גלים ומערכות מפולגות
00440148

סמסטר חורף 2026

תרגיל מחשב

שם: יבגני קריקונוב **ת"ז:** 319242350

שם: אילון הלוי **ת"ז:** 328137831

שאלה 1:

א. השתמשו ב- Matlab על מנת ליצור פולס גאוסי בזמן :

1. צרו ציר זמן בתחום : $[0 \quad 0.1\mu sec]$, עם מרווח דגימה של $dt = 100\ psec$.
2. על הגל הנושא להיות בתדר : $f_0 = 1\ GHz$.
3. על הפולס להיות ברוחב $4.2\ nsec$ בחצי הגובה (FWHM).
4. שיא הפולס צריך להופיע בדיוק באמצע ציר הזמן – כלומר סביב $50\ nsec$.

לקוד המטלב הכנו פונקציה שמקבלת פרמטרים של גאוסיאן ומייצרת את וקטור הגאוסיאן

(ערך הגאוסיאן בכל נקודה שתואמת לוקטור הזמנים הנתון)

```
function signal = createGaussianEnvelope(t_vector, t_peak, fwhm)
    % Calculate sigma from FWHM
    % Formula: FWHM = 2 * sqrt(2 * ln(2)) * sigma
    sigma = fwhm / (2 * sqrt(2 * log(2)));

    % Calculate Gaussian Envelope
    envelope = exp(-(t_vector - t_peak).^2 / (2 * sigma^2));
    signal = envelope;
end
```

ליצירת גל גאוסי מאופנן בגל נושא בעל תדר f_0 הוספנו פונקציה נוספת:

```
function signal = createPulse(t_vector, t_peak, fwhm, f_carrier_frequency)
    % Calculate Gaussian Envelope
    envelope = createGaussianEnvelope(t_vector, t_peak, fwhm); % a(t)
    carrier = cos(2 * pi * f_carrier_frequency * t_vector); % Re{e^(j*w*t)}
    signal = envelope .* carrier; % Re{a(t) * e^(j*w*t)}
end
```

להלן הקוד של יצירת הפולס כנתבקש:

```
%% Part A: Signal Generation
dt = 100e-12;                % 100 psec to seconds
t = 0:dt:0.1e-6;             % Time vector from 0 to 0.1 microsec

% Gaussian Pulse Parameters
t_center = 50e-9;            % Center at 50 nsec
fwhm = 4.2e-9;               % 4.2 nsec Full Width at Half Maximum

% Carrier Parameters
f0 = 1e9;                    % 1 GHz carrier frequency

t_signal = createPulse(t,t_center,fwhm,f0);
```

ב. בצעו התמרת פורייה לפולס:

1. התמרת פורייה ב- Matlab תתבצע לפי שורת הקוד הבאה:

```
f_signal=fftshift(fft(t_signal));
```

2. צרו ציר תדר לפי השורה הבאה:

```
f=linspace(-1/2/dt,1/2/dt,length(t_signal));
```

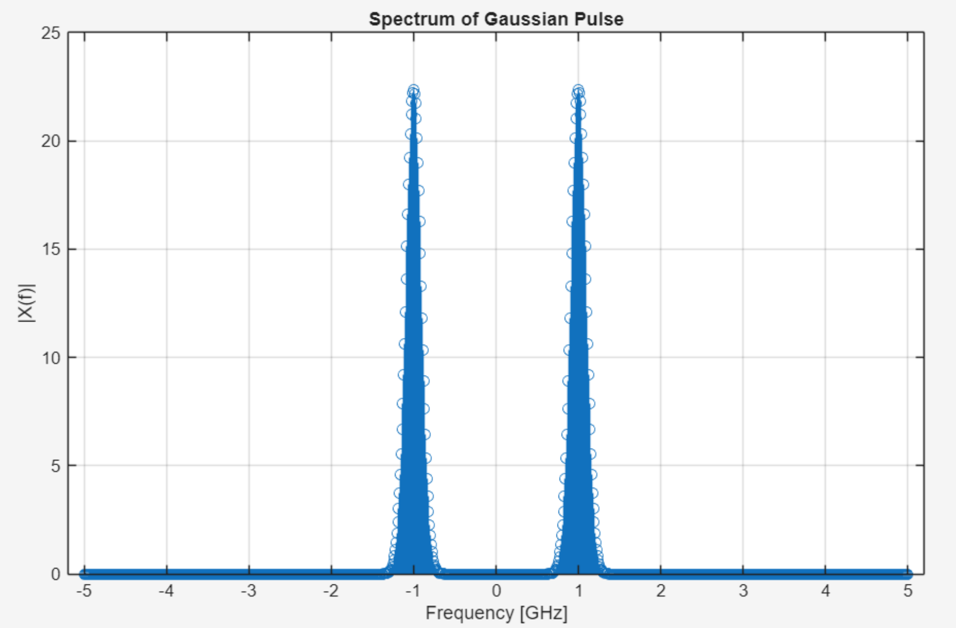
3. הציגו את הספקטרום המתקבל ע"י פונקציית stem.

4. בחרו את התדרים העיקריים המרכיבים את האות, איתם תמשיכו לעבוד בהמשך השאלה.

להלן חלק הקוד:

```
%% Part B: Fourier Transform
f_signal = fftshift(fft(t_signal));
f = linspace(-1/(2*dt), 1/(2*dt), length(t_signal));

% Plotting the Spectrum
figure;
stem(f / 1e9, abs(f_signal));
title('Spectrum of Gaussian Pulse');
xlabel('Frequency [GHz]'); ylabel('|X(f)|');
grid on;

% Main Frequencies of the signal are 1[GHz] and -1[GHz].
% We shall choose positive frequencies only and use the real part of the
% result (symetry)
% we might get the same result without passing through positive filter
% with the constraint beta(-omega) = -beta(omega)
f_filtered_signal = SingleSidebandFilter(f, f_signal, 0);
```

להלן הגרף:



נבחין כי התמרת פורייה זוגית בתדר (בערכה המוחלט, אך לא רק בערכה המוחלט).

ישנן שתי גישות בניתוח הבעיה.

- גישה 1- להחליט באופן "שרירותי" שמתקיים $\beta(-\omega) = -\beta(\omega)$ לכל תדר $\omega \in \mathbb{R}$.
- גישה 2- לנתח את האות רק בתדרים החיוביים, ולקחת בסוף את החלק הממשי של ההתמרה ההפוכה.

בהתחלה לא הבנו במיוחד את הגישה השנייה בסעיף ולכן תיארנו בסעיפי ההמשך את תגובת התדר של המערכת (התקדמות בתווך) באופן הבא (מקדם התקדמות אי-זוגי בתדר):

```
function signal_at_z = propagateWaveInZ(frequencies, fourier_signal, n, z)
    c0 = 3e8; % velocity of light in vacum (m/s)
    omega = 2 * pi * frequencies;
    k_0 = omega / c0;
    beta = k_0 .* n;

    % 2. Enforce Physical Antisymmetry (beta(-f) = -beta(f))
    % For real-valued time signals, the phase shift must be an odd function.
    % We take the beta calculated for positive frequencies and mirror it
    % for the negative side with a sign flip.
    beta_antisymmetric = sign(frequencies) .* interp1(frequencies, beta, abs(frequencies), 'linear', 'extrap');

    % 3. Apply the Phase Shift (Propagation)
    % H(f) = exp(-j * beta * z)
    propagation_factor = exp(-1j * beta_antisymmetric * z);

    f_signal_propagated = fourier_signal .* propagation_factor;

    % Return to time domain using Inverse FFT
    signal_at_z = ifft(ifftshift(f_signal_propagated));
end
```

לאחר שהבנו את הגישה השנייה ושזה מה שנתבקש בסעיפים העוקבים, מימשנו גם פילטר תדרים חיוביים:

```
function f_filtered_signal = SingleSidebandFilter(frequencies, fourier_signal, cutoff)
    % SINGLESIDEBANDFILTER Filters the spectrum to keep only frequencies above a specific value.
    % This creates a single-sided spectrum by removing negative frequencies
    % and components below the cutoff, often used for analytic signal processing.
    %
    % frequencies    : The frequency vector [Hz] (from fftshift)
    % fourier_signal : The shifted FFT of the input signal
    % cutoff         : The lower frequency boundary [Hz]. Components below this are zeroed.

    % 1. Create a logical mask to isolate frequencies strictly greater than or equal to the cutoff.
    mask = frequencies >= cutoff;

    % 2. Apply the mask to the fourier signal
    f_filtered_signal = fourier_signal .* mask;
end
```

לפי הגרף ברור שהאות צר סרט סביב התדר $f_0 = 1[GHz]$. לפי הוראות השאלה, נבצע פילטר לתדרים חיוביים בלבד:

```
% Main Frequencies of the signal are 1[GHz] and -1[GHz].
% We shall choose positive frequencies only and use the real part of the
% result (symetry)
% we might get the same result without passing through positive filter
% with the constraint beta(-omega) = -beta(omega)
f_filtered_signal = SingleSidebandFilter(f, f_signal, 0);
```

ג. צרו פרופיל מקדם שבירה אחיד כתלות בתדר :

1. מהירות הפאזה בתווך של הגל הנושא צריכה להיות שווה ל: $v_p = \frac{c}{A+B}$, כאשר c מהירות האור בריק, ו- A, B הם שני מספרים שתבחרו אותם - הצהירו בהערה על המספרים בהם השתמשתם.
2. קדמו את מרכיבי התדר השנים שבחרתם בסעיף הקודם למרחקים הבאים :

$$z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = v_p \cdot 10\, nsec \quad , \quad z_3 = v_p \cdot 20\, nsec$$

3. שרטטו לאורך ציר הזמן את כל הגלים שקיבלתם, יחד עם הסופרפוזיציה שלהם, בגרף נפרד עבור כל אחד מהמיקומים הנ״ל.
הסבירו את התוצאה המתקבלת (שרטוט ללא הסבר לא יתקבל).

בחרנו באופן שרירותי:

$$A = 29, \qquad B = 1$$

```
%% Part C: Phase Velocity and Propagation
c0 = 3e8;                   % velocity of light in vacum (m/s)

A = 29; B = 1;               % Example constants (A+B > 1)
n_op = A+B;
v_p = c0 / n_op;            % Phase velocity
v_g = v_p;                  % Linear Disperssion

% Distances
z = [0, v_g * 10e-9, v_g * 20e-9]; % z1, z2, z3

% Expected result:
% signal(z,t) = Re{a(t-beta_1*z) * e^(j*(w*t-beta_0*z))}
% beta = k_0 * n = omega / c0 * n
% beta_1 = dbeta / domega = n / c0

% the delay should be:
% beta_1 * z = n_op / c0 * v_p * 10^-8 * (i-1) = 10^-8 * (i-1)
% the delay expected to be 10 [nsec].

plotPropagatedSignalsInZ('Part C: Constant Refractive Index', t, z, f, f_filtered_signal, n_op)
```

הערה:

לסעיף זה, התווך בעל מקדם שבירה קבוע ולכן דיספרסיה ליניארית, ומכך מהירות הפאזה היא מהירות החבורה. (זה נכון עבור גל גאוסי מאופנן, כפי שנלמד בתרגול 4).

במטרה לשרטט גרפים של האות המתקדם בגרף בערכי z שונים, הכנו את הפונקציה:

```
function plotPropagatedSignalsInZ(graph_name, t_vector, z_vals, frequencies, f_filtered_signal, n)
    figure('Name', graph_name);
    total_signal = zeros(size(t_vector)); % Initialize vector for superposition
    colors = {'b', [0 0.5 0], 'm'}; % Blue, Dark Green, Magenta

    plots_num = length(z_vals)+1;
    for i = 1:plots_num-1
        z_curr = z_vals(i);
        % Propagate the filtered signal to the current distance
        t_signal_at_z = propagateWaveInZ(frequencies, f_filtered_signal, n, z_curr);

        % Accumulate for superposition
        current_real_sig = real(t_signal_at_z);
        total_signal = total_signal + current_real_sig;

        % Plot individual signals with unique colors
        subplot(plots_num, 1, i);
        plot(t_vector * 1e9, current_real_sig, 'Color', colors{i}, 'LineWidth', 1);
        title(['Individual Signal at z = ', num2str(z_curr*1e3, '%.2f'), ' mm']);
        xlabel('Time [nsec]'); ylabel('Amp');
        grid on;
    end

    % Plot the Superposition (The sum of all three waves) in Red
    subplot(plots_num, 1, plots_num);
    plot(t_vector * 1e9, total_signal, 'Color', 'r', 'LineWidth', 1.5);
    title('Superposition of all signals');
    xlabel('Time [nsec]'); ylabel('Amp');
    grid on;
end
```

כאמור- מקדם שבירה קבוע גורר דיספרסיה ליניארית כאשר הפיתוח סביב אפס הוא ללא ערך קבוע. אמנם כאשר נבצע פיתוח לתדר סביב התדר המרכזי $f = f_0$, נקבל שאכן ישנו ערך קבוע.

פונקציה זו תעזור לנו לכל המקרים השונים, לכל הסעיפים השונים בשאלה.

הרי היא מבצעת את פעולת הקידום של האות בתווך בעל מקדם שבירה נתון ומציגה את התוצאות במרחקים נתונים, כמו את הסופרפוזיציה של האותות במרחקים השונים.

לפי התוצאה מהתרגול למקדם התקדמות ליניארי (מקדם שבירה קבוע):

$$\boxed{E_y(z,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_y(z,t)\} = \mathrm{Re}\{a(t-\beta_1 z)e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}\}}$$

כאשר הסיגנל המשודר ב-$z=0$ הוא $a(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f_0\cdot t)$. (התדר $\omega_0 = 2\pi\cdot f_0$).

כאשר נפתח דרך $\omega_0 = 2\pi\cdot 10^9\left[\frac{rad}{sec}\right]$ נקבל:

$$n_{op} = A + B$$

$$\beta(\omega) = k_0(\omega)\cdot n(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\cdot n_{op} = \frac{\omega}{c_0}\cdot(A+B) = (\omega-\omega_0)\cdot\frac{A+B}{c_0} + \omega_0\cdot\frac{A+B}{c_0}$$

כלומר:

$$\beta_1 = \frac{A+B}{c_0} = \frac{30}{c_0} = 10^{-7}\left[\frac{sec}{m\cdot rad}\right], \qquad \beta_0 = \omega_0\cdot\frac{A+B}{c_0} = \omega_0\cdot\beta_1 = 20\cdot\pi\left[\frac{1}{m}\right]$$

מהירות הפאזה נתונה לפי:

עבור דרך z, השהיית האות הנושא $e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)} = e^{j\omega_0\left(t-\frac{\beta_0}{\omega_0}z\right)}$ היא $\frac{\beta_0}{\omega_0}z$ ולכן, מהירות האות הנושא, **לה נקרא מהירות הפאזה** v_p, ניתנת לחישוב גם ע"י חלוקת הדרך z בהשהייה $\beta_0 z$:

$$\boxed{v_p = \frac{z}{\frac{\beta_0}{\omega_0}z} = \frac{\omega_0}{\beta_0}}$$

במקרה שלנו:

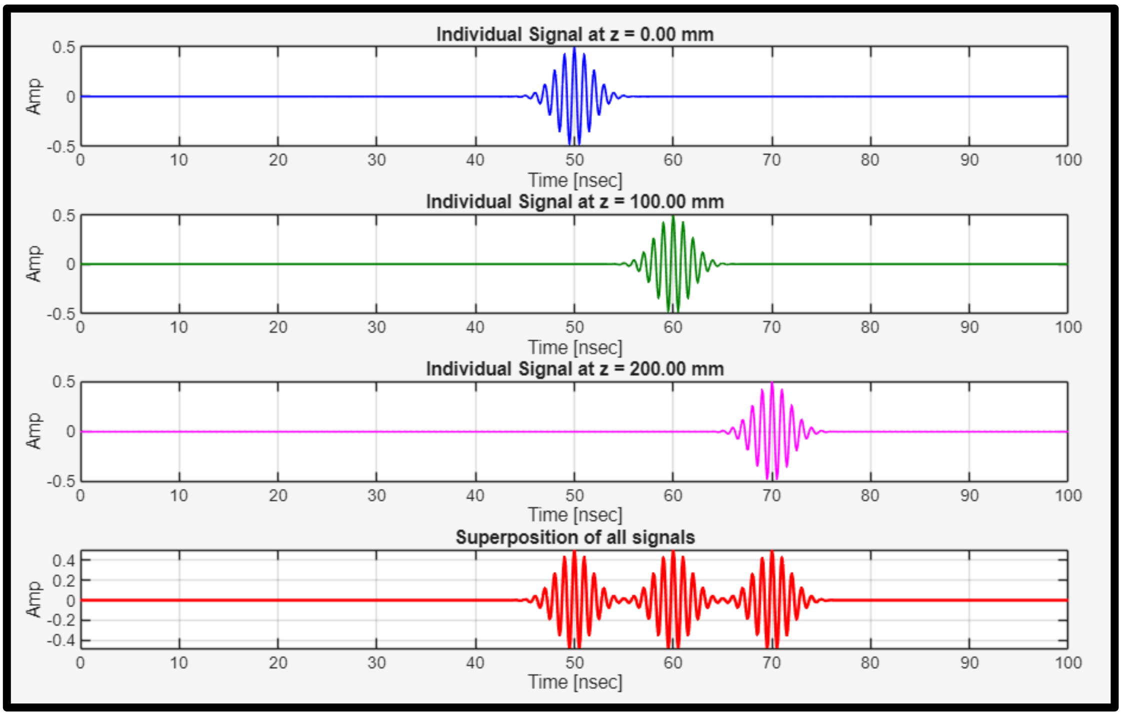
$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0} = \frac{1}{\beta_1} = \frac{c_0}{A+B} = 10^7\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_g = \frac{1}{\beta_1} = v_p$$

ולסיכום:

```
%% Part C: Phase Velocity and Propagation
c0 = 3e8;                  % velocity of light in vacum (m/s)

A = 29; B = 1;              % Example constants (A+B > 1)
n_op = A+B;
v_p = c0 / n_op;           % Phase velocity
v_g = v_p;                 % Linear Disperssion

% Distances
z = [0, v_g * 10e-9, v_g * 20e-9]; % z1, z2, z3

% Expected result:
% signal(z,t) = Re{a(t-beta_1*z) * e^(j*(w*t-beta_0*z))}
% beta = k_0 * n = omega / c0 * n
% beta_1 = dbeta / domega = n / c0

% the delay should be:
% beta_1 * z = n_op / c0 * v_p * 10^-8 * (i-1) = 10^-8 * (i-1)
% the delay expected to be 10 [nsec].

plotPropagatedSignalsInZ('Part C: Constant Refractive Index', t, z, f, f_filtered_signal, n_op)
```

התוצאה שהתקבלה במטלב:



כפי שרואים בציור, ישנה התאמה לתוצאה מהתרגול. כפי שציפינו- ישנו דיליי ליניארי ב-z.

הדיליי עצמו תואם את החישובים.(המרחק בין כל אותות עוקבים הוא 10 ננו-שניות כפול מהירות הפאזה, שזו מהירות החבורה. ניתן לראות בבירור שמרכז האות הוזז 10 ננו-שניות.)

בנוסף, ניכר כי אין שינויי פאזה. זה תואם את התוצאה שלנו- $\beta_0 \cdot z_i$ הוא כפולה שלמה של 2π.

ד. הוסיפו למקדם השבירה מהסעיף הקודם תלות לינארית בתדר:

1. התלות הלינארית של מקדם השבירה תהיה: $\Delta n(f) = 10A(f - f_0)dt$.
2. חזרו על 2,3 תתי-סעיף ג' הקודם.

הסבירו את התוצאות המתקבלות, והתייחסו לתוצאות גם בהשוואה לתוצאות הסעיף הקודם.

כאשר מקדם השבירה ליניארי (לא קבוע), מקדם ההתקדמות הופך לפולינומי (מסדר שני).

במצב כזה, לפי תוצאות התרגול, לא ניתן יותר להגדיר מהירות פאזה. כן ניתן להגדיר מהירות חבורה.

כיוון שאין הוראות מיוחדות לגבי מהירות חבורה-

נניח שהכוונה היא להישאר עם אותם ערכים של z, מסעיף ג'.

מקדם השבירה כעת כתלות בתדר (פיתוח סביב התדר המרכזי ω_0):

$$\beta(\omega) = k_0(\omega) \cdot n(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \cdot \left[n_{op} + 10 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi \cdot (\omega - \omega_0)\right]$$

$$\beta(\omega) = (\omega - \omega_0)^2 \cdot \frac{10 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi}{c_0} + (\omega - \omega_0) \cdot \frac{n_{op} + 10 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi \cdot \omega_0}{c_0} + \omega_0 \cdot \frac{n_{op}}{c_0}$$

קיבלנו:

$$\beta_2 = \frac{10 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi}{2 \cdot c_0}, \qquad \beta_1 = \frac{n_{op} + 10 \cdot A \cdot dt \cdot f_0}{c_0}, \qquad \beta_0 = \omega_0 \cdot \frac{n_{op}}{c_0}$$

אין מהירות פאזה מוגדרת... אמנם יש מהירות חבורה מוגדרת: $v_g = \frac{1}{\beta_1} = \frac{c_0}{n_{op} + 10 \cdot A \cdot dt \cdot f_0}$.

מכך שאין מהירות פאזה מוגדרת- נניח שהכוונה היא שנשתמש במהירות החבורה.

(בסעיף ג' לא היה הבדל בין מהירות החבורה למהירות הפאזה)

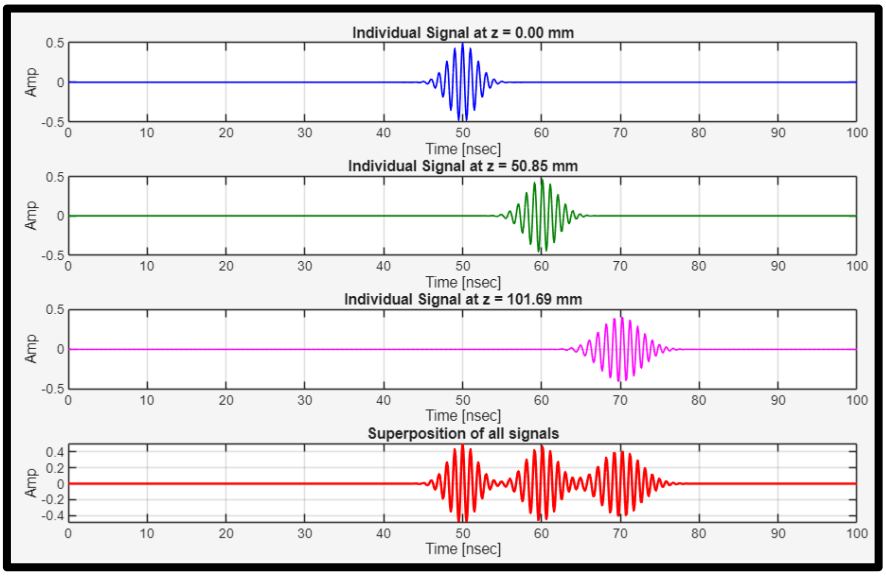
במטרה להשוות תוצאות לסעיף הבא, נחשב מספרית את β_2:

$$\beta_2 = \frac{10 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi}{2 \cdot c_0} = \frac{5 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi}{c_0} = \frac{5 \cdot A \cdot dt \cdot 2\pi \cdot \omega_0}{c_0 \cdot \omega_0} = \frac{5 \cdot A \cdot dt \cdot f_0}{c_0 \cdot \omega_0}$$

המימוש בקוד:

```
%% Part D: Quadratic Dispersion
delta_n = 10 * A * (f - f0) * dt;
n_f = n_op + delta_n;

beta_1 = (n_op + 10 * A * dt * f0) / c0;
v_g = 1 / beta_1;          % Group Velocity

% Distances
z = [0, v_g * 10e-9, v_g * 20e-9]; % z1, z2, z3

% Expected result:
% beta(omega) = k_0 * n = omega / c0 * n
% beta is polynomial of order 2 and thus the expected result is chage
% the width of the pulse and also phase-chage:

% tau(z) = tau(0)*sqrt{1+(beta_2*z/tau_0^2)^2}
plotPropagatedSignalsInZ('Part D: Quadratic Dispersion', t, z, f, f_filtered_signal, n_f)
```

תוצאת הגרף:



כמו בסעיף ג', ניתן לראות בבירור שיש התאמה למהירות החבורה כיוון שמרכז הגל

הושהה בזמן ב-10 ננו-שניות כאשר הגל התקדם ב-10 ננו-שניות כפול מהירות הפאזה.

בנוסף, ניכר שישנו פיזור- רוחב הפולס (הגאוסי) של הגל גדל ככל שרחוקים יותר מ-$z = 0$.

באופן דומה- גובה הפולס קטן ככל שרחוקים יותר מ-$z = 0$. זה תואם את התוצאה מהתרגול:

$$\boxed{\tau_z = \sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_0}\right)^2} = \tau_0\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_0^2}\right)^2}}$$

בשונה מסעיף ג'- בסופרפוזיציה יש "התחזות" כלומר הגלים הירוק והורוד בעלי חפיפה בתמך שלהם.

(לפחות בתמך הבולט לעין...)

ה. הוסיפו למקדם השבירה מהסעיף הקודם תלות ריבועית בתדר:

1. התלות הלינארית של מקדם השבירה תהיה: $\Delta n(f) = 3000B(f-f_0)^2 dt^2$.

2. חזרו על 2,3 תתי-סעיף ג' הקודם.

הסבירו את התוצאות המתקבלות, והתייחסו לתוצאות גם בהשוואה לתוצאות הסעיף הקודם.

נעיר כי מקדם ההתקמות נתון לפי:

$$\beta(\omega) = k_0(\omega)\cdot n(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\cdot n(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\cdot\left[n_{op} + 3000\cdot B\cdot (f-f_0)^2\cdot dt^2\right]$$

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\cdot\left[n_{op} + 3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot(\omega-\omega_0)^2\cdot dt^2\right]$$

$$= (\omega-\omega_0)^3\cdot\frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2}{c_0} + (\omega-\omega_0)^2\cdot\frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2\cdot\omega_0}{c_0}$$

$$+ (\omega-\omega_0)\cdot\frac{n_{op}}{c_0} + \omega_0\cdot\frac{n_{op}}{c_0}$$

קיבלנו:

$$\beta_0 = \omega_0\cdot\frac{n_{op}}{c_0} = \omega_0\cdot\beta_1, \qquad \beta_1 = \frac{n_{op}}{c_0}, \qquad \beta_2 = \frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2\cdot\omega_0}{2\cdot c_0} = 3\cdot\omega_0\cdot\beta_3,$$

$$\beta_3 = \frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2}{6\cdot c_0}$$

לא למדנו בכיתה כיצד משפיע המקדם השלישי של טור טיילור בדיספרסיה על אות גאוסי מאופנן.

אמנם, אפשר לנחש שמרכז הפולס ינוע במהירות החבורה:

$$v_g = \frac{1}{\beta_1} = \frac{c_0}{n_{op}}$$

בנוסף, אפשר לנחש פיזור של רוחב הגאוסיאן לפי המקדם $\beta_2 = 3\cdot\omega_0\cdot\beta_3$.

נזכיר כי המספר β_2 (ללא היחידות) גדול הרבה יותר מאשר β_3 ללא היחידות שלו. זאת כי ω_0 "גדול מאוד".

לא באמת ניתן להשוות בין הגדלים כיוון שהם בעלי יחידות שונות. אמנם, היחס המספרי הגדול נותן לנו אינטואיציה שהאפקט של התרחבות הגאוסיאן שצפינו בו בדיספרסייה מסדר שני תהיה משמעותית יותר.

נמצא ביטוי שאלגברית דומה יותר לתוצאה מסעיף קודם של β_2:

$$\beta_2=\frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2\cdot\omega_0}{2\cdot c_0}=\frac{3000\cdot B\cdot 4\ \cdot\pi^2\cdot dt^2\cdot\omega_0^2}{2\cdot c_0\cdot\omega_0}=\frac{3000\cdot B\cdot dt^2\cdot f_0^2}{2\cdot c_0\cdot\omega_0}$$

$$\beta_2=\frac{3000\cdot B\cdot dt\cdot f_0}{10\cdot A}\cdot\frac{5\cdot A\cdot dt\cdot f_0}{c_0\cdot\omega_0}=\frac{300\cdot B\cdot dt\cdot f_0}{A}\cdot\frac{5\cdot A\cdot dt\cdot f_0}{c_0\cdot\omega_0}$$

נעיר כי הביטוי $\frac{5\cdot A\cdot dt\cdot f_0}{c_0\cdot\omega_0}$ זה היה ה-β_2 מהסעיף הקודם.
לכן נסיק (ניתן בקלות לוודא) שהמקדם:

$$\frac{300\cdot B\cdot dt\cdot f_0}{A}$$

חסר יחידות, ונותן את היחס בין הדיספריסה בסעיף הקודם לבין הדיספרסיה בסעיף זה.
נחשב את ערכו של היחס הנ"ל:

$$dt\cdot f_0=100[ps]\cdot 1[GHz]=10^{-10}[s]\cdot 10^{9}[s^{-1}]=10^{-1}$$

כלומר נקבל:

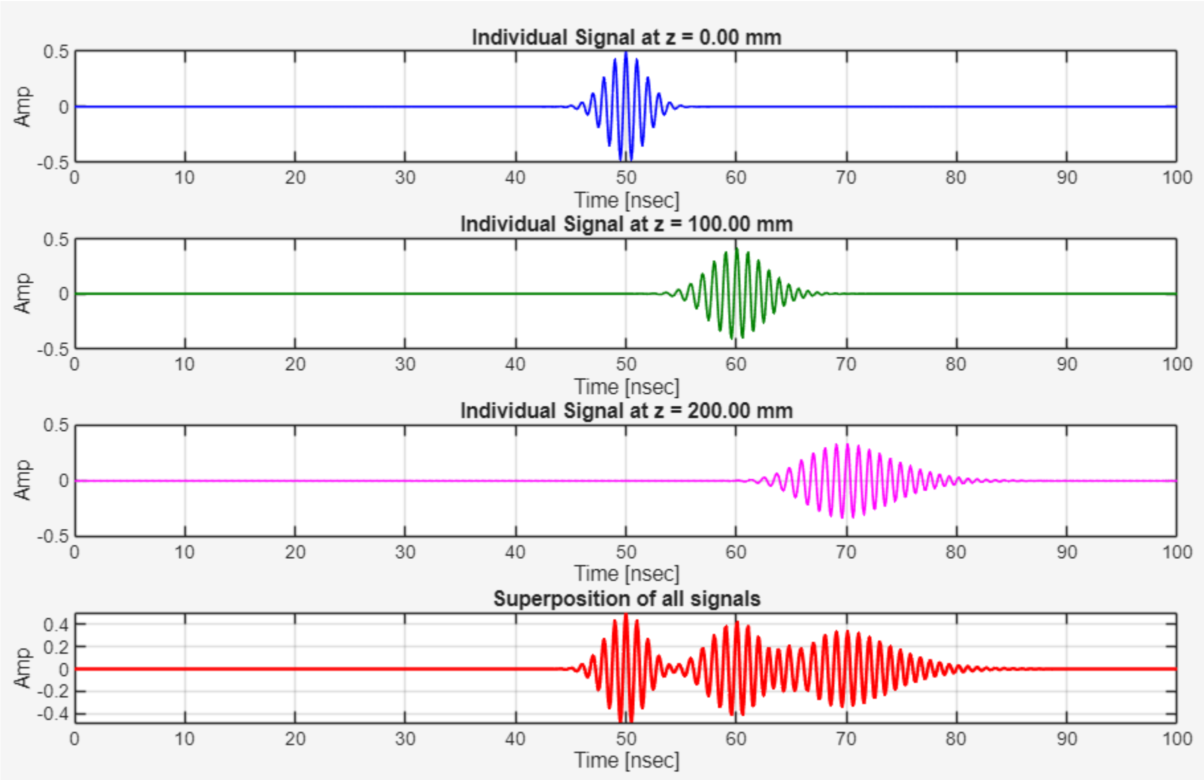
$$\frac{300\cdot B\cdot dt\cdot f_0}{A}=\frac{300\cdot B}{A}\cdot dt\cdot f_0=\frac{30\cdot B}{A}=30\cdot\frac{B}{A}=30\cdot\frac{1}{29}=1+\frac{1}{29}\approx 1$$

מקדם היחס בין הדיספרסיות בין הסעיף הקודם לסעיף הנוכחי הוא כמעט 1!
כלומר הדיספרסיות דומות מאוד!
אינטואיטיבית, נסיק שרוחב הגאוסיאן באותו ערך z, בתווכים השונים מסעיף הקודם ומסעיף זה, יהיו בעלי אותו רוחב. (רוחב הגאוסיאן בסעיף זה עשוי להיות גדול במקצת, אך לא באופן ניכר...)
כמובן שזה תחת ההזנחה לחלוטין של האפקט של β_3, שייתכן שהוא משפיע על צורת האות בסעיף זה.

להלן הקוד לסעיף ה':

```
%% Part E: Quadratic Refractive Index
delta_n = 3000 * B * (f - f0).^2 * dt^2;
n_f = n_op + delta_n;

beta_1 = n_op / c0;
v_g = 1 / beta_1;        % Group Velocity

% Distances
z = [0, v_g * 10e-9, v_g * 20e-9]; % z1, z2, z3

% Expected result:
% beta(omega) = k_0 * n = omega / c0 * n
% beta is polynomial of order 3 and we did not calculate that in class.

plotPropagatedSignalsInZ('Part E: Quadratic Refractive Index', t, z, f, f_filtered_signal, n_f)
```

להלן תוצאת הסימולציה:



ניתן לראות התאמה די טובה בין מהירות החבורה כפי שהגדרנו אותה לבין מהירות החבורה כפי שנראית בגרפים (כלומר, המרכז, או יותר נכון, הקיצון, של האות) שנע במהירות החבורה (לפי גרפים אלו).

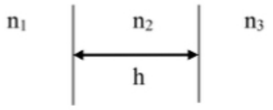
ניתן גם לראות בבירור את האפקט של התרחבות הגל הגאוסי.

נעיר כי הגרף הירוק (ב-$z = 100[mm]$) נראה כמעט זהה (מבחינת רוחב הגאוסיאן) לגרף הורוד מסעיף קודם (שהיה ממוקם גם הוא בסביבות $z = 100[mm]$).

נצפה שערכי β_2 יהיו דומים מאוד בין הסעיפים. זה אכן המצב! (ראו עמוד קודם)

שאלה 2:

נתחו שכבת ציפוי המיועדת למניעת החזרות, בדומה לניתוח שבוצע עבור לוח F-P , אולם הפעם מקדמי השבירה בכניסה וביציאה מהלוח אינם שווים.



א. עבור קיטוב ניצב, רשמו את מטריצת המעבר הכוללת עבור השכבה, כאשר גל א״מ מגיע מתווך n_1 ויוצא מתווך n_3.

בדומה לתרגול נמצא את שרשרת המטריצות הכוללת. מורכבת ממטריצות מעבר ופרופ'

$$T = T_{2\to3}\cdot T_{2(prop)}\cdot T_{1\to2} = \frac{1}{1-r_{2\to3}}\begin{bmatrix}1 & -r_{2\to3}\\ -r_{2\to3} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-\frac{j\delta}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{j\delta}{2}}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1-r_{1\to2}}\begin{bmatrix}1 & -r_{1\to2}\\ -r_{1\to2} & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(1-r_{2\to3})(1-r_{1\to2})}\begin{bmatrix}e^{-\frac{j\delta}{2}}+r_{2\to3}r_{1\to2}e^{\frac{j\delta}{2}} & e^{-\frac{j\delta}{2}}(-r_{1\to2})-e^{\frac{j\delta}{2}}\cdot r_{2\to3}\\ -r_{2\to3}e^{-\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}e^{\frac{j\delta}{2}} & e^{\frac{j\delta}{2}}+r_{1\to2}r_{2\to3}e^{-\frac{j\delta}{2}}\end{bmatrix}}$$

עבור $\delta = 2k_0 n_2 h\cos(\theta_2)$ לפי חוק סנל $n_1\sin(\theta_1)=n_2\sin(\theta_2)$

$$\underbrace{r_{1\to2} = r_{1\to2} = \frac{\frac{n_2}{\cos\theta_2}-\frac{n_1}{\cos\theta_1}}{\frac{n_2}{\cos\theta_2}+\frac{n_1}{\cos\theta_1}}} \qquad \underbrace{r_{2\to3} = r_{2\to3} = \frac{\frac{n_3}{\cos\theta_3}-\frac{n_2}{\cos\theta_2}}{\frac{n_3}{\cos\theta_3}+\frac{n_2}{\cos\theta_2}}}$$

ב. רשמו ביטויים עבור מקדמי ההחזרה וההעברה (הכוללים) <u>לשדה החשמלי</u>.
הראו כי עבור $n_1 = n_3$ מתקבלים הביטויים שחושבו בתרגול 7 (מקדמי ההחזרה וההעברה של מהוד FP).

$$r_{tot} = \frac{E^-_{y,1}}{E^+_{y,1}} = \frac{r_{2\to3}e^{-\frac{j\delta}{2}}+r_{1\to2}e^{\frac{j\delta}{2}}}{e^{\frac{j\delta}{2}}+r_{1\to2}r_{2\to3}e^{-\frac{j\delta}{2}}} = r_{1\to3}$$

לפי סעיף קודם והקודמים

ומ $$t_{tot} = \frac{E^+_{y,3}}{E^+_{y,1}} = \frac{(1+r_{2\to3})(1+r_{1\to2})}{e^{\frac{j\delta}{2}}+r_{1\to2}r_{2\to3}e^{-\frac{j\delta}{2}}}$$

לפי חוק סנל ונתון $n_1=n_3$ נקבל כי:

$n_1\sin\theta_1 = n_1\sin\theta_3 \to \theta_1=\theta_3$

ובנוסף ← נתון $n_1=n_3$

$$r_{2\to3} = \frac{\frac{n_3}{\cos\theta_3}-\frac{n_2}{\cos\theta_2}}{\frac{n_3}{\cos\theta_3}+\frac{n_2}{\cos\theta_2}} \underset{\substack{n_1=n_3\\ \theta_1=\theta_3}}{=} \frac{\frac{n_1}{\cos\theta_1}-\frac{n_2}{\cos\theta_2}}{\frac{n_1}{\cos\theta_1}+\frac{n_2}{\cos\theta_2}} = -\frac{\frac{n_2}{\cos\theta_2}-\frac{n_1}{\cos\theta_1}}{\frac{n_2}{\cos\theta_2}+\frac{n_1}{\cos\theta_1}} = -r_{1\to2}$$

נציב בביטויים ונקבל

$$r_{tot} = \frac{r_{1\to2}\left(e^{\frac{j\delta}{2}}-e^{-\frac{j\delta}{2}}\right)}{e^{\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}^2e^{-\frac{j\delta}{2}}} = \frac{e^{-\frac{j\delta}{2}}}{e^{-\frac{j\delta}{2}}}\cdot\frac{r_{1\to2}\left(e^{\frac{j\delta}{2}}-e^{-\frac{j\delta}{2}}\right)}{e^{\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}^2e^{-\frac{j\delta}{2}}} = \frac{r_{1\to2}(1-e^{-j\delta})}{1-r_{1\to2}^2e^{-j\delta}} \underset{r_{1\to2}=r}{=} r_{FP}$$

$$t_{tot} = \frac{(1-r_{1\to2})(1+r_{1\to2})}{e^{\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}^2e^{-\frac{j\delta}{2}}} = \frac{1-r_{1\to2}^2}{e^{\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}^2e^{-\frac{j\delta}{2}}} = \frac{1-r_{1\to2}^2}{e^{\frac{j\delta}{2}}-r_{1\to2}^2e^{-\frac{j\delta}{2}}} = \frac{(1-r_{1\to2}^2)e^{-\frac{j\delta}{2}}}{1-r_{1\to2}^2e^{-j\delta}} = t_{FP}$$

ג. חשבו ביטויים עבור עובי השכבה h ומקדם השבירה שלה n_2, כך שמקדם ההחזרה יתאפס באורך גל מסוים בזווית פגיעה מסוימת. הניחו כי $n_1 < n_2 < n_3$.

לפי חוק סנל $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \rightarrow$

$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)$

$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_3}\sin\theta_1\right)$

עבור $n_1<n_2<n_3$ בהנחה כל θ הם ממשיים ← נדרוש לאפס החזרה $r_{tot}=0 \rightarrow$ $\underline{r_{2\to3}e^{-j\frac{\delta}{2}}+r_{1\to2}e^{j\frac{\delta}{2}}=0}$

עבור $\underline{r_{1\to2}=r_{2\to3}=0}$, $Z_1=Z_2=Z_3$ $\rightarrow$ $\frac{n_1}{\cos\theta_1}=\frac{n_2}{\cos\theta_2}=\frac{n_3}{\cos\theta_3} \rightarrow \frac{\mu_{r,1}}{n_1\cos\theta_1}=\frac{\mu_{r,2}}{n_2\cos\theta_2}=\frac{\mu_{r,3}}{n_3\cos\theta_3}$

לפי כ... $n_1\cos\theta_1 < n_2\cos\theta_2 < n_3\cos\theta_3 \Leftarrow \begin{cases} n_1<n_2<n_3 \\ \theta_1>\theta_2>\theta_3 \end{cases} \rightarrow$ $\underline{n_2=n_1\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\cdot\frac{\mu_{r,2}}{\mu_{r,1}}=n_3\cdot\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2}\cdot\frac{\mu_{r,2}}{\mu_{r,3}}}$

נדרוש $\underline{Z_2=\sqrt{Z_1 Z_3}} \rightarrow \frac{n_2}{\cos\theta_2}=\sqrt{\frac{n_1}{\cos\theta_1}\cdot\frac{n_3}{\cos\theta_3}} \rightarrow \frac{\mu_{r,2}}{n_2\cos\theta_2}=\sqrt{\frac{\mu_{r,1}\cdot\mu_{r,3}}{n_1 n_3\cos\theta_1\cos\theta_3}}$

$$n_2=\frac{\mu_{r,2}}{\cos\theta_2}\sqrt{\frac{n_1 n_3\cos\theta_1\cos\theta_3}{\mu_{r,1}\mu_{r,3}}} \rightarrow \underline{h=\frac{\lambda}{4n_2\cos\theta_2}(1+2m) \quad m=0,1,2}$$

ד. גל מישורי בעל קיטוב ניצב מגיע מתווך 1, ופוגע בשכבת הציפוי בניצב למשטח ההפרדה. חשבו מספרית את n_2 ואת העובי h_0 המינימלי הדרושים לשכבת ציפוי נגד החזרה, עבור זכוכית באוויר, באורך גל הבא: $n_1 = 1$, $n_3 = 1.45$, $\lambda_0 = 1.55\ \mu m$.

ניצב לכן $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ אם $\mu_{r,1}=\mu_{r,2}=\mu_{r,3} \leftarrow$

$n_2=\sqrt{n_1 n_3}=\sqrt{1.45}=\underline{1.2041}$

$h_0=\frac{\lambda}{4n_2\cos\theta_2}(1+2m)=\frac{\lambda}{4n_2}\cdot 1=\frac{1.55\cdot10^{-6}}{4\cdot\sqrt{1.45}}=\underline{0.321801\ \mu m}$

h_0 של מינימלי נלקח $m=0$

$\theta=0 \rightarrow \cos\theta_2=1$

ה. עבור נתוני סעיף ד' והעובי שחישבתם ציירו גרף של מקדם ההחזרה להספק $R = |r_{FP}|^2$:

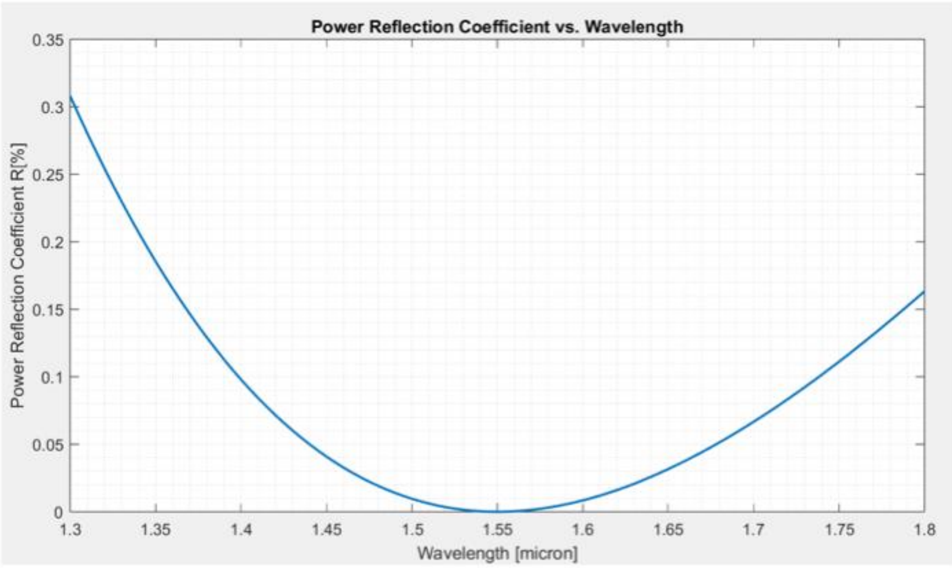
(1) $R(\lambda)$ בפגיעה ניצבת כפונקציה של אורך הגל, עבור אורכי הגל בתחום: λ=1.3–1.8μm.

(2) $R(\theta)$ באורך הגל $\lambda_0 = 1.55$ μm, כפונקציה של זווית הפגיעה, עבור הזוויות 0 – 90°.

(1) עבור פגיעה ניצבת $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0 \Leftarrow r_{1\to2} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}, r_{2\to3} = \frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}$

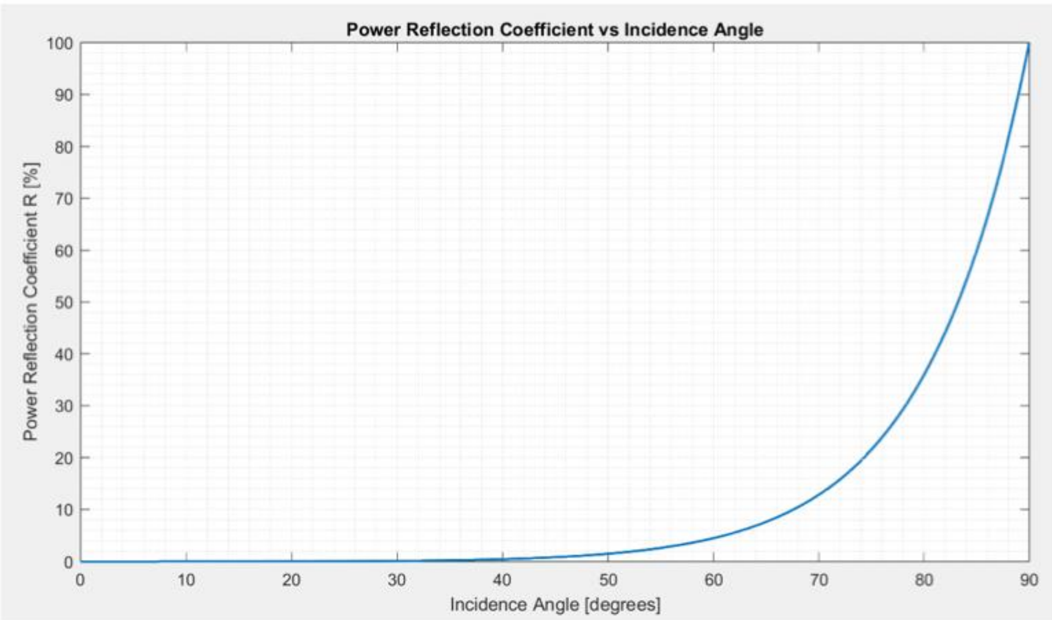
$n_2=1.2041$, $h_0=0.321801\,\mu m$. $n_1 = 1$, $n_3 = 1.45$, $\lambda_0 = 1.55$ μm

כפי שמצופה בסעיף ג' עמוד סג נ. נקבל r=0 החזרה אפסית עבור $\lambda_0=1.55\mu m$



(2) עבור $\lambda_0=1.55\,\mu m$ עבור $0<\theta_1<90$

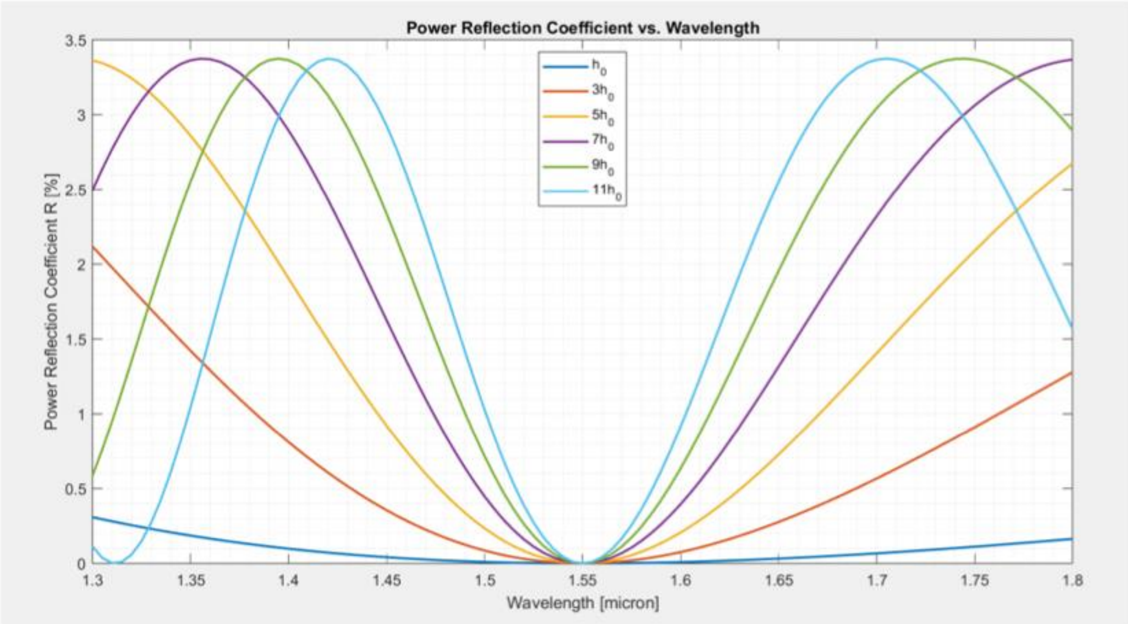
בדומה לסעיף ג' נקבל החזרה אפסית r=0 ב-$\theta_1=0°$ ומלאה 100% ב-$\theta_1=90°$

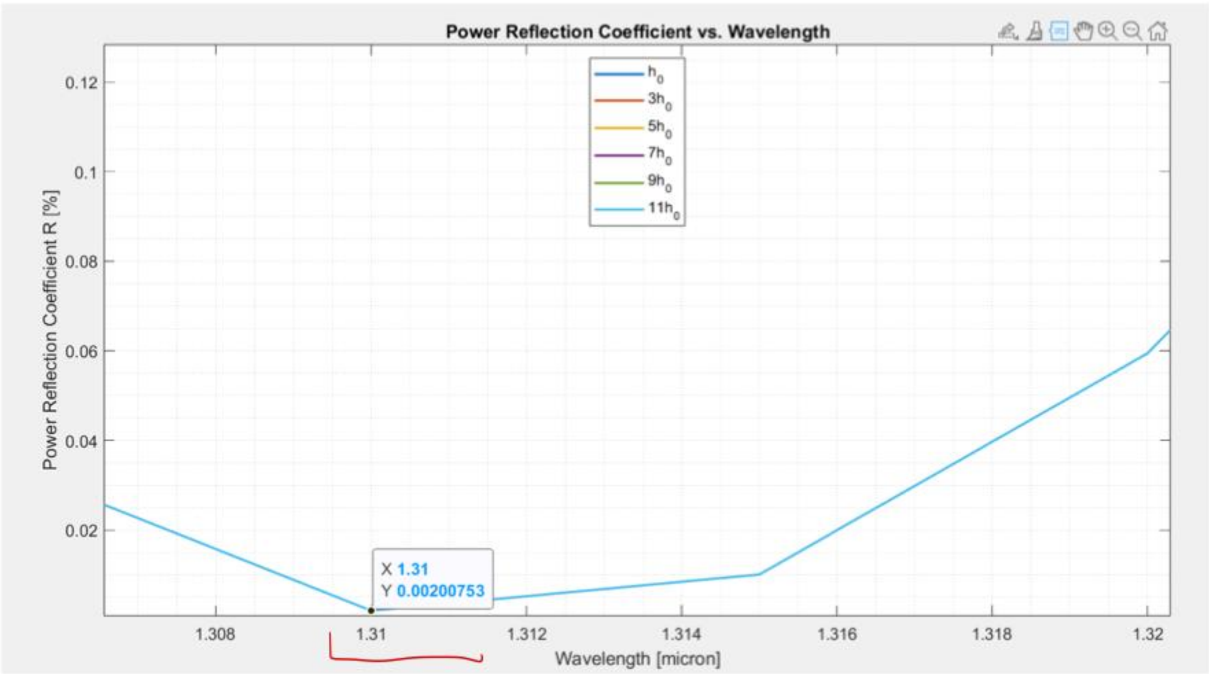


ו. הגדילו את רוחב השכבה בכפולות אי-זוגיות של h_0 וחזרו על סעיף ה׳ (1) עד שבתחום אורכי הגל הנ״ל מקבלים החזרה מינימאלית באורך גל נוסף (הציגו גרף ובו מספר עקומות $R(\lambda)$ לכל h). מהם הערכים של h המינימאלי ואורך הגל הנוסף?.

העובי מינימאלי ← $h = 11h_0 = 3.5346\ \mu m$ (0.32160 µm)

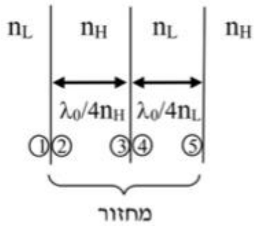
$\lambda_1 = 1.31\ \mu m$





שאלה 3:

מראת בראג מפולגת היא מבנה רב-שכבתי מחזורי, המורכב משכבות $\lambda/4$ בעלות מקדם שבירה גבוה ונמוך לסירוגין. בעזרת מספר רב של שכבות ניתן לממש מראה בעלת החזרה של כמעט 100% (99.9999%) על פני תחום רחב של אורכי גל סביב אורך גל מרכזי נתון.



א. רשמו את המטריצה עבור שתי שכבות ה- $\lambda/4$ המתוארות בציור, בין הנקי' 1 – 5 (בלי המעבר האחרון לשכבה n_H), המהוות מחזור יחיד במראת בראג. נתון $n_H > n_L$, והגל הפוגע הוא בקיטוב ניצב.

מטריצת מעבר כוללת:

$$T = T_{1\to 2}\cdot T_{2\to 3}\cdot T_{3\to 4}\cdot T_{4\to 5} = T_{L\to H}\cdot T_{H,l\to H,r}\cdot T_{H\to L}\cdot T_{L,l\to L,r} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\delta_L}{2}} \end{bmatrix} \frac{1}{1-r_{H\to L}} \begin{bmatrix} 1 & -r_{H\to L} \\ -r_{H\to L} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\delta_H}{2}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1-r_{L\to H}} \begin{bmatrix} 1 & -r_{L\to H} \\ -r_{L\to H} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1-r_{H\to L})(1-r_{L\to H})} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\delta_L}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_{H\to L} \\ -r_{H\to L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\delta_H}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_{L\to H} \\ -r_{L\to H} & 1 \end{bmatrix} \underset{r_{H\to L}=-r_{L\to H}}{=} \frac{1}{1-r^2_{L\to H}} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} & r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} \\ r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} & e^{-j\frac{\delta_L}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} & -r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} \\ -r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} & e^{-j\frac{\delta_H}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-r^2_{L\to H}} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} - r^2_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} & -r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} + r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}} e^{j\frac{\delta_H}{2}} \\ r_{L\to H} e^{j\frac{\delta_L}{2}} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} - r_{L\to H} e^{j\frac{\delta_L}{2}} e^{j\frac{\delta_H}{2}} & -r^2_{L\to H} e^{j\frac{\delta_L}{2}} e^{-j\frac{\delta_H}{2}} + e^{j\frac{\delta_L}{2}} e^{j\frac{\delta_H}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1-r^2_{L\to H}} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{-j\frac{\delta_H}{2}} - r^2_{L\to H} e^{j\frac{\delta_H}{2}}\right) & r_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}} - e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right) \\ -r_{L\to H} e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}} - e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right) & e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}} - r^2_{L\to H} e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right) \end{bmatrix}} = \frac{1}{1-r^2_{L\to H}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$r_{L\to H} = -r_{H\to L} = \underset{\text{ניצב}}{r_{L\to H}} = \frac{\frac{\eta_H}{\cos\theta_H} - \frac{\eta_L}{\cos\theta_L}}{\frac{\eta_H}{\cos\theta_H} + \frac{\eta_L}{\cos\theta_L}} \underset{\mu_r=1 \Rightarrow \eta_H = \frac{\eta_0}{n_H}}{=} \frac{\frac{\eta_0}{n_H\cos\theta_H} - \frac{\eta_0}{n_L\cos\theta_L}}{\frac{\eta_0}{n_H\cos\theta_H} + \frac{\eta_0}{n_L\cos\theta_L}} = \underline{\frac{n_L\cos\theta_L - n_H\cos\theta_H}{n_L\cos\theta_L + n_H\cos\theta_H}}$$

ב. חשבו את מקדמי ההעברה וההחזרה לאמפליטודה (r_1, t_1) עבור מחזור בודד (שתי השכבות הנ"ל).

לפי קרמר ←

$$\underbrace{r_1}=-\frac{C}{D}=-\frac{-r_{L\to H}\cancel{e^{j\frac{\delta_L}{2}}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}{\cancel{e^{j\frac{\delta_L}{2}}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}=\underbrace{\frac{r_{L\to H}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}{e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}}}$$

$$\underbrace{t_1}=\frac{AD-BC}{D}=\frac{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)\cdot\cancel{e^{-j\frac{\delta_L}{2}}}\left(e^{-j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{j\frac{\delta_H}{2}}\right)+r_{L\to H}\cancel{e^{-j\frac{\delta_L}{2}}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)r_{L\to H}\cancel{e^{j\frac{\delta_L}{2}}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}\cdot\frac{1}{1-r_{L\to H}^2}$$

$$=\frac{1-\cancel{r_{L\to H}^2e^{j\delta_H}}-\cancel{r_{L\to H}^2e^{-j\delta_H}}+r_{L\to H}^4+r_{L\to H}^2\left(\cancel{e^{j\delta_H}}-1-1+\cancel{e^{-j\delta_H}}\right)}{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)\left(1-r_{L\to H}^2\right)}=\frac{1-2r_{L\to H}^2+r_{L\to H}^4}{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)\left(1-r_{L\to H}^2\right)}=$$

$$=\frac{\left(1-r_{L\to H}^2\right)^{\cancel{2}}}{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)\cancel{\left(1-r_{L\to H}^2\right)}}=\boxed{\frac{1-r_{L\to H}^2}{e^{j\frac{\delta_L}{2}}\left(e^{j\frac{\delta_H}{2}}-r_{L\to H}^2e^{-j\frac{\delta_H}{2}}\right)}}$$

ג. עבור הנתונים הבאים: $\lambda_0 = 1.55\ \mu m$, $n_L = 1.45$, ועבור שני המקרים:

1. $n_H / n_L = 1.01$
2. $n_H / n_L = 1.1$

תכננו מראת בראג המורכבת מ-N מחזורים, כמו זה שתואר בסעיף א' (כלומר 2N שכבות). לצורך פשטות הניחו כי האור פוגע מתווך חיצוני n_L ויוצא לתווך חיצוני n_H (כלומר אין מעבר לאוויר).

קבעו את $\tilde{N}$ עבור כל אחד משני המקרים כך שתתקבל החזרה להספק $R = |r_{DBR}|^2$ **באורך הגל המרכזי בפגיעה ניצבת של מעל 99%**. {הדרכה: ניחוש התחלתי למספר השכבות הנדרש כדי לקבל החזרה כוללת של כמעט 100%, בקירוב של החזרות קטנות בין השכבות $|r_{H\to L}| << 1$, ניתן ע"י $2/|r_{H\to L}|$ }. מהו עובי המראה בכל מקרה?

ציירו גרפים של הגודל (באחוזים) והפאזה (רדיאנים) של מקדם ההחזרה לעוצמה בפגיעה ניצבת כפונקציה של אורך הגל: $\measuredangle r_{DBR}$, $R(\lambda)$, עבור תחום אורכי הגל $1.45 - 1.65\ \mu m$.

(עבור גרף הפאזה השתמשו ברצף הפקודות unwrap(angle(…)), בכדי להימנע מקפיצות בגרף עקב מחזור 2π בערכי הפאזה).

$$r_{L\to H} = \frac{n_L - n_H}{n_L + n_H} \Leftarrow \left(n_L \sin\theta_L = n_H \sin\theta_H\right.\ \text{לפי סנל}\ \ \theta_H = 0\ ,\ \ \theta_L = 0$$ ניצב ולכן

$$= \frac{1.45 - 1.01\cdot 1.45}{1.45 + 1.01\cdot 1.45} = \underline{-4.975\cdot 10^{-3}} \leq 1 \to \frac{2}{|r_{L\to H}|} = \boxed{\tilde{N} = 201} \to$$ קבלנו 402

$$\underline{\delta_L} = 2\underbrace{k_0}_{\frac{2\pi}{\lambda}} n_L \underbrace{d_L}_{\frac{\lambda_0}{4n_L}} \underbrace{\cos\theta_L}_{1} = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot \cancel{n_L}\cdot\frac{\lambda_0}{4\cancel{n_L}}\cdot 1 = \frac{\pi\lambda_0}{\lambda} \underset{\lambda=\lambda_0}{=} \underline{\pi = \delta_H}$$

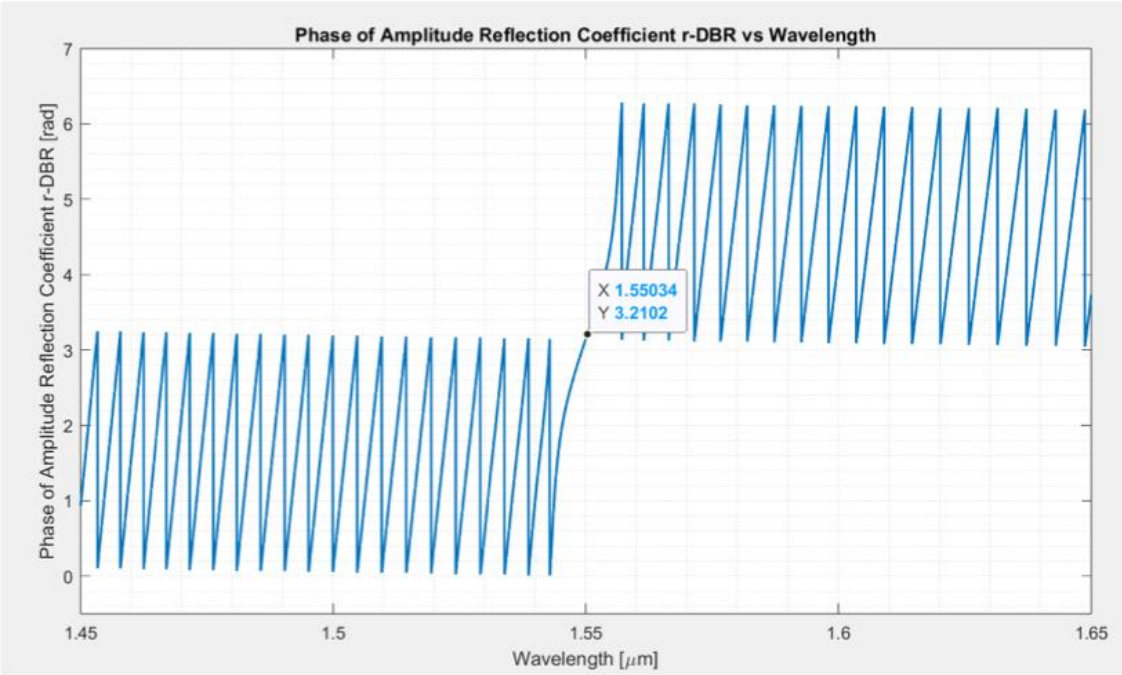
נדרש $R(\lambda_0) > \frac{99}{100}$

$$T = \frac{1}{1-r_{L\to H}^2}\begin{bmatrix} e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{-\frac{j\Omega}{2}} - r_{L\to H}^2 e^{j\frac{\Omega}{2}}\right) & r_{L\to H} e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{\frac{j\Omega}{2}} - e^{-\frac{j\Omega}{2}}\right) \\ -r_{L\to H} e^{\frac{j\Omega}{2}}\left(e^{\frac{j\Omega}{2}} - e^{-\frac{j\Omega}{2}}\right) & e^{\frac{j\Omega}{2}}\left(e^{\frac{j\Omega}{2}} - r_{L\to H}^2 e^{-\frac{j\Omega}{2}}\right)\end{bmatrix} =$$ ← נציב ב-T

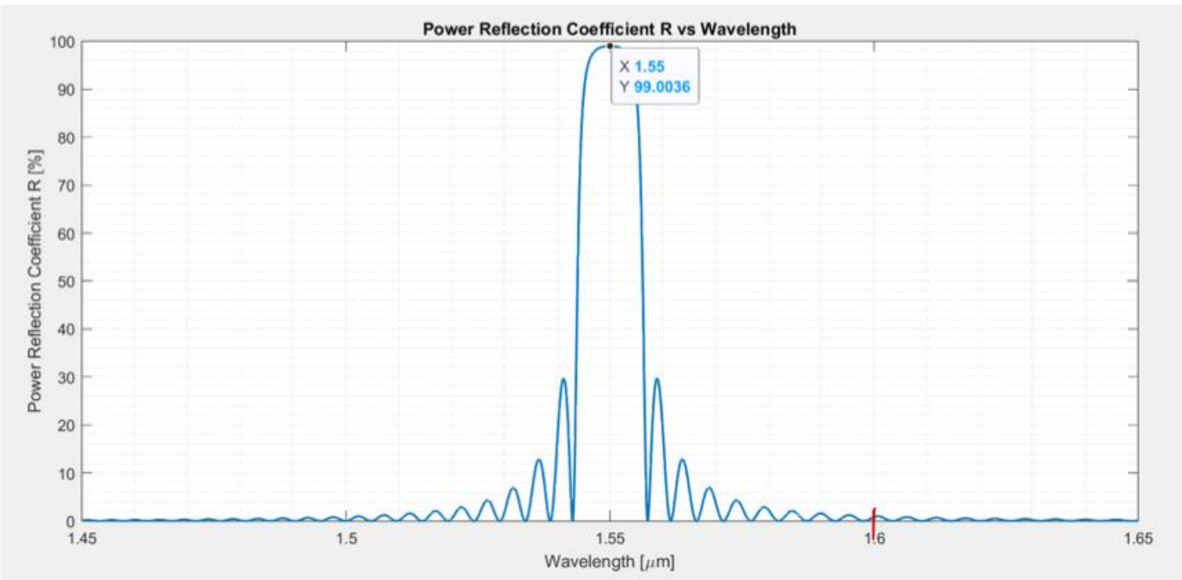
$$\underset{e^{-\frac{j\Omega}{2}} = -j}{=} \frac{1}{1-r_{L\to H}^2}\begin{bmatrix} -j\left(-j - r_{L\to H}^2 j\right) & r_{L\to H}(-j)(j+j) \\ -r_{L\to H}\cdot j\,(j+j) & j\left(j - r_{L\to H}^2(-j)\right)\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{1-r_{L\to H}^2}\begin{bmatrix} -1 - r_{L\to H}^2 & 2r_{L\to H} \\ 2r_{L\to H} & -1 - r_{L\to H}^2\end{bmatrix}}$$

$$\text{עובי} = \tilde{N}\cdot\left(\frac{\lambda_0}{4n_H} + \frac{\lambda_0}{4n_L}\right) = 201\left(\frac{1.55\cdot 10^{-6}}{4\cdot 1.4645} + \frac{1.55\cdot 10^{-6}}{4\cdot 1.45}\right) = \underline{106.9\ \mu m}$$

$\angle r_{DBR}$



$R(\lambda)$

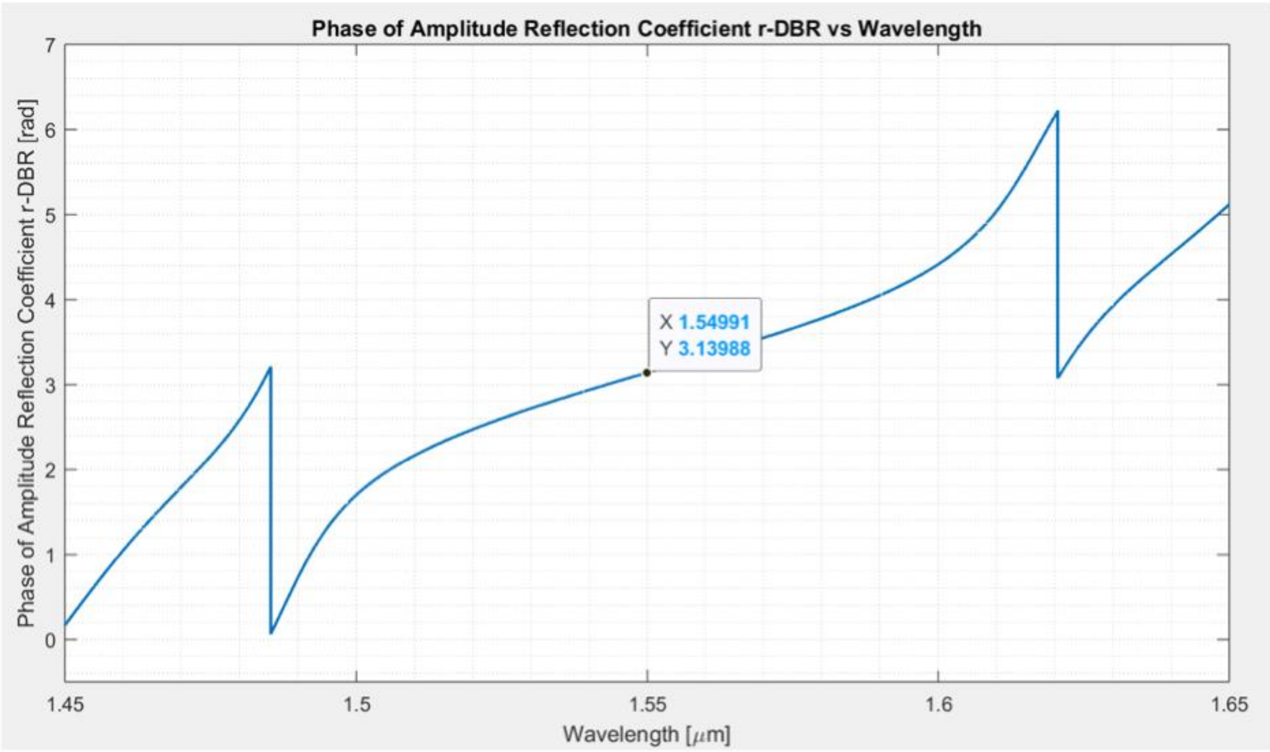


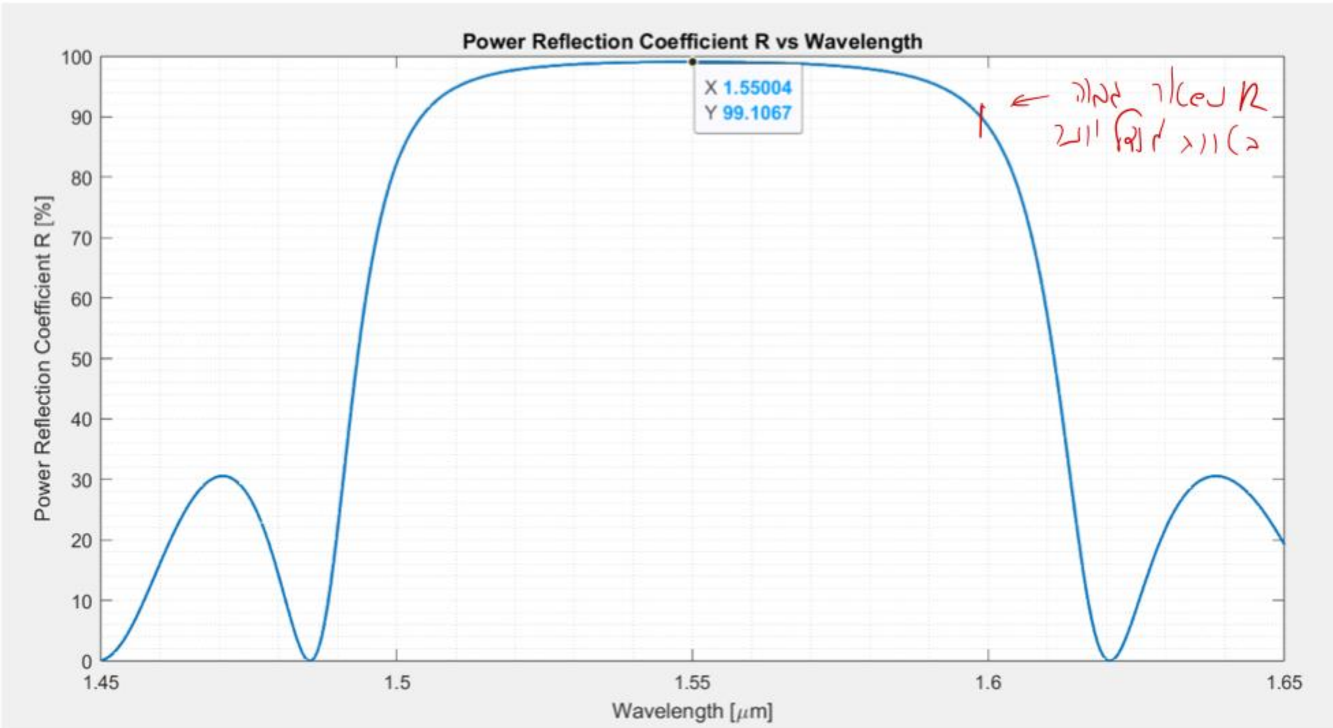
(2)

$n_H = 1.1 n_L = 1.595$

$r_{L\to H} = \frac{1.45 - 1.595}{1.45 + 1.595} = -0.04762 \rightarrow \underline{\tilde{N} = 21}$ (42 שכבות)

$\text{אורך} = 21 \cdot \left(\frac{1.55 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1.595} + \frac{1.55 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1.45} \right) = \underline{10.7139\ \mu m}$





R נשאר גבוה
בטווח קצת יותר

ד. מעוניינים להשתמש במראה שתכננתם בסעיף ג' (עבור יחס מקדמי שבירה $n_H/n_L = 1.01$ ועבור אותו אורך גל מרכזי, כעת יש 400 מחזורים) אולם בטעות מוקמה המראה כך שזווית הפגיעה של גל מישורי ביחס אליה היא 5 מעלות. שרטטו את ספקטרום ההחזרה להספק, והסבירו את ההשפעה על ההחזרה מן המראה?, מהי מידת ההחזרה עבור אורך הגל $\lambda_0 = 1.55\ \mu m$?

4.95°

נתון כי $\theta_L = 5^\circ \neq 0$, $\theta_H \neq 0$ וניתן לחשב את θ_H לפי חוק סנל

עבור האורך גל $\lambda = 1.55\mu m$ המראה אינה מחזירה באופן מלא → $R(\lambda_0) = 47.1\%$

כצפוי, עבור $\lambda = 1.55\mu m$ אינה Ω אלא Ω 1.7 בהתאם