M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images

TD Signaux échantillonnés

1 Effet du sous-échantillonnage

On échantillonne à 500 échantillons par seconde un signal réel à temps continu qui est la somme de 3 sinusoïdes de fréquences respectives 50 Hz, 100 Hz et 300 Hz.

— Dessiner le spectre d'amplitude du signal analogique

— Dessiner le spectre du signal échantillonné. A partir de ces échantillons on reconstuit par le filtre de reconstruction parfaite un signal à temps continu. Quel est le signal obtenu ?

2 Analyse spectrale d'un signal (sous-)échantillonné

On dispose d'un signal à temps discret $x[n]$ provenant de l'échantillonnage à 10 000 Hz d'un signal à temps continu $x(t)$. Le spectre d'amplitude du signal échantillonné, $|X_e(f)|$ est représenté sur la figure 1, pour les fréquences normalisées $f = 0$ à 1/2. On observe une raie pour $f = 0.4$.

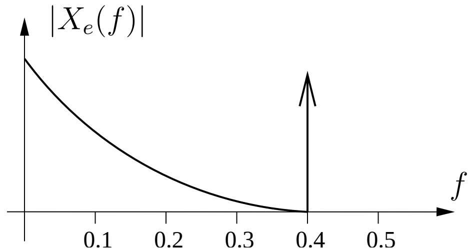

FIGURE 1 – Spectre du signal échantillonné.

a) En supposant que le signal a été correctement échantillonné, quelle est la fréquence de la raie dans le signal analogique initial ?

b) Sans écarter la possibilité d'un sous-échantillonnage, à quelle(s) raies fréquentielles du signal original peut correspondre cette raie à $f = 0.4$?

Source : Poly "Bases du traitement du signal", Maurice Charbit, ENST, 2004.

3 Reconstruction

a) La formule de reconstruction parfaite :

$$s(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{sinc}(\pi\nu_e t - \pi n)$$

permet-elle de reconstruire le signal en temps réel, c'est-à-dire de calculer $x(t)$ pour tout $t \leq nT_e$ dès réception de $x[n] = x(nT_e)$?

b) Comme la fonction sinc décroît très rapidement, on peut approcher la somme précédente par une somme finie de $2N$ termes. Ecrire cette somme pour t_0 compris entre deux instants d'échantillonnage n_0T_e et $(n_0+1)T_e$. Quel est alors le délai de reconstruction ?

c) En pratique, on utilise par exemple un *échantillonneur bloqueur*, qui reconstruit $x(t)$ "en escalier" à partir des valeurs $x[n]$ successives, comme illustré sur la figure 2. Le signal reconstruit $\hat{x}(t)$ s'exprime alors :

$$\hat{x}(t) = x[n] = x(nT_e) \quad \forall\, t \in [nT_e; (n+1)T_e]$$

On peut ainsi représenter $\hat{x}(t)$ comme une somme d'impulsions rectangulaires pondérées par les échantillons $x[n]$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]h(t-nT_e)$$

où h représente une fonction porte, qui vaut 0 partout sauf entre 0 et T_e.

Montrer que le spectre de $\hat{x}(t)$ vaut :

$$\hat{X}(\nu) = H(\nu)X_e(\nu)$$

où $H(\nu)$ et $X_e(\nu)$ sont les transformées de Fourier respectives de la fonction porte h et du signal échantillonné. On rappelle que $\mathrm{TF}[x(t-a)] = X(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}$.

d) Soit $x(t)$ un signal dont le spectre d'amplitude est représenté sur la figure 3. Dessinez le spectre d'amplitude $|\hat{X}(\nu)|$ du signal reconstruit.

e) Sachant que $|H(\nu)| = T_e|\mathrm{sinc}(\pi\nu T_e)|$ (voir figure 4), représenter le spectre d'amplitude du signal reconstruit, $|\hat{X}(\nu)|$. Comment pourrait-on retrouver le signal original ?

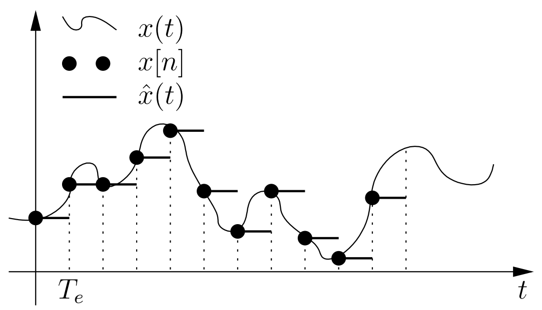

FIGURE 2 – Reconstruction de $x(t)$ par un échantillonneur bloqueur.

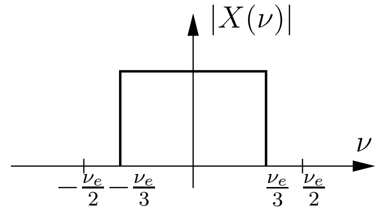

FIGURE 3 – Spectre d'amplitude de $x(t)$.

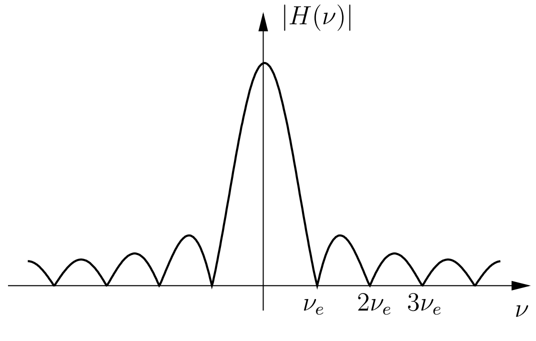

FIGURE 4 – Spectre d'amplitude d'une fenêtre rectangulaire de longueur T_e.