MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

MASTER 1 INFO 2021–2022

Optimisation Algorithmique

Contrôle du 6 janvier 2022, durée 1h30

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$.

1. Donner la définition d'une direction de descente en un point $x \in \mathbb{R}^2$. Expliquer ce que va entraîner cette définition ?

2. Expliquer la méthode de Newton pour minimiser f. Donner les avantages et désavantages de cet algorithme.

Exercice 1

Soit $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_x f(x)$?

2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $d^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente.

4. Déterminer le pas σ_0 qui minimise f le long de cette direction.
   (Indic. : poser $\varphi(\sigma) = f(x^{(0)} + \sigma d^{(0)})$ et minimiser φ sur $\mathbb{R}_+^*$).

   Calculer ensuite $x^{(1)}$. Conclusion ?

5. On garde le même point initial $x^{(0)}$ mais l'on prend $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$.
   Déterminer alors σ_0 et $x^{(1)}$, comme dans 4. Commentez.

Exercice 2

On pose $g(x, y) = -[\log(1 + x_1) + \log(1 - x_1) + \log(1 + x_2) + \log(1 - x_2)]$.

1. Montrer que g est définie sur $D =]-1, +1[\times]-1, +1[$.

2. Calculer $\nabla g(x_1, x_2)$ au point $(x_1, x_2) \in D$.

3. Déterminer les points critiques de g.

4. Déterminer $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_m = g(x_1^*, x_2^*) = \min\limits_{(x_1,x_2)\in D} g(x_1, x_2)$.

   On désire tester les méthodes de descente de gradient et de Newton sur la fonction g.

5. Expliquer quelles précautions il faut prendre pour appliquer l'algorithme de descente de gradient avec backtracking ?

6. Est-ce qu'il faut prendre les mêmes précautions pour la méthode de Newton ?

7. Calculer $\tilde{g}(x_1, x_2) = e^{g(x_1,x_2)}$, pour $(x_1, x_2) \in D$. Que peut-on dire de $\tilde{x}^* = \arg\min\limits_{x\in D} \tilde{g}(x)$?