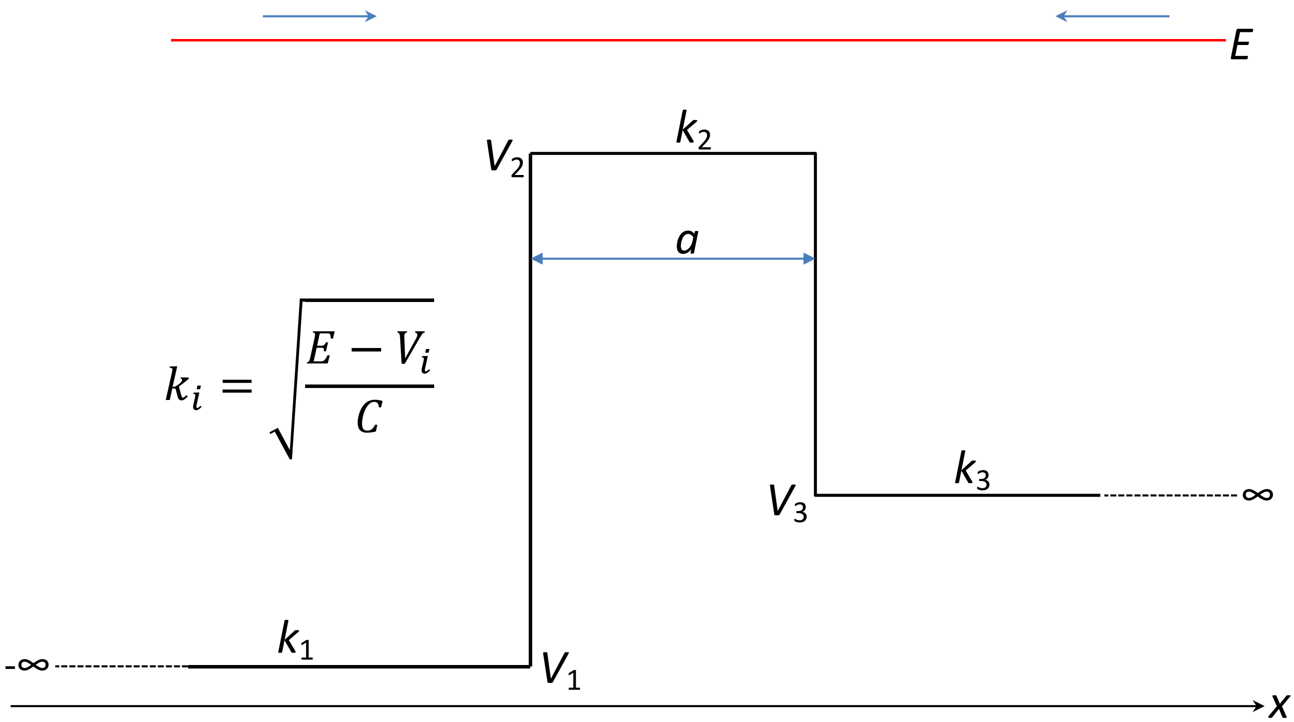
Ülesanne 7 (12 punkti, tähtaeg 24. mai 2016).

1. Arvutage joonisel kujutatud astmelise potentsiaali läbilaskvus- ja peegelduskoefitsiendid (T ja R), kasutades ülekandemaatriksi meetodit ning eeldades, et $E > V_2$.



Vihje: läbilaskvuse jaoks peaksite saama

$$T = \frac{k_3}{k_1 |T_1|^2}, \tag{1}$$

kus

$$T_1 = \frac{1}{4}\left[(L_1 + L_2)\exp(-i\alpha) + (L_1 - L_2)\exp(i\alpha)\right],$$
$$L_1 \equiv 1 + \frac{k_3}{k_1},\ \ L_2 \equiv \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_3}{k_2},\ \ \alpha \equiv ak_2,$$

nii et

$$T = \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_3}} + \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\right)^2 \cos^2(\alpha) + \left(\frac{k_2}{\sqrt{k_1 k_3}} + \frac{\sqrt{k_1 k_3}}{k_2}\right)^2 \sin^2(\alpha)}. \tag{2}$$

2. Kohaldage saadud valemid energiavahemikule $V_3 < E < V_2$. **NB**! Ärge vaevake ennast liigsete arvutustega. Piisab, kui võtate arvesse, et parameeter $k_2 = i\varkappa_2$ on nüüd puhtimaginaarne (ja seega L_2 kompleksne). Järelikult tuleb trigonomeetrilised funktsioonid asendada hüperboolsetega (unustamata, et $L_2^* \neq L_2$).

3. Tõestage, et mistahes $E > V_1$ korral kehtib seos

$$R(E) + T(E) = 1.$$

Muuhulgas näidake, et kui $V_1 < E < V_3$ (nii et $k_2 = i\varkappa_2$ ja $k_3 = i\varkappa_3$), siis alati $R(E) = 1$. Sellest omakorda järeldub, et voovektor (mis peab olema konstantne) on null ehk $T(E) = 0$.

Vihje: veenduge, et $T_2^* = T_1$, mis tähendabki, et $R(E) = 1$.

4. Tõestage, et kui $k_3 = k_1$, siis valem (2) on teisendatav kujule (valem (45) kümnendas loengufailis)

$$T(E) = \left\{ 1 + \frac{\left[\sin\left(\sqrt{\frac{E-V}{C}}a\right)\right]^2}{4E/V\,(E/V-1)} \right\}^{-1},\ E > V,$$

arvestades, et $k_2 = \sqrt{\dfrac{E-V}{C}}$ ja $k_1 = \sqrt{\dfrac{E}{C}}$.

Vihje: veenduge, et

$$\frac{E}{V} = \frac{k_1^2}{k_1^2 - k_2^2},\ \frac{E}{V} - 1 = \frac{k_2^2}{k_1^2 - k_2^2},$$

misjärel soovitud tulemuseni on juba lihtne jõuda.

5. Tõestage, et joonisel kujutatud potentsiaalibarjääri läbilaskvus ei sõltu sellest, milline on pealelangeva laine suund: vasakult paremale (suund $1 \to 3$) või vastupidi – paremalt vasakule (suund $3 \to 1$). Piisab, kui analüüsite juhtumit $E > V_2$, kuid muidugi võite uurida ka juhtumit $E > V_3$.

Kommentaare ja selgitusi

Loengus (ja ka õpikus) seda teemat käsitledes on eeldatud, et esimene ja viimane levikukeskkond on üks ja seesama, nii et $k_3 = k_1$. Sel juhul saame läbilaskvuse arvutamiseks lihtsa reegli

$$T = \frac{1}{|T_1|^2}.$$

Kõnealuse ülesande puhul on sellest lihtsustavast eeldusest loobutud, mistõttu vootihedused esimeses ja kolmandas keskkonnas on vastavalt

$$j_1 = |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m},\ j_3 = |A_3|^2 \frac{\hbar k_3}{m} \tag{3}$$

ja barjääri läbilaskvus järelikult

$$T = \left|\frac{j_3}{j_1}\right| = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 \cdot \frac{k_3}{k_1} = \frac{k_3}{k_1\,|T_1|^2}.$$

Vastav ülekandemaatriks saab seega kuju

$$T_{13} \equiv \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_2 & T_4 \end{pmatrix} = D_{12} P_2 D_{23}. \tag{4}$$

Märkus. Eeldasime vaikimisi, et levimissuund on $1 \to 3$. Lahendusskeemi täht-tähelt järgides tulnuks valemile (4) lisada maatriks P_3^{-1}, mille jätsime tegemata, sest see ei mõjuta lõpptulemust (miks?).

NB! Ülesande lahendamiseks on vaja ainult maatrikselemente T_1 ja T_2 (miks?), nii et kahe ülejäänu arvutamisele pole mõtet aega kulutada.

Milline on ülekandemaatriks T_{31}, mis kirjeldab vastassuunalist liikumist (keskkonnast 3 keskkonda 1)? Meenutame seost lahendivektorite vahel:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = D_{12} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

millest järeldub, et

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = (D_{12})^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix},$$

kus $(D_{12})^{-1}$ on katkevusmaatriksi pöördmaatriks. Analoogiliselt

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = (D_{23})^{-1} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

ja ka levikumaatriks P_2 tuleb asendada pöördmaatriksiga P_2^{-1}. Arvestades, et liikumissuund on esialgsega võrreldes vastupidine, tuleb muidugi ka maatriksite järjekord vastupidiseks muuta. Kokkuvõttes seega

$$T_{31} = (T_{13})^{-1} = (D_{23})^{-1}\, P_2^{-1}\, (D_{12})^{-1}.$$

Viienda osaülesande lahendamisel tuleb niisiis kasutada 2×2-maatriksite pööramise reeglit

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},}$$

kusjuures ei maksa unustada, et katkevusmaatriksite ees on kordaja $1/2$, näiteks

$$D_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{k_2}{k_1} & 1 - \dfrac{k_2}{k_1} \\ 1 - \dfrac{k_2}{k_1} & 1 + \dfrac{k_2}{k_1} \end{pmatrix}.$$

NB! Selle kordajaga tuleb korrutada kõiki maatrikselemente, nii et

$$D_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \dfrac{k_2}{k_1}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - \dfrac{k_2}{k_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \dfrac{k_2}{k_1}\right) & \frac{1}{2}\left(1 + \dfrac{k_2}{k_1}\right) \end{pmatrix}.$$

Tasub ka meeles pidada, et viienda osaülesande puhul on vaja ainult ühte maatriksi T_{31} elementi (ülemist vasakpoolset), nii et ka siin ei tasu ennast liigsete arvutustega vaevata. Muidugi tuleb arvestada, et suunas $3 \to 1$ on barjääri läbilaskvus

$$T = \left|\frac{j_1}{j_3}\right|,$$

kus j_1 ja j_3 arvutatakse valemite (3) abil. Kui teete kõik, mis tarvis ja nii nagu tarvis, võitegi veenduda, et tulemus on täpselt sama, mille annavad valemid (1) ja (2).