Inseguimento su un piano inclinato

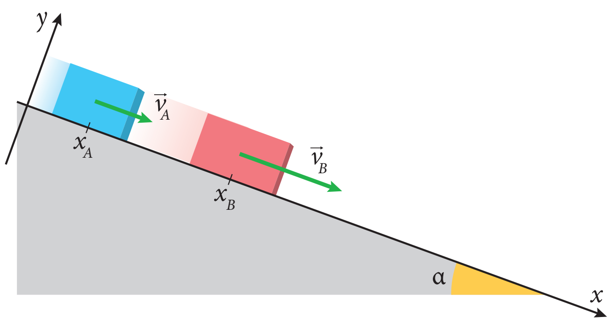
Scarica il file .py

OBIETTIVO Simulare l'inseguimento di due corpi lungo un piano inclinato in presenza della forza di attrito radente dinamico e trovare la posizione e l'istante di tempo in cui avviene il sorpasso.

LA FISICA COINVOLTA

Posizioniamo su un piano inclinato due corpi, A e B, liberi di scivolare ma soggetti ad attrito radente. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo A e il piano è $\mu_{d,A}$, mentre quello tra il corpo B e il piano è $\mu_{d,B}$.

L'angolo di inclinazione del piano inclinato è α e adottiamo il sistema di coordinate che ha l'asse x parallelo alla direzione di scivolamento, come nella figura sotto.



Le posizioni dei corpi A e B sono rispettivamente x_A e x_B e le loro velocità v_A e v_B. Le velocità hanno segno positivo se i corpi si muovono nella direzione positiva dell'asse x.

La componente della forza-peso lungo l'asse x fa scivolare i due corpi verso il basso, mentre la forza di attrito dinamico agisce nella stessa direzione del moto ma in verso opposto. In generale, l'intensità di quest'ultima è pari a $\mu_d F_v$, dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico e F_v la reazione vincolare del piano inclinato, che per il terzo principio della dinamica è uguale e opposta alla proiezione della forza-peso lungo la direzione perpendicolare al piano inclinato. Dal secondo principio della dinamica applicato ai due corpi possiamo dedurre le equazioni per le accelerazioni dei due corpi:

$$a_A = g(\sin(\alpha) - \mu_{d,A}\cos(\alpha)) \qquad [P1]$$

$$a_B = g(\sin(\alpha) - \mu_{d,B}\cos(\alpha)) \qquad [P2]$$

I due corpi scivolano lungo il piano inclinato seguendo moti uniformemente accelerati con accelerazioni date dalle equazioni [P1] e [P2]. Calcoliamo le posizioni x_A e x_B dei due corpi al variare del tempo tramite la legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 \qquad [P3]$$

$$x_B = x_{0B} + v_{0B}t + \frac{1}{2}a_B t^2 \qquad [P4]$$

In queste due equazioni abbiamo che:

- t è il tempo, avendo assunto che l'esperimento abbia inizio all'istante $t = 0$ s;
- x_{0A} e x_{0B} sono le posizioni iniziali dei corpi A e B, misurate lungo il piano inclinato;
- v_{0A} e v_{0B} sono le velocità iniziali di scivolamento dei corpi A e B;
- a_A e a_B sono le accelerazioni dei due corpi date rispettivamente da [P1] e [P2].

Ora disponiamo di tutti gli ingredienti di fisica necessari per realizzare la simulazione in Python dell'esperimento.

IL PROGRAMMA IN PYTHON PASSO DOPO PASSO

Le prime due righe del programma in Python (file inseguimento.py) eseguono l'importazione dei moduli matplotlib e numpy.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Inseriamo nel codice l'inizializzazione di tutte le variabili utili a contenere i valori delle grandezze che definiscono l'esperimento.

```
4  #==========================================================================================
5  #DATI INIZIALI
6  g = 9.81 #m/s^2
7  alfa = 30*np.pi/180 #rad
8
9  mu_A = 0.05
10 x0_A = 0.00 #m
11 v0_A = 0.20 #m/s
12
13 mu_B = 0.30
14 x0_B = 0.50 #m
15 v0_B = 0.10 #m/s
16
17 durata = 1.00 #s
18 numero_istanti = 100 #numero di istanti in cui è suddiviso l'asse del tempo
19 t = np.linspace(0.00,durata,numero_istanti) #s
20 #==========================================================================================
```

Descriviamo ciascuna delle righe sopra:

- la riga 6 definisce la variabile `g` che memorizza l'accelerazione di gravità g;
- `alfa` (riga 7) contiene il valore dell'angolo di inclinazione del piano, espresso in radianti, che nel caso del codice sopra equivale a 30°;
- le righe da 9 a 11 assegnano rispettivamente il coefficiente di attrito dinamico, la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo A alle variabili `mu_A`, `x0_A` e `v0_A`;
- le righe da 13 a 15 assegnano rispettivamente il coefficiente di attrito dinamico, la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo B alle variabili `mu_B`, `x0_B` e `v0_B`;
- `durata` alla riga 17 contiene la durata dell'esperimento in secondi;
- riga 18 definisce il numero di istanti in cui suddividiamo l'asse del tempo;
- `t`, definito a riga 19, è l'array che contiene i tempi ai quali calcoleremo la posizione dei due corpi e che ha un numero di elementi uguale a `numero_istanti`.

Abbiamo scelto i valori dei coefficienti di attrito dinamico in modo tale che i due corpi possano scivolare: valori troppo grandi della forza di attrito impedirebbero il moto, come vedremo nella sezione *Sperimentiamo*.

Ora possiamo tradurre in Python le equazioni [P1], [P2], [P3] e [P4].

```
22 #==========================================================================================
23 #FISICA DELLO SCIVOLAMENTO CON ATTRITO RADENTE
24 #accelerazioni dei due corpi
25 a_A = g*(np.sin(alfa) - mu_A*np.cos(alfa))
26 a_B = g*(np.sin(alfa) - mu_B*np.cos(alfa))
27
28 #posizioni dei due corpi
29 x_A = x0_A + v0_A*t + 1/2*a_A*t**2
30 x_B = x0_B + v0_B*t + 1/2*a_B*t**2
31 #==========================================================================================
```

Il codice delle righe 25 e 26 calcola l'accelerazione dei corpi A e B traducendo in Python le equazioni [P1] e [P2] e le salva nelle variabili `a_A` e `a_B`. Le righe 29 e 30 calcolano gli array `x_A` e `x_B` che contengono le posizioni di A e B per ogni istante di tempo contenuto nell’array `t`. Disponendo degli array `x_A` e `x_B`, possiamo tracciare i grafici spazio-tempo che descrivono i due moti. Il codice è riportato sotto.

```
33 #==========================================================================================
34 #CREAZIONE DEL GRAFICO
35 fig, grafico = plt.subplots(figsize=(10,6), sharex=True)
36 grafico.plot(t, x_A, color='blue', linestyle='-', linewidth=3.0, label="corpo A")
37 grafico.plot(t, x_B, color='red', linestyle='-', linewidth=3.0, label="corpo B")
38 grafico.set_xlabel("t (s)")
39 grafico.set_ylabel("posizione (m)")
40 grafico.set_title("Grafico spazio-tempo per i due corpi")
41 grafico.legend()
42 grafico.minorticks_on()
43 grafico.grid(which='major', axis='both', linewidth=1.0)
44 grafico.grid(which='minor', axis='both', linestyle ="--", linewidth=0.2)
45 plt.show()
46 #==========================================================================================
```

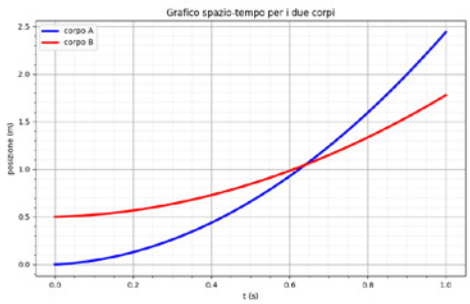
La procedura per la creazione del grafico è la medesima di altre schede. Poiché utilizziamo un solo grafico per rappresentare il moto di entrambi i corpi, nelle righe 36 e 37 specifichiamo un colore diverso per le due linee: blu per il corpo A e rosso per il corpo B. Etichettiamo la linea del corpo A con l’etichetta `corpo A` e analogamente quella del corpo B con l’etichetta `corpo B`. Queste due etichette compariranno nella legenda del grafico creata dalla riga 41 e ci permetteranno di distinguere le leggi orarie dei due corpi nel grafico.

Le righe 38 e 39 assegnano etichette agli assi x e y del grafico, la riga 40 assegna un titolo. Infine, le righe 42, 43 e 44 creano una griglia utile per l’analisi del grafico.

Il codice è terminato e possiamo eseguire il programma.

I RISULTATI

Dopo aver premuto il tasto di esecuzione di Thonny, la finestra grafica si apre e ci mostra il grafico seguente.



Il grafico spazio-tempo rappresenta come variano le posizioni dei due corpi durante il primo secondo del moto. Ricordiamo che la riga 17 assegnava il valore 1,00 alla variabile `durata` e che possiamo aumentarne il valore per estendere la durata dell’esperimento.

In tale intervallo il corpo A, che parte dalla posizione 0,00 m, percorre circa 2,40 m, mentre il corpo B, che parte dalla posizione iniziale 0,50 m, percorre 1,27 m.

Osserviamo che le due linee si intersecano, quindi il corpo A raggiunge e supera il corpo B. Possiamo ottenere l’istante temporale e la posizione dell’incontro dei due corpi posizionando il cursore sul punto di intersezione delle curve. Nell’angolo in basso a destra della finestra leggiamo le coordinate del cursore e scopriamo che il sorpasso è avvenuto dopo 0,64 s a una distanza di 1,05 m dall’origine degli assi.

Questo metodo è un esempio di risoluzione grafica che ci consente di ottenere una soluzione approssimata del problema. In alternativa, possiamo risolvere il problema per via algebrica: se eguagliamo tra loro i membri di destra delle equazioni [P3] e [P4], otteniamo un’equazione di secondo grado in t che, una volta risolta, ci fornisce l’istante di tempo in cui avviene il sorpasso.

SPERIMENTIAMO

Per prima cosa possiamo sperimentare agendo sull'inclinazione del piano inclinato. Se variamo il valore dell'angolo α a riga 7 ed eseguiamo il programma, osserveremo che l'istante del sorpasso cambia.

ESERCIZIO

Esegui il programma con i medesimi valori iniziali delle sezioni precedenti. Scegli alcuni valori dell'angolo α compresi tra 20° e 80° ed esegui il programma per ciascuno di essi.

- Come cambia l'istante di tempo in cui avviene il sorpasso all'aumentare dell'angolo α?
- Perché?

Possiamo ora sperimentare con diversi valori dei coefficienti di attrito oppure diverse posizioni e velocità iniziali dei due corpi. Prima di agire liberamente sui valori di queste grandezze ricordiamo che le equazioni [P1] e [P2] sono valide se sussistono le condizioni seguenti.

- Le velocità iniziali dei corpi devono essere positive e non nulle, perché le equazioni [P1] e [P2] sussistono soltanto se la forza di attrito ha verso opposto al verso dell'asse x (quello del moto).
  Inoltre, in caso di velocità nulla, il corpo potrebbe arrestarsi definitivamente. In tal caso, dovremmo introdurre la forza di attrito radente statica che non è simulata dal nostro codice Python.
- Le accelerazioni date dalla [P1] e [P2] devono essere positive o nulle, poiché una accelerazione negativa, con velocità positiva, produrrebbe un rallentamento dello scivolamento fino all'arresto del corpo. In caso di arresto, si verificherebbe la situazione di velocità nulla descritta al punto precedente.

Possiamo escludere queste situazioni non ammesse (file inseguimento_controlli.py) mediante apposite istruzioni `if` nella sezione del codice che implementa le leggi fisiche.

Sotto troviamo la parte di codice modificata.

```
22 #==========================================================================================
23 #FISICA DELLO SCIVOLAMENTO CON ATTRITO RADENTE
24 #accelerazioni dei due corpi
25 if (v0_A <= 0) or (v0_B <= 0):
26     print("Le velocità iniziali devono essere maggiori o uguali a 0 m/s.")
27     exit()
28
29 a_A = g*(np.sin(alfa) - mu_A*np.cos(alfa))
30 a_B = g*(np.sin(alfa) - mu_B*np.cos(alfa))
31
32 if (a_A < 0):
33     print("La forza di attrito tra il corpo A e il piano è così elevata che il corpo A si fermerà, \
34 diminuisci mu_A oppure aumenta l'inclinazione del piano.")
35     exit()
36 if (a_B < 0):
37     print("La forza di attrito tra il corpo B e il piano è così elevata che il corpo B si fermerà, \
38 diminuisci mu_B oppure aumenta l'inclinazione del piano.")
39     exit()
40
41 #posizioni dei due corpi
42 x_A = x0_A + v0_A*t + 1/2*a_A*t**2
43 x_B = x0_B + v0_B*t + 1/2*a_B*t**2
44 #==========================================================================================
```

La riga 25 implementa il vincolo che entrambe le velocità iniziali siano positive. Nel caso in cui ciò non sia vero, il programma avvisa l'utente con una stampa in Shell e l'esecuzione del programma si interrompe.

Le righe 32 e 36 implementano il vincolo che l'accelerazione di entrambi i corpi sia positiva o nulla: nel caso in cui una o entrambe le accelerazioni siano negative, il programma avvisa l'utente e termina.

Avendo aggiunto questi controlli al programma, siamo liberi di sperimentare variando tutti i parametri della sezione dei dati iniziali, senza correre il rischio di imbatterci in situazioni che siano simulate in maniera errata o che siano prive di significato fisico.

Se rispettiamo questi vincoli, possiamo usare il programma per simulare lo scivolamento senza attrito assegnando il valore zero al coefficiente di attrito, oppure eseguire esperimenti su altri pianeti, dove l'accelerazione di gravità è diversa da quella terrestre.

ESERCIZIO

Sulla Terra e su Marte sono installati due piani inclinati identici con un'inclinazione $\alpha = 45°$. Sia sul piano inclinato terreste sia su quello marziano vengono lasciati scivolare due corpi A e B. I coefficienti di attrito dinamico valgono rispettivamente $\mu_A = 0{,}05$ e $\mu_B = 0{,}3$. Entrambi i corpo hanno una velocità iniziale di 0.0001 m/s. Il corpo B parte 1 m più avanti rispetto al corpo A.

- Sulla Terra, quanto spazio percorre il corpo A lungo il piano inclinato prima di raggiungere il corpo B? E su Marte?
- Se cambi l'angolo dei due piani inclinati, arrivi alla stessa conclusione? E variando i coefficienti di attrito?