Traitement du signal et des images - M1 info

Signaux échantillonnés

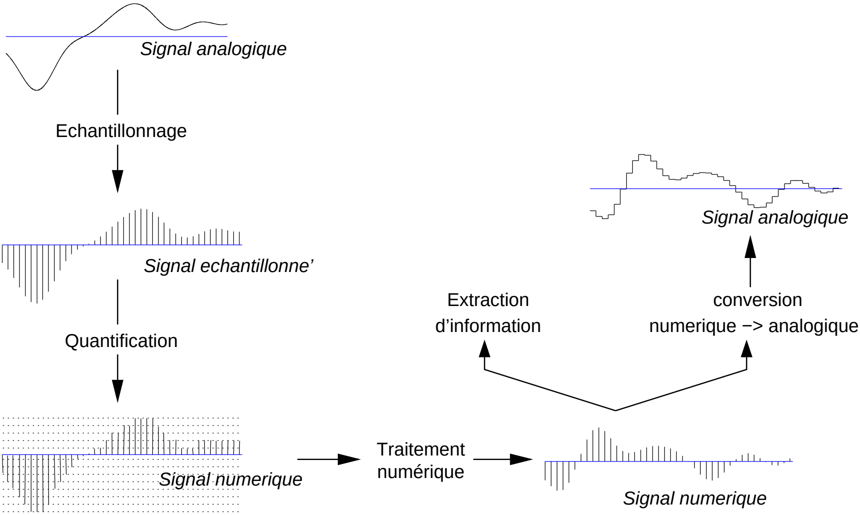
Gaël MAHÉ

Université Paris Descartes / UFR math-info

automne 2010

Plan

Chaîne de traitement numérique du signal



Plan

Représentation temporelle

Soit $s(t)$ échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1/T_e$.

Le signal échantillonné peut être vu comme :

- **Une suite numérique**
- **Une fonction du temps**

Représentation fréquentielle (1)

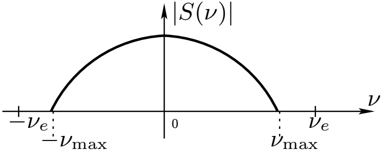
Spectre de $s[n]$:

Représentation fréquentielle (2)

Plan

Cas où $\nu_{\max} < \nu_e/2$

Soit $s(t)$ de spectre $S(\nu)$ à support borné, avec $\nu_{\max} < \nu_e/2$.



Théorème de Shannon

Un signal $s(t)$ de spectre à support borné par $\nu_{\max}$
($i.e.$ $S(\nu) = 0 \quad \forall\, |\nu| > \nu_{\max}$)
peut être échantillonné **sans perte d'information** à la fréquence ν_e
si $\nu_e > 2\nu_{\max}$.

Reconstruction parfaite d'un signal

$$s(t) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \mathrm{sinc}(\pi \nu_e t - \pi n)$$

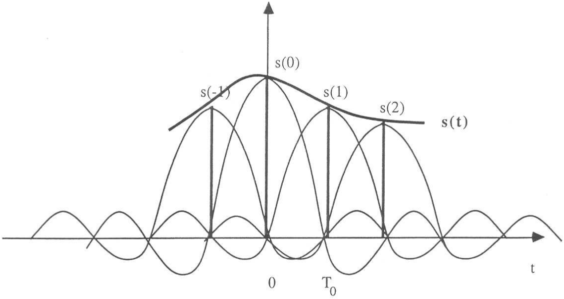
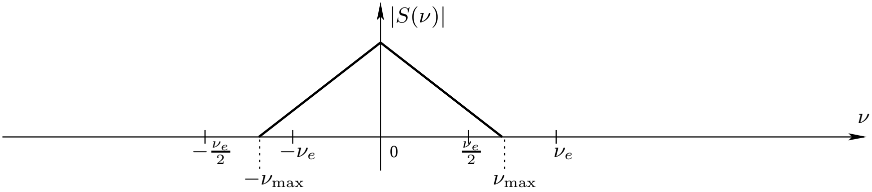


Figure: Reconstruction parfaite de $s(t)$ à partir de $s[n]$.

Formule de Poisson

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Que se passe-t-il si $\nu_e < 2\nu_{\max}$?



Comment éviter le repliement de spectre ?

Démonstration de la formule de reconstruction

Les échantillons $s[n]$ et la fréquence d'échantillonnage ν_e sont connus, on cherche le signal continu $s(t)$ correspondant, de spectre borné à l'intervalle $[-\nu_e/2; \nu_e/2]$:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \\
&= \frac{1}{\nu_e} \int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} S_e(\nu) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \\
&= T_e \int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu n T_e} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \\
&= T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n] \int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu(t-nT_e)} \mathrm{d}\nu \\
&= T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n] \mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)
\end{aligned}
$$

Démonstration de la formule de Poisson

$$
\begin{aligned}
\forall\, n, \quad s[n] &= s(nT_e) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu nT_e}\,\mathrm{d}\nu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(2k-1)\frac{\nu_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\nu_e}{2}} S(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu nT_e}\,\mathrm{d}\nu \\
& \quad \text{changement de variable : } \quad \nu \to \nu - k\nu_e \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{-\nu_e}{2}}^{\frac{\nu_e}{2}} S(\nu - k\nu_e)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu nT_e}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn\nu_e T_e}\,\mathrm{d}\nu \\
&= \int_{\frac{-\nu_e}{2}}^{\frac{\nu_e}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu nT_e}\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned}
$$

Or

$$\forall\, n, \quad s[n] = \frac{1}{\nu_e}\int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} S_e(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu nT_e}\,\mathrm{d}\nu$$

Par identification, on a donc :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

(formule de Poisson)