Traitement du signal et des images - M1 info

Représentation fréquentielle des signaux analogiques

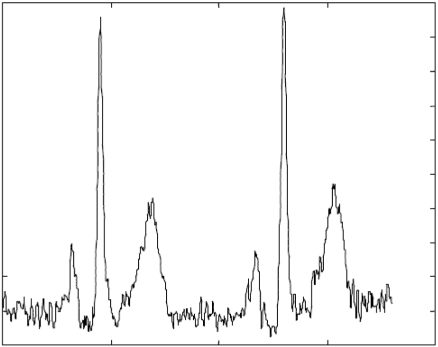
Gaël MAHÉ

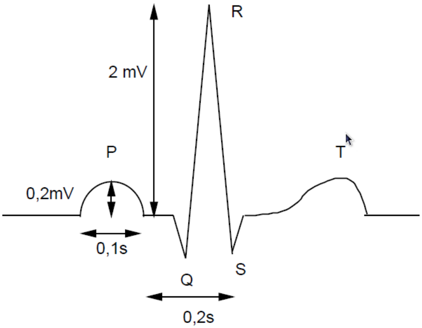
Université Paris Descartes / UFR math-info

automne 2015

Introduction

Signal électrocardiographique (ECG)

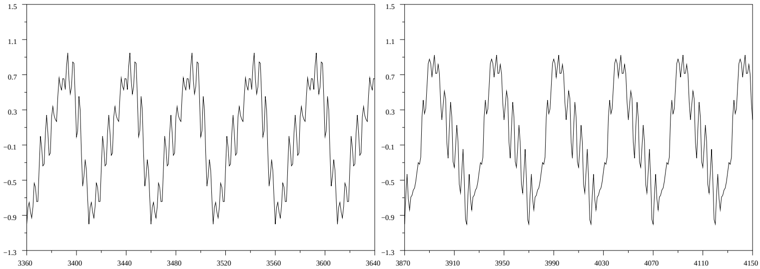




- onde P : dépolarisation (contraction) rapide de l'oreillette
- intervalle PR : temps de conduction auriculo-ventriculaire
- complexe QRS: dépolarisation (contraction) des ventricules
- onde T: repolarisation des ventricules

Introduction

Signal de parole : 2 formes d'ondes correspondant au même phonème [i] :



Plan

Série de Fourier

Pour $x(t)$ T_0-périodique (fréquence fondamentale $\nu_0 = 1/T_0$),

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t} = c_0 + \sum_{n>0} 2|c_n| \cos(2\pi n \nu_0 t + \arg c_n)$$

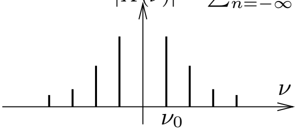
avec

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t}$$

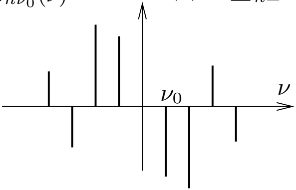
$\rightarrow$ On définit le spectre de $x(t)$:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{n\nu_0}(\nu)$$

$|X(\nu)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \delta_{n\nu_0}(\nu)$



$\arg X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \arg c_n \delta_{n\nu_0}(\nu)$



Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t}$$

Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t}$$

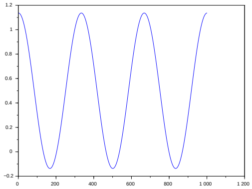


Figure: Harmonique d'ordre 1.

Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}$$

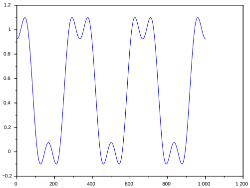


Figure: Harmoniques d'ordres 1 et 3.

Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t}$$

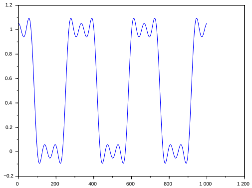


Figure: Harmoniques d'ordres 1, 3 et 5.

Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}$$

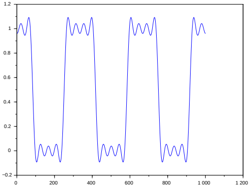


Figure: Harmoniques d'ordres 1, 3, 5 et 7.

Exemple : construction d'un signal créneau

Décomposition d'un signal créneau $x(t)$ en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \text{pair}} (-1)^{n/2} \frac{1}{n\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \nu_0 t}$$

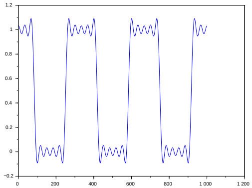


Figure: Harmoniques d'ordres 1, 3, 5, 7 et 9.

Représentations temporelle et fréquentielle d'une voyelle

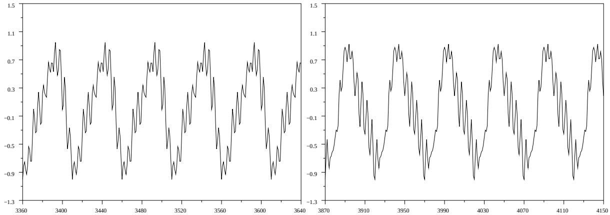


Figure: Formes d'ondes de deux [i] perceptivement identiques.

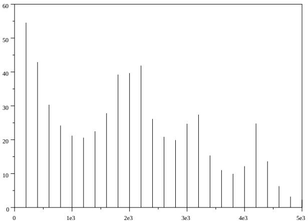
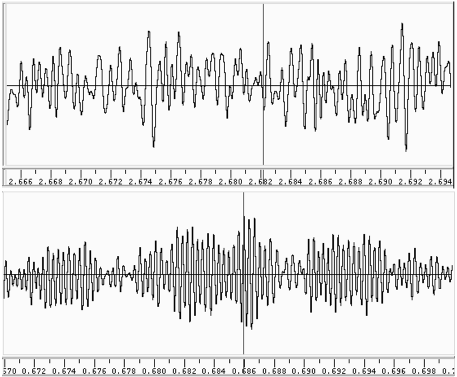


Figure: Spectre d'amplitude des deux [i] précédents (fréquences positives uniquement).

Plan

Signaux apériodiques d'énergie finie

Signal de parole : formes d'ondes des phonèmes [f] et [ʃ] :



Comment définir un spectre ?

Soit $\tilde{x}_{T_0}(t) = T_0 x(t)$, T_0-périodisé :

- $\exists\, (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\tilde{x}_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}$
- $\exists$ une fonction $f(\nu)$ qui passe par tous les points $(n\nu_0, c_n)$

- De même, $f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}$ passe par tous les points $(n\nu_0, c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t})$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu =$

Transformée de Fourier

Pour un signal $x(t)$ apériodique d'énergie finie, il existe $X(\nu)$ tel que :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu = \mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)]$$

avec :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t = \mathrm{TF}[x(t)]$$

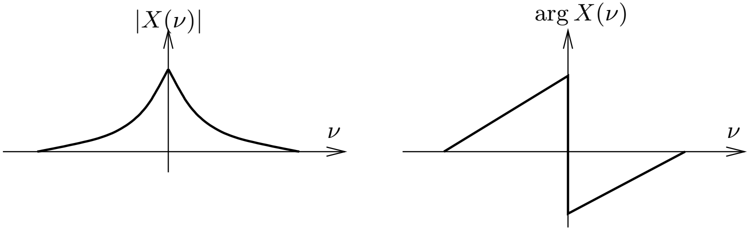


Figure: Spectre d'un signal apériodique d'énergie finie.

Spectre d'un phonème apériodique

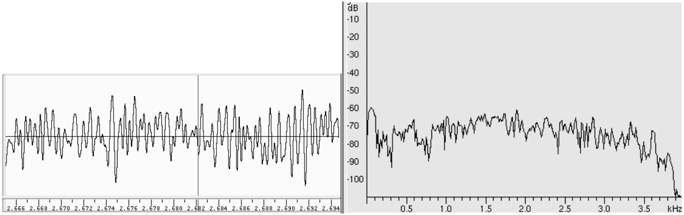


Figure: Représentations temporelle (à gauche) et fréquentielle (à droite) d'un [f].

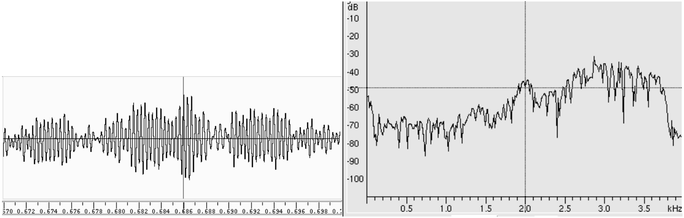


Figure: Représentations temporelle (à gauche) et fréquentielle (à droite) d'un [ʃ].

Propriétés de la transformée de Fourier

Pour un signal $s(t)$ de transformée de Fourier $S(\nu)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu-\nu_0) \qquad (\textit{cf.}\ \mathrm{TD1}) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] &= (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu)
\end{aligned}$$

Linéarité :

$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \mathrm{TF}[\lambda x(t)+\mu y(t)] = \lambda\mathrm{TF}[x(t)]+\mu\mathrm{TF}[y(t)]$$

Relation d'incertitude

On définit la **durée utile** T d'un signal réel $s(t)$ par :

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2 \mathrm{d}t$$

De manière similaire, la **largeur utile** B du spectre du signal est définie par :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

La *relation d'incertitude* s'écrit :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Peut-on calculer la TF d'un signal périodique ? (1)

Réponse théorique = OUI, en introduisant la fonction de Dirac :

$$\delta_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \nu = \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\nu_0}(\nu) \mathrm{d}\nu = 1$$

Alors on peut écrire :

$$\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{\nu_0}(\nu)$$

où les c_n sont les coefficients de la série de Fourier.

Peut-on calculer la TF d'un signal périodique ? (2)

Réponse pratique = OUI,
car on n'observe qu'une séquence finie d'un signal
→ signal analysé est apériodique d'énergie finie.

Plan

Relation entre le spectre et l'énergie ou la puissance

- Pour un signal $x(t)$ apériodique d'énergie finie, énergie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

où $X(\nu)$ est la transformée de Fourier.

- Pour un signal $x(t)$ T_0-périodique, puissance :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

où les c_n sont les coefficients de la série de Fourier.