

Numerisk modell av basilarmembranen

Prosjektoppgave FYS2130 våren 2019

Eina Bergem Jørgensen
einaj@mail.uio.no

dato: 12. april 2019

I. INTRODUKSJON

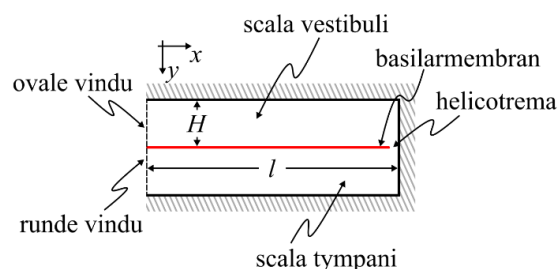
Hensikten med dette prosjektet er å studere dynamikken i sneglehuset i det indre øret ved hjelp av en numerisk modell. Vi ønsker å modellere den elastiske membranen i det indre øret og trykktfluktuasjonene i væskekommerene som omgir den, slik at vi kan utsette sneglehuset for lyd i form av trykkbølger. Ved å studere hvordan modellen responderer på ulike frekvenser, kan vi forhåpentligvis få en bedre forståelse av hvordan øret skiller mellom ulike toner.

A. Ørets anatomi

Øret består, som beskrevet i [norske leksikon, 2005-2007], av tre deler, det ytre øret, mellomøret eller øregangen, og det indre øret. Trykkbølger kommer gjennom den ytre øregangen, og får trommehinna til å vibrere. Det indre øret består av tre knokler, (hammeren, ambolten og stigbøylen) som viderefører svingningene fra trommehinna inn i det indre øret.

I det indre øret ligger sneglehuset, som er hovedfokuset i dette prosjektet. Sneglehuset består av et øvre kammer (scala vestibuli) og et nedre kammer (scala tympani) som er adskilt av en bindevevsmembran kalt *basilarmembranen*. De to kamrene er knyttet til mellomøret ved det ovale

vinduet i scala vestibuli, der lydbølger kommer inn fra stigbøylen, og det runde vinduet i scala tympani. De to kamrene er fylt med væske, og i kontakt med hverandre innert i øret i sneglehuset ved et hull (helicotrema). I figur 1 ser vi en illustrasjon av de ulike delene av sneglehuset.



Figur 1: I denne figuren hentet fra [prosjektoppgaven, 2019] ser vi en illustrasjon av en utrasket modell av sneglehuset

[Vater and Kössl, 2011] beskriver hvordan ulike dyr har sneglehus med ulik lengde og form, der pattedyr gjerne har lengre, krumme sneglehus, har øgler og fugler korte og rette. En lengre basilarmembran øker størrelsen på frekvensspekteret man er i stand til å høre.

Eksperimentelle resultater presentert av [Békésy, 1947] viser at basilarmembranen har varierende elastisitet gjennom sneglehuset. Dette gjør at ulike frekvenser av lydbølger vil gi resonans på ulike steder på membranen, som kan forklare hvorfor vi klarer å skille mellom ulike lydfrekvenser.

B. Numeriske studier av basilararmembranen

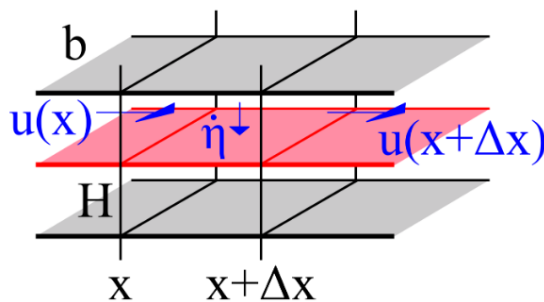
[Peterson and Bogert, 1950] presenterer en todimensjonal numerisk modell av sneglehuset, der en modellerer to kamre med lik høyde adskilt av en membran med varierende elastisitetskonstant, slik at deler av membranen er stivere enn andre. Ved ulike påtrykte frekvenser fant de at deres numeriske modell ga resultater som stemte overens med Békésys eksperimenter.

[Viergever and Kalker, 1974] sammenligner Peterson og Bogerts modell med en tredimensjonal modell. I den tredimensjonale modellen ser en at resonansen for høye frekvenser nærmer seg de to vinduene i sneglehuset, mens den for lave frekvenser befinner seg ved helicotrema. Dette stemmer både med Peterson og Bogerts todimensjonale funn, og Békésys eksperimentelle funn.

Det er Peterson og Bogerts modell vi i dette prosjektet skal ta utgangspunkt i, og bruke til å konstruere en numerisk modell av sneglehuset og basilararmembranen.

II. METODE

Vi tar utgangspunkt i beskrivelsen av basilararmembranen fra figur 1, der sneglehuset er strukket ut til et rett kammer. Vi antar at de to kamrene er like store, med en høyde H , bredde b , og lengde l . De er fylt med en væske med tetthet ρ . Basilararmembranen har tilsvarende bredde og lengde, og er fleksibel i y -retning. Vi beskriver utslaget til membranen som η .



Figur 2: I denne figuren hentet fra [prosjektoppgaven, 2019] ser vi en illustrasjon av de to kamrene, adskilt ved basilararmembranen, og hvordan vi kan se for oss et lite element mellom x og $x + \Delta x$

A. Matematisk modell av sneglehuset

Massen av væske i et lite element mellom x og $x + \Delta x$ som vist på figur 2 kan endre seg på flere måter.

1. Den kan øke som et resultat av fluks av masse som kommer inn fra venstre side med hastighet $u(x)$: $F(x) = \rho b H u(x)$.
2. Den kan minke som et resultat av fluks av masse som forsvinner ut til høyre med hastighet $u(x + \Delta x)$: $F(x + \Delta x) = \rho b H u(x + \Delta x)$.
3. Den kan også endre seg som et resultat av at membranen beveger seg oppover eller nedover: $\rho b \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial t}$

Dette gir oss et totalt uttrykk for masseendringen til et slikt lite element ved posisjon x :

$$\frac{\partial m(x)}{\partial t} = b H \Delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} = F(x) - F(x + \Delta x) - \rho b \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1)$$

Som med en Taylor approksimasjon: $F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x$, gir:

$$b H \Delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho b H \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \rho b \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2)$$

Vi skal se for oss membranen som en rekke med små harmoniske, ukoblede, udempete harmoniske oscillatorer. Vi lar c være bølgehastigheten, altså hastigheten en trykkløse sprer seg gjennom

en medium med. Da har vi relasjonen mellom hastighet c , tetthet ρ og trykk p : $c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$. Ved å sette dette inn i (2) får vi følgende uttrykk for scala vestibuli:

$$\frac{H}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho H \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

I scale tympani med trykk q og hastighet v får vi tilsvarende:

$$\frac{H}{c^2} \frac{\partial q}{\partial t} = -\rho H \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4)$$

Newtons andre lov gir at trykkforskjeller i vannet gir det akselerasjon i x-retning på begge side av membranen, uttrykt matematisk blir det:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (6)$$

Vi skal i denne modellen forholde oss til forskjellen mellom trykket i de to kamrene $\xi = p - q$. Vi ser på basilmembranen som en rekke med harmoniske oscillatorer hvis bevegelse/utslag er avhengig av trykkforskjellen mellom kamrene ξ over oscillatoren, og elastisiteten k i membranen på det punktet. Totalt blir uttrykket:

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k \eta = \xi \quad (7)$$

Vi kan eliminere u fra ligning (3) ved å derivere med hensyn på t og ta i bruk ligning (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho H \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\ \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\rho H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= H \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Og vi ender opp med:

$$H \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (8)$$

Vi kan gjøre tilsvarende med ligning (4) og ligning (6), som vil gi:

$$H \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (9)$$

Vi skal modellere trykkforskjellen $\xi = p - q$, og vi kan finne en ligning for ξ ved å kombinere (8) og (9).

$$\begin{aligned} H \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - H \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ H \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p - q) &= \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p - q) + 2\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$H \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = \frac{H}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi + 2\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (10)$$

Vi har nå to partielle differensialligninger (7) og (10) som beskriver trykkforskjellen i kamrene og utslaget til membranen. Ved å diskretisere ligningene og løse dem numerisk får vi en numerisk modell av sneglehuset.

B. Diskretisering

For diskretisering av partielle differensialligninger bruker vi metoden brekrevet i [Vistnes, 2018] der vi tilnærmer den andredervierte som:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (11)$$

Vi lar indeks i representere tidssteget og indeks j representere posisjonssteget, slike at $\eta^{i+1} = \eta(t^i + \Delta t)$ og tilsvarende for posisjon. Ved å anvende (11) på (7) får vi:

$$m \cdot \frac{\eta_j^{i+1} - 2\eta_j^i + \eta_j^{i-1}}{(\Delta t)^2} + k_j \eta_j^i = \xi_j^i$$

Vi omrokkerer og får:

$$\eta_j^{i+1} = \frac{(\Delta t)^2}{m} (\xi_j^i - k_j \eta_j^i) + 2\eta_j^i - \eta_j^{i-1} \quad (12)$$

Vi gjør det samme for (10):

$$H \cdot \frac{\xi_{j+1}^i - 2\xi_j^i + \xi_{j-1}^i}{(\Delta x)^2} = \frac{H}{c^2} \cdot \frac{\xi_j^{i+1} - 2\xi_j^i + \xi_j^{i-1}}{(\Delta t)^2} + 2\rho \frac{\eta_j^{i+1} - 2\eta_j^i + \eta_j^{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

Og en tilsvarende opprydning gir:

$$\xi_j^{i+1} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (\xi_{j+1}^i - 2\xi_j^i + \xi_{j-1}^i) - \frac{2\rho c^2}{H} (\eta_j^{i+1} - 2\eta_j^i + \eta_j^{i-1}) + 2\eta_j^i - \eta_j^{i-1} \quad (13)$$

Vi har nå de to diskrete differensialligningene vi trenger (12) og (13). Vi kan nå iterere over alle stegene lage en samlet konstant $C = \frac{c(\Delta t)}{(\Delta x)}$ og samtidig sjekke at Courant-betingelsen holder: $C \leq 1$.

C. Initialbetingelser og endepunkter

I begynnelsen av simuleringen ved $t = 0$ er membranen i ro, og vi initialiserer derfor $\eta_j^0 = 0$ for alle posisjoner $j = 1, 2, 3, \dots, M$ der M er det totale antall posisjonssteg.

Lydbølgen som treffer sneglehuset har kunn rukket å treffe posisjon $j = 1$, så for resten av posisjonsstegene er trykkforskjellen null ved $t = 0$, og vi initialiserer $\xi_j^0 = 0$ for $j = 2, 3, 4, \dots, M$.

For at vi skal få resonans i membranen og dermed høre noe, trenger vi en periodisk påtrykt kraft, med andre ord en periodisk endring i trykkforskjellen mellom scala vestibuli og scala tympani. Dette simulerer vi vet at vi bestemmer trykkforskjellen nærmest vinduet i sneglehuset som en periodisk funksjon av tid. Vi bestemmer dermed ξ_0^i i posisjonen $j = 0$ for alle tidssteg $i = 0, 1, 2, \dots, N$ der N er totalt antall tidssteg.

Hva den periodiske funksjonen er vil bestemme hva vi hører. Vi kan teste med et enkelt sinussignal med ulike frekvenser, og se hvordan membranen responderer, eller et sammensatt signal bestående av flere frekvenser for å se om modellen klarer å plukke dem opp og skille dem

fra hverandre slik som øret vårt får til. Et eksempel på et signal for en enkelt frekvens er $\eta_{j=1}(t) = A \sin(2\pi ft)$ der A er trykkamplituden og f er frekvensen til lydbølgen.

Innerst i sneglehuset ved helicotrema, er de to kamrene i kontakt med hverandre, og dermed må trykkforskjellen være null. Dette løser vi ved å iterere opp til, men ikke med det siste posisjonspunktet nå vi oppdaterer trykkforskjellen. Da vil trykkforskjellen ξ_M^i forbli null for alle tidspunkter i .

Vi har dermed alt vi trenger for å gjennomføre den numeriske løsningen vi nå har beskrevet, vist i figure 3.

initialiser ξ_j^0, η_j^0 for $j = 1, 2, \dots, M$.

initialiser $\xi_{j=1}^i$ for $i = 0, 1, \dots, N$.

```
for  $n = 0, 1, \dots, N$  do
    for  $j = 0, 1, \dots, M-1$  do
        regn ut  $\eta_j^{n+1}$ 
        regn ut  $\xi_j^{n+1}$ 
```

Figur 3: Beskrivelse av algoritmen vi bruker for å løse ligningsettet numerisk.

D. Modellens egenskaper og konstanter

I denne modellen skal vi bruke følgende verdier:

$$H = 0.67 \text{ cm}$$

$$l = 3.5 \text{ cm}$$

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3$$

$$c = 1.43 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$$

$$m = 0.143 \text{ g/cm}^2$$

$$k(x) = 4 \cdot 10^9 \exp(-4x) \text{ g/cm}^2\text{s}^2$$

Trykkamplituden til de ulike lydsignalene vi sender inn skal ha en styrke på 60 dB (SPL). Dette tilsvarer 0.02 Pascal, eller:

$$A = 0.2 \text{ g/cm s}^2$$

For tid og posisjonssteg holder vi oss til $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ og $\Delta x = 0.05 \text{ cm}$.

For python-kode, se vedlegg.

E. Resonanseprediksjoner

I denne modellen bruker vi en elastisitet $k(x) = 4 \cdot 10^9 \exp(-4x)$ g/cm²s² som varierer med posisjonen på membranen, med andre ord, membranen er stivere jo nærmere det ovale vinduet vi er, og mer elastisk jo nærmere helicotrema vi er. Som [Békésy, 1947] fant, vil ulike deler av membranen få resonans for ulike påtrykke frekvenser. Vi kan faktisk forutse hvor på membranen resonansen kommer til å oppstå ved å se på uttrykket for k .

Ettersom vi ser på membranen som en rekke med harmoniske oscilatorer, kan vi bruke at en harmoniske oscillator vil resonere når den får en påtrykt $\omega_f = 2\pi f$ lik sin egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ved å løse denne ligningen med hensyn på x får vi:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_0^2 m &= k = 4 \cdot 10^9 \exp(-4x) \\ \frac{\omega_0^2}{4 \cdot 10^9} m &= \exp(-4x) \\ -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\omega_0^2}{4 \cdot 10^9} m \right) &= x\end{aligned}$$

Og vi setter inn for $\omega_0 = \omega_f$

$$x = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{(2\pi f)^2}{4 \cdot 10^9} m \right) \quad (14)$$

Der x er posisjonen (i cm) på membranen vi forventer å se resonans for et lydsignal med frekvens f .

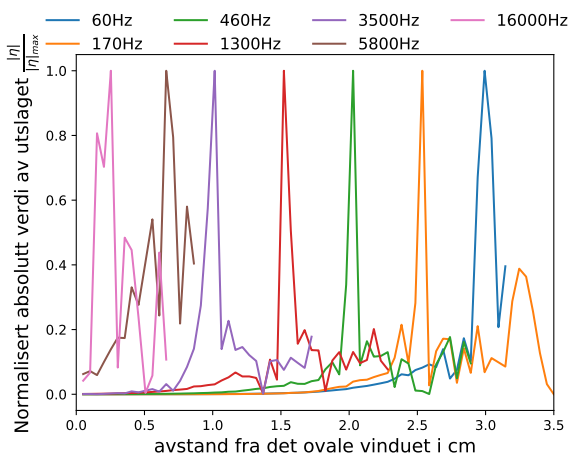
I vår modell har vi et begrenset antall posisjonssteg, og dermed et begrenset antall oscillatorer, og dermed er det jo ikke alle frekvenser som vil ha en oscillator i modellen som passer perfekt. Vi kan teste hvor mye dette har å si ved både å sjekke for en frekvens vi vet passer med egenfrekvensen til en oscillator, og med en eller flere tilfeldig valgte frekvenser.

Å vite hvor på membranen vi kan forvente å se resonans er nyttig, ikke bare for å vurdere om modellen stemmer, men også fordi det åpner for mer analyse. Vi kan for eksempel utføre frekvensanalyse med en fast fourier transform over alle tidsintervallene for det punktet på membranen, og se om vi får en topp i den frekvensen vi sender inn. Da er det også lettere å se om membranen klarer å plukket ut flere frekvenser dersom man sender inn et mer komplekst lydsignal.

III. RESULTATER

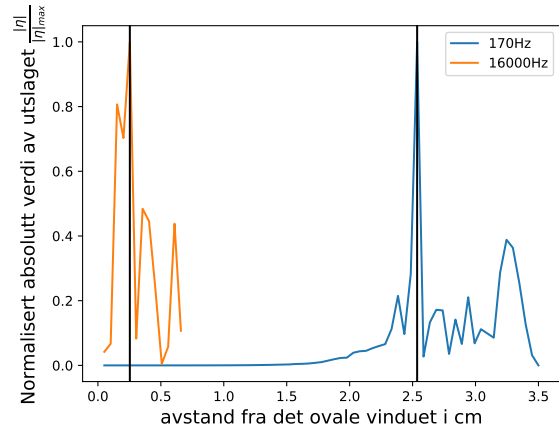
Det første resultatet som er interessant å se på er utslaget η til basilmembranen når for ulike påtrykte frekvenser. Videre kan vi utføre fast fourier transform (fft) og studere frekvensspekteret. Den totale tiden $T = N \cdot dt$ må være lang nok til at det oppstår resonans. Hvor lang tid det tar kommer an på frekvensen på lydbølgen, og det tok noe lenger tid for lavfrekvente toner. Etter å ha latt ulike påtrykte frekvenser virke lenge nok til å det oppsto resonans, kan vi studere oppførselen til basilmembranen.

A. Utslag på membranen



Figur 4: Normalisert utslag av membranen etter total tid $T \geq 0.005$ sekunder, plottet mot avstand fra det ovale vinduet, for ulike påtrykte frekvenser.

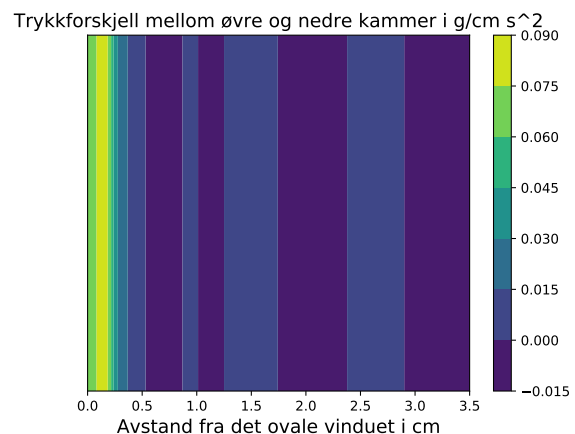
Figur 4 viser den normaliserte absoluttverdien av utslaget som en funksjon av avstand fra det ovale vindet. Årsaken til at utslaget er normalisert er fordi lavere frekvenser gav mye større utslag enn høye frekvenser, og en normalisert fremstilling av membranens utslag gjøre det dermed lettere å sammenligne og finne eventuelle topper når de plottes i samme figur. De ulike fargene representerer utslaget til membranen for forskjellige frekvenser, der frekvensen oppgitt i figuren er frekvensen til lydsignalet. Hvert lydsignal bestod kun av en frekvens.



Figur 5: Et utvalg av frekvenser fra figur 4, de svarte linjene er forventet plassering for resonans renget ut med (14).

I figur 5 ser den normaliserte absoluttverdien til utslaget til membranen for en høy og en lav frekvens, der de to svarte linjene er x verdiene, regnet ut med ligning (14), der fra teorien vil forvente å se resonans ut ifra hvilken frekvens f lydsignalet har.

B. Trykkforskjell i kamrene



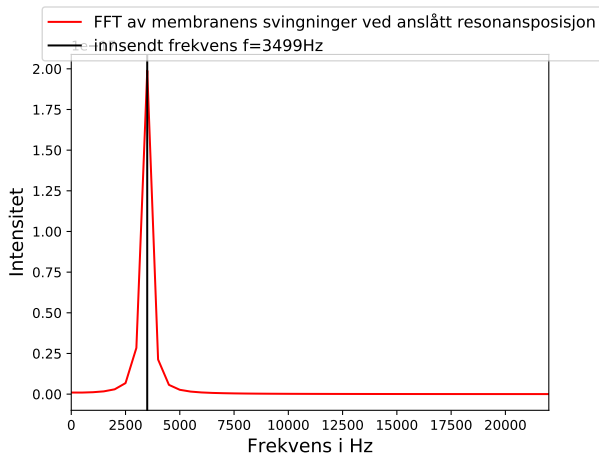
Figur 6: Konturplott som viser forskjellen i trykk mellom de to kamrene fordelt over avstanden fra det ovale vinduet. Et øyeblikksbilde fra når membranen har nått resonans. Påtrykt frekvens 16000 Hz, samme data som 16000 Hz i figur 4 og figur 5.

Vi kan studere hvordan trykkforskjellen ξ mellom kamrene ser ut langs x -aksen etter en tid T i figur 6. De lyse fargene tilsvarer en relativt stor positiv trykkforskjell nære det ovale vinduet.

Innover i sneglehuset ser vi de mørkeblå og noe lysere blå stripene som svarer til henholdsvis en liten negativ og en liten positiv trykkforskjell.

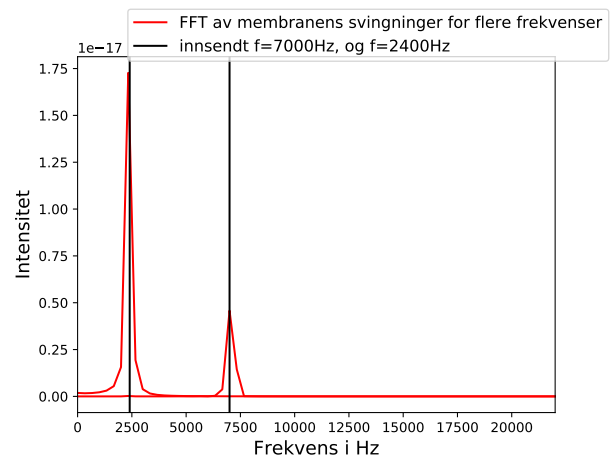
IV. FFT-ANALYSE

Ved å velge en x verdi fra arrayen, og bruke den til å bestemme en påtrykt frekvens $f = \omega_0/2\pi = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$, får vi en påtrykt frekvens som vi vet vi har en oscillator i modellen som resonnerer perfekt med. En slik frekvens er $f = 3499\text{Hz}$, og vi ser FFT analyse av den i figur 7.



Figur 7: Fast Fourier Transform av utslaget i posisjonen som svarer til oscillatoren med samme egenfrekvens som den påtrykte frekvensen, for alle tidsintervaller $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Den svarte linja viser frekvensen på lydbølgen. Utslaget til den røde linja viser intensiteten til gitte frekvenser i dataen.

Ved å sende inn frekvenser som ikke stemmer nøyaktig med noen av oscillatorene, og i tillegg et lydsignal bestående av flere frekvenser, kan vi teste hvor god modellen vår er. Figur 8 viser resultatet av FFT utført på membranens svingninger for det påtrykte signalet $0.2 \sin(f_1 2\pi t) + 0.1 \sin(f_2 2\pi t)$, med $f_1 = 7000\text{Hz}$ og $f_2 = 2400\text{Hz}$.



Figur 8: Fast Fourier Transform av utslaget i membranen for den påtrykte lydbølgen $0.2 \sin(f_1 2\pi t) + 0.1 \sin(f_2 2\pi t)$, med $f_1 = 7000\text{Hz}$ og $f_2 = 2400\text{Hz}$. Den svarte linja viser frekvensene i lydbølgen. Utslaget til den røde linja viser intensiteten til gitte frekvenser i dataen.

I dette tilfellet kan vi ikke se på en oscillator som er den akkurat riktige, så vi må bruke (14) til å regne ut x der resonans forventes, og bruke det posisjonssteget som er nærmest for hver av frekvensene.

V. DISKUSJON

A. Utslag på membranen

I figur 4 ser vi at for ulike frekvenser, får membranen kraftigst utslag på ulike punkter. Dette utslaget er resonans, noe som kommer spesielt tydelig fram i FFT-analysen som vi skal diskutere litt senere. Resonans i membranen gjør at den får større utslag, og blir stående å 'hoppe' opp og ned på stedet.

For ulike frekvenser på lydbølgen, altså den påtrykte frekvensen, ser vi at resonanser oppstår på ulike steder. Resultatene er konsekvente med at den mest høyfrekvente lyden får resonans nærmest det ovale vinduet (altså for lavest verdi av x), mens lavfrekvent lyd gir resonans lengst inn i sneglehuset.

Resultatene er akkurat som vi vil forvente av matematikken som ligger bak, fordi dette har direkte sammenheng med uttrykket vårt for $k(x)$ som blir mindre for større verdier av x , og større for lave verdier av x . $k(x)$ er stivheten eller elastisiteten i membranen, og fra $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ faller det ut at en høy k svarer til en høy frekvens ω_0 og motsatt.

Dette stemmer ikke bare med matematikken vår, men også med de numeriske resultatene til [Peterson and Bogert, 1950] og [Viergever and Kalker, 1974], men også med eksperimentelle dataene til [Békésy, 1947], noe som vitner om at modellen vår innehar egenskapene til basilarmembranen og dens resonansrespons på ulike frekvenser.

I figure 5 ser vi at vi får resonans på det stedet de teoretisk beregningene tilsier, og at dette gjelder for både høye og lave frekvenser, noe som videre er med på å styrke inntrykket av at vår numeriske modell er en adekvat approksimasjon av basilarmembranen og sneglehuset.

B. Trykkmodellen

Selv om det i hovedsak er basilarmembranens oppførsel vi er interessert i, kan det også være nyttig å ta en titt på trykkfordelingen i 6. Figuren viser fordelingen av trykkforskjellen etter oppnådd resonans for en påtrykt frekvens på 16000 Hz. Vi ser en stor positiv trykkforskjell, altså større trykk i scala vestibuli enn i scala tympani like ved det ovale hullet. Dette gir mening, da det er her lydbølgene kommer inn, og ikke langt unna der 16000 Hz har sitt resonansepunkt. Dette innebærer at det er mye bevegelse i væsken her, og man kan forvente se større fluktuasjoner i trykkforskjell. Videre inn i sneglehuset ser vi trykkforskjellene er periodiske, som en trykbølge som brer seg gjennom væsken, men med mindre amplitude enn der vi har resonans. Dette stemmer overens med vår teoretiske forståelse av hvordan det indre øret fungerer, og gir et innblikk i hvordan trykket ser ut i kamrene i sneglehuset under resonans.

C. Frekvensanalyse

Plott av membranen, og spesielt animasjoner, gjør det mulig å indentifiser resonans på basilarmembranen. Dersom det er flere frekvenser i et lydsignal, kan det imidlertid være vanskelig kun ved å se på et stillbilde av membranen, fordi andre resonanser kan oppleves som støy. Ved å gjennomføre en fourier transformasjon av membranen for et punkt, ser vi fra resultatene i 7 og 8 at det er svært lett å skille mellom frekvenser.

At vi får forventet frekvens etter fourier transformasjon av frekvensen i 7 er ikke overraskende, da vi her med vilje sendte inn en frekvens som vi visste modellen hadde en perfekt k -verdi for å resonere med. For tilfellet vist i 8 presterte modellen bedre enn forventet. Som vi ser treffer den godt på verdiene, og klarer å indentifisere resonans til tross for en posisjonsoppløsning på 0.05 cm, eller 70 oscillatorer fordelt på 3.5 cm. Courant-betingelsen gjør at dersom vi ønsker å øke posisjonsoppløsningen Δx , må vi også øke tidsoppløsningen Δt , noe som fort krevre mye

datakraft. Resultatene vitner imidlertid om at dersom vi har beregningskraften til det, vil vi kunne gjøre stegene små nok til med god presisjon å indifisere mange ulike og sammensatte frekvenser og lysignaler.

D. Modellen som helhet

Ved å sammenligne resultatene våre med tilgjengelig teori ser vi altså at vår numeriske modell av sneglehuset responderer med resonans ved ulike steder på basilarmembranen for ulike frekvenser, som er en antakelse om hvordan vi er i stand til å skille mellom ulike frekvenser.

Med resultater som stemmer overens med andre numeriske forsøk og eksperimentelle resultater kan vi påstå å ha konstruert en henholdsvis god numerisk modell av sneglehuset, tatt i betraktning en del forneklinger og antakelser.

Vår modell er 2-dimensjonal, men [Viergever and Kalker, 1974] konklusjon om at den tre-dimensjonale modellen stemmer overens med Peterson og Bogerts modell, er ikke dette nødvendigvis et stort problem, selv om en to-dimensjonal modell på ingen måte kan sies å være komplett.

En annen sentral tilnærming vi gjør er å gjøre modellen for sneglehuset linjær, og dermed ikke ta høyde for krumningen. Dette vil jo gjøre at det er visse aspekter ved det fysiske øret som ikke er inkludert i modellen, for bølgens bevegelse gjennom kamrene i sneglehuset vil nødvendigvis ikke bli helt den samme. Det betyr imidlertid ikke at det ikke kan være en god modell for øre, for det er ikke åpenbart at det vil ha så mye å si for tonene vi kan høre eller hvordan høreslesystemet fungerer. [Vater and Kössl, 2011] presenterer at det er lengden på basilarmembranen som er hovedfaktoren for frekvensene vi kan høre.

Med en lengde på 3.5 cm har vi sett på et sneglehus av omrent menneskelig størrelse i dette prosjektet. [Vater and Kössl, 2011] beskriver imidlertid mange typer sneglehus hos ulike dyr, blant annet øgler og fulgler som typisk har rette

og korte sneglehus, og som regle ikke kan fange opp frekvenser høyere enn 5kHz. Ved å justere lengden l i modellen vår, og kanskje gjøre noen endringer i funksjonen for $k(x)$ basert på det man vet om hørselen til f.eks. en høne, er det ingenting i veien for at modellen vår uten problemer kan justeres til å gjelde for et annet dyr. Dette er fordi det er en generell modell som modellerer hvordan trykket påvirker basilarmembranen, og så lenge det er det som er hørslesystemet, er det ingenting i veien for å endre på parametere slik at vi kan studere det indre øret til en annen art.

Hunder kan høre lyder som er utenfor det frekvensområdet vi mennesker kan plukke opp. Hvaler kan, som beskrevet i [Ketten, 1997] ha basilarmembraner på opptil 7 cm, men med korrekte parametere burde vi være i stand til å anvende modellen vår også her.

VI. KONKLUSJON

I dette forsøket har vi, med utgangspunkt i Peterson og Bogerts modell av sneglehuset og basilarmembranen, laget en numerisk modell som viser hvordan membranen og væskekamrene i sneglehuset i det indre øret respondere på lyd i form av periodiske trykkbølger. Vi har sett at membranen, med varierende elastisitet på ulike områder, med hell kan modeleres som en rekke med harmoniske oscillatorer, der ulike deler av membranen, altså ulike oscillatorer vil havne i resonans med det påtrykte lydsignalet.

Hvor på membranen denne resonansen oppstår, er et direkte resultat av frekvensen på lyden, og ved å studere denne modellen har vi fått innblikk i det man antar er årsaken til at vi klarer å skille mellom lyd med ulike frekvenser. Ved å earbeide dataene har vi også erfart at modellen vår er i stand til å skille ut flere frekvenser fra et sammensatt lydsignal, og vi kan påstå at vi har prestert å lage en akseptabel numerisk modell av øret.

Modellen ta utgangspunkt i noen prinsipper om

hvordan sneglehuset fungerer, men har mange frie parametere, som trolig lar oss tilpasse modellen til ulike typer sneglehus og utforske dem videre, om det skulle være ønskelig.

Resultatene den numeriske modellen presentert i dette prosjektet produserer, er i samsvar med både eksperimentelle resultater og annen numerisk forskning på feltet, noe som styrker inntrykket av at den gjeldende teorien om hvordan det indre øret fungerer er plausibel.

REFERANSER

- Georg V Békésy. The variation of phase along the basilar membrane with sinusoidal vibrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 19(3):452–460, 1947.
- Darlene R Ketten. Structure and function in whale ears. *Bioacoustics*, 8(1-2):103–135, 1997.
- Store norske leksikon. Øre. *Store medisinske leksikon*, 2005-2007. Hentet 2019-04-10: <https://snl.no/%C3%B8re>.
- LC Peterson and BP Bogert. A dynamical theory of the cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 22(3):369–381, 1950.
- prosjektoppgaven. Basilmembranen og sneglehuset. *Fys2130*, 2019. Hentet 2019-04-10: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS2130/v19/prosjekt.pdf>.
- Marianne Vater and Manfred Kössl. Comparative aspects of cochlear functional organization in mammals. *Hearing research*, 273(1-2):89–99, 2011.
- M. A. Viergever and J. J. Kalker. On the adequacy of the peterson-bogert model and on the effects of viscosity in cochlear dynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 8(2):149–156, Apr 1974. ISSN 1573-2703. doi: 10.1007/BF02353617. URL <https://doi.org/10.1007/BF02353617>.
- Arnt Inge Vistnes. Physics of oscillations and waves. pages 68–70, 2018.

VII. VEDLEGG

A. Hovedprogram

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constants
T = 0.003 #s
dt = 1e-8 #s
N = int(T/dt)

l = 3.5 #cm
dx = 0.05 #cm
M = int(l/dx)
rho = 1 #g/cm^3
c = 1.43e5 #cm/s
m = 0.143 #g/cm^2
H = 0.67 #cm
A = 0.2 #g/cms^2

C = c*dt/dx

z = np.linspace(0,l,M)
t = np.linspace(0,T,N)

#arrays
eta = np.zeros((N,M))
xi = np.zeros((N,M))

if C > 1:
    print(f'C = {c**2*dt**2/dx**2}. Try again')
    exit(1)

def initial(t,f): #takes frequency as argument i hz
    return A*(np.sin(f*t)) #g/cms^2

def k(j):
    x = z[j]
    return 4e9*np.exp(-4*x)

def update_eta(i,j):
    eta[i+1,j] = dt**2/m*(xi[i,j] - k(j)*eta[i,j]) + 2*eta[i,j] - eta[i-1,j]

    return
```

```

def update_xi(i,j):

    xi[i+1,j] = C**2 * (xi[i,j+1] - 2*xi[i,j] + xi[i,j-1]) \
        - 2*rho*c**2/H * (eta[i+1,j] - 2*eta[i,j] + eta[i-1,j]) + 2*
        xi[i,j]\
        - xi[i-1,j]

    return

f = 5000 #choose frequency
omega = f*2*np.pi
print(f"running f={f}")

#initialize
xi[:,0] = initial(t,omega)

for i in range(1,N-1):
    for j in range(1,M-1):
        update_eta(i,j)
        update_xi(i,j)

np.save(f"data/eta_{f}_Hz_dt={dt}",eta)
np.save(f"data/xi_{f}_Hz_dt={dt}",xi)

```

B. FFT-plot

```
def x_res(omega):
    m = 0.143
    k_ = (omega)**2*m
    x_res = -0.25*np.log(k_/4e9)
    return x_res

def find_nearest(array, value):
    array = np.asarray(array)
    idx = (np.abs(array - value)).argmin()
    return idx

f=np.load("data/f.npy")

eta_5000 = np.load("data/eta_5000_Hz_dt=1e-08.npy")

N = len(eta_5000[:,0])
dt = 1e-8
fs=1/dt
frekv = (fs/2)*np.linspace(0,1,N/2)
M = int(3.5/0.05)
z = np.linspace(0,3.5,M)

fig = plt.figure()
ax=plt.subplot(111)

Y = np.fft.fft(eta_5000[:,find_nearest(z,x_res(5000*np.pi*2))])/N
Yabs = 2*abs(Y[:round(N/2)])**2
ax.plot(frekv,Yabs,'r')

plt.xlim(0,22000)
plt.axvline(5000,color='k',label="innsendt f=5000Hz")
ax.set_xlabel("Frekvens i Hz",fontsize=14)
ax.set_ylabel("Intensitet",fontsize=14)
fig.legend(loc="upper right",fontsize=12)
plt.show()
```