Om matematiske utsagn

Eindride Kjersheim

6. september 2014

Sammendrag

Notatet utdyper noen temaer fra matematikk 1T i den videregående skolen. Flere av disse er også fremstilt som guidede oppgaver. Noen temaer er lagt fram mer nøye/teoretisk, der vi går steg for steg fra aksiom til formel. Dette er for å se hvor regnereglene kommer fra.

1 Ulikheter

For reelle tall kan vi alltid sammenlikne to tall, og bestemme hvilket tall som er størst, (eller minst). F.eks om du skal kjøpe en spesiell brus og det er to butikker ved siden av hverandre, handler du helst der hvor brusen er billigst. Om den ene butikken tar 13 kroner og den andre 14, velger du butikken hvor den koster 13 kroner fordi

$$13 < 14,$$

altså at 13 er mindre enn 14. Man kan gjerne huske dette ved å tenke seg at ulikhetstegnet er en krokodillemunn $<$ som snur og glefser mot det tallet som er størst. Dersom tallene kan være like store, er dette det samme som at vår krokodille ikke klarer å bestemme seg helt så vi kan skrive $13 \leq 13$, men også $13 \leq 14$. Dette er spesielt nyttig når vi regner med uttrykk hvor vi f.eks tillater at et tall er større enn et annet, men også at det er likt.

1.1 Sannhetsverdi, utsagn

Merk at om vi tar to tall $x, y \in \mathbb{R}$ og tester $x \leq y$ får vi enten sant eller usant. Enten er $x \leq y$, eller så er $y \leq x$, men aldri begge samtidig med mindre $x = y$.

Eksempel 1. $13 < 14$ er sant, men $14 < 13$ er **usant** ☺

Vi kan også bruke dette for å beskrive mengder av tall:

Eksempel 2. $x \leq 2$ er sant for alle tall x som er mindre eller lik 2, og **usant** for alle tall x som er strengt større enn 2. Du setter altså inn tall for x og tester om du får sant eller ikke. *Mengden* av alle tall som tilfredstiller vår ulikhet, kaller vi $\langle \leftarrow, 2]$. Du må gjerne tenke på mengder som samlinger av objekter. I vårt tilfelle er $\langle \leftarrow, 2]$ en samling av tall. ☺

1.2 Oppgaver

Oppgave 1.1. La $x \leq 2$. Marker sant og usant for ulike verdier av x

i) $x = 1$

ii) $x = 10$

iii) $x = 2$

iv) $x = 7$

v) $x = 0$

vi) $x = -100$

vii) $x = \pi$

viii) $x = \sqrt{2}$, begrunn svaret.

iix) $x = 2\sqrt{2}$, begrunn svaret.

ix) $x = \frac{5}{2}$, begrunn svaret.

x) $x = \frac{5\sqrt{2}}{\pi}$ HINT: se på x^2 siden $0 \leq x \leq 2$ medfører at $x^2 \leq 4$.

Oppgave 1.2. Begrunn hvorfor $x \in \langle \leftarrow, 5]$ er det samme som at $x \leq 5$.

Oppgave 1.3. Begrunn hvorfor $x \in \langle \leftarrow, 5\rangle$ er det samme som at $x < 5$.

Oppgave 1.4. Begrunn hvorfor $x \in \langle \leftarrow, a\rangle$ er det samme som at $x < a$.

2 En motivasjon for algebra

Når vi bruker matematikk til litt mer kompliserte ting enn å gå på butikken, ønsker vi gjerne å spare arbeid. Derfor lager vi regneregler for tallsystemene som skal fungere for *alle* disse tallene. Vi kan si at algebraen i skolen er å bruke disse reglene til å manipulere *uttrykk*. La oss ta et eksempel!

Eksempel 3. Vi skal bruke reglene fra algebra til å vise at

$$\frac{(xy)^3x^4}{yx^2} = y^2x^5 \text{ for } x, y \neq 0 \tag{1}$$

Først *distribuerer* vi ut potensen;

$$\frac{(yx)^3x^4}{yx^2} = \frac{x^3y^3x^4}{yx^2}$$

Deretter bruker vi at *multiplikasjon er en kommutativ operasjon*, det vil si at rekkefølgen på faktorene ikke spiller noen rolle:

$$\frac{y^3x^3x^4}{yx^2}$$

Deretter slår vi sammen potenser av like grunntall:

$$\frac{y^3x^{3+4}}{yx^2} = \frac{y^3x^7}{yx^2}$$

Nå *forkorter* vi brøken

$$\frac{y^3x^7}{yx^2} = \left(\frac{y^3}{y}\right)\left(\frac{x^7}{x^2}\right) = y^2x^5$$

☺

Vi kan si at likningen (3) er et *utsagn* som sier at om vi tar hvilke som helst reelle tall $x, y \neq 0$ og setter inn i både høyre og venstre side, så skal svaret *alltid* bli det samme. Slike utsagn er også svært nyttige i anvendelser, da bruker man matematikken til å beskrive generelle sammenhenger. Et berømt eksempel fra fysikken er Newtons lover, som sier:

I) Et legeme som ikke er utsatt for ytre krefter vil bevege seg i en rett linje

II) Sammenhengen mellom ytre krefter F på et legeme med masse m og dets akselerasjon a er gitt ved

$$F = ma.$$

III) Envher kraft har en motkraft, som er like stor og peker i motsatt retning

Vi ser spesielt at NII (Newtons andre lov) gir oss en generell sammenheng mellom kraft og akselerasjon. Denne enkle loven er grunnlaget for å sende folk til månen, all mekanisk ingeniørvitenskap som dekker alt fra bevegelse av væsker og gasser (i atmosfæren - meteorologi, i rør - oljeindustri/skipsfart/industrielle anlegg, beregning av løft på fly eller tak under orkan...) til bevegelseslikningene for faste stoffer, samt for å forstå knekning og bøyning. Man kan altså ramse opp det meste av moderne teknologi med utspring i denne likningen. Den er også viktig for å forstå fenomener i elektronikk, da man der også analyserer krefter på ladde partikler med masse [1].

Eksempel 4. Kristoffer dytter på en kloss med masse 2kg langs en rett linje, med kraft 2N. Akselerasjonen er da

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2N}{2kg} = 1N/kg = 1\frac{m}{s^2}$$

Altså øker hastigheten med $1\frac{meter}{sekund}$, per sekund. N er enheten Newton, og den har de fundamentale enhentene $\frac{kgm}{s^2}$. ☺

Du vil altså se i fysikken at å regne med bokstaver er mye kraftigere enn å regne med tall, og det er også mye ryddigere! Som i newtons lover vet vi da hvilken fysisk størelse hvert symbol representerer, og det blir fort rotete om man setter inn tall altfor tidlig. Dette fordrer imidlertid at vi har klare regler for hvordan tall oppfører seg, og at vi er inneforstått med reglenes *gyldighetsområde*, det vil si hvilke situasjoner de gjelder for.

3 Utvidelse av brøk

Vi skal oppsummere noen regler for brøk og potenser.

Aksiom 3.1. For alle tall $x \in \mathbb{R}$ som ikke er null, finnes et *unikt* tall

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$

[1] man ser da bort fra relativistiske/kvantefysiske effekter

slik at

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Dette kan virke litt abstrakt[2] , men det er denne regelen som lar oss forkorte brøker. Om vi deler et tall på seg selv, får vi altså 1 tilbake. Den sier også at dette er det eneste tallet som gjør jobben. Merk videre at vi her har definert divisjon som multiplikasjon med en *multiplikativ invers*. Utrykket $a(\frac{1}{x})$skrives ofte som

$$\frac{a}{x}$$

Videre er det verdt å merke seg at siden vi har

$$\frac{x}{x} = 1$$

kan vi fritt også *utvide* brøker for å f.eks addere to brøker.

Eksempel 5 (Utvidelse og addisjon av brøk)**.** Vi skal slå sammen brøkene

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Vi må da utvide brøkene slik at vi får like nevnere. Vi gjør følgende:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\frac{d}{d} + \left(\frac{c}{d}\right)\frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{db} \tag{2}$$

Der vi i første likhetstegn kun ganger begge brøkene med 1, og i andre likhetstegn bruker vi at

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}, \quad \frac{d}{d} = \frac{1}{d}d$$

så

$$\frac{a}{b}\frac{d}{d} = a\frac{1}{b}\frac{1}{d}d$$

Utrykket i midten skriver vi

$$\frac{1}{bd}.$$

Da dette ganget med bd blir 1 (overbevis deg selv om dette ved å gange inn bd og se at du får $1 \cdot 1 = 1$).

☺

[2] Her bør det nevnes at et *aksiom* er en forutsetning vi antar at tallsystemet har, uten å begrunne det videre.

3.1 Oppgaver

Oppgave 3.2. Dersom du behøver litt trening på faktorisering ved bruk av det distributivet aksiom $a(b + c) = ab + ac$ kan du faktorisere noen av uttrykkene her: (skrive dem på formen $a(b + c)$

i) $3x^5 + 21x^3$

ii) $3x^5 + 21x^3$

iii) $x^{2009} + 5yx^5$

iv) $(5x)^{2014} + (5x)^{2020}$

v) $(5x)^{2014} + (10x)^{2020}$

vi) faktoriser alle mulige ledd på formen $u(v + w)$
$3x^5 + 21x^3 + 10x^5y^3 + abc + 5yx^{19} + \nu$

Oppgave 3.3. En vanlig feil mange gjør er å slå sammen brøkene uten å utvide:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

blir til

$$\frac{a + c}{b + d}$$

Finn tall a, b, c, d slik at

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + c}{b + d}.$$

Oppgave 3.4. Begrunn siste steget i liking (2) med å bruke

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

og at

$$a(b + c) = ab + ac.$$

(Den siste av disse er forøvrig det *distributive* aksiomet for reelle tall).

Oppgave 3.5. Utvid og skriv som en enkelt brøk.

$$\frac{7x^5}{6} + \frac{6y}{a},$$

der $a \neq 0$.

4 potensregler

...

4.1 oppgaver

Oppgave 4.1. Utvid og skriv som en enkelt brøk.

$$\frac{7x}{6} + \frac{6y}{x^2},$$

der $x \neq 0$.

Oppgave 4.2. Utvid og skriv som en enkelt brøk.

$$\frac{7x^{13}}{6} + \frac{6y}{x^{2001}},$$

der $x \neq 0$.

Oppgave 4.3. Anta at $n > m$ er to naturlige tall (altså heltall som er større enn null). Begrunn at

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

HINT: Forkort brøken.

Oppgave 4.4. Anta at n og m er to naturlige tall, men vi snur betingelsen om at n er større enn m fra forrige oppgave på hodet og antar $n < m$ så $n - m < 0$ Begrunn at

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

HINT: Forkort brøken.

Vi lar dette være a^{n-m}, og derfor definerer vi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

der n er et naturlig tall.

Oppgave 4.5. Vis at $(a^n)^m = a^{nm}$ for alle naturlige tall n, m. HINT: Bruk definisjonen $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$, der n er antall faktorer, og tell opp hvor mange faktorer du får når du ganger dette med seg selv m ganger.

Oppgave 4.6. Begrunn at $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ for alle $a > 0$ ved å bruke formelen fra forrige oppgave.

Vi *definerer* altså brøker på følgende måte; $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.