из утв. ⇒ др. форма необх. усл.: если
этой т. лок экстремум, то диф-л
тождественно от диф-лов независ
$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m$
Ф-я m перем-х $t_1 \ldots t_m$ вида $\Phi = \sum$
наз квадратичной формой.
В сл., когда $x_1 \ldots x_m$ явл. независ.
ф-и $u = f(x_1 \ldots x_m)$ в дан. т. справ.
кв. форма симметр., т.е. $a_{jk} = a_{kj}$
Кв. форма полож. опр-а (отриц. о
эта форма приним. строго положит
если она приним. как строго поло
Т дост. усл.: Пусть ф-я m перем. $u =$
в нек. окрестн. т. $M_0(x_1^0 \ldots x_m^0)$ и дважды ра
т. M_0 – стац. т., т.е. $du|_{M_0} = 0$. Тогда е
(отриц. опр-а) кв. форма от перем
в т. M_0 лок. min (лок. max). Если не
кв. форму, то $u = f(M)$ не им. лок. эк

$f(M'') - f(M_0) - \frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}(x_i$

$f(M') - f(M_0) = \rho^2\left(\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik} h_i' h_k' +\right.$

$f(M'') - f(M_0) = \rho^2\left(\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik} h_i'' h_k'' +\right.$

$\Rightarrow$ при дост. малом $\rho > 0 \Rightarrow$

в т. M_0

Пример: Рассм. $u = xy$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M}$

не экстремума в т. M_0

прямых парал. с S лишь в одно...

этих точек разделяет S на две час...

Если провед. пр. из внутр. т. обл. D'...

то она пересечет пов-ть S в двух т...

$(x,y,z_1(x,y))\in S_1$ и $(x,y,z_2(x,y))\in S_2$...

$z_1(x,y) < z_2(x,y)$; $z_1(x,y), z_2(x,y)$ -...

непр. дифф-е ф-и в D' $\Rightarrow$ по ф-ле...

сведения тройного инт-ла к ...

$= \iint_{D'} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_{D'} R(x,y,z_1(x,...$

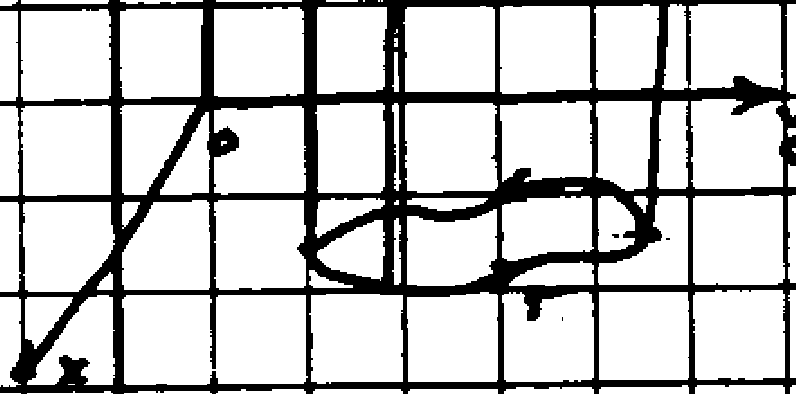
$+ \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy = \oiint_S R(x,y,z)dxdy$

$- \iint_{D'} R(x,y,z_2(x,y))dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)dx...$

нормаль $\bar{n}$ с пов-тью S_2 обр. ...

Ф-ла О-Г м. записать в виде:

$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S (P...$



аналог...

$\Rightarrow I = -$...

т.к. на пов-ти S $P(x,y,z(x,$...

исп-я ф-лу Грина: $-\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}$...

т.к. если т. $(x,y)\in\Gamma \Rightarrow (x,y,z$...

ф-лу Стокса м. запис. в В...

$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\}\,ds = \oint\limits_C ($...

Ф-ла Грина: $\iint\limits_D (\kappa, \mathrm{rot}\,a)\,d\sigma$

⑦ Пусть ф-и $u_n(x)$ опр. на $[a,b]$ и и...

если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сх.р. на $[a,b]$, ...

т. $x_0 \in [a,b] \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх.р. н...

и дифф-ть почленно, т.е. $f'(x) = \sum$...

Д: Рассм. x_0 и $x \in [a,b]$ и составим ...

при $\forall$ фикс. x_0 ряд сх.р. для всех ...

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: n > N$ и $m = 1, 2, \dots$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k'(\right.$...

Рассм. $U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \Rightarrow U'(x) = \sum$...

$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U$...

$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon$ Возьм...

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}$ сх.р. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x)$-...

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх.р. Обозн. $f(x)$ - его ...

сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} =$ ...

к пределу почленно $\Rightarrow$ $f'(x_0) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$ ч.т.д.

Рассм. $u_n(x) = 1$, если $x = \frac{m}{n}$ - несокр...

они интегрир., но их сумма Σ...

Положим $p = n+1 \Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{(x-\ldots}{(n\ldots}$

Лагранжа. (если $p=1 \Rightarrow$ в форме…

Ф-ла Тейлора с центром в т. $a=0$…

$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

Пусть ф-я $f(x)$: $\exists M\in\mathbb{R}: \forall n\ \forall x$ из…

$|f^{(n)}(x)|\leq M \Rightarrow |f^{(n)}(\theta x)|\leq M \Rightarrow |R_n\ldots$

при $\forall$ фикс. x $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$

* Рассм. ф-лу Тейлора для ф-и m…

(Т) Пусть $n\geq 0$ - целое число, $u=f\ldots$

т. $M_0(x_1\ldots x_m)$ и $n+1$ раз дифф-ма…

приращ. $\Delta u = f(M)-f(M_0)$ в т. M_0…

$\Delta u = du|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u|_{M_0}+\ldots+\frac{1}{n!}d^n u|\ldots$

указ. окрестн. зав. от M, dx_i…

$dx_i=\Delta x_i = x_i - x_i^0$ это ф-ла Тей…

порядка в т. M_0, последн. член - …

Д: рассм. для ф-и двух перем. …

ф-ла Тейл. для ф-и $u=F(t)$ - одн…

$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\ldots+\ldots$

3) $f(x)=\cos x$

$f^{(n)}(x)=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$, $f^{(n)}(0)=\cos$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n/2}$

$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos(\theta x+n\frac{\pi}{2}+$

4) $f(x)=\ln(1+x)$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f(0)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+$

$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\Rightarrow \forall x$

5) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1$

$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$

$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta$

если $\alpha=n\Rightarrow R_{n+1}(x)=0\Rightarrow$

$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n$

На $C_{R_2'}$ вып. нер-во $\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right| <$

в рез-те почленного инт-я получ

где $C_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi$

$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2'}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-(n+1)}}\, d\xi$, $n>0$

ак

$R_2<|z-z_0|<R_1$ → ф-я соотв. инт-

деформации контуров инт-я

ф. объединим (**) и (***): $C_n =$

C - ∀ замкн. контур, лежащий

ед-й т. z_0 внутри. Верный

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} =$

т.к. z - ∀т. внутри $R_2<|z-z_0|<$

всюду внутри данного коль

$R_2<R_2'\le|z-z_0|\le R_1'<R_1$, ряд сх.

д-а сд-ть (ЗЕ). Пусть $f(z) = \sum$

→ всюду внутри $R_2<|z-z_0|<R_1$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n'(z-z_0)^n$ (*)

Проведем окр. C_R рад. R: $R_2<R$

$0<|z-z_0|<R_1$), то т. z_0 – у

Д: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, c_n

в кач. C возьмём окруж

Рассм. c_n при $n<0$, т.к.

2) $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \to$

(Т) Если z_0 – полюс ан-й ф

возраст. независ. от спос

Д: $f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$

$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^{-m}\varphi$

$\varphi(z)$ – сум. ан-й ф-и в окр

независ. от способа стре

Если доопр. $\varphi(z)$ в т. z_0 :

$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\psi(z)$ – ан

(Т) если ф-я $f(z)$ ан-я в о

по mod независ. от способ

Д: по усл. (Т) ∀ числа $A>0$

$g(z)=\frac{1}{f(z)}$ в указ. окрестн

т. z_0 – устранимая особ. т. ф-и

2) т. $z=\infty$ наз. полюсом пор. m, ес

если $|w(z)|$ неогр. возр. при $z\to\infty$

3) т. $z=\infty$ наз. сущ. особ. т., если

от выбора послед. $\{z_n\}\to\infty$ м. под

зад. пределу

т.к. $B(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j$ и $B(y,x)=$…

$(B(x,y)=-B(y,x))$, т.е. БФ $B(x,y)$ с…

Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ и $f=(f_1,\dots,f_n)$ – дв…

базисах

(Т) $A(x,y)$ – БФ $\Rightarrow A(f)=C^T A(e) C$, …

e к базису f $\qquad C=(c_{pq})$

Д: $f_q=\sum_{p=1}^{n} c_{pq}e_p$; т.к. $b_{lk}=A(f_l$…

$=\sum_{i,j=1}^{n} A(e_i,e_j)c_{il}c_{jk}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{il}c_{j}$…

$=\sum_{i=1}^{n} c^T_{li}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} \Rightarrow A(f)=C^T$…

Сл.: $\operatorname{Rang} A(f)=\operatorname{Rang} A(e)$

* Ранг БФ – ранг матр. этой БФ
* БФ $A(x,y)$ невырожд. (вырожд.), е…

Пусть $A(x,y)$ – симм. БФ

* Квадратичн. форма – числ. ф-я …

кот. получ-ся из БФ $A(x,y)$ при …

Симм. БФ $A(x,y)$ наз. полярной …

и справ.: $A(x,y)=\frac{1}{2}(A(x+y,x+y)$…

$A(x+y,x+y)=A(x,x)+A(x,y)+A(y$…

нужное невырожд. преобр...

Если $a_{11}=0$, но $\exists i: a_{ii}\neq 0$ ...

в-ров м. добиться требу...

невырожд. Если $\nexists i: a_{ii}$ ...

$\Rightarrow a_{ij}\neq 0$) и рассм. невы...

$\xi_2' = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_i' = \xi_i$, $i = 3$ ...

$\Rightarrow$ это преобр. невырожд...

считать, что $a_{11}\neq 0 \Rightarrow A(x$ ...

$+ \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$; $a_{11}\xi_1^2 + 2$ ...

$- \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\xi_2^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\xi_n^2 - 2\frac{a_{1}}{}$ ...

$A(x,x) = a_{11}(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots +$ ...

$\xi_i\xi_j$, получ. после прео...

Рассм. невырожд. преобр...

$\Rightarrow A(x,x) = a_{11}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} \tilde{a}_{ij}\eta_i$ ...

Рассм. КФ $\sum_{i,j=2} \tilde{a}_{ij}\eta_i\eta_j$, ес...

Обозн. Δ_{j-1} - минор матр. (a_{ij})

с номерами 1 ... j-1 и столб

Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j=1..n$ Δ

ого столбца столбцом своб. членов

т.к. $\lambda_j = b_{jj} = A(f_j, f_j) \Rightarrow \lambda_j = A(\alpha_j,$

$= A(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \ldots + \alpha_{jj-1}e_{j-1} + e_j) =$

$\lambda_j = ((-1)^{j+1} a_{1j}\Delta_{j-1,1} + (-1)^{j+2} a_{2j}\Delta$

числитель - сумма произвед

$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$, $j = 2 \ldots n$, т.к. $\lambda_1 =$

$\lambda_1 = \Delta_1$, $\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$, $j = 2 \ldots n$

* Пусть $A(x,x)$ в базисе $e = (e_1 \ldots e$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$, где $\xi_1 \ldots \xi_n$ - коорд

к каноническ. виду: $A(x,x) = \lambda_1\mu_1^2$

$\lambda_{q+1} < 0 \ldots \lambda_k < 0$

Рассм. невырожд. преобраз. коорд

$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mu_1, \ldots, \eta_q = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q}}\mu_q$

$\eta_{q+1} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{q+1}}}\mu_{q+1}, \ldots, \eta_k = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}$

$\eta_{k+1} = \mu_{k+1}, \ldots, \eta_n = \mu_n$

т.е. $d(x_{n+m}, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ $\forall m$

$\Rightarrow x_n$ фунд. в $M \Rightarrow$ (полн. M) $\Rightarrow \exists x \in$

$d(x_{n+1}, x) = d(f(x_n), x) \to 0 \Rightarrow f(x_n)$

! от противного: пусть две неподв

$x \ne x' \Rightarrow 0 < d(x, x') = d(f(x), f(x')) \le$

противоречие $\Rightarrow$ неподвижн. т.

Сл.: справ. след. оценка скорос

Д: $d(x_{n+m}, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \Rightarrow (m$

$d(x_{n+m}, x_n) \to d(x, x_n) \Rightarrow d(x, x_n) \le$

Т локальный принцип сжим

пусть $f(x)$ отобр. $\overline{B(x_0, r)}$ в M и f

$d(f(x_0), x_0) \le r(1-\alpha)$, α - констан

неподвижн. т.

Д: покажем, что f отображ. $\overline{B}$

$d(f(x), x_0) \le d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \le$

$+ r(1-\alpha) \le \alpha r + r(1-\alpha) = r$; $d(f(x), x$

Т Пусть M - полное метрич. пр-в

отобр., тогда в M $\exists!$ неподв. т. у φ -

$F: M \to M$; $d(F(x), F(y)) = |\lambda|$ ...

K-непр. на замкн. огр. множ...

$\max\limits_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)| = K_0 \Rightarrow d(F(x), F$ ...

т.е. F-сжим. отобр., если ...

Утв.: Если $|\lambda| K_0 (b-a) < 1$, ...

и притом ! реш. в классе ...

$F(t,s) \in C([a,b]\times[a,b])$

Пример. 2) Рассм. нелин. ...

инт. ур.; в кач. $M = C[a,b]$

$|L(t,s,z_1) - L(t,s,z_2)| \le L_0 |z_1 -$ ...

$\int_a^b L(t,s,y(s))\,ds \in C[a,b]$, F ...

$d(F(x), F(y)) = |\lambda| \max\limits_{t\in[a,b]} |\int_a^b L(t,s$ ...

$\le |\lambda| L_0 (b-a)\, d(x,y)$ если $|\lambda| L$ ...

→ Утв.: Нелин. инт. ур. $x(t)$ ...

реш. в пр-ве $C[a,b]$, если ...

$\in C([a,b]\times[a,b]\times(-\infty,\infty))$ ...

$\forall z_1, z_2 \in (-\infty, \infty)$

$x = x_1 + x_2$, $H = H_1 \oplus H_2$

Д: (∃) H_1, H_1 сл. из пред. (Т) $\Rightarrow \forall x_0 \in H$ ∃

подст. в [нер] $\Rightarrow x_0 = x_1 + x_2$; $\|x_2\| = \inf$

$\|z - x_2\|^2 \geq \|x_2\|^2$ $\forall z \in H_1$; $\|\lambda z - x_2\|^2$

$+ \|x_2\|^2 \geq \|x_2\|^2$; $2\mathrm{Re}[\lambda(z, x_2)] \leq |\lambda|^2 \|$

В качестве λ возьмем число $\lambda = t$

$2|(z, x_2)| \leq t\|z\|^2$ устремим $t \to 0$

$\forall z \in H_1 \Rightarrow x_2 \perp \forall z \in H_1 \Rightarrow x_2 \in H_2$ $\forall x_0$

(!) $\left. \begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \\ x = x_1' + x_2' \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \underbrace{(x_1 - x_1')}_{\in H_1} + (x_2$

■

$y = x - \alpha x_0 \Rightarrow f(y) = f(x - \alpha$ ...

элемента x: $x = \alpha x_0 + y$, $y \in$ ...

$x = \alpha x_0 + y$, $y \in \ker f$ $\quad x = \alpha' x_0$ ...

Если $\alpha' = \alpha \Rightarrow y' = y$; Если ...

выбору x_0. $\Rightarrow$ предст.-!-но ...

$x_1 = f(x_1) x_0 + y_1$, $x_2 = f(x_2)$ ...

$x_1 - x_2 \in \ker f \Leftrightarrow f(x_1) - f$ ...

$\forall$ класс ξ по подпр-ву $\ker f$ ...

например αx_0 - предст. ...

$\mathcal{L} \setminus \ker f$ - одномерно.

$\Rightarrow \exists H_0^{\perp}$ доп. к $H_0 = \ker f$ ...

$y \in H_0$ (-ортог. к H_0) ...

$x = y + \lambda y_0$, $y \in H_0$ ...

Положим $\|y_0\| = 1$, $x_0 =$ ...

$f(x) = \lambda f(y_0)$, $(x, x_0) = \lambda (y_0$ ...

$f(x) = (x, x_0)$ $\forall x \in H$. Если ...

отсюда $x = x_0 - x_0'$ $\Rightarrow x_0 = x_0'$. ...

Если H - комплексн., то $x_0 = \overline{f(y_0)} y_0$ ...

$\dots) \le p(x)\ \forall x \in X$, $\Rightarrow p(x\dots$

$\exists$ в банах. пр-ве (полн. норм.) $\forall$ не...

-мин. ф-л , $p(x)$ - полунорм. продолж...

, причем $f(x) = f_0(x)\ \forall x \in L$ $\ f(x) \le p\dots$

$\Rightarrow F$ определен и на ф-ции вида : $h\dots$

Пусть $\Phi(t) = F(h_t)$, разб. $\forall\ \Omega$:

$\alpha_k = \operatorname{sgn}(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}))\quad k = 1, 2, \dots n =$

$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = F(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \dots$

Ф-ция $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = \{0, \pm 1\}\ \dots$

В силу произвольности разбиения...

Покажем через эту Φ запись на...

Рассм. f - $f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

Ω: $\forall i\ |x_i - x_{i-1}| < \delta$, $x_0 = a$ $\ x_N = b$,

$f_\varepsilon(a) = f(a)$. + ступенчатая ф-я : $f_\varepsilon(\dots$

$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, т.е. $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$.

$F(f_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(F(h_{x_k}) - F(h_{x_{k-1}})) = \dots$

$|F(f_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\, d\Phi(x)| < \varepsilon$, ε - б. мало.

$|F(f) - \int_a^b f(x)\, d\Phi(x)| < \varepsilon(1 + \|F\|) \Rightarrow \dots$

Везде $V_a^b[\Phi] \le \|F\|$, а по т. о средн. ...

Ⓣ Если A вп.непр. оп-р $\Rightarrow A^*$ вп.непр

Д: $\forall x_n \xrightarrow{сл} x$, A вп.непр. ; $\|A^* x_n - A^* x\|^2$

$\le \|AA^*(x_n - x)\| \|x_n - x\|$; $x_n - x \xrightarrow{сл} 0 \Rightarrow A$

$\le M$ $\le m$ (A вп.непр. → A непр

т.к. A вп.непр $\Rightarrow \|A^* x_n - A^* x\| \to 0$ при $n \to$

* $A: H \to H$ наз. компактным, если о

предкомп. : у $\forall$ послед. из в(о)д-го

Замечание: если A - комп., то A о

Рассм. $\forall$ огран. $E \subset H$, AE предкомп.

Ⓣ A - лин. вп.непр. оп-р в H - гильб.

Д: (⇒) A вп.непр. $\Rightarrow A$ комп. ; берем

сл.сх-ся подпослед. x_{n_k} - сл.сх. $y_{n_k} =$

(⇐) Пусть A - комп-й $\Rightarrow A$ вп.непр. Бер

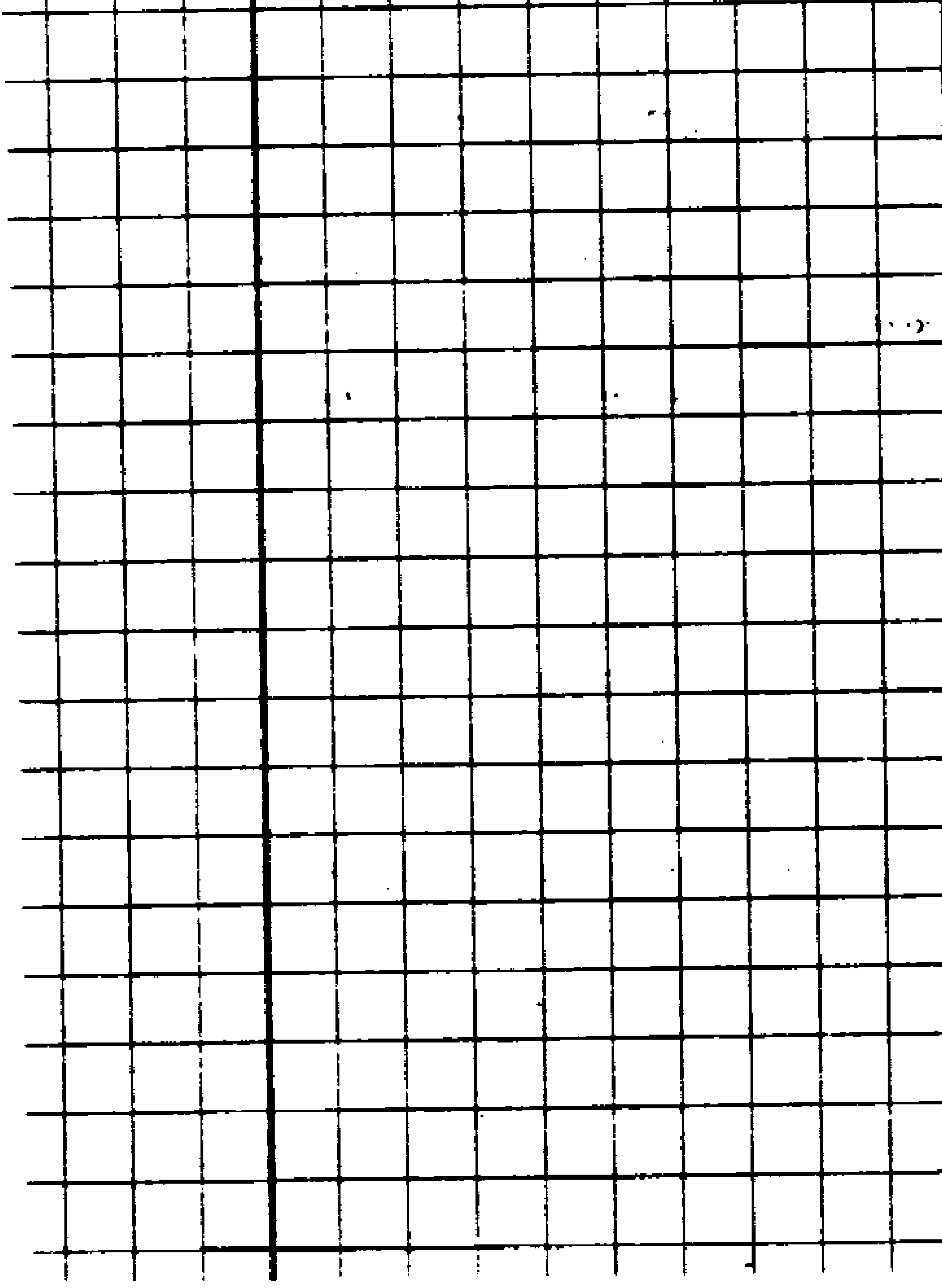
$\|Ax_n - Ax\| \to 0$

от противного: Пусть по крайне ме

им. место $\|Ax_{n_k} - Ax\| > \varepsilon$ $\forall n_k$

д-м, что $x_{n_k} \xrightarrow{сл} x \Rightarrow \|x_{n_k}\| \le C$ $\forall n_k \Rightarrow$

сх. подпослед. $\tilde{y}_{n_k}$ - сх. подпослед. y



$\Rightarrow 0 = (y, B^*x) - (By, x) \ \forall y \Rightarrow x \perp R(B)$

из 1-2) $\Rightarrow \exists H = \operatorname{Ker} B^* \oplus R(B)$

Т 3 Фредгольма: ур. $Lx = y$ разреш...

Д: ($\Rightarrow$) $\forall z \in \operatorname{Ker} L^*$ и рассм. $(y, z) = ($...

Замечание: необх-ть справ. для $\forall$огр. о...

($\Leftarrow$) L огр. оп-р $\Rightarrow$ по Т$_3$ $H = \operatorname{Ker} L^* \oplus \overline{R(L)}$...

$\Rightarrow$ по Т$_2$ $\overline{R(L)} = R(L)$ ($L = E - A$, A вп. н...

Л$_1$ $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$, $L = E - A$, A вп. ...

Д: от противного: пусть $\dim \operatorname{Ker} L =$ ...

эл-в $\Rightarrow$ в ядре м. построить счетн. ...

$(e_k, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow Le_k = 0 \Rightarrow e_k = Ae_k$ ...

нер-ва Бесселя ($\sum |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$) ...

при $k \to \infty \Rightarrow e_k = Ae_k \Rightarrow \underbrace{\|e_k\|}_{=1} = \|Ae_k$...

Л$_2$ $\dim \operatorname{Ker} L^n < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Д: $L^n = (E - A)^n = E - C_n^1 A + C_n^2 A^2 + \ldots +$

$\tilde{A}$ вп. непр. $\Rightarrow L^n = E - \tilde{A} \Rightarrow$ по Л$_1$ ...

Л$_3$ $\exists m \in \mathbb{N}: \operatorname{Ker} L^m = \operatorname{Ker} L^{m+1}$, ...

где $L = E - A$, A вп. непр.

⇐ $\operatorname{Ker} L = 0$ рассм. $L^* x = $

$y \perp \operatorname{Ker}(L^*)^* = \operatorname{Ker} L = 0 \Rightarrow L^*$

$\Rightarrow Lx = y$, $\operatorname{Ker} L^* = 0 \Rightarrow$ по (

Т 2 Фредгольма: $\dim \operatorname{Ke}$

Д: $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$ по Л1

предп., что $n < m$. Пусть d

ортонормир. базис в $\operatorname{Ker} L^*$

надо найти все реш. $Tx =$

$(Lx, y_k) = (x, L^* y_k) = 0 \ \forall k$

$= \|Lx\|^2 + \sum |(x, x_k)|^2$, если

$\Rightarrow Lx = 0$ и $x \perp \operatorname{Ker} L \Rightarrow x =$

$T\cdot = L\cdot + \sum (\cdot, x_k) y_k = E\cdot$

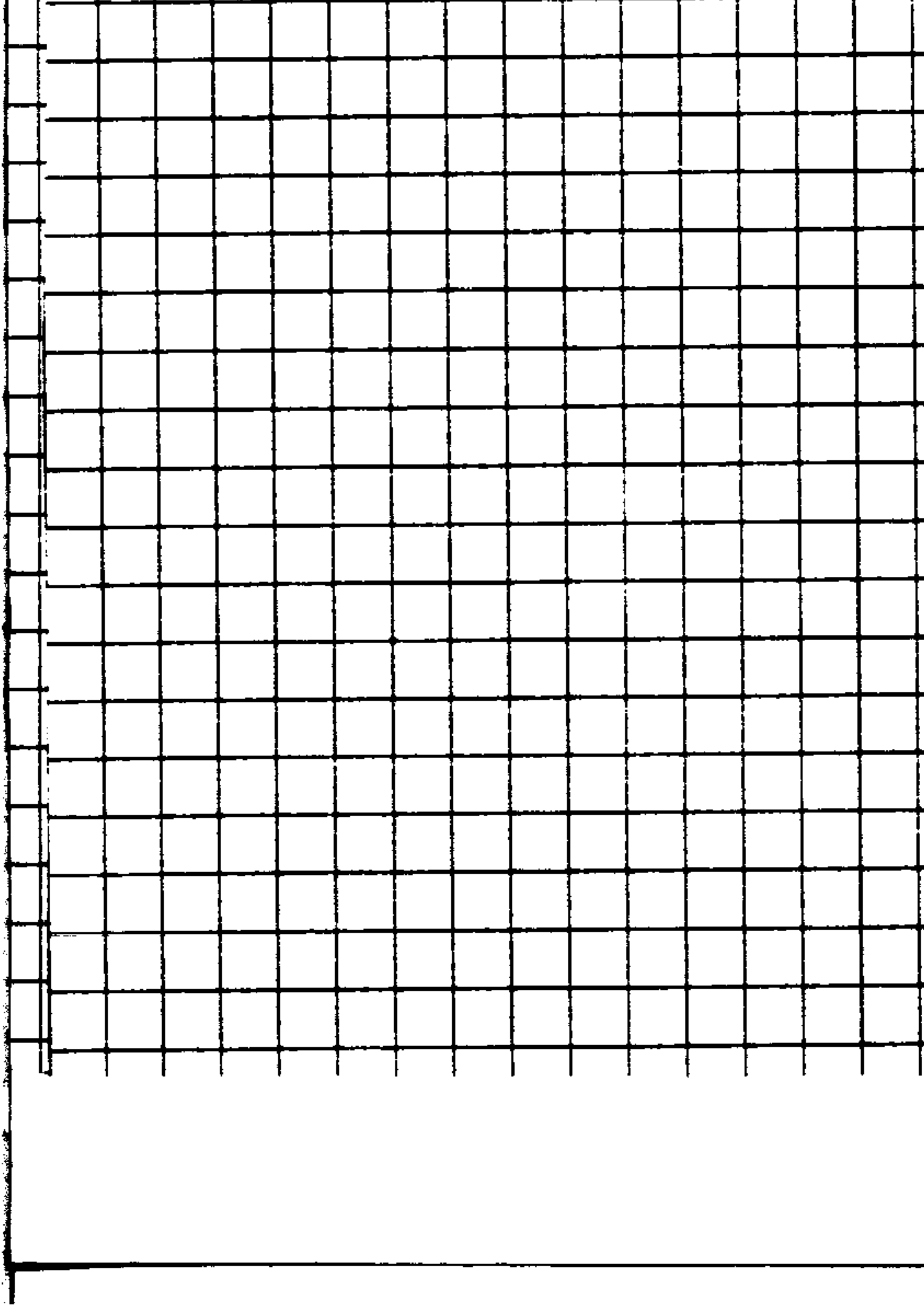
Замечание: Если $\dim R(B)$

$\Rightarrow \|Bx\| \le \|B\|\|x\| \le \|B\| C \Rightarrow$

Вейерштрасса в компакт.

$T = E - (A - B)$, $(A - B)$ - вп

$\operatorname{Ker} T = 0 \Rightarrow$ по Т1Ф.



Лемма 2. Если φ-я $|Q(\xi)| = |(A\xi,\xi)|$ …

на ед. шаре дост. в точке e_0, то …

Д-во: $\|e_0\|=1$, $\exists\ e = \frac{e_0 + a\eta}{\sqrt{1+|a|^2\|\eta\|^2}}$

$Q(e) = \frac{1}{1+|a|^2\|\eta\|^2}\left(Q(e_0) + \bar{a}(Ae_0,\eta) + a(\ldots\right.$

Выберем a: $|a|$ б.м. и $\bar{a}(Ae_0,\eta) \in \mathbb{R}$

$Q(e) = Q(e_0) + 2\bar{a}(Ae_0,\eta) + O(a^2)$

$|Q(e)| > |Q(e_0)|$ — что противоречит …

Следствие: Если $|Q(e)| = \max_{\xi} |Q$ …

Теорема Гильберта-Шмидта.

Для $\forall$ компактного A: $A=A^*$ $\exists$ …

ортонормированная с.вект. $\{e_n\}$, $\lambda_n \neq 0$ …

$e' \in \operatorname{Ker} A$ (e': $Ae'=0$), при …

Если система $\{\varphi_n\}$ бесконечна …

Д-во: Построим сп-ки φ_k. $\exists\ |\lambda_1|$ …

φ_1: Рассм. max φ-ии $|Q(\xi)| = |(A$ …

$\xi, \xi_1, \ldots$ $\|e_n\|=1$ и $|(Ae_n, e_n$ …

$\{e_n\}$ м. выбрать п.п-ть, сл-ся к η …

$|(A\eta,\eta)| = S$. Получимость …

$\exists \|\eta\|<1$, $\eta_1 = \eta/\|\eta\| \Rightarrow \|\eta_1\|=1$ и $|($ …

решение, например: ...

Если $z(0)=0$, $z(\pi)=0$ $\Rightarrow$ $z = B\sin x$ ...

не ! реш-е, а ∞ т.е. $y_1(x)$ реш ...

Если $z(0)+z(\pi)-1=0$ общее р.: $z=C_1$ ...

Теорема Если в (1) $q(x)<0$, то (1) ...

Теорема Если реш. (1^*) !, то $\exists$ (1) реш...

Теорема Если в $(1)^*$ $q(x)<0$, то (1...

Рассм. (1^*) и (1).

Опр $G(x,\xi)$ – ф-ция Грина для (1), ...

1. $G(x,\xi) \in C[a,b]\times[a,b]$, $G(x,\xi$ ...

2. $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$, $G(x,\xi)$ ...

3. $G(x,\xi)\big|_{x=\xi+0} - G(x,\xi)\big|_{x=\xi-0} =$ ...

4. $\frac{d}{dx}G(x,\xi)\big|_{x=\xi+0} - \frac{d}{dx}G(x,\xi)\big|_{x=\xi-0}$ ...

Теорема Если (1^*) имеет только триви...

$\forall$ непр. прав. части $f(x)$: з-ча (1) $\exists$ ...

Строим ф-цию Грина: $G(x,\xi) = \frac{1}{C}$ ...

$y_1(x)$ – реш. з-чи Коши: $Ly_1=0$ ...

$y_2(x)$ – реш. з-чи Коши: $Ly_2=0$, ...

Из непр-ти $G(x,\xi)$ ч. усл. согл. из

$$(C_2-C_1)\varphi_1(\xi) + (C_4-C_3)\varphi_0(\xi)=0 \quad ($$

$$C_2-C_1=-\varphi_0(\xi) \ , \ C_4-C_3=\varphi_1(\xi) \ -$$

из условий корректности о краев. усл.

$$C_3 = -\left(\int_0^l \omega(x)\varphi_0(x)\,dx + C_1\int^{\xi}\varphi_1(x)\varphi_0(x)\,dx + \right.$$

Пример $y''=\delta(x)$, $0<x<l$, услов

$y''=0$ $\quad y=ax+b$ $\quad y(0)=b=0$ $\quad y(\xi$

$y_1(x)=x$ — лев. усл.

$y_2(x)=1$ — прав. гр. усл.

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1 x, & 0\le x\le\xi \\ C_2, & \xi\le x\le l \end{cases}$$ непр

согл

$= -\lambda_0 \int_0^l \rho(x) y_0^2(x)\,dx \Rightarrow y_0 p \frac{dy_0}{dx}\Big|_0^l$ ...

$y_0 p \frac{dy_0}{dx}\Big|_0^l = 0$ если условия ...

$\int_0^l \underset{\geq 0}{p} \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 dx + \int \underset{\geq 0}{q}\, y_0^2\, dx = \lambda_0$ ...

Рассмотрим задачу: $u(x) +$ ...

$K(x,s)$ – ядро $\in C[0,l] \times [0,l]$, ...

Хотим свести краевую дифферен...

Фредгольма 2го рода. При выпо...

ядро соб. ф-ций этого интегр., ...

Хотелось найти этот базис, ...

виде ряда по с.ф. интегр. оп...

и под интегралом с соб. значен...

Возможны 2 варианта:

- ядро вырождено: $K(x,s) =$ ...
- ядро невырождено.

<u>Теорема</u> Если ядро (*) вырождено ...

и конечное число с-ф-ций $\{\varphi_i\}$ ...

$|t-t_0|<T \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1(\varepsilon)$: при $|\Delta\mu$

$\Rightarrow \left|\frac{d\Delta y}{dt}\right| < N|\Delta y| + \varepsilon_1$. Покажем, что

Пусть $s(t)$ - реш. нач. зад. для $\frac{ds}{dt} = N$

Пусть $\tilde{s}(t)$ - реш.: $\frac{d\tilde{s}}{dt} = \tilde{N}\tilde{s} + \tilde{a}$, $\tilde{s}(t_0) =$

$\tilde{s}(t) > 0$ $\quad \frac{d\Delta y}{dt}\Big|_{t_0} < \frac{d\tilde{s}}{dt}\Big|_{t_0} \to \forall t: |t_0-$

Пусть $t = t_1 > t_0$: t_1 - наим. зн., когда

$\frac{d\Delta y}{dt}\Big|_{t_1} > \frac{d\tilde{s}}{dt}\Big|_{t_1} = \tilde{N}\tilde{s}\big|_{t_1} + \tilde{a} = \tilde{N}\Delta y\big|_{t_1} + \tilde{a}$

$\to |\Delta y(t)| < \tilde{s}(t) = \tilde{b}\exp(\tilde{N}(t-t_0)) + \frac{\tilde{a}}{\tilde{N}}$

$\tilde{a} = \varepsilon_1 + \alpha_2$, $\hat{b} = b + \alpha_3 \to$ Пусть α_1

$+ \frac{\varepsilon_1}{N}(\exp(N(t-t_0)) - 1) = s(t)$

$\Rightarrow |\Delta y|$: т.к. $b=0$ $(\Delta y|_{t_0} = 0) \to |\Delta y|$

при $|\mu-\mu_0| < \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\delta_2(\varepsilon)$,

(T) Пусть $f(y,t,\mu)$ опр-на и непр. по сов

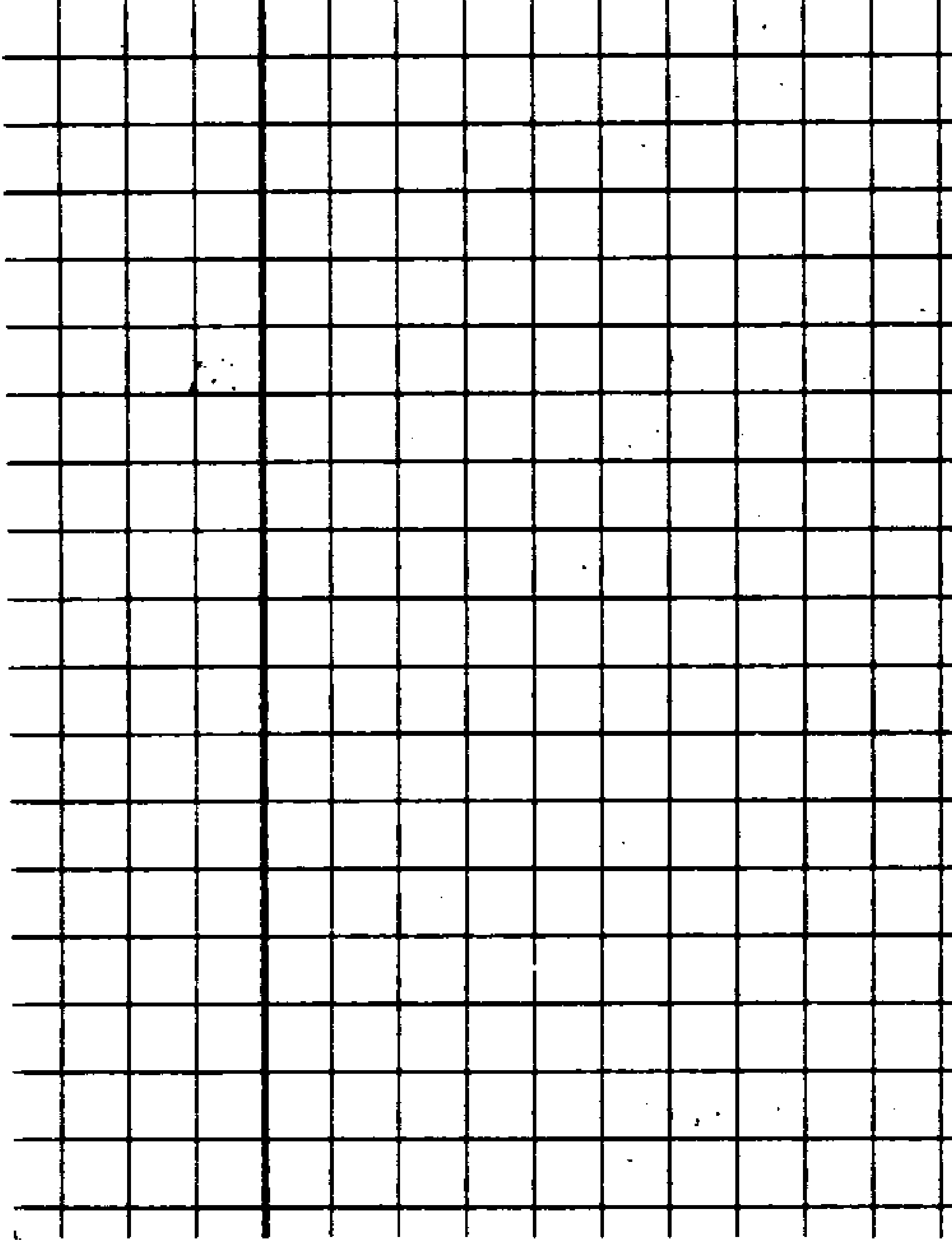
ф-ции $f_y(y,t,\mu)$, $f_\mu(y,t,\mu)$. Тогда

нек. производ. по μ, причем $\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \mu}$

$\frac{\partial y}{\partial \mu}(t_0,\mu) = 0$.

Д: Пусть $z(t,\mu)$: $\frac{dz}{dt} = f_y(y(t,\mu),t,\mu)z$

ур. (*) лин. отн. z, его коэф. - непр



мин-ти $L_{y_0}(-\delta y) = -L_{y_0}(\delta y) < 0$, ес

первым слаг., т.к. второе явл. мал

$\delta(x)$ быть не м. , если $L_{y_0}(\delta y_0) \ne$

Л Осн. вар-го исчисления: Пусть $h(t)$ -

$\int_a^b h(t)\varphi(t)dt$, где $\varphi(t)$ - $\forall$ и непр. на

$\Rightarrow h(t) \equiv 0$

Д: Пусть $\exists t_0 : h(t_0) \ne 0$, без огр. общн

$\Rightarrow$ окрестн. $(t_0-\delta, t_0+\delta)$: $h(t) \geq \frac{1}{2}h$

Построим $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le t_0-\delta, t_0 \\ \frac{t-t_0+\delta}{\delta}, & t_0-\delta < t \\ \frac{t_0-t+\delta}{\delta}, & t_0 \le t < \end{cases}$

это м. сделать, т.к. $\varphi(t)$ - $\forall$

$\Rightarrow \int_a^b h(t)\varphi(t)dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(t)\varphi(t)dt = h(\tilde{t})$

$= h(\tilde{t}) \frac{(t_0+\delta - t_0+\delta)}{2} \cdot 1 = h(\tilde{t})\delta > 0$

Пример: непр. лин. ф-ла $\Phi(y) = \int_a^b [p(x)y$

$= |\int_a^b (p(x)[y_0(x) + \delta y(x) - y_0(x)] + q(x)[y_0'$

$+ q(x)(\delta y(x))'] dx$, т.к. $|\delta y| + |(\delta y)'| < \delta$

$\int ... \delta y_j \, dx = 0$ ...

Т.к. δy_j мало → разл. в ряд φ_i: (φ ...

$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j = 0$, $i = 1 \ldots m$ = ...

$(\delta y)^2$ - пренебр. → только n-m из δy_j м. сх...

домнож. $\lambda_i(x)$ и инт-м: $\int \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}$ ...

→ $\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} \right.$ ...

→ $\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'}\right) \delta y_j \, dx = 0$

Выберем $\{\lambda_i\}_{i=1}^{m}$: $F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} =$ ...

$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$, $j = 1 \ldots$

это лин. сист. на отн-е λ_i и ее опр...

имеем реш. $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ → в ур-е выборе...

$\int_a^b \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'}\right) \delta y_j \, dx = 0$ пр...

т.к. δy_j, $j = m+1 \ldots n$ − $\forall$ ⇒ м. прим...

положив по очереди все $\delta y_j = 0$, кр...

$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0$, $j = m+1 \ldots n$ ⇒ ...

ч...

⇒ заменяя ф-л Ф на Φ ...

экстремали Ф нах. среди реш. ур...

(ф-ч, на кот. реализ-ся экстремум ф-...

(⇐) $\varphi(x,y)$ - общий инт. (2) $\Rightarrow a_{11}\varphi_x^2 + a_{12}$

$\forall (x_0, y_0) \Rightarrow$ инт. кривой $\varphi(x_0,y_0) = C_0$

Для неявной функц. $y \Rightarrow a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$\exists\, x = x_0 \Rightarrow a_{11}\varphi_x^2(x_0,y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0,y_0)(x_0$

в силу $\forall$-ти (x_0, y_0) это верно $\forall (x_0$

Решения (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 -}}{a_{11}}$

ур. (1) гиперболического типа в т.

-//- параболического -//- $= 0$

-//- эллиптического -//- < 0

1. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, (2) 2 ре

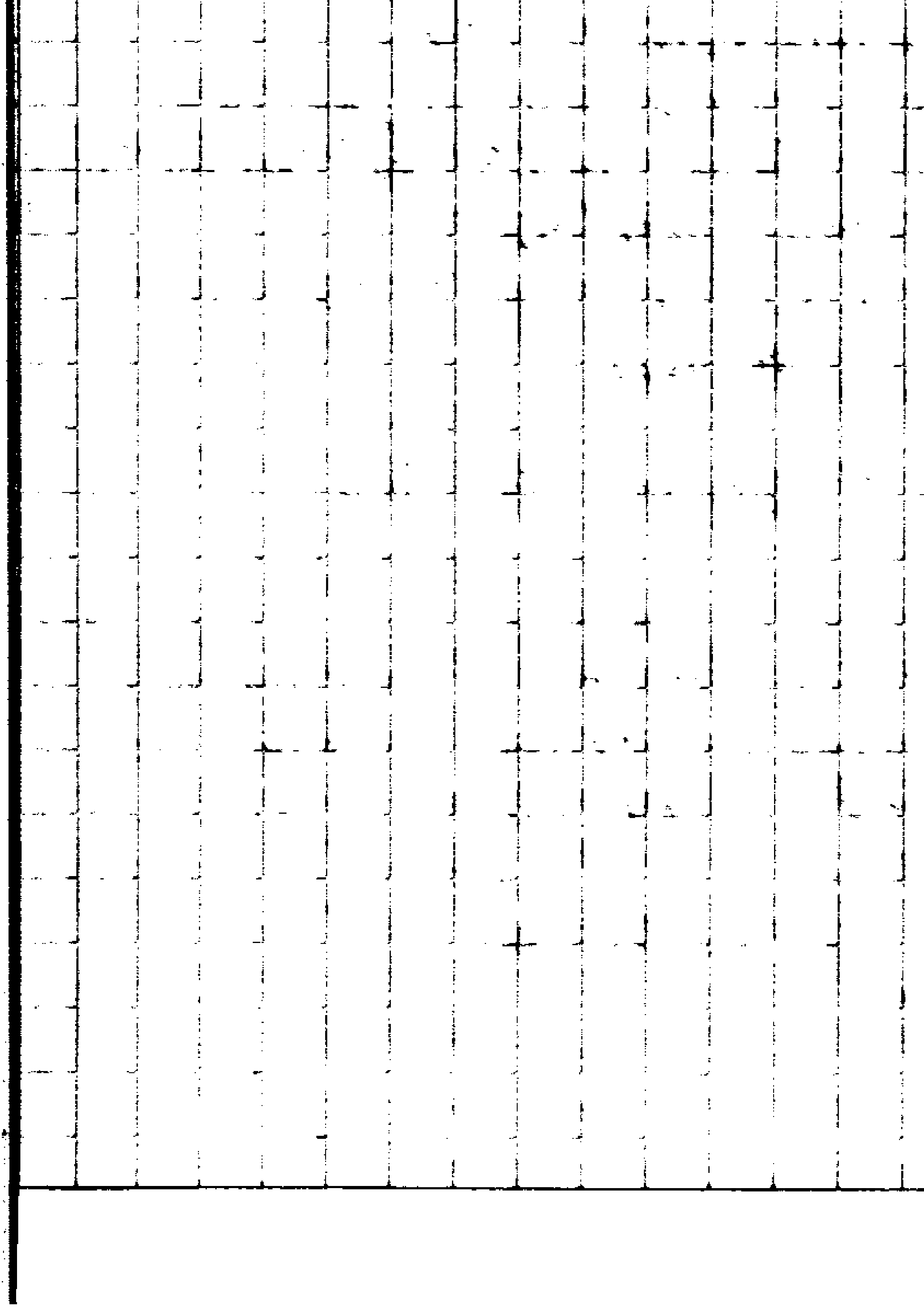
$\xi = \varphi(x,y) = c \quad \eta = \psi(x,y) = c$ опр. х

$\Rightarrow u_{\xi\eta} = \frac{-1}{2a_{12}}(\bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u$

если сделать замену $\alpha = \frac{1}{2}(\xi$

$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta) \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}$ - 2 к. форма



Теорема !-ти. Лиш задачи (*) бор...

в $0 \le x \le l$, $t > 0$, (д. (*)), если ...

функц $u(x,t)$, $u_{tt}, u_{xx}, u_{xt} \in C[0,l]\times$...

Д-во: $\exists$ $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ уд ...

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & \text{- однор., закр. кон...} \\ v(x,0)=0 \quad v(0,t)=0 & v(x,t) \text{ уд...} \\ v_t(x,0)=0 \quad v(l,t)=0 & \text{Рассм. } E(...\end{cases}$$

Рассм $v(0,t)=v(l,t)=0 \Rightarrow v_x \Big|_0^{l}$ ...

$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (T_0 v_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})dx$, $\int_0$ ...

$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (\rho v_t v_{tt} - v_t T_0 v_{xx})dx = \int_0^l$ ...

Из начальных условий: $E = E(0) = \frac{1}{2}\int$ ...

$\Rightarrow v_x(x,t) \equiv 0$ $\quad v_t(x,t) \equiv 0 \Rightarrow$ ...

$\Rightarrow u_1 \equiv u_2$.

Расм. всп. ф-ю: $v(x,t) = u$

Расм. $\max\{v(0,t); v(l,t); v$

$v(x_1,t_1) > v(x,t)$ $\forall\ 0 \le x \le l$ $0 \le t \le T$

(ф. непр. на огр. мн-ве). Условия ...

$t_1 < T$, то $v_t(x_1,t_1)=0$, если $t_1 =$

2) $v_{xx}(x_1,t_1) \le 0$ $v_x(x_1) = 0$ – условие

Отр-м u пот: $v_t(x_1,t_1) = u_t(x_1,t_1)$

$u_{xx}(x_1,t_1) = v_{xx}(x_1,t_1)$

т.е. в (x_1,t_1) не вып. (1). $\rightarrow$ прот

Для min – аналогично, только ...

Следствия:

1. $u_1(x,t)$ $u_2(x,t)$ – реш. ур.: $u_1(x,t) \le u_2$

2. $|u_1(\cdot,t)| \le u_2(\cdot,t)$ • $\in$ границы

Теорема! Задача (1) не имеет

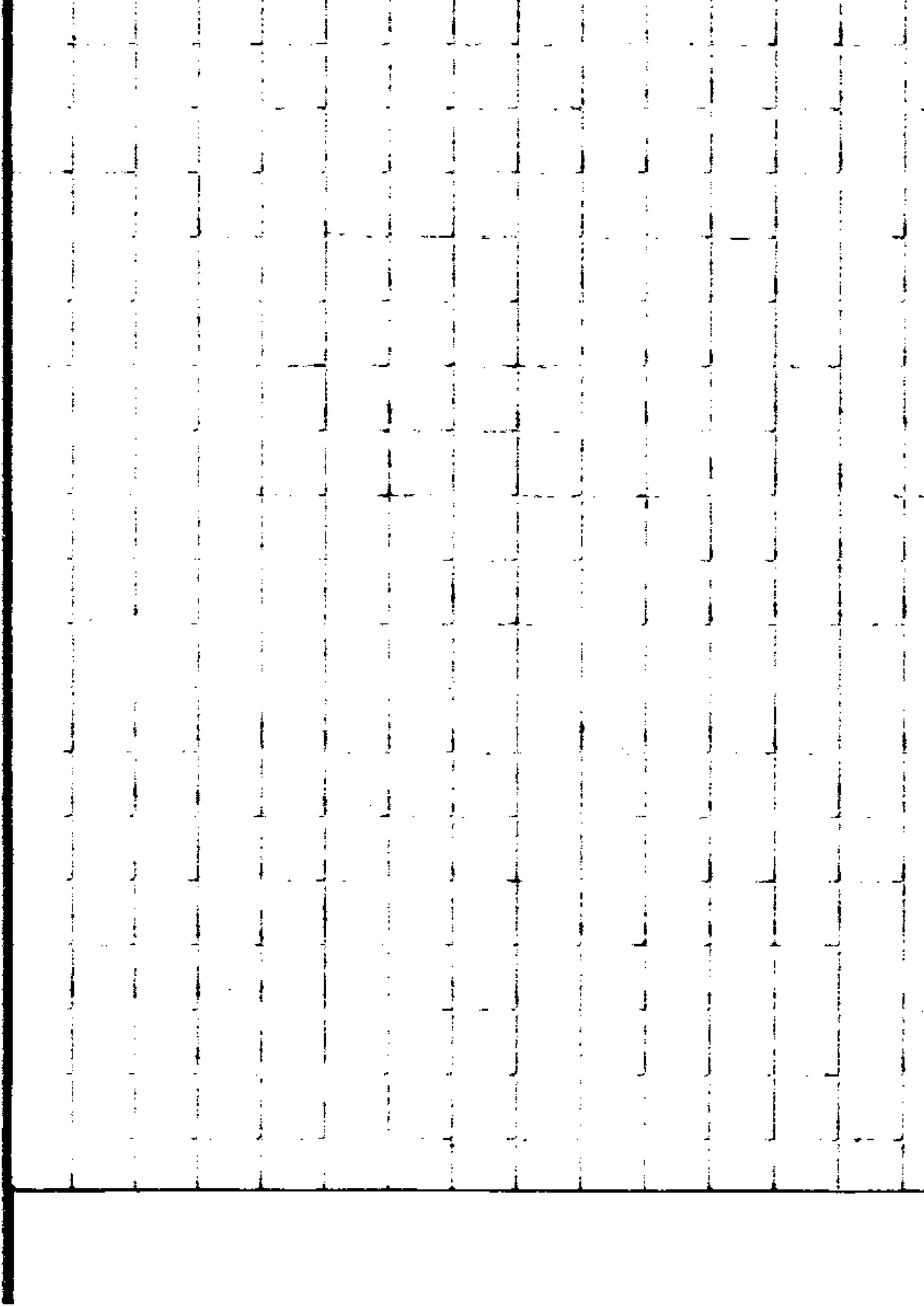
$$(1)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = \mu_0(t) \quad u(l,t) = \mu_1(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Д-во: u_1, u_2

$\Rightarrow$ по пр.

не может

получ. ...



$-\iiint\limits_T f(M)\,d\tau + \iint\limits_S f(M)\,ds = 0$

Если $f(M)\equiv 0$, то $\oint\limits_S \tilde{f}(M)\,ds =$

Теорема о ед-ти реш. з-чи Неймана

Если u_1 - реш. з-Н. вн., u_2 - реш

Д-во: $\Rightarrow u_1, u_2$ - реш. $\Rightarrow v = u_2 - u_1$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v(M)/_S = 0 \end{cases}$$ Запишем 1-ю ф

$\iiint\limits_T \{ \ldots + (\mathrm{grad}$

$\iiint\limits_T (\mathrm{grad}\, v)^2\,d\tau = 0 \Rightarrow \mathrm{grad}\, v = 0$

Внешние задачи

Обычно доп. условие для задач

Для внеш. з-чи Неймана $u(M$

$|u(M)| \le \frac{A}{r}$, $|\frac{\partial u}{\partial x}| \le \frac{A}{\ldots}$,

требование $|u(M)| < A$ сущест

Для задач:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \; в\, T' \\ u/_S = \tilde{f}, \; в\, S \\ |u| \le A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = f \; в\, T' \\ \frac{\partial u}{\partial n}/_S = \tilde{f}, \; в\, S \\ u - \text{регул. на } \infty \end{cases}$$

Если φ - гармонич. ф-я : $\Delta u = 0$, т

$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{r_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\right.$

$\forall$ точки (области гармоничности)

интеграл на границе и решение

Для 2D, $v = \ln \frac{1}{r_{M_0P}}$, аналогично

$2\pi u(M_0) = \int\limits_{C} \left(\ln \frac{1}{r_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\right.$

используя это св-во, результат

функция Грина для области

$(*) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T & \text{Первая краевая зад} \\ u|_{\Sigma} = f & \text{найти } u(M) \text{ опр. и} \end{cases}$

Пусть $v(M)$ - гарм. ф-ия $\in C^1(T$

$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{r_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\right.$

[illegible] $\iint\limits_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma - \iiint$

$u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\left(v + \frac{1}{4\pi r_{M_0}}\right) - \right.$

нужно такую ф-ию подобр. в

Опр ф-я Грина (источника) для об

$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + v(P, M_0)$, где

(Для 2й краевой задачи v: $\frac{\partial\left(v + \frac{1}{4\pi r}\right)}{\partial n}$

τ_0 - самая быстрая сходимость

* **Метод Зейделя**

$B = A_1 D$, $\tau = 1$

$(A_1 + D) x_{n+1} + (A_1 + D + A_2 - A_1 - D) x$

$A = A_1 + D + A_2$ A_1 - нижн. треуг.

* **Метод верхн. релаксации**

$B = \omega A_1 + D$, $\tau = \omega$

$(\omega A_1 + D) \frac{x_{n+1} - x_n}{\omega} + A x_n = f \Rightarrow ($

A симм., положит. опр. $\rightarrow A_2 = A_1^*$ $\Rightarrow ($

Треб. усл., дост-е для сх-ти:

$((B - \frac{\omega}{2} A) x, x) = (Bx, x) - \frac{\omega}{2}(Ax, x$

$= (1 - \frac{\omega}{2})(Dx, x) > 0 \rightarrow 1 - \frac{\omega}{2} >$

при таком τ, который будет ...

τ_0 — оценка быстрой сходимость.

(2) <u>Метод Зейделя</u>

$B = A_1 + D \quad , \tau = 1$

$(A_1+D)x_{n+1} + (A_1+D+A_2-A_1-D)x_n = f$

$(A_1+D)x_{n+1} + A_2 x_n = f$

<u>Метод верхней релаксации</u>

$B = \omega A_1 + D \qquad \tau = \omega$

$(\omega A_1 + D)\frac{x_{n+1}-x_n}{\omega} + Ax_n = f$

$(A_1 + \frac{1}{\omega}D)x_{n+1} = f - x_n\,(A_2 + (1-\frac{1}{\omega})$

A — симм., пол.-опр. $\Rightarrow A_2 = A_1^* \Rightarrow$

Пров. усл. дост.-е для сх-ти,

$((B - \frac{\omega}{2}A)x, x) = (Bx,x) - \frac{\omega}{2}(Ax,x) = ($

$= (1-\frac{\omega}{2})(Dx,x) > 0$

итерацион. сх-ся метод.

$\square$-во: $B: (Bx, x) > 0 \; \forall x \neq 0$ о.с. ((

$B: \det B \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$. Рассм. ф-

$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + B^{-1} A z_n = 0 \Rightarrow z_{n+1} = (E -$

$\psi_n = Ax_n - f = Az_n + Ax - f = Az_n =$

Рассм. посл-ть: $k_n = (Az_n, z_n)$

$k_{n+1} = (Az_n, z_n) - \tau(AB^{-1}Az_n, z_n) - \tau(A$

$(Az_n, z_n) = k_n; \; \tau(AB^{-1}Az_n, z_n) = \tau(B^{-1}A$

$k_{n+1} = k_n - 2\tau(Az_n, B^{-1}Az_n) + \tau^2(AB^{-1}A$

$= k_n - 2\tau(BB^{-1}(A - \frac{\tau}{2}AB^{-1}A)z_n, B^{-1}A$

Обозначим $m_n = B^{-1}Az_n \Rightarrow k_{n+1} =$

k_n - невозр. посл-ть; $k_n > 0 \Rightarrow \exists$

$((B - \frac{\tau}{2}A)m_n, m_n) \geq \delta \|m_n\|^2, \; \delta >$

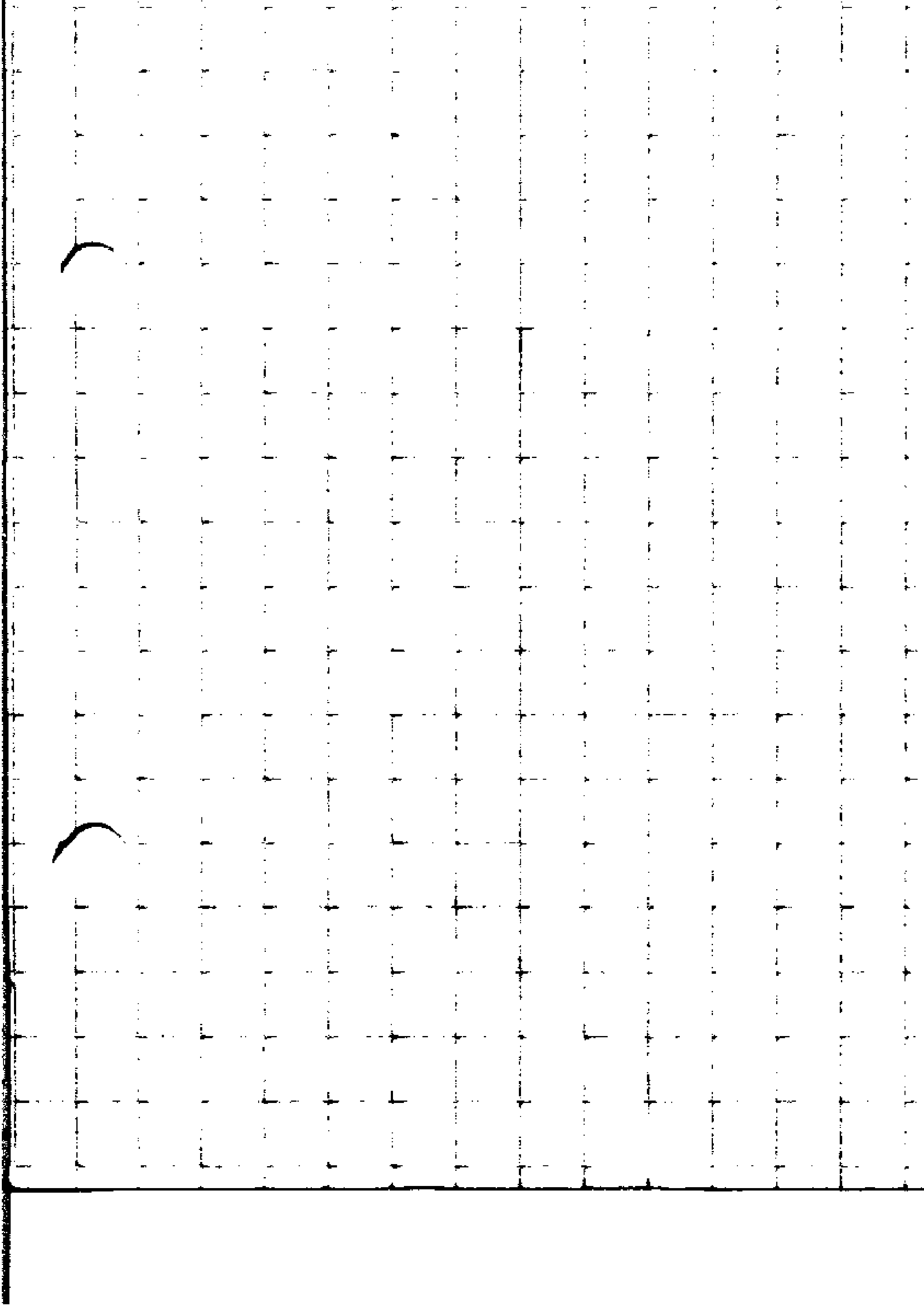
$k_{n+1} - k_n + 2\tau\delta\|m_n\|^2 \leq 0, \quad n \to$

$z_n = A^{-1}Bm_n \Rightarrow \|z_n\| \leq \|A^{-1}B\| \cdot$

$x_n - x \to 0 \Rightarrow x_n \to x$.

<u>Следствие</u>: $(Ax, x) > 0 \; \forall x \neq 0 \; ((B - \frac{\tau}{2}$

$\square$-во. $(Bx, x) > \frac{\tau}{2}(Ax, x) > 0 \Rightarrow \forall x$



$$\begin{cases} x_n = \beta_n \\ x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ наупл

$\Rightarrow L_h z_h = \psi_h, \ x \in \omega_h$, где ψ_h

$l_h z_h = \nu_h, \ x \in \gamma_h$

Говорят, что реш. разностн. зад. сх.

если $\|z\| = \|y_h - u_h\| \to 0$ при $|h| \to 0$

Разностн. схема сх со скоростью

если при дост. малом h вып.

$u_h = u(x), x \in \omega$; $(Lu)_h = Lu, \ x \in \omega$

$\psi_h = (\varphi_h - L_h u_h) - (\varphi_h - (Lu)_h) = (\varphi_h$

погрешн. аппр-и равна сумм

аппр-и диф. ол-ра.

если z_h непр. и равн. зав. от

пор. ~~точности~~ аппр-и

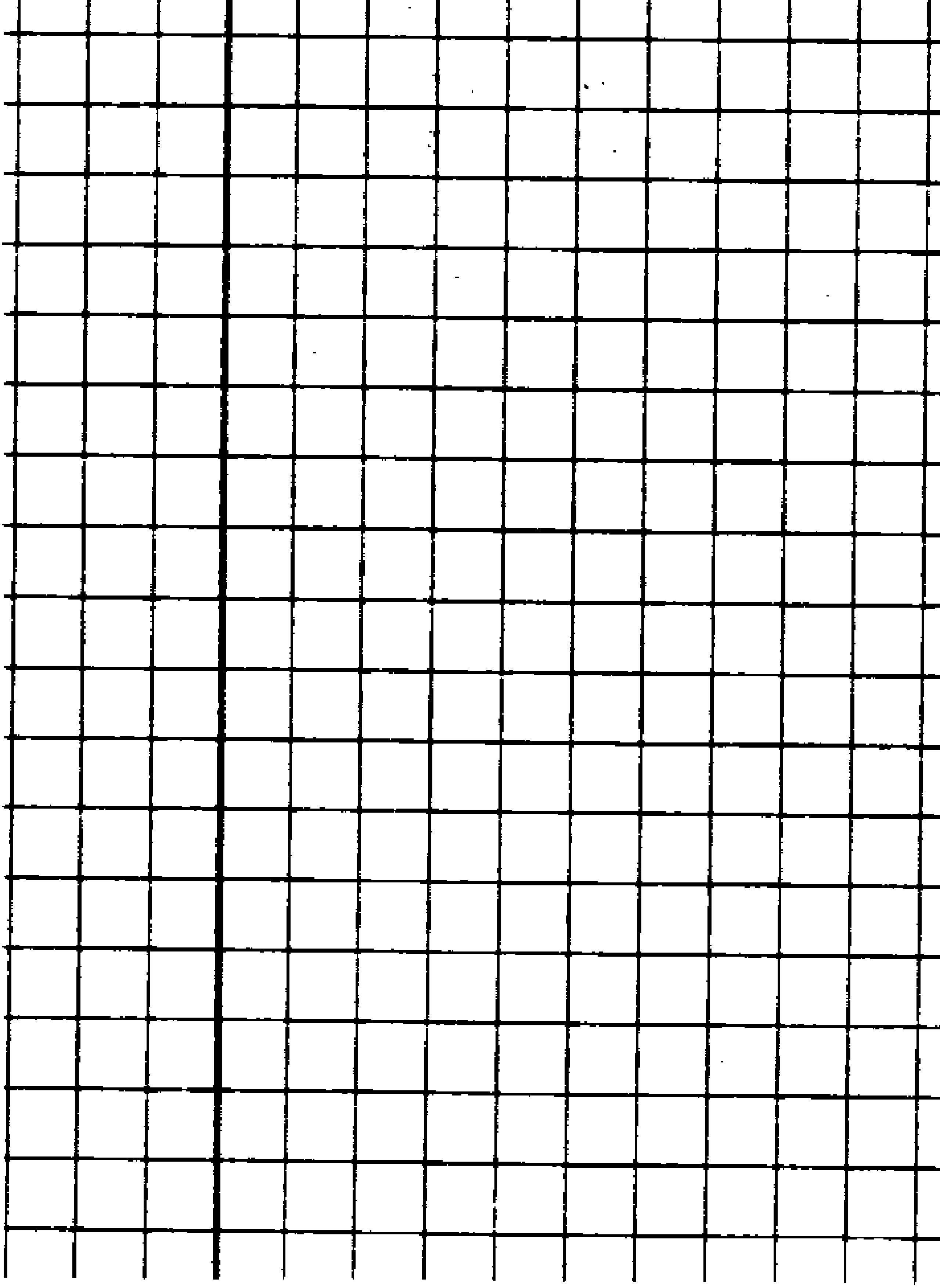
Устойчивость разностн. схем

входные данные (пр. част.

погрешностью.

Схема, кот. в процессе счет

наз. неустойчивыми и не



считаем сетку связной, шаблон...

узел - регулярный, если все его с...
$\in G+\Gamma$

узел нерегулярный, если $\exists$ хотя б...
соседей $\notin G+\Gamma$

ω_h^* - множ. всех нерегулярных у...

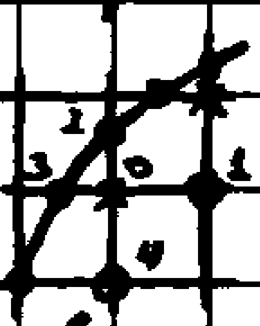
γ_h - множ. граничных узлов

В рег-х узлах м. писать (*). В...

В нерег. узлах $\exists$ различн. спос...

нулевой пор.: $y(x)=\mu(\bar{x})$, $x\in\omega_h^*$

перв. пор.: лин. интерполяция с...



$\Lambda_1 y_0 = 0$, $\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{h_1}($...

$h_1^- = x_1' - x_{1\Gamma}'$, $h_1^+ = x_1' - x_{1\Gamma}$...

аналогично для x_2

втор. пор.: $x\in\omega_h^*$, несимметричн. сх...

$\Lambda^* y(x) = y_{\bar{x}_1\hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2\hat{x}_2} = -f_i$. $y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}$...

Окончательно получаем разн...

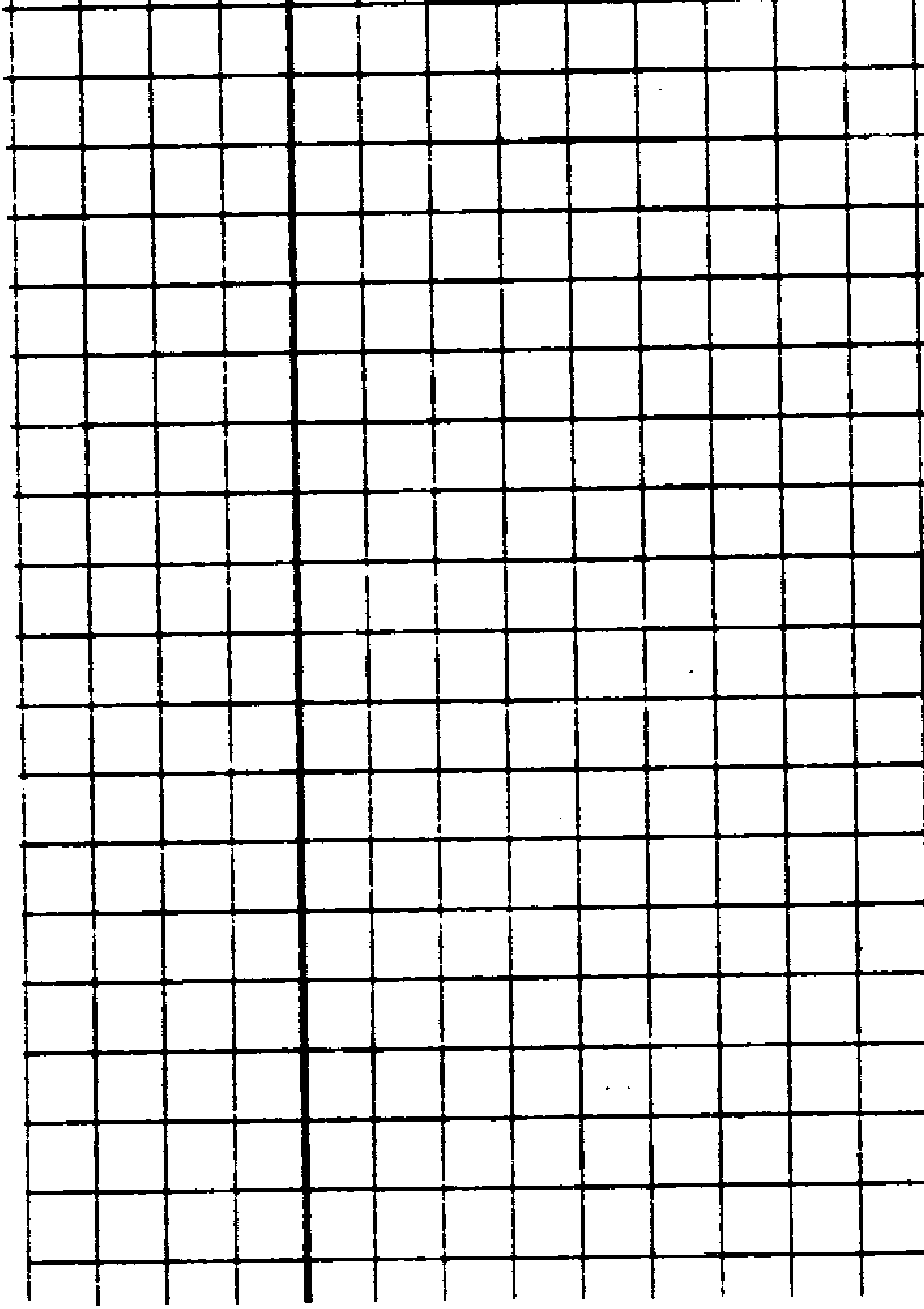


Схема (**) содерж. ур. исходн…

двуслойной.

Варианты схем:

а) $\sigma = 0$ ⇒ получаем четырехточечн…

$y_i^{j+1} = (1-2\gamma) y_i^j + \gamma (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau$…

шаблон: $(x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i+1}, t_j)$…

т.к. ур. на новом слое t_{j+1} явно…

слое t_j ⇒ явная схема

б) $\sigma \neq 0$ ⇒ неявн. двусл. схема …

$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = - F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j$…

$y_0^{j+1} = u_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = u_2^{j+1}$

в) $\sigma = 1$ чисто неявн. схема y…

г) $\sigma = 0{,}5$ шеститочечн. сим. схема…

Погр-ть апп-и

Положим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Обозн…

разностн. схему (**) м. переписс. …

⇒ погр-ть апп-и $\psi = \Lambda (\sigma \hat{u} + (1-$…

соб. зн. $\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2}$, $k=1\dots$

$X^{(k)}(x) = \sqrt{2}\sin \pi k x$, $k=1\dots N-1$

$y_{(k)} = T_k X^{(k)} \neq 0$, где T_k - опр-ся

$T_k^{j+1} = q_k T_k^j = \dots = q_k^{j+1} T_k^0$, $q_k =$

реш. $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ - гармонико нач

и уд. $u_0(x) = T_k^0 X^{(k)}(x)$

Выясним, когда будут уст. гар

1) $|q_k| \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon>0 \Rightarrow \|y_{(k)}^{j+1}\| = |q_k|$

при $\tau\to 0$, т.е. зад. неуст.

2) $|q_k|\le 1 \Rightarrow \|y^j_{(k)}\| \le \|y^0_{(k)}\| \to$ гарм.

Выясним, при каких σ $|q_k|\le 1$,

$q_k = 1 - \tau\lambda_k/(1+\sigma\tau\lambda_k) < 1 \Rightarrow 1+\sigma\tau\lambda_k$

$q_k > -1 \Rightarrow q_k + 1 = \frac{2+(2\sigma-1)\tau\lambda_k}{1+\sigma\tau\lambda_k} > 0$

($1+\sigma\tau\lambda_k>0$ автоматически

т.к. $\lambda_k \le \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |q_k|\le 1$ вып. для всех $k=1\dots$

$\Rightarrow$ все гармоники уст. при $\sigma > \sigma_0$