

УДК 512; 517; 519.6; 510.5

ББК 22.1

М 54

*Печатается по решению
Редакционно-издательского Совета факультета
Вычислительной математики и кибернетики МГУ
им. М.В. Ломоносова.*

Рецензенты:

доцент А.В. Лукшин,
доцент Н.Н. Попова.

**А.В. Боресков, И.А. Волкова, И.В. Дмитриева, Г.П. Иванова,
Е.А. Кузьменкова, С.И. Орлик, Д.С. Романов.**

**Методические материалы для подготовки к государственному
М 54 экзамену по прикладной математике и информатике:**

- М.: Издательский отдел факультета ВМ и К МГУ,
(Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01.), 2004. -294с.
ISBN 5-89407-179-8

Данное пособие предназначено для студентов факультета ВМ и К МГУ, обучающихся по программе специалистов. В пособии даны ответы на вопросы основной части госэкзамена, приведены необходимые примеры. Пособие не является учебником, в нём нет доказательств всех формулируемых теорем и фактов; эти доказательства можно найти в указанных в списке книгах. При ответе на вопрос на госэкзамене студент не обязан вести изложение так, как это написано в настоящем пособии. Вместе с тем, по мнению авторов, предлагаемые здесь ответы на вопросы экзамена весьма полно раскрывают их содержание.

Ответы на вопросы 1–15, 21, 22, 26 – 30 подготовлены И.В. Дмитриевой и С.И. Орликом. Ответы на вопросы 16 – 18 подготовлены И.А. Волковой. Ответ на вопрос 19 подготовлен А.В. Боресковым. Ответ на вопрос 20 подготовлен Е.А. Кузьменковой. Ответы на вопросы 23, 24 подготовлены Д.С. Романовым. Ответ на вопрос 25 подготовлен Г.П. Ивановой.

ISBN 5-89407-179-8

УДК 512; 517; 519.6; 510.5

ББК 22.1

© Авторы

© Издательский отдел факультета

Вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004

ВОПРОСЫ ГОСЭКЗАМЕНА
по направлению «Прикладная математика и
информатика»
(основная часть)

Вопрос 1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на отрезке.	6
Вопрос 2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости.	16
Вопрос 3. Определённый интеграл, его свойства. Основная формула интегрального исчисления.....	25
Вопрос 4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.....	36
Вопрос 5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Непрерывность равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.....	45
Вопрос 6. Криволинейный интеграл, формула Грина.....	53
Вопрос 7. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция.....	66
Вопрос 8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости.....	74
Вопрос 9. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.....	83
Вопрос 10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости, основные задачи на прямую и плоскость.	94
Вопрос 11. Алгебраические линии второго порядка, канонические уравнения, классификация	102
Вопрос 12. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.....	111
Вопрос 13. Линейный оператор в конечномерном пространстве, его матрица. Норма линейного оператора.	117
Вопрос 14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.....	127
Вопрос 15. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.....	135

Вопрос 16. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова).....	140
Вопрос 17. Процедуры (подпрограммы) и макросредства в языках программирования. Способы передачи параметров в процедурах..	147
Вопрос 18. Операционные системы, их основные функции.....	154
Вопрос 19. Аффинные, линейные и проективные преобразования в компьютерной графике.....	164
Вопрос 20. Основные понятия реляционной модели данных.....	172
Вопрос 21. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.....	185
Вопрос 22. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.....	202
Вопрос 23. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.....	212
Вопрос 24. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.....	219
Вопрос 25. Вероятностное пространство. Случайные величины. Закон больших чисел в форме Чебышева.....	229
Вопрос 26. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол.....	242
Вопрос 27. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.....	253
Вопрос 28. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры методов Рунге-Кутта.....	263
Вопрос 29. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.	272
Вопрос 30. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.	280

Программа утверждена на заседании Ученого Совета факультета ВМиК.

Литература.

1. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ, т.1, т.2. – М.: Наука, 1979., МГУ 1985.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука.
3. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. –М.: Наука, 1984.
4. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия, –: Наука, 1984.
5. В.А. Ильин, Г.Д. Ким. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
– М.:МГУ, 1998.
6. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1998.
7. В.И. Дмитриев. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Краткий конспект лекций.–М.: МГУ, 2000.
8. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
9. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Основы теории аналитических функций комплексной переменной. – М.:Наука, 1999.
10. Э.З. Любимский, В.В. Мартынюк, Н.П. Трифонов. Программирование. – М.: Наука, 1980.
11. В.Г. Абрамов, Н.П. Трифонов, Г.Н. Трифонова. Введение в язык Паскаль. – М.:Наука, 1988.
12. В.Н. Пильщиков. Программирование на языке ассемблера IBM PC. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1994.
13. У. Дэвис. Операционные системы. – М.: Наука, 1980.
14. Е.В. Шикин, А.В. Боресков. Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1995.
15. С.В. Яблонский. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
16. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1990.
17. К. Дейт. Введение в системы баз данных. – 6-е издание, издательский дом «Вильямс», 1999.

Вопрос 1.

Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Если каждому значению переменной x из множества X ставится в соответствии по некоторому закону число y , то говорят, что на множестве X задана однозначная функция $y = f(x)$. Переменная x называется аргументом функции, а множество X – областью её определения. Число y , которое соответствует выбранному x , называется значением функции в точке x ; множество Y всех таких y называется областью значений функции. Понятие функции можно формализовать на языке теории множеств: функцией называется множество $f = \{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, такое, что для любых пар $(x', y') \in f$ и $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует $x' \neq x''$. Последнее требование выражает однозначность функции, а само определение отождествляет функцию с её графиком.

В качестве X будем далее рассматривать либо некоторое подмножество числовой прямой R , либо подмножество n -мерного действительного арифметического пространства R^n . В первом случае говорят о функции одной действительной переменной, во втором – о функции n переменных. Обозначим через $\rho(x, a)$ расстояние между точками x и a . δ – окрестностью точки a называется множество всех x , удовлетворяющих неравенству $\rho(x, a) < \delta$. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой её δ -окрестности найдется отличная от a точка x из множества X .

Определение предела функции при $x \rightarrow a$ по Гейне. Пусть точка a является предельной точкой множества X , на котором определена функция $y = f(x)$. Число b называется пределом функции f в точке a , если для любой последовательности $\{x_n\}$

отличных от точки a значений аргумента, сходящейся к точке a , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

$$\left| \begin{array}{l} x_n \in X \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{array} \right| \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

Определение предела функции при $x \rightarrow a$ по Коши. Пусть точка a является предельной точкой множества X , на котором определена функция $y = f(x)$. Число b называется пределом функции f в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x из множества X , удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, a) < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Замечание. В обоих определениях допускается как случай $a \in X$, так и случай $a \notin X$. Поэтому в них требуется $x_n \neq a$, $\rho(x, a) > 0$.

Теорема. Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство.

Пусть число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ по Гейне. Предположим, что b не является пределом этой функции при $x \rightarrow a$ по Коши. Это значит, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и для любого (сколь угодно малого) $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in X$, что $0 < \rho(x, a) < \delta$, но $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$. Выберем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, сходящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда для каждого такого δ_n найдется $x_n \in X$, что $0 < \rho(x_n, a) < \delta_n$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$. Это означает, что состоящая из отличных от a точек последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке a . Но тогда по определению предела по Гейне числовая последовательность

$\{f(x_n)\}$ должна сходиться к числу b . А это противоречит неравенству $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$. Следовательно, b – предел функции f при $x \rightarrow a$ по Коши.

Пусть число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ по Коши. Пусть $\{x_n\}$ – любая сходящаяся к точке a последовательность значений аргумента, все члены которой отличны от a . Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для $x \in X$ из условия $0 < \rho(x, a) < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$. В силу сходимости $\{x_n\} \rightarrow a$ для выбранного δ найдется такой номер N , что при всех $n \geq N$ будет выполнено неравенство $0 < \rho(x_n, a) < \delta$. Кроме того, $x_n \neq a$, т.е. выполнено $0 < \rho(x_n, a) < \delta$. Но тогда по определению предела по Коши должно быть выполнено неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, т.е. $\{f(x_n)\} \rightarrow b$. А это и означает, что число b – предел функции f при $x \rightarrow a$ по Гейне. \square

Если в сформулированных определениях предела функции одной переменной рассматривать только значения аргумента x , лежащие правее (левее) точки a , то получим определения правого (левого) предела при $x \rightarrow a+0$ (при $x \rightarrow a-0$). Очевидно, что если функция f одной переменной имеет в точке a оба односторонних предела, равных одному и тому же числу b , то f имеет в точке a предел, равный b .

Сформулированное выше понятие предела функции нескольких переменных по совокупности переменных не следует путать с понятием предела по направлению и с понятием повторного предела. Например, для функции $y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^2}$, определённой всюду, кроме начала координат, предел в начале координат вдоль любой прямой $x_2 = k \cdot x_1$ равен нулю, существуют повторные пределы $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$ и $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0$,

но предел функции f в начале координат не существует. В самом деле, при стремлении точки к началу координат вдоль параболы $x_2 = k \cdot x_1^2$ ($k = \text{const} \neq 0$) значение функции f постоянно и равно $\frac{k}{1+k^2}$; оно зависит от выбора этой параболы.

Пример функции, имеющей предел в единственной точке $x = 0$, $x \in R$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ -x, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

Говорят, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$ из неравенств $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема (критерий Коши существования предела функции при $x \rightarrow a$). Функция f имеет в точке a конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет в этой точке условию Коши.

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует конечный предел b функции f при $x \rightarrow a$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$ из неравенств $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$ будут следовать неравенства $|f(x') - b| < \varepsilon$, $|f(x'') - b| < \varepsilon$. (Это гарантируется определением предела при $x \rightarrow a$ по Коши). Тогда $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) - (f(x'') - b)| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < 2\varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке a и состоящая из отличных от a точек. Докажем, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, и что её предел b не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$.

довательности $\{x_n\}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и отвечающее ему в силу условия Коши $\delta(\varepsilon) > 0$. Так как $\{x_n\} \rightarrow a$ и $x_n \neq a$, то для выбранного δ найдется такой номер N , что для всех $n \geq N$ выполнены неравенства $0 < \rho(x_n, a) < \delta$. Тем более будут выполнены неравенства $0 < \rho(x_{n+p}, a) < \delta$ для всех $n \geq N$ и для любого натурального числа p . Тогда по условию Коши из неравенств $0 < \rho(x_n, a) < \delta$ и $0 < \rho(x_{n+p}, a) < \delta$ следует неравенство $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$ при $n \geq N$ и любом натуральном p . А это означает фундаментальность числовой последовательности $\{f(x_n)\}$. По критерию Коши для числовых последовательностей $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b . Осталось доказать, что для любых двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ значений аргумента, состоящих из отличных от a точек, соответствующие им последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ будут сходиться к одному и тому же числу b . Пусть $\{f(x_n)\} \rightarrow b$, $\{f(x'_n)\} \rightarrow b'$. Составим новую сходящуюся к точке a последовательность $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$. По доказанному отвечающая ей последовательность $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$ сходится. Но тогда любая её подпоследовательность сходится к одному и тому же пределу; в частности, для $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ пределы b и b' одинаковы. \square

Теорема. Пусть на множестве X определены две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, которые при $x \rightarrow a$ имеют пределы, соответственно равные b и c . Тогда и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, имеют пределы при $x \rightarrow a$, равные соответственно $b \pm c$, $b \cdot c$, b/c (последний – при условии, что $c \neq 0$).

Доказательство этой теоремы легко получить, например, из определения предела при $x \rightarrow a$ по Гейне.

2. Определение. Функция f называется непрерывной в точке a , если она определена в этой точке и имеет при $x \rightarrow a$ предел, который равен её значению $y = f(a)$.

Сформулированное определение можно записать на языке последовательностей (по Гейне) или на языке " $\varepsilon - \delta$ " (по Коши). По сравнению с определениями предела функции (по Гейне или по Коши) в этом определении надо потребовать $a \in X$ и вместо проколотой окрестности точки a рассмотреть всю её δ -окрестность, включая саму точку a .

Теорема. Пусть на множестве X определены две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, непрерывные в точке a . Тогда и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ непрерывны в точке a (последняя – при условии, что $g(a) \neq 0$).

Если функция f непрерывна в каждой точке множества X , то она называется непрерывной на X . Например, если функция f одной переменной определена на сегменте $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке, то говорят, что f непрерывна на $[a, b]$. При этом подразумевается непрерывность в точке a справа и в точке b слева, т.е. односторонние пределы при $x \rightarrow a+0$ и при $x \rightarrow b-0$ существуют и равны соответственно $f(a)$ и $f(b)$.

3. Теорема. Если функция f непрерывна в точке ξ и $f(\xi) \neq 0$, то для всех x из некоторой δ -окрестности точки ξ $f(x) \neq 0$, и знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(\xi)$.

Теорема о прохождении непрерывной функции одной переменной через нуль при смене знаков. Пусть функция f одной переменной непрерывна на сегменте $[a, b]$, и пусть её значения $f(a)$ и $f(b)$ – числа разных знаков. Тогда найдется такая точка ξ , что $a < \xi < b$ и $f(\xi) = 0$.

Доказательство.

Пусть для определённости $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Обозначим через W множество всех точек x из $[a, b]$, для которых $f(x) < 0$. Очевидно, что $a \in W$, т.е. W не пусто. Кроме того, W ограничено сверху (например, числом b). Поэтому у множества W существует точная верхняя грань ξ . Так как f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то существует правая δ – окрестность точки a , в которой $f(x) < 0$, и левая δ – окрестность точки b , в которой $f(x) > 0$. Поэтому ξ – внутренняя точка сегмента $[a, b]$, т.е. $a < \xi < b$, и $f(\xi) = 0$. В самом деле, если бы было $f(\xi) > 0$, то в силу непрерывности f в точке ξ нашлась бы δ – окрестность точки ξ , в которой $f(x) > 0$; и тогда ξ не являлась бы точной верхней гранью множества W (не была бы наименьшей из верхних граней). А если бы было $f(\xi) < 0$, то нашлась бы δ – окрестность точки ξ , в которой $f(x) < 0$; и тогда ξ не являлась бы вовсе верхней гранью множества W . \square

Теорема о прохождении непрерывной функции одной переменной через любое промежуточное значение. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, и $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, $\alpha < \beta$. Для любого числа γ , $\alpha < \gamma < \beta$, на (a, b) найдётся точка ξ , в которой $f(\xi) = \gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Очевидно, что $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Поэтому на (a, b) найдётся точка ξ , в которой $g(\xi) = 0$, т.е. $f(\xi) = \gamma$. \square

Коротко говоря, непрерывная на сегменте функция принимает все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема об ограниченности функции, непрерывной на сегменте. Если функция одной переменной непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Доказательство.

Предположим, что f не является ограниченной сверху на $[a, b]$. Тогда для любого натурального n найдётся точка $x_n \in [a, b]$, в которой $f(x_n) > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (числами a и b), поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Её предел ξ , очевидно, принадлежит $[a, b]$. В силу непрерывности f в точке ξ $\{f(x_{n_k})\} \rightarrow f(\xi)$. Но это противоречит неравенствам $f(x_{n_k}) > n_k$, которые выполнены для всех n_k . Следовательно, f ограничена сверху на $[a, b]$. Аналогично доказывается ограниченность f снизу на $[a, b]$. \square

Теорема о достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точных верхней и нижней граней. Если функция f одной переменной непрерывна на $[a, b]$, то на $[a, b]$ найдутся такие точки x_1 и x_2 , что $f(x_1) = M = \sup_{[a, b]} \{f(x)\}$, $f(x_2) = m = \inf_{[a, b]} \{f(x)\}$.

Доказательство.

Предположим, что функция f не принимает на $[a, b]$ значения, равного M . Тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$ (так как M – одна из верхних граней множества $\{f(x)\}$). Поэтому функция $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0$ и непрерывна на $[a, b]$. Но тогда g ограничена на $[a, b]$. Из ограниченности g (сверху) следует, что существует число $B > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $g(x) \leq B$.

Отсюда $f(x) \leq M - \frac{1}{B}$ для всех $x \in [a, b]$. А это противоречит тому, что число M является точной верхней границей значений функции f (точная верхняя грань – это наименьшая из всех верхних граней). Следовательно, f должна иметь значение M . Аналогично доказывается достижение точной нижней грани. \square

Определение. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек x' и x'' из множества X из неравенства $\rho(x', x'') < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема. Если функция f одной переменной непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом сегменте.

Доказательство.

Предположим, что f непрерывна на $[a, b]$, но не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Это значит, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и для любого $\delta > 0$ на $[a, b]$ найдутся такие точки x' и x'' , что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Выберем последовательность $\{\delta_n\}$, сходящуюся к нулю. Тогда для каждого δ_n найдутся на $[a, b]$ такие точки x'_n и x''_n , что $|x'_n - x''_n| < \delta_n$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x'_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Очевидно, что её предел $c \in [a, b]$. Очевидно, также, что и подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$ сходится к c . В силу непрерывности функции f в точке c $\{f(x'_{n_k})\} \rightarrow f(c)$ и $\{f(x''_{n_k})\} \rightarrow f(c)$. Поэтому последовательность $\{|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})|\}$ является бесконечно малой. Но это противоречит неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. \square

4. Определение. Множество X называется компактным, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек этого множества можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке из X .

В конечномерном пространстве замкнутые и ограниченные множества (и только они) являются компактными.

Если функция f многих переменных определена и непрерывна на компактном множестве X , то она равномерно непрерывна на X , ограничена на X и достигает своих точных верхней и нижней граней.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

равномерно непрерывна на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = 0; \\ (x_1 + x_2) \cdot \sin \frac{1}{x_1} \cdot \sin \frac{1}{x_2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

равномерно непрерывна в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. (Докажите, что

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} f(x_1, x_2) = 0.)$$

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = 0; \\ \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

не является равномерно непрерывной в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. (Докажите, что она разрывна в точке $(0,0)$.)

Вопрос 2.

Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости.

1. Пусть действительная функция $y = f(x)$ одной действительной переменной определена в некоторой окрестности точки x_0 , включая эту фиксированную точку. Под приращением аргумента Δx понимают любое число, при котором $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f . Число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции f в точке x_0 , отвечающим приращению аргумента Δx . Выражение $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, определённое при $\Delta x \neq 0$, называют разностным отношением.

Если точка x_0 фиксирована, то разностное отношение является функцией от Δx , определённой в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$, за исключением самой этой точки.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ разностного отношения (если этот предел существует).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если вместо окрестности точки $\Delta x = 0$ рассмотреть правую (левую) полуокрестность этой точки и, соответственно, правый (левый) предел разностного отношения, то получим определение правой (левой) производной в точке x_0 :

$$\begin{aligned} f'(x_0 + 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \left(f'(x_0 - 0) \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда, и только тогда, когда она имеет в этой точке обе односторонние производные, которые равны друг другу.

С геометрической точки зрения наличие производной у функции f в точке x_0 означает, что через точку с координатами $(x_0, f(x_0))$ можно провести прямую, касательную к графику функции f . Эта касательная единственна, а тангенс угла её наклона к положительному направлению оси Ox равен $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) \neq \infty$, то уравнение указанной касательной имеет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Определение дифференцируемости функции f . Функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки, а приращение Δy этой функции в точке x_0 , отвечающее приращению аргумента Δx , может быть представлено в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где A – не зависящее от Δx конечное число, а $\omega(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что у её приращения в этой точке существует главная при $\Delta x \rightarrow 0$ линейная относительно Δx часть $A \cdot \Delta x$, а дополнительный член $\omega(\Delta x)$ является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx . Выражение $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом дифференцируемой функции в точке x_0 и обозначается через dy или через $df(x_0)$. Приращение аргумента Δx обозначают также через dx и называют дифференциалом независимой переменной; $\Delta x = dx$ – любое число.

Теорема. Функция f дифференцируема в точке x_0 в том, и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть в точке x_0 функция f дифференцируема, т.е. $\Delta y = A \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где A не

зависит от Δx , а $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Предположив, что

$\Delta x \neq 0$, разделим Δy на Δx и устремим Δx к нулю:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A.$$

Но это означает, что у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная, равная числу A : $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть функция f имеет в точке x_0 конечную производную, т.е. существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Это означает, что функция

$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ является бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т.е. $\omega(\Delta x) = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, и функция f дифференцируема в точке x_0 ; $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$. \square

Производную $f'(x_0)$ часто записывают в виде $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.

Эту запись надо понимать как отношение дифференциала функции dy к дифференциальному независимой переменной dx .

Пусть дана дифференцируемая в точке x_0 функция $y = f(x)$, аргумент x которой является дифференцируемой функцией $x = \varphi(t)$ аргумента t . Тогда y является сложной функцией $y = f(\varphi(t))$ аргумента t , а x – промежуточным аргументом. В случае, когда аргумент x является независимой переменной, дифференциал функции f определялся формулой $dy = f'_x(x_0)dx$. Если же аргумент x зависит от t , то возникает вопрос о дифференцируемости y по t и о выражении dy через dt .

Теорема о дифференцируемости сложной функции. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в некоторой точке t_0 , а

функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 , причём её производная имеет вид $[f(\varphi(t_0))]' = f'_x(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$.

Доказательство. Придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx функции $x = \varphi(t)$, а приращению Δx – приращение Δy функции $y = f(x)$. Из условия дифференцируемости функции $y = f(x)$ имеем $\Delta y = f'_x(x_0) \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$, где $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x \neq 0$. Введём соглашение: $\omega(\Delta x = 0) = 0$. Разделим на $\Delta t \neq 0$: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta t}$. Из условия дифференцируемости функции $x = \varphi(t)$ имеем $\Delta x = \varphi'_t(t_0) \cdot \Delta t + \chi(\Delta t)$, где $\frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0) + f'_x(x_0) \cdot \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \\ &= f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0) + f'_x(x_0) \cdot \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} + \\ &+ \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \left(\varphi'_t(t_0) + \frac{\chi(\Delta t)}{\Delta t} \right) \rightarrow f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.\end{aligned}$$

А это и доказывает наличие конечной производной у сложной функции. \square

Замечание. Может оказаться, что при некоторых $\Delta t \neq 0$ будет $\Delta x = 0$, и тогда в выражении для $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ член $\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta t}$ нельзя разделить и умножить на $\Delta x = 0$. Поэтому и вводилось естественное соглашение, что $\omega(\Delta x = 0) = 0$.

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает, что в предположениях этой теоремы дифференциал функции y аргумента t

имеет вид $dy = f'_x(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \cdot dt$, т.е. дифференциал функции снова оказался равен производной этой функции (по переменной t), умноженной на дифференциал аргумента dt . Это свойство дифференциала сложной функции называется инвариантностью формы первого дифференциала: форма первого дифференциала одинакова для случаев, когда x – зависимая переменная, и когда x – независимая переменная. Дифференциалы порядков выше первого этим свойством, вообще говоря, не обладают.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство этой теоремы получим немедленно из определения дифференцируемости функции f , если устремим Δx к нулю. \square

Пример. $y = f(x) = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. В самом деле: $f'(0-) = -1 \neq +1 = f'(0+)$. Во всех остальных точках функция дифференцируема.

Пример.

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{рациональное число;} \\ x^2, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема только в одной точке $x_0 = 0$. $f'(0) = 0$. Во всех остальных точках функция разрывна.

Пример. $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Эта функция не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$, хотя её график имеет в точке $x_0 = 0$ (вертикальную) касательную.

Пример всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции. Положим $f_1(x) = |x|$ при $|x| \leq \frac{1}{2}$ и продолжим эту функцию периодически с периодом 1. Далее, для $n > 1$ положим $f_n(x) = 4^{1-n} \cdot f_1(4^{n-1} \cdot x)$. При каждом натуральном n получим периодическую функцию f_n с периодом 4^{1-n} и

максимальным значением $\frac{1}{2} \cdot 4^{1-n}$. Наконец, определим для любого действительного x

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

так как $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{1-n}$, то по признаку Вейерштрасса определяющий функцию f ряд сходится равномерно на всей числовой оси, и функция f всюду непрерывна. Докажем, что f нигде не дифференцируема. Пусть x_0 – произвольное действительное число. Выберем при каждом натуральном n число h_n , равное либо 4^{-n} , либо -4^{-n} , из условия $|f_n(x_0 + h_n) - f_n(x_0)| = |h_n|$. Тогда величина $|f_m(x_0 + h_n) - f_m(x_0)|$ имеет одинаковое значение $|h_n|$ при всех $m \leq n$ и равна нулю при $m > n$.

Поэтому разностное отношение $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ является целым числом,

чётным при чётном n и нечётным при нечётном n . Следовательно, предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ не существует.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то на этом множестве получаем новую функцию $y = f'(x)$. И тогда имеет смысл, например, вопрос о непрерывности функции f' .

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что f' непрерывна в любой точке $x \neq 0$, но при $x = 0$ не имеет ни правого, ни левого предельного значения. То есть, f' имеет при $x = 0$ разрыв 2-го рода.

Теорема. Если функция f имеет конечную производную всюду на некотором интервале, то эта производная не может иметь на указанном интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва 1-го рода.

2. Пусть теперь $y = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ – действительная функция n независимых действительных переменных. Обозначим через $\rho(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ расстояние между двумя точками \bar{x}^1 и \bar{x}^2 в n -мерного арифметического пространства. Зафиксируем точку $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ из области определения f и дадим аргументу функции f приращение $\Delta\bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, которое не выводит из области определения f .

$$\rho(\bar{x}^0, \bar{x}^0 + \Delta\bar{x}) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}.$$

Определение. Функция f называется дифференцируемой в точке \bar{x}^0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки, а приращение Δy этой функции, отвечающее приращению аргумента $\Delta\bar{x}$, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + \omega(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \quad \text{где}$$

A_1, \dots, A_n – не зависящие от $\Delta\bar{x}$ конечные числа, а $\omega(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = o(\rho(\bar{x}^0, \bar{x}^0 + \Delta\bar{x}))$ при $\rho(\bar{x}^0, \bar{x}^0 + \Delta\bar{x}) \rightarrow 0$.

Дифференцируемость функции в точке \bar{x}^0 означает, что у её приращения в этой точке существует главная при $\Delta\bar{x} \rightarrow 0$ линейная относительно $\Delta\bar{x}$ часть $A_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n$, а дополнительный член ω является при $\Delta\bar{x} \rightarrow 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\bar{x}$. Выражение $A_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n$ называется дифференциалом dy . Если все $A_i = 0$, то полагают $dy = 0$.

Если зафиксировать значения всех аргументов функции f , кроме k -го, то вместо функции $f(\bar{x})$ в переменных получим функцию одной переменной x_k . Пусть \bar{x}^0 – внутренняя точка об-

ласти определения функции $f(\vec{x})$ и
 $\Delta_k y = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)$
– приращение функции f , отвечающее приращению только k -ой переменной. Если существует предел $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k y}{\Delta x_k}$, то он называется частной производной $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ функции $y = f(\vec{x})$ в точке \vec{x}^0 по переменной x_k .

Теорема. Если функция $y = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке \vec{x}^0 , то она непрерывна в \vec{x}^0 , и в этой точке существуют конечные частные производные по каждой переменной x_k , а дифференциал функции f в точке \vec{x}^0 имеет вид $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot dx_n$, где все частные производные вычислены в точке \vec{x}^0 , а dx_1, \dots, dx_n – дифференциалы независимых переменных.

Существование конечных частных производных, вообще говоря, не влечёт дифференцируемости функции. Здесь нарушается аналогия с функциями одной переменной.

Пример.

$$y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 \neq 0; \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

В точке $(0,0)$ эта функция имеет равные нулю частные производные

$\frac{\partial y}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_2}$. Но в точке $(0,0)$ функция f разрывна: если точку \vec{x} устремить к началу координат вдоль прямой

$x_2 = c \cdot x_1$, $c = const \neq 0$, то вдоль этой прямой

$$f(x_1, x_2) = \frac{c}{1+c^2} \text{ не стремится к } f(0,0) = 0.$$

Теорема о достаточном условии дифференцируемости функции многих переменных. Если функция $y = f(\vec{x})$ в некоторой окрестности точки \vec{x}^0 имеет частные производные по каждой переменной x_k , причём все эти частные производные непрерывны в самой точке \vec{x}^0 , то функция f дифференцируема в точке \vec{x}^0 .

Доказательство следует из теоремы Лагранжа для приращений функции f отдельно вдоль каждого координатного направления и из непрерывности её частных производных в \vec{x}^0 . \square

Ещё одно нарушение аналогии с функциями одной переменной рассмотрим на примере функции двух переменных. Если функция $y = f(x_1, x_2)$ дифференцируема в каждой точке открытой области D , то в любой точке $\vec{x} = (x_1, x_2)$ этой области

$$dy = A_1(x_1, x_2) \cdot dx_1 + A_2(x_1, x_2) \cdot dx_2, \text{ где } A_1(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_1},$$

$A_2(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_2}$. Если при этом существуют непрерывные в D

частные производные $\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial A_2}{\partial x_1}$, то всюду в D $\frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$.

Это показывает, что не всякое выражение вида $A_1(x_1, x_2) \cdot dx_1 + A_2(x_1, x_2) \cdot dx_2$ с непрерывными в области D функциями A_1 и A_2 является в этой области полным дифференциалом некоторой функции. Указанное выражение будет дифференциалом некоторой функции $y = f(x_1, x_2)$ в том, и только в том случае, если криволинейный интеграл

$$\int_A A_1(x_1, x_2) dx_1 + A_2(x_1, x_2) dx_2$$
 по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , расположенной в области D , равен нулю.

Вопрос 3.

Определенный интеграл, его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

1. Пусть функция $f(x)$ одной действительной переменной определена на сегменте $[a, b]$. Разобьём этот сегмент на части, вставив между a и b конечное число точек разбиения $\{x_k\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. На каждом частичном сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k . Разбиение $\{x_k\}$ и выбранные точки $\{\xi_k\}$ определяют интегральную сумму $\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и обозначим через d длину наибольшего частичного сегмента в данном разбиении: $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$. Рассмотрим всевозможные разбиения $\{x_k\}$ сегмента $[a, b]$ и всевозможные способы выбора точек $\{\xi_k\}$. Тогда можно поставить вопрос о существовании предела интегральных сумм при $d \rightarrow 0$.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(x_k, \xi_k)$ при $d \rightarrow 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$, у которого $d < \delta(\varepsilon)$, и независимо от выбора точек $\{\xi_k\}$ выполняется неравенство $|I - \sigma| < \varepsilon$.

Если для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ существует конечный предел I её интегральных сумм, то она называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, а число I называется определённым интегралом Римана: $I = \int_a^b f(x) dx$.

Теорема. Если функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Доказательство. Предположим, что функция f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для любого разбиения $\{x_k\}$ найдется частичный сегмент этого разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена. За счёт выбора ξ_k на этом частичном сегменте можно сделать $f(\xi_k)$ сколь угодно большой. Поэтому интегральные суммы, отвечающие любому фиксированному $\{x_k\}$, не ограничены. Следовательно, для такой функции f не существует конечного предела её интегральных сумм. \square

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена всюду на сегменте $[0, 1]$, но не является интегрируемой на этом сегменте, так как она не ограничена. Если выбрать произвольное число $\alpha > 0$, $0 < \alpha < 1$, то на $[\alpha, 1]$ функция f интегрируема по Риману. Теперь можно найти

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 f(x) dx = -1;$$
 но найденный предел называется **несобственным** интегралом от функции f на $(0, 1]$. В собственном смысле функция f на $[0, 1]$ не интегрируема.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

На любом сегменте $[a, b]$ эта функция ограничена, но не интегрируема по Риману. В самом деле, если для некоторого разбиения $\{x_k\}$ все $\{\xi_k\}$ выбрать рациональными, то $\sigma(x_k, \xi_k) = b - a$. А если для того же разбиения $\{x_k\}$ все точки $\{\xi_k\}$ выбрать ирра-

циональными, то $\sigma(x_k, \xi_k) = 0$. Поэтому для указанной функции не существует предела интегральных сумм.

2. Чтобы найти необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции f на $[a, b]$, удобно наряду с интегральными суммами рассмотреть более простые верхние и нижние суммы. Если f ограничена на $[a, b]$, то она ограничена на любом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ любого разбиения $\{x_k\}$. Пусть $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$. $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$. Суммы

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \quad s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{называются соответственно}$$

верхней и нижней суммами Дарбу. Если на каждом частичном сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ функция f достигает своих точной верхней и точной нижней граней (например, если f непрерывна на $[a, b]$), то верхняя и нижняя суммы являются интегральными суммами – наибольшей и наименьшей из них для фиксированного разбиения $\{x_k\}$. В общем случае S и s не являются интегральными суммами, но они связаны с интегральными суммами простыми свойствами.

Свойства верхних и нижних сумм.

- Пусть S и s – верхняя и нижняя суммы, построенные для разбиения $\{x_k\}$. Тогда при любом выборе $\{\xi_k\}$ интегральная сумма $\sigma(x_k, \xi_k)$ удовлетворяет неравенству $s \leq \sigma \leq S$.
- Пусть $\{x_k\}$ – произвольное разбиение, а ε – произвольное положительное число. Тогда можно выбрать точки $\{\xi_k\}$ так, что интегральная сумма $\sigma(x_k, \xi_k)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$. Можно выбрать точки $\{\xi'_k\}$ так, что интегральная сумма $\sigma(x_k, \xi'_k)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq \sigma(x_k, \xi'_k) - s < \varepsilon$.

Свойства 1) и 2) означают, что $S = \sup_{\xi_k} \sigma(x_k, \xi_k)$,
 $s = \inf_{\xi_k} \sigma(x_k, \xi_k)$ для фиксированного разбиения $\{x_k\}$. Именно

так можно было бы определить величины S и s .

3). Если к точкам данного разбиения добавить новые точки (т.е. произвести измельчение разбиения), то от этого нижняя сумма может только увеличиться, а верхняя сумма – только уменьшиться.

Доказательство. Достаточно рассмотреть присоединение к точкам $\{x_k\}$ одной точки x' . Пусть она попадает между x_k и x_{k-1} : $x_{k-1} < x' < x_k$. Для нового разбиения отрезка $[a, b]$ построим верхнюю и нижнюю суммы S' и s' . В прежней сумме S частичному сегменту $[x_{k-1}, x_k]$ отвечало слагаемое $M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, а в сумме S' этому же частичному сегменту отвечают два слагаемых: $\bar{M}_k \cdot (x' - x_{k-1}) + \bar{\bar{M}}_k \cdot (x_k - x')$, где $\bar{M}_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x)$, $\bar{\bar{M}}_k = \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)$. Очевидно, что

$$\bar{M}_k \leq M_k \quad \text{и} \quad \bar{\bar{M}}_k \leq M_k. \quad \text{Поэтому}$$

$$\bar{M}_k \cdot (x' - x_{k-1}) + \bar{\bar{M}}_k \cdot (x_k - x') \leq M_k \cdot (x_k - x_{k-1}). \quad \text{Отсюда } S' \leq S. \quad \text{Аналогично доказывается неравенство } s' \geq s \text{ для нижних сумм. } \square$$

4). Для любых двух разбиений сегмента $[a, b]$ нижняя сумма одного из них не превосходит верхней суммы другого.

Доказательство. Пусть s_1 и S_1 – нижняя и верхняя суммы одного разбиения, а s_2 и S_2 – нижняя и верхняя суммы другого разбиения сегмента $[a, b]$. Рассмотрим объединение всех точек обоих разбиений. Это объединение является новым разбиением сегмента $[a, b]$. Построим для него нижнюю и верхнюю суммы s_3 и S_3 . Тогда по свойству 3) $s_1 \leq s_3$, $S_3 \leq S_1$ и $s_2 \leq s_3$, $S_3 \leq S_2$. Но $s_3 \leq S_3$. Поэтому $s_1 \leq S_2$ и $s_2 \leq S_1$. \square

Из свойства 4) вытекает, что множество всех верхних сумм, отвечающих всевозможным разбиениям $[a, b]$, ограничено снизу, а

множество всех нижних сумм ограничено сверху. Поэтому множество всех верхних сумм имеет точную нижнюю грань $I^* = \inf\{S\}$, а множество всех нижних сумм имеет точную верхнюю грань $I_* = \sup\{s\}$. I^* и I_* называются, соответственно, верхним и нижним интегралами Дарбу. Очевидно, для нижней и верхней сумм любого разбиения выполнено неравенство $s \leq I_* \leq I^* \leq S$.

5). Пусть $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ для фиксированного разбиения $\{x_k\}$ и s, S – его нижняя и верхняя суммы. Пусть к этому разбиению добавлено l новых точек, отличных от точек данного разбиения (т.е. произведено измельчение исходного разбиения), и s', S' – нижняя и верхняя суммы нового разбиения. Тогда $S - S' \leq (M - m) \cdot l \cdot d$, $s - s' \leq (M - m) \cdot l \cdot d$, где $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Пусть единственная новая точка x' разделяет частичный сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ на сегменты $[x_{k-1}, x']$ и $[x', x_k]$. Как и при доказательстве свойства 3), введём $\bar{M}_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x)$, $\overline{\bar{M}}_k = \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)$. Тогда $S - S' = M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) - \bar{M}_k \cdot (x' - x_{k-1}) - \overline{\bar{M}}_k \cdot (x_k - x') = (M_k - \bar{M}_k) \cdot (x' - x_{k-1}) + (M_k - \overline{\bar{M}}_k) \cdot (x_k - x')$. Из неравенств $m \leq \bar{M}_k \leq M_k \leq M$, $m \leq \overline{\bar{M}}_k \leq M_k \leq M$, $(x_k - x_{k-1}) \leq d$ получаем неравенство $S - S' \leq (M - m) \cdot d$. В случае $l > 1$ новыми точками будут разбиваться l частичных сегментов, длина каждого из которых не превосходит d . Поэтому в случае $l > 1$ будем иметь $S - S' \leq (M - m) \cdot l \cdot d$. Оценка разности $s' - s$ доказывается аналогично. \square

6). **Лемма Дарбу.** $\lim_{d \rightarrow 0} s = I_*$, $\lim_{d \rightarrow 0} S = I^*$.

Доказательство. Для случая $f(x) = \text{const}$ лемма очевидна. Будем считать, что $f(x) \neq \text{const}$, тогда

$\sup_{a \leq x \leq b} f(x) = M > m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Так как $I^* = \inf \{S\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента $[a, b]$, у которого верхняя сумма S_1 удовлетворяет неравенству $S_1 - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть у этого разбиения внутри сегмента $[a, b]$ лежит l точек. Выберем любое другое разбиение, максимальная длина d частичных сегментов которого удовлетворяет неравенству

$$d < \frac{\varepsilon}{2(M-m) \cdot l}$$

Пусть S_2 – верхняя сумма этого второго разбиения. Рассмотрим объединение всех точек первого и второго разбиений; они образуют теперь новое, третье, разбиение сегмента $[a, b]$ с отвечающей ему верхней суммой S_3 . Третье разбиение является измельчением как первого, так и второго разбиений. Поэтому по свойству 3) $I^* \leq S_3 \leq S_1$, а по свойству 5)

$$0 \leq S_2 - S_3 \leq (M-m) \cdot l \cdot d < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из первого двойного неравенства получаем неравенство $0 \leq S_3 - I^* \leq S_1 - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$; сложим

его со вторым двойным неравенством. Тогда $0 \leq S_2 - I^* < \varepsilon$.

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы указали такое

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)l},$$

что для произвольного разбиения (в наших рассуждениях оно было вторым), для которого $d < \delta(\varepsilon)$, его верхняя сумма отличается от I^* меньше, чем на ε . А это и значит, что $I^* = \lim_{d \rightarrow 0} S$. Для нижних сумм доказательство аналогично. \square

Теорема. Ограниченнная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте в том, и только в том случае, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения, удовлетворяющего условию $d < \delta(\varepsilon)$, независимо от выбора точек $\{\xi_k\}$ будет выполнено неравенство $|\sigma(x_k, \xi_k) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$, где $I = \int_a^b f(x) dx$. Выберем одно из таких разбиений $\{x_k\}$. По свойству 2) точки $\{\xi_k\}$ можно выбрать для этого разбиения так, что будет выполнено неравенство $S - \sigma(x_k, \xi_k) < \frac{\varepsilon}{4}$; и можно выбрать точки $\{\xi'_k\}$ так, что будет

выполнено неравенство $\sigma(x_k, \xi'_k) - s < \frac{\varepsilon}{4}$. Поскольку для вы-

бранного разбиения неравенство $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ выполняется при всех способах выбора точек $\{\xi_k\}$ или $\{\xi'_k\}$, то получаем

$$\begin{aligned} S - s &= (S - \sigma(x_k, \xi_k)) + (\sigma(x_k, \xi_k) - I) + (I - \sigma(x, \xi'_k)) + \\ &+ (\sigma(x, \xi'_k) - s) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Достаточность. Для любого разбиения $\{x_k\}$ справедливы неравенства $s \leq I_* \leq I^* \leq S$. А по условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение, для которого $S - s < \varepsilon$. Отсюда $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$, а в силу произвольности ε получаем $I^* = I_*$. Общее значение нижнего и верхнего интегралов Дарбу обозначим через I . По лемме Дарбу $\lim_{d \rightarrow 0} S = I = \lim_{d \rightarrow 0} s$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения, для которого $d < \delta(\varepsilon)$, будут выполнены неравенства $I - s < \frac{\varepsilon}{2}$ и $S - I < \frac{\varepsilon}{2}$. То есть, при $d < \delta(\varepsilon)$ выполнено $S - s < \varepsilon$, причём $s \leq I \leq S$. Но для любой интегральной суммы

$s \leq \sigma(x_k, \xi_k) \leq S$; поэтому $|\sigma(x_k, \xi_k) - I| \leq S - s$. Следовательно, если $d < \delta(\varepsilon)$, то $|\sigma(x_k, \xi_k) - I| < \varepsilon$. А это и означает, что I – предел интегральных сумм при $d \rightarrow 0$. \square

3. Теорема. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство следует из того, что непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности f на $[a, b]$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$ сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$, все длины которых $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < \delta(\varepsilon)$, колебание $(M_k - m_k)$ функции f на каждом частичном сегменте будет меньше, чем

$\frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому для любого такого разбиения

$$S - s = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема. Если функция f ограничена на $[a, b]$ и имеет на этом сегменте лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.

Теорема. Если функция f определена и монотонна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число;} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \\ & \text{где } m \text{ и } n \text{ – взаимно простые целые числа,} \\ & n > 0. \end{cases}$$

Эта функция нигде не монотонна, непрерывна во всех иррациональных точках и разрыва в во всех рациональных точках. Она интегри-

руема по Риману на любом сегменте $[a, b]$, и $\int_a^b f(x)dx = 0$. Интегрируемость данной функции можно доказать с помощью критерия интегрируемости ограниченной на сегменте функции, а равенство интеграла нулю следует из того, что $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} s = 0$.

4. Свойства определённого интеграла.

1). Если ограниченная функция f интегрируема на $[a, b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Так как для любых двух точек x' , x'' частичного сегмента разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ выполнено неравенство $|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(x')|$, то колебание функции $|f(x)|$ на $[x_{k-1}, x_k]$ не превосходит колебания функции $f(x)$ на этом же промежутке:

$$\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x)| - \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x)| \leq \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) - \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x).$$

Отсюда и из необходимого условия интегрируемости функции f следует интегрируемость функции $|f|$. \square

Замечание. Если $|f|$ – интегрируемая функция, то из этого ещё не следует, что f – интегрируемая функция. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число;} \\ -1, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

– не интегрируема ни на одном сегменте, но $|f| \equiv 1$ интегрируема.

2). Пусть f и g – интегрируемые на $[a, b]$ функции. Тогда любая их линейная комбинация $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ интегрируема, и произведение $f \cdot g$ интегрируемо.

Доказательство. Интегрируемость линейной комбинации следует из свойства линейности интегральных сумм. Докажем интегрируемость произведения. Так как f и g интегрируемы на сегменте, то они ограничены: $|f(x)| \leq A$, $|g(x)| \leq B$. Пусть x' и x'' — произвольные точки частичного сегмента разбиения $[x_{k-1}, x_k]$. Имеем тождество

$$\begin{aligned} f(x'')g(x'') - f(x')g(x') &= \\ &= (f(x'') - f(x'))g(x'') + (g(x'') - g(x'))f(x'). \end{aligned}$$

Отсюда $|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq B \cdot \omega_k(f) + A \cdot \omega_k(g)$, где $\omega_k(f)$, $\omega_k(g)$ — колебания функций f и g на $[x_{k-1}, x_k]$. Теперь из необходимого условия интегрируемости f и g следует интегрируемость функции $f \cdot g$. \square

3). Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом сегменте $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$. Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то она интегрируема и на $[a, b]$,

причём $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4). Если функция f интегрируема на $[a, b]$, $a < b$, и при всех x $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Если же при всех x $f(x) > 0$, то

$\int_a^b f(x)dx > 0$. Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, $a < b$, и при всех x $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (и

аналогично для случая строгого неравенства).

5). Пусть m и M – произвольная нижняя грань и произвольная верхняя грань ограниченной на $[a, b]$ функции f . Если f интегрируема на $[a, b]$, $a < b$, то $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$.

6). Пусть m и M – точные нижняя и верхняя грани ограниченной на $[a, b]$ функции f . Если f интегрируема на $[a, b]$, то на сегменте $[m, M]$ найдется такое число μ , что $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$.

7). Если функция $f(t)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ является непрерывной функцией от x на $[a, b]$.

Если функция $f(t)$ непрерывна в точке $t = x$, то в этой точке $F(x)$ имеет производную $F'(x) = f(x)$. Если функция $f(t)$ непрерывна на (a, b) , то на этом интервале она имеет первообразную;

одной из первообразных является функция $\int_c^x f(t) dt$, где c – любая фиксированная точка интервала (a, b) .

8). **Основная формула интегрального исчисления.** Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда любая её первообразная имеет вид $F(x) = \int_a^x f(t) dt + const$, а $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Основная формула интегрального исчисления сводит задачу вычисления определенного интеграла от непрерывной функции к задаче нахождения её первообразной.

Вопрос 4.

Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.

1. Пусть дана числовая последовательность $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Составим другую последовательность: $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности $\{S_n\}$.

Определение. Если сходится последовательность $\{S_n\}$, то говорят, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Предел последовательности $\{S_n\}$ называют суммой этого ряда, u_n – членами ряда, S_n – частичными суммами ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится.

Любую числовую последовательность $\{S_n\}$ можно рассматривать как последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, если положить $u_1 = S_1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$.

Очевидно, что отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость; сходимость или расходимость ряда определяется поведением его членов при $n \rightarrow \infty$. Если $c = \text{const} \neq 0$, $v_k = c \cdot u_k$, то ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится тогда, и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.

Теорема (критерий Коши). Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашёлся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N$ и для всех натуральных p выполнялось неравенство $|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$.

Из критерия Коши вытекает, что если ряд сходится, то $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ называется гармоническим. Хотя

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, гармонический ряд в силу критерия Коши расходится. В

самом деле, если выбрать $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $p = n$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \text{ для сколь угодно большого } n.$$

2. Для рядов с неотрицательными членами имеют место теоремы сравнения двух рядов. Эти теоремы позволяют получить конкретные признаки сходимости и расходимости при помощи сравнения заданного ряда с некоторым известным рядом, сходимость или расходимость которого уже доказана.

Очевидно, что для сходимости ряда с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.

Теорема сравнения. Пусть все члены рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ неотрицательны. Если для всех k , начиная с некоторого

номера, выполнено неравенство $u_k \leq v_k$, то из сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, а из расходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что неравенство $u_k \leq v_k$ выполнено для всех $k = 1, 2, \dots$. В противном случае можно отбросить конечное число членов рядов, которые не удовлетворяют этому неравенству. Это не повлияет на характер сходимости обоих рядов. Обозначим через U_n частичные

суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, а через V_n – частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Ясно, что $U_n \leq V_n$ для любого номера n . Поэтому из ограниченности последовательности $\{V_n\}$ следует ограниченность последовательности $\{U_n\}$, а из неограниченности последовательности $\{U_n\}$ следует неограниченность последовательности $\{V_n\}$. \square

Теорема сравнения в предельной форме. Пусть все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ неотрицательны, а все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ положительны. Если существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} = p > 0$, то ряды

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Для любого числа ε , $0 < \varepsilon < p$, при всех достаточно больших k выполнено неравенство $p - \varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < p + \varepsilon$, т.е. $(p - \varepsilon) \cdot v_k < u_k < (p + \varepsilon) \cdot v_k$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, то сходится и ряд с положительными членами

$\sum_{k=1}^{\infty} (p - \varepsilon) \cdot v_k$, а вместе с ним и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$. Если сходится ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (p + \varepsilon) \cdot v_k$, а следовательно, и ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. \square

Теорема. Пусть все члены рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ положи-

тельны. Если для всех k , начиная с некоторого номера, выполнено

неравенство $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ вытекает

сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, а из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ вытекает

расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что указанное в условии неравенство выполнено для всех номеров k . Перемножая почленно неравенства

$$\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{v_3}{v_2}, \quad \dots, \quad \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq \frac{v_k}{v_{k-1}},$$

получим $\frac{u_k}{u_1} \leq \frac{v_k}{v_1}$, т.е. при всех k выполнено неравенство

$u_k \leq \frac{u_1}{v_1} \cdot v_k$. Отсюда и следует утверждение теоремы. \square

Теорема (признак Даламбера). Пусть все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ положительны. Если для всех k , начиная с некоторого но-

мера, выполнено неравенство $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1$, то ряд сходится. Если

для всех k , начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$, то ряд расходится. Если существует предел

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $1 < q \leq +\infty$ ряд расходится.

Доказательство теоремы основано на сравнении данного ряда с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, $v_k = q^k$, т.е. с суммой всех членов геометрической прогрессии. Без ограничения общности можно считать, что указанные в условии теоремы неравенства выполнены для всех номеров k . Если для всех номеров k выполнено $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1$, то

это значит, что $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k} = q$. При $0 < q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ является суммой всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и из сходимости этого ряда вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Если для всех k выполнено $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$, то это значит, что

$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq \frac{v_{k+1}}{v_k} = q = 1$. Тогда расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ вытекает из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 1$. Если же существует предел

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ и $q < 1$, то для любого числа ε , $0 < \varepsilon < 1 - q$, при всех достаточно больших k выполнено $\frac{u_{k+1}}{u_k} < q + \varepsilon < 1$. И

тогда, по доказанному выше, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится. А если $q > 1$, то для любого ε , $0 < \varepsilon < q - 1$, при всех достаточно больших k

выполнено $\frac{u_{k+1}}{u_k} > q - \varepsilon > 1$. И тогда $u_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;

следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится. \square

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится

при $\alpha \leq 1$. Но доказать это с помощью признака Даламбера невоз-

можно, так как в обоих случаях $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$.

Замечание. Вместо геометрической прогрессии можно в качестве ряда сравнения взять более сложный ряд с положительными членами. Тогда можно получить более сложный признак, чем признак Даламбера, который будет давать ответ на вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k > 0$, даже в некоторых

ситуациях, когда признак Даламбера не позволяет сделать этого. Но невозможно построить универсальный признак сравнения, устанавливающий сходимость или расходимость любого ряда с положительными членами.

Теорема (интегральный признак). Пусть при $x \geq 1$ функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с несобственным

интегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Пусть k – любой номер, $k > 1$. Из монотонности функции f при любом x , $k-1 \leq x \leq k$, имеем неравенство $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$. На сегменте $[k-1, k]$ функция f ограничена и монотонна, поэтому она интегрируема на этом сегменте. Имеем неравенства

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(x)dx \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1)dx = f(k-1) \quad \text{при}$$

всех $k > 1$. Сложим все такие неравенства для $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \quad \text{Числовая последовательность}$$

$a_n = \int_1^n f(x)dx$ является неубывающей в силу неотрицательности f .

Для сходимости при $n \rightarrow +\infty$ последовательности $\{a_n\}$ необходима и достаточна её ограниченность. А для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$
 с неотрицательными членами необходима и достаточна

ограниченность его частичных сумм. Поэтому полученное неравенство означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновре-

менно с последовательностью $\{a_n\}$. Но для монотонной неотрица-

тельной функции f сходимость или расходимость последовательности $\{a_n\}$ означает, соответственно, сходимость или расходимость

интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. \square

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$. При $\alpha > 1$ этот ряд сходится, так как

сходится $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. А при $\alpha \leq 1$ ряд расходится, так как расходится указанный интеграл.

3. Если члены сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ являются числами произвольных знаков, то имеются следующие две возможности.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Определение. Сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.

Из критерия Коши следует, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. В самом деле:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится условно. Действительно, гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится (например, по интегральному признаку), а исходный знакочередующийся ряд сходится (по признаку Лейбница).

Абсолютная или условная сходимость ряда связаны с возможностью или невозможностью переставить его члены без изменения характера сходимости. Ясно, что от перестановки конечного числа членов ряда его сходимость не может измениться и сумма ряда остаётся прежней. Если же переставить бесконечное число членов ряда, то для абсолютно сходящегося ряда характер сходимости не изменится, а для условно сходящегося — может измениться.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то и любой ряд, полученный из данного перестановкой его членов, сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Теорема. Если ряд сходится условно, то найдётся такая перестановка бесконечного числа его членов, что новый ряд будет

сходиться к произвольному наперёд взятому числу. Найдётся и такая перестановка его членов, что новый ряд будет расходящимся.

Абсолютная сходимость рядов важна и при вычислении произведения двух рядов. Именно: если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = U$,

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = V$, причём оба ряда сходятся абсолютно, то и ряд из всех

произведений $u_k \cdot v_l$ ($k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots$), составленный в каком угодно порядке, сходится абсолютно, и его сумма равна $U \cdot V$. Для условно сходящихся рядов это утверждение, вообще говоря, не является верным.

Теорема (признак Лейбница). Пусть последовательность $\{u_k\}$ является невозрастающей и бесконечно малой. Тогда знакоче-

редующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k$ сходится.

Доказательство.

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ последовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает. С другой стороны,

$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ и того, что $u_{2n} \geq 0$, последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху числом u_1 . Следова-

тельно, $\{S_{2n}\}$ сходится к некоторому числу S . Но из того, что $S_{2n-1} = S_{2n} - u_{2n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 0$, вытекает сходимость последовательности $\{S_{2n-1}\}$ к тому же S . \square

Замечание. $\{S_{2n}\}$ сходится к S не убывая, а $\{S_{2n-1}\}$ сходится к S не возрастаю. $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$, причём для любого номера n $|S_n - S| \leq u_n$.

Вопрос 5.

**Функциональные ряды. Равномерная сходимость.
Признак Вейерштрасса. Непрерывность равномерно
сходящегося ряда непрерывных функций.**

1. Пусть на множестве X задана последовательность функций $\{u_n(x)\}$, имеющих одну и ту же область определения X . Составим по этой последовательности другую последовательность функций $\{S_n(x)\}$: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Зафиксируем точку $x_0 \in X$, тогда $\{S_n(x_0)\}$ является последовательностью частичных сумм числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что в точке x_0 сходится функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Множество всех точек $x \in X$, в которых сходится функциональный ряд, называется его областью сходимости. На области сходимости функционального ряда определена функция $S(x)$, являющаяся пределом при $n \rightarrow \infty$ последовательности $\{S_n(x)\}$ при каждом фиксированном x . $S(x)$ называется суммой функционального ряда: $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$. Изучение области сходимости функционального ряда – это изучение области сходимости функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$. С другой стороны, если задана некоторая последовательность функций $\{S_n(x)\}$, имеющих область определения X , то её можно рассматривать как последовательность частичных сумм функционального ряда $\sum_{k=1}^n u_k(x)$, где $u_1 = S_1(x)$, $u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x)$ при $k > 1$.

Следует помнить, что в зависимости от параметра x сходимость ряда $\sum_{k=1}^n u_k(x)$ в точке x может быть абсолютной или условной.

Чтобы отличить сходимость функционального ряда в каждой точке множества X от других видов сходимости функционального ряда на X , часто говорят о его поточечной сходимости.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in R$. Этот функциональный ряд сходится в каждой точке x множества $-1 \leq x < 1$. При $x = -1$ он сходится условно, а при $-1 < x < 1$ – абсолютно. В точке $x = 1$ он превращается в расходящийся гармонический ряд. При любом x , $|x| > 1$, ряд расходится, поскольку его общий член при таких x не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

2. Определение. Пусть последовательность функций $\{S_n(x)\}$ сходится в каждой точке множества X к $S(x)$ (т.е. поточечно сходится к $S(x)$ на X). Такая функциональная последовательность называется равномерно сходящейся к $S(x)$ на множестве X , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$.

Замечание. В сформулированном определении $N(\varepsilon)$ не зависит от x . Термин “раномерная сходимость” означает независимость выбора $N(\varepsilon)$ от точки x .

Определение. Пусть функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждой точке множества X к сумме $S(x)$ (т.е. поточечно сходится к $S(x)$ на X). Он называется равномерно сходящимся к $S(x)$ на X , если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X .

Теорема. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно

сходится к $S(x)$ на множестве X в том, и только в том случае,

если $\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство следует непосредственно из определения равномерной сходимости. \square

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$, $x \in R$. Областью сходимости

этого ряда является множество $-1 < x \leq 1$. В самом деле, частичные суммы ряда $S_n(x) = x^n - 1$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к функции

$S(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 < x < 1; \\ 0 & \text{при } x = 1 \end{cases}$ на указанном множестве.

$\sup_{-1 < x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$, поэтому на $-1 < x \leq 1$ ряд сходится не-равномерно. Но для любого числа δ , $0 < \delta < 1$, на множестве $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$ ряд сходится равномерно, так как

$$\sup_{-1+\delta \leq x \leq 1-\delta} |S_n(x) - S(x)| = (1 - \delta)^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости).

Чтобы функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился к

некоторой сумме на множестве X , необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашёлся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и для всех натуральных чисел p выпол-

нено неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$.

Доказательство.

Необходимость. Если функциональный ряд равномерно сходится на множестве X к некоторой сумме $S(x)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров

$n \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in X$. Тогда для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и для всех натуральных чисел p сразу для всех $x \in X$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |(S_{n+p}(x) - S(x)) - (S_n(x) - S(x))| \leq |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Из критерия Коши сходимости числового ряда вытекает, что в каждой точке $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится к некоторой сумме $S(x)$. Устремим p к бесконечности в неравенстве $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$. Тогда сразу для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = |S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon$ для всех n , начиная с $N(\varepsilon)$. \square

3. Теорема (признак Вейерштрасса). Пусть последовательность функций $\{u_k(x)\}$ определена на множестве X , и для всех номеров k на X выполнены неравенства $|u_k(x)| \leq c_k$. Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на множестве X .

Доказательство. По критерию Коши сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и для всех натуральных

чисел p выполнено неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$. Тогда в силу неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad \text{функциональный}$$

ряд равномерно сходится на множестве X по критерию Коши равномерной сходимости. \square

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $-1 \leq x < 1$. $\sup_{-1 \leq x < 1} \left| \frac{x^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$. Хотя по-

следовательность функций $\left\{ \frac{x^k}{k} \right\}$ равномерно стремится к нулю

на множестве $-1 \leq x < 1$, функциональный ряд на этом множестве сходится неравномерно.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. По признаку Дирихле на данном множестве ряд сходится равномерно. Однако

$\sup_{\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}} \left| \frac{\sin kx}{k} \right| = \frac{1}{k}$, поэтому указанный функциональный ряд нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом. Признак Вейерштрасса является только достаточным условием равномерной сходимости, но не является необходимым условием.

4. Теорема. Пусть на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$. Если для любого номера k в точке a существует $\lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = b_k$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} S(x)$, причём $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Точка a является предельной точкой множества X , т.е. в любой окрестности этой точки содержатся отличные от неё точки множества X . По критерию Коши равномер-

ной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и для всех натуральных чисел p выполнено неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$. Устремим в этом неравен-

стве $x \rightarrow a$, тогда при всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполнено $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| \leq \varepsilon$.

По критерию Коши сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ этот ряд сходится.

Из

тождества

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \quad \text{имеем}$$

неравенство

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right|.$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и сходимости чи-

слового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ для произвольного числа $\varepsilon > 0$ при всех дос-

таточно больших номерах n выполнены неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad \text{В силу существования пределов}$$

$\lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ и конечного фиксированного номера

n можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $x \in X$, расстояние $\rho(x, a)$ которых до точки a удовлетворяет условию $0 < \rho(x, a) < \delta(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для таких точек x получим неравенство $\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon$. \square

Теорема. Пусть все функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, непрерывны на множестве X . Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на X , то $S(x)$ непрерывна на множестве X .

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{(1+|x|)^k}$ сходится на всей действительной прямой $-\infty < x < +\infty$: если $x = 0$, то все члены ряда равны нулю; если $x \neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^k} = \frac{1}{|x|}$, т.е. исходный ряд сходится к 1. Ни на одном отрезке, содержащем точку $x = 0$, исходный ряд не сходится равномерно, поскольку все его члены непрерывны, а сумма разрывна.

Теорема. Пусть все функции одной действительной переменной $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, интегрируемы на сегменте $[a, b]$.

Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на $[a, b]$, то $S(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx.$$

Теорема. Пусть все функции одной действительной переменной $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, имеют производные $u'_k(x)$ на сегменте $[a, b]$. Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ равномерно

сходится на $[a, b]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке этого сегмента, то на $[a, b]$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно к сумме $S(x)$, которая имеет производную $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

Замечание. Теоремы о почленном предельном переходе, о почленном интегрировании и о почленном дифференцировании функционального ряда являются лишь достаточными условиями для выполнения указанных операций.

Вопрос 6.

Криволинейный интеграл, формула Грина.

1. Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на множестве $\alpha \leq t \leq \beta$. Множество всех точек на плоскости Oxy , координаты которых заданы указанными равенствами, называется простой плоской кривой, если различным значениям параметра t отвечают различные точки этого множества. При этом говорят, что кривая задана параметрически указанными равенствами. Для одной и той же кривой можно указать разные способы её параметризации. Две простые кривые, у которых совпадают только граничные точки, образуют простую замкнутую кривую.

Пусть функции одной действительной переменной $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на множестве T . Если множество T можно разбить на сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ без внутренних точек их пересечения, на каждом из которых параметрические уравнения задают простую кривую, то говорят, что на плоскости Oxy задана параметрическая кривая. Теперь кривая может иметь точки самопересечения и участки самоналегания. Однако, точки кривой с одинаковыми координатами x и y , отвечающие различным значениям параметра t , считаются разными точками кривой. Параметрически заданная кривая является объединением простых кривых, которые пробегаются точкой на плоскости, когда параметр t монотонно пробегает множество T . Аналогично вводится понятие пространственной кривой.

Рассмотрим случай, когда параметр t задан на сегменте $[\alpha, \beta]$. Пусть $\{t_k\}$ – произвольное разбиение этого сегмента: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждой точке t_k отвечает некоторая точка M_k на кривой. Соединим отрезками прямых каждую пару точек M_{k-1} и M_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда получим вписанную в кривую ломаную линию, длина которой равна

$$l(\{t_k\}) = \sum_{k=1}^n \left((\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если множество длин вписанных в кривую ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено, то кривая называется спрямляемой, а точная верхняя грань множества длин ломаных называется длиной дуги кривой. Длина дуги спрямляемой кривой не зависит от способа её параметризации.

Теорема. Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ задают параметрическую кривую на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$. Если они имеют на этом сегменте непрерывные производные, то кривая спрямляема, и длина её дуги равна

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

2. Предположим, что плоская параметрическая кривая L без точек самопересечения и участков самоналегания спрямляема, не замкнута и ограничена точками A и B :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta; \quad A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \\ B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta)).$$

Пусть на кривой L определены три непрерывные вдоль этой кривой функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Рассмотрим разбиение $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Каждой точке t_k на кривой L отвечает некоторая точка $M_k = M_k(x_k, y_k)$, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. На каждом частичном сегменте разбиения $[t_{k-1}, t_k]$ выберем произвольную точку τ_k , которой на кривой L отвечает точка $N_k = N_k(\xi_k, \eta_k)$, $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Составим интегральные суммы: $\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k$, где Δl_k – длина

дуги кривой (M_{k-1}, M_k) ; $\sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$,

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

Рассмотрим всевозможные разбиения $\{t_k\}$ и отвечающие им интегральные суммы σ_f , σ_P , σ_Q .

Определение. Если при $\max_k \Delta t_k \rightarrow 0$ существует конечный предел I_f интегральных сумм σ_f вне зависимости от выбора разбиений $\{t_k\}$ и точек τ_k , то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L : $I_f = \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$.

Определение. Если при $\max_k \Delta t_k \rightarrow 0$ существуют конечные пределы I_P , I_Q интегральных сумм σ_P , σ_Q вне зависимости от выбора разбиений $\{t_k\}$ и точек τ_k , то эти пределы называются криволинейными интегралами второго рода от функций P , Q по кривой L : $I_P = \int_{AB} P(x, y) dx$, $I_Q = \int_{AB} Q(x, y) dy$.

Сумму $\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$ обозначают через $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Замечание. Поскольку f , P , Q вдоль кривой L являются сложными функциями одной переменной t , данные определения фактически переносят определение интегрируемости по Риману на сегменте на случай функций, заданных вдоль кривой.

Если вдоль кривой L распределена масса с линейной плотностью $f(x, y)$ (т.е. масса малого участка кривой длины dl , содержащего точку (x, y) , равна $f(x, y) dl$), то $\int_{AB} f(x, y) dl$

определяет полную массу кривой L . Очевидно, что величина криволинейного интеграла первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается L .

Если материальная точка движется из A в B вдоль кривой L под действием силы $\vec{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, то

$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ определяет работу этой силы по

перемещению материальной точки. Очевидно, что при изменении направления движения по кривой L на противоположное криволинейный интеграл второго рода изменяет знак:

$$\int_{AB} P(x, y)dx = - \int_{BA} P(x, y)dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = - \int_{BA} Q(x, y)dy.$$

Совершенно аналогично определяются интегралы первого и второго рода вдоль пространственной кривой:

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl,$$
$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

3. Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, параметрически задающие кривую L , имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то L называется гладкой кривой. Особыми точками гладкой кривой называются точки, отвечающие тому значению параметра t , для которого $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$.

Теорема. Если L – гладкая кривая без особых точек, а функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вдоль L , то существуют криволинейные интегралы первого и второго рода $\int_{AB} f(x, y)dl$ и $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, а их вычисление может

быть сведено к вычислению определённых интегралов Римана на сегменте $[\alpha, \beta]$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \left(\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot dt,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y) dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot dt.$$

Доказательство. В предположениях теоремы интегралы по $[\alpha, \beta]$ в правых частях трёх формул существуют, так как подынтегральные выражения в них непрерывны по переменной t . Рассмотрим разбиение $\{t_k\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$ и составим интегральные суммы

$$\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k, \quad \sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k, \text{ где}$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt,$$

$$\Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi'(t) dt. \text{ Тогда}$$

$$\sigma_f = \sum_{k=1}^n f(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^n P(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt,$$

$$\sigma_Q = \sum_{k=1}^n Q(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi'(t) dt.$$

Пусть $I_f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$,

$$I_P = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \quad , \quad I_Q = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt .$$

Очевидно, что для разбиения $\{t_k\}$

$$I_f = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt .$$

$$I_P = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt .$$

$$I_Q = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Q(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt . \text{ Тогда}$$

$$\sigma_f - I_f =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(t_k), \psi(t_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt ,$$

$$\sigma_P - I_P = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P(\varphi(t_k), \psi(t_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt ,$$

$$\sigma_Q - I_Q = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [Q(\varphi(t_k), \psi(t_k)) - Q(\varphi(t), \psi(t))] \psi'(t) dt .$$

Докажем, что при $\max_k \Delta t_k \rightarrow 0$ стремится к нулю и $\max_k (t_k - t_{k-1})$. Действительно, так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и не обращаются в нуль одновременно, то

$$m = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} > 0$$

и

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Поэтому $t_k - t_{k-1} \leq \frac{\Delta l_k}{m}$. Следовательно, для любого числа

$\gamma > 0$ найдётся такое число $\delta(\gamma) > 0$, что из неравенства $\max_k \Delta l_k < \delta(\gamma)$ следует неравенство $\max_k (t_k - t_{k-1}) < \gamma$. Из непрерывности по t сложных функций $f(\varphi(t), \psi(t))$, $P(\varphi(t), \psi(t))$ и $Q(\varphi(t), \psi(t))$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\gamma(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\max_k (t_k - t_{k-1}) < \gamma(\varepsilon)$ будут следовать неравенства

$|f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{l}$, где l — длина кривой L ,

$$|P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{M_1(\beta - \alpha)},$$

где $M_1 = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi'(t)|$,

$$|Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - Q(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{M_2(\beta - \alpha)},$$

где $M_2 = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\psi'(t)|$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\gamma(\varepsilon)) > 0$, что эти неравенства для функций f, P, Q будут следовать из неравенства $\max_k \Delta l_k < \delta$.

Тогда при указанном условии на $\max_k \Delta l_k$ получим неравенства

$$|\sigma_f - I_f| \leq \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \Delta l_k = \varepsilon ,$$

$$|\sigma_P - I_P| \leq \frac{\varepsilon}{M_1(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{M_1(\beta-\alpha)} M_1 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon ,$$

$$|\sigma_Q - I_Q| \leq \frac{\varepsilon}{M_2(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\psi'(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{M_2(\beta-\alpha)} M_2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon . \square$$

Для криволинейных интегралов первого и второго рода выполняются свойства линейности и аддитивности; модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции; имеет место формула среднего значения.

В случае, если L – замкнутая кривая, под интегралом

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

понимают обычно интеграл,

соответствующий обходу контура L в положительном направлении (при котором область, лежащая внутри этого контура остаётся слева), т.е. против часовой стрелки для односвязной области.

4. Теорема. Пусть D – ограниченная область на плоскости Oxy с кусочно гладкой границей L . Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области \bar{D} и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D . Пусть существуют несобственные интегралы $\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dx dy$, $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$, $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$, $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy$. Тогда справедлива формула Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (1)$$

Замечание. Область D может быть многосвязной. Тогда интеграл по замкнутому контуру L понимается как сумма интегралов по всем связным компонентам границы области D , которые обходятся так, что D остается слева.

Замечание. Предполагается, что частные производные функций P и Q существуют и непрерывны лишь в открытой области D ; поэтому интегралы от них являются несобственными. Если частные производные функций P и Q непрерывны в замкнутой области \bar{D} , то интегралы от них собственные.

Доказательство формулы Грина проводится в несколько этапов. Сначала (1) доказывается только для класса простых областей D , которые характеризуются тем, что каждая прямая, параллельная любой координатной оси, пересекает границу L не более чем в двух точках. Затем (1) доказывается для более широкого класса областей D , которые могут быть разбиты на конечное число подобластей, причем каждая из этих подобластей в некоторой (своей) декартовой системе координат является простой. Этот шаг

основан на инвариантности интегралов $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ и

$\oint_L P dx + Q dy$: при переходе к новой декартовой системе координат

их значения не меняются. Наконец, произвольная ограниченная область D с кусочно гладкой границей аппроксимируется рассмотренными ранее областями и формула (1) доказывается в общем случае. \square

Формула Грина имеет простой гидродинамический смысл: поток жидкости через границу L области D , текущей по плоскости Oxy со скоростью $\vec{V} = (Q, -P)$, равен интегралу по области D от интенсивности распределенных в D источников и стоков (т.е. от дивергенции $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$). В этом смысле формула (1) подобна формуле Остроградского. Формула (1) является

также частным случаем формулы Стокса: циркуляция векторного поля $\vec{W} = (P, Q)$ по контуру L равна потоку векторного поля $\text{rot } \vec{W}$ через поверхность D .

5. Формула (1) сводит вычисление площади S области $D \subset Oxy$ к криволинейному интегралу. Для этого надо выбрать удовлетворяющие условиям применимости формулы Грина такие две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ в области D .

Тогда $S = \iint_D dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$.

Например, справедливы равенства

$$S = \oint_L xdy = -\oint_L ydx = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

Пример. Область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметрические уравнения эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (t – полярный угол на плоскости Oxy) позволяют

найти площадь области D : $S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt = \pi ab.$$

6. Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D плоскости Oxy . Тогда выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом заданной в D функции $u(x, y)$ в том, и только в том случае, если для любой замкнутой кусочно гладкой кривой L , расположенной в D , $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Или, что то же самое, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом функции

$u(x, y)$ в D в том, и только в том случае, если для любых двух точек A и B области D значение интеграла $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от кусочно гладкой кривой, соединяющей A и B и целиком лежащей в D .

В случае, когда функции P и Q непрерывно дифференцируемы, а область D является односвязной, формула Грина дает еще один критерий равенства $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$: всюду в D должно выполняться условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

7. В теории функций комплексной переменной принято отождествлять область $\Omega \subset Oxy$ с областью изменения комплексной переменной $z = x + iy$. Из формулы Грина вытекает **теорема Коши**:

Пусть $f(z)$ – однозначная аналитическая функция, заданная в односвязной области Ω . Тогда для любого замкнутого контура L , целиком лежащего в Ω , $\oint_L f(z)dz = 0$.

Доказательство. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$.
 $\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i \oint_L vdx + udy$. Если $f(z)$ является аналитической в области Ω функцией, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют в Ω непрерывные частные производные первого порядка, которые связаны условиями Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. По формуле (1) для ограниченной контуром L

области $D \subset \Omega$ $\oint_L u dx - v dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$ и

$$\oint_L v dx + u dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

8. Формула Грина (1) лежит в основе теории гармонических функций двух переменных. (Функция $u(x, y)$ действительных переменных x и y называется гармонической в области $D \subset Oxy$, если она определена и дважды непрерывно дифференцируема в D и удовлетворяет в D уравнению Лапласа $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$.)

Если записать формулу (1) в виде

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_L G dy - H dx = \\ &= \oint_L (G \cos(Ox, \vec{n}) + H \sin(Ox, \vec{n})) dl, \end{aligned}$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к кривой L , и положить $G = u \frac{\partial v}{\partial x}$,

$H = u \frac{\partial v}{\partial y}$, то получим первую формулу Грина

$$\iint_D u \cdot \Delta v dx dy = \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} dl - \iint_D (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) dx dy. \quad (2)$$

В частности, при $u(x, y) = 1$ в D имеем $\iint_D \Delta v dx dy = \oint_L \frac{\partial v}{\partial n} dl$.

Отсюда следует теорема Гаусса: для гармонической в области D функции $v(x, y)$ $\oint_L \frac{\partial v}{\partial n} dl = 0$.

Меняя ролями u и v в (2), немедленно получаем вторую формулу Грина

$$\iint_D (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl. \quad (3)$$

С помощью (3) нетрудно доказать третью или основную формулу Грина

$$C \cdot u(M_0) = \oint_L \left(u(M) \cdot \frac{\partial \ln r_{M_0 M}}{\partial n_M} - \ln r_{M_0 M} \cdot \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} \right) dl_M + \\ + \iint_D \Delta u(M) \cdot \ln r_{M_0 M} \cdot dS_M. \quad (4)$$

Здесь $r_{M_0 M}$ – расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$, а число

$$C = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит внутри } D, \\ \pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит на } L \text{ и} \\ & \text{является точкой гладкости } L, \\ 0, & \text{если } M_0 \text{ лежит вне } \bar{D}. \end{cases}$$

Из (4) вытекают важные следствия: внутри области гармоничности гармоническая функция $u(x, y)$ бесконечно дифференцируема, для неё имеют место теорема о среднем значении и принцип максимального значения.

Формулы Грина (2), (3), (4) играют важную роль в теории краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Формула (4) служит основой интегрального представления их решений через функцию Грина.

Вопрос 7.

Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана . Аналитическая функция.

1. Рассмотрим две комплексные плоскости Z и W . Пусть комплексные числа z и w заданы, например, в алгебраической форме: $z = x + iy$, $w = u + iv$. Это значит, что на обеих плоскостях введены декартовы системы координат Oxy и Ouv . Одну и ту же точку плоскости принято рассматривать двояко: как точку комплексной плоскости (геометрический образ комплексного числа) и как точку действительной плоскости, имеющую действительные координаты в заданной системе координат. Областью на комплексной плоскости называется связное открытое множество точек этой плоскости. Например, областями на плоскости Z являются открытый круг с центром в точке z_0 радиуса r $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ и вся комплексная плоскость Z . Часто рассматривают замыкание области D – замкнутую область \bar{D} . К комплексной плоскости Z часто добавляют воображаемое комплексное «число» $z = \infty$ и тогда говорят о расширенной комплексной плоскости (считается, что модуль этого «числа» равен $+\infty$, а аргумент его не определён). Комплекснозначная функция $w = f(z)$ комплексного переменного z – это однозначное отображение из плоскости Z в W . Такую функцию можно определить на произвольном множестве плоскости Z , но основной интерес представляет случай, когда областью определения функции f является некоторая область $D \subset Z$. Задать такую функцию можно, например, задавая две функции двух независимых действительных переменных: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Если каждым двум различным точкам z_1 и z_2 соответствуют разные образы $f(z_1)$ и $f(z_2)$, т.е. из условия $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$, то функция f называется однолистной. Для однолистного отображения $w = f(z)$ можно ввести однозначную обратную функцию $f^{-1}: W \rightarrow Z$.

Определение предела функции комплексного переменного и её непрерывности ничем не отличаются от случая функции действительного переменного.

2. **Определение.** Пусть функция $w = f(z)$ определена в области D и $z_0 \in D$. Если существует конечный предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел называется производной $f'(z_0)$ функции f в точке z_0 , а сама функция f – дифференцируемой в точке z_0 .

Замечание. Данное определение требует, чтобы предел разностного отношения существовал вне зависимости от способа стремления Δz к нулю. Например, для функции $w = f(z) = \bar{z} = x - iy$ ни в одной точке z_0 указанный предел не существует. Действительно, если положить $\Delta z = \Delta x$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = 1$, а если положить $\Delta z = i \cdot \Delta y$, то

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta y) - f(z_0)}{\Delta y} = -1.$$

Существование производной в точке z_0 означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$. То есть последнее неравенство выполнено для всех точек $z = z_0 + \Delta z$ из круга $\{z \mid |z - z_0| < \delta(\varepsilon)\}$.

Теорема. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ одного комплексного переменного $z = x + iy$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций двух действительных переменных $u(x, y)$ и

$v(x, y)$ по x и по y , причём имеют место соотношения Коши-Римана $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Доказательство. Из существования предела $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ следует существование пределов

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}$ и $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta y) - f(z_0)}{\Delta y}$. Эти пределы равны, соответственно, $f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $f'(z_0) = -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$. \square

Теорема. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) , а их частные производные связаны в этой точке условиями Коши-Римана. Тогда функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Доказательство. Дифференцируемость функций u и v действительных переменных x и y означает, что

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= \\ &= u_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + u_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= \\ &= v_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + v_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

при $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$. Тогда

$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] +$
 $+ i(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)) = (u_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x +$
 $+ u_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y) + i(v_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + v_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y) +$
 $+ (\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)) = u_x(x_0, y_0) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + iv_x(x_0, y_0) \cdot$
 $\cdot (\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta) = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$ при $\Delta z \rightarrow 0$, где комплексное число $A = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ не зависит от Δz .
 Это и доказывает, что в точке z_0 у функции f существует производная $f'(z_0) = A$. \square

Введём обозначения дифференциальных операций
 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Тогда приращение дифференцируемой функции f можно записать в виде
 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} \cdot \Delta z + \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{\Delta z} + (\alpha + i\beta)$, где
 $\alpha + i\beta = o(|\Delta z|)$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Выполнение условий Коши-Римана означает, что $\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} = 0$. Таким образом,

$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} \cdot \Delta z + o(\Delta z)$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом: $df = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} \cdot \Delta z$.

Условия Коши-Римана можно записать и в других формах, если на плоскостях Z и W вместо декартовых ввести другие системы координат. Например, если $w = f(z) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$ (на плоскости Z введена полярная система координат, а на плоскости W — декартова), то условия Коши-Римана имеют вид
 $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$. Если же

$w = f(z) = R(x, y) \cdot e^{i\Phi(x, y)}$ (на плоскости Z введена декартова система координат, а на плоскости W – полярная), то условия Коши-Римана имеют вид $\frac{\partial R}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = -R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

3. Определение. Однозначная функция $w = f(z)$, определённая в области $D \subset Z$, называется аналитической в D , если она дифференцируема в каждой точке области D .

Если в данном определении наряду с дифференцируемостью функции f в каждой точке области D потребовать непрерывности её производной в D , то получим тот же самый класс аналитических в D функций. Поэтому необходимым и достаточным условием аналитичности в D функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является существование в D непрерывных частных производных функций u и v , связанных условиями Коши-Римана.

Свойства аналитических функций.

- 1) Аналитическая в области D функция непрерывна в D .
 - 2) Сумма и произведение аналитических функций являются аналитическими функциями. Частное $\frac{f(z)}{g(z)}$ двух аналитических функций является аналитической функцией всюду, где $g(z) \neq 0$.
 - 3) Если $w = f(z)$ и $t = g(w)$ – аналитические функции, и если определена сложная функция $t = g(f(z))$, то она является аналитической функцией переменного z .
 - 4) Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D , и в окрестности точки $z_0 \in D$ $f'(z) \neq 0$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0) \in W$ определена обратная функция $z = g(w)$, являющаяся аналитической функцией переменного w . При этом
- $$f'(z_0) = \frac{1}{g'(w_0)}.$$
- 5) Действительная и мнимая части аналитической в области D функции комплексного переменного z являются гармоническими в D функциями двух действительных переменных.

6) Если $f(z)$ является аналитической функцией, а $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, то семейства кривых $u(x, y) = C = \text{const}$ и $v(x, y) = C = \text{const}$ на плоскости Oxy ортогональны.

4. Пусть $f(z)$ – комплекснозначная функция комплексного переменного z , $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = x + iy$. Интегралом по лежащей в области определения f кривой L называется

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L u(x, y) dy + v(x, y) dx.$$

Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ является в этой области однозначной аналитической функцией. Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L , лежащему в D , равен нулю: $\oint_L f(z) dz = 0$.

Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ непрерывна, а интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L , лежащему в D , равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области D .

Теорема. Пусть замкнутый контур L лежит в области аналитичности функции $f(z)$, а точка z_0 находится внутри L . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области \bar{D} . Тогда или $|f(z)| \equiv \text{const}$, или $\max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ достигается только на границе области.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в замкнутой области \bar{D} . Тогда во внутренних

точках области D существует производная любого порядка функции $f(z)$.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости Z . Если её модуль $|f(z)|$ равномерно ограничен, то $f(z) \equiv const$.

Теорема. Аналитическая внутри круга $\{z | |z - z_0| < r\}$ функция $f(z)$ однозначно представима в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Теорема. Пусть две функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в одной и той же области D . Если в D существует последовательность различных точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке $z_0 \in D$, в которых значения функций f и g совпадают, то $f(z) \equiv g(z)$ в D .

5. Ещё одно свойство аналитических функций связано с конформностью осуществляемых ими отображений. Если D – область на комплексной плоскости Z и $w = f(z)$ – аналитическая в D функция, то образ $f(D)$ области D также является областью. Предположим, что в точке $z_0 \in D$ $f'(z_0) \neq 0$. Тогда комплексное число $f'(z_0)$ можно представить в показательной форме:

$f'(z_0) = k \cdot e^{i\alpha}$. Рассмотрим две гладкие кривые L_1 и L_2 на плоскости Z , пересекающиеся в точке z_0 . Образы $f(L_1)$ и $f(L_2)$ этих кривых при отображении f являются гладкими кривыми на плоскости W , пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Оказывается, что углы пересечения кривых L_1 , L_2 и $f(L_1)$, $f(L_2)$ равны. Если на плоскостях Z и W выбрать декартовые системы координат Oxy и Ouv , $z = x + iy$, $w = u + iv$, то можно ввести угол φ между касательной к кривой L в точке z_0 и

положительным направлением оси x ; аналогично можно ввести угол Φ между касательной к кривой $f(L)$ в точке w_0 и положительным направлением оси u . Тогда $\alpha = \arg f'(z_0) = \Phi - \varphi$ вне зависимости от выбора кривой L , т.е. α является углом поворота в

точке z_0 . $k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ является коэффициентом рас-

тяжения в точке z_0 . Это значит, что для приращений Δz и Δw в точках z_0 и w_0 с точностью до величины порядка $O(|\Delta z|)$ при $\Delta z \rightarrow 0$ имеет место равенство $|\Delta w| = k \cdot |\Delta z|$ вне зависимости от выбора способа приращения Δz . Таким образом, в точке z_0 отображение $w = f(z)$ непрерывно и сохраняет в окрестности z_0 форму бесконечно малых фигур. Такое отображение называется конформным. Конформное отображение любую бесконечно малую фигуру переводит в подобную ей с коэффициентом подобия k , поворачивая эту фигуру целиком на угол α . Следует помнить, что описанное действие конформного отображения локально, оно относится только к окрестности фиксированной точки z_0 .

Определение. Взаимно однозначное непрерывное отображение f области $D \subset Z$ на область $f(D) \subset W$ называется конформным отображением, если во всех точках $z \in D$ оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Теорема. Однолистная аналитическая в области D функция $w = f(z)$ со всюду в D отличной от нуля производной, и только такая функция, осуществляет конформное отображение области $D \subset Z$ на область $f(D) \subset W$.

Вопрос 8.

Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости.

1. Пусть x – действительная переменная, x_0 – действительное число. Функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$, где коэффициенты a_k – действительные постоянные (они не зависят от x), называется степенным рядом.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$. Этот ряд сходится в единственной точке $x = x_0 = 0$.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. По признаку Даламбера ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ сходится при любом x , т.е. заданный степенной ряд сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ абсолютно сходится в каждой точке интервала $-1 < x < 1$ и расходится всюду вне этого интервала.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ сходится в каждой точке множества $-1 \leq x < 1$ и расходится всюду вне этого множества. На интервале $-1 < x < 1$ ряд сходится абсолютно, а в точке $x = -1$ – условно.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ абсолютно сходится в каждой точке сегмента $-1 \leq x \leq 1$ и расходится всюду вне этого сегмента.

Теорема. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ не ограничена, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ сходится только при $x = x_0$.

Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ ограничена, и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ ограничена, и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ абсолютно сходится при всех x .

Доказательство. Если последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ не ограничена, то при $x \neq x_0$ и последовательность $\{\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k}\}$ не ограничена. То есть некоторая её подпоследовательность $\{\sqrt[k_n]{|a_{k_n}| \cdot |x - x_0|^{k_n}}\}$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда для исходного степенного ряда не выполнено необходимое условие сходимости: при $x \neq x_0$ общий член ряда не стремится к нулю. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l > 0$. Если $|x - x_0| < \frac{1}{l}$, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|x - x_0| < \frac{1}{l + \varepsilon}$. Поскольку l – верхний предел последовательности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$, то для всех k , начиная с некоторого номера $K(\varepsilon)$, выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k|} < l + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для всех $k \geq K(\varepsilon)$ имеем $\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} < \frac{l + \varepsilon/2}{l + \varepsilon} < 1$, и при $|x - x_0| < \frac{1}{l}$ исходный степенной ряд абсолютно сходится по признаку Коши. Если же $|x - x_0| > \frac{1}{l}$, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенст-

во $|x - x_0| > \frac{1}{l - \varepsilon}$. Поскольку l – верхний предел последовательности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$, то найдётся подпоследовательность $\{\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}\}$, сходящаяся к l при $n \rightarrow \infty$. То есть, для всех k_n , начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполнено неравенство $l - \varepsilon < \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} < l + \varepsilon$. Но тогда для всех таких k_n выполнено неравенство $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}| \cdot |x - x_0|^{k_n}} > \frac{l - \varepsilon}{l - \varepsilon} = 1$, и при $|x - x_0| > \frac{1}{l}$ исходный степенной ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Пусть, наконец, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$. Тогда у последовательности $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ нет других предельных точек, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = 0$. Поэтому при $x \neq x_0$ для числа $\varepsilon = \frac{1}{2|x - x_0|} > 0$ найдётся такой номер $K(\varepsilon)$, что для всех номеров $k \geq K(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon$. Но тогда для всех таких k выполнено неравенство $\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} < \frac{1}{2} < 1$, и исходный степенной ряд абсолютно сходится по признаку Коши. А при $x = x_0$ все члены ряда при $k \geq 1$ равны нулю. \square

Таким образом, степенной ряд абсолютно сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $R = [\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}]^{-1}$, и расходится вне этого интервала. При этом возможны случаи $R = 0$ (тогда интервал сходимости вырождается в точку x_0) и $R = +\infty$. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. На границе интервала сходимости поведение степенного ряда может быть каким угодно.

2. Теорема. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$. Для любого числа r , $0 < r < R$, на сегменте $[x_0 - r, x_0 + r]$ степенной ряд сходится равномерно.

Теорема. Пусть радиус сходимости степенного ряда $R > 0$. На интервале сходимости сумма степенного ряда является непрерывной функцией.

Замечание. Последняя теорема ничего не говорит о поведении суммы степенного ряда на границе интервала сходимости. Можно сделать следующие уточнения. Если степенной ряд хотя бы условно сходится при $x = x_0 + R$, то для любого числа r , $0 < r < R$, он сходится равномерно на сегменте $[x_0 - r, x_0 + R]$. При этом сумма степенного ряда непрерывна слева при $x = x_0 + R$. Если же при $x = x_0 + R$ степенной ряд расходится, то на сегменте $[x_0, x_0 + R]$ сходимость ряда не может быть равномерной. Аналогичные утверждения справедливы, разумеется, и для точки $x = x_0 - R$.

Теорема. Пусть радиус сходимости степенного ряда $R > 0$. Если степенной ряд проинтегрировать почленно, то получим новый степенной ряд с тем же самым интервалом сходимости:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \text{const} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad \text{для}$$

точек x из интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Теорема. Пусть радиус сходимости степенного ряда $R > 0$. Если степенной ряд продифференцировать почленно, то получим новый степенной ряд с тем же самым интервалом сходимости:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x - x_0)^k \quad \text{для}$$

точек x из интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Итак, внутри интервала сходимости степенной ряд можно интегрировать и дифференцировать любое число раз. Отсюда, в ча-

стности, следует, что сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией на интервале его сходимости.

3. Если существует степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$, сходящийся на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ к функции $f(x)$, то говорят, что функция $f(x)$ разложена в степенной ряд на этом интервале. Очевидно, только бесконечно дифференцируемую функцию можно разложить в степенной ряд.

Теорема. Бесконечно дифференцируемая на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ функция $f(x)$ может быть разложена на этом интервале в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ единственным образом. Если это разложение имеет место, то коэффициенты разложения равны $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. (Степенной ряд с такими коэффициентами называется рядом Тейлора функции f .)

Замечание. Последняя теорема не утверждает, что любую бесконечно дифференцируемую функцию действительной переменной можно разложить в степенной ряд на любом заданном интервале. Например, функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ бесконечно дифференцируема на $-\infty < x < +\infty$. Но разложить её в степенной ряд по степеням переменной x можно только на интервале $-1 < x < 1$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k};$$
 вне этого интервала указанный ряд расходится. Однако ту же самую функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ можно разложить в степенной ряд по степеням переменной $(x - x_0)$, $x_0 \neq 0$, При этом снова получим некоторый конечный интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$.

Теорема. Чтобы бесконечно дифференцируемую на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ функцию $f(x)$ можно было разложить в ряд Тейлора на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $\rho_{k+1}(x)$ в формуле Тейлора для этой функции стремился к нулю при $k \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x из указанного интервала.

Пример. $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \rho_{k+1}(x)$,

где остаточный член в форме Лагранжа равен $\rho_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$. При любом фиксированном x , $-\infty < x < +\infty$, $\rho_{k+1}(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$ имеем разложение $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Пример.

$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \rho_{k+1}(x)$, где остаточный член $\rho_{k+1}(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ только для $-1 < x \leq 1$. Поэтому $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$ только для $-1 < x \leq 1$.

4. Пусть теперь z – комплексная переменная, z_0 – комплексное число, $\{a_k\}$ – последовательность комплексных чисел.

Теорема. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ сходится в

некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в открытом круге $\{z \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$. Для любого числа r , $0 < r < |z_1 - z_0|$, в замкнутом круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ этот ряд сходится равномерно.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ в точке

z , удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Обозначим че-

рез q отношение $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$; $q = q(z)$, $0 < q < 1$. Из сходимости

числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z_1 - z_0)^k$ следует, что его общий член

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для некоторого положи-

тельного числа M и для всех номеров k выполнены неравенства

$$|a_k \cdot (z_1 - z_0)^k| \leq M. \quad \text{Следовательно, для всех } k$$

$|a_k| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^k}$. Но тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [q(z)]^k. \quad \text{Из усло-}$$

вия $0 < q < 1$ теперь следует сходимость степенного ряда в вы-
бранной точке z . Если же точку z выбрать из условия

$$|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|, \quad \text{то}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{|z_1 - z_0|^k}, \quad \text{причём}$$

последняя оценка не зависит от z . Тогда по признаку Вейерштрас-
са степенной ряд сходится в круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ равномерно. \square

Из доказанной теоремы следует, что если степенной ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ расходится в точке z_1 , то он расходится всюду

на множестве $\{z \mid |z - z_0| > |z_1 - z_0|\}$. Поэтому, если степенной ряд

расходится в какой-либо точке, то расстояния от точки z_0 до всех
точек z , в которых он сходится, ограничены сверху. Пусть R –

точная верхняя грань таких расстояний. Если $R > 0$, то областью сходимости степенного ряда является круг $\{z \mid |z - z_0| < R\}$. Вне указанного круга ряд расходится, а на границе $|z - z_0| = R$ он может как сходиться, так и расходиться – в зависимости от точки z на этой границе.

Теорема. Для всякого степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$,

сходящегося не только в точке $z = z_0$, областью его сходимости является открытый круг $\{z \mid |z - z_0| < R\}$. Радиус этого круга равен

$R = \left[\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right]^{-1}$. Если $R > 0$, то для любого числа r ,

$0 < r < R$, в замкнутом круге $\{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ ряд сходится равномерно. В круге сходимости сумма степенного ряда является аналитической функцией. В круге сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, причём получающиеся при этом новые степенные ряды имеют тот же самый круг сходимости. Если $f(z)$ – сумма степенного ряда, то

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Теорема. Аналитическая в круге $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$. Это представление однозначно,

его коэффициенты равны $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

В отличие от случая бесконечно дифференцируемой функции действительной переменной теперь можно утверждать существование разложения аналитической в заданном круге функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора. Более того, на границе его круга сходимости найдётся особая точка аналитической функции $f(z)$.

Поэтому радиусом сходимости ряда Тейлора является расстояние от z_0 до ближайшей особой точки аналитической функции $f(z)$.

Пример. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Особыми точками этой функции являются $z = \pm i$. Разложение $f(z)$ по степеням переменной z имеет вид $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k}$. Последний ряд сходится в круге $\{z \mid |z| < 1\}$, на границе которого и лежат точки $z = \pm i$. Если в качестве z_0 выбрать произвольное действительное число, $z_0 = x_0$, то радиусом сходимости разложения $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - x_0)^k$ будет

$R = \sqrt{|x_0|^2 + |\pm i|^2} = \sqrt{x_0^2 + 1}$. Именно поэтому для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ действительной переменной x равенство $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ выполнено только в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, а не на всей действительной оси.

Вопрос 9.

Ряд Фурье по ортонормированной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.

1. Линейное пространство называется нормированным, если каждому его элементу f поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, называемое его нормой. Норма удовлетворяет аксиомам: $\|f\| \geq 0$, причём $\|f\| = 0$ только для $f = 0$; для любого числа α $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$; $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. В нормированном пространстве можно ввести сходимость последовательности его элементов $\{f_k\}$: говорят, что $\{f_k\}$ сходится к элементу f того же пространства, если числовая последовательность $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Например, элемент f называется суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, составленного из элементов f_k нормированного пространства, если последовательность частичных сумм этого ряда $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ сходится по норме к элементу f : $\|S_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Линейное пространство называется евклидовым, если любым двум его элементам f и g поставлено в соответствие число (f, g) , называемое их скалярным произведением. Скалярное произведение удовлетворяет аксиомам: $(f, g) = (g, f)$ (в таком виде аксиома должна выполняться в линейном пространстве над полем действительных чисел); $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$; для любого числа α $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$; $(f, f) > 0$ при $f \neq 0$, $(f, f) = 0$ только при $f = 0$. Скалярное произведение позволяет ввести евклидову норму: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Пример. Множество всех непрерывных на сегменте $a \leq x \leq b$ функций $f(x)$ образует линейное пространство. В нём можно ввести норму $\|f\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Сходимость по этой норме является равномерной сходимостью на сегменте $a \leq x \leq b$. В том же линейном пространстве можно ввести скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \quad \text{и евклидову норму}$$

$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$. Сходимость по этой евклидовой норме называется сходимостью в среднем квадратическом. Из неравенства

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

следует, что из сходимости последовательности функций $\{f_k\}$ по норме $\|\cdot\|_C$ вытекает сходимость той же последовательности по евклидовой норме $\|\cdot\|$. Но можно построить последовательность функций $\{f_k\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|$, но не сходится по норме $\|\cdot\|_C$. Более того, можно построить последовательность $\{f_k\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|$, но не сходится ни в одной точке сегмента $a \leq x \leq b$.

2. Пусть в бесконечномерном линейном нормированном пространстве фиксирован элемент f и некоторое множество M . Задача об отыскании $\inf_{g \in M} \|f - g\|$ называется задачей о наилучшем приближении элемента f элементами множества M . Эта задача имеет простое решение, если норма $\|\cdot\|$ евклидова, а элементами множества M являются всевозможные линейные комбинации элементов заданной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$.

Определение. Последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства называется ортонормированной системой, если

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Зафиксируем элемент f действительного евклидова пространства и ортонормированную систему его элементов $\{\psi_k\}$. Будем приближать f линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ первых n элементов этой системы по евклидовой норме. Поставим задачу о выборе наилучших коэффициентов c_k при фиксированном n .

Теорема. При фиксированном n $\min_{\{c_k\}} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|$ достигается при выборе коэффициентов $c_k = (f, \psi_k)$. (Числа (f, ψ_k) называются коэффициентами Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$.)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \psi_k) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n c_k^2 (\psi_k, \psi_k) = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - (f, \psi_k))^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n (c_k - (f, \psi_k))^2 \geq 0$, то для любых коэффициентов $\{c_k\}$ выполнено неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2,$$

а при выборе $c_k = (f, \psi_k)$, $k = 1, \dots, n$ оно превращается в равенство. \square

Теорема. Для любого элемента f евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2$ сходится, и выполнено неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2 \leq \|f\|^2$.

Доказательство.

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \cdot \psi_k \right\|^2 \geq 0$. Поэтому при любом n $\sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 \leq \|f\|^2$. Это значит, что последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2$ ограничена. Поэтому указанный ряд сходится, и выполнено неравенство Бесселя. \square

Неравенство Бесселя означает, что не любая последовательность чисел может являться последовательностью коэффициентов

Фурье некоторого элемента f . Например, числа $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ нельзя рассматривать как коэффициенты Фурье какого-либо элемента f : ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

3. Определение. Если $\{\psi_k\}$ – ортонормированная система, то рядом Фурье элемента f называется $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \cdot \psi_k$.

Рассмотрим вопрос о сходимости частичных сумм ряда Фурье к элементу f по евклидовой норме $\|\cdot\|$. Ответ на этот вопрос зависит от выбранной ортонормированной системы $\{\psi_k\}$.

Определение. Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f евклидова пространства можно с любой точностью приблизить по норме этого пространства линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ конечного числа элементов системы. (При этом число n зависит от выбранной точности приближения.)

Теорема. Для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого элемента f имеет место равенство Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2 = \|f\|^2$.

Доказательство. Из неравенства

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \psi_k)^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|^2$$

и из замкнутости системы $\{\psi_k\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$ и такие числа c_1, \dots, c_N , что будет выполнено неравенство $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N (f, \psi_k)^2 < \varepsilon$. Тем

более будет выполнено неравенство $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2 < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$. А это и значит, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k)^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. \square

Теорема. Для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого элемента f последовательность частичных сумм $\sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \cdot \psi_k$ ряда Фурье сходится по евклидовой норме к элементу f .

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n (\langle f, \psi_k \rangle) \cdot \psi_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (\langle f, \psi_k \rangle)^2 \right). \text{ Для замкнутой системы } \{\psi_k\} \text{ последний предел равен нулю. } \square$$

Определение. Если из условия ортогональности элемента f всем элементам ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ следует, что $f = 0$, то $\{\psi_k\}$ называется полной системой.

Очевидно, что если ортонормированная система замкнута, то она является полной. Это следует из равенства Парсеваля.

Теорема. Если в евклидовом пространстве для любой фундаментальной последовательности элементов найдётся элемент, к которому эта последовательность сходится (т.е. пространство полно), то любая полная ортонормированная система в нём является замкнутой.

Теорема. Если ортонормированная система является полной, и $f \neq g$, то ряды Фурье элементов f и g различны.

4. Замечание. Часто приходится рассматривать ортогональные, но не нормированные системы $\{\psi_k\}$. Коэффициентами Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\psi_k\}$ называются

числа $\frac{(\langle f, \psi_k \rangle)}{\|\psi_k\|^2}$. Если такая система замкнута, то выполнено равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\langle f, \psi_k \rangle)^2}{\|\psi_k\|^2}$.

Замечание. Равенство Парсеваля допускает обобщение: если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ замкнута, то для любых двух элементов f и g справедливо равенство $(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, \psi_k \rangle) \cdot (\langle g, \psi_k \rangle)$. Действительно, для замкнутой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ имеем равенства

$\|f+g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f+g, \psi_k)^2$, $\|f-g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f-g, \psi_k)^2$. Вычитая эти равенства, и учитывая, что $\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 = 4(f, g)$, а $(f+g, \psi_k)^2 - (f-g, \psi_k)^2 = 4(f, \psi_k) \cdot (g, \psi_k)$, получаем обобщенное равенство Парсеваля.

Пример. Элементами f пространства l_2 являются все числовые последовательности $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty$

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k \quad \text{Ортонормированная система } (1, 0, 0, \dots).$$

$(0, 1, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, \dots)$, ... является замкнутой в l_2 . Коэффициенты Фурье элемента f по этой системе равны f_k . Ортогональная система $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 2, 0, \dots)$, $(0, 0, 3, 0, \dots)$, ... не является нормированной. Система линейно независимых элементов $(1, 0, 0, \dots)$, $(1, 1, 0, \dots)$, $(1, 1, 1, 0, \dots)$, ... не является ортогональной, но её легко ортогонализовать.

Пример. В пространстве действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$, рассмотрим систему функций $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$. Эта система не является ортогональной в

$$\text{смысле скалярного произведения } (f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx, \text{ но она полна}$$

Действительно, пусть некоторая функция $f(x)$ из указанного пространства ортогональна всем функциям $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$: $\int_a^b f(x) \cdot x^k dx = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Тогда и для функции $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ имеем

$$\int_a^b F(x) \cdot x^k dx = \int_a^b F(x) \cdot d\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = 0 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, для которого всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. Для этого многочлена

$$\int_a^b F(x) \cdot P_n(x) dx = 0 \quad \text{Поэтому}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b F^2(x) dx &= \int_a^b F(x)(F(x) - P_n(x)) dx \leq \varepsilon \cdot \int_a^b |F(x)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b F^2(x) dx}, \text{ откуда } \int_a^b F^2(x) dx \leq (b-a) \cdot \varepsilon^2. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε это значит, что $F(x) = 0$, и, следовательно, $f(x) = 0$. То есть указанная система функций полна. Из доказанной полноты системы $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ следует полнота в том же пространстве любой системы многочленов степени k : $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. В частности, будет полной система многочленов, которые получаются из $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ с помощью ортогонализации.

Пример. Непрерывная на всей действительной прямой $-\infty < x < +\infty$ функция $f(x)$ называется почти периодической, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $I(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины $I(\varepsilon)$ лежит по крайней мере одно число τ , для которого $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x , $-\infty < x < +\infty$. Можно ввести скалярное произведение двух почти периодических функций по формуле $(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \cdot g(x) dx$. Оказывается,

в таком пространстве ни одна счётная система элементов не является полной: в нём имеется континuum попарно ортогональных векторов.

5. Важнейшей ортогональной системой функций, заданных на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$, является тригонометрическая система:

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots; \quad (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на указанном сегменте (хотя бы в несобственном смысле), то можно вычислить её коэффициенты Фурье $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx$,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx \text{ и}$$

составить последовательность частичных сумм ряда Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Обычно полагают, что $f(x)$ определена на всей числовой прямой и 2π – периодична (тогда надо требовать $f(-\pi) = f(\pi)$). Функцию $f(x)$ можно считать интегрируемой в собственном смысле по Риману на $-\pi \leq x \leq \pi$, кусочно непрерывной или даже непрерывной. Из теории рядов Фурье вытекает только лишь, что ряд Фурье такой функции сходится к ней в среднем квадратическом. Это ещё не означает, что он сходится в наперёд заданной точке, а тем более – равномерно. Поэтому нужны достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке и достаточные условия равномерной сходимости.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, если она непрерывна на нём всюду, кроме, быть может, конечного числа точек x_i , в которых она имеет разрыв первого рода, причём в каждой точке разрыва удовлетворяет условию $f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i - 0) + f(x_i + 0))$.

Теорема. В пространстве кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций тригонометрическая система замкнута.

Отсюда и следует, что тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной функции f сходится к ней в среднем квадратическом.

Поведение ряда Фурье функции f в некоторой фиксированной точке x_0 зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в сколь угодно малой окрестности точки x_0 . Если взять две функции, значения которых совпадают в произвольно малой окрестности точки x_0 , то как бы ни различались эти функции вне указанной окрестности, их тригонометрические ряды Фурье ведут себя в точке x_0 одинаково: либо оба сходятся к одной и той же сумме, либо оба расходятся. Следует подчеркнуть, что коэффициенты Фурье рассматриваемых двух функций могут быть совершенно различными, поскольку они определяются значениями этих функций во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$.

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Гельдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, если существует такое число $G = const$, что для всех достаточно малых чисел Δx выполнено неравенство $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \leq G \cdot |\Delta x|^\alpha$.

Например, если функция f имеет в точке x_0 конечную производную, то она удовлетворяет в этой точке условию Гельдера порядка $\alpha = 1$.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет конечной производной, но она удовлетворяет условию Гельдера порядка $\alpha = \frac{1}{2}$ в этой точке.

Теорема. Если функция f кусочно непрерывна и 2π -периодична, а в точке x_0 удовлетворяет условию Гельдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$.

Аналогичное утверждение справедливо даже если функция f имеет в точке x_0 разрыв первого рода, но удовлетворяет условию Гельдера в точке x_0 слева и справа. В этом случае её ряд Фурье сходится к значению $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$.

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет на сегменте $[-\pi, \pi]$ условию Гельдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, если существует такое число $G = const$, что

$$\sup_{|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]} |f(x_1) - f(x_2)| \leq G \cdot \delta^\alpha.$$

Например, если функция f имеет ограниченную на $[-\pi, \pi]$ производную, то она удовлетворяет на этом сегменте условию Гельдера порядка $\alpha = 1$.

Теорема. Если функция f удовлетворяет на сегменте $[-\pi, \pi]$ условию Гельдера порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, и $f(-\pi) = f(\pi)$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к этой функции равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Если функция f только лишь кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то на всём сегменте $[-\pi, \pi]$ она не может удовлетворять условию Гельдера из-за наличия точек разрыва. Но если сегмент $[-\pi, \pi]$ разбит точками разрыва функции f на конечное число сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых эта функция удовлетворяет условию Гельдера, то на любом сегменте $[a, b]$, лежащем внутри сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, ($x_{i-1} < a < b < x_i$) её тригонометрический ряд Фурье сходится к f равномерно.

В окрестности точки разрыва функции f имеется своеобразный «дефект» поведения частичных сумм ряда Фурье, называемый явлением Гиббса. Пусть, например, $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Для частичных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье функции f найдём два числа: $A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0^-}} S_n(x)$ и $B = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0^+}} S_n(x)$. Оказывается, что $A < f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) < B$. Геометрически это означает, что при $x \rightarrow x_0$ и $n \rightarrow \infty$ графики частичных сумм ряда Фурье приближаются не к ожидаемому вертикальному отрезку $[f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)]$, а к большему вертикальному отрезку $[A, B]$.

Вопрос 10.

Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости, основные задачи на прямую и плоскость.

1. Если на плоскости задана некоторая система координат, то координаты точек прямой на этой плоскости не могут быть произвольными, а должны удовлетворять определённым соотношениям. Некоторым соотношениям должны удовлетворять и координаты точек плоскости, если в пространстве задана какая-либо система координат. В качестве системы координат удобно выбрать декартову прямоугольную систему координат.

Теорема. Пусть на плоскости фиксирована декартова прямоугольная система координат Oxy . Если ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к прямой l этой плоскости, то все точки прямой l удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + C = 0$. Всякое такое уравнение определяет относительно фиксированной системы координат Oxy некоторую прямую линию ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Доказательство. Все векторы, лежащие в данной плоскости и перпендикулярные к прямой l , коллинеарны вектору \vec{n} . Фиксируем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямой l . Для всех точек $M(x, y)$, и только для них, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{n} будут перпендикулярны, т.е. скалярное произведение $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$. Это значит, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или $Ax + By + C = 0$, где $C = -(Ax_0 + By_0)$. Обратно, если хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля, то уравнение $Ax + By + C = 0$ имеет хотя бы одно решение $x_0 = -\frac{AC}{A^2 + B^2}$, $y_0 = -\frac{BC}{A^2 + B^2}$. Вычитая из равенства $Ax + By + C = 0$ равенство $Ax_0 + By_0 + C_0 = 0$, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, что означает перпендику-

лярность вектора $\vec{n} = (A, B)$ и любого вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, где $M_0 = M_0(x_0, y_0)$, а координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$. \square

Теорема. Пусть в пространстве фиксирована декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Если ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен к плоскости π , то все точки плоскости π удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + Cz + D = 0$. Всякое такое уравнение определяет относительно фиксированной системы координат $Oxyz$ некоторую плоскость $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, называется общим уравнением прямой линии на плоскости, а вектор $\vec{n} = (A, B)$ – нормальным вектором прямой. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется общим уравнением плоскости в пространстве, а вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальным вектором плоскости.

Сказанное означает, что кривая на плоскости является прямой линией тогда и только тогда, когда она является алгебраической кривой первого порядка. Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она является алгебраической поверхностью первого порядка. При этом выбор декартовых прямоугольных систем координат Oxy и $Oxyz$ не является существенным; можно выбрать произвольные аффинные системы координат.

Пусть L_k – линейное подпространство конечномерного линейного пространства L_m ($\dim L_k = k$, $\dim L_m = m$, $k \leq m$). Фиксируем в L_m произвольный вектор \vec{x}_0 . Множество всех векторов \vec{z} вида $\vec{z} = \vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in L_k$, называется плоскостью размерности k . Вектор \vec{x}_0 называется вектором сдвига, а подпространство L_k – направляющим подпространством. Любая плоскость порождается лишь одним направляющим подпространством, но вектор сдвига определяется плоскостью неоднозначно. Однако, если в линейном пространстве L_m введено скалярное произведение, то любая плоскость имеет единственный вектор сдвига, ортогональный к направляющему подпространству. В пространстве

L_m плоскость размерности $m-1$ называется гиперплоскостью. Все векторы \vec{z} фиксированной гиперплоскости удовлетворяют уравнению $(\vec{n}, \vec{z} - \vec{x}_0) = 0$, где \vec{x}_0 – некоторый вектор сдвига направляющего подпространства L_{m-1} , а \vec{n} – любой ненулевой вектор одномерного подпространства, ортогонального к L_{m-1} . Если положить $(\vec{n}, \vec{x}_0) = c$, то уравнение гиперплоскости будет иметь вид $(\vec{n}, \vec{z}) = c$. Именно такой вид имеют общие уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.

2. Уравнения прямой линии на плоскости или плоскости в пространстве можно записать и в другом виде. Пусть уравнение $Ax + By = C$ прямой l на плоскости является полным, т.е. все коэффициенты A, B, C отличны от нуля. Тогда это уравнение

можно переписать в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Такое уравнение называется **уравнением прямой в отрезках**. Числа a и b равны величинам отрезков, которые прямая линия отсекает на осях координат. Совершенно аналогично уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ задаёт в пространстве плоскость, которая пересекает все оси координат $Oxyz$.

Любой ненулевой вектор, параллельный прямой линии или принадлежащий ей, называется её направляющим вектором. Пусть прямая l на плоскости проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{q} = (m, n)$, лежащий в той же плоскости. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{q} коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$; – каноническое уравнение

прямой l на плоскости. Если известно, что прямая l проходит через две несовпадающие точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. То-

где получим уравнение прямой l на плоскости в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \text{ В каноническом уравнении прямой линии зна-}$$

менатели m, n могут оказаться равными нулю; тогда считают, что соответствующий числитель дроби обращается в нуль. Каноническое уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точ-

ки, можно записать в виде $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0$. Совер-

шенно аналогично можно задать в пространстве плоскость. Любой ненулевой вектор, параллельный плоскости или принадлежащий ей, называется её направляющим вектором. Пусть три различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат на одной прямой. Тогда векторы

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{M_0 M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \text{ не коллинеарны. Точка}$$

$M(x, y, z)$ будет лежать в одной плоскости с точками M_0, M_1, M_2 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0 M_1}$,

$$\overrightarrow{M_0 M_2} \text{ и } \overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \text{ компланарны, т.е.}$$

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0. \text{ Если имеются два направ-}$$

ляющих вектора плоскости $\vec{q}_1 = (m_1, n_1, k_1)$ и $\vec{q}_2 = (m_2, n_2, k_2)$, которые не коллинеарны, то проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскость задаётся уравнением

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0; \text{ -- каноническое уравнение}$$

плоскости.

Из канонического уравнения прямой на плоскости

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$
 можно получить её параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases},$$
 если в качестве параметра t выбрать каждое из указанных равных отношений.

Совершенно аналогично можно получить параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + um_1 + vn_2 \\ y = y_0 + un_1 + vn_2 \\ z = z_0 + uk_1 + vk_2 \end{cases},$$

где u и v – параметры. Если вектор $\overrightarrow{OM_0}$ обозначить через \vec{r}_0 , а вектор \overrightarrow{OM} – через \vec{r} , то параметрические уравнения плоскости означают, что $\vec{r} = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{q}_1 + v \cdot \vec{q}_2$.

3. Прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве, можно задать при помощи направляющего вектора $\vec{q} = (m, n, k)$ каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$
 или параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

Если две плоскости пересекаются, но не совпадают, то прямую их пересечения можно задать системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$
 в которой каждое уравнение задаёт

соответствующую плоскость. За направляющий вектор этой прямой можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ нормальных векторов плоскостей: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

В линейном пространстве L_m прямой линией является любая одномерная плоскость. Пусть $\vec{x}_0 = (x_1, \dots, x_m)$ – вектор сдвига, а $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ – ненулевой вектор одномерного направляющего подпространства. Тогда параметрическое векторное уравнение $\vec{z} = \vec{x}_0 + t\vec{q}$ задаёт прямую линию, проходящую через \vec{x}_0 и имеющую направляющий вектор \vec{q} . Если $\vec{x}_0 \neq \vec{y}_0$, то единственная прямая, проходящая через \vec{x}_0 и \vec{y}_0 , определяется уравнением $\vec{z} = \vec{x}_0 + t \cdot (\vec{y}_0 - \vec{x}_0)$. Прямую в L_m можно задать и как множество точек пересечения $m-1$ гиперплоскостей: если $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{m-1}$ – векторы, ортогональные к направляющим подпространствам $L_{m-1}^{(1)}, \dots, L_{m-1}^{(m-1)}$, то система

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_1, \vec{z}) = c_1 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

задаёт пересечение $m-1$ гиперплоскостей. Если это пересечение не пусто, т.е. система имеет хотя бы одно решение \vec{z}_0 , то указанное пересечение является плоскостью, которую можно задать системой

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_1, \vec{z} - \vec{z}_0) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

где вектор $\vec{z} - \vec{z}_0$ является произвольным вектором из

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{n}_{m-1}, \vec{z} - \vec{z}_0) = 0 \end{array} \right.$$

$\bigcap_{i=1}^{m-1} L_{m-1}^{(i)}$. Если векторы $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{m-1}$ линейно независимы, то размерность указанного пересечения равна 1, т.е. исходная система определяет прямую в L_m .

4. **Теорема.** Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая l задана каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$. Прямая l принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и $Am + Bn + Ck = 0$. Прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда $Am + Bn + Ck = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Прямая l перпендикулярна плоскости π тогда и только тогда, когда

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}$. Угол φ между прямой l и плоскостью π определяется из уравнения

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ.$$

5. Основные задачи на прямую и плоскость.

1) Найти уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ответ: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$.

2) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной данной прямой

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}.$$

Ответ: $m \cdot (x - x_0) + n \cdot (y - y_0) + k \cdot (z - z_0) = 0$.

3) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k} \text{ и через данную точку } M_0(x_0, y_0, z_0),$$

не лежащую на этой прямой.

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & k \end{pmatrix} = 0$.

4) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{k_1} \text{ и параллельной другой данной прямой}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{k_2} \text{ (две данные прямые не параллельны).}$$

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0.$

5) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум данным прямым $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{k_1}$, $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{k_2}$ (две данные прямые не параллельны).

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix} = 0.$

6) Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{k_1}$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (данная прямая и данная плоскость не перпендикулярны).

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ A & B & C \end{pmatrix} = 0.$

7) Найти уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (прямая M_0M_1 и данная плоскость не перпендикулярны).

Ответ: $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{pmatrix} = 0.$

Вопрос 11.

Алгебраические линии второго порядка, канонические уравнения, классификация.

1. Пусть Oxy – аффинная система координат на плоскости.

Алгебраическая линия второго порядка определяется уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – алгебраический многочлен второй степени от переменных x, y с вещественными коэффициентами:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Общее уравнение алгебраической линии второго порядка на плоскости имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется квадратичной частью уравнения, группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – линейной частью, a_{33} – свободным членом.

Компактная запись общего уравнения. Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей квадратичной части. В этих обозначениях уравнение (1) примет вид

$$X^T A X + 2b^T X + a_{33} = 0, \quad A = A^T, \quad A \neq 0. \quad (2)$$

Введём матрицу $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a_{33} \end{pmatrix}$. Числа $I_1 = \operatorname{tr} A$,

$I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$ называются инвариантами линии второго порядка, число $K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – полуинвариантом.

Преобразование общего вида.

Пусть исходная аффинная система координат Oxy соответствует началу O и базису $e = (e_1, e_2)$. Переход к новой системе координат $O'x'y'$ означает перенос начала координат в точку $O'(\alpha, \beta)$ и преобразование базиса $eQ = e'$ с матрицей перехода Q :

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \quad e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2, \quad Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \text{ При}$$

этом старые координаты $X = (x, y)^T$ связаны с новыми $X' = (x', y')^T$ формулами преобразования координат $X = a + X'$, $a = (\alpha, \beta)^T$ в случае переноса координат и $X = QX'$ в случае преобразования базиса. Исследуем особенности преобразования уравнения линии в каждом из этих случаев. Пусть линия в системе координат Oxy задана уравнением (2).

Теорема. При переходе к новому базису $e' = eQ$ общее уравнение (2) преобразуется в уравнение

$$X'^T A'X' + 2b'^T X' + a_{33} = 0, \quad (3)$$

где $A' = Q^T A Q$, $b' = Q^T b$. При этом знаки инвариантов I_2 , K_3 не изменяются. В случае, когда e и e' – ортонормированные базисы, инвариантны I_1 , I_2 , K_3 и полуинвариант K_2 не изменяются.

Доказательство. В уравнение (2) подставим $X = QX'$. Получим $(QX')^T A QX' + 2b^T QX' + a_{33} = 0$. Введём обозначения: $A' = Q^T A Q$, $b'^T = b^T Q$; тогда $X'^T A'X' + 2b'^T X' + a_{33} = 0$.

Докажем сначала, что знаки инвариантов I_2 , K_3 не изменяются. Для этого проделаем следующие вычисления:
 $A' = Q^T A Q$, $|A'| = |Q^T A Q| = |A| \cdot |Q|^2$. $I'_2 = |A'| = I_2 |Q|^2$,
 $|Q| \neq 0$, $\text{sign} I_2 = \text{sign} I'_2$. Таким образом, мы доказали, что знак инварианта I_2 не изменяется. Докажем теперь это для инварианта K_3 . Для этого введём матрицу $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{Q}^T = \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$|\tilde{Q}| = |\tilde{Q}^T| = |Q|$; тогда матрицу B' можно представить в виде
 $B' = \begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^T & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^T A Q & Q^T b \\ b^T Q & a_{33} \end{pmatrix} = \tilde{Q}^T B \tilde{Q}$. Поэтому
 $|B'| = |B| \cdot |\tilde{Q}|^2 = |B| \cdot |Q|^2$. Следовательно, $K'_3 = K_3 |Q|^2$,
 $\text{sign} K'_3 = \text{sign} K_3$.

Теперь рассмотрим случай, когда базисы e и e' ортонормированные, и докажем, что знаки инвариантов I_1 , I_2 , K_3 и полуинварианта K_2 не изменяются. Так как в этом случае матрица перехода Q будет ортогональной, то $Q^T = Q^{-1}$,
 $Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = I$. Матрица \tilde{Q} также будет ортогональной:
 $\tilde{Q}^T \tilde{Q} = \tilde{Q} \tilde{Q}^T = I$. Следовательно, $\tilde{Q}^T = \tilde{Q}^{-1}$, т.е. $A' = Q^{-1} A Q$. Тогда $B' = Q^{-1} B Q$, то есть матрицы A и A' , B и B' подобны. У подобных матриц следы и определители одинаковы. Так как $I_1 = \text{tr} A$, $I_2 = |A|$, $K_3 = |B|$, $K_2 = a_1 - I_2$, то теорема доказана. \square

Теорема. При переносе начала координат в точку $O' = (\alpha, \beta)$ общее уравнение (2) преобразуется в уравнение $X'^T A X' + 2b'^T X' + a'_{33} = 0$,

где $b' = b + Aa$, $a'_{33} = a^T Aa + 2b^T a + a_{33}$, $a = (\alpha, \beta)^T$. При этом инварианты I_1 , I_2 , K_3 не изменяются.

Доказательство. Выразим старые координаты через новые: $X = X' + a$; подставим X в уравнение (2), в результате получим $(X'^T + a^T)A(X' + a) + 2b^T(X' + a) + a_{33} = 0$ или, раскрывая скобки,

$$X'^T AX' + X'^T Aa + a^T AX' + a^T Aa + 2b^T X' + 2b^T a + a_{33} = 0 \quad (4)$$

Заметим, что произведение $X'^T Aa$ есть вещественное число, и его можно заменить результатом транспонирования:

$X'^T Aa = (X'^T Aa)^T = a^T A^T X' = (Aa)^T X'$. Так как $A = A^T$, то $a^T AX' = a^T A^T X' = (Aa)^T X'$. Подставляя это в уравнение (4), получим

$X'^T AX' + 2(Aa + b)^T X' + a^T Aa + 2b^T a + a_{33} = 0$. В новом уравнении квадратичная часть остаётся неизменной. Линейная часть определяется столбцом $b' = Aa + b$. Свободный член имеет вид $a'_{33} = a^T Aa + 2b^T a + a_{33}$. Таким образом, уравнение (2) преобразуется в уравнение (3). Неизменность I_1 , I_2 очевидна, так как квадратичная часть осталась неизменной. Докажем, что K_3 не изменяется.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} \\ a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12} & a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a'_{33} &= a_{33} + \alpha a_{13} + \beta a_{23} + \alpha(a_{13} + \alpha a_{11} + \beta a_{12}) + \\ &+ \beta(a_{23} + \alpha a_{12} + \beta a_{22}) \end{aligned}$$

Так как в матрице B' третья строка есть линейная комбинация первых двух строк, то $K'_3 = |B'| = |B| = K_3$. \square

Теорема. Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, переходом к другой прямоугольной декартовой системе координат приводится к одному из следующих типов уравнений:

- I. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0 = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$;
- II. $\lambda_2 Y^2 + 2b_0 X = 0$, где $\lambda_2 b_0 \neq 0$;
- III. $\lambda_2 Y^2 + c_0 = 0$, где $\lambda_2 \neq 0$.

Доказательство. Пусть Oxy – прямоугольная декартова система координат и линия задана уравнением (1).

Шаг 1 (преобразование базиса). Метод вращений.

Если $a_{12} \neq 0$, то поворотом осей можно привести квадратичную часть уравнения (1) к сумме квадратов. Действительно, поворот осей на угол φ приводит к новому базису $e' = eQ$ с ортогональной

матрицей перехода $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Согласно доказанной

выше теореме $A' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$,

и, следовательно, $a'_{12} = a_{12} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi$. Чтобы

получить $a'_{12} = 0$, надо сделать поворот на такой угол φ , что

$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. В результате этого поворота получим уравнение

$$a'_{11} X'^2 + a'_{22} Y'^2 + 2a'_{13} X' + 2a'_{23} Y' + a_{33} = 0.$$

Шаг 2 (перенос начала координат).

Дальнейшее упрощение основано на том, что если в уравнении содержится ненулевой квадрат какой-либо переменной, то переносом начала координат можно избавиться от этой переменной в первой степени. Действительно, если $a'_{11} \neq 0$, то

$$a'_{11}X'^2 + 2a'_{13}X' = a'_{11}\left(X'^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{11}}X'\right) = a'_{11}\left(X' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} =$$

$$= a'_{11}X''^2 - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}}. \text{ Если } a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \text{ то } X'' = X' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}},$$

$Y'' = Y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$. В этом случае получаем уравнение

$$a'_{11}X''^2 + a'_{22}Y''^2 + a'_{33} = 0, \quad a'_{11}a'_{22} \neq 0,$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}, \text{ т.е. уравнение первого типа.}$$

Пусть один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} равен нулю. Если $a'_{11} = 0, a'_{22} \neq 0$, то переносом начала координат получаем

$X'' = X', \quad Y'' = Y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$, и уравнение будет выглядеть так:

$$a'_{22}Y''^2 + 2a'_{13}X'' + a'_{33} = 0, \quad a'_{22} \neq 0, \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}. \text{ Это}$$

уравнение второго типа. Но если $a'_{13} = 0$, то получаем уравнение

третьего типа. Если же $a'_{13} \neq 0$, то $X''' = X'' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}}$, $Y''' = Y''$, и

уравнение будет иметь вид $a'_{22}Y'''^2 + 2a'_{13}X''' = 0, a'_{22}a'_{13} \neq 0$;

это уравнение второго типа. Случай $a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$ рассматривается аналогично.

Для уравнения первого типа $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$,

$I_2 \neq 0$,

Для уравнения второго типа $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$I_2 = 0, K_3 \neq 0,$$

Для уравнения третьего типа $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}$,

$$I_2 = 0, K_3 = 0.$$

Эти три случая взаимно исключают друг друга. Общее уравнение приводится только к одному из указанных типов. При этом $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $I_2 = \lambda_1 \lambda_2$, где λ_1, λ_2 являются корнями уравнения $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$. \square

2. Классификация линий второго порядка. Канонические уравнения.

Теорема. Общее уравнение (1) линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, определяет одну и только одну из девяти линий. Для каждой из них существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет канонический вид:

1. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$ эллипс;
2. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ мнимый эллипс;
3. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ пара мнимых пересекающихся прямых;
4. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ гипербола;
5. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ пара пересекающихся прямых;
6. $Y^2 = 2pX, \quad p > 0$ парабола;

7. $Y^2 = a^2$, $a \neq 0$ пара параллельных прямых;
 8. $Y^2 = -a^2$, $a \neq 0$ пара мнимых параллельных прямых;
 9. $Y^2 = 0$ пара совпадающих прямых;

Доказательство. Пусть общее уравнение (1) переходом к новой прямоугольной декартовой системе координат преобразовалось в приведённое уравнение. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $I_2 \neq 0$, то имеем уравнение первого типа:
 $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $I_2 = \lambda_1 \lambda_2$,
 $K_3 = \lambda_1 \lambda_2 a_0$. Тогда получаем случаи 1-5.

1. Если $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0 < 0$, т.е. $I_2 > 0$, $I_1 K_3 < 0$, то

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$
, $a \geq b > 0$ – эллипс; $a^2 = -\frac{a_0}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{a_0}{\lambda_2}$.
2. Если, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 a_0 > 0$, т.е. $I_2 > 0$, $I_1 K_3 > 0$, то

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$
 – мнимый эллипс. На плоскости нет точек, удовлетворяющих этому уравнению.
3. Если $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $a_0 = 0$, т.е. $I_2 > 0$, $K_3 = 0$, то

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$$
 – пара мнимых пересекающихся прямых. Только начало координат $X = Y = 0$ удовлетворяет этому уравнению.
4. Если $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $a_0 \neq 0$, т.е. $I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$, то

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$
 – гипербола.
5. Если $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $a_0 = 0$, т.е. $I_2 < 0$, $K_3 = 0$, то

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$
 – пара пересекающихся прямых.

6. Если $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, то $\lambda_2 Y^2 + 2b_0 X = 0$,
 $\lambda_2 b_0 \neq 0$, $I_1 = \lambda_2$, $I_2 = 0$, $K_3 = -\lambda_2 b_0^2 \neq 0$, $Y^2 = 2pX$,
 $p = -\frac{b_0}{\lambda_2}$, $p > 0$, – парабола.

Если же $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, то исходное уравнение преобразуется в уравнение $\lambda_2 Y^2 + c_0 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. При этом полуинвариант K_2 не изменяется при параллельном переносе.

7. Если $\lambda_2 c_0 < 0$, то $K_2 < 0$, $Y = \pm \frac{c_0}{\lambda_2}$ – пара параллельных прямых.

8. Если $\lambda_2 c_0 > 0$, то $K_2 > 0$, $Y^2 = -\frac{c_0}{\lambda_2}$. На плоскости нет точек, удовлетворяющих этому уравнению.

9. Если $c_0 = 0$, то $K_2 = 0$, $Y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых. \square

Замечание. В прямоугольной декартовой системе координат каноническое уравнение линии можно найти по инвариантам: из уравнения $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ находим λ_1 , λ_2 и, если $\lambda_1 \leq \lambda_2$, то полагаем $a_0 = \frac{K_3}{I_2}$, $b_0^2 = -\frac{K_3}{I_1}$, $c_0 = \frac{K_2}{I_1}$.

3. Примеры. Нарисуйте на плоскости Oxy линии, заданные следующими уравнениями.

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$$

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$$

Вопрос 12.

Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.

1. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены, x_i – неизвестные величины.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ называется решением системы, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет более одного решения.

Компактная запись. Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде $Ax = b$, где $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ – основная матрица системы, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^m$ – столбец свободных членов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – столбец неизвестных. То же самое можно записать в виде $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b$, где a_i – столбцы матрицы A , $i = 1, \dots, n$.

Эквивалентность систем. Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются

эквивалентными, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема. Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит её к эквивалентной системе.

Доказательство. Пусть $Q \in R^{m \times m}$, $|Q| \neq 0$. Рассматриваемые системы имеют вид

$Ax = b$ (1), $QAx = Qb$ (2). Если c – решение системы (1), то $Ac = b$. Следовательно, $QAc = Qb$, т.е. c – решение системы (2).

Если c – решение системы (2), то $QAc = Qb$, $Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb$. Следовательно, $Ac = b$. \square

2. Системы с квадратной невырожденной матрицей.

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.

Доказательство. $Ax = b$. Так как A – невырожденная матрица, то существует A^{-1} . Тогда $x = A^{-1}b$, т.е. решение системы существует. Допустим, есть другое решение y ; тогда $Ax = Ay$, $A^{-1}Ax = A^{-1}Ay$. Следовательно, $x = y$. \square

Правило Крамера.

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \hat{A}b; \quad x_i = \frac{A_{ii}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь \hat{A} – матрица, присоединённая к матрице A : \hat{A} составлена из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A и

транспонирована. $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$, где A_i получается из

матрицы A заменой её i -го столбца столбцом свободных членов.

3. Системы общего вида. Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$, $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$. Пусть $B = (A|b)$ – расширенная матрица этой системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы A равен рангу расширенной матрицы B .

Доказательство. Необходимость. $Ax = b$ совместна, следовательно, существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, что $b = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$. Это означает, что столбец b является линейной комбинацией столбцов a_1, a_2, \dots, a_n матрицы A . Поэтому $\text{rang}A = \text{rang}B$.

Достаточность. Пусть $\text{rang}A = \text{rang}B = r$. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\text{rang}B = r$, то он же будет базисным минором и матрицы B . Следовательно, последний столбец матрицы B будет линейной комбинацией столбцов матрицы A . Коэффициенты этой линейной комбинации являются решением системы $Ax = b$, т.е. система совместна. \square

Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r + a_{m(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

совместна и $\text{rang}A = \text{rang}B = r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в

левом верхнем углу: $M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$. Рассмотрим укороченную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема. Укороченная система (4) эквивалентна исходной системе (3).

Доказательство. Обе системы содержат одинаковое число неизвестных. Очевидно, что любое решение системы (3) является решением системы (4). Покажем, что верно и обратное. В расширенной матрице B системы (3) первые r строк являются базисными. Следовательно, все остальные строки согласно теореме о базисном миноре будут линейными комбинациями этих строк. Это означает, что каждое уравнение системы (3), начиная с $(r+1)$ -го, будет линейной комбинацией первых r уравнений этой системы. Следовательно, каждое решение первых r уравнений системы (3) обращает в тождество все последние уравнения этой системы. \square

Если $r = n$, то система имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей. Если $r < n$, то неизвестные x_1, x_2, \dots, x_r (коэффициенты при которых входят в базисный минор) назовём главными, а остальные x_{r+1}, \dots, x_n – свободными. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придав свободным неизвестным x_{r+1}, \dots, x_n произвольные значения c_{r+1}, \dots, c_n , получим систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_r

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}c_{r+1} - \dots - a_{1n}c_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}c_{r+1} - \dots - a_{rn}c_n \end{cases} \quad (5)$$

с квадратной невырожденной матрицей. Эта система имеет единственное решение c_1, c_2, \dots, c_r . Очевидно, совокупность (c_1, c_2, \dots, c_n) является решением системы (4).

Теорема. Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных, из системы (5) можно получить все решения системы (4).

Доказательство. Пусть $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ – произвольное решение (4). Покажем, что оно может быть получено указанным путём. Возьмем числа c_{r+1}, \dots, c_n в качестве значений свободных неизвестных x_{r+1}, \dots, x_n и будем вычислять значения главных неизвестных из системы (5). Так как $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ – решение системы (4), то (c_1, \dots, c_r) – решение системы (5). Так как система (5) имеет единственное решение, то в качестве решения можем получить только (c_1, \dots, c_r) . \square

Теорема. Система алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang } A = \text{rang } B = n$.

Доказательство. Теорема фактически содержится в описанном выше правиле получения решения системы. Если $\text{rang } A = \text{rang } B < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Тогда получим бесконечно много решений. \square

Общее решение. Решим систему (5) относительно главных неизвестных: $x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n)$, где f_1, \dots, f_r – однозначно определенные функции. Эти соотношения при произвольных x_{r+1}, \dots, x_n описывают множество всех решений системы (3) и называются общим решением системы (3).

Однородная система. Система уравнений $Ax = 0$ всегда совместна: она имеет тривиальное решение $x = 0$.

Теорема. Однородная система $Ax = 0$ с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang } A < n$.

Теорема. Однородная система $Ax = 0$ с квадратной матрицей A имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

3. Пример. Две системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 12 \end{cases}$$

эквивалентны. Обе они несовместны. Системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

эквивалентны, совместны, имеют единственное решение. Найдите это решение, а затем проверьте по правилу Крамера

Пример. Найдите ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Если найденные ранги совпадают, то найдите общее решение системы.

Пример. Найдите ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Если найденные ранги совпадают, то найдите общее решение системы. Является ли решение единственным?

Пример. Имеет ли система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

нетривиальные решения?

Вопрос 13.

Линейный оператор в конечномерном пространстве, его матрица. Норма линейного оператора.

1. Рассмотрим множество V элементов $x, y, z \dots$ и поле P действительных или комплексных чисел. Пусть в V введены две операции: сложение его элементов и умножение его элементов на числа из P . Это значит, что для любых $x, y \in V$ определён элемент $z = x + y \in V$, а для любых $x \in V, \lambda \in P$ определён элемент $y = \lambda \cdot x \in V$. Пусть введённые две операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
4. для любого $x \in V$ существует такой элемент $(-x) \in V$, что $x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x, 1 \in P$;
6. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \lambda \in P$;
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \lambda, \mu \in P$;
8. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Тогда V называется линейным пространством над полем P . Если P – поле действительных чисел, то V – действительное линейное пространство; если P – поле комплексных чисел, то V – комплексное линейное пространство. Максимальное число линейно независимых векторов пространства V называется его размерностью. Если размерность пространства V конечна, то оно называется конечномерным.

Пусть V и W – линейные пространства над общим полем P . Отображение $A : V \rightarrow W$ называется линейным отображением пространства V в пространство W , если для любых $x, y \in V$ и

любого числа $\alpha \in P$ выполняются равенства
 $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Линейное отображение называется также линейным оператором, действующим из пространства V в пространство W ; $A \in L(V, W)$.

Операторы A и B , действующие из V в W называются равными, если $Ax = Bx$ для любого $x \in V$.

Отображение $O: V \rightarrow W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $0 \in W$, является линейным и называется нулевым оператором.

Отображение $I: V \rightarrow V$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в x является линейным и называется тождественным оператором.

Свойства линейных операторов.

1. Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой.
2. Линейный оператор сохраняет линейную комбинацию:

$$A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i Ax_i.$$

3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость, т.е. линейно зависимую систему векторов переводит в линейно зависимую.

Задание линейного оператора. Для задания линейного оператора $A: V \rightarrow W$ достаточно определить его только на векторах e_1, e_2, \dots, e_n некоторого базиса пространства V . Зная Ae_i , $i = 1, 2, \dots, n$, можно однозначно найти образ любого вектора

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i : Ax = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in W.$$

Теорема. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис пространства V , а g_1, g_2, \dots, g_n – произвольные векторы пространства W . Тогда существует, и притом единственный, линейный оператор $A: V \rightarrow W$, который переводит векторы e_1, e_2, \dots, e_n в векторы g_1, g_2, \dots, g_n соответственно.

Доказательство. Построим искомый оператор по правилу: если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$, то $Ax = \sum_{i=1}^n x_i A e_i \in W$. Из единственности разложения вектора x по базису следует, что правило однозначно определяет образ вектора x ; при этом $A e_i = g_i$. Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор A единствен, так как если B – любой другой оператор, удовлетворяющий условию теоремы, то $Bx = \sum_{i=1}^n B(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i g_i = Ax$ для любого $x \in V$. \square

Следствие. Линейные операторы A и B , действующие из V в W , равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах базиса V .

2. Матрица линейного оператора. Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ – базисы конечномерных пространств V и W . Линейный оператор $A: V \rightarrow W$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . В свою очередь $Ae_i, i = 1, 2, \dots, n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f :

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m. \end{cases}$$

$A_{fe} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей оператора A в паре базисов e и f .

Из единственности разложения вектора по базису следует, что при фиксированных e и f матрица линейного оператора определена однозначно.

Теорема. Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами, действующими из V в W и матрицами $P^{m \times n}$.

Доказательство. Построим это соответствие. Зафиксируем базисы $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ пространств V и W . Поставим в соответствие каждому линейному оператору $A: V \rightarrow W$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f . Очевидно, что матрица $A_{fe} \in P^{m \times n}$ определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Отображение $y = F(x)$ называется биективным (взаимно однозначным), если оно инъективно, т.е. из $x_1 \neq x_2$ следует $F(x_1) \neq F(x_2)$, и сюръективно, т.е. для любого y уравнение $y = F(x)$ имеет хотя бы одно решение x . Рассматриваемое отображение операторов на матрицы сюръективно, так как любая матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m \times n}$ является матрицей линейного оператора, действующего из V в W и переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$. Рассматриваемое отображение инъективно, так как различные операторы, действующие из V в W , не совпадают на базисных векторах, а значит имеют разные матрицы. \square

Теорема. Если $y = Ax$, то $y_f = A_{fe}x_e$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, $A_{fe} = (a_{ij})$.

Утверждение $y_f = A_{fe}x_e$ равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = 1, \dots, m. \text{ Докажем их: } y = Ax =$$

$$= A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i. \square$$

Матрицы оператора в различных базисах. Пусть e и $t = eC$ – два базиса пространства V с матрицей перехода C , f

и $s = fD$ – два базиса пространства W с матрицей перехода D . Одному и тому же линейному оператору A , действующему из V в W , в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрица A_{st} .

Теорема. Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора A , действующего из V в W , в различных парах базисов связаны соотношением $A_{st} = D^{-1}A_{fe}C$.

Доказательство. Для любого $x \in V$ и $y = Ax$ имеем
 $y_f = A_{fe}x_e$, $y_s = A_{st}x_t$, $x_e = Cx_t$, $y_f = Dy_s$,
 $Dy_s = A_{fe}Cx_t$, $DA_{st}x_t = A_{fe}Cx_t$, $DA_{st} = A_{fe}C$,
 $A_{st} = D^{-1}A_{fe}C$. \square

Следствие 1. Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны.

Следствие 2. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

Теорема. Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора, действующего из V в W , где $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Доказательство. **Необходимость.**
 $A, B \in P^{m \times n}$, $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим произвольные линейные пространства V и W над полем P , $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V базис e , в W – базис f . В силу взаимно однозначного соответствия между матрицами $P^{m \times n}$ и операторами, действующими из V в W , существует единственный оператор A , действующий из V в W , который в паре базисов e и f имеет матрицу A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрицу A_{st} . Здесь $t = eC$, $s = fD$.

Достаточность уже была доказана выше. \square

3. Линейное пространство операторов. Суммой линейных операторов $A, B \in L(V, W)$ называется отображение C , действующее из V в W , по правилу $Cx = Ax + Bx$.

Произведением линейного оператора $A \in L(V, W)$ на число $\alpha \in P$ называется отображение C , действующее по правилу $Cx = (\alpha A)x = \alpha(Ax)$.

Теорема. Для любых операторов $A, B \in L(V, W)$ и числа $\alpha \in P$ $A + B \in L(V, W)$, $\alpha A \in L(V, W)$.

Доказательство. Для любых $x, y \in V$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} (A + B)(x + y) &= A(x + y) + B(x + y) = Ax + Ay + Bx + By = \\ &= (Ax + Bx) + (Ay + By) = (A + B)x + (A + B)y. \end{aligned}$$

Аналогично для αA . \square

4. Умножение линейных операторов. Пусть V, W, Z – линейные пространства над полем P . Произведением линейных операторов $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, Z)$ называется такой оператор $C \in L(V, Z)$, $C = BA$, что $Cx = (BA)x = B(Ax)$ для любого $x \in V$.

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, Z)$, то $BA \in L(V, Z)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (BA)(x + y) &= B(A(x + y)) = B(Ax + Ay) = B(Ax) + B(Ay) = \\ &= BAx + BAy. \end{aligned}$$

$$(BA)(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha Ax) = \alpha(B(Ax)) = \alpha(BAx). \quad \square$$

Свойства.

$$1. \quad (AB)C = A(BC).$$

$$2. \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$3. \quad (A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Теорема. При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы в V, W, Z , то $(BA)_{ge} = B_{gf} A_{fe}$.

Доказательство. $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{gf} = (b_{ij})$,

$$(BA)_{ge} = (c_{ij}), \quad \dim V = n, \quad \dim W = m, \quad \dim Z = k.$$

$$BAe_J = \sum_{i=1}^k c_i g_i = B(Ae_J) = B\left(\sum_{s=1}^m a_{sj} f_s\right) = \sum_{s=1}^m a_{sj} Bf_s = \\ = \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is} g_i = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^k a_{sj} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj} \right) g_i . \square$$

5. Образ и ядро линейного оператора. Образом оператора $A \in L(V, W)$ называется множество $imA = \{y \in W \mid \exists x \in V : y = Ax\}$, ядром — $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$.

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, то $\ker A$ — линейное подпространство пространства V , а imA — линейное подпространство пространства W . При этом $\text{rang } A = \dim imA$; $\text{def } A = \dim \ker A$.

Теорема. Если e_1, e_2, \dots, e_n — базис V , то $imA = L(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)$ — линейная оболочка, натянутая на образы базисных векторов.

Теорема. $\dim imA + \dim \ker A = \dim V$.

6. Норма линейного оператора.

Пусть V — линейное пространство над полем P . Нормой в линейном пространстве V называется отображение $\|\cdot\|: V \rightarrow R$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ действительное число $\|x\| \in R$ и удовлетворяющее аксиомам: для любых $x, y \in V$, $\alpha \in P$

- $\|x\| \geq 0$, причем норма равна нулю только если $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство V с заданной на нём нормой $\|\cdot\|$ называется линейным нормированным пространством. Число $\|x\|$ называется нормой вектора x .

Примеры.

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ называется расстоянием между x и y .

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пространстве V называются эквивалентными, если существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что для любого $x \in V$ $\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_2$, $\|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$.

Теорема. В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.

Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то $L(V, W)$ является линейным пространством размерности $n \cdot m$. В нём можно ввести норму (норму оператора $A \in L(V, W)$) произвольным образом. Но если в V и W введены нормы $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$, то операторная норма должна быть согласована с ними.

Согласованная норма оператора. Норма оператора $A \in L(V, W)$ называется согласованной с векторными нормами $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ пространств V, W , если для любого $x \in V$ $\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \|x\|_V$.

Теорема. Любое собственное значение оператора $A \in L(V, W)$ не превосходит по абсолютной величине любую его согласованную норму.

Доказательство.

$Ax = \lambda x$, $\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Так как для собственного вектора x $\|x\| > 0$, то $|\lambda| \leq \|A\|$. \square

7. Ограниченный оператор.

Оператор $A \in L(V, W)$ называется ограниченным, если единичный шар в V он переводит в ограниченное по норме пространства W множество, т.е. если существует число $C > 0$ такое,

что для всех векторов $x \in V$, для которых $\|x\| \leq 1$, выполняется неравенство $\|Ax\| \leq C$. Или, что то же самое, существует такое $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in V$.

Теорема. В конечномерных нормированных пространствах V и W любой оператор $A \in L(V, W)$ ограничен.

Доказательство. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис пространства V , и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда $\|Ax\|_W = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\|_W \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_W \leq \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_W^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M \cdot \|x\|_E$, где $\|\cdot\|_E$ – евклидова норма в V . Из эквивалентности норм в V имеем $\|x\|_E \leq C_1 \|x\|_V$. Поэтому $\|Ax\|_W \leq C \|x\|_V$. \square

8. Подчиненная норма. Пусть V и W – конечномерные пространства, и $A \in L(V, W)$. A – ограниченный оператор, т.е. существует такое число $C > 0$, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для любого

$x \in V$. Это значит, что $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$ для любого $x \neq 0$. Поэтому

числовое множество $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0 \right\}$ ограничено сверху, и сущес-

твует его конечная точная верхняя грань: $\mu(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Теорема. Отображение $\mu(A)$ является нормой в пространстве $L(V, W)$.

Доказательство.

1. $\mu(A) \geq 0$ – очевидно. Если $\mu(A) = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для любого $x \in V$; тогда $A = 0$.

Выполнение других двух аксиом следует из свойств точной верхней грани. \square

$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ называется подчинённой нормой оператора A .

Свойства подчиненной нормы:

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ для любого $x \in V$, так как $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \mu(A) = \|A\|$.

2. Подчиненная норма – наименьшая из всех согласованных норм, так как она является точной верхней гранью множества чисел

$\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0 \right\}$, тогда как любая согласованная норма – одна из

верхних граней этого множества.

3. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, так как

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \cdot \|Bx\| = \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

9. Пример. Пусть $A \in L(V, V)$. Пусть в линейном пространстве V введена норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Тогда

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ является подчинённой нормой линейного оператора A . Действительно,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sup_{\|x\|_1=1} \left| \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right| \leq \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_i| = \\ &= \sup_{\|x\|_1=1} \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n |x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Если максимум в правой части достигается при $j = j_0$, то взяв в качестве $x = j_0$ –ый нормированный к единице базисный вектор пространства V , все предыдущие неравенства мы обратим в равенства.

Вопрос 14.

Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.

1. Сопряженный оператор.

Определение. Пусть $A \in L(V, W)$, где V и W – евклидовые (унитарные) пространства. Оператор $A^* \in L(W, V)$ называется сопряжённым к A , если $(Ax, y)_W = (x, A^*y)_V$ для любых $x \in V$, $y \in W$.

Свойства сопряжённых операторов.

1. Сопряженный оператор линеен.
2. Для любого линейного оператора существует единственный сопряженный оператор.
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$, $(AB)^* = B^*A^*$,
 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $(A^*)^* = A$.
4. Для любого оператора $A \in L(V, V)$ $\det A^* = \overline{\det A}$, $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A$.
5. Для любого оператора $A \in L(V, V)$ $\ker A = im^\perp A^*$, $\ker A^* = im^\perp A$.
6. Если подпространство L инвариантно относительно оператора A , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно относительно A^* .

2. Нормальный оператор.

Определение. Оператор A называется нормальным, если $A \in L(V, V)$ и $AA^* = A^*A$.

Свойства нормального оператора.

1. Собственный вектор x нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором оператора A^* , отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.
2. $\ker A = \ker A^*$.
3. $\ker A = im^\perp A$, $\ker A^* = im^\perp A^*$.

- Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются попарно ортогональными.
- Существует ортонормированный базис из собственных векторов нормального оператора.
- В унитарном пространстве A и A^* имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов, если A нормален.

3. Определение. Линейный оператор U , действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется унитарным (ортогональным) оператором, если $U^*U = UU^* = I$.

Из определения вытекают свойства:

1. Оператор U унитарен (ортогонален) только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет унитарную (ортогональную) матрицу.

2. Для унитарного (ортогонального) оператора $|\det U| = 1$.

3. Унитарный (ортогональный) оператор нормален.

Теорема. В унитарном (евклидовом) пространстве следующие утверждения равносильны:

1. U - унитарен (ортогонален);

2. $U^*U = I$;

3. $UU^* = I$;

4. U сохраняет скалярное произведение для любых $x, y \in V$: $(Ux, Uy) = (x, y)$;

5. U сохраняет длину: для любого x $|Ux| = |x|$;

6. U переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

7. U переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Доказательство.

1. $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

Переходы $1 \Rightarrow 2$ и $1 \Rightarrow 3$ очевидны.

Из $U^*U = I$ следует, что U – обратимый оператор. Тогда из равенства $U^*UU^{-1} = U^{-1}$ получаем $U^* = U^{-1}$. Этим доказано $2 \Rightarrow 1$.

Аналогично $3 \Rightarrow 1$.

2. $1 \Rightarrow 4$: $U^*U = I \Rightarrow (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$.

4 \Rightarrow 1: $(x, U^*Uy) = (Ux, Uy) = (x, y) \Rightarrow U^*U = I$.

3. $4 \Rightarrow 5$: $|Ux| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, y)} = |x|$.

5 \Rightarrow 4: в евклидовом пространстве
 $(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$, а

в унитарном пространстве

$(x, y) = (|x + y|^2 - |x - y|^2 + i|x + iy|^2 - i|x - iy|^2)/4$.

4. $4 \Rightarrow 6$: $(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

6 \Rightarrow 4: если $\{e_i\}$ – ортонормированный базис, то $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

$Ux = \sum_{i=1}^n x_i Ue_i$, $Uy = \sum_{i=1}^n y_i Ue_i$. $\{Ue_i\}$ – ортонормирован-

ный базис по условию 6, тогда

$$(Ux, Uy) = \left(\sum_{i=1}^n x_i Ue_i, \sum_{i=1}^n y_i Ue_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x, y).$$

5. $6 \Rightarrow 7$ очевидно.

7 \Rightarrow 6 доказано в 4. \square

Следствие. Унитарный (ортогональный) оператор на любом инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (ортогональный) оператор (так как он сохраняет скалярное произведение).

Теорема. Нормальный оператор в унитарном пространстве унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.

Доказательство. Необходимость. $Ux = \lambda x$,

$$(Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x) = (x, x) \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Достаточность. Существует ортонормированный базис из собственных векторов $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, следовательно для любого

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V \quad Ux = \sum_{i=1}^n x_i Ue_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i. \quad (x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

$$(Ux, Ux) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = (x, x). \square$$

Теорема. Если подпространство L инвариантно относительно унитарного (ортогонального) оператора U , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно относительно U .

Доказательство. $U|_L$ – обратимый оператор, и его образ совпадает со всем L : $im U|_L = L$. Поэтому для любого $x \in L$ существует такой вектор $x_1 \in L$, что $x = Ux_1$. Тогда $(x, Uy) = (Ux_1, Uy) = (x_1, y) = 0$. А это означает $Uy \in L^\perp$. \square

4. Каноническая форма матрицы унитарного оператора. Из того, что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю равны единице, следует, что в пространстве V существует ортонормированный базис $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в котором матрица унитарного оператора U имеет диагональную форму:

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матричная формулировка: квадратная комплексная матрица унитарна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю равны единице.

Каноническая форма матрицы ортогонального оператора. Пусть Q – ортогональный оператор, действующий в евклидовом пространстве. Для собственного значения λ и $\det Q$ выполнено $\lambda = \pm 1$, $\det Q = \pm 1$.

В любом ортонормированном базисе e оператор Q имеет ортогональную матрицу Q_e , т.е. $Q_e^{-1} = Q_e^T$.

Примеры. 1. В одномерном пространстве матрица Q_e ортогонального оператора Q имеет вид $Q_e = [\pm 1]$ (1). Либо $Q_e = I$, либо $Q_e = -I$.

2. В двумерном пространстве матрица Q_e ортогонального

оператора Q имеет вид $Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, причем

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}. \pm \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

a). Если $\det Q = 1$, то из $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ получаем

$$Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha = \cos \varphi, \quad \beta = -\sin \varphi,$$

$$Q_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

б). Если $\det Q = -1$, то из $\begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ полу-

чаем $Q_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$. При этом

$f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda = \pm 1$. Следовательно, существует ортонормированный базис f из собственных векторов, в котором матрица оператора Q имеет вид

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Теорема. Для любого ортогонального оператора Q в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис e , в котором его матрица имеет квазидиагональную форму с клетками вида (1) или (2) на главной диагонали.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности n пространства V . Для $n=1, 2$ утверждения вытекают из (1) и (2), (3). Пусть $n \geq 3$ и теорема верна для ортогональных операторов в пространствах размерности $k \leq n-1$. Докажем теорему для размерности n . Вспомним, что у всякого линейного оператора в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство L . (Этот факт доказан ниже в п.5.) Если $\dim L = 1$, то из ортогональности $U|_L$ следует, что в L существует базис $\{e_1\}$, в котором матрица Q_e имеет вид (1). Если $\dim L = 2$, то из ортогональности $U|_L$ следует, что в L существует базис $\{e_1, e_2\}$, в котором матрица Q_e имеет вид (2) или (3). Ортогональное дополнение L^\perp инвариантно относительно Q . По индуктивному предположению в пространстве L^\perp существует ортонормированный базис e_2, \dots, e_n (или e_3, \dots, e_n), в котором матрица оператора $Q|_{L^\perp}$ имеет требуемый вид. Тогда в базисе всего пространства e_1, e_2, \dots, e_n матрица оператора Q будет иметь требуемый вид. \square

Матрица Q_e называется канонической формой матрицы ортогонального оператора.

5. Теорема. У всякого линейного оператора в комплексном пространстве существует одномерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Утверждение следует из существования собственного вектора для любого оператора, действующего в комплексном пространстве: если e – собственный вектор оператора A , то $L(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно A . \square

Теорема. У всякого линейного оператора в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть V – вещественное пространство, $A \in L(V, V)$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ – базис V , и A – матрица опе-

ратора A в базисе e . Характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A является многочленом с вещественными коэффициентами, так как $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где $A \in R^{n \times n}$. Пусть λ_0 – корень характеристического многочлена $f(\lambda)$. Если $\lambda_0 \in R$, то λ_0 – собственное значение оператора A . Тогда линейная оболочка $L(e)$, натянутая на соответствующий собственный вектор e , образует одномерное подпространство, инвариантное относительно оператора A . Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $|A - \lambda_0 I| = 0$, и система уравнений $Az = \lambda_0 z$ имеет нетривиальное комплексное решение $z_0 = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)^T$. В векторных обозначениях $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in R^n$ система $Az = \lambda_0 z$ может быть записана в виде $A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$ или $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$. Тогда, если $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то системе соответствует система векторных уравнений $\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases}$, где u, v – векторы пространства V , одновременно не равные нулю. Следовательно, натянутая на u и v линейная оболочка $L(u, v)$ – инвариантное подпространство. $\dim L(u, v) = 2$.

Каждый вещественный корень характеристического многочлена порождает одномерное инвариантное пространство, а каждый комплексный корень – двумерное инвариантное подпространство. \square

6. Пример. Оператор, заданный в ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

является ортогональным. Найдите какой-нибудь ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет указанную в п.4 квазидиагональную форму. Сделайте то же самое для оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Пример. Докажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \cdot e^{i\psi_1} & -\sin\varphi \cdot e^{i\psi_2} & 0 \\ 0 & \sin\varphi \cdot e^{i\psi_3} & \cos\varphi \cdot e^{i\psi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является унитарной, если $\psi_1 - \psi_2 = \psi_3 - \psi_4 + 2\pi k$.

Вопрос 15.

Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.

1. Пусть V – линейное пространство над полем P . Ненулевой вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора $A \in L(V, V)$, если существует такое число $\lambda \in P$, что $Ax = \lambda x$. Указанное число λ называется собственным значением (собственным числом) оператора A , соответствующим собственному вектору x . Множество всех собственных значений оператора A называется спектром оператора.

Теорема. Собственные векторы x_1, x_2, \dots, x_k оператора A , отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Доказательство по индукции. При $k=1$ утверждение верно: один ненулевой вектор линейно независим. Пусть утверждение верно при $k=n-1$. Докажем, что оно верно для $k=n$, т.е. векторы x_1, x_2, \dots, x_n линейно независимы. Составим их линейную комбинацию и приравняем её нулю:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (*)$$

Подействуем оператором A : $\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \dots + \alpha_n A x_n = 0$

$$\text{или } \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n = 0.$$

Умножая $(*)$ на λ_n и вычитая из последнего равенства, получим $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) x_2 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1} = 0$.

Так как векторы x_1, x_2, \dots, x_{n-1} линейно независимы, то

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0 \end{cases}.$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, $\alpha_n x_n = 0$. Поэтому $\alpha_n = 0$. \square

Следствие. Линейный оператор, действующий в n -мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

2. Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $\lambda \in P$.

Теорема. Характеристический многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрицы $A \in P^{n \times n}$ является многочленом n -ой степени от переменной $\lambda \in P$.

Доказательство.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы $A - \lambda E$ представляет собой многочлен от λ степени не выше 1, значит каждый член определителя $\det(A - \lambda E)$ является многочленом от λ степени не выше n . Следовательно, $f(\lambda)$ – многочлен от λ , степень которого не превосходит n . Осталось доказать, что степень этого многочлена в точности равна n . Действительно, все члены определителя $\det(A - \lambda E)$, отличные от $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, имеют степень не больше $n-2$. Следовательно, в многочлене $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n , определяются только членом $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, который согласно теореме Виета имеет вид

$$(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + g_{n-2}(\lambda).$$

Поэтому $f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n$. \square

Замечание. $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \text{tr} A$.

Теорема. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Следствие. Все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковые характеристические многочлены.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от базиса, а определяется самим оператором.

3. Характеристическим многочленом оператора называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$. Характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе.

Теорема. Пусть $A \in L(V, V)$, $A|_W \in L(W, W)$, $A|_W$ – индуцированный оператор, порожденный оператором A . Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора.

Доказательство. Линейное подпространство $W \subset V$ называется инвариантным подпространством относительно A , если для любого $x \in W$ его образ $Ax \in W$. Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ в V так, что его первые k векторов принадлежат инвариантному относительно A подпространству $W : e_1, e_2, \dots, e_k \in W$.

Тогда $A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$,

$$(A_e - \lambda I) = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \lambda I \end{pmatrix},$$

$\det(A_e - \lambda I) = \det(A_{11} - \lambda I) \cdot \det(A_{22} - \lambda I)$. Поскольку матрицей оператора $A|_W$ в выбранном базисе является A_{11} , получаем $\det(A|_W - \lambda I) = \det(A_{11} - \lambda I)$. \square

Теорема. Если $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ – прямая сумма подпространств W_1, W_2, \dots, W_k , инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A равен произведению характеристических многочленов

$f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов
 $A|_{W_1}, A|_{W_2}, \dots, A|_{W_k}$.

Теорема. Пусть V – линейное пространство над полем P . Число $\lambda \in P$ является собственным значением оператора $A \in L(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ – корень характеристического многочлена.

Доказательство. Из $\begin{cases} Ax = \lambda x \\ \lambda \in P \\ x \neq 0 \end{cases}$ следует

$\begin{cases} (A - \lambda I)x = 0 \\ \lambda \in P \\ x \neq 0 \end{cases}$, то есть оператор $(A - \lambda I)$ вырожденный. Следо-

вательно, $\det(A - \lambda I) = 0$, и λ – корень характеристического многочлена. Обратно, если λ – корень характеристического многочлена, то оператор $(A - \lambda I)$ вырожденный. А это и означает, что λ – собственное значение оператора A . \square

Теорема. Произвольный линейный оператор, действующий в n -мерном комплексном пространстве имеет:

- n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;
- хотя бы один собственный вектор;
- на любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.

4. Собственное подпространство.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора A . Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A , отвечающим λ_0 . $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$.

Собственное подпространство инвариантно относительно A . Число $\dim W_{\lambda_0}$ называется геометрической кратностью собст-

венного значения λ_0 .

Теорема. Геометрическая кратность собственного значения λ_0 не превосходит его алгебраической кратности.

Теорема. Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям является прямой.

5. Пример. Найдите характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдите все собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в поле действительных чисел, в поле комплексных чисел.

Пример. Найдите сумму и произведение всех собственных значений произвольной матрицы A , выразив требуемые величины через $\operatorname{tr} A$ и $\det A$.

Пример. Сколько линейно независимых собственных векторов имеют матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}?$$

Вопрос 16.

Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова).

Алгоритмическая неразрешимость.

Интуитивное определение алгоритма.

Алгоритмом решения задачи называется система точно сформулированных правил, определяющих, какие действия, в какой последовательности и над какими данными надо выполнить, чтобы решить поставленную задачу.

Составить алгоритм - значит написать подробную инструкцию о том, как решать задачу, чтобы по ней мог действовать любой другой человек или автомат (например, ЭВМ), ничего не знающий о задаче и ничего не делающий сверх того, что указано в этой инструкции.

Любой алгоритм должен обладать следующими свойствами:

- **простота** (он должен быть описан ясно и понятно);
- **детерминированность** (на каждом шаге алгоритма должно быть однозначно определено, что делать дальше);
- **конечность** (за конечное число шагов он должен приводить к результату).

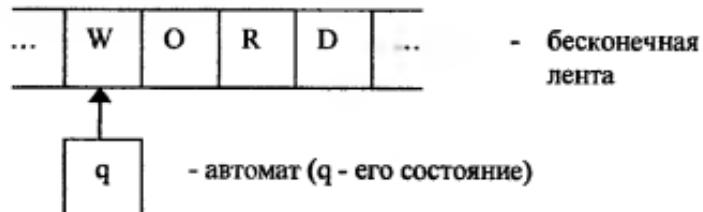
Данное определение алгоритма называется *интуитивным* - оно нестрогое, т.к. в нем используются неточные понятия (какое действие является простым? какое - понятным? и т.д.). Существуют разные способы уточнения, формализации понятия алгоритма. Ниже рассмотрены два из них: машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машины Тьюринга (МТ).

Английский математик Тьюринг предложил формальное определение алгоритма в виде специальной конструкции, названной позже "машиной Тьюринга".

МТ состоит из ленты и автомата. Лента бесконечна в обе стороны и делится на клетки, в каждой из которых может быть записан некоторый символ или ничего не записано (можно считать, что в пустой клетке записан символ "пусто", который обычно обозначается как λ). Автомат может двигаться вдоль ленты, может менять символы на ленте и может переходить из одного состояния в другое. В каждый момент времени автомат "видит" только одну клетку (символ в

этой клетке называется видимым) и находится в некотором состоянии (оно называется текущим).



Автомат может выполнить только следующие действия:

- заменить видимый символ на другой (из заданного алфавита), в частности: стереть символ - т.е. заменить его на λ , ничего не менять - т. е. заменить символ на тот же самый, вписать символ в клетку - т.е. заменить λ на этот символ;
- сдвинуться на одну клетку влево (Л), вправо (П) или оставаться на месте (Н);
- перейти в другое состояние или оставаться в прежнем.

МТ работает по тактам, такты выполняются один за другим. На каждом такте автомат всегда выполняет следующие три действия в следующем порядке:

- 1) заменяет видимый символ на некоторый символ S ;
- 2) сдвигается вдоль ленты на одну клетку влево (Л), вправо (П) или остается на месте (Н);
- 3) переходит в состояние q .

Такт можно описать тройкой: $(S, [L, P, H], q)$.

МТ останавливается, если на очередном такте она ничего не меняет: не меняет видимый символ, не сдвигается и остается в прежнем состоянии. Такой такт называется тактом останова.

Чтобы описать алгоритм в виде МТ, нужно:

- а) задать алфавит - конечный набор символов $\{S_1, \dots, S_m\}$, которые будут использоваться в алгоритме (записываться на ленте);
- б) задать конечный набор состояний $\{q_1, \dots, q_n\}$, в которых может находиться автомат;
- в) для каждой пары (S_i, q_j) и для пар (λ, q_j) задать такт, который МТ должна выполнить, если автомат видит символ S_i или λ и находится в состоянии q_j .

Такты для каждой пары (S_i, q_j) или (λ, q_j) задаются в виде следующей таблицы, называемой программой для МТ:

	S_1	...	S_m	λ
q_1	такт	...	такт	такт
...
q_j	такт	...	такт	такт
...
q_n	такт	...	такт	такт

Алгоритм, описанный в виде МТ, выполняется следующим образом:

а) На ленте задается входное слово. "Слово" - конечная последовательность букв из алфавита. Слева и справа от слова находятся пустые клетки (символы λ), внутри слова пустых клеток быть не должно.

б) Автомат устанавливается в состояние q_1 и смотрит на клетку с самой левой буквой входного слова (либо на пустую клетку, если входное слово пусто).

в) МТ выбирает из таблицы такт в той строке, которая соответствует текущему состоянию автомата, и в том столбце, который соответствует видимому в настоящий момент символу, и выполняет этот такт.

Шаг в) повторяется до тех пор, пока не надо будет выполнить такт останова, который ничего не меняет. Тогда МТ останавливается, а слово, которое оказывается записанным в этот момент на ленте, называется выходным словом и является результатом работы алгоритма. В этом случае алгоритм считается *применимым* к заданному входному слову.

Если МТ никогда не останавливается, считается, что данный алгоритм к заданному входному слову *неприменим*.

Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ).

Другое уточнение понятия алгоритма предложил советский математик Марков. В НАМ используется только одно действие - *подстановка*, под которой подразумевается замена части слова на новую часть. Выполнение НАМ сводится к последовательному выполнению таких подстановок.

Подстановка задается *формулой подстановки* вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β - некоторые слова. Применить формулу подстановки $\alpha \rightarrow \beta$

к слову Р - значит заменить ту часть слова Р, что совпадает с α , на β . Например, применение формулы $c \rightarrow bb$ к слову *aca* даст слово *abba*.

Уточнения:

- слово α может входить в Р несколько раз; в таком случае, по определению, заменяется *самое левое* вхождение α ; например, применение формулы $b \rightarrow cc$ к слову *abba* даст слово *accba*;

- левая часть α формулы может быть пустой; в таком случае, по определению, правая часть β формулы приписывается слева к слову Р; например, применение формулы $\rightarrow t$ к слову *wo* даст слово *two*;

- правая часть формулы также может быть пустой; тогда подстановка сводится к стиранию части слова; например, применение формулы $bb \rightarrow$ к слову *abba* даст слово *aa*;

- слово α может не входить в Р, тогда формула подстановки не применима к данному слову Р.

HAM определяется как непустой конечный набор формул подстановки вида:

$\alpha \rightarrow \beta$ (*обычная формула*) или

$\alpha \rightarrow \beta$ (*заключительная формула*).

Таким образом, HAM - это список вида

$\alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1$

$\alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2$

...

$\alpha_k [.] \rightarrow \beta_k$,

где $k \geq 1$, а запись $[.]$ - означает, что $"."$ либо есть, либо нет.

Выполняется HAM следующим образом:

1. Задается (где-то, например на бумаге) входное слово Р.

2. Формулы, входящие в состав HAM, просматриваются сверху вниз, и выбирается первая из формул, левая часть которых входит в Р. К слову Р применяется эта формула, в результате чего получается некоторое новое слово Р1.

3. а) Если на шаге 2 была применена обычная формула (без $"."$), то Р1 принимается за исходное слово и для него повторяется шаг 2.

б) Если же была применена заключительная формула, тогда после ее применения HAM заканчивает свою работу, а полученное слово Р1 принимается за результат работы HAM.

в) Если к слову Р не применима ни одна из формул, тогда, по определению, алгоритм останавливается и слово Р считается результатом работы HAM.

HAM считается *применимым* к слову Р, если он через конечное число шагов заканчивает свою работу (т.е. имеет место слу-

чай 3б или 3в), и *неприменимым* - если он выполняется бесконечно, число шагов (т.е. всегда имеет место случай 3а).

Принцип нормализации. Тезис Тьюринга.

Очевидно, что любой НАМ (или МТ) является алгоритмом в интуитивном смысле. Верны и обратные утверждения.

Принцип нормализации: любой алгоритм (в интуитивном смысле) может быть записан в виде НАМ.

Тезис Тьюринга: любой алгоритм может быть записан в виде программы для МТ.

Принцип нормализации (тезис Тьюринга) нельзя строго доказать, т.к. в нем используется неточное понятие "алгоритм". Однако существуют определенные доводы в пользу этого принципа (тезиса). Например, пока еще никто не смог придумать контрпример, т.е. такой алгоритм в интуитивном смысле, который нельзя было бы представить в виде НАМ (или МТ). Кроме того, доказано, что разные уточнения понятия алгоритма эквивалентны: если алгоритм можно записать в виде НАМ, то его можно записать и в виде программы для МТ, и обратно, если алгоритм можно записать в виде программы для МТ, то его можно записать и в виде НАМ. Значит, разные способы уточнения алгоритмов ведут к одной и той же сущности, значит, в этих уточнениях схвачена суть понятия алгоритма.

Важность принципа нормализации (тезиса Тьюринга) заключается в следующем: поскольку НАМ (МТ) - точное понятие, то можно строго доказывать утверждения о несуществовании каких-то НАМ (МТ), а в силу принципа нормализации (тезиса Тьюринга) это означает, что таких алгоритмов нет вообще.

Алгоритмическая неразрешимость.

Проблема (задача) называется *алгоритмически разрешимой*, если существует алгоритм ее решения. Пример такой задачи - нахождение корней квадратного многочлена.

Проблема называется *алгоритмически неразрешимой*, если не существует алгоритма ее решения. Здесь имеется в виду, что такого алгоритма нет в принципе, а не то, что пока его никто не придумал.

Примеры алгоритмически неразрешимых проблем - проблема самоприменимости алгоритмов, проблема останова алгоритмов, проблема эквивалентности алгоритмов.

Проблема самоприменимости алгоритма.

Назовем "записью алгоритма" (HAM) вытянутую в линию последовательность входящих в него формул подстановки, разделенных точкой с запятой:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1 \\ \text{HAM: } & \alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2 \\ & \dots \\ & \alpha_k [.] \rightarrow \beta_k \end{aligned}$$

Запись этого HAM: $\alpha_1 [.] \rightarrow \beta_1; \alpha_2 [.] \rightarrow \beta_2; \dots; \alpha_k [.] \rightarrow \beta_k$

Поскольку запись алгоритма - это слово, то ее можно подать на вход самому этому алгоритму, т.е. использовать эту запись как входное слово. (Замечание: применять HAM к самому себе нельзя, т.к. HAM не является словом, но если вытянуть HAM в линию, т.е. использовать его запись, то HAM уже можно применить.) Так вот, если, начиная работать над своей записью как над входным словом, алгоритм остановится, то он называется *самоприменимым*, а если он зациклится, то он называется *несамоприменимым*.

Проблема самоприменимости алгоритма формулируется так: существует ли такой алгоритм, который по записи любого алгоритма определяет, самоприменим этот алгоритм или нет?

Доказано, что такой алгоритм не существует.

Проблема останова (зацикливания) алгоритмов.

Формулировка проблемы: существует ли такой алгоритм, который по записи любого алгоритма и по любому слову определяет, применим этот алгоритм к данному слову или нет (т.е. остановится он через конечное число шагов или зациклится)?

Доказано, что такой алгоритм не существует. (Если бы он существовал, то была бы разрешима проблема самоприменимости, которая является частным случаем проблемы останова алгоритмов.)

Проблема эквивалентности алгоритмов.

Два алгоритма называются эквивалентными, если они применимы к одному и тому же множеству входных слов и если при

одинаковых входных словах из этого множества дают одинаковые результаты (выходные слова).

Формулировка проблемы: существует ли такой алгоритм, который по записи любых двух алгоритмов определяет, эквивалентны эти алгоритмы или нет?

Доказано, что такой алгоритм не существует.

Замечание. Алгоритмическая неразрешимость проблемы означает, что нет *единого* метода решения данной проблемы. В то же время проблема может иметь решения в частных случаях, но всё дело в том, что для разных частных случаев нужны совершенно разные методы решения.

Вопрос 17.

Процедуры (подпрограммы) и макросредства в языках программирования. Способы передачи параметров в процедурах.

Процедуры. Способы передачи параметров (на примере языка Паскаль).

Процедура (или *подпрограмма*) - специальным образом оформленный фрагмент программы, который описывает решение некоторой подзадачи и к которому можно обращаться любое число раз из любых мест программы.

Процедуры используются в следующей ситуации. Любая программа описывает решение некоторой задачи. При решении же задачи нередко приходится решать по несколько раз одни и те же подзадачи, из-за чего в программе приходится многократно выписывать одинаковые фрагменты. Так вот, чтобы каждый раз не выписывать заново решение одной и той же подзадачи, можно описать ее решение один раз в виде процедуры, а затем уже в нужных местах программы лишь обращаться к этой процедуре (обращение к процедуре существенно короче решения соответствующей подзадачи). И так можно поступить с каждой подзадачей, которую приходится многократно решать в программе. Тем самым процедуры - это средство борьбы с повторяющимися действиями.

При использовании процедур надо уметь описывать их и уметь обращаться к ним. Рассмотрим, как это делается на примере следующей подзадачи:

По вещественному числу x определить его целую часть i и дробную часть d . (Например, если $x=4.57$, то $i=4$ и $d=0.57$).

Описание процедуры.

Решение этой подзадачи можно описать в виде следующей процедуры:

```
procedure P(x : real; var i : integer; var d : real);
begin i:=trunc(x); d:=x-i end;
```

(функция *trunc* вычисляет целую часть своего аргумента).

Описание процедуры состоит из заголовка процедуры и тела процедуры.

Заголовок процедуры (1-я строка) состоит из служебного слова *procedure*, имени *P* процедуры (по нему мы затем будем обращаться к процедуре) и заданного в круглых скобках описания формальных параметров процедуры.

Параметры процедуры - это величины, от которых зависит решение подзадачи; в нашем примере это величины *x*, *i* и *d*. Параметры процедуры приходится указывать дважды - при описании процедуры и при обращении к ней; чтобы различать эти два случая, принята следующая терминология: параметры в описании процедуры называются *формальными*, а параметры в обращении к процедуре - *фактическими*.

Параметры процедуры принято делить на входные и выходные. Входные параметры - это исходные данные для подзадачи (у нас это *x*), а выходные параметры - это результаты подзадачи (у нас это *i* и *d*). В языке Паскаль входные параметры называются *параметрами-значениями*, а выходные - *параметрами-переменными*.

В заголовке процедуры описания формальных параметров перечисляются через ";". Для каждого параметра надо указать его имя (оно может быть любым), его тип и то, является ли он параметром-значением или параметром-переменной:

имя_параметра : *тип_параметра* - описание
параметра-значения

var *имя_параметра* : *тип_параметра* - описание
параметра-переменной (*var* - служебное слово)

Например:

x : *real* - описание вещественного формального параметра-значения с именем *x*

var i : *integer* - описание целочисленного формального параметра-переменной с именем *i*

За заголовком процедуры следует *тело процедуры*, состоящее в общем случае из описания локальных объектов процедуры и составного оператора. Локальные объекты (в нашем примере их нет) - это вспомогательные переменные, константы и т.п., которые нужны при решении подзадачи и которые существуют только во время работы процедуры. Составной оператор (*begin ... end*) описывает решение подзадачи в терминах формальных параметров; это описание решения подзадачи "в общем виде".

Обращение к процедуре.

После того как описана процедура, к ней можно обращаться - в тех местах программы, где надо решить соответствующую подзадачу. Обращение к процедуре в языке Паскаль называется *оператором процедуры*. В нем указывается имя процедуры и (в скобках через запятые) фактические параметры, т.е. те конкретные величины, при которых в данном месте надо решить подзадачу. Например, обращение

$P(z+0.5, w, f)$

требует, чтобы процедура P вычислила целую часть числа $z+0.5$ и присвоила его переменной w и вычислила дробную часть этого числа и присвоила ее переменной f (считаем, что в программе имеются вещественные переменные z и f и целочисленная переменная i).

Способы передачи параметров процедуре.

Чтобы понять, как выполняется процедура при обращении к ней, необходимо знать правила передачи фактических параметров из программы в процедуру. Существуют разные способы передачи параметров, основными являются передача по значению и передача по ссылке.

Передача параметра по значению. Если формальный параметр процедуры описан как параметр-значение, то в качестве фактического параметра можно указать любое выражение соответствующего типа. При обращении к процедуре вычисляется это выражение и его значение передается процедуре. Соответствующий же формальный параметр в таком случае локализуется в процедуре: в начале работы процедуры появляется переменная с именем формального параметра, ей в качестве начального значения присваивается значение соответствующего фактического параметра и далее в процедуре все ссылки на этот формальный параметр означают ссылки на эту переменную (в частности, все присваивания этому параметру означают присваивания именно этой локальной переменной, на фактический же параметр эти изменения никак не влияют); по окончанию работы процедуры эта переменная уничтожается.

Передача параметра по ссылке (по адресу). Если формальный параметр процедуры описан как параметр-переменная, то в качестве фактического параметра можно указать только переменную (не выражение) соответствующего типа. При обращении к процедуре ей из программы передается имя этой

фактической переменной (точнее, ссылка (адрес) на место в памяти, которая она занимает), и все обращения в процедуре к данному формальному параметру означают обращения к этой фактической переменной. В частности, все присваивания формальному параметру - это присваивания данной фактической переменной, поэтому результаты этих присваиваний сохраняются по выходу из процедуры.

С учетом сказанного выполнение оператора процедуры

$P(z+0.5, w, f)$

происходит следующим образом (при условии $z=4.07$).

1) Появляется (начинает существовать) вещественная переменная x , которой присваивается значение первого фактического параметра:

$x:=\text{значение}(z+0.5)=4.57$

2) Выполняется тело процедуры, в котором имена формальных параметров i и d заменены соответственно на имена фактических параметров-переменных w и f :

```
begin
    w:=trunc(x);           {w:=4}
    f:=x-w;                {f:=0.57}
end;
```

3) Уничтожается (перестает существовать) переменная x .

На этом выполнение процедуры заканчивается, в результате переменные w и f получили соответственно значения 4 и 0.57.

Функции.

Достаточно часто результатом решения подзадачи является лишь одна величина; например, при нахождении максимума двух чисел ответом будет одно число. В таком случае решение подзадачи обычно описывается не в виде процедуры, а в виде функции. Например, нахождение максимума чисел x и y , т.е. функцию $\max(x,y)$, можно описать так:

```
function max (x : real; y : real): real;
begin if x>y then max:=x else max:=y end;
```

Функции описываются по тем же правилам, что и процедуры, но есть и отличия. Во-первых, описание функции начинается со служебного слова **function**. Во-вторых, в заголовке функции вслед за списком формальных параметров указываются двоеточие и тип функции (тип ее значений). В-третьих, в теле функции обязательно должен быть выполнен оператор вида

имя_функции := выражение

который означает, что значением функции объявляется значение указанного выражения. В нашем примере при $x > y$ выполняется оператор `max:=x`, поэтому в данном случае значением функции `max` становится число x , а при $x \leq y$ выполняется оператор `max:=y` и потому значением функции `max` становится число y .

Описав функцию, мы имеет право обращаться к ней. Обращение к функции называется (в Паскале) *указателем функции* и записывается так же, как и обращение к процедуре, но является не оператором, а выражением. Поэтому обращаться к функции можно везде, где допустимо использование выражений, например:

```
if max(z*z+2, z-f)>0 then z:=max(f, 34.5);
```

Макросредства (на примере языка Си).

Как и процедуры, макросы являются средством борьбы с повторяющимися фрагментами: чтобы в программе многократно не выписывать решение одной и той же подзадачи, это решение можно описать один раз в виде макроса, а затем в нужных местах программы надо указывать лишь короткие обращения к этому макросу.

Отличие макросов от процедур будет объяснено позже, а сейчас рассмотрим работу с макросами в языке Си.

Препроцессор Си, директивы препроцессора.

Трансляция программы на языке Си осуществляется в два этапа. На первом этапе работает так называемый *препроцессор*, который редактирует (изменяет) исходный текст программы и получает её окончательный текст. На втором этапе работает собственно транслятор, который переводит (транслирует) этот окончательный текст на машинный язык.

Какие именно изменения должны быть применены к исходному тексту программы, указывает автор программы с помощью директив препроцессору, имеющих следующий вид:

`#имя_директивы аргументы_директивы`

Например, встретив директиву

`#include имя_файла`

препроцессор отыскивает на диске файл с указанным именем и весь текст этого файла подставляет в программу вместо этой директивы.

Описание макроса.

Описание макроса задается в виде следующей директивы препроцессору:

```
#define n(v1, ..., vk) e
```

где *n* - имя макроса, *v_i* - имена формальных параметров макроса и *e* - тело макроса (это любой текст, в который входят *v_i*).

Например, нахождение целой части *i* и дробной части *d* вещественного числа *x* можно описать в виде следующего макроса (функция *floor* вычисляет целую часть своего аргумента):

```
#define M(x,i,d) {i=floor(x); d=x-i;}
```

Как и процедура, макрос дает описание подзадачи в общем виде (для любых *x*, *i* и *d*).

Обращения к макросу. Макроподстановки.

Описав макрос, мы получаем право обращаться к нему. В обращении к макросу указывается его имя и (в скобках через запятые) фактические параметры, т.е. те конкретные величины, при которых надо решить соответствующую подзадачу. Например, для присваивания переменной *w* целой части, а переменной *f* дробной части числа *z+0.5* нужно следующим образом обратиться к макросу *M*:

M(z+0.5, w, f)

Встречая такое обращение, препроцессор выполняет так называемую *макроподстановку*: в текст программы вместо этого обращения подставляет тело макроса, предварительно заменив в нем формальные параметры на соответствующие фактические параметры (они не вычисляются):

```
{w=floor(z+0.5); f=z+0.5-w;}
```

И так препроцессор поступает с каждым обращением к макросу.

Выгода от макросов в следующем. Если в программе встречается несколько раз решение одной и той же подзадачи, то, чтобы не повторяться, мы описываем это решение один раз в виде макроса, а в нужных местах (там, где надо решить подзадачу) указываем лишь короткое обращение к макросу. В окончательном же тексте программы вместо каждого из этих обращений будет подставлено само решение подзадачи, но делаем это уже не мы, а препроцессор.

Сравнение макросов и процедур.

И процедуры, и макросы - это средство борьбы с повторяющимися фрагментами в программе. Отличие же между ними в следующем.

Если повторяющийся фрагмент (решение подзадачи) описан как процедура, то эта процедура присутствует в программе в единственном экземпляре, а каждое обращение к ней - это переход из программы на процедуру с последующим возвратом. Но если повторяющийся фрагмент описан как макрос, тогда при каждом обращении к нему вместо этого обращения будет подставлен сам макрос (точнее, его тело):



Процедура дает выигрыш по памяти, т.к. она всегда присутствует в программе в единственном экземпляре, сколько бы ни было обращений к ней, тогда как подстановка макроса вместо каждого обращения к нему заметно увеличивает размер программы. Макрос же дает выигрыш по времени: при каждом обращении к процедуре выполняются вспомогательные действия (переход на процедуру и возврат из нее, передача параметров процедуре), на что тратится время, тогда как макрос всегда подставляется в те места, где он и должен выполняться, поэтому такие вспомогательные действия не нужны и на них не тратится время.

Таким образом, решая вопрос о том, как описывать решение повторяющейся подзадачи - в виде процедуры или в виде макроса, надо определить, что для нас важнее - экономия памяти или экономия времени. Если важнее экономия памяти, то следует использовать процедуру, а если важнее экономия времени, то следует использовать макрос.

Вопрос 18.

Операционные системы, их основные функции.

Операционная система (ОС) - одна из основных компонент вычислительной системы (аппаратура + специальное программное обеспечение), представляющая собой комплекс программ, обеспечивающий функционирование вычислительной системы в целом и распределение ресурсов вычислительной системы между процессами - программами во время их выполнения на ЭВМ.

Ресурсы вычислительной системы делятся на **физические ресурсы**, то есть те ресурсы, которые связаны с аппаратурой (магнитные диски, оперативная память, время работы процессора) и **логические** (иногда их называют *виртуальными*) **ресурсами**, то есть ресурсы, которые в виде реального оборудования не существуют, но реализуются в виде некоторых программных средств и услуг, предоставляемых пользователю.

Наиболее известными в настоящее время являются следующие ОС: MS DOS, Windows 95, Windows 98, Windows 2000, Windows NT, UNIX, QNX, Linux, Solaris, OS/2, MacOS.

ОС состоит из ядра, специальных обслуживающих программ и файловой системы.

Ядро ОС - программы, непосредственно обеспечивающие разделение вычислительных ресурсов и управление ими. Ядро обычно является резидентной частью ОС. Ядро работает в режиме ОС, или в привилегированном режиме.

В ядро входят базовые средства управления основными сущностями, характерными для данной ОС, а также может входить набор программ, обеспечивающих управление некоторыми физическими устройствами. В функции ядра, в частности, входит обработка прерываний.

Программы, управляющие работой отдельных устройств вычислительной системы, называют **драйверами устройств** (физическими или логических). Например, в ядро ОС должен входить драйвер оперативного запоминающего устройства.

Специальные обслуживающие программы - программы управления ресурсами вычислительной системы, которые наращиваются вокруг ядра. Первый уровень в основном состоит из драйверов физических устройств. Следующий уровень - драйверы логических устройств. Таких уровней может быть достаточно много, и чем

дальше от ядра, тем большая абстрактность присуща соответствующим программам.

Файловая система - это компонент операционной системы, обеспечивающий организацию создания, хранения и доступа к именованным наборам данных - **файлам**.

По способам организации размещения файлов во внешнем запоминающем устройстве (ВЗУ) выделяются файловые системы с одноуровневой организацией файлов в виде непрерывных сегментов, файловые системы с блочной организацией файлов и иерархические файловые системы.

При одноуровневой организации файлов в виде непрерывных сегментов в пределах пространства ВЗУ выделяется некоторая область для хранения данных, которая называется каталогом. Каталог имеет следующую структуру:

Имя	Начальный блок	Конечный блок
-----	----------------	---------------

“Начальный блок” ссылается на некоторый относительный адрес пространства ВЗУ, с которого начинается файл с заданным именем. “Конечный блок” определяет последний блок данного файла. Функция открытия файла сводится к нахождению в каталоге имени файла и определении его начала и конца. Это действие очень простое. Если создается новый файл, то он записывается на свободное место. Чтение происходит также достаточно просто. Проблемы возникают, когда в файл нужно записать дополнительную информацию, а свободного пространства за этим файлом нет. В этом случае система может запустить некий процесс, который перенесет этот файл в другое место памяти и добавит нужную информацию (а это достаточно сложно), а может просто отказаться произвести запись в файл. Кроме того, при долговременной работе такой файловой системы на диске случается фрагментация (ситуация, когда есть свободные фрагменты памяти, но среди них нет такого, куда можно было бы разместить файл). Борьба с фрагментацией также достаточно сложна и опасна для такой организации файловой системы, которая практически пригодна лишь для однопользовательской операционной системы.

В **файловой системе с блочной организацией** файлов пространство ВЗУ разделено на блоки. В такой файловой системе распределение информации происходит аналогично распределению информации о процессе в системе со страничной организацией оперативной памяти. В общем случае, с каждым именем файла связан

набор номеров блоков устройства, в которых размещены данные этого файла. Причем, номера этих блоков имеют произвольный порядок, то есть блоки могут быть разбросаны по всему устройству. При такой организации нет фрагментации, хотя могут быть потери из-за хранения информации порциями, кратными целому блоку.

В файловых системах с блочной организацией файлов с каждым файлом связаны имя файла и имя пользователя (по ним происходит доступ к файлу). В таких системах требуется уникальность имен лишь среди файлов одного пользователя. При этом файлы объединены в каталоги с табличной структурой, где i-тая строка соответствует i-му блоку файловой системы (занятым или свободному). Если блок занят, то в соответствующей строке указывается имя файла (либо ссылка на него) и имя пользователя (а может быть и еще какая-то дополнительная информация).

Файловые системы с блочной организацией файлов могут быть многопользовательскими, а в рамках одного пользователя они являются одноуровневыми.

В иерархической файловой системе все файлы объединены в структуру, которая называется деревом. В корне дерева находится корень файловой системы. Если узел дерева является листом, то это отдельный файл (либо файл-каталог в случае пустого каталога). Узлы дерева, отличные от листа, являются файлами-каталогами. Именование файлов в такой иерархической файловой системе может происходить как относительно ближайшего каталога (на одном уровне имени не могут повторяться), так и с использованием полного имени файла, которое составляется из всех имен каталогов, которые находятся на пути от корня файловой системы к конкретному файлу. Полные имена файлов есть пути, а в дереве от корня до любого узла существует единственный путь, следовательно, нет проблем с унификацией имен, т.е. иерархическая структура файловой системы достаточно удобна для организации многопользовательской работы. Кроме того, такая система может очень просто наращиваться.

Основные функции ОС:

- управление использованием времени центрального процессора (или нескольких процессоров в много-процессорных системах),
- управление "подкачкой" и буфером ввода процессов,
- управление разделяемыми ресурсами (в частности, сетевым взаимодействием компьютеров),

- обработка прерываний,
- защита ресурсов и установка ограничений на использование ресурсов,
- вызов специальных обслуживающих программ,
- буферизация ввода/вывода.

Управление использованием времени центрального процессора.

От того, какой алгоритм выбора процесса для передачи ему в распоряжение ЦП реализован в ОС, зависят многие реальные эксплуатационные свойства ОС. Выбор алгоритма почти целиком определяется теми критериями эффективности, которые используются для оценки эффективности работы ОС. Поэтому управление использованием времени ЦП можно рассмотреть на фоне различных типов ОС.

1. Пусть есть некоторое количество счетных задач, они требуют большого объема вычислений и мало обращаются к внешним устройствам. Эти задачи должны выполняться в одной вычислительной системе. В такой ситуации критерием эффективности работы вычислительной системы является степень загрузки ЦП. Если он мало простаивает, то система работает эффективно. Этого можно добиться с использованием соответствующего алгоритма планирования, который заключается в следующем. Запускается некоторый набор задач в режиме мультипрограммирования. Алгоритм планирования времени ЦП в этом случае будет следующий: если ЦП выделен одному из процессов, то этот процесс будет занимать ЦП до наступления одной из следующих ситуаций:

1. Обращение к внешнему устройству.
2. Завершение процесса.
3. Зафиксированный факт заискивания процесса.

Как только наступила одна из этих ситуаций, управление передается другому процессу. Количество передач управления от одного процесса к другому минимизировано. Такой режим работы ОС называется пакетным, а ОС, работающая в этом режиме, называется пакетной ОС.

2. Пусть значительное количество пользователей находится в компьютерном классе, и каждый из них редактирует некоторый текст. С каждым из терминалов связана своя копия текстового редактора. В такой ситуации для системы в качестве критерия эффективности подойдет время ожидания пользователя с момента, как он по-

слал заказ на выполнение какого-то действия, до момента выполнения этого заказа. Чем эффективнее работает система, тем это среднестатистическое время ожидания в системе меньше. При этом алгоритм распределения времени центрального процессора может быть следующим.

В системе используется некоторый параметр Δt - квант времени. Все множество процессов, которое находится в мультипрограммной обработке, подразделяется на два подмножества. Первое подмножество составляют те процессы, которые еще не готовы к продолжению выполнения: например, те процессы, которые заказали себе обмен и ждут его результатов. Второе подмножество - процессы, которые готовы к выполнению. Работа будет осуществляться следующим образом. Тот процесс, который в данный момент времени занимает ЦП, будет владеть им до наступления одного из следующих событий:

- обращение с заказом на обмен,
- завершение процесса,
- исчерпание выделенного данному процессу кванта времени Δt .

При наступлении одного из этих событий планировщик ОС выбирает из процессов, готовых к выполнению, некоторый процесс и передает ему ресурсы ЦП. А выбирает он этот процесс в зависимости от того алгоритма планирования, который реализован в данной конкретной ОС. Первый способ: процесс может выбираться случайно. Второй способ: происходит как бы последовательный обход процессов, то есть сначала начинает работать один из процессов, затем (после наступления одного из указанных трех событий) время ЦП предоставляется следующему по порядку процессу из готовых к выполнению. Третьим критерием, по которому отбирается очередная задача, может быть время, в течение которого данный процесс не обслуживался ЦП. В этом случае система может выбирать процесс, у которого такое время самое большое. Эти алгоритмы должны быть реализованы в ОС, а значит, они должны быть простыми, иначе система будет работать неэффективно. ОС, работающие по описанному принципу, называются **ОС разделения времени**.

3. ОС реального времени используются в вычислительных системах, ориентированных на решения задач, для которых главным, решающим требованием к вычислительной системе является время гарантированной реакции системы на возникновение того или иного события из набора заранее предопределенных событий (например, задачи, связанные с управлением действиями систем са-

молета в режиме автопилота). Обычно ОС реального времени имеют свое специфическое устройство, и в них используются достаточно простые алгоритмы.

4. Реально, большинство современных ОС являются смешанными системами, т.е. у них присутствует в элементах планирования использования ЦП как алгоритмы, позволяющие управлять счетными задачами, так и алгоритмы, позволяющие управлять интерактивными задачами либо задачами отладочными, для которых надо немного времени ЦП.

Примером такой организации планирования ЦП может быть следующая схема. Планировщик построен по двухуровневой схеме. Мы считаем, что множество задач может содержать, предложим, счетные задачи и интерактивные задачи. Первый уровень определяет приоритет между двумя классами задач и либо отдает ЦП сначала счетной задаче, либо интерактивной задаче. А второй уровень определяет то, о чём мы говорили перед этим, т.е. как выбрать задачу в пределах одного класса и как ее прервать. Такая смешанная система может работать следующим образом. Первый уровень планирования будет работать по такому принципу: если в данный момент нет ни одной интерактивной задачи, готовой к выполнению (а это вполне реальная ситуация, если пользователи занимаются редактированием текста), то ЦП передается счетным задачам, но добавляется одно условие: как только появляется хотя бы одна интерактивная задача, счетная задача прерывается и управление передается блоку интерактивных задач. Это то, что касается первой функции управления процессами.

Управление подкачкой и буфером ввода.

Пусть большое количество людей сидит за компьютерами, и все одновременно запустили какие-то процессы. Вычислительная система не может принять для работы в мультипрограммном режиме все задачи - это слишком много. В этом случае образуется буфер ввода задач или буфер ввода процессов, то есть буфер, в котором аккумулируются те процессы, которые ожидают начала своей обработки процессором. Возникает проблема очередности выбора процессов из этого буфера для начала обработки. Это задача планирования буфера.

Задача планирования "подкачки" возникает тогда, когда процессор выполняет сразу несколько программ, и все они целиком не помещаются в оперативной памяти. В этом случае для продолжения вычислений время от времени может быть необходимо какие-то

из обрабатываемых задач (или их фрагменты) откачивать на внешнее запоминающее устройство, а какие-то подкачивать в оперативную память.

Для решения задач планирования буфера ввода и "подкачки" также нужны алгоритмы планирования, но они не столь принципиальные, как при планировании времени ЦП.

В реальных системах часто совмещается буфер подкачки, т.е. то пространство на внешних носителях, куда осуществляется откачка информации из оперативной памяти, и буфер ввода процессов.

Современные ОС часто осуществляют откачуку не единицами блоков памяти процессов, а откачивается весь процесс. При этом возникают две проблемы: каков критерий замещения процесса и каков критерий выбора из буфера того процесса, который нам требуется ввести для мультипрограммной обработки. Самый простой вариант заключается в использовании времени нахождения процесса в том или ином состоянии. В первом случае, если решается вопрос об откачке процесса из числа обрабатываемых в область подкачки, то можно взять тот процесс, который дальше всего находится в состоянии обработки по астрономическому времени. Обратные действия могут быть симметричными, т.е. можно брать из буфера ввода процессов тот процесс, который дальше всего там находится. Это простые и реальные алгоритмы планирования, и они могут видоизменяться в соответствии с критериями, выбираемыми по тем или иным соображениям. Например, один из критериев: все задачи делятся на две категории - задачи ОС (они рассматриваются в первую очередь, и среди них действует алгоритм оценки времени нахождения их в конкретном месте) и все остальные задачи.

Управление разделяемыми ресурсами.

Пусть есть два процесса, которые работают на общем пространстве оперативной памяти. При этом должны быть определенные средства, которые бы позволили синхронизовать доступ к разделяемой памяти, то есть создать условия, при которых обмен каждого из работающих процессов с общей оперативной памятью будет проходить корректно. Это значит, что при каждом чтении информации из разделяемой памяти должно быть гарантировано, что все пользователи, которые начали писать что-то в эту память, уже этот процесс завершили - должна быть синхронизация по обмену с разделяемой памятью.

Кроме того, удобно, чтобы процессы, которые функционируют одновременно, могли взаимодействовать друг с другом. Для

реализации этого во многих ОС имеются средства обмена сигналами между процессами, что является некоторой программной эмуляцией прерываний. Один процесс просит подать сигнал другому процессу. В другом процессе происходит прерывание его выполнения и передача управления на некоторую предопределенную функцию, которая должна обработать полученный сигнал. Организация всех этих действий тоже входит в функции ОС.

Обработка прерываний.

В каждой вычислительной машине имеется предопределенный, заданный при разработке набор некоторых событий и аппаратных реакций на возникновение каждого из этих событий. Ситуация, возникающая при наступлении такого события и сопровождающаяся временным или окончательным прекращением выполнения последовательности команд одной программы и переходом к выполнению команд другой программы, называется прерыванием. Аппарат прерываний используется, например, для управления внешними устройствами и для реализации возможности асинхронной работы с ними. Примером прерывания может служить прерывание по завершению обмена данными.

В момент возникновения прерывания действия аппаратуры вычислительной системы следующие:

- 1) В некоторые специальные регистры аппаратно заносится (сохраняется) информация о выполняемой в данный момент программе. Это минимальная информация, необходимая для начала обработки прерывания. Обычно в этот набор данных входит счетчик команд, регистр результата, указатель стека и несколько регистров общего назначения. Происходит так называемое малое "упрятывание".
- 2) В специальный управляющий регистр, иногда называемым регистром прерываний, помещается код возникшего прерывания.
- 3) Запускается программа обработки прерываний, входящая в состав операционной системы. Эта программа производит анализ причины прерывания. Если прерывание было фатальным (деление на ноль, например), то ОС прекращает выполнение программы, в которой возникло данное прерывание. Если же прерывание не фатальное, производится дополнительный анализ ситуа-

ции и делается вывод о том, можно ли оперативно обработать прерывание. Пример прерывания, которое всегда можно обработать оперативно - прерывание по таймеру. А прерывание, связанное, например, с приходом информации по линии связи, нельзя обработать оперативно, т.к. предварительно надо подкачать программу ОС, которая займется обработкой этого прерывания. При этом сначала происходит полное "упрятывание": все регистры сохраняются в таблицах системы (а не в аппаратных регистрах, как раньше) и фиксируется то, что некоторые фрагменты программы, находящиеся в оперативной памяти, могут быть перенесены (при необходимости) на внешнее устройство, а затем производится обработка прерывания и возврат из прерывания.

Можно выделить следующие пять основных типов прерываний: внешние прерывания (при нажатии кнопки прерывания на пульте или при завершении интервала времени по сигналу таймера), прерывания при обращении к специальным функциям ОС, прерывания от схем контроля ЭВМ (при каких-либо сбоях аппаратуры), прерывания по вводу-выводу и программные прерывания (например, при делении на ноль, при передаче сигналов между программами).

Защита ресурсов и установка ограничений на использование ресурсов.

В вычислительной системе, работающей в режиме мультипрограммирования, возникает проблема защиты памяти, т.е. необходим реализованный на аппаратном уровне механизм, обеспечивающий защиту адресного пространства каждой из программ от несанкционированного доступа других программ.

Для вычислительных систем со страничной организацией памяти механизм защиты памяти может быть устроен, например, следующим образом: в таблице приписки, в которой отражено соответствие между физической и виртуальной памятью, в строках, относящихся к страницам, не принадлежащим данной программе или еще не загруженным в оперативную память, находится код меньше нуля. При попытке обратиться к такой странице в системе возникает прерывание по защите памяти. Обрабатывая это прерывание, ОС проверяет, действительно ли этой страницы памяти у данной программы нет, и, если эта страница чужая, то ОС прекращает выполнение данного процесса с диагностикой обращения в чужую память. Если же

какие то страницы еще не загружены в память, то ОС игнорирует прерывание, так как ошибки нет.

Современные многопользовательские ОС также решают задачу персонификации пользователей.

Персонификация - это возможность операционной системы идентифицировать конкретного пользователя и в соответствии с этим принимать те или иные действия, в частности, по защите данных.

Персонификация пользователей может быть организована, например, иерархически (аналогично иерархическим файловым системам). При этом существуют понятия "конкретный пользователь", "группа пользователей" и "все пользователи". Все пользователи делятся на группы, группы состоят из конкретных пользователей. Зная пользователя, группу, к которой он принадлежит, ОС имеет возможность определить и контролировать разные права доступа к ресурсам вычислительной системы для различных пользователей. Такая схема может быть многоуровневой (группы могут делиться на подгруппы и т.д.) с соответственным распределением прав и возможностей.

Буферизация ввода/вывода.

По аналогии со способами борьбы с разницей в скорости доступа к различным компонентам вычислительной системы операционная система вводит в своих пределах программную буферизацию, которая также решает проблемы сглаживания времени доступа и проблемы синхронизации в целом. Сглаживание проблем, связанных с временем доступа, заключается в том, что практически каждая операционная система имеет КЭШ-буфера, которые аккумулируют обращения (образуют их очередь) к внешнему запоминающему устройству (ВЗУ) аналогично аппаратной буферизации при работе с оперативной памятью. Это позволяет существенно оптимизировать операционную систему. Признаком наличия такой буферизации является требование завершить выполнение операционной системы перед выключением машины. Степень этой буферизации определяет реальную эффективность системы.

Вопрос 19.

Аффинные, линейные и проективные преобразования в компьютерной графике.

Пусть задано линейное пространство L над полем вещественных чисел (далее будем считать, что $L = \mathbb{R}^2$ или $L = \mathbb{R}^3$) и задано отображение

Определение. Отображение f называется линейным, если для всех вещественных λ и μ и для любых $x, y \in L$ выполняется

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y). \quad (1)$$

Произвольное линейное преобразование в \mathbb{R}^2 можно представить в следующем виде

$$y = Mx,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

- матрица размером 2 на 2 из вещественных чисел.

Аналогично, произвольное линейное преобразование в \mathbb{R}^3 задается матрицей 3х3:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Определение. Отображение f называется аффинным, если его можно представить в виде

$$y = Mx + a, \quad (3)$$

где $a \in L$

Преобразование называется невырожденным если $\det M \neq 0$.

1. Аффинные преобразования в \mathbb{R}^2

Рассмотрим сначала основные аффинные отображения в двумерном пространстве.

1.1 Поворот.

Поворот вокруг начала координат $O(0,0)$ на угол φ против часовой стрелки задается следующей формулой:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{заметим, что } R^{-1} = R^T.$$

Обратите внимание, что определитель матрицы преобразования равен единице. Таким образом поворот – это невырожденное линейное преобразование.

1.2 Раствжение/сжатие (масштабирование)

Раствжение или сжатие вдоль координатных осей задается следующей формулой:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda > 0, \mu > 0.$$

В случае, когда $\lambda > 1, \mu > 1$ происходит растворение, а в случае $\lambda < 1, \mu < 1$ – сжатие. Как видно, это тоже линейное невырожденное преобразование.

1.3 Отражение

Отражение относительно оси абсцисс задается формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, отражение относительно оси ординат, задается формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отражение – также невырожденное линейное преобразование.

1.4 Сдвиг

Преобразование сдвига на вектор a задается формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что любое невырожденное аффинное преобразование вида (3) можно представить как суперпозицию (произведение) приведенных выше преобразований.

Пример. Рассмотрим отражение относительно произвольной прямой в пространстве R^2 . Первым шагом будем преобразование $T(a)$ сдвига на такой вектор a , чтобы рассматриваемая прямая проходила через начало координат. Следующим шагом будет преобразование поворота вокруг начала координат $R(\varphi)$, переводящее прямую в ось Ox . После этого мы выполняем отражение M_{Ox} относительно оси Ox , а потом выполняем поворот на угол $-\varphi$ и сдвиг на $-a$.

Таким образом, интересующее нас преобразование можно записать в виде

$$T(-a)R(-\varphi)M_{Ox}R(\varphi)T(a)$$

2. Аффинные преобразования в R^3

Рассмотрим теперь аффинные преобразования в трехмерном пространстве. Как и ранее, рассмотрение начнем с основных видов преобразований – поворот, масштабирование, отражение и сдвиг.

2.1 Поворот

Преобразование поворота в общем случае задается при помощи матрицы R , удовлетворяющей условию

$$R^{-1} = R^T$$

Из этого соотношения вытекает

$$RR^T = R^TR = E$$

Несложно выписать матрицы поворота вокруг координатных осей.

Матрица поворота вокруг оси Ox на угол φ имеет вид

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота вокруг оси Oy на угол φ имеет вид

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

а матрица поворота вокруг оси Oz –

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поворот вокруг прямой, проходящей через начало координат и заданной направляющим вектором l можно представить в виде

$$R(\varphi) = E + S \sin \varphi + S^2(1 - \cos \varphi),$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & l_3 & -l_2 \\ l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & -l_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Масштабирование

Масштабирование вдоль координатных осей задается при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

2.3 Отражение

Отражение относительно плоскости Oxy задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отражение относительно остальных координатных плоскостей задается аналогично.

2.4 Сдвиг

Преобразование сдвига на вектор a в пространстве R^3 задается формулой

$$y = x + a.$$

3. Однородные координаты

Удобно представить все аффинные преобразования в матричном виде. С этой целью вводятся так называемые однородные координаты.

Каждому вектору $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$ можно поставить в соответствие вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, 1)^T \in R^4$. При этом в пространстве R^4 векторов вида (x_1, x_2, x_3, w) можно произвести факторизацию, сопоставив произвольному вектору (x_1, x_2, x_3, w) вектор $(x_1 / w, x_2 / w, x_3 / w, 1)$. Тогда любой прямой, проходящей через начало координат и состоящей из точек вида (wx_1, wx_2, wx_3, w) будет сопоставлен вектор $(x_1, x_2, x_3, 1)$. Тем самым множество векторов $R^4 \setminus \{0\}$ факторизуется на классы эквивалентности, где каждый такой класс представлен вектором вида $(x_1, x_2, x_3, 1)$.

Такие четырехмерные вектора с введенным описанным выше отношением эквивалентности называются однородными координатами.

Рассмотрим преобразования в пространстве однородных координат.

Определение. Матрица $H = (h_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 4$ называется матрицей однородного преобразования, если $h_{44} = 1$.

Произвольное однородное преобразование H можно записать в следующем виде:

$$H = \begin{bmatrix} M & a \\ b^T & 1 \end{bmatrix},$$

где M – матрица 3×3 , а a, b – трехмерные вектора.

Произвольному линейному преобразованию в трехмерном пространстве соответствует следующее однородное преобразование

$$H = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг на вектор a можно также представить при помощи однородного преобразования

$$H = \begin{bmatrix} E & a \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом произвольное аффинное преобразование в трехмерном пространстве

$$y = Mx + a$$

можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & a \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Проектирование

Проектирование – это преобразование, сопоставляющее точкам из пространства R^3 точки на некоторой плоскости, называемой картинной.

В компьютерной графике используются два основные вида проектирования – параллельные и перспективные.

4.1 Параллельное проектирование

Рассмотрим плоскость $\pi : (n, x) + d = 0$ в пространстве R^3 на которую будет осуществляться проектирование.. Пусть также задан вектор l , вдоль которого будет осуществляться проектирование. При этом будем считать, что $(l, n) \neq 0$.

Тогда для нахождения проекции произвольной точки x на плоскость π проведем через точку x прямую с направляющим вектором l и точку пересечения этой прямой с плоскостью π и назовем проекцией точки x на плоскость π вдоль направления l .

Произвольная точка прямой, проходящей через точку x и имеющей направляющий вектор l , имеет вид

$$y = x + tl,$$

где $t \in R$.

Тогда параметр t можно найти, подставив уравнение прямой в уравнение плоскости

$$(x + tl, n) + d = 0.$$

Отсюда получаем

$$t = -\frac{d + (x, n)}{(l, n)}.$$

Зная t , находим проекцию точки x .

Параллельное проектирование можно записать при помощи матрицы однородного преобразования. Приведем матрицу канонического параллельного проектирования, осуществляемого на плоскость вдоль оси Oz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Перспективное проектирование

Рассмотрим, как и ранее, картинную плоскость $\pi : (n, x) + d = 0$. Пусть также задана точка c , которую будем называть центром проектирования. Тогда перспективной проекцией точки x назовем точку пересечения плоскости π с лучом, выходящим из c и проходящим через x , при условии, что точка x лежит в положительном полупространстве относительно плоскости π .

Пусть проекция точки имеет вид

$$y = (1-t)c + tx, t \in [0, 1].$$

Тогда из условия принадлежности проекции плоскости получаем

$$t = -\frac{d + (c, n)}{(x, n) - (c, n)}.$$

Перспективное проектирование также можно представить при помощи матрицы однородного преобразования.

Выпишем каноническое уравнение перспективного проектирования. Пусть центр проектирования совпадает с началом координат ($c = 0$), а картинная плоскость задается уравнением $z = 1$.

Тогда проекцией произвольной точки (x_1, x_2, x_3) будет точка $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right)$. Это преобразование осуществляется при помощи следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вопрос 20.

Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра.

В широком спектре автоматизированных информационных систем особо выделяются системы, предназначенные для поддержки удобного и долговременного хранения и обработки больших объемов информации, имеющей, как правило, достаточно сложную структуру. Для хранения такого рода информации на практике используются базы данных (БД), при этом под *базой данных* в общем случае понимается набор любых систематизированных данных, согласованных между собой. Обращение к базе данных и управление ею осуществляется с помощью *системы управления базами данных* (СУБД), которая представляет собой программную систему, ориентированную на поддержку хранения, манипулирования и управления данными, обеспечивая при этом их целостность и безопасность.

Способ организации информации в базе данных определяется конкретной *моделью данных*, положенной в основу построения этой базы. Модель данных описывает на концептуальном уровне связи между элементами хранимых данных и допустимые операции над ними, т.е. задает логическую структуру данных и механизм их обработки. Так иерархическая модель базируется на организации данных в виде деревьев, сетевая использует в качестве основного способа представления данных графы и сети.

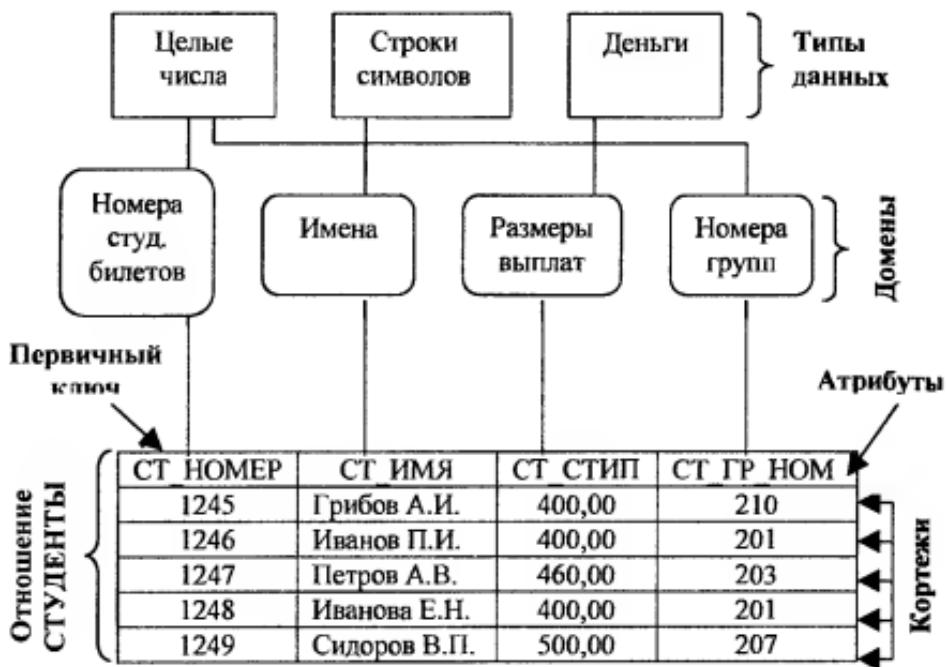
Реляционная модель является теоретической основой не только широко распространенных на сегодняшний день реляционных баз данных и соответствующих СУБД, но и всей области баз данных. Впервые принципы реляционной модели были изложены Е.Ф. Коддом в 1969-70 годах. Позднее в 70-х годах были получены основные теоретические результаты в этой области и появились первые прототипы реляционных СУБД. Наиболее бурное развитие области пришлось на 80-е годы, и это привело к тому, что уже к середине 80-х годов реляционные системы практически вытеснили с мирового рынка ранние СУБД и остаются до сих пор наиболее распространенными. Причиной такой популярности реляционных систем по сравнению с другими СУБД являются такие достоинства реляционного подхода к организации баз данных как:

- наличие небольшого набора абстракций, в терминах которых можно достаточно просто моделировать предметную область;
- использование в качестве теоретической основы подхода простого, но мощного математического аппарата на базе теории множеств и математической логики;
- возможность обрабатывать данные, абстрагируясь от физической организации баз данных во внешней памяти.

Основные термины

Реляционный подход к организации баз данных базируется на понятии отношения, и, собственно, само название подхода (а также соответствующих БД и СУБД) произошло от английского термина “relation” (отношение). Для удобства изложения рассмотрим в качестве примера отношение СТУДЕНТЫ, которое содержит информацию о студентах некоторого учебного заведения, и проиллюстрируем на нем основные понятия реляционной модели данных. К числу таких понятий относятся *тип данных, домен, атрибут, кортеж, первичный ключ и отношение*.

Понятие *типа данных* в реляционной модели данных аналогично соответствующему понятию в языках программирования. Обычно в современных реляционных БД используются символьные и числовые данные, битовые строки, а также специализированные числовые данные (например, “Деньги”) и специальные данные для обозначения времени (дата, время, временной интервал). В приведенном примере допускается использование данных трех типов: целые числа, строки символов и “Деньги”.



Домен представляет собой именованное множество атомарных значений одного и того же типа. При этом под *атомарным* значением подразумевается значение, не имеющее внутренней структуры в реляционной модели, т.е. значение, которое не может быть представлено в терминах более мелких понятий той же модели. Таким образом, атомарное значение является наименьшей семантической единицей данных в реляционной модели. Примером атомарного значения может служить любое отдельное данное из отношения СТУДЕНТЫ (конкретный номер группы, размер стипендии и т.д.).

Все домены в реляционной базе данных имеют уникальные имена, и каждый домен задает множество допустимых значений данного типа. Для определения домена указывается базовый тип данных элементов этого домена и некоторый предикат, с помощью которого формулируются возможные ограничения на значения элементов домена, т.е. во многом понятие домена в базах данных аналогично понятию подтипа в языках программирования. Например, домен “Номера групп” определен на базовом типе целых чисел, и в качестве ограничения используется тот факт, что значения

элементов домена (номера групп) должны принадлежать диапазону 101-530.

Основным назначением доменов с точки зрения семантики является то, что они ограничивают сравнения, т.е. данные считаются сравнимыми только в том случае, когда они принадлежат одному и тому же домену. Так, в приведенном выше примере нельзя сравнивать между собой значения элементов доменов "Номера студенческих билетов" и "Номера групп", хотя и те и другие значения относятся к типу целых чисел.

С понятием домена тесно связано понятие *атрибута*. Атрибут способен принимать значения из некоторого домена, причем каждый атрибут должен быть определен на единственном домене. В рамках одного отношения все имена атрибутов должны быть уникальными, причем эти имена могут совпадать с именами соответствующих доменов (если все атрибуты отношения определены на разных доменах) или отличаться от них.

Именованное множество пар вида {имя атрибута, имя домена} называется *схемой отношения*. Мощность такого множества называется *степенью* или *арностью* отношения. Из свойств атрибутов отношения следует, что все входящие в данную схему имена атрибутов различны, и каждый атрибут соответствует единственному домену. Например, схема отношения СТУДЕНТЫ содержит четыре пары указанного вида, следовательно, степень этого отношения равна четырем, и данное отношение является 4-арным.

Кортеж, соответствующий некоторой схеме отношения, представляет собой множество пар вида {имя атрибута, значение}, причем это множество содержит по одной паре такого вида для каждого имени атрибута указанной схемы отношения, а в качестве значения может употребляться любое допустимое значение из домена данного атрибута. Для кортежа так же, как и для схемы отношения, определено понятие его степени или арности (количество входящих в кортеж пар), при этом из определения понятия кортежа следует, что арность кортежа всегда совпадает с арностью соответствующей схемы отношения.

Отношение представляет собой множество кортежей, соответствующих одной схеме отношения. Мощность этого множества называется *кардинальным числом* данного отношения. Часто схему отношения называют заголовком отношения, а само отношение как множество кортежей — телом отношения.

Общепризнанным неформальным представлением отношения является таблица некоторого специального вида. Эта таблица состоит из заголовка, в качестве которого используется схема отношения, и некоторого числа неповторяющихся строк, каждая из которых является кортежем отношения. Имена атрибутов при данном способе представления соответствуют именам столбцов таблицы. Примером такой таблицы может служить таблица, задающая отношение СТУДЕНТЫ.

Свойства отношений

Из приведенных определений вытекают следующие основные свойства отношений, существенно использующиеся в реляционной модели данных:

- отсутствие в отношении одинаковых кортежей;
- отсутствие упорядоченности кортежей;
- отсутствие упорядоченности атрибутов;
- атомарность значений атрибутов.

Первые два свойства являются следствием определения отношения как множества кортежей, т.к. множество по определению представляет собой неупорядоченный набор различных значений.

Тот факт, что все кортежи данного отношения различны, гарантирует наличие у каждого отношения *первичного ключа*, под которым подразумевается некоторый набор атрибутов, значения которых однозначным образом определяют кортеж отношения. Таким образом, доступ к конкретному кортежу отношения осуществляется по первичному ключу. Исходя из свойства уникальности кортежей, в качестве первичного ключа отношения всегда можно использовать полный набор атрибутов данного отношения, однако при формальном определении первичного ключа необходимо обеспечивать неизбыточность составляющего этот ключ набора атрибутов. Это означает, что такой набор атрибутов должен быть минимальным в том смысле, что он не должен содержать в себе атрибуты, которые можно отбросить, не нарушая основное свойство первичного ключа — однозначно определять кортеж. Так, первичным ключом отношения СТУДЕНТЫ является набор из одного единственного атрибута СТ_НОМЕР, поскольку значение именно этого атрибута однозначным образом определяет любой кортеж данного отношения.

Свойство отсутствия упорядоченности атрибутов вытекает из определения схемы отношения как множества пар заданного вида.

Если доступ к конкретному кортежу отношения осуществляется по первичному ключу, то доступ к значению какого-либо атрибута в кортеже всегда осуществляется по имени этого атрибута.

Свойство атомарности значений атрибутов является следствием определения домена как потенциального множества значений некоторого простого типа данных, не имеющего внутренней структуры в реляционной модели. Отношение, удовлетворяющее данному свойству, называется *нормализованным* или представленным в *первой нормальной форме*. В реляционной модели данных рассматриваются только нормализованные п-арные отношения, которые составляют основу классического реляционного подхода к организации баз данных. Несмотря на наличие некоторых ограничений, нормализованные отношения существенно упрощают обработку данных.

Реляционная модель данных

Реляционной моделью данных называется формальная теория, лежащая в основе реляционных систем. Фундамент этой теории составляют теория множеств и логика предикатов. Реляционная модель описывает некоторый набор основных понятий и признаков, которыми должны обладать все СУБД и управляемые ими базы данных, основывающиеся на этой модели. Реляционная модель рассматривает данные только на логическом уровне, что позволяет абстрагироваться от конкретного способа их реализации.

В реляционной модели выделяется три аспекта рассмотрения данных — *структура данных, целостность данных и обработка данных*, и в соответствии с этим модель делится на три части, каждая из которых рассматривает один из этих аспектов.

Часть реляционной модели, связанная со структурой данных, — *структурная часть* модели — фактически уже описана в предыдущих разделах. В структурной части модели декларируется, что единственной структурой данных, используемой в реляционных базах данных, является нормализованное п-арное отношение.

Рассмотрению аспекта целостности данных посвящена *целостная часть* реляционной модели. Здесь формулируются следующие два требования целостности, которые должны поддерживаться в любой реляционной СУБД:

- целостность сущностей;
- целостность по ссылкам.

Более подробно эта часть модели описана в следующем разделе.

Аспект обработки данных рассматривается в *манипуляционной части* реляционной модели. Здесь определяются два основных механизма манипулирования реляционными данными — *реляционная алгебра и реляционное исчисление*. Первый механизм базируется на классической теории множеств, а второй на логике исчисления предикатов первого порядка. Оба эти механизма обладают свойством замкнутости относительно понятия отношения, т.е. выражения реляционной алгебры и формулы реляционного исчисления определяются над отношениями и результатом вычисления также являются отношения, что позволяет использовать результат в других выражениях и формулах.

Причиной включения указанных механизмов в реляционную модель является их большая выразительная мощность, что позволяет формулировать сложные запросы к базе данных в виде одного выражения реляционной алгебры или одной формулы реляционного исчисления. Основной функцией манипуляционной части реляционной модели является обеспечение меры реляционности любого конкретного языка реляционных баз данных. При этом язык называется *реляционно полным*, если он обладает не меньшей выразительностью и мощностью, чем реляционная алгебра или реляционное исчисление, т.е. если любой запрос, выражаемый с помощью одного выражения реляционной алгебры или одной формулы реляционного исчисления, может быть выражен одним оператором этого языка.

Механизмы реляционной алгебры и реляционного исчисления эквивалентны, т.е. для любого выражения реляционной алгебры можно построить эквивалентную (приводящую к тому же результату) формулу реляционного исчисления и наоборот. Отличаются эти механизмы способом интерпретации выражений и формул: выражения реляционной алгебры имеют строго определенную однозначную интерпретацию, тогда как для формул реляционного исчисления однозначная интерпретация, как правило, отсутствует. Это означает, что при формулировке запроса к базе данных в реляционной алгебре четко указывается способ получения результирующего отношения в виде последовательности выполнения реляционных операций. В случае же реляционного исчисления указываются только свойства результирующего отношения без уточнения способа его формирования. Поэтому реляционная алгебра лежит в основе процедурных языков обработки

реляционных данных, а реляционное исчисление составляет основу непроцедурных или декларативных языков. Более подробно реляционная алгебра и реляционное исчисление описаны ниже.

Целостность данных

В реляционных базах данных любой объект или сущность реального мира представляется некоторыми кортежами отношений. Требование целостности сущностей заключается в том, что для всех отношений должно выполняться условие: любой кортеж отношения должен отличаться от любого другого кортежа этого же отношения или, другими словами, любое отношение должно обладать первичным ключом. Выполнение этого требования в реляционной модели данных обеспечивается основными свойствами отношений этой модели.

Ограничение первой нормальной формы, требующее атомарности значений атрибутов в отношениях, приводит к тому, что сложные сущности реального мира невозможно представить в виде кортежей одного какого-либо отношения, они представляются в реляционной базе данных в виде некоторых кортежей нескольких отношений.

Пусть, например, в реляционной базе данных требуется представить сущность ГРУППА с атрибутами ГР_НОМЕР (номер группы), ГР_КОЛ (количество студентов в группе) и ГР_СТУД (множество студентов группы), причем для каждого студента необходимо также хранить СТ_НОМЕР (номер студенческого билета), СТ_ИМЯ (фамилия студента), СТ_СТИП (размер стипендии студента). Тогда для соблюдения ограничения нормализованности отношений необходимо представить сущность ГРУППА в виде двух отношений: ГРУППЫ (ГР_НОМЕР, ГР_КОЛ) с первичным ключом ГР_НОМЕР и СТУДЕНТЫ (СТ_НОМЕР, СТ_ИМЯ, СТ_СТИП, СТ_ГР_НОМ) с первичным ключом СТ_НОМЕР.

В данном представлении основное назначение атрибута СТ_ГР_НОМ состоит в том, чтобы иметь возможность восстанавливать полную сущность ГРУППА. При этом существенно, что значение атрибута СТ_ГР_НОМ в любом кортеже отношения СТУДЕНТЫ должно соответствовать значению атрибута ГР_НОМЕР в некотором кортеже отношения ГРУППЫ, т.е. по сути оба эти атрибута должны представлять одно и то же свойство сущности. Такой атрибут называется *внешним ключом*, поскольку его значения однозначно характеризуют сущности (задают значения

их первичного ключа), представленные кортежами другого отношения. В этом случае говорят, что отношение, в котором определен внешний ключ, *ссылается* на отношение, в котором такой же атрибут является первичным ключом. В нашем примере отношение СТУДЕНТЫ ссылается на отношение ГРУППЫ.

Требование целостности по ссылкам или требование внешнего ключа заключается в том, что для каждого значения внешнего ключа, входящего в отношение, из которого осуществляется ссылка, должен найтись кортеж с таким же значением первичного ключа в отношении, на которое эта ссылка осуществляется, в противном случае значение внешнего ключа должно быть неопределенным. Для рассмотренного примера требование целостности по ссылкам означает, что при указании для какого-либо студента номера группы необходимо существование группы с таким номером.

Оба указанные требования целостности данных должны поддерживаться реляционными СУБД. Для поддержки требования целостности сущностей достаточно обеспечить уникальность первичного ключа в рамках любого отдельного отношения. Основные проблемы по обеспечению целостности по ссылкам возникают при выполнении удаления кортежа из отношения, на которое имеется ссылка. Эти проблемы могут быть решены одним из следующих способов. Первый способ заключается в запрете удаления кортежей, на которые имеются ссылки. Второй способ при удалении кортежа, на который имеются ссылки, приводит к автоматической замене внешнего ключа на неопределенное значение во всех кортежах, ссылающихся на удаленный кортеж. И, наконец, третий способ (каскадное удаление) заключается в том, что наряду с удалением кортежа, на который имеются ссылки, удаляются все ссылающиеся на него кортежи. Выбор конкретного способа обеспечения целостности по ссылкам во многом определяется спецификой прикладной области.

Реляционная алгебра

В реляционной алгебре средства обработки отношений базируются на теоретико-множественных операциях, состав которых расширен некоторыми дополнительными операциями, специфичными для баз данных. Набор основных алгебраических операций состоит из восьми операций, которые делятся на два класса — теоретико-множественные операции и специальные

реляционные операции. К теоретико-множественным операциям набора относятся операции:

- объединения отношений,
- пересечения отношений,
- вычитания отношений,
- прямого произведения отношений.

Специальные реляционные операции включают операции:

- ограничения отношения,
- проекции отношения,
- соединения отношений,
- деления отношений.

Кроме того, в состав реляционной алгебры включены операция присваивания, которая позволяет сохранить в базе данных результаты вычисления алгебраических выражений, и операция переименования атрибутов, в результате которой тело отношения остается неизменным, но меняются имена атрибутов. Операция переименования атрибутов обеспечивает возможность корректно сформировать схему (заголовок) результирующего отношения при возникновении конфликтов именования атрибутов в отношениях, являющихся операндами одной реляционной операции.

Теоретико-множественные операции имеют традиционную в теории множеств интерпретацию, хотя и обладают некоторыми особенностями. Результатом объединения двух отношений является отношение, в состав которого входят все кортежи, входящие хотя бы в одно из отношений-операндов. Пересечение двух отношений дает в результате отношение, включающее в себя все кортежи, входящие одновременно в оба отношения-операнда. Результатом вычитания двух отношений является отношение, содержащее все кортежи отношения, указанного в качестве первого операнда, которые не входят в отношение-второй операнд. Прямое произведение двух отношений дает в результате отношение, кортежи которого представляют собой конкатенацию (сцепление) кортежей первого и второго operandов.

Особенностью операций объединения, пересечения и вычитания является то, что для их выполнения схемы (заголовки) отношений-операндов должны быть одинаковыми, т.е. в заголовках этих отношений должен использоваться один и тот же набор имен атрибутов, причем одноименные атрибуты должны быть определены на одном и том же домене. Если заголовки отношений-операндов совпадают с точностью до имен атрибутов, то полную идентичность заголовков можно обеспечить за счет применения операции

Для определения набора имен атрибутов результирующего отношения в исчислении кортежей используется понятие *целевого списка*. Элементом целевого списка в общем случае является конструкция вида var.attr , где var – имя свободной переменной, attr – имя атрибута отношения, на котором определена переменная var . Если имя переменной в целевом списке указано без имени атрибута, то в целевой список включаются имена всех атрибутов определяющего отношения. При формировании целевого списка необходимо обеспечивать уникальность имен атрибутов результирующего отношения, для этого любое повторное вхождение имени атрибута в целевой список должно быть заменено новым именем.

Выражением исчисления кортежей называется конструкция вида tl WHERE wff . Значением этого выражения является отношение, тело которого определяется указанной в данном выражении WFF, а набор атрибутов и их имена — целевым списком tl .

В исчислении доменов областью определения переменных являются домены. Правила построения формул и выражений исчисления доменов аналогичны соответствующим правилам исчисления кортежей. Основным отличием является наличие в исчислении доменов дополнительного набора предикатов, с помощью которого выражается условие членства или условие принадлежности. Для n -арного отношения R это условие имеет вид:

$R(\text{pair}_1, \dots, \text{pair}_m)$ ($m \leq n$),

где каждая пара pair_i задается конструкцией $A:v$, в которой A – имя атрибута отношения R , v – либо литерал, либо имя переменной домена. Условие членства принимает значение *true* тогда и только тогда, когда в отношении R существует кортеж, содержащий заданные значения указанных в нем атрибутов.

Литература:

1. К. Дейт. Введение в системы баз данных. –6-е издание. Издательский дом "Вильямс", 1999.
2. С.Д. Кузнецов. Основы современных баз данных. Информационно-аналитические материалы Центра Информационных Технологий.
<http://citforum.ru/database/osbd/contents.shtml>

Вопрос 21.

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

1. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений часто можно записать в нормальной форме $\vec{y}' = \vec{G}(x, \vec{y})$, то есть в виде системы уравнений первого порядка относительно компонент вектора - функции $\vec{y}(x)$.

Пример. Систему уравнений

$$\begin{cases} u'' = \cos u + x \cdot \sin v + v' \\ v'' = u + \cos u' + \sin v' + x^2 \end{cases}$$

относительно функций $u(x), v(x)$ можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \cos y_1 + x \cdot \sin y_3 + y_4 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 + \cos y_2 + \sin y_4 + x^2, \end{cases}$$

если положить $y_1 = u, y_3 = v$.

Наиболее простыми являются линейные системы дифференциальных уравнений. В нормальной форме они имеют вид $\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$, где $n \times n$ - матрица $A(x)$ имеет элементы $a_{kj}(x)$.

2. Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x),$$

где все функции A_0, \dots, A_n, F заданы в одном и том же интервале $\alpha < x < \beta$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Если всюду в этом интервале $A_0(x) \neq 0$, то, разделив обе

части уравнения на $A_0(x)$, получим уравнение

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x).$$

Теорема. Если $x = \varphi(t)$ – произвольная n раз дифференцируемая функция, производная которой $\varphi'(t) \neq 0$, а область значений принадлежит интервалу (α, β) , то при такой замене независимой переменной уравнение $L_n[y] = f(x)$ остаётся линейным.

Теорема. Если функции $p(x)$ и $q(x)$ n раз дифференцируемы на интервале (α, β) и $p(x) \neq 0$ всюду на (α, β) , то при линейной замене искомой функции $y = p(x)z + q(x)$ уравнение $L_n[y] = f(x)$ останется линейным. При замене $y = p(x)z$ однородное уравнение $L_n[y] = 0$ останется линейным однородным.

Линейное уравнение $L_n[y] = f(x)$ порядка n можно свести к системе n линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введём векторную функцию $\vec{y}(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))$, которая удовлетворяет системе

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = f(x) - a_1(x)y_{n-1} - \dots - a_{n-1}(x)y_1 - a_n(x)y_0. \end{cases}$$

Эта система имеет вид $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$, где

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Все свойства линейного уравнения n -го порядка можно получить из теории систем линейных уравнений 1-го порядка.

Систему линейных уравнений, записанную в нормальной форме, можно в свою очередь свести к одному линейному дифференциальному уравнению n -го порядка путём исключения неизвестных. В этом смысле уравнение $L_n[y] = f(x)$ и система $\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$ эквивалентны.

3. Пусть каждая из вектор-функций $\vec{u}_1(x), \dots, \vec{u}_n(x)$ имеет n компонент. Будем считать эти вектор-функции столбцами некоторой $n \times n$ -матрицы $U(x)$.

Теорема. Вектор-функции $\vec{u}_1(x), \dots, \vec{u}_n(x)$ являются решениями однородной системы $\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x)$ с заданной $n \times n$ -матрицей $A(x)$ в том, и только в том случае, если матрица $U(x)$ удовлетворяет матричному уравнению $U'(x) = A(x)U(x)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что матрица $U'(x)$ составлена из производных всех компонент векторов $\vec{u}_1(x), \dots, \vec{u}_n(x)$. \square

Теорема. Пусть матрица $U(x)$ удовлетворяет матричному уравнению $U'(x) = A(x)U(x)$. Тогда вектор-функция $\vec{y}(x) = U(x)\vec{c}$, где \vec{c} – постоянный вектор, удовлетворяет системе $\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x)$.

Доказательство. Выражение $L[\vec{y}] = \vec{y}' - A(x)\vec{y}$ является применением к \vec{y} линейного оператора L . Для L выполнен

принцип суперпозиции: $L\left[\sum_{j=1}^k c_j \vec{u}_j\right] = \sum_{j=1}^k c_j \cdot L[\vec{u}_j]$ для любых

постоянных c_1, \dots, c_k . Отсюда и получаем утверждение теоремы. \square

Определение. Вектор-функции $\vec{u}_1(x), \dots, \vec{u}_k(x)$ называются линейно зависимыми на интервале $\alpha < x < \beta$, если существуют постоянные c_1, \dots, c_k , не все равные нулю, такие, что на этом интервале имеет место тождество $\sum_{j=1}^k c_j \vec{u}_j(x) \equiv 0$. Если же последнее тождество выполняется только при $c_1 = \dots = c_k = 0$, то вектор-функции $\vec{u}_1(x), \dots, \vec{u}_k(x)$ называются линейно независимыми.

Теорема. Если все элементы $a_{kj}(x)$ $n \times n$ -матрицы $A(x)$ являются непрерывными на интервале (α, β) функциями, то множество всех решений $\vec{y}(x)$ линейной однородной системы (векторного уравнения) $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ образует n -мерное линейное пространство.

Доказательство. В предыдущей теореме доказано, что все решения рассматриваемой однородной системы образуют линейное пространство. Надо доказать, что его размерность равна n . Для этого докажем, что существует n таких линейно независимых решений $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$, что любое другое решение того же векторного уравнения является их линейной комбинацией. Рассмотрим n задач Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = A(x)\vec{y}(x), & \alpha < x < \beta, \\ \vec{y}(x_0) = \vec{\xi}_j, & \alpha < x_0 < \beta, \end{cases}$$

с начальными условиями в одной и той же точке x_0 ; $j = 1, \dots, n$. При каждом j за $\vec{\xi}_j$ возьмём вектор со всеми нулевыми компонентами, кроме j -ой, которая равна 1. Из непрерывности элементов матрицы $A(x)$ следует существование и единственность решения \vec{y}_j каждой такой задачи Коши на интервале (α, β) . Эти ре-

шения линейно независимы на (α, β) . Действительно, в противном случае нашлись бы такие не все равные нулю постоянные c_1, \dots, c_n , что $\sum_{j=1}^n c_j \vec{y}_j(x) \equiv 0$ на (α, β) . Тогда и $\sum_{j=1}^n c_j \vec{\xi}_j = 0$,

что невозможно из-за выбора векторов $\vec{\xi}_j$. Так как выбранные векторы $\vec{\xi}_j$ образуют базис n -мерного арифметического пространства, то любой n -мерный постоянный вектор $\vec{\xi}$ однозначно представим в виде $\vec{\xi} = \sum_{j=1}^n c_j \vec{\xi}_j$ с некоторыми c_1, \dots, c_n . Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = A(x)\vec{y}(x), & \alpha < x < \beta, \\ \vec{y}(x_0) = \vec{\xi}, & \alpha < x_0 < \beta \end{cases}$$

имеет вид $\vec{y} = \sum_{j=1}^n c_j \vec{y}_j$ в силу теоремы единственности решения линейной задачи Коши с непрерывными $a_k(x)$. То есть любое решение $\vec{y}(x)$ исходного векторного уравнения однозначно представляется линейной комбинацией его решений $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$. \square

Определение. Фундаментальной системой решений однородного векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ называются любые n линейно независимых на (α, β) его решений $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ (т.е. любой базис в n -мерном пространстве его решений).

Если векторы - столбцы $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$, то из этих столбцов можно составить $n \times n$ -матрицу $V(x)$, которая называется фундаментальной матрицей. Очевидно, $V(x)$ удовлетворяет матричному уравнению $V'(x) = A(x)V(x)$.

Определение. Пусть $k \times k$ – матрица $V(x)$ составлена из векторов-столбцов $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_k(x)$. Определитель $W(x) \equiv W[\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_k(x)] \equiv \det V(x)$ называется определителем Вронского системы этих векторов.

Теорема. Либо решения $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ с непрерывной $n \times n$ -матрицей $A(x)$ линейно зависимы на (α, β) , и тогда $W[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] \equiv 0$ на (α, β) ; либо решения $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ этого уравнения линейно независимы на (α, β) , и тогда $W[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] \neq 0$ ни в одной точке интервала (α, β) . В последнем случае матрица $V(x)$, составленная из векторов-столбцов $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$, является фундаментальной матрицей.

Доказательство. Если решения $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ рассматриваемого векторного уравнения линейно зависимы на (α, β) , то при некотором $\vec{c} \neq 0$ $V(x)\vec{c} \equiv 0$ на (α, β) . То есть однородная система линейных алгебраических уравнений относительно компонент c_1, \dots, c_n вектора \vec{c} имеет нетривиальное решение. Поэтому $\det V(x) \equiv 0$. Если же при некотором x_0 $\det V(x_0) = 0$, то система алгебраических уравнений $V(x_0)\vec{c} = 0$ имеет решение $\vec{c} \neq 0$. Положим $\vec{y}(x) = V(x)\vec{c}$. Такая вектор-функция $\vec{y}(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = A(x)\vec{y}(x), & \alpha < x < \beta, \\ \vec{y}(x_0) = 0, & \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$$

В силу теоремы единственности решения линейной задачи Коши с непрерывной матрицей $A(x)$ $\vec{y}(x) \equiv 0$ на (α, β) . Поэтому $V(x)\vec{c} \equiv 0$ на (α, β) , и, следовательно, $\det V(x) \equiv 0$. Если при всех x $\det V(x) \neq 0$, то $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ – линейно независимые решения. \square

Пример. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ тождественно равен нулю. Но её столбцы линейно независимы. Это значит, что столбцы $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ не могут быть решениями какой-либо системы уравнений $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ с непрерывной 2×2 -матрицей $A(x)$.

Знание фундаментальной матрицы $V(x)$ позволяет представить любое решение \vec{y} уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ в виде $\vec{y}(x) = V(x) \cdot \vec{c}$, где \vec{c} – некоторый постоянный вектор-столбец. Этот вектор \vec{c} можно найти из произвольных начальных условий $\vec{y}(x_0) = V(x_0) \vec{c} = \vec{\xi}$, так как $\det V(x_0) \neq 0$. Тогда искомое решение будет иметь вид $\vec{y}(x) = K(x, x_0) \vec{\xi}$, где зависящая от параметра x_0 матрица-функция $K(x, x_0)$ является решением матричной задачи Коши $\begin{cases} K'_x(x, x_0) = A(x)K(x, x_0) \\ K(x_0, x_0) = E \end{cases}$ (E – единичная матрица). Действительно, если $V'(x) = A(x)V(x)$, то $K(x, x_0) = V(x)V^{-1}(x_0)$ удовлетворяет уравнению $K'_x(x, x_0) = A(x)K(x, x_0)$, а равенства $\vec{y}(x) = V(x)\vec{c}$ и $\vec{y}(x_0) = \vec{\xi}$ дают $\vec{y}(x) = V(x)V^{-1}(x_0)\vec{\xi}$. Равенство $K(x_0, x_0) = E$ очевидно. $K(x, x_0)$ называют импульсной матрицей.

4. Знание фундаментальной матрицы однородной системы позволяет построить общее решение неоднородной системы, записав её частное решение при помощи импульсной матрицы.

Теорема. Если $V(x)$ – фундаментальная матрица однородного векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ с непрерывной $n \times n$ -матрицей $A(x)$, а \vec{y}_f – какое угодно частное решение не-

однородного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$, то любое решение \vec{y} этого неоднородного уравнения представимо в виде $\vec{y}(x) = V(x)\vec{c} + \vec{y}_f(x)$, где \vec{c} – некоторый постоянный вектор-столбец.

Частное решение \vec{y}_f неоднородного векторного уравнения можно найти методом вариации постоянных. \vec{y}_f ищут в виде $\vec{y}_f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{y}_j(x)$, где $\vec{y}_j(x)$ – элементы фундаментальной системы решений однородного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$. Для отыскания коэффициентов $c_j(x)$ получим для их производных систему линейных алгебраических уравнений с определителем $W[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] \neq 0$. Коэффициенты $c_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, определяются с точностью до произвольных постоянных слагаемых. Если для уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$ поставлена задача Коши, то из начальных условий однозначно определим $\vec{y}_f(x)$.

Для решения задачи Коши $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$, $\vec{y}(x_0) = \vec{\xi}$ достаточно решить две задачи Коши:

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{\xi};$$

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{0}.$$

Последняя задача имеет решение $\vec{y}(x) = V(x) \int_{x_0}^x V^{-1}(s) \vec{f}(s) ds$; где

$V(x)$ – фундаментальная матрица однородного векторного уравнения. Если матрицу $V(x)V^{-1}(s)$ обозначить через $K(x, s)$, то получим $\vec{y}(x) = \int_{x_0}^x K(x, s) \vec{f}(s) ds$, где импульсная матрица $K(x, s)$

при каждом фиксированном значении параметра s является решением однородного матричного уравнения $K'_s = A(x)K$ и удовле-

творяет условию $K(s, s) = E$ – единичная матрица. Такая форма записи решения неоднородной системы, удовлетворяющего нулевому начальному условию, получается из вариации постоянных:

$$\bar{y}(x) = V(x)\bar{c}, \quad \bar{c}'(x) = V^{-1}(x)\bar{f}(x), \quad \bar{c}(x) = \int_{x_0}^x V^{-1}(s)\bar{f}(s)ds.$$

5. Определение. Последовательность $n \times n$ матриц $\{A_k\}$ (с постоянными элементами) называется сходящейся к матрице A , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $k \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|A_k - A\| < \varepsilon$. (Здесь $\|A\|$ – норма матрицы A .)

Определение. Если последовательность частичных сумм $\sum_{j=1}^k A_j$ $n \times n$ -матриц A_j сходится к матрице A , то говорят, что сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$, и его сумма равна A .

Пример. Ряд $E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ сходится для любой $n \times n$ -матрицы A по критерию Коши. Его сумму обозначают через e^A . Вообще говоря, $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Теорема. Фундаментальная матрица $V(x)$ однородного векторного уравнения $\bar{y}'(x) = A(x)\bar{y}(x)$ с постоянной $n \times n$ -матрицей A имеет вид $V(x) = e^{xA}$, $-\infty < x < +\infty$. Решение задачи Коши $\bar{y}'(x) = A(x)\bar{y}(x)$, $\bar{y}(x_0) = \bar{\xi}$ имеет вид $\bar{y}(x) = e^{(x-x_0)A}\bar{\xi}$.

Структура фундаментальной матрицы $V(x) = e^{xA}$ определяется канонической формой Жордана матрицы A : если $A = PJP^{-1}$, где J – клеточная матрица Жордана, а P – невырожденная матрица подобного преобразования, то $e^{xA} = e^{xPJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1}$. Поэтому наряду с матрицей $V(x)$ фундаментальной будет, например, и матрица $U(x) = e^{xA}P = Pe^{xJ}$. Знание матриц P и

J позволяет покомпонентно записать решения уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ в виде произведений многочленов по переменной x и экспонент $e^{\lambda x}$, где λ – собственные значения матрицы A . Решения однородного векторного уравнения с постоянной матрицей A строят в зависимости от кратности собственного значения λ (здесь под кратностью λ понимается кратность корня характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$). Пусть λ – собственное значение $n \times n$ -матрицы A , а \vec{h} – отвечающий этому собственному значению собственный вектор. Тогда вектор-функция $\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{h}$ является решением системы уравнений $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$. Если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A попарно различны, и $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ – отвечающие им собственные векторы, то общее решение однородной системы уравнений имеет вид $\vec{y}(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j x} \vec{h}_j$, где c_j – произвольные постоянные. Если для кратного корня λ характеристического уравнения имеется столько линейно независимых собственных векторов $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k$, какова его кратность, то ему соответствуют k линейно независимых решений однородной системы: $e^{\lambda x} \vec{h}_1, \dots, e^{\lambda x} \vec{h}_k$. Если же для корня λ кратности k имеется только $m < k$ линейно независимых собственных векторов, то соответствующие этому λ решения можно искать в виде произведения векторного многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda x}$: $\vec{y} = (\vec{h}_0 + \vec{h}_1 x + \dots + \vec{h}_{k-m} x^{k-m}) e^{\lambda x}$. При этом векторы $\vec{h}_0, \dots, \vec{h}_{k-m}$ можно найти из исходной системы уравнений, приравнив коэффициенты подобных членов в обеих её частях.

6. Рассмотрим теперь линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$L_n[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$ отдельно, не сводя его к системе уравнений первого порядка. Выражение $L_n[y]$ называется (формальным) дифференциальным оператором порядка n . Этот оператор определён на любой n раз дифференцируемой на (α, β) скалярной функции $y(x)$. Он является линейным оператором.

Теорема. Если y_1, y_2 – произвольные n раз дифференцируемые на (α, β) функции, то для любых постоянных c_1, c_2 выполнено равенство $L_n[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L_n[y_1] + c_2L_n[y_2]$.

Если $f(x) = \sum_{j=1}^k c_j f_j(x)$, где $c_j = const$, а $y_j(x)$ являются решениями уравнений $L_n[y_j] = f_j(x)$, то функция $y(x) = \sum_{j=1}^k c_j y_j(x)$ является решением уравнения $L_n[y] = f(x)$.

В частности, любая линейная комбинация решений однородного уравнения $L_n[y] = 0$ является решением этого однородного уравнения. Разность двух решений неоднородного уравнения $L_n[y] = f(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $L_n[y] = 0$. Комплекснозначная функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $L_n[y] = f_1(x) + if_2(x)$ с действительными коэффициентами $a_1(x), \dots, a_n(x)$ и действительными $f_1(x), f_2(x)$ тогда и только тогда, когда функции $y_1(x) = \operatorname{Re} y(x)$ и $y_2(x) = \operatorname{Im} y(x)$ удовлетворяют уравнениям $L_n[y_1] = f_1(x)$, $L_n[y_2] = f_2(x)$.

Определение. Скалярные функции $u_1(x), \dots, u_k(x)$ называются линейно зависимыми на интервале $\alpha < x < \beta$, если существуют постоянные c_1, \dots, c_k , не все равные нулю, такие, что на этом интервале имеет место тождество $\sum_{j=1}^k c_j u_j(x) \equiv 0$. Если же последнее тождество выполняется только при $c_1 = \dots = c_k = 0$, то функции $u_1(x), \dots, u_k(x)$ называются линейно независимыми.

Пример. Функции $1, x, x^2, \dots, x^k$ линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, а также в любом конечном интервале.

Пример. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – действительные числа, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Тогда функции $x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_k}$ линейно независимы на интервале $(0, +\infty)$.

Пример. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – действительные числа, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Тогда функции $e^{p_1 x}, e^{p_2 x}, \dots, e^{p_k x}$ линейно независимы на любом интервале (α, β) .

Пример. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – комплексные числа, $p_m \neq p_n$ при $m \neq n$. Тогда функции $e^{p_1 x}, e^{p_2 x}, \dots, e^{p_k x}$ линейно независимы на любом интервале (α, β) .

Пример. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – комплексные числа, $p_m \neq p_n$ при $m \neq n$. Тогда функции

$$e^{p_1 x}, x e^{p_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{p_1 x}$$

$$e^{p_2 x}, x e^{p_2 x}, \dots, x^{n_2} e^{p_2 x}$$

.....

$$e^{p_k x}, x e^{p_k x}, \dots, x^{n_k} e^{p_k x}$$

линейно независимы на любом интервале (α, β) .

Определение. Пусть функции y_1, \dots, y_k ($k-1$) раз дифференцируемы на (α, β) . Определитель

$$W(x) \equiv W[y_1, \dots, y_k] \equiv \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

называется

определителем Вронского.

Теорема. Если функции y_1, \dots, y_k ($k-1$) раз дифференцируемы на (α, β) и линейно зависимы на этом интервале, то на (α, β) $W[y_1, \dots, y_k] \equiv 0$.

Теорема. Пусть коэффициенты $a_1(x), \dots, a_n(x)$ линейного дифференциального оператора $L_n[y]$ непрерывны на интервале (α, β) . Если решения y_1, \dots, y_n однородного уравнения $L_n[y] = 0$ являются линейно независимыми на (α, β) , то $W[y_1, \dots, y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.

Таким образом, имеет место альтернатива: либо решения y_1, \dots, y_n уравнения $L_n[y] = 0$ с непрерывными коэффициентами линейно зависимы на (α, β) , и тогда $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ на (α, β) ; либо решения y_1, \dots, y_n этого уравнения линейно независимы на (α, β) , и тогда $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ ни в одной точке интервала (α, β) .

Пример.

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0; \\ x^2, & 0 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 0; \\ 0, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

На любом интервале (α, β) , содержащем точку $x = 0$, функции y_1, y_2 линейно независимы. Но $W[y_1, y_2] \equiv 0$. Это значит, что y_1, y_2 не могут быть решениями какого-либо уравнения $L_2[y] = 0$ с непрерывными на (α, β) коэффициентами.

Теорема. Максимальное число линейно независимых на (α, β) решений однородного уравнения $L_n[y] = 0$ с непрерывными на (α, β) коэффициентами равно его порядку n . Его общим решением является линейная комбинация n линейно независимых на (α, β) решений с произвольными постоянными коэффициентами.

Определение. Любые n линейно независимых решений однородного уравнения n -го порядка $L_n[y] = 0$ называют его фундаментальной системой решений.

Множество всех решений однородного уравнения $L_n[y] = 0$ с непрерывными на (α, β) коэффициентами образует линейное пространство размерности n , а любая фундаментальная система является базисом в этом пространстве.

Теорема. Пусть коэффициенты $a_1(x), \dots, a_n(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения $L_n[y] = f(x)$ непрерывны на (α, β) . Тогда решение задачи Коши $L_n[y] = f(x)$, $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$ ($x_0 \in (\alpha, \beta)$) существует и единственno всюду на (α, β) .

Сформулированная теорема позволяет построить конкретные фундаментальные системы однородного уравнения. Если выбрать n^2 чисел b_{jk} , $j = 1, \dots, n$; $k = 0, \dots, n-1$, подчинив их

выбор лишь условию $\det \begin{pmatrix} b_{10} & b_{20} & \dots & b_{n0} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n-1} & b_{2n-1} & \dots & b_{nn-1} \end{pmatrix} \neq 0$, то решения

$y_j(x)$ уравнения $L_n[y] = 0$, определяемые начальными условиями $y_j^{(k)} = b_{jk}$, образуют фундаментальную систему. Матрицу b_{jk}

удобно выбрать единичной: $b_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k+1; \\ 1, & j = k+1; \end{cases}$ соответствующая ей фундаментальная система называется нормальной фундаментальной системой. Если y_1, \dots, y_n – нормальная фундаментальная система, то решение уравнения $L_n[y] = 0$ с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$, имеет вид $y = b_0 \cdot y_1(x) + b_1 \cdot y_2(x) + \dots + b_{n-1} \cdot y_n(x)$.

7. **Теорема.** Если два однородных уравнения с непрерывными

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

$\tilde{L}_n[y] \equiv y^{(n)} + \tilde{a}_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_n(x)y = 0$ имеют общую фундаментальную систему, то они совпадают: $a_j(x) \equiv \tilde{a}_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Это значит, что фундаментальная система y_1, \dots, y_n однозначно определяет линейное однородное уравнение с непрерывными коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным 1. Такое уравнение имеет вид $\frac{W[y_1, \dots, y_n, y]}{W[y_1, \dots, y_n]} \equiv 0$. Разлагая определитель

$W[y_1, \dots, y_n, y]$ по элементам последнего столбца, можно найти все коэффициенты уравнения. Например, $a_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$. Отсюда

следует, что $W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a_1(x) dx \right\}$.

Пример. Если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, то линейно независимое с ним решение $y_2(x)$ можно найти, решая уравнение первого порядка $\det \begin{pmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{pmatrix} = C \cdot \exp \left\{ - \int a_1(x) dx \right\}$. Деля обе части последнего

уравнения на y_1^2 , получим $\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{C}{y_1^2} \cdot \exp \left\{ - \int a_1(x) dx \right\}$.

Отсюда легко найти второе решение $y_2(x)$.

Приведённый пример отражает общую ситуацию: если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения $L_n[y] = 0$, то для новой искомой функции $z = \frac{y(x)}{y_1(x)}$ получим линейное однородное уравнение порядка $n-1$.

8. Теорема. Если y_1, \dots, y_n – фундаментальная система решений однородного уравнения $L_n[y] = 0$ с непрерывными коэффициентами, а y_f – какое угодно частное решение неоднородного уравнения $L_n[y] = f(x)$, то любое решение y этого неоднородного уравнения представимо в виде

$$y(x) = y_f(x) + \sum_{j=1}^n c_j y_j(x), \text{ где } c_j \text{ – некоторые постоянные.}$$

Частное решение y_f неоднородного уравнения можно найти методом вариации постоянных. y_f ищут в виде

$y_f(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x)$, где $y_j(x)$ – элементы фундаментальной системы решений однородного уравнения, а функции $c_j(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} c'_1(x) \cdot y_1(x) + c'_2(x) \cdot y_2(x) + \dots + c'_n(x) \cdot y_n(x) &= 0 \\ c'_1(x) \cdot y'_1(x) + c'_2(x) \cdot y'_2(x) + \dots + c'_n(x) \cdot y'_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$c'_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + c'_2(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Определитель этой системы является определителем Вронского: $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ для всех x из рассматриваемого интервала. Поэтому система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение $c'_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, $c_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, определяются с точностью до произвольных постоянных слагаемых. Если для уравнения $L_n[y] = f(x)$ поставлена задача Коши, то из начальных условий однозначно определим $y_f(x)$.

Для решения задачи Коши $L_n[y] = f(x)$, $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$ достаточно решить две задачи Коши:

$$L_n[y] = 0, \quad y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1};$$

$$L_n[y] = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Последняя задача имеет решение $y = \int\limits_{x_0}^x K(x,s)f(s)ds$, где им-

пульсная функция $K(x,s)$ при каждом фиксированном значении параметра s является решением однородного уравнения $L_n[y] = 0$ (по переменной x) и удовлетворяет условиям $K(s,s) = K'_x(s,s) = \dots = K_x^{(n-2)}(s,s) = 0, \quad K_x^{(n-1)}(s,s) = 1$. Её

можно искать в виде $K(x,s) = \sum_{j=1}^n c_j(s) \cdot y_j(x)$, где y_j – элементы фундаментальной системы решений однородного уравнения.

Вопрос 22.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.

1. Рассмотрим две задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{Y}' = \vec{G}(t, \vec{Y}) \\ \vec{Y}(0) = \vec{b} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{Y}' = \vec{G}(t, \vec{Y}) \\ \vec{Y}(0) = \vec{b} + \Delta \vec{b}. \end{cases}$$

Предположим, что каждая задача имеет единственное решение, и оба решения $\vec{Y}(t, \vec{b})$ и $\vec{Y}(t, \vec{b} + \Delta \vec{b})$ существуют при $0 \leq t < +\infty$. Теория устойчивости по Ляпунову изучает вопрос о том, будут ли эти решения близки для всех t , $0 < t < +\infty$, если они были близки в точке $t = 0$. Для формулировки точных определений введём какую-нибудь норму вектора \vec{Y} , например, $\|\vec{Y}\| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$, если \vec{Y} имеет компоненты y_1, \dots, y_n . Если \vec{Y} является вектор-функцией аргумента t , то величина $\|\vec{Y}(t)\|$ зависит от t .

Определение. Решение $\vec{Y}(t, \vec{b})$ задачи Коши $\vec{Y}' = \vec{G}(t, \vec{Y})$, $\vec{Y}(0) = \vec{b}$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $\vec{Y}(t, \vec{b} + \Delta \vec{b})$ той же системы уравнений, начальные значения $\vec{b} + \Delta \vec{b}$ которого удовлетворяют неравенству $\|\Delta \vec{b}\| < \delta(\varepsilon)$, при каждом t из интервала $(0, +\infty)$ будет выполнено неравенство $\|\vec{Y}(t, \vec{b} + \Delta \vec{b}) - \vec{Y}(t, \vec{b})\| < \varepsilon$.

Среди устойчивых решений может встретиться такое решение, что все близкие к нему при $t = 0$ решения не только не удаляются, но и неограниченно приближаются к нему при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому вводится ещё одно понятие асимптотической устойчивости.

Определение. Решение $\vec{Y}(t, \vec{b})$ задачи Коши $\vec{Y}' = \vec{G}(t, \vec{Y}), \vec{Y}(0) = \vec{b}$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое достаточно малое число $\delta_0 > 0$, что при $\|\Delta\vec{b}\| < \delta_0$ выполнено $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{Y}(t, \vec{b} + \Delta\vec{b}) - \vec{Y}(t, \vec{b})\| = 0$.

Пример. Уравнение $\frac{dy}{dt} = ky, k = \text{const}$, с начальным условием $y(0) = b$ имеет решение $y(t, b) = b \cdot e^{kt}$. Если $k \leq 0$, то указанное решение будет устойчивым по Ляпунову: при всех $t, 0 \leq t < +\infty$, выполнено $|(\vec{b} + \Delta\vec{b}) \cdot e^{kt} - \vec{b} \cdot e^{kt}| = |\Delta\vec{b}| \cdot e^{kt} \leq |\Delta\vec{b}| < \varepsilon$, коль скоро $\|\Delta\vec{b}\| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Если $k < 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{kt} \cdot |\Delta\vec{b}|) = 0$; следовательно, решение $y = b \cdot e^{kt}$ асимптотически устойчиво. Если же $k = 0$, то при $\Delta\vec{b} \neq 0$ разность двух решений $y(t, b) = b = \text{const}$ и $y(t, b + \Delta\vec{b}) = b + \Delta\vec{b} = \text{const}$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, т.е. решение $y = b$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво. Наконец, если $k > 0$ и $\Delta\vec{b} \neq 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{kt} \cdot |\Delta\vec{b}|) = +\infty$, т.е. решение $y(t, b) = b \cdot e^{kt}$ неустойчиво.

Пример. Задача Коши ($a = \text{const}$)

$$\begin{cases} y' = ay - 1 \\ y(0) = \frac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{y}' = a\tilde{y} - 1 \\ \tilde{y}(0) = \frac{1}{a} + \delta, \quad \delta \neq 0, \end{cases}$$

имеют решения $y(t) = \frac{1}{a} + \delta \cdot e^{at}$ и $\tilde{y}(t) = \frac{1}{a} + \delta \cdot e^{at}$. При каждом фиксированном t $|y(t) - \tilde{y}(t)| = |\delta| \cdot e^{at} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0$, то есть на любом конечном промежутке изменения t решения y и \tilde{y} близки, если δ достаточно мало. Но при $t \rightarrow +\infty$

$y(t) - \tilde{y}(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } a < 0, \\ \infty & \text{при } a > 0. \end{cases}$ Решение $y(t)$ асимптотически устойчиво при $a < 0$ и неустойчиво при $a > 0$.

При исследовании на устойчивость фиксированного решения $\vec{Y}(t, \vec{b})$ удобно сделать замену зависимой переменной: $\vec{X} = \vec{Y} - \vec{Y}(t, \vec{b})$. Тогда вместо задачи Коши $\vec{Y}' = \vec{G}(t, \vec{Y})$, $\vec{Y}(0) = \vec{b}$ получим задачу $\vec{X}' = \vec{F}(t, \vec{X})$, $\vec{X}(0) = 0$; вместо исследования на устойчивость решения $\vec{Y}(t, \vec{b})$ надо будет исследовать на устойчивость решение $\vec{X}(t) \equiv 0$. Будем далее часто предполагать, что такая замена выполнена.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений линейной однородной системы $\vec{X}' = A(t)\vec{X}(t)$ с непрерывной ограниченной на $0 \leq t < +\infty$ $n \times n$ -матрицей $A(t)$. Фундаментальной системой решений указанной однородной системы уравнений называют любые n линейно независимых решений $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$. Составленную из таких векторов – столбцов $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ матрицу $V(t)$ называют фундаментальной матрицей. Если для векторного уравнения $\vec{X}' = A(t)\vec{X}(t)$ поставлена задача Коши с начальным условием $\vec{X}(0) = \vec{b}$, то её решение имеет вид $\vec{X}(t) = V(t)V^{-1}(0)\vec{b}$. Матрицу $K(t, 0) = V(t)V^{-1}(0)$ называют импульсной матрицей; она удовлетворяет матричному уравнению $K'_t = A(t)K$ и условию $K(0, 0) = E$ – единичная матрица.

Теорема. Для устойчивости решения $\vec{X}(t, \vec{b})$ задачи Коши $\vec{X}' = A(t)\vec{X}(t)$, $\vec{X}(0) = \vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы импульсная матрица $K(t, 0)$ была ограничена на $0 \leq t < +\infty$. Для асимптотической устойчивости этого решения необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t, 0) = 0$. Для неустойчивости указанного ре-

шения необходимо и достаточно, чтобы импульсная матрица $K(t,0)$ была неограниченной на $0 < t < +\infty$.

Замечание. Так как $K(t,0)$ не зависит от начального значения \vec{b} , то все решения однородной системы $\vec{X}' = A(t)\vec{X}(t)$ одновременно устойчивы, асимптотически устойчивы, либо неустойчивы, — вместе с $\vec{X} \equiv 0$.

3. Если матрица $A(t) = A$ — постоянная, то условия устойчивости решений однородной системы уравнений определяются собственными значениями матрицы A .

Задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{X}'_0 = A\vec{X}_0 \\ \vec{X}_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{X}' = A\vec{X} \\ \vec{X}(0) = \Delta\vec{b} \end{cases}$$

имеют решения $\vec{X}_0(t) \equiv 0$ и $\vec{X}(t) = K(t,0)\Delta\vec{b}$, где $K(t,0) = V(t)V^{-1}(0)$. Поэтому $\|\vec{X}_0 - \vec{X}(t)\| \leq \|K(t,0)\| \cdot \|\Delta\vec{b}\|$.

Лемма. Пусть λ_k — собственные значения матрицы A , $p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k$, $\gamma = \operatorname{const} > 0$. Тогда для элементов импульсной матрицы $K(t,0)$ справедливы неравенства $|K_{ij}(t,0)| < c \cdot e^{(p+\gamma)t}$, $c = \operatorname{const}$. Поэтому $\|K(t,0)\| < const \cdot e^{(p+\gamma)t}$. Кроме того, $K_{ij}(t,s) = K_{ij}(t-s,0)$.

Теорема. Если у всех собственных значений λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то тривиальное решение $\vec{X}_0 \equiv 0$ системы $\vec{X}' = A\vec{X}$ асимптотически устойчиво. Если хотя бы для одного собственного значения $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то это решение неустойчиво.

Доказательство. Если для всех λ $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то $p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, и при достаточно малом положительном γ будет

$$p + \gamma < 0.$$

Тогда

$\|\vec{X}_0 - \vec{X}(t)\| < const \cdot e^{(p+r)t} \cdot \|\Delta \vec{b}\| \leq const \cdot \|\Delta \vec{b}\|$; т.е. \vec{X}_0 устойчиво, причём асимптотически. Если же для некоторого λ_0 $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$, то компоненты отвечающих этому λ_0 векторов фундаментальной системы решений имеют вид многочленов (по переменной t), умноженных на $e^{\lambda_0 t}$. И тогда за счёт наличия множителя $e^{\operatorname{Re} \lambda_0 t}$ ненулевые эти компоненты обращаются в бесконечность при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому найдутся такие $\Delta \vec{b}$, что $\|\Delta \vec{b}\|$ сколь угодно мала, но $\|\vec{X}_0 - \vec{X}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \infty$. \square

Доказанная теорема не охватывает случай, когда все $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, причём для некоторых собственных значений $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Теорема. Все решения векторного уравнения $\vec{X}' = A\vec{X}(t)$ с постоянной матрицей A устойчивы тогда и только тогда, когда у всех собственных значений λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, причём, если $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то такому собственному значению λ отвечает одномерная клетка Жордана в жордановой форме матрицы A . Все решения этого уравнения асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда у всех собственных значений λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Все решения указанного уравнения неустойчивы тогда и только тогда, когда хотя бы для одного собственного значения λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda > 0$, либо когда хотя бы одному собственному значению λ с $\operatorname{Re} \lambda = 0$ отвечает неодномерная клетка Жордана.

4. При исследовании на устойчивость решения $\vec{X}(t) \equiv 0$ нелинейной системы уравнений $\vec{X}' = \vec{F}(t, \vec{X})$ применяют следующий метод. Представим, если это возможно, правую часть системы при всех t , $0 \leq t < +\infty$, и при всех \vec{X} , достаточно малых по норме $\|\vec{X}\|$, в виде $\vec{F}(t, \vec{X}) = A(t)\vec{X} + \vec{R}(t, \vec{X})$, где $A(t)$ – некоторая $n \times n$ -матрица. Если $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{R}(t, \vec{X})\|}{\|\vec{X}\|} = 0$ равномерно

по t на множестве $0 \leq t < +\infty$, то пренебрежём членом \vec{R} и вместо исходной нелинейной системы рассмотрим линейную систему $\vec{X}' = A(t)\vec{X}(t)$. Такая линейная система называется системой первого приближения. Исследуем на устойчивость решение $\vec{X}(t) \equiv 0$ системы первого приближения. Пусть это решение устойчиво; следует ли отсюда устойчивость тривиального решения исходной нелинейной системы? Пусть тривиальное решение системы первого приближения асимптотически устойчиво; следует ли отсюда асимптотическая устойчивость тривиального решения исходной системы? Пусть тривиальное решение неустойчиво; следует ли отсюда неустойчивость тривиального решения исходной системы? Ответы на эти вопросы легко дать только в случае, когда система первого приближения автономна, т.е. когда матрица A не зависит от t .

Пример. Пусть исходная нелинейная система автономна:

$$\frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad \text{Пусть, кроме того, в некоторой}$$

окрестности точки $\vec{X} = 0$ все функции F_j дважды дифференцируемы. По формуле Тейлора

$$F_j(x_1, \dots, x_n) = F_j(0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k + R_j, \quad \text{где}$$

$$a_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(0, \dots, 0), \quad R_j = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_m}(0x_1, \dots, 0x_n) \cdot x_k \cdot x_m,$$

$0 < \theta < 1$. Так как мы считаем, что $\vec{X} = 0$ является решением исходной системы, то все $F_j(0, \dots, 0) = 0$. Вместо исходной системы

получим систему первого приближения $\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k, \quad j = 1, \dots, n.$

Лемма. Если $R_j = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n q_{jkm}(t) \cdot x_k \cdot x_m$, где все $|q_{jkm}| < q(t)$, то $\|\vec{R}\| < C \cdot q(t) \cdot \|\vec{X}\|^2$.

В дальнейшем все встречающиеся положительные постоянные, величина которых не играет существенной роли, будем обозначать одной и той же буквой C .

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки $\vec{X} = 0$ функции $F_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Если у всех собственных значений λ матрицы A с элементами $a_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0, \dots, 0)$

$\operatorname{Re} \lambda < 0$, то тривиальное решение системы $\frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, асимптотически устойчиво.

Доказательство. Система $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{R}(\vec{X})$ и начальное условие $\vec{X}(0) = \Delta \vec{b}$ эквивалентны интегральному уравнению

$\vec{X}(t) = K(t, 0) \cdot \Delta \vec{b} + \int_0^t K(t, s) \cdot \vec{R}(\vec{X}(s)) ds$. В достаточно малой

окрестности начала координат фазового пространства $\|X\| \leq h$

в силу предыдущей леммы справедлива оценка $\|\vec{R}\| < C \cdot \|\vec{X}\|^2$, по-

этому $\|\vec{X}(t)\| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot \|\Delta \vec{b}\| + C \cdot \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot \|\vec{X}(s)\|^2 ds$, где

$-\alpha = p + \gamma$. Если все $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то $p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, и при достаточно малом положительном γ будет $\alpha > 0$. Для получения оценки величины $\|\vec{X}(t)\|$ при $t \rightarrow +\infty$ рассмотрим вспомогательную скалярную задачу

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha z + C \cdot z^2, \quad z(0) = z_0 > C \cdot \|\Delta \vec{b}\|.$$

Её решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t) = z_0 \cdot e^{-\alpha t} + C \cdot \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot z^2(s) ds,$$

а с другой стороны, может быть найдено в явном виде:

$$z(t) = \frac{\alpha \cdot z_0}{C \cdot z_0 + (\alpha - C \cdot z_0) \cdot e^{\alpha t}}. \text{ Отсюда следует неравенство}$$

$$\|\vec{X}(t)\| < z(t). \text{ Действительно, при } t = 0 \quad \|\vec{X}(0)\| \leq C \cdot \|\Delta \vec{b}\| < z_0.$$

Пусть при некотором t_1 впервые $\|\vec{X}(t_1)\| = z(t_1)$. Тогда при достаточно малом z_0 построенная функция $z(t)$ удовлетворяет неравенству $0 < z(t) \leq h$ при $t \geq 0$, и, следовательно, $\|\vec{X}(t)\| < z(t) \leq h$ при $0 \leq t < t_1$. А при $t = t_1$ имеем

$$z(t_1) = z_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t_1} + C \cdot \int_0^{t_1} e^{-\alpha \cdot (t_1 - s)} \cdot z^2(s) ds = \|\vec{X}(t_1)\| \leq$$

$$\leq C \cdot e^{-\alpha t_1} \cdot \|\Delta \vec{b}\| + C \cdot \int_0^{t_1} e^{-\alpha \cdot (t_1 - s)} \cdot \|\vec{X}(s)\|^2 ds <$$

$$< z_0 \cdot e^{-\alpha t_1} + C \cdot \int_0^{t_1} e^{-\alpha \cdot (t_1 - s)} \cdot z^2(s) ds - \text{противоречие.}$$

Таким образом, при всех $t \geq 0$ $\|\vec{X}(t)\| < z(t)$. Теперь асимптотическая устойчивость тривиального решения исходной нелинейной системы следует из свойств функции $z(t)$: при $z_0 < \frac{\alpha}{C}$

$$z(t) > 0 \quad \text{для всех } t \geq 0; \quad \text{для любого } \varepsilon > 0$$

$$z(t) < \frac{\alpha \cdot z_0 \cdot e^{-\alpha t}}{\alpha - C \cdot z_0} < \varepsilon \quad \text{при } z_0 < \frac{\varepsilon \alpha}{\alpha + \varepsilon C} = \beta(\varepsilon); \quad z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

В самом деле, пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $\|\Delta \vec{b}\| < \delta(\varepsilon) = \frac{\beta(\varepsilon)}{2C}$. Возьмём $\frac{\beta(\varepsilon)}{2} < z_0 < \beta(\varepsilon)$; тогда

$$z(t) < \varepsilon. \text{ А так как } C \cdot \|\Delta \vec{b}\| < \frac{\beta(\varepsilon)}{2} < z_0, \text{ то } \|\vec{X}(t)\| < z(t) < \varepsilon,$$

т.е. тривиальное решение нелинейной системы устойчиво. Из свойства $z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ следует его асимптотическая устойчивость. \square

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки $\vec{X} = 0$ функции $F_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Если хотя бы у одного собственного значения λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то тривиальное решение нелинейной системы неустойчиво.

Замечание. Требование автономности нелинейной системы уравнений не является обязательным. Важна лишь автономность системы первого приближения. Если $\vec{F}(t, \vec{X}) = A\vec{X} + \vec{R}(t, \vec{X})$, где при всех t , $0 \leq t < +\infty$, выполнено неравенство $\|\vec{R}\| < C \cdot \|\vec{X}\|^{1+\alpha}$, где $C = \text{const}$, $\alpha = \text{const} > 0$, то обе теоремы остаются справедливыми.

Замечание. Теоремы об исследовании на устойчивость по первому приближению не позволяют сделать определённые выводы, если у всех собственных значений λ матрицы A $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, но хотя бы у одного собственного значения $\operatorname{Re} \lambda = 0$. В этом случае тривиальное решение нелинейной системы может быть как устойчивым, так и неустойчивым, — в зависимости от нелинейных членов \vec{R} .

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + \frac{x_1 x_2}{1+t} \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 + \frac{x_2^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Система первого приближения автономна, а её матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda = -2 \pm i$. Решение

$x_1 = x_2 = 0$ как линейной системы первого приближения, так и исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 x_2}{1+t} \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 + \frac{x_2^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda = 2 \pm i$.

Решение $x_1 = x_2 = 0$ как линейной системы первого приближения с матрицей A , так и исходной нелинейной системы неустойчиво.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + \frac{x_1 x_2}{1+t} \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 3x_2 + \frac{x_2^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Матрица A системы первого приближения имеет собственные значения $\lambda = -4$, $\lambda = 0$. Решение $x_1 = x_2 = 0$ системы первого приближения устойчиво, но не является асимптотически устойчивым. Для ответа на вопрос об устойчивости решения $x_1 = x_2 = 0$ исходной нелинейной системы требуется провести дополнительные исследования, например, методом функций Ляпунова.

Вопрос 23.

Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

1. Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ — исходный алфавит переменных (аргументов). Через E_2 обозначим множество $\{0,1\}$.

Определение. Функция $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n})$ называется функцией алгебры логики (или булевой функцией) тогда и только тогда, когда все ее аргументы определены на множестве E_2 и все свои значения функция принимает из множества E_2 .

Иными словами, если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть некоторый набор значений переменных $(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n})$ такой, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\alpha_i \in E_2$, то $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_2$.

В дальнейшем для упрощения обозначений вместо символов переменных из алфавита U мы будем использовать строчные латинские буквы (x, y, z, \dots) с индексами или без них.

Множество всех функций алгебры логики обозначим через P_2 .

Для задания функции алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ достаточно указать значение функции на каждом из 2^n наборах значений переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) . Поставим в соответствие каждому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ целое неотрицательное число $v(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n-i} \alpha_i \cdot 2$

(набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ представляет собой двоичную запись числа $v(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$) и упорядочим все наборы по возрастанию соответствующих им чисел $v(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ от 0 до $2^n - 1$. Такой порядок следования наборов называется лексикографическим. Теперь функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно задать с помощью таблицы I (наборы значений переменных следуют в лексикографическом порядке). Различные таблицы, определяющие функции алгебры логики, зависящие от фиксированных n переменных, будут различаться лишь своим последним столбцом. Справедлива следующая

Теорема. Число функций алгебры логики, зависящих от n фиксированных переменных, равно 2^{2^n} .

Доказательство следует из того, что значение функции на каждом из 2^n наборов можно определить одним из двух способов (0 или 1) независимо от значений функции на других наборах.

Таблица I.

x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	\dots	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	\dots	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
α_1	α_2	\dots	α_{n-1}	α_n	$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	1	\dots	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i , тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ из E_2 , что $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. При этом переменная x_i называется существенной переменной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Переменная, не являющаяся существенной, называется несущественной или фиктивной.

Пусть переменная x_i является фиктивной переменной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. По таблице, задающей функцию f , построим новую таблицу путем вычеркивания всех строк вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ и столбца переменной x_i . Новая таблица задает некоторую функцию $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Будем говорить, что функция $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получена из функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ путем удаления фиктивной переменной x_i , а функция $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получена из функции $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ путем введения фиктивной переменной x_i .

Определение. Функции f и g называются равными, если одна из них может быть получена из другой путем удаления и введения фиктивных переменных.

Рассмотрим в качестве примера так называемые «элементарные» функции алгебры логики (см. таблицы 2 и 3).

Таблица 2.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 3.

x	y	$f_5(x,y)$	$f_6(x,y)$	$f_7(x,y)$	$f_8(x,y)$	$f_9(x,y)$	$f_{10}(x,y)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — это константы 0 и 1 соответственно. Заметим, что у них нет существенных переменных. Функция $f_4(x) = \bar{x}$ называется тождественной. Функция $f_6(x) = \bar{x}$ называется отрицанием x , запись \bar{x} читается «не x ». Функция $f_5(x,y) = (x \& y)$ называется конъюнкцией x и y , запись $x \& y$ читается « x и y ». Иногда в качестве знака конъюнкции используют точку умножения, иногда знак вообще опускается, и пишут xy . Функция $f_8(x,y) = (x \vee y)$ называется дизъюнкцией x и y , запись $x \vee y$ читается « x или y ». Функция $f_7(x,y) = (x \rightarrow y)$ называется импликацией x и y , запись $x \rightarrow y$ читается «из x следует y ». Функция $f_9(x,y) = (x \oplus y)$ называется сложением x и y по модулю 2, запись $x \oplus y$ читается « x плюс y ». Функция $f_{10}(x,y) = (x \sim y)$ называется эквивалентностью x и y , запись $x \sim y$ читается « x эквивалентен y ». Функция $f_{10}(x,y) = (x|y)$ называется штрихом Шеффера, запись $x|y$ читается «штрих Шеффера x и y ».

2. Кроме описанного выше табличного способа задания булевых функций существует и способ задания посредством формул. Дадим индуктивное определение формул.

Определение.

Пусть P — некоторое множество функций алгебры логики.

Базис индукции. Каждая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P называется формулой над P .

Шаг индукции. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция из P и A_1, A_2, \dots, A_n — либо формулы над P , либо символы переменных. Тогда выражение $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ называется формулой над P .

Формулы, используемые для построения формулы C , называются подформулами формулы C .

Проводя индукцию аналогично тому, как это была сделано в определении формулы, поставим каждой формуле в соответствие функцию.

Определение.

Базис индукции. Пусть формула C имеет вид $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $f \in P$. Тогда формуле C поставим в соответствие функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Шаг индукции. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция из P и A_i ($i=1, 2, \dots, n$) — либо формула над P , которой по предположению индукции поставлена в соответствие функция f_i , либо символ переменной $x_{j(i)}$, которому соответствует функция $f_i = x_{j(i)}$. Тогда формуле C , имеющей вид $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$, поставим в соответствие функцию $f(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Если формуле C соответствует функция f , то говорят, что формула C реализует функцию f . Функция f , соответствующая формуле над P , называется суперпозицией функций из P , а процесс получения f из P — операцией суперпозиции.

Формулы называются эквивалентными тогда и только тогда, когда соответствующие им функции равны.

Приведем список некоторых эквивалентностей над системой элементарных функций алгебры логики. Пусть запись $(x^o y)$ обозначает какую-либо из функций $(x \& y)$, $(x \vee y)$, $(x \oplus y)$, $(x \sim y)$, $(x \mid y)$ (фиксированную для одной эквивалентности).

1) Функция $(x^o y)$ обладает свойством коммутативности:

$$(x^o y) = (y^o x).$$

2) Функция $(x^o y)$ обладает свойством ассоциативности:

$$((x^o y) ^o z) = (x^o (y^o z)).$$

3) Имеют место свойства дистрибутивности для конъюнкции и дизъюнкции:

$$((x \vee y) \& z) = ((x \& z) \vee (y \& z)), \quad ((x \& y) \vee z) = ((x \vee z) \& (y \vee z)).$$

4) Имеют место следующие соотношения:

$$x = x \text{ (правило снятия двойного отрицания),}$$

$$\begin{aligned}\overline{(x \& y)} &= (\bar{x} \vee \bar{y}), \quad \overline{(x \vee y)} = (\bar{x} \& \bar{y}) \text{ (правила де Моргана),} \\ ((x \vee y) \& x) &= x, ((x \& y) \vee x) = x \text{ (правила поглощения),} \\ (x \& x) &= x, (x \vee x) = x, (x \& 1) = x, (x \& 0) = 0, (x \vee 0) = x, (x \vee 1) = 1, (x \& \bar{x}) = 0, \\ (x \vee \bar{x}) &= 1.\end{aligned}$$

В справедливости всех перечисленных эквивалентностей можно убедиться непосредственно.

В дальнейшем при записи формул над множеством элементарных функций будем использовать нижеследующие соглашения:

- 1) в подформулах, представляющих собой формулы над функцией $(x_1 \circ x_2)$, обладающей свойством ассоциативности, внутренние скобки опускаются (например, вместо $(x_1 \circ (x_1 \circ x_2))$ пишется $(x_1 \circ x_1 \circ x_2)$),
- 2) внешние скобки в записи формулы опускаются,
- 3) конъюнкция считается сильнее других двуместных операций, и в подформулах, представляющих собой формулы над функцией $x_1 \& x_2$, внешние скобки опускаются (например, вместо $(x_1 \vee (x_1 \& x_2))$ пишется $(x_1 \vee x_1 \& x_2)$),
- 4) внешние скобки в записи подформулы, над которой стоит символ отрицания, опускаются (например, вместо $\overline{(x \rightarrow y)}$ пишется $\overline{x \rightarrow y}$).

Выражения, получающиеся из формул при применении указанных соглашений, вообще говоря, не являются формулами, но мы будем употреблять термин «формула» и по отношению к этим выражениям.

Введем в употребление следующее обозначение:

$$\bigvee_{i=1}^t x_i = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_t.$$

3. Изучим некоторые специальные представления функций алгебры логики.

Введем следующее обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x} & \text{при } \sigma = 0, \\ x & \text{при } \sigma = 1, \end{cases}$$

где σ — параметр. Заметим, что $\sigma^\sigma = 1$, а $\sigma^{\bar{\sigma}} = 0$.

Теорема о разложении функции по переменным. Каждую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ при любом m ($1 \leq m \leq n$) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (*)$$

где дизъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных x_1, x_2, \dots, x_m .

Доказательство.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ значений переменных. В левой части соотношения (*) получим $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$. Правая часть преобразуется к виду

$$\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \& \dots \& \alpha_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

Пусть числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ таковы, что хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, m\}$ $\alpha_i \neq \sigma_i$. Тогда $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, и соответствующая набору $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ конъюнкция обращается в нуль. Пусть теперь числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ такие, что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ $\alpha_i = \sigma_i$. Тогда все $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$, и соответствующая набору $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ конъюнкция равна $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$. Значит, правая часть соотношения (*) принимает то же значение, что и левая. Теорема доказана. \square

Выделим два крайних случая ($m=1$ и $m=n$) и сформулируем следствия данной теоремы.

Следствие 1 (разложение функции по одной переменной).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1} \& f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 \& f(1, x_2, \dots, x_n).$$

Следствие 2 (разложение функции в совершенную дизъюнктивную нормальную форму). Любая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тождественно не равная нулю¹, может быть представлена в следующем виде:

¹ То есть существует такой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}.$$

(правая часть последнего соотношения называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой).

Пример. Разложим в совершенную дизъюнктивную нормальную форму функцию $f_b(x,y)=x \oplus y$ (см. таблицу 3). Функция обращается в 1 ровно на двух наборах значений переменных, а именно, на наборах $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Значит, ее совершенная дизъюнктивная нормальная форма имеет вид:

$$f_b(x,y) = x^0 \& y^1 \vee x^1 \& y^0 = \bar{x} \& y \vee x \& \bar{y}.$$

Определение. Система функций P называется полной в P_2 тогда и только тогда, когда любая функция алгебры логики может быть реализована формулой над P .

Теорема. Система функций $\{\bar{x}, x \& y, x \vee y\}$ является полной в P_2 .

Доказательство.

Любая тождественно не равная нулю функция алгебры логики может быть реализована на основании следствия 2 формулой над $\{\bar{x}, x \& y, x \vee y\}$, представляющей совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Если же функция тождественно равна нулю, то ее можно реализовать формулой $x \& \bar{x}$. Теорема доказана. \square

Вопрос 24.

Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

Определение. Графом G называется любая пара (V, E) , где $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ — множество элементов любой природы, а $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ — семейство пар элементов из V , причем допускаются пары вида (v_i, v_i) и одинаковые пары. Если пары в V рассматриваются как пары неупорядоченных элементов, то граф называется *неориентированным*, если же как пары упорядоченных элементов, то граф называется *ориентированным (орграфом)*.

Элементы множества V называются *вершинами* графа, а пары из E — его *ребрами*, в орграфе они называются *ориентированными ребрами* или *дугами*. Пара вида (v_i, v_i) называется *петлей* в вершине v_i . Если пара (v_i, v_j) встречается в E более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) — *кратное ребро*. Говорят, что ребро $e = (u, v)$ в неориентированном графе *соединяет* вершины u и v , а в ориентированном графе дуга $e = (u, v)$ *идет из* вершины u в вершину v .

Графы можно условно изображать следующим образом. Вершины изображаются различными точками, а каждое ребро (дуга) (v_i, v_j) из E — линией, соединяющей точки, соответствующие v_i и v_j . Если (v_i, v_j) — дуга, то на этой линии ставится стрелка от v_i к v_j .

Определение. Говорят, что вершины v_i и v_j *смежны* в графе $G = (V, E)$, если в E входит пара (v_i, v_j) или (v_j, v_i) . Говорят, что ребро (дуга) (v_i, v_j) *инцидентно* вершинам v_i, v_j .

Определение. Степенью вершины в графе называется число ребер, инцидентных данной вершине, при этом петли учитываются дважды. Вершины степени 0 называют *изолированными*. Полустепенью исхода $d^-(v)$ (полустепенью захода $d^+(v)$) вершины v в ориентированном графе называется число дуг, выходящих из данной вершины (соответственно, входящих в данную вершину).

Определение. Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — два графа. Тогда G и G' называются *изоморфными*, если существуют взаимно однозначные отображения $\varphi: V \rightarrow V'$, $\psi: E \rightarrow E'$ такие, что для любого ребра (дуги) (u, v) из E выполняется равенство: $\psi(u, v) = (\varphi(u), \varphi(v))$. Иными словами, отображения φ и ψ должны сохранять отношение инцидентности вершин и ребер (дуг).

Определение. Граф $G' = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Определение. Путем в графе (орграфе) $G = (V, E)$ называется последовательность P вершин и ребер (дуг) вида $v_0, (v_0, v_1), v_1, \dots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n$, где каждая вершина v_i лежит в V и каждое ребро (дуга) (v_i, v_{i+1}) лежит в E . Длина пути — это число ребер (дуг) в нем. Говорят, что путь P идет из v_0 в v_n . Цепь — это путь без повторяющихся ребер (дуг), простая цепь — путь без повторяющихся вершин. Путь называется замкнутым, если $v_n = v_0$. Замкнутый путь называется циклом, если ребра (дуги) в нем не повторяются. Замкнутый путь называется простым циклом, если, за исключением совпадения v_n и v_0 , других повторений вершин в нем нет.

Замечание. В случае орграфов во избежание неясностей вместо слов «путь», «цикл» также будут использоваться выражения «ориентированный путь», «ориентированный цикл», соответственно.

Далее будут рассматриваться только конечные графы, то есть графы с конечным числом вершин и ребер (дуг).

Определение. Ориентированным ациклическим графом называется любой ориентированный граф, в котором нет ориентированных циклов.

Определение. Вершина ориентированного графа называется истоком (стоком), если в нее не входит ни одна дуга, то есть $d^+(v) = 0$, (соответственно, из нее не выходит ни одной дуги, то есть $d^-(v) = 0$).

Лемма 1. В любом (конечном) ориентированном ациклическом графе есть хотя бы один исток и хотя бы один сток.

Доказательство. Выберем любую вершину и будем строить путь из нее, двигаясь произвольно по направлению дуг. При этом вершины не могут повторяться, так как в данном орграфе нет ориентированных циклов. Поэтому в силу конечности графа путь должен прийти в тупик, который и является стоком. Для получения истока надо аналогично строить путь, двигаясь против направления дуг.

Лемма 1 позволяет ввести следующее

Определение. Глубиной вершины v в ориентированном ациклическом графе называется максимум длин ориентированных путей, начинающихся в истоках графа и заканчивающихся в вершине v . Очевидно, что глубина каждой вершины в ориентированном ациклическом графе не превосходит $p - 1$, где p — число вершин в графе.

Лемма 2. Пусть (u, v) — дуга в ориентированном ациклическом графе. Тогда глубина вершины v больше, чем глубина вершины u .

Доказательство сразу следует из того, что если существует ориентированный путь длины k из некоторого истока в вершину u , то из того же истока в вершину v существует ориентированный путь длины $k+1$.

Пусть X и Z — счетные упорядоченные попарно не пересекающиеся алфавиты булевых переменных, причем булевые переменные из X (из Z) считаются *входными* (соответственно, *выходными*) булевыми переменными. Пусть B , $B = \{\phi_i \mid i = 1, \dots, b\}$, — полное в P_2 множество функций алгебры логики, где функция алгебры логики (ФАЛ) ϕ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, переменных и при $k_i \geq 2$ существенно зависит от всех своих переменных.

Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если дуги, входящие в каждую его вершину v , упорядочены, т. е. пронумерованы числами $1, 2, \dots, d^+(v)$.

Определение. Схемой из функциональных элементов (СФЭ) над базисом B называется ориентированный ациклический упорядоченный граф Σ , вершины которого помечены следующим образом:

1) каждый исток Σ помечен символом некоторой переменной из X , причем различные истоки помечены символами различных переменных;

2) каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена символом некоторой функции ϕ_i из множества B и при этом $k_i = d^+(v)$ (такая вершина с приписанным символом ϕ_i представляет функциональный элемент (ФЭ) E_i с k_i входами и одним выходом, для наглядности такие ФЭ будем изображать в виде треугольников с записанным внутри них символом ϕ_i , как на рис. 1);

3) некоторые вершины Σ помечены символами переменных из Z так, что одной и той же вершине может быть сопоставлено несколько переменных из Z , но разным вершинам не может быть сопоставлена одна и та же переменная. При этом входные (выходные) переменные, которые приписаны каким-либо вершинам Σ , считаются входными (соответственно, выходными) переменными Σ , а те вершины, которым они сопоставлены, — входами (соответственно, выходами) СФЭ Σ .

Определим теперь функционирование СФЭ Σ над базисом B с входными переменными x_1, x_2, \dots, x_n и выходными переменными $z_1,$

z_2, \dots, z_m . Индукцией по q , $q = 0, 1, \dots$, найдем для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней функцию $F_v = F_v(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если $q = 0$, т. е. v — вход Σ , положим $F_v = x_j$, где x_j — входная переменная, сопоставленная вершине v . Пусть теперь v — вершина глубины q , $q \geq 1$, схемы Σ , которая имеет пометку ϕ , и в которую входит k дуг, причем дуга с номером j , $1 \leq j \leq k$, исходит из вершины v_j глубины q_j , где уже реализована функция F_{v_j} . Тогда в вершине v реализуется функция алгебры логики $F_v = F_v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задаваемая суперпозицией $F_v = \phi(F_{v_1}, F_{v_2}, \dots, F_{v_k})$. Пусть символы выходных переменных z_1, z_2, \dots, z_m приписаны не обязательно различным вершинам u_1, u_2, \dots, u_m . Тогда будем считать, что СФЭ Σ реализует систему функций $F = \{F_{u_1}, F_{u_2}, \dots, F_{u_m}\}$.

Схемы, реализующие одинаковые системы ФАЛ, называются эквивалентными.

Две СФЭ Σ' и Σ'' называются изоморфными, если они изоморфны как помеченные упорядоченные графы, т. е. если существуют взаимно однозначные отображения множества вершин Σ' на множество вершин Σ'' и множества дуг Σ' на множество дуг Σ'' , сохраняющие отношение инцидентности вершин и дуг, а также сохраняющие все номера дуг, заходящих в вершины, и все пометки. Из определения вытекает, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных СФЭ реализуются одинаковые функции. Следовательно, изоморфные СФЭ эквивалентны.

Замечание. Изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ , которой сопоставлен ФЭ E_v с симметрической (то есть не меняющейся при произвольных перестановках переменных) ФАЛ ϕ_v , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование Σ . В связи с этим в подобных случаях номера дуг, входящих в вершину v , могут не указываться.

Вершина СФЭ называется *висячей*, если из нее не выходит ни одна дуга и она не является выходом схемы. При *удалении* из СФЭ *вершины* удаляются и все инцидентные этой вершине дуги. Две вершины СФЭ считаются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ.

Пусть СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате выполнения следующих действий: 1) переноса начальной вершины всех дуг Σ , исходящих из вершины v , а также всех выходных переменных, приписанных v , в отличную от нее эквивалентную вершину w , глубина которой в Σ не больше, чем глубина v , 2)

удаления вершины v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции исключения вершины v эквивалентным преемником w . Ясно, что схемы Σ и Σ' эквивалентны.

Схема называется приведенной (строго приведенной), если в ней нет висячих (соответственно висячих и эквивалентных) вершин. Заметим, что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную (строго приведенную) СФЭ с помощью операции удаления висячих (соответственно, с помощью операций удаления висячих и исключения эквивалентных) вершин.

Число функциональных элементов в СФЭ Σ называется ее сложностью и обозначается через $L(\Sigma)$. Для системы ФАЛ F через $L_B(F)$ обозначим минимум сложности таких СФЭ Σ над базисом B , которые реализуют F . Величина $L_B(F)$ называется сложностью системы ФАЛ F в классе СФЭ над базисом B . При этом СФЭ Σ над базисом B , которая реализует F и для которой $L(\Sigma)=L_B(F)$, называется минимальной. Введем функцию $L_B(n)$ натурального аргумента n , называемую функцией Шеннона для класса СФЭ над базисом B и определяющую следующим образом:

$$L_B(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^n} L_B(f(x_1, \dots, x_n))$$

(через P_2^n здесь обозначено множество всех ФАЛ от переменных x_1, x_2, \dots, x_n). Функция Шеннона характеризует максимум сложности минимальной СФЭ над базисом B по всем ФАЛ от n фиксированных переменных.

В дальнейшем будут рассматриваться только СФЭ в базисе $B_0 = \{\varphi_1 = x_1 \& x_2, \varphi_2 = x_1 \vee x_2, \varphi_3 = \bar{x}_1\}$ (см. рис. 1), поэтому индекс $B = B_0$ будет опускаться, а о СФЭ иногда будет упоминаться без указания базиса.

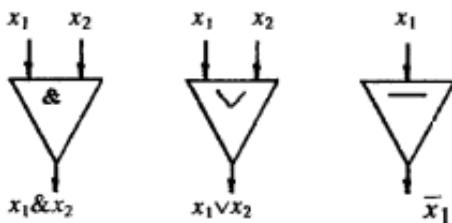


Рис. 1. Функциональные элементы базиса B_0

Для решения задачи синтеза СФЭ можно использовать переборный алгоритм, который просматривает все схемы сложности 1, 2, 3, ... до тех пор, пока не найдет схему, реализующую заданную систему ФАЛ. Следует отметить, что трудоемкость этого метода синтеза очень быстро растет с ростом числа переменных n , и что при $n \geq 5$ он становится практически неприменимым.

Для тождественно не равных нулю ФАЛ можно использовать элементарный метод синтеза, основанный на моделировании совершенной ДНФ. С учетом очевидного тождества $0 = x \& \bar{x}$ получаем, что имеет место

Лемма 3. Для любой ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует СФЭ в базисе B_0 , реализующая f со сложностью не более, чем $n \cdot 2^{n+1}$.

Для множества A и любого натурального t через A^t обозначается t -я декартова степень множества A , т. е. множество всех наборов длины t с элементами из A . Для набора β , $\beta \in A^t$, через $\beta[i]$, где $0 \leq i \leq t - 1$, обозначается его i -й (начиная с нулевого) элемент, т. е. $\beta = (\beta[0], \dots, \beta[t - 1])$. Число $\sum_{i=0}^{t-1} \beta[i] \cdot 2^{t-i-1}$, двоичная запись

которого совпадает с β , называется номером β и обозначается через $|\beta|$.

Система ФАЛ Q_n из P_2^n такая, что при всех i , $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, справедливо равенство:

$$Q_n[i] = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}, \quad (1)$$

где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_2^n$ и $|\sigma|=i$, называется (функциональным) дешифратором порядка n . Это связано с тем, что на любом наборе α , $\alpha \in E_2^n$, значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n ровно одна из ФАЛ системы Q_n — ФАЛ с номером $|\alpha|$ — обращается в 1.

Функция M_n от (входных) переменных x_1, x_2, \dots, x_m , $y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}$ такая, что при всех $\alpha, \alpha \in E_2^n$, и $\beta, \beta \in E_2^{2^n}$, имеет место равенство: $M_n(\alpha, \beta) = \beta[i]$, где $i=|\alpha|$, называется (функциональным) мультиплексором порядка n . Если рассматривать переменные x_1, x_2, \dots, x_n как «адресные», а переменные $y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}$ — как «информационные», то значение мультиплексора M_n равно значению той его информационной переменной, номер которой поступил на его адресные переменные. Легко убедиться в том, что для ФАЛ M_n справедливо представление:

$$M_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} Q_n[i] \cdot y_i. \quad (2)$$

Будем называть *схемным дешифратором* или *мультиплексором* любую СФЭ, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

Обозначим через θ_n систему всех 2^{2^n} различных ФАЛ множества P_2^n , в которой столбец значений ФАЛ $\theta_n[i]$, $0 \leq i \leq 2^{2^n}-1$, рассматриваемый как двоичный набор длины 2^n , имеет номер i . Систему θ_n будем называть *универсальной системой ФАЛ порядка n*, а любую СФЭ, которая ее реализует, — *универсальным многополосником порядка n*.

При построении более сложных СФЭ из более простых мы будем опираться на понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. СФЭ Σ' называется *подсхемой* СФЭ Σ , если множество ее вершин (дуг) является подмножеством множества вершин (соответственно дуг) Σ , при этом все те вершины Σ' , из которых в Σ выходит хотя бы одна дуга, не принадлежащая Σ' , или которые являются выходами Σ , являются выходами Σ' . Предполагается, что все дуги в Σ' имеют те же номера, что и в Σ , а все вершины Σ' имеют те же ФС, что и в Σ . *Принцип эквивалентной замены* для СФЭ вытекает из определения их функционирования и состоит в том, что если подсхему Σ' СФЭ Σ заменить эквивалентной ей СФЭ Σ'' , то полученная в результате СФЭ Σ_1 будет эквивалентна СФЭ Σ . В связи с этим подсхемы, которые не имеют общих внутренних вершин, можно рассматривать как (многовходные) макрэлементы.

Лемма 4. Сложность минимального схемного дешифратора порядка n в базисе B_0 равна $2^n + O(n \cdot 2^{n^2})$.

Доказательство. Нижняя оценка. Поскольку любой дешифратор порядка n при $n \geq 2$ реализует систему из 2^n ФАЛ, отличных от переменных, то в нем должно быть не менее 2^n вершин, отличных от входов. Следовательно, сложность любого дешифратора порядка n ($n \geq 2$) в классе СФЭ не меньше, чем 2^n .

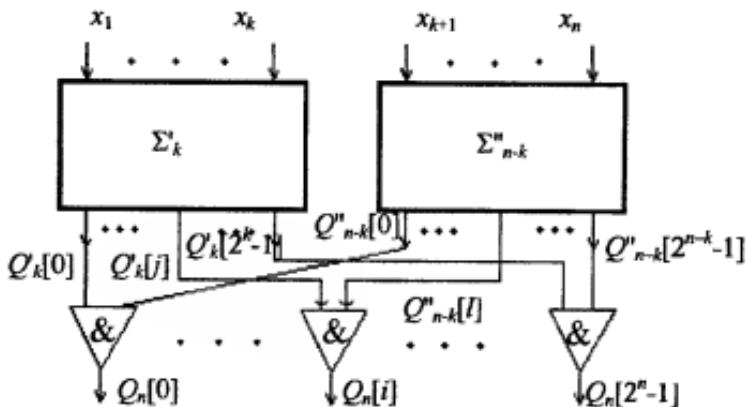


Рис. 2. Дешифратор порядка n

Верхняя оценка. Для начала реализуем каждую функцию $Q_n[i]$ СФЭ в соответствии с формулой (1) ($i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$). Получим схемный дешифратор Σ'_n сложности $L(\Sigma'_n) \leq n \cdot 2^{n+1}$. Теперь построим более экономный дешифратор на основе имеющегося. Разобьем набор входных переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на поднаборы $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, где k — некоторый параметр и $1 \leq k \leq (n-1)$. Пусть Q' и Q'' — функциональные дешифраторы порядка k и $(n-k)$ от переменных x' и x'' , а Σ'_k и Σ'_{n-k} — соответствующие им схемные дешифраторы, построенные как описано выше. Легко видеть, что любую ФАЛ $Q_n[i]$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$, можно представить в виде

$$Q_n[i] = Q'_k[j] \cdot Q''_{n-k}[l], \quad (3)$$

где $j = 2^{n-k}i + l$ и $0 \leq j \leq 2^k - 1$, $0 \leq l \leq 2^{n-k} - 1$. Дешифратор Σ_n порядка n от переменных x содержит дешифраторы Σ'_k , Σ'_{n-k} в качестве подсхем и реализует каждую ФАЛ $Q_n[i]$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, с помощью одного ФЭ конъюнкции, входы которого присоединены к выходам Σ'_k и Σ'_{n-k} (см. рис. 2) в соответствии с (3). Из построения Σ_n следует, что $L(\Sigma_n) = 2^n + L(\Sigma'_k) + L(\Sigma'_{n-k}) \leq 2^n + k \cdot 2^{k+1} + (n-k) \cdot 2^{n-k+1}$, и поэтому при $k = [n/2]$ получим: $L(\Sigma_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2})$. Лемма доказана.

Лемма 5. Для любого натурального n существует схемный мультиплексор порядка n , который имеет сложность не более, чем $3 \cdot 2^n + O(n \cdot 2^{n/2})$.

Доказательство. Построим схемный мультиплексор S_n в соответствии с (2) на основе дешифратора Σ_n порядка n из леммы 4, который является его подсхемой. Для этого каждый выход Σ_n и

соответствующий ему информационный вход S_n присоединим к входам ФЭ конъюнкции, а затем продизьюнтируем выходы всех таких ФЭ конъюнкции. Полученный таким образом мультиплексор S_n будет искомым.

Лемма 6. Минимальный универсальный многополосник порядка n ($n \geq 1$) имеет сложность $2^{2^n} - n$.

Доказательство. Нижняя оценка следует из того, что универсальный многополосник порядка n реализует систему из $2^{2^n} - n$ ФАЛ, отличных от переменных. Для получения верхней оценки построим универсальный многополосник Θ'_n по совершенным ДНФ всех реализуемых ненулевых ФАЛ (см. лемму 3), а затем перейдем от него к эквивалентной строго приведенной СФЭ Θ_n . Заметим, что число вершин СФЭ Θ_n , отличных от входов, не больше, чем число различных ФАЛ от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , отличных от самих этих переменных. Следовательно, $L(\Theta_n) \leq 2^{2^n} - n$.

Перейдем к рассмотрению метода Шеннона для синтеза СФЭ. Идея метода заключается в построении СФЭ для произвольной функции n переменных с помощью мультиплексора порядка k и универсального многополосника порядка $n-k$. Метод составляет содержание доказательства следующей теоремы.

Теорема. Для любой ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно построить СФЭ Σ_f , которая реализует f и для которой $L(\Sigma_f) \leq 6 \cdot \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n \cdot \log_2 n}{n^2}\right)$.

Доказательство. Разобьем набор входных переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на поднаборы $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, где k — некоторый параметр и $1 \leq k \leq n$. Для любого набора $\sigma^i = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ из E_2^k положим: $f_{|\sigma^i}(x'') = f(\sigma^i, x'')$. Тогда для ФАЛ f будет справедливо представление:

$$\begin{aligned} f(x', x'') &= \bigvee_{\sigma^i = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_k^{\sigma_k} \cdot f_{|\sigma^i}(x'') = \\ &= M_k(x', f_0(x''), f_1(x''), \dots, f_{2^k-1}(x'')) \end{aligned} \quad (4)$$

Построим СФЭ Σ_f из построенного по лемме 6 универсального многополосника Θ_{n-k} порядка $(n-k)$ от переменных x'' и построенного по лемме 5 мультиплексора S_k порядка k с адресными переменными x' , на информационные входы которого подаются выходы Θ_{n-k} в

соответствии с (4). Тогда $L(\Sigma_j) = L(S_k) + L(\Theta_{n-k}) \leq 3 \cdot 2^k + O(k \cdot 2^{k/2}) + 2^{2^{n-k}}$. Полагая $k = \lceil n - \log_2(n - 2 \log_2 n) \rceil$, получим:

$$\begin{aligned} L(\Sigma_j) &\leq 6 \cdot \frac{2^n}{n - 2 \log_2 n} + O\left(n \cdot 2^{n/2}\right) + \frac{2^n}{n^2} = \\ &= 6 \cdot \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n \cdot \log_2 n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Следствие. $L(n) \leq 6 \cdot \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n \cdot \log_2 n}{n^2}\right)$.

Вопрос 25.

Вероятностное пространство. Случайная величина.

Закон больших чисел в форме Чебышева.

1. **Вероятностное пространство.** Теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений. На основе наблюдений и опыта наука приходит к формулировке закономерностей: при каждом осуществлении комплекса условий G происходит событие A .

Например, если вода при атмосферном давлении в 760 мм нагревается выше 100° (G), то она превращается в пар (A).

Если событие неизбежно происходит при каждой реализации комплекса условий G , то оно называется достоверным или закономерным. Если событие заведомо не может произойти при осуществлении комплекса условий G , то оно называется невозможным. Событие A , которое при реализации комплекса условий G может произойти, а может не произойти, называется случайным. Теория вероятностей изучает только те явления, в которых возможно многократное осуществление комплекса условий G .

Повторим опыт (операция, при которой осуществляется комплекс условий G) N раз, при этом M раз произошло событие A , тогда величина $\frac{M}{N}$ называется относительной частотой события A .

Вероятностью события A называется

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Такое определение вероятности вытекает из интуитивного представления. Математика имеет дело с абстрактными моделями, причем разные модели могут описывать одно и то же явление с различной степенью приближения и простоты. Приступим к построению такой модели для теории вероятностей.

Будем считать, что при осуществлении комплекса условий G могут происходить различные исходы опыта.

Множество всех простейших (неразложимых далее) взаимоисключающих исходов опыта назовем *пространством элементарных событий*. Обозначим множество элементарных

событий буквой Ω , а элементы этого множества – элементарные исходы - $\omega_1, \omega_2, \dots$.

Бросание монеты. При бросании монеты происходят два элементарных события: выпадение герба $\omega_1(\Gamma)$ и выпадение обратной стороны (цифры) $\omega_2(\Pi)$.

При двух бросаниях монеты имеется четыре элементарных исхода:

ω_1 - два раза выпал герб (Γ, Γ);

ω_2 - первый раз выпал герб, а второй раз цифра (Γ, Π);

ω_3 - первый раз выпала цифра, а второй раз герб (Π, Γ);

ω_4 - оба раза выпала цифра (Π, Π).

Перестановка различных предметов. Рассмотрим четыре предмета a, b, c, d . Пусть порядок их расположения является результатом какого-то опыта. Число элементарных событий равно $24=4!$ Возможные перестановки четырех предметов: $abcd, acdb, \dots, dcab, dcba$.

Возраст супругов. Страховые компании интересуются распределением возрастов супружеских пар. Пусть x - возраст мужа, y - возраст жены. Каждое наблюдение дает пару чисел (x, y) . За пространство элементарных событий следует принять первый квадрат $x > 0, y > 0$, так что каждая пара будет элементарным событием. Множество элементарных событий несчетно.

Итак, мы отправляемся от пространства элементарных событий и его точек; впредь они будут рассматриваться как данные, они являются первоначальными и неопределяемыми понятиями теории.

Рассмотрим событие A . При каждом элементарном исходе событие A может произойти или не произойти. Так в случае бросания двух монет событие A – герб выпал на 1-ом месте, происходит, если происходит элементарное событие ω_1 или ω_2 , В примере “возраст супругов” событие A – “жена младше мужа” происходит, если точка (x, y) лежит ниже прямой $y=x$.

Совокупность точек, при которой происходит событие A будем называть случальным событием A . Достоверным событием называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. достоверное событие совпадает с Ω , невозможное событие не содержит элементарных исходов, т.е. это пустое множество \emptyset .

Объединение, пересечение и дополнение событий определяется как соответствующее операции в теории множеств.

Рассмотрим систему множеств A , относительно которой сделаны следующие допущения:

- 1) система A содержит достоверное и невозможное события;
- 2) если системе A принадлежат события A и B , то ей принадлежат события \bar{A} , \bar{B} , AB , $A+B$.

Такая система множеств A называется *алгеброй событий*.

Во многих задачах от алгебры событий может потребоваться большее, а именно:

- 3) если все события, составляющие последовательность событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ принадлежат системе множеств A , то и

событие $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, i = 1, 2, \dots$ также принадлежит системе множеств A .

Такая система множеств A называется *σ -алгеброй событий*.

Из интуитивного представления о вероятности $P(A)$ вытекают три свойства:

- 1) $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) Если A и B несовместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Теперь мы готовы описать абстрактную модель теории вероятностей, назвав ее *вероятностным пространством*.

Определение. Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, A, P(A))$.

- I) Ω - пространство элементарных исходов.
- II) Система множеств A (подмножество Ω) или σ -алгебра событий, обладающая свойствами:
 - 1) $\Omega \in A$
 - 2) если $A \in A$, то $\bar{A} \in A$,
 - 3) если события A_1, \dots, A_n, \dots , составляющие последовательность событий, принадлежат системе множеств

A, то и их объединение $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ тоже принадлежит **A**.

III) Вероятность $P(A)$ – числовая функция, заданная на σ -алгебре событий **A** и обладающая свойствами:

$$1) P(A) \geq 0,$$

$$2) P(\Omega) = 1,$$

3) если A_1, A_2, \dots – последовательность попарно

несовместных событий ($A_i A_j = 0, i \neq j$), то $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

После введения понятия вероятностного пространства элементарные события рассматриваются как данные, первоначальные неопределяемые понятия теории, событие **A** рассматривается как элемент алгебры **A**, а вероятность как функция $P(A)$, заданная на алгебре **A**. Аксиоматика теории вероятностей была введена А.Н. Колмогоровым в 1939 г. В качестве примера вероятностного пространства рассмотрим классическую модель.

I. Пусть Ω состоит из конечного числа равновозможных элементарных исходов. Равновозможность событий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ означает, что с каждой точкой ω_i связано число, называемое вероятностью элементарного исхода и равное $\frac{1}{n} = p(\omega_i)$,

$$\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1.$$

II. **A** – алгебра событий, состоит из всех подмножеств Ω .

III. Вероятность события A $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число элементарных исходов, входящих в A , а n – число всех элементарных исходов.

Заметим, что $P(A)$ равно сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в A :

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Задача 1. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что герб выпал на первом месте. Как мы уже отмечали, пространство элементарных исходов состоит из четырех событий: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ. Будем считать, что вероятность каждого $\frac{1}{4}$. Тогда событие А “первым выпал герб” состоит из элементарных событий ГГ, ГЦ и

$$\text{вероятность } P(A) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Задача 2. Лифт отправляется с $r = 7$ пассажирами и останавливается на $n = 10$ этажах. Каждый человек может выйти на любом этаже, независимо от других людей. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

Число всех элементарных исходов равно $n' = 10^7$. Число исходов, благоприятствующих событию А “все пассажиры вышли на разных этажах”, равно:

$$n(n-1)\dots(n-r+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4,$$

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^7} = 0,06048$$

Геометрическая вероятность. Пусть на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g , области квадрируемы. В область G наудачу бросается точка. Выражению “точка бросается наудачу в область” придается смысл: брошенная точка может попасть в любую точку области G с одинаковой возможностью. Определим вероятность попадания в

$$\text{область } g \quad P = \frac{|g|}{|G|}, \text{ где } |G|, |g| - \text{площади областей } G \text{ и } g.$$

Таким образом мы определили следующее вероятностное пространство: $(\Omega, A, P(A))$.

- I. Ω - множество всех точек области G . Оно несчетно.
- II. A - множество всех квадрируемых областей $\{g\}$ $g \in G$. Это множество тоже несчетно. Событие А состоит в попадании точки в некоторую квадрируемую область $g(A) \in G$.

$$\text{III. } P(A) = \frac{|g(A)|}{|G|}$$

Пример. Задача о встрече.

Два лица М и N условились встретиться в определенном месте между 12 часами и часом. Пришедший ждет другого в течение 20 минут после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц М и

N, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти неудачу, и моменты прихода независимы?

Обозначим моменты прихода лица M через x и лица N через y, для того, чтобы встреча произошла, необходимо, чтобы $|x - y| \leq 20$. Изобразим на координатной плоскости точками с координатами (x,y) всевозможные варианты прихода M и N – это множество элементарных событий. Все множество элементарных событий есть квадрат со сторонами 60 (масштаб 1 мин.) Точки, благоприятствующие встрече, принадлежат пересечению полосы

$x - 20 \leq y \leq x + 20$ и квадрата. Искомая вероятность равна отношению площади этой области к площади всего квадрата.

$$\text{Вероятность встречи } p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

Свойства вероятности. Пользуясь аксиомами, определяющими вероятность, легко доказать следующие свойства вероятности.

1. Вероятность невозможного события равна 0.
2. Вероятность дополнения к событию A $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. Если событие A влечет за собой событие B, то $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Условная вероятность и основные формулы вероятности. В определении вероятности события лежит некоторая совокупность условий G. Если же кроме условий G налагается дополнительное условие, например, произошло событие B, то приходим к определению условной вероятности.

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Легко проверить, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет аксиомам вероятности.

Из определения условной вероятности получаем формулу умножения

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

В случае, когда условная вероятность равна безусловной, получим $P(AB) = P(A)P(B)$.

Определение. Два события A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Определение. События A_1, A_2, \dots, A_n называются взаимно независимыми, если при всех комбинациях индексов $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ справедливы следующие правила умножения:

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Предположим теперь, что событие B может осуществляться с одним и только одним из n несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n .

Иными словами $B = \sum_{i=1}^n BA_i$. Ясно, что события BA_i и BA_j

несовместны, если $i \neq j$. По теореме сложения имеем:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i), \text{ используя формулу умножения, получим}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Это равенство носит название формулы *полней вероятности*.

Рассмотрим вероятность события A_i при условии, что произошло событие B :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)}. \text{ Используя формулу полной вероятности,}$$

получим *формулу Байеса*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

2. Случайная величина.

Определение. Случайной величиной $X(\omega)$ называется числовая функция, заданная на Ω , такая, что, для любого борелевского множества B множество элементарных исходов, при которых $X(\omega) \in B$ является событием, т.е. $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in A$.

Это определение эквивалентно тому, что для любых $x \in R$ определена вероятность события $P\{\omega : X(\omega) \leq x\}$.

Определение. Функцией распределения случайной величины $X(\omega)$ называется функция действительного переменного $F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leq x\} = P(X(\omega) \leq x)$.

Отметим основные свойства функции распределения.

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2) $F(x)$ непрерывна слева и не убывает.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает конечное или счетное число значений. Функция распределения дискретной случайной величины кусочно-постоянная.

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует

функция $y=p(x)$ такая, что $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt$. Функция $y=p(x)$

называется плотностью распределения, $p(x) = F'(x)$, если существует производная.

Свойства плотности распределения вытекают из свойств функции распределения.

$$1) p(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

Числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Определение. Математическим ожиданием случайной величины $X(\omega)$ называется интеграл Лебега

$$EX(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x),$$

если он существует.

В случае дискретной случайной величины интеграл Лебега принимает вид

$EX(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X(\omega) = x_i)$, где x_1, \dots, x_n - значения случайной величины.

В случае непрерывной случайной величины интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана

$$EX(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

Свойства математического ожидания.

1. Если $X(\omega) = \text{const} = c$, то $EX = c$
2. $E(c_1 X + c_2 Y) = c_1 EX + c_2 EY$, где X и Y - случайные величины.

Будем в дальнейшем вместо $X(\omega)$ писать просто X .

Определение. Дисперсией случайной величины $X(\omega)$ называется

$$DX = E(X-EX)^2$$

Свойства дисперсии.

1. $DX = EX^2 - (EX)^2$
2. Если $X=c$, то $Dc = 0$
3. $D(cX) = c^2 DX$

Определение. Случайные величины $X(\omega), Y(\omega)$ называются независимыми, если для любых борелевских множеств B_1 и B_2 $P(X(\omega) \in B_1, Y(\omega) \in B_2) = P(X(\omega) \in B_1)P(Y(\omega) \in B_2)$.

В частности, для любых действительных значений x и y выполняется соотношение $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, или функция совместного распределения случайных величин X и Y равна произведению функций распределения:

$$F_{x,y}(x,y) = F_x(x)F_y(y)$$

Для независимых случайных величин X и Y $E(XY) = EX \cdot EY$ и $D(X+Y) = DX + DY$.

Доказать самостоятельно.

3. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.

Математическое ожидание и дисперсию связывает соотношение, называемое неравенством Чебышева.

Теорема (неравенство Чебышева). Задана случайная величина X , у которой существует математическое ожидание и дисперсия, тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|}{\varepsilon} \text{ и } P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство для дискретной случайной величины. По определению $E|X| =$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) = \\ & = \sum_{\omega|x_i| \geq \varepsilon} |x_i| P(X = x_i) + \sum_{\omega|x_i| < \varepsilon} |x_i| P(X = x_i) \geq \\ & \geq \sum_{\omega|x_i| \geq \varepsilon} |x_i| P(X = x_i) \geq \varepsilon \sum_{\omega|x_i| \geq \varepsilon} P(X = x_i) = \varepsilon P(|X| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

Поделим обе части на ε и получим первое неравенство. Если мы вместо случайной величины X в первом неравенстве подставим случайную величину $X - EX$, то получим

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P((X - EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

т.е. мы доказали справедливость второго неравенства.

Теорема. Закон больших чисел. Если X_1, \dots, X_n, \dots независимы и существует такая константа c , что $DX_i \leq c$, $i = 1, 2, \dots$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + \dots + EX_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Доказательство. Обозначим $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Легко вычислить, что $EY_n = \frac{EX_1 + \dots + EX_n}{n}$, а

$$DY_n = \frac{DX_1 + \dots + DX_n}{n^2} \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + \dots + EX_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \\ = P\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\} = \end{aligned}$$

$$= 1 - P(|Y_n - EY_n| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{\varepsilon^2 n}, \text{ откуда следует}$$

утверждение теоремы.

Для иллюстрации применения неравенства Чебышева рассмотрим следующий пример.

Вычислить с какой надежностью (вероятностью) среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину α , если сделано 500 измерений с точностью 0,1 и дисперсия случайных величин (результатов измерений) не превосходит 0,3.

Итак, X_1, \dots, X_n - результаты измерений,

$$EX_1 = \dots = EX_n = \alpha, \varepsilon = 0,1, n = 500.$$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{500} - \alpha\right| \leq \varepsilon\right) =$$

$$1 - P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{500} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{DX_1}{n\varepsilon^2}$$

$$= 1 - \frac{0,3}{500 * (0,1)} = 0,94.$$

Дискретные распределения.

1. Распределение Бернулли $B(1, p)$.

Случайная величина X принимает два значения 0 и 1, $P(X = 0) = 1 - p, P(X = 1) = p, EX = p, DX = p(1 - p)$.

Примером случайной величины с таким распределением служит случайная величина, принимающая значение 1, если произошло событие A, и 0, если оно не произошло.

2. Биноминальное распределение $B(n, p)$.

Случайная величина X принимает все значения от 0 до n .

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{где } 0 \leq k \leq n, \quad 0 < p < 1,$$

$$EX = np, DX = np(1-p).$$

Примером случайной величины, имеющей такое распределение, служит случайная величина, принимающая значение k , если в n – независимых испытаниях с двумя исходами (успех, неуспех) произошло k успехов. Считается, что вероятность успеха не меняется от испытания к испытанию.

3. Распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$

Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2...

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } k \geq 0; \lambda = \text{const}; EX = \lambda, DX = \lambda.$$

Примером случайной величины, имеющей такое распределение, является случайная величина, равная числу вызовов поступивших на телефонную станцию в единицу времени.

Непрерывные распределения задаются плотностями распределения.

1. Равномерное распределение $R(a, b)$ с параметрами $-\infty < a < b < \infty$. Плотность распределения определяется формулами:

$$p(x, a, b) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{если } x \in [a, b], \text{ в противном случае } p(x, a, b) = 0$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Примером случайной величины, имеющей равномерное распределение, является величина, равная ошибке округления при вычислениях. Так, если округление проводится с точностью до m -го знака после запятой, то ошибка округления имеет

равномерное распределение на отрезке $[-\frac{1}{2}10^{-m}, \frac{1}{2}10^{-m}]$.

2. Показательное (экспоненциальное) распределение $E(a, b)$ с параметрами $a > 0, -\infty < b < \infty$. Плотность показательного распределения задается формулами:

$p(x, a, b) = ae^{-a(x-b)}$, $x \geq b$; $p(x, a, b) = 0$ в противном случае.

$$EX = b + \frac{1}{a}, DX = \frac{1}{a^2}$$

Показательное распределение широко используется в задачах теории надежности и массового обслуживания. Длительность бесперебойной работы приборов, длительность обслуживания, время ожидания обслуживания, интервалы времени между последовательными поступлениями заявок являются случайными величинами, имеющими показательное распределение.

3. Нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$ с параметрами $-\infty < a < \infty$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$. Плотность нормального распределения

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$EX = a$, $DX = \sigma^2$. Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то распределение называется стандартным нормальным распределением.

Очень часто ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения, при этом параметр a равен систематической ошибке измерений, а σ^2 характеризует точность измерительного прибора.

В теории вероятностей и ее приложениях нормальное распределение играет особую роль, поскольку является предельным для сумм большого числа независимых случайных величин.

Центральная предельная теорема

Теорема. Если случайные величины X_1, X_2, \dots , одинаково распределены и имеют конечные $EX_i = a$ и $DX_i = \sigma^2$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вопрос 26.

Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол.

1. Задача численного интегрирования состоит в нахождении

приближённого значения определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где

f – заданная непрерывная функция, и в оценке точности этого приближения. Основная формула интегрального исчисления

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ позволяет выразить интеграл через первообразную

$F(x)$ функции $f(x)$, но она мало пригодна для практики, так как получить ответ в элементарных функциях удается редко, а дающие этот ответ формулы могут быть слишком громоздкими и неудобными с вычислительной точки зрения. Кроме того, значения подынтегральной функции f могут быть известны только в конечном числе заранее заданных точек x_i . Поэтому многие правила построения приближённых квадратур основаны на замене интегрируемой функции f на более простую функцию, близкую к f , легко интегрируемую точно и принимающую в узлах x_i те же значения $f(x_i)$. В качестве такой приближающей функции берут либо алгебраический многочлен от x , либо рациональную функцию, либо тригонометрический многочлен – в зависимости от задачи. Если отрезок интегрирования $[a, b]$ конечный, а функция f имеет высокую гладкость, то можно рассчитывать на хорошее её приближение многочленом не очень высокой степени. Если же функция f не является непрерывной, а имеет особенности, то невозможно хорошо приблизить её многочленом. Если отрезок интегрирования бесконечен, то интеграл по нему от любого не равного нулю многочлена будет бесконечным. Поэтому разумной является только постановка задачи численного интегрирования функции f из класса функций с

заранее заданными свойствами. Будем считать, что f – достаточно гладкая функция, а отрезок интегрирования конечный.

Методы построения квадратур различаются числом выбранных узлов x_i , способами выбора узлов и принципами, на основе которых по выбранным узлам строится приближающая f функция. Чаще всего вычисление приближённого значения интеграла от f сводят к вычислению линейной комбинации значений $f(x_i)$ в конечном числе точек отрезка $[a, b]$. Но в некоторых случаях в эту линейную комбинацию включают и значения производных функции f во всех или в некоторых из рассматриваемых точек. При этом требуют чтобы коэффициенты такой линейной комбинации и узлы x_i не зависели от выбора конкретной функции f из рассматриваемого класса функций. (В других задачах, напротив, требуется выбрать узлы x_i , исходя из известного поведения функции f .) Удобным аппаратом построения квадратур с заранее заданными узлами x_i является аппарат интерполяирования. Пусть, например, заданы n различных узлов x_i на отрезке $[a, b]$. Заменим f на интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad \text{Положим}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + R(f), \text{ где } R(f) = \int_a^b (f(x) - L_n(x)) dx -$$

остаточный член. Можно вместо интерполяционного многочлена Лагранжа взять интерполяционный многочлен Эрмита, и тогда в квадратуру войдут наряду со значениями функции $f(x_i)$ ещё и значения её производных.

2. Заменим функцию f на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом нулевой степени, построенным по значению функции в средней точке отрезка: $L_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Тогда

$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f)$. Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, выражаемую интегралом

$\int_a^b f(x)dx$, мы заменяем на площадь прямоугольника с основанием

$b-a$ и высотой $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Поэтому формулу

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ называют формулой прямоугольника.

Если $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную второго порядка, то для остаточного члена $R(f)$ можно получить простое выражение. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2} f''(\xi(x)), \quad \text{где}$$

$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad \xi \in (a,b)$. Интегрируя, получим

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1) + \frac{1}{2} \int_a^b (x - x_1)^2 \cdot f''(\xi(x))dx. \quad \text{Если известно, что } |f''(x)| \leq M \text{ на } [a,b], \text{ то для остаточного члена получим оценку } |R(f)| \leq \frac{M}{2} \cdot \int_a^b (x - x_1)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot M. \text{ Заметим, что при интегрировании формулы Тейлора член}$$

$$\int_a^b (x - x_1)^2 dx = 0; \text{ этим и объясняется выбор середины от-}$$

резка в качестве единственного узла x_1 интерполяции. Кроме того, очевидно, что формула прямоугольника даст точное значение интеграла, если функция f является любым многочленом первой степени.

В целях повышения точности интегрирования отрезок $[a, b]$ делят на m равных частей длины $h = \frac{b-a}{m}$ и применяют формулу прямоугольника к каждому частичному отрезку. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{2m-1}{2}h\right) \right] + R(f),$$

где $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24 \cdot m^2} \cdot M$. При выводе последнего неравенства надо учесть, что если функция $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а ξ_1, \dots, ξ_m – некоторые точки этого отрезка, то на $[a, b]$ найдётся точка η такая, что среднее арифметическое $\frac{1}{m} [f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_m)]$ равно $f''(\eta)$. Это неравенство означает, что обобщённая формула прямоугольников имеет второй порядок точности относительно шага равномерной сетки: $R(f) = O(h^2)$.

Заменим функцию f на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом первой степени, построенным по значениям функции в точках $x_1 = a$ и $x_2 = b$. При этом кривую $y = f(x)$ мы заменяем её хордой, соединяющей конечные точки: $L_2(x) = f(a) \frac{x-a}{a-b} + f(b) \frac{x-b}{b-a}$, а площадь криволинейной трапеции – площадью трапеции с вершинами $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$, $(a, f(a))$:

$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) + R(f)$. Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка, то можно полу-

чить оценку остаточного члена $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot M$, где M

является мажорантой для $|f''(x)|$ на $[a, b]$. Эта оценка получается из вида погрешности интерполяции для имеющей непрерывную вто-

ую производную функции f :

$$f(x) - L_2(x) = r(x) = \frac{1}{2!} (x-a)(x-b) \cdot f^{(2)}(\xi), \text{ где } a \leq \xi \leq b.$$

Тогда $\left| \int_a^b r(x) dx \right| \leq \frac{M}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| = \frac{(b-a)^3}{12} M$.

Погрешность формулы трапеции можно снизить, если отрезок $[a, b]$ сначала разбить на части и к каждой части в отдельности применить формулу трапеции. Например, если разбить отрезок $[a, b]$ на m равных частей длины $h = \frac{b-a}{m}$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + \dots + 2f(a + (m-1)h) + f(b)] + R(f), \text{ где}$$

$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot M$. Это значит, что обобщённая формула трапеций имеет второй порядок точности относительно шага равномерной сетки: $R(f) = O(h^2)$.

Заменим функцию f на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом второй степени, построенным по узлам $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. Такой многочлен имеет вид

$$L_3(x) = f(a) \frac{(x-x_2)(x-b)}{(a-x_2)(a-b)} + f(x_2) \frac{(x-a)(x-b)}{(x_2-a)(x_2-b)} + \\ + f(b) \frac{(x-a)(x-x_2)}{(b-a)(b-x_2)}.$$

Геометрически это означает, что мы проводим параболу через конечные и среднюю точки кривой $y = f(x)$. Вычислим

$\int_a^b L_3(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(x_2) + f(b)]$. Имеем формулу параболы (формулу Симпсона):

$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(x_2) + f(b)) + R(f)$. Она по построению является точной для любого многочлена второй степени. Кроме того, очевидно, что для функции $f(x) = (x - x_2)^3$ имеем
 $\int_a^b f(x)dx = 0$ и $(f(a) + 4f(x_2) + f(b)) = 0$. Поэтому формула параболы точна для любого многочлена третьей степени. Для оценки погрешности формулы параболы рассмотрим многочлен третьей степени $H_3(x)$, удовлетворяющий условиям $H_3(a) = f(a)$, $H_3(x_2) = f(x_2)$, $H'_3(x_2) = f'(x_2)$, $H_3(b) = f(b)$. Это многочлен Эрмита, который интерполирует функцию f в двух однократных узлах $x_1 = a$, $x_3 = b$ и по значениям f и f' в двойном узле $x_2 = \frac{a+b}{2}$: $f(x) = H_3(x) + r(x)$, где $r(x)$ – погрешность интерполяции. Если функция f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка, то

$r(x) = \frac{1}{4!}(x-a)(x-x_2)^2(x-b) \cdot f^{(4)}(\xi)$, где $a \leq \xi \leq b$. Поскольку для многочлена третьей степени $H_3(x)$ формула параболы точна, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(x_2) + f(b)) + \int_a^b r(x)dx.$$

Поэтому $R(f) = \frac{1}{24} \int_a^b (x-a)(x-x_2)^2(x-b) \cdot f^{(4)}(\xi)dx$. Так как множитель $(x-a)(x-x_2)^2(x-b)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, а $f^{(4)}$ является непрерывной на $[a, b]$ функцией, то на этом отрезке найдётся такая точка η , что

$R(f) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \cdot f^{(4)}(\eta)$. Если на $[a, b]$ выполнено неравенство $|f^{(4)}(x)| \leq M$, то $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M$.

Формулу параболы можно применить не сразу ко всему отрезку, а к отдельным его частям. Если, например, разбить $[a, b]$ на $2m$ равных отрезков, то для каждого отрезка $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$, где $h = \frac{b-a}{2m}$, получим

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}] + R(f), \quad f_k = f(a + kh).$$

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [f_0 + f_{2m} + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1})] + R(f)$,

где $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M$. Это значит, что обобщённая формула парабол имеет четвёртый порядок точности относительно шага равномерной сетки: $R(f) = O(h^4)$.

Пример. $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$. У подынтегральной функции даже

первая производная не ограничена на $[0, 1]$. Поэтому все приведённые выше оценки погрешности численного интегрирования неприменимы.

Пример. $\int_{-1}^2 x \cdot |x| dx = \frac{7}{3}$. Подынтегральная функция непрерывная и гладкая, но её вторая производная имеет разрыв при $x = 0$. Формула параболы даст точный ответ только если её применить отдельно к каждому отрезку непрерывности второй производной: $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 2$.

3. Рассмотренные три квадратуры относятся к формулам Ньютона-Котеса. Они получаются с помощью интегрирования интерполяционного многочлена и допускают стандартную запись. Зададимся некоторыми числами $d_1, \dots, d_n \in [-1, 1]$ и построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$ степени $n-1$, совпадающий с

$$f(x) \quad \text{в точках} \quad x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_i. \quad \text{Положим}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx. \quad \text{Тогда } R(f) = \int_a^b (f(x) - L_n(x)) dx \text{ можно}$$

оценить при помощи оценки погрешности интерполирования. Если функция f имеет непрерывную производную порядка n , то

$$f(x) - L_n(x) = \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi), \text{ где } \omega_n(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

$a \min\{x_1, \dots, x_n, x\} \leq \xi \leq \max\{x_1, \dots, x_n, x\}$.

Поэтому

$$|R(f)| \leq \max_{[a,b]} |f^{(n)}(x)| \cdot \int_a^b \frac{|\omega_n(x)|}{n!} dx. \quad \text{Последний интеграл удобно}$$

записать в виде $D(d_1, \dots, d_n) \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1},$ где

$$D(d_1, \dots, d_n) = \int_{-1}^1 \frac{|\omega_n^0(t)|}{n!} dt, \quad \omega_n^0(t) = (t - d_1) \cdot \dots \cdot (t - d_n); \quad \text{для}$$

этого надо выполнить замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$. Ес-

ли все d_i различны, то $L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Следова-

тельно, получим квадратурную формулу вида

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n D_i \cdot f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_i\right) + R(f), \quad \text{где коэф-}$$

фициенты $D_i = \int_{-1}^1 \prod_{j \neq i} \frac{t - d_j}{d_i - d_j}$, а для остаточного члена имеем

оценку $|R(f)| \leq D(d_1, \dots, d_n) \cdot \max_{[a,b]} |f^{(n)}(x)| \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$. Для квадратур с нечётным числом узлов эту оценку можно уточнить, выразив её через $f^{(n+1)}$ вместо $f^{(n)}$. Чтобы это сделать, надо заменить подынтегральную функцию интерполяционным многочленом, имеющим точку $\frac{b+a}{2}$ двукратным узлом интерполирования.

Пример. $n = 1, d_1 = 0$. Тогда $D = \int_{-1}^1 |t| dt = 1$,

$D_1 = \int_{-1}^1 1 \cdot dt = 2$. Получили формулу прямоугольника

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad |R(f)| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \cdot \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Ту же самую квадратуру получим, если выберем $n = 2$, $d_1 = d_2 = 0$, то есть заменим $f(x)$ на

$$H_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right). \quad \text{Тогда}$$

$$D = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{2} dt = \frac{1}{3}, \quad \int_a^b H_1(x) dx = \int_a^b L_1(x) dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right), \text{ и}$$

имеем $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f)$, где

$$|R(f)| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24}. \quad \text{Таким образом, формулу прямоугольника можно рассматривать как квадратуру с кратным узлом.}$$

Пример. $n = 2, d_1 = -1, d_2 = 1$. Тогда

$$D = \int_{-1}^1 \frac{|(t-1)(t+1)|}{2} dt = \frac{2}{3}, \quad D_1 = \int_{-1}^1 \frac{1-t}{2} dt = 1,$$

$D_2 = \int_{-1}^1 \frac{1+t}{2} dt = 1$. Получили формулу трапеции

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)), |R(f)| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Пример. $n = 4$, $d_1 = -1$, $d_2 = d_4 = 0$, $d_3 = 1$. Эти параметры определяют квадратуру параболы (Симпсона) с кратным узлом.

$$D = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2) \cdot t^2}{4!} dt = \frac{1}{90}. \text{ Подынтегральная функция } f$$

заменяется на интерполяционный многочлен $H_3(x)$, который в

узле $x_2 = \frac{a+b}{2}$ имеет значение $H_3(x_2) = f(x_2)$ и производную

$H'_3(x_2) = f'(x_2)$. Такой интерполяционный многочлен отличается от интерполяционного многочлена $L_3(x)$, построенного по узлам

$d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$, только членом

$\text{const} \cdot (x-a) \cdot (x-b) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$. Этим значениям d_1, d_2, d_3

отвечают $D_1 = \frac{1}{3}$, $D_2 = \frac{4}{3}$, $D_3 = \frac{1}{3}$, а

$\int_a^b L_3(x) dx = \int_a^b H_3(x) dx$. В результате получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right],$$

$$|R(f)| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

4. Если сама функция f или её производные имеют особенности, то их надо выделить, раскладывая f на два сомножителя: $f(x) = p(x) \cdot g(x)$, где $p(x)$ имеет такие же особенности, а

$g(x)$ – достаточно гладкая функция. Аналогичный приём применя-

ют и при вычислении $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Он позволяет охарактеризовать

закон убывания f на бесконечности при помощи функции $p(x)$ и выделить функцию $g(x)$, допускающую хорошее приближение многочленами. Функция $p(x)$ называется весовой. Процедура построения квадратур на основе интерполяирования функции $g(x)$

полностью сохраняется при вычислении $\int_a^b p(x) \cdot g(x)dx$.

5. Говорят, что квадратура имеет алгебраическую степень точности k , если она точна для любого многочлена степени k , но не точна для некоторого многочлена степени $k+1$. Алгебраическая степень точности формулы прямоугольника равна 1, формулы трапеции – 1, формулы параболы – 3. Для квадратур с нечётным числом узлов существенную роль играет их симметрия

Теорема. Чтобы построенная по n узлам x_1, \dots, x_n квадратурная формула $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^n D_i \cdot f(x_i)$ была точной для всех алгеб-

раических многочленов степени $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной

Дальнейшее повышение алгебраической степени точности требует отказа от априорного выбора равноотстоящих узлов квадратуры

Теорема. Чтобы построенная по n узлам квадратурная формула была точной для всех алгебраических многочленов степени $2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной, а её узлы x_i , $i = 1, \dots, n$, были бы нулями многочлена $\omega(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, ортогонального ко всяко-

му многочлену $P_k(x)$ степени $k < n$: $\int_a^b \omega(x) \cdot P_k(x) dx = 0$.

Такие квадратуры называются квадратурами Гаусса. Их коэффициенты D_i и числа $d_i = \frac{2x_i - (a+b)}{b-a}$ не зависят от отрезка $[a, b]$.

Вопрос 27.

Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.

1. Для решения нелинейных уравнений $f(x) = 0$ применяют итерационные методы. Если известна достаточно малая окрестность, в которой содержится единственный корень x^* этого уравнения, то в этой окрестности выбирают начальное приближение x_0 и с помощью некоторого рекуррентного соотношения строят последовательность точек x_k , сходящуюся к x^* . Если рекуррентное соотношение имеет вид $x_{k+1} = \Phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1})$, то итерационный метод называют n -шаговым.

Важнейшей характеристикой итерационного метода является скорость сходимости последовательности x_k к x^* . Пусть для числовой последовательности x_k известно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| = 0$. Если существует такая постоянная c , $0 \leq c < 1$, что, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|$, то говорят, что x_k линейно сходится к x^* . Если существует такая последовательность c_k , что $c_k \rightarrow 0$ и, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c_k \cdot |x_k - x^*|$, то говорят, что x_k сходится к x^* сверхлинейно. Если существуют такие постоянные $c \geq 0$, $p > 1$, что, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|^p$, то говорят, что x_k сходится к x^* с порядком p .

Пример. $x_k = 1 + \frac{1}{2^k}$ сходится к $x^* = 1$, линейно;

$c = \frac{1}{2}$. $y_k = \frac{1}{k!}$ сходится к $x^* = 0$ сверхлинейно; $c_k = \frac{1}{k+1}$.

$z_k = \frac{1}{2^{2^k}}$ сходится к $x^* = 0$ квадратично:

$$z_{k+1} = \frac{1}{2^{2^{k+1}}} = \frac{1}{(2^{2^k})^2} = z_k^2; \quad c = 1.$$

Если для всех k выполнено неравенство $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|$, то $|x_k - x^*| \leq c^k \cdot |x_0 - x^*|$. Если для всех k выполнено неравенство $|x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|^2$, то $|x_k - x^*| \leq \frac{1}{c} \cdot (c \cdot |x_0 - x^*|)^{2^k}$.

2. Пусть $f(x)$ – гладкая функция действительной переменной x . Предположим, что x^* – решение уравнения $f(x) = 0$, а x_k – некоторое приближение к x^* . В методе Ньютона функцию f аппроксимируют касательной к её графику в точке $(x_k, f(x_k))$, а за новое приближение x_{k+1} принимают точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Уравнение указанной касательной имеет вид $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$, поэтому получаем односторонний итерационный процесс $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Заметим сразу, что построить приближение x_{k+1} можно только если $f'(x_k) \neq 0$. Метод Ньютона получается при помощи линейной интерполяции функции f в двукратном узле x_k : в этом узле совпадают значения функции f и интерполирующего её многочлена первой степени, а также их первые производные.

Теорема. Пусть в некотором интервале (a, b) производная f' удовлетворяет условию Липшица: для любых двух точек x_1, x_2 этого интервала выполнено неравенство $|f'(x_1) - f'(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$, $L = \text{const}$. Пусть для некоторого

$\mu > 0$ всюду на (a, b) выполнено неравенство $|f'(x)| \geq \mu$. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет решение на (a, b) , то существует такое $\delta > 0$, что если $|x_0 - x^*| < \delta$, то последовательность итераций метода Ньютона определена и сходится к x^* . При этом $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{L}{2\mu} |x_k - x^*|^2$ для всех k .

Доказательство. Сначала заметим, что если f' удовлетворяет условию Липшица на (a, b) , то на этом интервале выполнено неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)| \leq \frac{L}{2}(x_2 - x_1)^2. \text{ Это следует из}$$

равенства $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(z) dz$, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} [f'(z) - f'(x_1)] dz = \\ &= \int_0^1 [f'(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) dt. \end{aligned}$$

Пусть $(x^* - r, x^* + r)$ – наибольший интервал с центром в x^* , содержащийся в (a, b) . Выберем число γ , $0 < \gamma < 1$, и положим $\delta = \min\left\{r, \frac{2\gamma \cdot \mu}{L}\right\}$. Для итераций метода Ньютона имеем

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 - x^* - \frac{f(x_0) - f(x^*)}{f'(x_0)} = \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} [f(x^*) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)]. \end{aligned}$$

Поэтому $|x_1 - x^*| \leq \frac{L}{2\mu} \cdot |x_0 - x^*|^2$. Так как x_0 выбрано из условия $|x_0 - x^*| < \delta \leq \frac{2\gamma \cdot \mu}{L}$, то $|x_1 - x^*| < \gamma \cdot |x_0 - x^*| < \delta$. Индукцией по k получаем $|x_{k+1} - x^*| < \gamma \cdot |x_k - x^*| < \delta$ в силу неравенств $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{L}{2\mu} \cdot |x_k - x^*|^2$ и $|x_k - x^*| < \delta$. \square

Доказанная теорема показывает быструю, со вторым порядком, сходимость метода Ньютона, но исходит из априорной информации о решении x^* , которое ещё только подлежит отысканию. Из условий теоремы следует, что корень x^* не может быть кратным: $f'(x^*) \neq 0$. Постоянная Липшица L играет роль ограничения сверху на $|f''(x)|$, если существует непрерывная f'' . В последнем

случае $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|$, что легко получить из разложения сверху на $f(x^*)$ по формуле Тейлора.

Замечание. Имеются более сложные достаточные условия сходимости метода Ньютона, в которых не нужна какая-либо информация о решении x^* . Но практическая проверка этих условий может оказаться затруднительной.

Замечание. В некоторых случаях можно получить очень простые достаточные условия сходимости метода Ньютона. Например, если искомый корень x^* изолирован на интервале (a, b) , на котором производная f' положительна и не убывает, то при выборе $x_0 = b$ метод Ньютона сходится, причём монотонно. Вообще, если существуют непрерывные f' , f'' , не обращающиеся в нуль на (a, b) , то итерации Ньютона монотонно сходятся к x^* с той стороны, где $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

Пример. Вычислить \sqrt{a} , $a > 0$, можно методом Ньютона, решая этим методом уравнение $f(x) = x^2 - a = 0$:

$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}$, $x_0 > 0$. Аналогичным образом можно найти

$\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, p – натуральное число: $x_{k+1} = \frac{p-1}{p}x_k + \frac{a}{px_k^{p-1}}$,
 $x_0 > 0$.

Пример. $f(x) = x^2 + bx + c = 0$. Пусть $b^2 > 4c$. Если $x_0 > -\frac{b}{2}$, то метод Ньютона можно записать в виде

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + bx_k + c}{2x_k + b} = -\frac{b}{2} + \frac{x_k + \frac{b}{2}}{2} + \frac{\frac{b^2}{4} - c}{2\left(x_k + \frac{b}{2}\right)}. \text{ То есть}$$

для последовательности $y_k = x_k + \frac{b}{2}$ имеем

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{2} + \frac{\frac{b^2}{4} - c}{2y_k}, \quad y_k \rightarrow \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}. \quad \text{Следовательно,}$$

$x_k \rightarrow -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$. Если же $x_0 < -\frac{b}{2}$, то получим

$x_k \rightarrow -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$. При $x_0 = -\frac{b}{2}$ невозможно начать итерационный процесс. При $b^2 < 4c$ метод Ньютона разойдётся

Если корень x^* имеет кратность $m > 1$ (т.е. $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$, $f^{(m)}(x^*) \neq 0$), то метод Ньютона будет сходиться к x^* лишь линейно. Но если эта крат-

ность m известна, то можно построить метод, имеющий второй порядок сходимости: $x_{k+1} = x_k - m \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Пример. $f(x) \equiv x^2 = 0$. Уравнение имеет корень $x^* = 0$ кратности 2, поскольку $f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$. Выберем $x_0 \neq 0$ и зададим итерационный процесс Ньютона:

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2}$. Отсюда $|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2}|x_k - x^*|$, т.е. последовательность x_k сходится к x^* лишь с первым порядком.

Если же построить итерационный процесс $x_{k+1} = x_k - 2 \cdot \frac{x_k^2}{2x_k}$, то

уже $x_1 = x^*$. Аналогичное явление имеет место для уравнения $f(x) \equiv x''' = 0$, m — натуральное. Вообще, если

$$f(x^*) = f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \neq 0, \quad \text{то} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \frac{1}{2}$$

Серьёзным недостатком метода Ньютона является его высокая чувствительность к выбору начального приближения. В зависимости от выбора x_0 итерации могут сходиться к различным корням уравнения $f(x) = 0$, либо расходиться или зацикливаться, либо привести к невозможности продолжения счёта из-за $f'(x_k) = 0$.

Пример. $f(x) \equiv \arctg x = 0$. Если решать это уравнение методом Ньютона, то сходимость последовательности x_k зависит от выбора начального приближения. Существует такое число $x_c > 0$, что если выбрать $x_0 = x_c$, то получим $x_1 = -x_c$, $x_2 = x_c$, т.е. метод зацикливается. Если $|x_0| < x_c$, то последовательность x_k будет сходиться к единственному корню уравнения $x^* = 0$. Если $|x_0| > x_c$, то x_k расходится.

Пример. Уравнение $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) = 0$ имеет три корня: $x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1$. Метод Ньютона задаётся рекуррентной формулой $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, где $\Phi(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$.

Будет ли он сходиться при некотором выборе x_0 и к какому корню? Чтобы дать ответ на этот вопрос заметим следующее. При $|c| < 1$ уравнение $\Phi(x) = c$ имеет единственный корень, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Поэтому можно определить две последовательности $\{x_i^-\}$ и $\{x_i^+\}$: $x_0^- = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\Phi(x_{i+1}^-) = x_i^-$, $i = 0, 1, \dots$; $x_0^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\Phi(x_{i+1}^+) = x_i^+$, $i = 0, 1, \dots$ Справедливы неравенства

$$x_0^- < x_1^+ < x_2^- < x_3^+ < \dots < 0 < \dots < x_4^+ < x_3^- < x_2^+ < x_1^- < x_0^+.$$

Существуют пределы $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j}^- = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j-1}^+ = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j}^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j-1}^- = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Если начальное приближение x_0 в

методе Ньютона выбрать равным какому-либо числу x_i^- или x_i^+ , $i = 0, 1, \dots$, то итерационный процесс не будет определён. Если

$-\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{5}}$, то итерационный процесс сходится к корню

$x_2^* = 0$. Если $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, то процесс зациклится. Если $x_0 < x_0^-$,

или для некоторого j $x_{2j-1}^+ < x_0 < x_{2j}^-$, или для некоторого j

$x_{2j-1}^- < x_0 < x_{2(j-1)}^+$, то итерации Ньютона сходятся к корню

$x_1^* = -1$. Если $x_0 > x_0^+$, или для некоторого j

$x_{2(j-1)}^- < x_0 < x_{2j-1}^+$, или для некоторого j $x_{2j}^+ < x_0 < x_{2j-1}^-$, то итерации Ньютона сходятся к корню $x_3^* = 1$.

3. Метод Ньютона допускает обобщения на случай дифференцируемых отображений f в конечномерных и в бесконечномерных пространствах. Например, для решения системы нелинейных уравнений $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, он имеет вид

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - [f'(\vec{x}_k)]^{-1} f(\vec{x}_k), \text{ где } f'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \text{ — матрица Якоби.}$$

Якоби. При этом на каждой итерации надо найти матрицу, обратную к матрице Якоби. Обращение матрицы может оказаться более трудоёмкой операцией, чем вычисление $f(\vec{x}_k)$. Поэтому можно модифицировать метод: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - [f'(\vec{x}_0)]^{-1} f(\vec{x}_k)$. Однако при этом утрачивается быстрая сходимость итераций: теперь $\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|$ сходится к нулю лишь со скоростью геометрической прогрессии, т.е. с первым порядком.

4. Предположим, что $f(x^*) = 0$ и в окрестности точки x^* функция f имеет непрерывную вторую производную, а f' , f'' в этой окрестности не меняют знаки. Это значит, что при переходе через x^* функция f меняет знак и имеет точку x^* простым корнем. Зафиксируем в рассматриваемой окрестности точку x_0 , в которой $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Так как x^* является корнем уравнения $f(x) = 0$, то x^* является и корнем уравнения $x = g(x) \equiv x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \cdot f(x)$. Примем за начальное приближение любую достаточно близкую к x^* точку x_1 рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_1)$ имеет знак, противоположный знаку $f(x_0)$. Последующие приближения будем строить по

рекуррентной формуле $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} \cdot f(x_k)$. Геометрически это означает, что x_{k+1} есть абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через фиксированную точку $(x_0, f(x_0))$ и точку $(x_k, f(x_k))$, с осью x . Такой одношаговый итерационный процесс называют методом секущих. В нём на каждом шаге за приближённое значение x_{k+1} корня x^* принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, построенного по значениям функции f в узлах x_0 и x_k . При сделанных предположениях относительно функции f описанный метод сходится к x^* , причём сходимость монотонная.

5. В двухшаговом методе секущих линейная аппроксимация функции f строится с использованием x_k и x_{k-1} . Идея метода состоит в том, что через две точки $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ проводится прямая и абсцисса точки её пересечения с осью x берётся в качестве нового приближения x_{k+1} . Уравнение указанной

прямой имеет вид $y = f(x_k) + (x - x_k) \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$, по-

этому получаем итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \text{ Для задания этого процесса}$$

необходимо выбрать два последовательных приближения x_0 и x_1 .

Заметим, что такой вариант метода секущих соответствует методу Ньютона, в котором $f'(x_k)$ аппроксимируется выражением

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \text{ Такая аппроксимация избавляет от необходимости}$$

вычисления производной, но приводит к замедлению сходимости по сравнению с методом Ньютона. Можно доказать, что при наличии непрерывных производных f' , f'' итерации метода секущих удовлетворяют приближённому равенству

$x_{k+1} - x^* \approx c \cdot (x_k - x^*) \cdot (x_{k-1} - x^*)$, где $c = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$. Решение

такого рекуррентного уравнения можно искать в виде $x_{k+1} - x^* = c^q \cdot (x_k - x^*)^p$. Тогда для p и q получим $p \cdot q = 1$,

$p^2 - p - 1 = 0$. Только положительный корень $p = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ соответ-

вает убыванию $|x_k - x^*|$, т.е. сходящемуся процессу. Таким

образом, для метода секущих $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \sqrt[p]{\left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|}$, где

$p = 1.62\dots$, если метод сходится. Как и в методе Ньютона здесь неявно предполагается, что $f'(x^*) \neq 0$, т.е. x^* – простой корень.

На практике применяют комбинированные стратегии, заключающиеся в поочередном применении метода секущих и метода Ньютона, или модифицированный метод Ньютона с вычислением $[f']^{-1}$ не на всех итерациях, а лишь в небольшом их числе; и т.д. – в зависимости от известных свойств функции f .

Вопрос 28.

Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры методов Рунге-Кутта.

1. Пусть требуется найти решение задачи Коши $Lu \equiv \frac{du}{dt} = f(t, u(t))$, $0 < t \leq T$, $u(0) = u_0$, где u – непрерывная и гладкая на $0 \leq t \leq T$ функция, f – заданная непрерывная функция. Точное решение этой задачи может не выражаться через элементарные функции, либо приводить к очень неудобным с вычислительной точки зрения формулам.

Пример. Уравнение $\frac{du}{dt} = \frac{u-t}{u+t}$ имеет интеграл

$\frac{1}{2} \ln(t^2 + u^2) + \operatorname{arctg} \frac{u}{t} = \text{const.}$ Чтобы найти $u = u(t)$ надо решить это трансцендентное уравнение. Построение его численного решения совсем не проще, чем построение численного решения исходного дифференциального уравнения.

В дальнейшем будем предполагать, что на заданном промежутке $0 \leq t \leq T$ задача Коши имеет единственное решение, а функция $f(t, u)$ является достаточно гладкой.

2. Наиболее распространённым методом численного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. В этом методе область непрерывного изменения аргумента t заменяют дискретным множеством точек t_i – сеткой, а вместо функции непрерывного аргумента вводят функцию, определённую только в узлах сетки, – сеточную функцию. Если число узлов сетки конечно, то сеточная функция является конечномерным вектором $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$. Линейный дифференциальный оператор $Lu(t)$ надо заменить его аналогом на сетке – разностным оператором, действующим на сеточную функцию y . Выберем для каждого узла t_i сетки некоторое множество узлов, соседних с t_i , которое назовём шаблоном. В качестве разностного оператора возьмём ли-

нейную комбинацию значений сеточной функции в узлах шаблона. Такая аппроксимация на сетке дифференциального оператора разностным оператором называется разностной аппроксимацией.

Пример. Оператор $Lu(t) = \frac{du(t)}{dt}$ можно аппроксимировать выражениями

$$L_{\tau}^+ u = \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} \quad (\text{шаблон: } t_i, \quad t_{i+1} = t_i + \tau),$$

$$L_{\tau}^- u = \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{\tau} \quad (\text{шаблон: } t_{i-1} = t_i - \tau, \quad t_i),$$

$$L_{\tau}^2 u = \frac{u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})}{2\tau} \quad (\text{шаблон: } t_{i-1} = t_i - \tau, \quad t_{i+1} = t_i + \tau),$$

$$L_{\tau}^\sigma u = \sigma L_{\tau}^+ u + (1 - \sigma) L_{\tau}^- u \quad (\text{шаблон: } t_{i-1} = t_i - \tau, \quad t_i, \\ t_{i+1} = t_i + \tau; 0 \leq \sigma \leq 1 \text{ – параметр}).$$

Обычно рассматривают семейство сеток. Если все они равномерные, то каждая сетка характеризуется её шагом τ . Поэтому и сеточные функции y зависят от τ как от параметра; разностный оператор обозначают $L_{\tau} y$. Разность $\psi = L_{\tau} y - Lu$ называют погрешностью аппроксимации оператора L оператором L_{τ} . Если $|\psi(t_i)| \leq M \cdot \tau^m$, где $M = \text{const}$ не зависит от τ , а $m > 0$, то говорят, что в точке t_i оператор L_{τ} аппроксимирует оператор L с порядком m . Порядок аппроксимации можно найти, записывая по формуле Тейлора в точке t_i все значения функции u , входящие в разностную аппроксимацию: $u(t_i - \tau)$, $u(t_i + \tau)$ и т.д.

Задачу Коши $Lu = f(t, u(t))$, $0 < t \leq T$, $u(0) = u_0$ заменим на задачу Коши $L_{\tau} y = \phi(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$, $y_0 = u_0$ на сетке. Сеточная функция ϕ является аппроксимацией правой части дифференциального уравнения на сетке. Выбор L_{τ} и ϕ определяет конкретный численный метод решения исходной задачи Коши – разностную схему. При этом мы рассматриваем не одну разностную схему, а семейство задач, зависящее от параметра τ .

Точное решение $u(t)$ и приближённое решение y_i , $i = 0, 1, \dots$, можно сравнить лишь в узлах сетки. Для этого в пространстве сеточных функций введём норму $\|\cdot\|_\tau$. Если число узлов сетки конечно, то это норма в конечномерном пространстве. Сеточная функция $z_i = y_i - u(t_i)$, $i = 0, 1, \dots$, является погрешностью численного решения. Подставив $y_i = z_i + u(t_i)$ в разностное уравнение $L_\tau y = \varphi(t_i)$, получим для z разностную задачу $L_\tau z = \psi(t_i)$, где сеточная функция $\psi_i = \varphi_i - L_\tau u$, $i = 0, 1, \dots$, называется невязкой или погрешностью аппроксимации для уравнения $L_\tau y = \varphi$ на решении $u(t)$ уравнения $Lu = f$. Говорят, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $m > 0$ на решении, если $\|\psi\|_\tau = O(\tau^m)$. Говорят, что разностная схема сходится, если $\|z\|_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Говорят, что разностная схема имеет точность порядка m , если $\|z\|_\tau \leq M \cdot \tau^m$, где $M = \text{const}$ не зависит от τ , а $m > 0$.

Разностная схема называется устойчивой, если существует такая не зависящая от τ и от выбора φ постоянная $M > 0$, что при всех достаточно малых τ выполнено неравенство $\|y\|_\tau \leq M \cdot \|\varphi\|_\tau$. Из устойчивости и аппроксимации следует сходимость разностной схемы.

Замечание. Сеточная норма $\|\cdot\|_\tau$ зависит от шага сетки τ . При $\tau \rightarrow 0$ число узлов сетки стремится к бесконечности. Необходимо предполагать, что для любой гладкой функции непрерывно меняющегося аргумента $u(t)$ введена её норма $\|u\|_0$, и $\|u\|_\tau \rightarrow \|u\|_0$ при $\tau \rightarrow 0$. Здесь $\|u\|_\tau$ – норма сеточной функции $u(t_i)$, $i = 0, 1, \dots$.

3. Для задачи Коши $\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$, $0 < t \leq T$, $u(0) = u_0$ введём на отрезке интегрирования $0 \leq t \leq T$ равномер-

ную сетку $t_i = i \cdot \tau$, $i = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau}$, и построим разностную схему

Эйлера $\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = f(t_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau}$, $y_0 = u_0$. Эта схема

определяет одношаговую рекуррентную формулу $y_{i+1} = y_i + \tau \cdot f(t_i, y_i)$, по которой проводятся вычисления. Она явно выражает y_{i+1} через y_i . Такая разностная схема называется явной.

Найдём уравнение для погрешности разностной схемы $z_i = y_i - u(t_i)$. Для этого подставим $y_i = z_i + u(t_i)$ в схему Эйлера:

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = f(t_i, y_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau}. \text{ Положим } u_i = u(t_i)$$

и учтём, что $f(t_i, y_i) = f(t_i, u_i) + [f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)] = f(t_i, u_i) + f'_u(t_i, u_i + \theta \cdot z_i) \cdot z_i$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\text{для } z_i \text{ получим задачу } \frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = \alpha_i \cdot z_i + \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau},$$

$z_0 = 0$, где $\psi_i = f(t_i, u_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau}$ — невязка, а

$\alpha_i = f'_u(t_i, u_i + \theta \cdot z_i)$. Оценим ψ_i при $\tau \rightarrow 0$. Из формулы Тейлора $u_{i+1} = u(t_i) + \tau \cdot \frac{du(t_i)}{dt} + O(\tau^2)$ и из исходного уравнения

$$\frac{du(t_i)}{dt} = f(t_i, u_i) \quad \text{получаем} \quad \psi_i = O(\tau), \quad \text{т.е.}$$

$\|\psi\|_\tau = \max_{0 \leq i \leq \frac{T}{\tau}} |\psi_i| = O(\tau)$. Это означает, что схема Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

Докажем, что схема Эйлера сходится, т.е.

$$\|z\|_\tau = \max_{0 \leq i \leq \frac{T}{\tau}} |y_i - u_i| \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow 0. \text{ Предположим, что}$$

$|f'_u| \leq K = \text{const}$. Из равенства $z_{i+1} = (1 + \tau \cdot \alpha_i)z_i + \tau \cdot \psi_i$ имеем $|z_{i+1}| \leq (1 + \tau \cdot K)|z_i| + \tau \cdot |\psi_i| \leq (1 + \tau K) \cdot |z_i| + \tau \cdot \|\psi\|_\tau$. Рас-

смотрим разностное уравнение $p_{i+1} = q \cdot p_i + c$, $p_0 = 0$, где $q = \text{const} > 0$, $c = \text{const}$. Его решение имеет вид

$p_{i+1} = c \cdot \sum_{j=0}^i q^{i-j}$. Поэтому $|z_{i+1}| \leq \tau \cdot \|\psi\|_r \cdot \sum_{j=0}^i (1+\tau K)^{i-j}$ для всех $i \leq \frac{T}{\tau}$. Оценим сумму:

$$\sum_{j=0}^i (1+\tau K)^{i-j} \leq \sum_{j=0}^{T/\tau} (e^{\tau K})^{T/\tau-j} = e^{TK} \sum_{j=0}^{T/\tau} e^{-\tau K j} \leq e^{TK} \cdot \left(\frac{T}{\tau} + 1 \right).$$

Отсюда $|z_{i+1}| \leq (T + \tau) \cdot e^{TK} \cdot \|\psi\|_r \leq 2T \cdot e^{TK} \cdot \|\psi\|_r$, где

$\|\psi\|_r = \max_{0 \leq t_j \leq T} |\psi(t_j)|$. Это означает, что $z_i = O(\tau)$, поскольку

$\|\psi\|_r = O(\tau)$. Схема Эйлера имеет первый порядок точности.

4. Порядок точности можно повысить, усложнив разностную схему. В равенстве $u(t + \tau) = u(t) + \int_0^\tau u'(t + \xi) d\xi$ заменим интеграл на величину $\tau \cdot u'(t)$, допуская при этом погрешность порядка $O(\tau^2)$:

$$u(t + \tau) = u(t) + \tau \cdot u'(t) + O(\tau^2) = u(t) + \tau \cdot f(t, u(t)) + O(\tau^2).$$

Полагая $t = t_i$ и отбрасывая член $O(\tau^2)$, получим расчётную схему Эйлера: $y_{i+1} = y_i + \tau \cdot f(t_i, y_i)$. Если интеграл $\int_0^\tau u'(t + \xi) d\xi$

аппроксимировать по формуле прямоугольника, то

$$u(t + \tau) = u(t) + \tau \cdot u'\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + O(\tau^3) =$$

$$= u(t) + \tau \cdot f\left(t + \frac{\tau}{2}, u\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) + O(\tau^3). \quad \text{Отбрасывание члена}$$

$O(\tau^3)$ приводит к формуле $y_{i+1} = y_i + \tau \cdot f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, u\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right)\right)$

с неизвестным значением $u\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right)$. Вычислим его приближённо

по схеме Эйлера с шагом $\frac{\tau}{2}$; тогда на каждом шаге

$$\begin{cases} y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\tau}{2} \cdot f(t_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \tau \cdot f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right). \end{cases}$$

Если интеграл $\int_0^t u'(\xi) d\xi$ аппроксимировать по формуле трапеции, то

$u(t + \tau) = u(t) + \frac{\tau}{2} (f(t, u(t)) + f(t + \tau, u(t + \tau))) + O(\tau^3)$. Отбрасывание члена $O(\tau^3)$ приводит к неявной схеме Адамса второго порядка точности: $y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}))$.

Чтобы не решать это нелинейное уравнение относительно y_{i+1} , заменим в выражении $f(t + \tau, u(t + \tau))$ неизвестное значение функции $u(t + \tau)$ на некоторую величину $y^* = u(t + \tau) + O(\tau^2)$. Это изменит полученное по формуле трапеции выражение на величину

$\chi = \frac{\tau}{2} (f(t + \tau, y^*) - f(t + \tau, u(t + \tau))) =$
 $= \frac{\tau}{2} f'_u(t + \tau, \bar{y}) \cdot (y^* - u(t + \tau))$, где \bar{y} находится между y^* и $u(t + \tau)$;

$\chi = O(\tau^3)$. В качестве y^* можно взять, например, результат вычислений по формуле Эйлера. Тогда получим явную схему

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_i + \tau \cdot f(t_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2} \cdot (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)). \end{cases}$$

Построенные явные схемы относятся к семейству схем Рунге-Кутта. Они имеют второй порядок точности.

Схемы такого типа можно записать в общем виде:

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_i + \alpha \cdot \tau \cdot f(t_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \tau \cdot (1 - \sigma) \cdot f(t_i, y_i) + \tau \cdot \sigma \cdot f(t_i + \alpha \cdot \tau, y_{i+1}^*) \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \sigma < 1$ – параметры. Исключая y_{i+1}^* , получим

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = (1 - \sigma) \cdot f(t_i, y_i) + \sigma \cdot f(t_i + \alpha \tau, y_i + \alpha \tau \cdot f(t_i, y_i)).$$

Порядок точности схемы зависит от параметров α, σ . Перенося $\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau}$ в правую часть и подставляя u_i, u_{i+1} вместо y_i, y_{i+1} , получим невязку

$$\begin{aligned} \psi_i = & (1 - \sigma) f(t_i, u_i) + \sigma f(t_i + \alpha \tau, u_i + \alpha \tau f(t_i, u_i)) - \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \\ & = \tau \left(\sigma \alpha - \frac{1}{2} \right) u''(t_i) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Поэтому, чтобы схема имела второй порядок аппроксимации, надо выбрать $\sigma \alpha = \frac{1}{2}$. Например, при $\sigma = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ или $\sigma = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ получим рассмотренные выше схемы. Они называются схемами предиктор-корректор.

5. Имеются схемы Рунге-Кутта более высокого порядка точности. Например, схема

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{6} [K_1(y_i) + 2K_2(y_i) + 2K_3(y_i) + K_4(y_i)],$$

$$i = 0, 1, \dots, y_0 = u_0, \text{ где } K_1 = f(t_i, y_i),$$

$$K_2 = f(t_i + \tau/2, y_i + \tau K_1/2), \quad K_3 = f(t_i + \tau/2, y_i + \tau K_2/2),$$

$K_4 = f(t_i + \tau, y_i + \tau K_3)$, имеет 4-ый порядок точности.

Все схемы Рунге-Кутта явные одношаговые. В них на каждом шаге вычисления ведутся по одним и тем же формулам. В процессе счёта можно менять шаг τ . Однако, на каждом шаге надо

вычислять новые значения функции f , которые в дальнейшем не будут использованы. Чем точнее схема, тем большее число значений функции f надо вычислить на каждом шаге.

Схемы Рунге-Кутта не изменяются в случае, когда $\bar{u} = \bar{u}(t)$ является решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Встречаются важные задачи, в которых решения являются достаточно гладкими, но меняются так быстро, что схемы Рунге-Кутта требуют неприемлемо малого шага.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 998u_1 + 1998u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = -999u_1 - 1999u_2, \\ u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 1. \end{cases}$$

Решение этой задачи Коши имеет вид $u_1(t) = 4e^{-t} - 3e^{-1000t}$, $u_2(t) = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}$. Оно очень скоро становится близким к $\bar{u}_1(t) = 4e^{-t}$, $\bar{u}_2(t) = -2e^{-t}$. Если выполнить несколько шагов по схеме Эйлера с $\tau = 0.01$, то ничего близкого к решению не получим.

Пример. $\frac{du}{dt} = -1000 \cdot (u - \sin t) + \cos t$, $u(0) = 1$.

Решение этой задачи Коши имеет вид $u(t) = e^{-1000t} + \sin t$. Вблизи точки $t = 0$

оно качественно отличается от решения при больших t : для близких к нулю t основную роль в его поведении играет быстро меняющаяся составляющая e^{-1000t} , а для более далёких t — медленно меняющаяся составляющая $\sin t$.

Если решение задачи содержит быстро меняющийся процесс, характерное время которого намного меньше отрезка интегрирования, то задачу называют жёсткой. Для построения решений жёстких задач приходится применять специальные методы. В частно-

сти, шаг разностной схемы надо согласовывать с поведением решения.

6. Пусть в задаче Коши $\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$, $0 < t \leq T$, $u(0) = u_0$ начальное условие изменено на $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$. Как при этом изменится решение задачи?

Пример.

$$\begin{cases} u' = u - t, & 0 < t \leq 100, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{u}' = \tilde{u} - t, & 0 < t \leq 100, \\ \tilde{u}(0) = 1.000001. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид $1 + t + c \cdot e^t$. $u(t) = 1 + t$, $u(100) = 101$. $\tilde{u}(t) = 1 + t + 10^{-6}e^t$, $\tilde{u}(100) \approx 2.7 \cdot 10^{37}$.

Теорема. Если $f'_u \leq 0$, то $|\tilde{u}(t) - u(t)| \leq |\tilde{u}_0 - u_0|$ для всех $0 \leq t \leq T$. Если $f'_u \geq \mu > 0$, то $|\tilde{u}(t) - u(t)| \geq e^{\mu t} \cdot |\tilde{u}_0 - u_0| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Эта теорема показывает, что при $t \rightarrow \infty$ погрешность $z(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ ведёт себя аналогично решению задачи $\frac{dz}{dt} + \lambda \cdot z = 0$, $\lambda = \text{const}$, $0 < t \leq T$, $z(0) = z_0$. Последнюю задачу рассматривают как модельную для изучения устойчивости по начальным данным при вычислениях по разностным схемам.

Пример. Для схемы Эйлера $\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} + \lambda y_i = 0$, $\lambda > 0$.

имеем расчётную формулу $y_{i+1} = (1 - \tau\lambda)y_i$. Если $|1 - \tau\lambda| \leq 1$, то выполнены неравенства $|y_{i+1}| \leq |y_i| \leq \dots \leq |y_0|$, т.е. погрешность в начальном условии не будет нарастать в процессе счёта. Это значит, что при $\tau \leq \frac{2}{\lambda}$ схема устойчива. Схема Эйлера условно устойчива; для её устойчивости шаг τ надо подчинить указанному ограничению.

Вопрос 29.

Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.

1. Задача Коши для уравнения колебаний струны – это простейшая математическая модель реальных волновых процессов. Под струной понимается одномерная гибкая упругая нить, которую в невозмущенном состоянии можно представить себе как отрезок оси Ox в пространстве $Oxyz$. Можно разными способами возмутить струну:

- изогнуть, а затем отпустить её;
- ударить, сообщив ей некоторый распределённый вдоль неё импульс;
- приложить к струне распределённую вдоль неё силу;
- двигать по определённому закону концы струны;
- приложить силы к её концам

и так далее. В любом случае по струне станут распространяться возмущения – по ней побегут волны. Для описания распространения волн введём вектор $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$, задающий положение в пространстве в момент времени t той точки струны, которая в невозмущённом состоянии имела координаты $(x, 0, 0)$. Рассмотрим простейший случай, когда все возмущения и вызывающие их причины лежат только в плоскости Oxz . Тогда достаточно ввести одну скалярную величину $u(x, t)$ – смещение в направлении оси Oz в момент времени t той точки струны, которая имела в невозмущенном состоянии координату x на оси Ox . Величина u является поперечным смещением в точке x ; не будем рассматривать возможные продольные смещения. Предположим, кроме того, что распространение волн изучается в такой удаленной от концов струны области изменения переменной x и в такие моменты времени t , для которых влиянием режима на концах струны можно пренебречь; в этом смысле будем считать струну бесконечной: $-\infty < x < \infty$.

При деформации струны в ней возникают внутренние упругие силы. Предположение о гибкости струны означает, что эти силы в каждый момент времени направлены по касательным к её профилю. Колебания струны будем считать малыми и

допускающими применение закона Гука. В сделанных предположениях величина T упругой силы не зависит от x и t , а её проекцию на ось Oz можно считать равной $T \cdot u_x(x, t)$. Кроме того, сумма проекций всех сил на ось Ox должна быть равна нулю, поскольку мы рассматриваем только поперечные колебания струны.

Пусть в направлении оси Oz на струну действует распределенная внешняя сила с линейной плотностью $F(x, t)$ (F – сила, приходящаяся на единицу длины). Выделим участок струны $[x_1, x_2]$ и найдем изменение количества движения этого участка в направлении оси Oz в течение времени $[t_1, t_2]$. Если ρ – линейная плотность массы струны (для однородной струны $\rho(x) = const$), то $\rho \cdot u_t(x, t) \cdot dx$ – импульс её участка длиной dx ; тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot (u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)) \cdot dx = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T \cdot (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt.$$

К каждому интегралу в этом равенстве применим формулу среднего значения и разделим равенство на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$. Затем перейдем к пределу при $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow x$, $t_1 \rightarrow t$, $t_2 \rightarrow t$, предполагая существование у функции $u(x, t)$ непрерывных вторых производных $u_{xx}(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$. Тогда получим

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho} = const$, $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$. Дифференциальное

уравнение (1) второго порядка относительно функции $u(x, t)$ называется уравнением колебаний струны. Это уравнение гиперболического типа. Если $f(x, t) = 0$, то (1) называется уравнением свободных колебаний (на струну не действуют

внешние силы, движение происходит только под влиянием сил упругости).

Задача Коши для уравнения колебаний состоит в нахождении решения (1) при заданных начальном отклонении струны $u(x,0)$ и её начальной поперечной скорости $u_t(x,0)$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

2. Классическим решением задачи Коши (2) называется функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная вместе со своей первой производной $u_t(x,t)$ в области $-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$, имеющая непрерывные производные $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в области $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$, удовлетворяющая уравнению колебаний и заданным начальным условиям.

В силу линейности задачи (2) её решение можно представить в виде суммы решений двух задач:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим сначала задачу (3). Предположим, что существует её классическое решение. Замений независимых переменных преобразуем уравнение свободных колебаний к его первой канонической форме, содержащей смешанную производную. Для этого запишем дифференциальное уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ и найдём его интегралы. $dx - adt = 0$, $dx + adt = 0$, поэтому имеем два семейства характеристик: $x - at = C_1 = const$, $x + at = C_2 = const$ (на плоскости Oxt это два семейства параллельных прямых). Введём новые переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. В результате замены переменных уравнение свободных колебаний преобразуется к виду $U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$,

где $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$. Легко найти общее решение этого уравнения: $U_\xi(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi)$, $U(\xi, \eta) = \int \bar{f}(\xi) d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Вернемся к прежним переменным: $u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$. Последнее равенство означает, что общее решение уравнения свободных колебаний представляет собой сумму волны f_1 , распространяющейся слева направо по оси Ox со скоростью a , и волны f_2 , распространяющейся с той же величиной скорости a справа налево. Профили волн f_1 и f_2 со временем не деформируются, поскольку в рассматриваемой модели колебаний не учитывается трение и другие искажающие факторы; происходит только смещение профилей волн со скоростью a вдоль Ox и их сложение. (Для более реалистического описания колебаний следовало бы учесть, например, силу трения, пропорциональную скорости $u_t(x, t)$.) Выделить конкретное решение уравнения свободных колебаний можно, например, при помощи начальных условий задачи (3). Определим функции f_1 и f_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = -af'_1(x) + af'_2(x) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

где штрих означает производную по полному аргументу функции одной переменной. Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \quad C = const. \end{cases}$$

Отсюда

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad (6)$$

(6) называется формулой Даламбера.

3. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши. Пусть в (3) функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < \infty$. Тогда классическое решение задачи (3) существует, единственно и определяется формулой Даламбера (6).

Доказательство. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то непосредственной проверкой устанавливаем, что заданная формулой (6) функция $u(x, t)$ является классическим решением задачи (3). Система (5) определяет вид решения (6) однозначно. \square

Рассмотрим наряду с задачей (3) задачу

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(x, t) = a^2 \tilde{u}_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема об устойчивости решения задачи Коши. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что если функции φ , $\tilde{\varphi}$, ψ , $\tilde{\psi}$ в задачах (3) и (7) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \delta, \quad \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \delta, \quad (8)$$

то решения задач (3) и (7) удовлетворяют неравенству

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon \quad (9)$$

при $0 \leq t \leq t_0$.

Доказательство. Из формулы Даламбера (6) следует неравенство

$$\begin{aligned}|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| &\leq \frac{1}{2} |\phi(x-at) - \bar{\phi}(x-at)| + \\&+ \frac{1}{2} |\phi(x+at) - \bar{\phi}(x+at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi(z) - \bar{\psi}(z)| dz.\end{aligned}$$

Тогда из (8) получаем

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \cdot 2at \cdot \delta = \delta \cdot (1+t).$$

Если решения задач (3) и (7) рассматриваются только на отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$, то на этом отрезке времени выполнено

$$\text{неравенство (9), если } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+t_0}. \square$$

Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (3) означают, что эта задача корректно поставлена.

4. Решим задачу (4) для неоднородного уравнения.

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ в (4) непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $-\infty < x < \infty$,

$t \geq 0$. Тогда задача (4) имеет единственное классическое решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (10)$$

Доказательство. Найдём $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра x интеграл (10) по формуле Лейбница:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau.$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Найдём $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра t интеграл (10) по формуле Лейбница:

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} + f(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t) = f(x,t) + \frac{a}{2} \int_0^t \left(\left. \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=x+a(t-\tau)} - \left. \frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=x-a(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в уравнение, а $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ – в начальные условия задачи (4), убеждаемся в том, что (10) является решением задачи Коши (4). Если бы существовали два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (4), то функция $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяла бы задаче

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x,t) \equiv 0$. \square

При выполнении условий теорем существования и единственности классических решений задач (3) и (4) получаем классическое решение задачи (2) в виде формулы Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

5. Требования к заданным функциям φ , ψ , f могут быть ослаблены, если решение задачи Коши понимать в некотором обобщенном смысле.

Пример. Если в задаче (3) $\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ а

$\psi(x) \equiv 0$, то классического решения этой задачи не существует. Но можно построить решение в смысле предела классических решений. Для этого выберем последовательность достаточно гладких функций

$\varphi_n(x)$, равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$ на $-\infty < x < \infty$. Найдём классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ_n , ψ . Решением исходной задачи назовём $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$. Такое решение для заданных φ и ψ можно получить по формуле Даламбера (6). \square

Пример. Если в задаче (3) $\varphi(x) \equiv 0$,
 $\psi(x) = \begin{cases} V = \text{const} \neq 0, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l, \end{cases}$ то классического решения этой

задачи не существует. (Такие начальные условия означают, что в начальный момент времени струне был ударом передан равномерно распределённый на $|x| \leq l$ импульс $I = 2l\rho V$.)

Последовательность гладких функций $\psi_n(x)$ не может равномерно сходиться к разрывной функции $\psi(x)$. Поэтому надо выбрать последовательность $\psi_n(x)$, сходящуюся к $\psi(x)$ в более

слабом смысле, например, $\int_{\alpha}^{\beta} |\psi_n(x) - \psi(x)| dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

для любого отрезка $[\alpha, \beta]$. Найдём классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ , ψ_n и в качестве решения исходной задачи с начальными данными φ , ψ возьмём $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$. Для заданных φ и ψ это решение можно получить по формуле Даламбера (6). \square

Пример. Если в начальный момент времени струне был передан сосредоточенный в точке $x = 0$ импульс I , а $\varphi(x) \equiv 0$, то в постановке задачи Коши содержится δ -функция:

$u_n(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x)$. Поскольку в условиях задачи присутствует обобщённая функция, её решение надо понимать в обобщённом смысле. Это решение можно построить по формуле Даламбера (6). \square

Вопрос 30.

Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.

1. Краевые задачи для уравнения теплопроводности представляют собой математические модели процессов распространения тепла. Для описания этих процессов в пространственном теле D введём температуру $u(M, t)$ в точке $M(x, y, z) \in D$ (x, y, z – декартовы координаты) в момент времени t . Если температура в разных точках тела различна, то в нём возникают потоки тепла (тепловой энергии), направленные из областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. Потоком тепла через элемент площади поверхности dS называется количество тепла, пересекающего dS за единицу времени. Его можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\vec{W}(M, t)$: если \vec{n} – единичная внешняя нормаль к dS , то поток тепла через dS равен $(\vec{W}, \vec{n})dS$. По закону Фурье в изотропной среде $\vec{W} = -k \operatorname{grad}_M u$, где коэффициент теплопроводности среды $k > 0$. Если среда неоднородна, то $k = k(M)$. Выделим произвольную пространственную область $D' \subset D$, ограниченную замкнутой кусочно гладкой поверхностью S' . Пусть $\rho(M)$ – объёмная плотность массы вещества, $C(M)$ – его удельная теплоёмкость, а $F(M, t)$ – объёмная плотность мгновенных тепловых источников. Запишем баланс тепла для области D' в промежутке времени $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{D'} C(M) \rho(M) [u(M, t_2) - u(M, t_1)] dx dy dz = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S'} (\vec{W}, \vec{n}) dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} F(M, t) dx dy dz. \end{aligned}$$

По формуле Остроградского
 $\iiint_S (\vec{W}, \vec{n}) dS = \iiint_{D'} \operatorname{div}_M \vec{W} dx dy dz$. Предположим, что функция $u(M, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z и непрерывно дифференцируема по t . Из закона Фурье $\operatorname{div}_M \vec{W} = -\operatorname{div}_M (k \cdot \operatorname{grad}_M u)$, и тогда баланс тепла запишется в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_{D'} C(M) \rho(M) [u(M, t_2) - u(M, t_1)] dx dy dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} \operatorname{div}_M (k \cdot \operatorname{grad}_M u) dx dy dz + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} F(M, t) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1)$$

К каждому из интегралов $\int_{t_1}^{t_2}$ и $\iiint_{D'}$ в (1) применим формулу среднего значения, затем разделим равенство (1) на объём области D' и на $t_2 - t_1$; выполним предельный переход, стягивая область D' в точку M и устремляя $t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t$. В силу предположения о существовании у функции $u(M, t)$ указанных выше непрерывных производных получим

$$\begin{aligned} & C(M) \rho(M) u_t(M, t) = \\ & = \operatorname{div}_M (k(M) \cdot \operatorname{grad}_M u(M, t)) + F(M, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) относительно функции $u(M, t)$ называется уравнением теплопроводности. Это уравнение параболического типа. Если $C = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то уравнение (2) имеет вид

$$u_t(M, t) = a^2 \cdot \Delta_M u(M, t) + f(M, t), \quad (3)$$

где $\Delta_M u = \operatorname{div}_M \operatorname{grad}_M u(M, t)$ – оператор Лапласа, $a^2 = \frac{k}{C\rho}$,

$$f(M, t) = \frac{F(M, t)}{C\rho}.$$

Замечание. Уравнение теплопроводности обладает некоторым «дефектом» описания реальных процессов распространения тепла. Согласно этому уравнению, если в точке M_0 сработает мгновенный точечный источник, то есть в M_0 мгновенно выделится конечное количество тепла, то изменение температуры во всей области D произойдёт немедленно: для сколь угодно малого промежутка времени после срабатывания этого источника обусловленное им изменение температуры всюду отлично от нуля. Это значит, что «сигнал» о срабатывании источника в данной модели распространяется с бесконечной скоростью. Такая грубость математической модели происходит из феноменологического закона Фурье, который не учитывает, что тепловая энергия в действительности является энергией движущихся частиц. Вопрос о пригодности уравнения теплопроводности сводится в сущности к вопросам об исходных для данной модели предположениях и о точности описания ею реальных процессов. Более последовательной моделью является интегро-дифференциальное уравнение переноса.

2. Для однозначного определения процесса распространения тепла надо выделить некоторое конкретное решение уравнения теплопроводности. С этой целью к уравнению следует добавить дополнительные условия. Такими условиями являются, например, **начальное условие**, определяющее температуру во всех точках тела в начальный момент времени, и **краевое условие**. Так как уравнение содержит только первую производную по времени, то начального условия достаточно лишь одного.

Если известно, что граница S области D поддерживается при заданной температуре, то $u(P, t) = \mu(P, t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $\mu(P, t)$ – заданная функция. Это условие называется **краевым условием первого рода** или условием Дирихле.

Если на поверхности S известен тепловой поток, то $-k(P) \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = \bar{W}(P, t), \bar{n}$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности S в точке P . Это условие можно записать в виде $\frac{\partial u(P, t)}{\partial n} = v(P, t)$, где $v(P, t)$ –

заданная при $P \in S$, $t \geq 0$ функция. Его называют **краевым условием второго рода** или **условием Неймана**.

В краевом условии можно учесть обмен теплом между телом D и внешней средой. Если известна температура внешней среды $u_{\text{среды}}(P, t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, то по закону Ньютона обусловленный теплообменом поток тепла через элемент границы dS пропорционален $(u(P, t) - u_{\text{среды}}(P, t))dS$. Если на границе S действуют ещё и распределённые по ней источники тепла, то они создают дополнительные потоки тепла через S . В результате приходим к **краевому условию третьего рода**:

$$\frac{\partial u(P, t)}{\partial n} + h(P)u(P, t) = \eta(P, t), \quad P \in S, \quad t \geq 0,$$

где $h(P) > 0$ и $\eta(P, t)$ – заданные функции.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности состоит в нахождении решения $u(M, t)$ уравнения (2) в открытой области $D \times \{t > 0\}$, которое удовлетворяет начальному условию $u(M, 0) = \varphi(M)$, $M \in \bar{D} = D \cup S$, и краевому условию вида

$$\alpha(P) \frac{\partial u(P, t)}{\partial n} + \beta(P)u(P, t) = \chi(P, t), \quad P \in S, \quad t \geq 0,$$

$$(\alpha + \beta > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0).$$

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи называется функция $u(M, t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $u(M, t)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$;
- $u(M, t)$ имеет непрерывные производные u_x , u_y , u_z в замкнутой области $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$;
- $u(M, t)$ имеет непрерывные производные u_t , u_{xx} , u_{yy} , u_{zz} в открытой области $D \times \{t > 0\}$ и удовлетворяет в ней уравнению теплопроводности;
- $u(M, t)$ принимает заданные значения $\varphi(M)$ в \bar{D} при $t = 0$;

- $u(M, t)$ удовлетворяет краевому условию на границе S при $t \geq 0$.

Требование непрерывности решения в замкнутой области $\overline{D} \times \{t \geq 0\}$ существенно, так как при невыполнении его нет единственности решения задачи.

Достаточно требовать непрерывности производных u_x , u_y , u_z лишь в тех точках P границы S , где $\alpha(P) \neq 0$.

Для существования классического решения задачи необходимы непрерывность заданных функций $C(M)$, $\rho(M)$, $k(M)$, $F(M, t)$, $\phi(M)$, $\alpha(P)$, $\beta(P)$, $\chi(P, t)$ и согласование начального и краевого условий:

$$\alpha(P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n} + \beta(P) \phi(P) = \chi(P, 0), \quad P \in S. \quad \text{Однако, часто}$$

возникают задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к классическим решениям. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий; заданные в задаче функции могут оказаться разрывными. В таких случаях решение надо понимать в некотором обобщенном смысле.

Далее будем рассматривать начально-краевые задачи для уравнения (3). В случае $f(M, t) = 0$ можно доказать, что в любой открытой области изменения переменных x , y , z , t решение уравнения $u_t = a^2 \Delta u$ бесконечно дифференцируемо и аналитично по переменным x , y , z .

Если областью D является всё пространство R^3 , то граница S отсутствует, краевого условия нет, имеется только начальное условие. Для единственности решения задачи следует потребовать непрерывности и ограниченности функции $u(M, t)$ в области $R^3 \times \{t \geq 0\}$. Такая задача называется задачей Коши.

3. Рассмотрим процесс теплопроводности в стержне. Направим ось Ox вдоль стержня и предположим, что температура $u(x, t)$ не зависит от координат y и z . Предположение об

одномерности процесса передачи тепла означает, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями; кроме того, все поперечные сечения стержня одинаковы и имеют площадь σ . Из баланса тепла для произвольного отрезка $[x_1, x_2]$ стержня в промежутке времени $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} & \sigma \cdot \int_{x_1}^{x_2} C(x) \rho(x) (u(x, t_1) - u(x, t_2)) dx = \\ & = \sigma \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} - \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} \right] dt + \\ & + \sigma \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx \end{aligned} \quad (4)$$

получаем дифференциальное уравнение теплопроводности

$$C(x) \rho(x) u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t).$$

Для однородного стержня оно имеет вид

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (5)$$

В балансе тепла (4) можно учесть обмен теплом между стержнем и окружающей его средой через боковую поверхность стержня. (Если такого обмена теплом нет, то боковая поверхность стержня называется теплоизолированной.) Пусть p – периметр поперечного сечения стержня, $\gamma > 0$ – коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей его средой. Для учета указанного теплообмена по закону Ньютона к правой части (4)

следует прибавить член $- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \gamma \cdot (u(x, t) - u_{\text{среды}}) p \cdot dx$. Тогда

вместо уравнения (5) получим

$$u_t = a^2 u_{xx} - b \cdot (u - u_{\text{среды}}) + f(x, t), \quad (6)$$

где $b = \frac{\gamma \cdot p}{\sigma \cdot C \cdot \rho} = const$. Если выполнить замену искомой функции

$u(x, t) = e^{-bt} \cdot v(x, t) + u_{\text{спреды}}$, то для новой функции $v(x, t)$ получим уравнение вида (5).

В одномерном случае роль области D играет интервал $0 < x < l$ (l – длина стержня), а ее граница S содержит только две точки $x = 0$ и $x = l$. Начально-краевая задача состоит в нахождении решения уравнения (5) в области $0 < x < l$, $t > 0$, которое удовлетворяет начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, и двум краевым условиям при $x = 0$ и при $x = l$. Если краевые условия имеют вид $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, $t \geq 0$, то говорят о **первой краевой задаче**. В случае краевых условий $u_x(0, t) = \nu_1(t)$, $u_x(l, t) = \nu_2(t)$, $t \geq 0$, получаем **вторую краевую задачу**. В случае краевых условий $u_x(0, t) - h_1 \cdot u(0, t) = \eta_1(t)$, $u_x(l, t) + h_2 \cdot u(l, t) = \eta_2(t)$, $t \geq 0$, $h_1 = const > 0$, $h_2 = const > 0$, получаем **третью краевую задачу**. Возможны **смешанные краевые задачи** с различными комбинациями краевых условий.

Если изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот период времени, за который краевые условия не успеют существенно повлиять на температуру, то получаем задачу Коши для уравнения (5) в области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$. В ней следует требовать непрерывности и ограниченности решения. Возможна другая предельная задача: краевое условие на левом конце оказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце – нет. Тогда получаем задачу для уравнения (5) в области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x < +\infty$, и одним краевым условием какого-либо из рассмотренных типов.

Замечание. Начальные данные в рассмотренных задачах ставятся на **характеристике** $t = 0$ уравнения (5).

4. Теорема (принцип максимума). Решение однородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, непрерывное в замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$, внутри этой области не может принимать значения, большие, чем его значения при $t = 0$ или на границе S области D .

Теорема. Пусть функции $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, непрерывны в замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$ и связаны неравенствами $|u_1(M, 0) - u_2(M, 0)| \leq \varepsilon$, $M \in \bar{D}$, и $|u_1(P, t) - u_2(P, t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $0 \leq t \leq T$. Тогда $|u_1(M, t) - u_2(M, t)| \leq \varepsilon$ во всех точках замкнутой области $\bar{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$.

Из сформулированных теорем вытекает, что первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), & M \in D, 0 < t \leq T, \\ u(M, 0) = \varphi(M), & M \in D, \\ u(P, t) = \mu(P, t), & P \in S, 0 \leq t \leq T; \\ \varphi(P) = \mu(P, 0), & P \in S, \end{cases} \quad (7)$$

может иметь только одно классическое решение, и что это классическое решение устойчиво по начальным и граничным данным.

Существование решения задачи (7) можно получить, построив каким-либо методом (например, методом разделения переменных) ее формальное решение и доказав затем, что оно является классическим решением этой задачи.

Существование, единственность и устойчивость классического решения первой начально-краевой задачи (7) означают, что эта задача корректно поставлена.

5. Построим формальное решение первой начально-краевой задачи на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), & t \geq 0; \\ \tilde{\varphi}(0) = \mu_1(0), \tilde{\varphi}(l) = \mu_2(0). \end{cases} \quad (8)$$

Выполним замену искомой функции:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t).$$

Тогда относительно $v(x, t)$ получим задачу вида

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение задачи (9) можно представить суммой решений двух задач:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Задачу (10) решим методом разделения переменных. Идея этого метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения ищутся в виде произведения $X(x) \cdot T(t)$, где X зависит только от x , а T – только от t . Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Сначала найдем частные решения уравнения $v_t = a^2 v_{xx}$ вида $X(x) \cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям задачи (10). Если подставить произведение $X(x) \cdot T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)},$$

левая часть которого зависит только от x , а правая – только от t . Поскольку x и t являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной. Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0; \quad T'_t(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0.$$

Подставим теперь произведение $X(x) \cdot T(t)$ в краевые условия задачи (10), которые должны выполняться при всех $t \geq 0$. Отсюда $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx} + \lambda \cdot X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Легко проверить, что при $\lambda \leq 0$ задача (12) не имеет нетривиальных решений. При $\lambda > 0$ общим решением уравнения задачи (12) является

$$X(x) = B \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + G \cdot \cos \sqrt{\lambda} x, \quad B = \text{const}, \quad G = \text{const}.$$

Из краевых условий получаем бесконечную последовательность собственных значений $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, каждому из

которых отвечает одна собственная функция $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ (с точностью до ненулевого постоянного множителя). Уравнение для $T(t)$ надо решать при $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$; его общее решение

$$T_n(t) = A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}, \quad A_n = \text{const}.$$

В силу линейности

задачи (10) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$ будет удовлетворять уравнению в частных производных и краевым условиям:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\} \quad (13)$$

— удовлетворяющее краевым условиям общее решение однородного уравнения теплопроводности.

Система найденных собственных функций $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ ортогональна на отрезке $0 \leq x \leq l$ в смысле скалярного произведения

$$(X, Y) = \int_0^l X(x) \cdot Y(x) dx. \|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{l}{2}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ в (10) представима рядом Фурье по системе найденных функций $X_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (14)$$

где $\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$ — коэффициенты

Фурье заданной функции φ . Тогда из начального условия задачи (10) и равенства (14) однозначно определяются коэффициенты A_n того решения $v(x, t)$ в (13), которое удовлетворяет начальному условию: $A_n = \varphi_n$.

Докажем теперь, что формально построенное решение задачи (10) является классическим решением.

Теорема о существовании классического решения. Пусть функция $\varphi(x)$, заданная в начальном условии задачи (10), непрерывна на отрезке $0 \leq x \leq l$ и имеет кусочно непрерывную производную на этом отрезке. Пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда задача (10) имеет классическое решение, представимое рядом

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}. \quad (15)$$

Доказательство. Надо доказать, что сумма ряда (15) в открытой области $0 < x < l, t > 0$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, а в замкнутой области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ является непрерывной функцией. Ряд (15) мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$, который сходится в силу того, что $\varphi(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (15) сходится равномерно в замкнутой области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, а его сумма является непрерывной в этой замкнутой области функцией. Покажем, что при $t \geq \bar{t} > 0$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t}, \quad (17)$$

где $u_n(x, t) = \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t\right\}$. Из

непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$ имеем

$$|\varphi_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \right| \leq 2M,$$

где $M = \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi(x)|$. Тогда при $t \geq \bar{t}$ выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot \bar{t}\right\}$$

и

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}.$$

Поэтому ряды (16) и (17) мажорируются рядами

$$2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}$$

и

$$2M \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \cdot \bar{t} \right\}$$

соответственно, которые сходятся по признаку Даламбера. Отсюда следует, что ряд (15) можно дифференцировать почленно в области $0 < x < l, t > 0$. \square

Решение задачи (11) можно искать в виде ряда Фурье $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$, где коэффициенты Фурье $V_n(t)$

подлежат определению из неоднородного уравнения задачи (11) и ее нулевого начального условия. Разложим $f(x, t)$ при каждом фиксированном t в ряд Фурье: $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$, где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) dx \quad (\text{здесь } t \text{ играет роль параметра}).$$

Для нахождения $V_n(t)$ надо сравнить коэффициенты при $\sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$ в уравнении и в начальном условии. Тогда для определения $V_n(t)$ получаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} V'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot V_n(t) = f_n(t), & t > 0, \\ V_n(0) = 0; & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Как и в случае задачи (10), формально построенное решение задачи (11) требует обоснования.

6. Задача. Начальная температура однородного шара радиуса R равна $u_0 = \text{const} \neq 0$. Во все моменты времени $t > 0$ его поверхность поддерживается при нулевой температуре. Найти температуру внутри шара при $t > 0$.

Решение. В задаче отсутствует согласование начального и краевого условий, поэтому ее решение не является классическим. Очевидно, что решение $u(M, t)$ в каждый момент времени t зависит только от расстояния r от центра шара. Выберем сферическую систему координат с началом в центре шара. В случае сферической симметрии

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Имеем первую начально-краевую задачу в шаре:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, & 0 \leq r < R, t > 0, \\ u(r, 0) = u_0, & 0 \leq r \leq R, \\ u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Введем новую исходную функцию $v(r, t) = r \cdot u(r, t)$. Умножая исходное уравнение на r , получаем задачу на отрезке:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & 0 < r < R, t > 0, \\ v(r, 0) = r \cdot u_0, & 0 \leq r \leq R, \\ v(0, t) = 0, v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Решаем последнюю задачу методом разделения переменных:

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right) \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t\right\},$$

где $\varphi_n = \frac{2}{R} \int_0^R r \cdot u_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right) dr = 2u_0 \cdot R \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$

$$u(r,t) = \frac{1}{r} v(r,t).$$

