\dot{Y}=G+jB(G:T)$ ンダンクタンス、B サセプタンス) としたとき B=0 となる状態 を並列共振と呼び、この時の角周波数および周波数を共振角周波数 ω_0 、共振周波数 f_0 と表わす。

$$B = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \dots (4.97)$$

より

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\dots(4.98)$$

このとき、アドミタンスは $\dot{Y}=\frac{1}{R}$ 、偏角 $\theta=0^\circ$ で最小になり $\dot{V}=rac{I}{\dot{v}}$ より、並列共振時に電圧は最大値 (共振電圧) V_0 かつ電流と 同相となる。

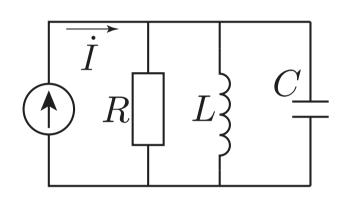
並列共振で各素子に流れる電流(plil3)

共振電圧 V_0 は L,C にもかかるので、共振時に R,L,C を流れる電流 $\dot{I_{R0}},\dot{I_{L0}},\dot{I_{C0}}$ は

$$\dot{I}_{R0} = \frac{V_0}{R} \dots (4.104)$$

$$\dot{I}_{L0} = \frac{V_0}{j\omega_0 L} = \frac{R}{j\omega_0 L} |\dot{I}| = -jQ_0 |\dot{I}| \dots (4.105)$$

$$\dot{I}_{C0} = j\omega_0 C V_0 = j\omega_0 C R |\dot{I}| = jQ_0 |\dot{I}| \dots (4.106)$$



但し、並列共振における尖鋭度 Q_0 は

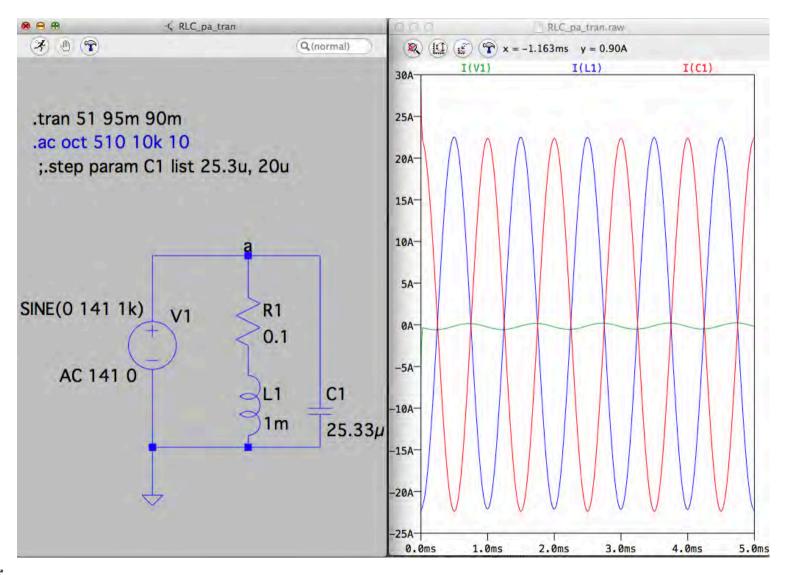
$$Q_0 = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} \dots (4.101)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}} CR = R\sqrt{\frac{C}{L}} \dots (4.107)$$

$$= \frac{|\dot{I}_{C0}|}{|\dot{I}|} = \frac{|\dot{I}_{L0}|}{|\dot{V}|}$$

であり、L,C には回路全体に流した電流 \dot{I} より大きい電流が流れる場合があるが互いに打<u>た消</u>し合う。

並列共振の例(R_1 は L_1 の内部抵抗)



並列共振での周波数特性・尖鋭度(pm3)

共振していない状態の電圧 \dot{V} と共振電圧 V_0 の大きさの比を求めると、

$$\frac{|\dot{V}|}{V_0} = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \dots (4.100)$$

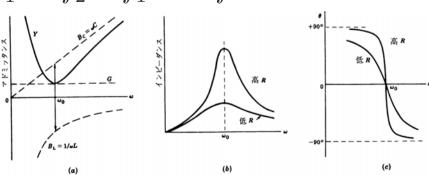
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega_0 CR\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \dots (4.102)$$

となり、式 (4.102) より式 (4.87)(4.88) と同様に半電力周波数と尖鋭度 Q_0 の関係として

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \dots (4.89)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\Delta f} \dots (4.103)$$

が求まる。



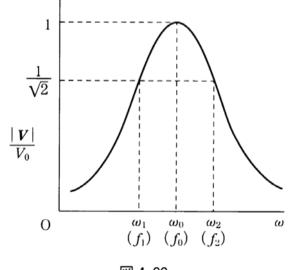
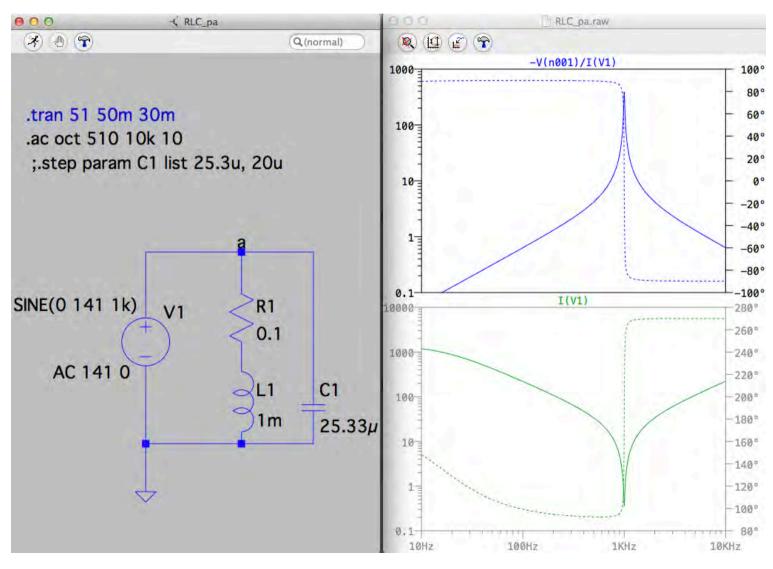


图 4.22

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著



並列共振では共振時間では インピーダンスが最大になる





例題4.6 (p.114)

R,L,C 並列回路において $R=10[k\Omega],L=0.3[H],C=$ $0.5[\mu F]$ であり、これに実効値 10[mA] の正弦波電流を流 した。回路の端子電圧が最大になる時の周波数 (並列共 振周波数) f_0 ,最大電圧 (共振電圧) V_0 、尖鋭度 Q_0 、共振 時のR,L,Cに流れる電流 I_{R0},I_{L0},I_{C0} を求めよ。



例題4.6の出題意図

R,L,C 並列回路において $R=10[k\Omega],L=0.3[H],C=$

0.5[µF] であり、これに<u>実効値 10[mA] の正</u>弦波電流を流 複素電流**■**=0.010∠0°

した。回路の端子電圧が最大になる時の周波数 (並列共LとCから共振周波数を求める(式(4.79))

振周波数) f_0 ,最大電圧 (共振電圧) V_0 、 尖鋭度 Q_0 、 共振 $V_0 = R|I|$ 式(4.101)

時のR,L,Cに流れる<u>電流 I_{R0},I_{L0},I_{C0} </u>を求めよ。 式 $(4.104)\sim(4.106)$

例題 4.6 解答例

RLC 並列回路で電圧が最大となるのは共振時のため、

共振周波数
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.3\times0.5\times10^{-6}}} = 411[Hz]$$

共振電圧 $V_0 = |\dot{I}|R = 10\times10^{-3}\times10\times10^3 = 100[V]$
尖鋭度 $Q_0 = \omega_0 CR = 2\pi\times411\times0.5\times10^{-6}\times10\times10^3 = 12.9$

$$Q_0 = 12.9$$
 より $\dot{I}_{R0} = |\dot{I}| = 10[mA]$ $\dot{I}_{L0} = -jQ_0|\dot{I}| = -j129[mA]$ $\dot{I}_{C0} = jQ_0|\dot{I}| = j129[mA]$



4.7 電力の複素数表示(p.114)

複素電圧において初期位相を ψ とすると

$$\dot{V} = V e^{j\psi}$$

となる。また、複素電圧と複素電流との位相差を θ とすれば複素電流は

$$\dot{I} = Ie^{j(\psi + \theta)}$$

となる。皮相電力 S は電圧と電流の積であるが、 $\dot{V}\dot{I}$ とすると $VIe^{j(2\psi+\theta)}$ のように初期位相が残ってしまうので、電圧と電流の何れかを共役として計算する。

複素電力
$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I} = Ve^{-j\psi}Ie^{j(\psi+\theta)}$$

$$= VIe^{j\theta} = VI\cos\theta + jVI\sin\theta\dots(4.108)$$

$$= P + jQ\dots(4.109)$$

(b) 電流の共役複素数を用いる場合 (マグロウヒルの方法)

複素電力
$$\dot{S} = \dot{V}\bar{\dot{I}} = Ve^{j\psi}Ie^{-j(\psi+\theta)}$$

$$= VIe^{-j\theta} = VI\cos\theta - jVI\sin\theta\dots(4.110)$$

$$= P - jQ$$

有効電力P

但し有効電力:P、無効電力:Q、皮相電力: $S=|\dot{S}|$ ※ポイントで学ぶ電気回路の表記法 (\dot{P},P,P_Q,P_S) はあまり用いられない

| | \dot{S} の虚部が負 | · 🗴 の虚部が正 | インピーダンスの偏角 |
|-----|-----------------|-----------|------------|
| (a) | 無効電力は誘導性 | 無効電力は容量性 | 正負が逆 |
| (b) | 無効電力は容量性 | 無効電力は誘導性 | 正負が一致 |

となり、偏角を用いずに複素電圧、複素電流から有効電力を求める こともできる。

電圧の共役を取る場合

$$\dot{V}=\dot{Z}\dot{I}, ar{\dot{V}}=\dot{Z}ar{\dot{I}}$$
 及びインピーダンス $\dot{Z}=R\pm jX$ と式 (4.109) より

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I} = \dot{Z}\dot{I}\dot{I}
= \dot{Z}|\dot{I}|^2 \dots (4.112)
= (R \mp jX)|\dot{I}|^2
= R|\dot{I}|^2 \mp jX|\dot{I}|^2 \dots (4.113)
P = R|\dot{I}|^2 \dots (4.114)
Q = X|\dot{I}|^2 \dots (4.115)$$

虚部の正負(偏角の正負)が インピーダンスのそれに対して反転する

電流の共役を取る場合

$$\dot{I}=rac{\dot{V}}{\dot{Z}}, ar{\dot{I}}=rac{\dot{V}}{\dot{Z}}$$
 及びインピーダンス $\dot{Z}=R\pm jX$ と $\dot{S}=P-jQ$ より

$$\dot{S} = \dot{V}\bar{\dot{I}} = \dot{V}\frac{\bar{\dot{V}}}{\bar{\dot{Z}}} = |\dot{V}|^2 \frac{\dot{Z}}{|\dot{Z}|^2}$$

$$= \left|\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}\right|^2 \dot{Z} = \dot{Z}|\dot{I}|^2$$

$$= (R \pm jX)|\dot{I}|^2$$

$$= R|\dot{I}|^2 \pm jX|\dot{I}|^2$$

$$P = R|\dot{I}|^2$$

$$Q = X|\dot{I}|^2$$



例題4.7 (p.116)

ある回路に複素電圧 $\dot{V}=100+j50[V]$ を加えたところ、複素電流 $\dot{I}=3+j4[A]$ が流れた。回路のインピーダンス \dot{Z} 、アドミタンス \dot{Y} 、および有効電力P、無効電力Q、皮相電力Sを求めよ。



例題4.7の出題意図

ある回路に複素電圧 $\dot{V}=100+j50[V]$ を加えたところ、

複素電流 $\dot{I} = 3 + j4[A]$ が流れた。回路のインピーダンス

 \underline{Z} 、アドミタンス \underline{Y} 、および有効電力P、無効電力Q、電圧電流を極座標形式に変換 複素電力を求める皮相電力Sを求めよ。

S=|**S**|



例題4.7 解答例

複素電圧、複素電流を極座標形式に変換すると、

$$\dot{V} = 100 + j50 = 112\angle 26.6^{\circ}[V]$$

 $\dot{I} = 3 + j4 = 5\angle 53.1^{\circ}[A]$

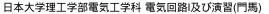
となるのでインピーダンス \dot{Z} とアドミタンス \dot{Y} は

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{112\angle 26.6^{\circ}}{5\angle 53.1^{\circ}}$$

$$= 22.4\angle - 26.5^{\circ}[\Omega] = 20 - j9.99[\Omega]$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{22.4\angle - 26.5^{\circ}}$$

$$= 44.6 \times 10^{-3}\angle 26.5^{\circ}[S] = 40.0 - j19.9[mS]$$



有効電力P



例題4.7 解答例つづ

複素電力は $\dot{S}=\dot{V}ar{\dot{I}}$ を用いると

$$\dot{S} = \dot{V}\bar{\dot{I}} = 112\angle 26.6^{\circ} \times 5\angle -53.1^{\circ}$$

= $560\angle -26.5^{\circ}[VA] = 501 - j250[VA]$

となり、有効電力P、無効電力Q、皮相電力Sは

$$P = 501[W]$$

Q = 250[var](※ 虚部が負の値であったため容量性)

$$S = |\dot{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{501^2 + 250^2} = 560[VA]$$