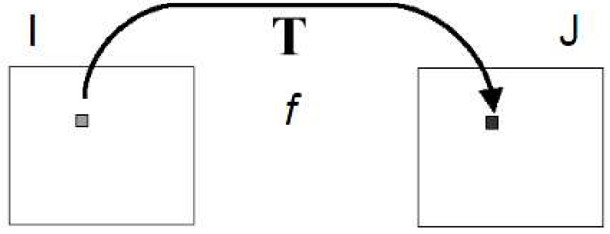
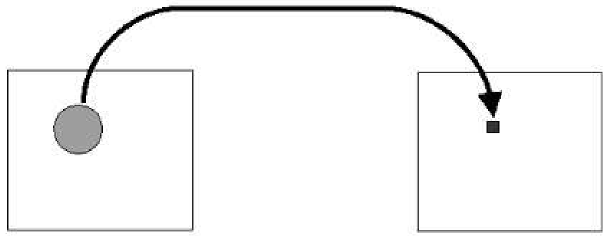
Traitements sur les images

- Transformations globales



ponctuelles : J(x0,y0) = *f* [I(x0,y0)]

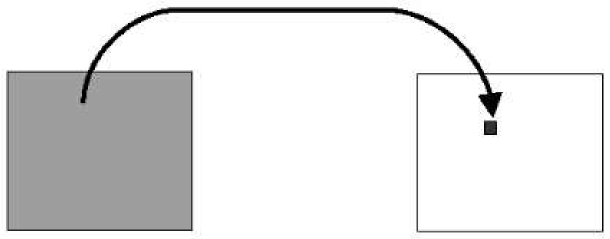
Opération sur les histogrammes



locales : J(x0,y0) = *f* [I(V)]

V: voisinage de (x0,y0)

Filtres,..



globales : J(x,y) = *f* [I(x,y]

Transformée de Fourier,..

Transformations globales

- Caractéristiques
  - Passage d'un espace naturel (x,y) à un espace transformé (X,Y)

  - Nécessité de réversibilité
    - Transformations orthogonales
      - On a un repère orthonormé dans l'espace naturel
      - On obtient un repère orthonormé dans l'espace transformé
      - Permettent un calcul simple pour obtenir la réversibilité

Transformations globales

- Transformations orthogonales
  - Image numérique f_{ij} de taille MxN
  - Image transformée F_{kl} de taille MxN

$$F_{uv} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} P_{um} f_{mn} Q_{nv}$$

  - P et Q de tailles MxM et NxN sont des bases orthogonales pour rendre la réversibilité simple

$$F = P\, f\, Q \qquad f = {}^{T}P\, F\, {}^{T}Q$$

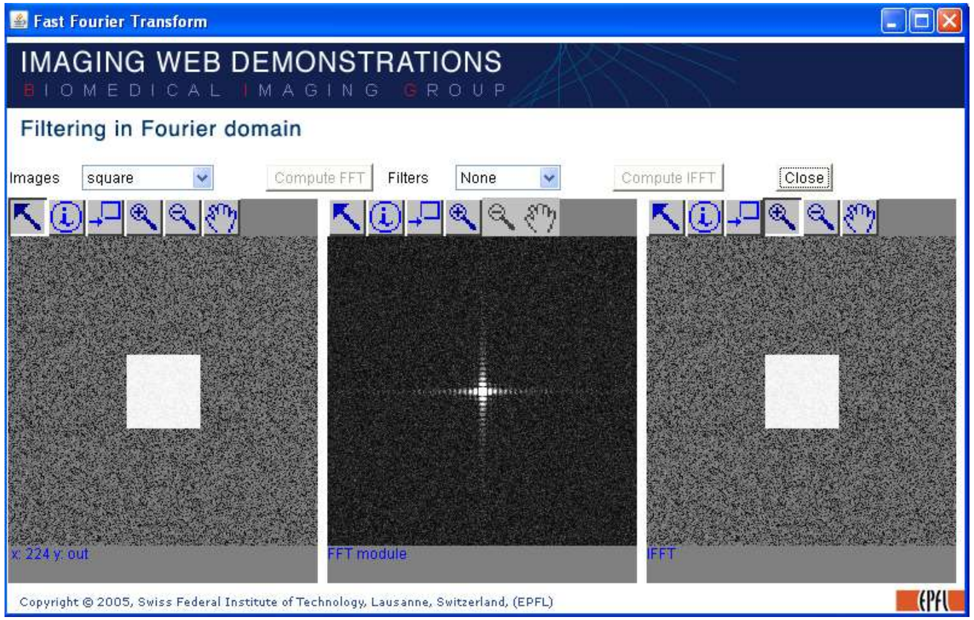
    - Dans la pratique c'est le même changement de base pour les lignes et les colonnes

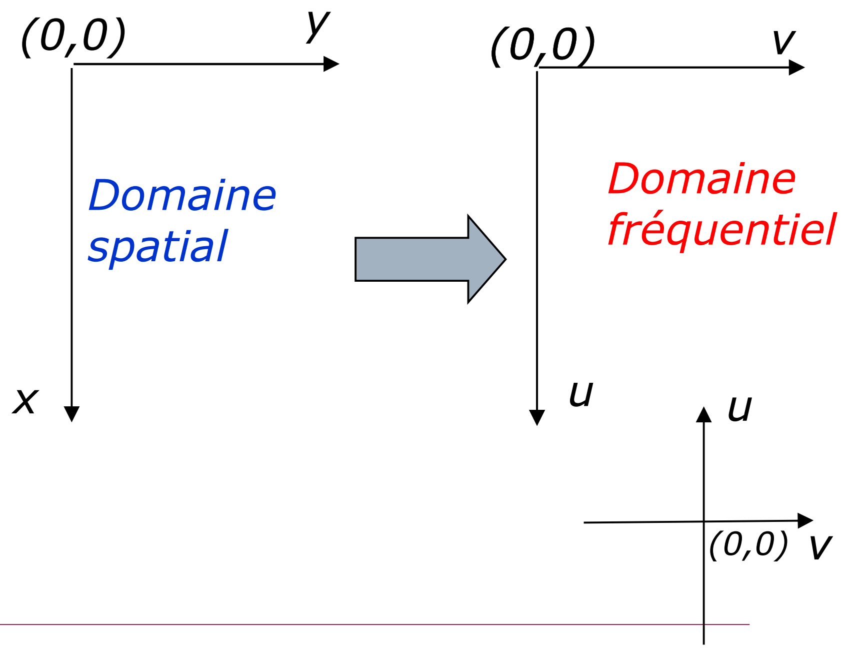
Transformations globales

- Transformations orthogonales
  - transformée de Fourier
  - transformée en Cosinus Discrète
  - transformée d'Hadamard
  - transformée de Karhunen-Loeve
  - transformée de Gabor
  - transformée en Ondelettes

Transformations globales

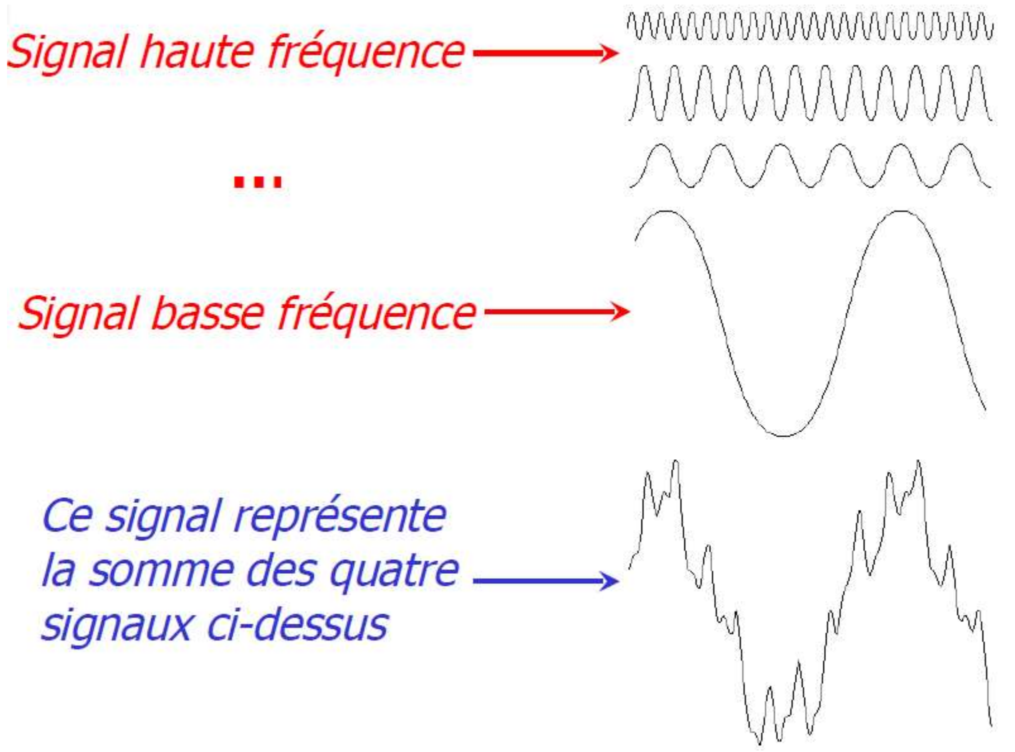
- Transformée de Fourier
  - décompose le signal en ses fréquences constituantes
    - Sorte d’histogramme des fréquences spatiales (image)
  - Passage du domaine spatial au domaine fréquentiel





Transformations globales

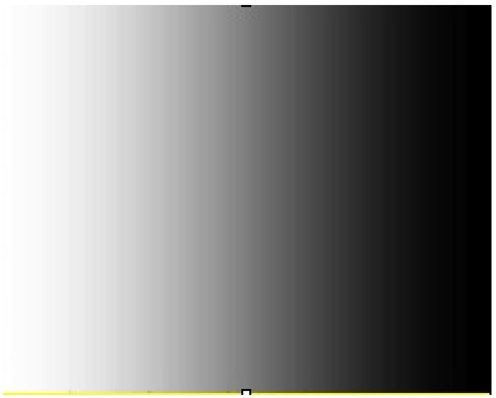
- Fréquences - Rappel
  - Fréquences dans un signal 1D

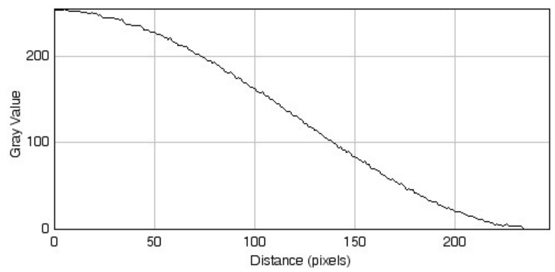


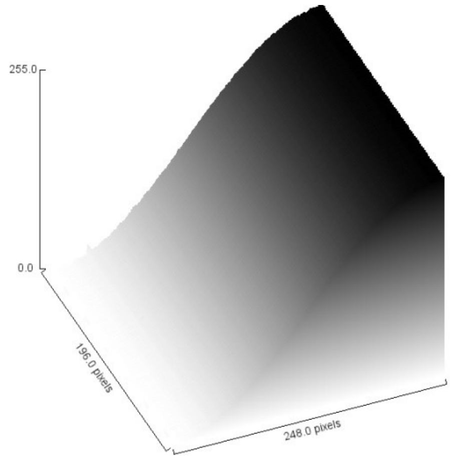
Source : Gonzalez and Woods. Digital Image Processing. Prentice-Hall, 2002.

Transformations globales

- Fréquences dans une image
  - Permettent de qualifier les changements d'intensité
    - Basses fréquences
      - Changements d'intensité lents
        - régions homogènes et floues

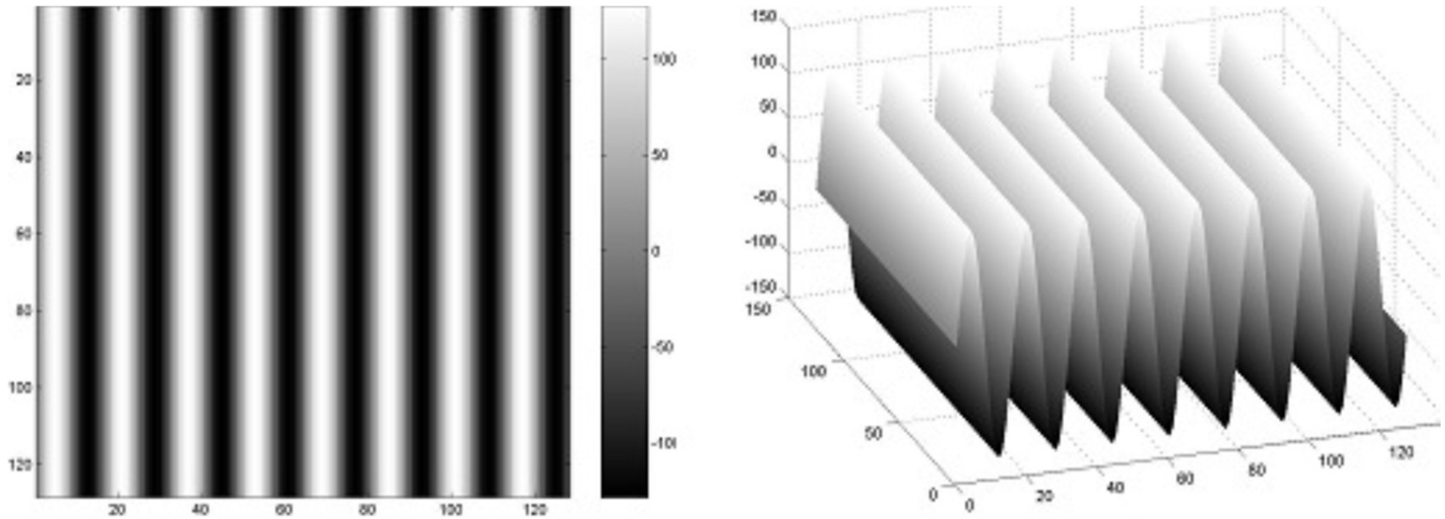






Transformations globales

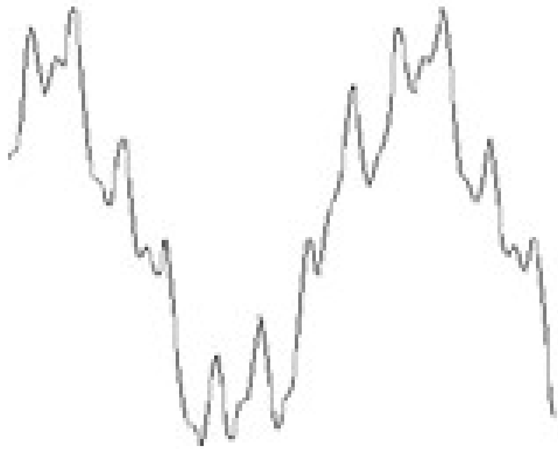
- Fréquences dans une image
  - Permettent de qualifier les changements d'intensité
    - Hautes fréquences
      - changement brusque d'intensité
        - contours, bruit



Transformations globales

- Signal 1D
  - Tout signal périodique peut être décrit comme une somme pondérée de sinusoïdes

$$\mathrm{sq}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)\,t\right]$$



The sinusoids are called "basis functions".

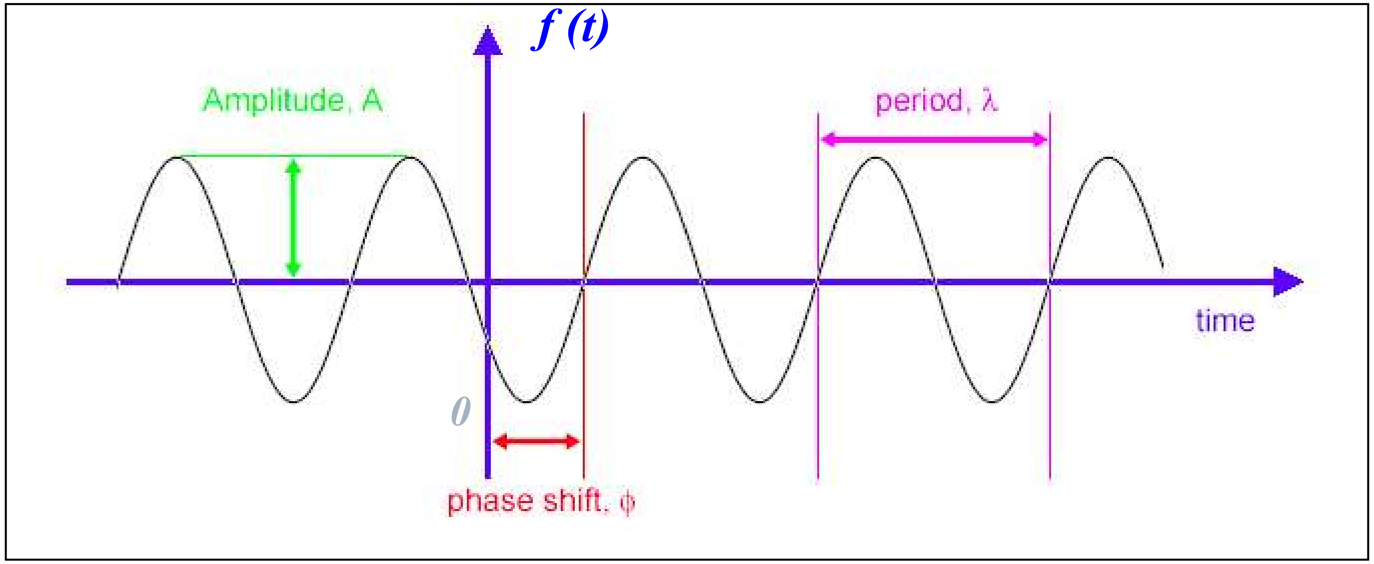
The multipliers are called "Fourier coefficients".

Basis functions

The Fourier coefficients (of a square wave).

Transformations globales

- Sinusoïdes
  - Rappels



$$f(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t - \phi\right)$$

$1/\lambda$ is the frequency of the sinusoid (Hz).

$2\pi/\lambda$ is the angular frequency (radians/s).

Transformations globales

- Pour déterminer la similarité d'une sinusoïde f avec un signal g sur un intervalle $(-\lambda/2, \lambda/2)$
  - Calcul du produit scalaire

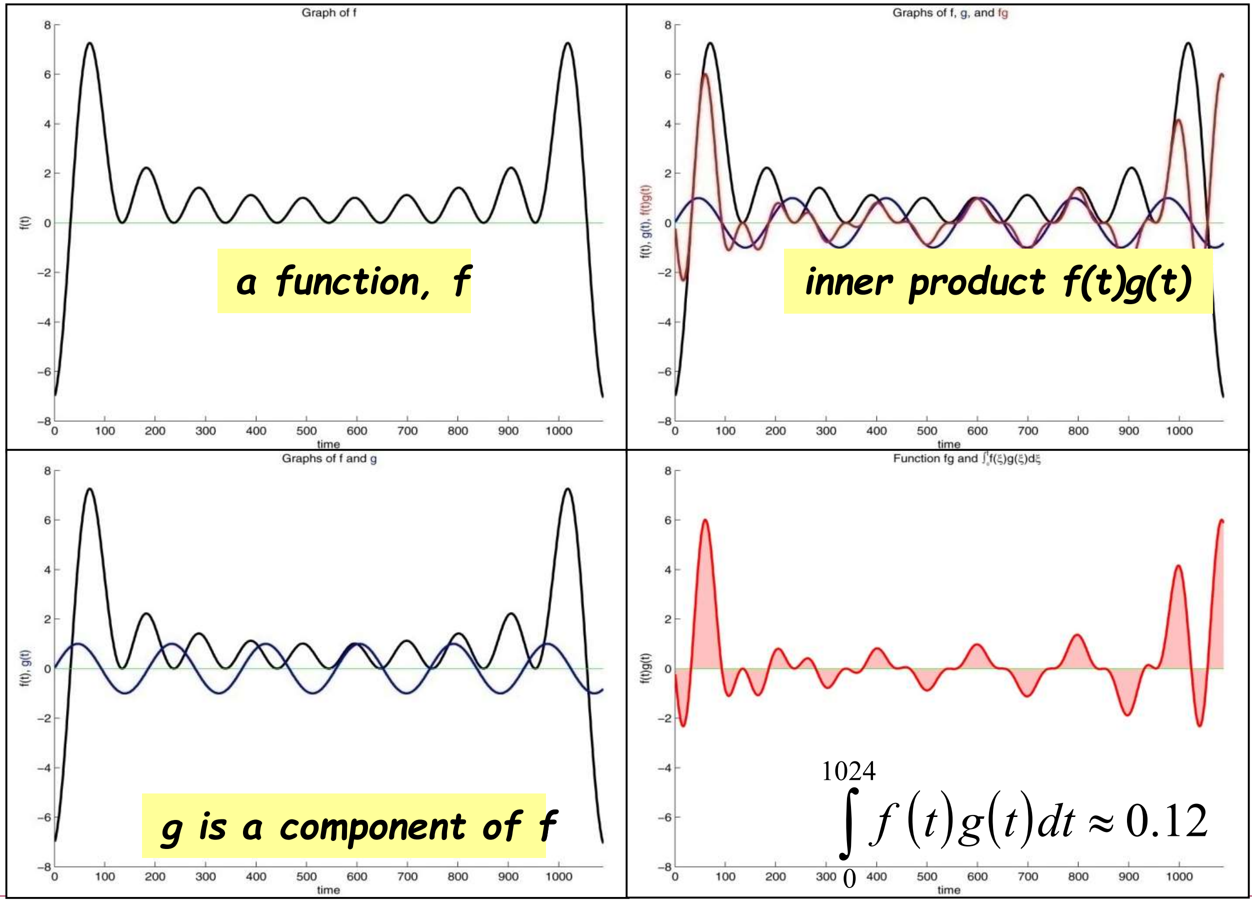
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\, g^*(t)\, dt$$

where $g^*(t)$ is the complex conjugate of $g(t)$.

- peut être vu comme la proportion de g dans f
- Si égal à 0 alors f et g n'ont rien en commun
- Maximal si f=g

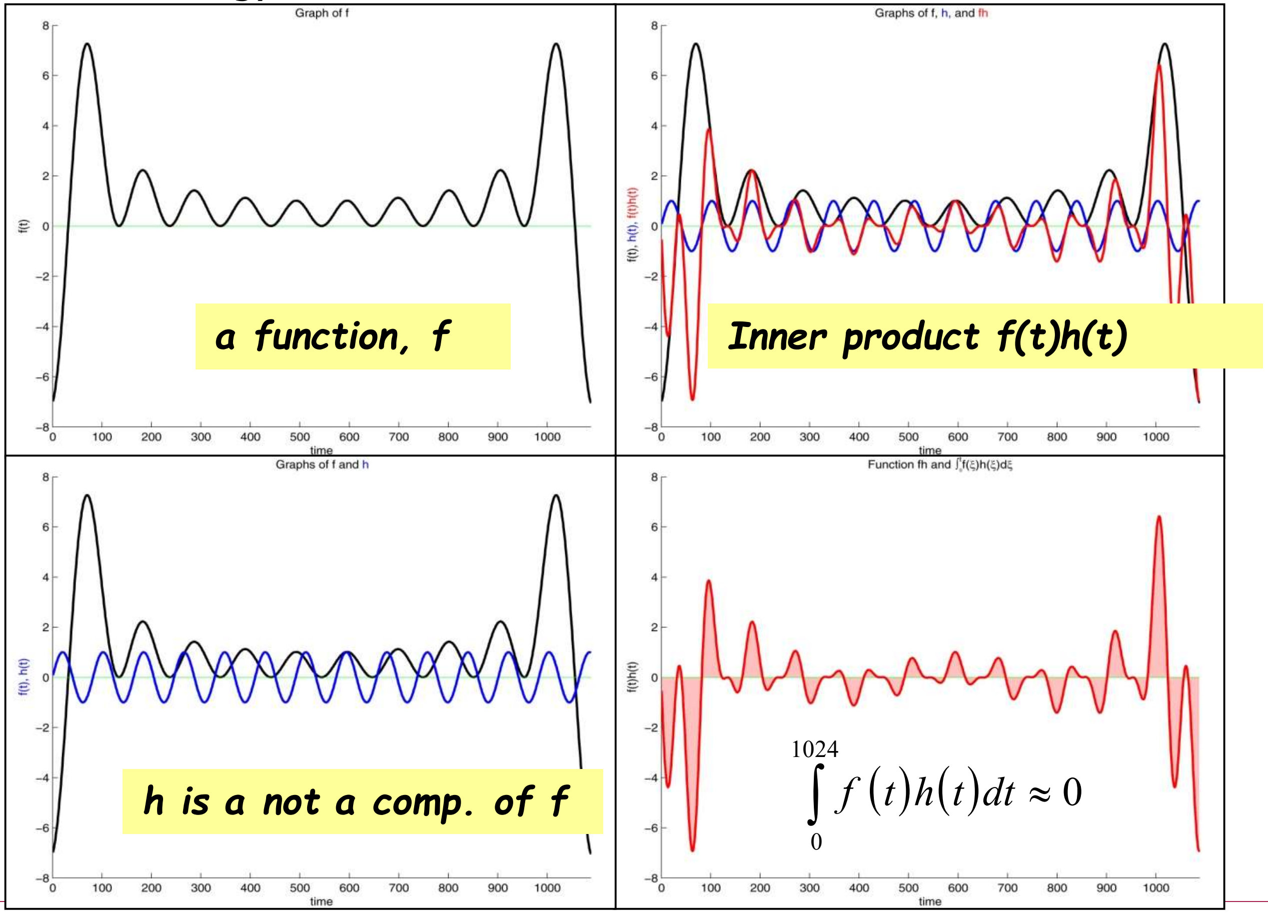
Transformée de Fourier

- Produit scalaire – illustration (Source Alan Peters – EECE\CS253 Image Processing)

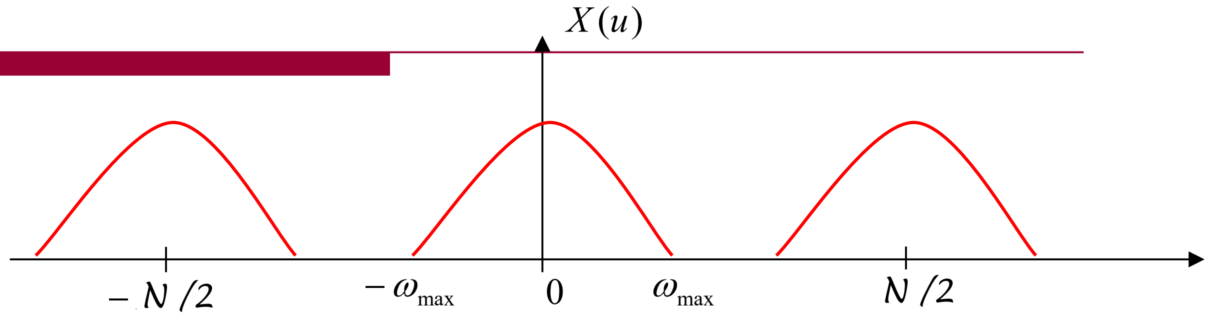


Transformée de Fourier

- Produit scalaire – illustration (Source Alan Peters – EECE\CS253 Image Processing)



Transformée de Fourier



Signal 1D

- $$X(u) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{uk\frac{-i2\pi}{N}}$$

  Avec k variable temporelle, u variable fréquentielle

- C'est une transformation de N points de signal en N coefficients de Fourier

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/N} & e^{-i2\pi 2/N} & \dots & e^{-i2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-i2\pi 2/N} & e^{-i2\pi 4/N} & \dots & e^{-i2\pi 2(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-i2\pi(N-1)/N} & e^{-i2\pi 2(N-1)/N} & \dots & e^{-i2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

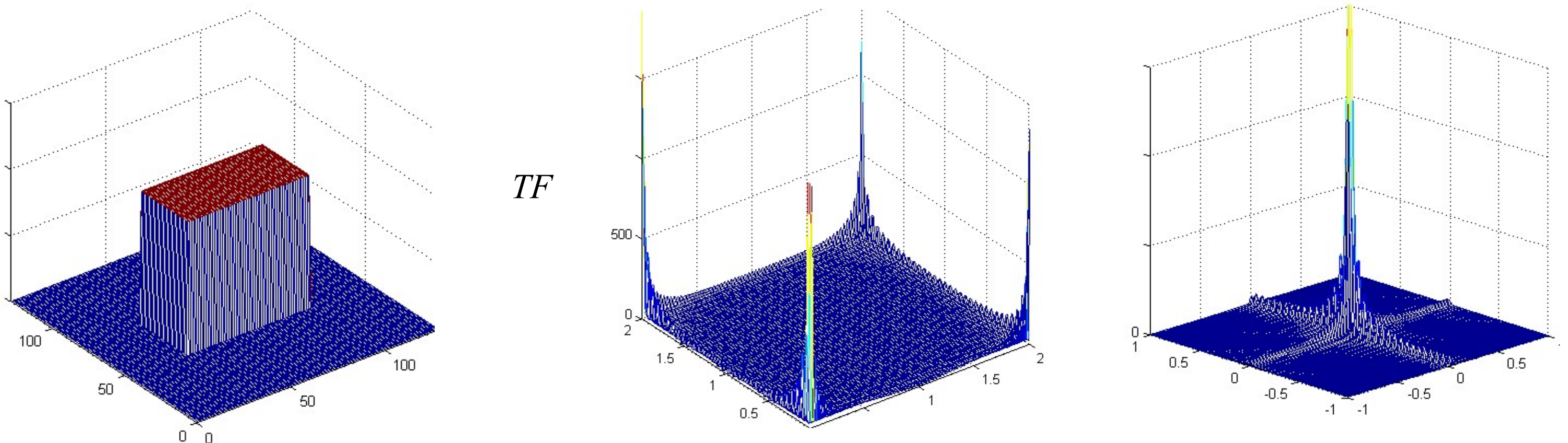
$$\mathbf{X} = \mathbf{F} \,.\, \mathbf{x}$$

Transformée de Fourier

- Signal 2D
  - Changement de base dans les 2 directions du signal

$$F[u,v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

  - Comme en 1D, la TFD 2D est périodique de période 2π



TF recentrée de [M/2,N/2]

Transformée de Fourier

- Signal 2D

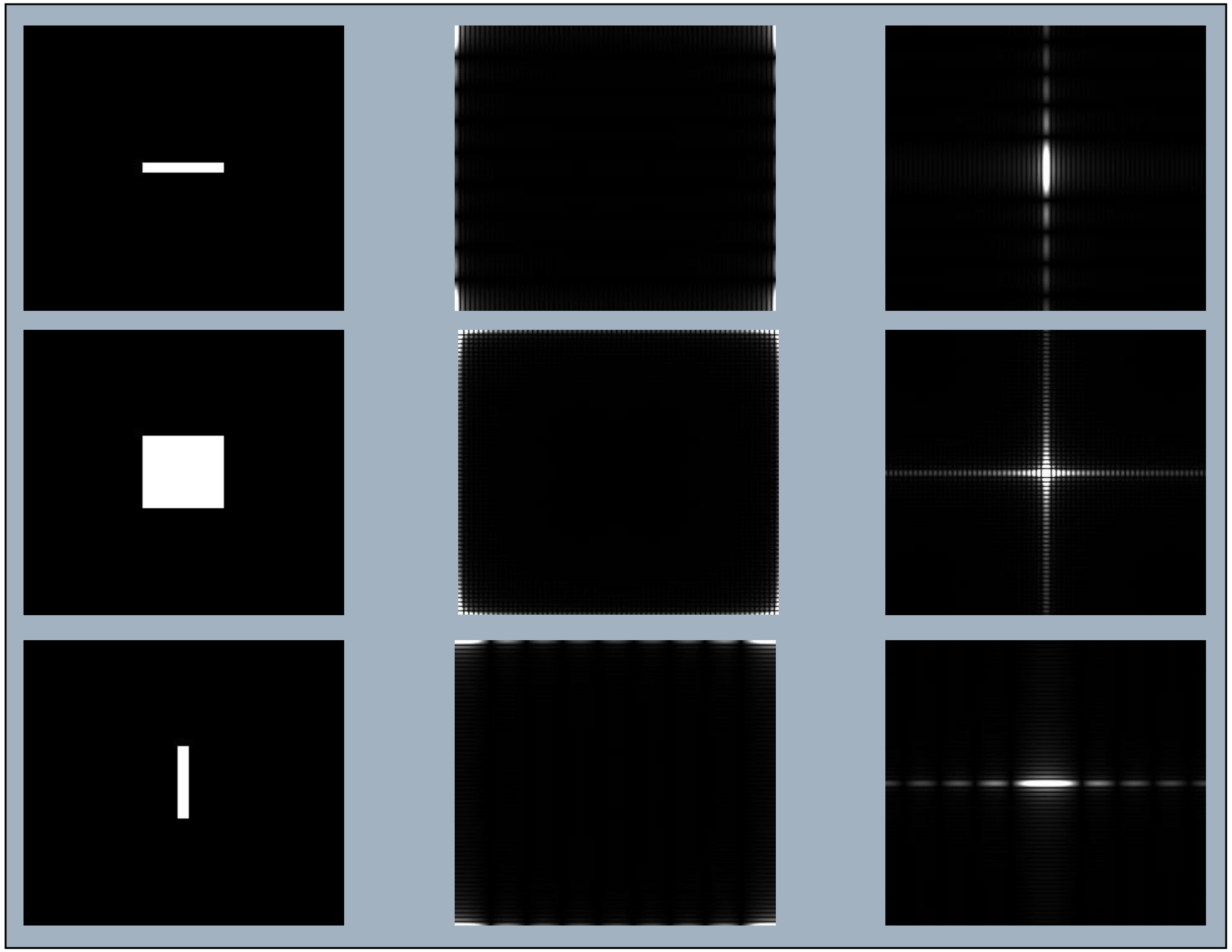
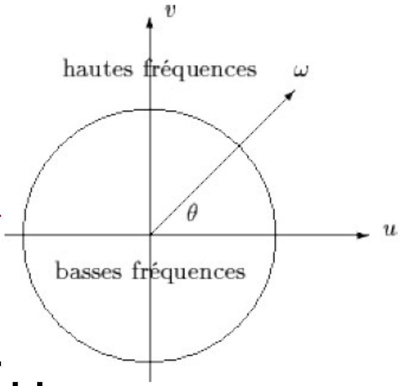
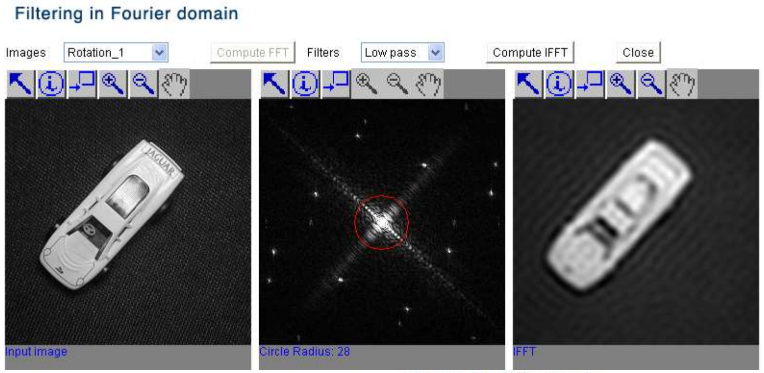


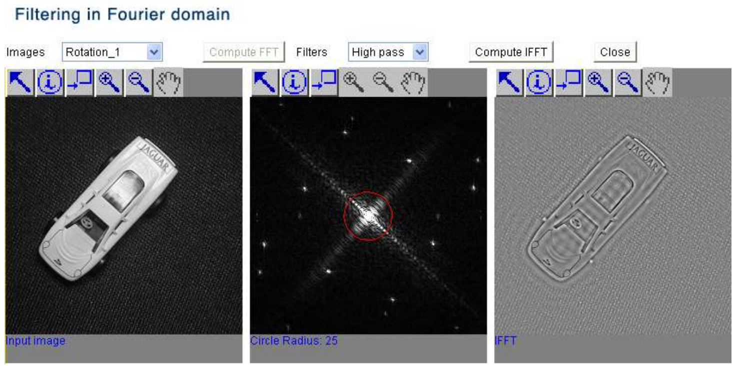
Image originale *TF* *TF centrée*

Transformée de Fourier



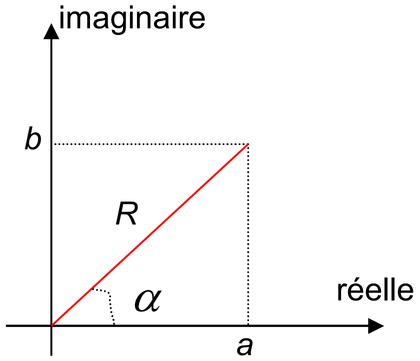
- Interprétation
  - **Hautes fréquences** : loin du centre de la
  - **Basses fréquences** : proche du centre de la TF
  - **Composante continue** : centre de l'image
    - fréquence zéro = moyenne de l'image





Transformée de Fourier

- Rappel nombre complexe



$$i^2 = -1$$

$$\boxed{(a,b) \Leftrightarrow a + ib \Leftrightarrow R\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}$$

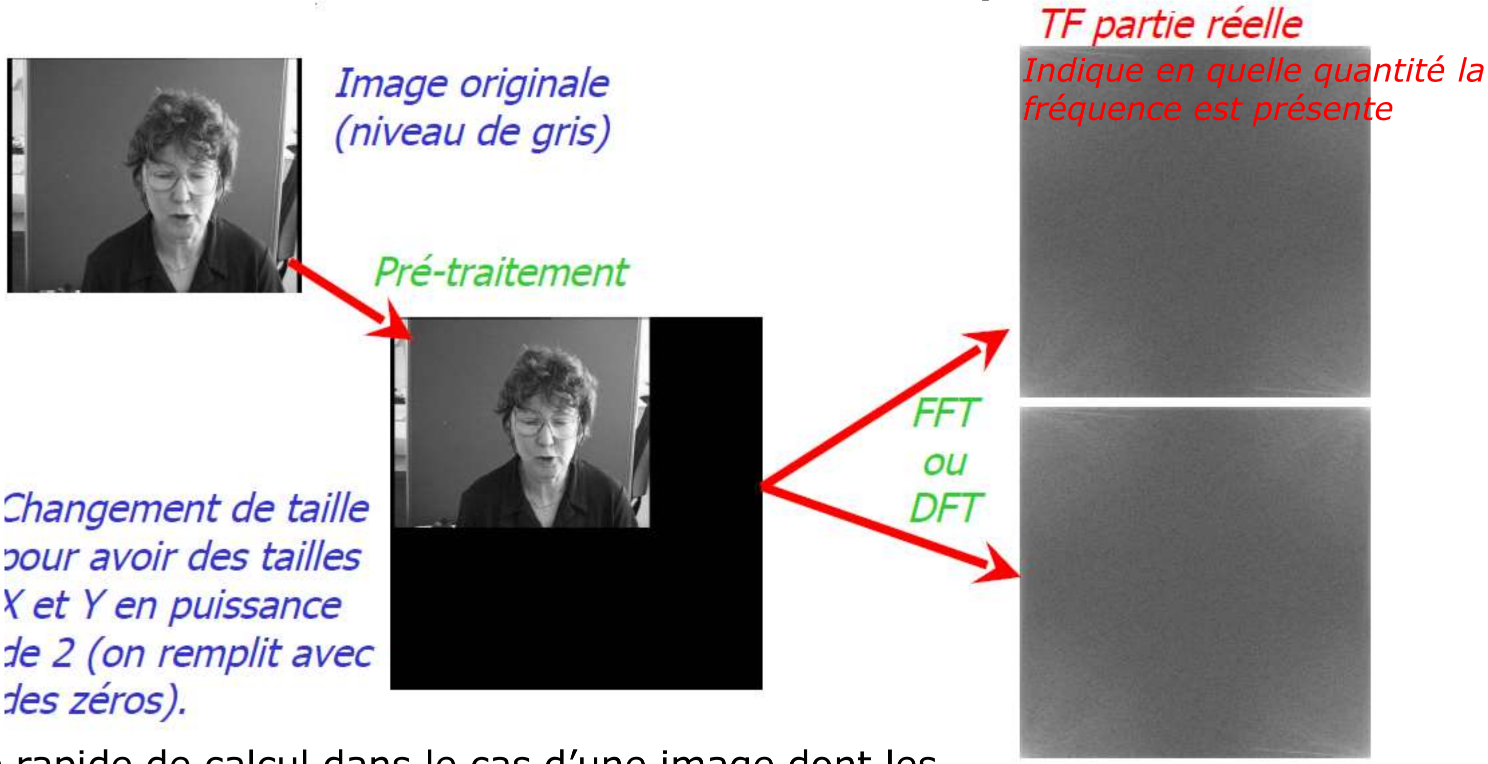
Partie réelle *Partie imaginaire*

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$ → appelé *amplitude* ou *module*

$$\alpha = \arctan(b / a)$$ → appelé *phase*

Transformée de Fourier

- La Transformée de Fourier d'une fonction réelle donne une fonction complexe



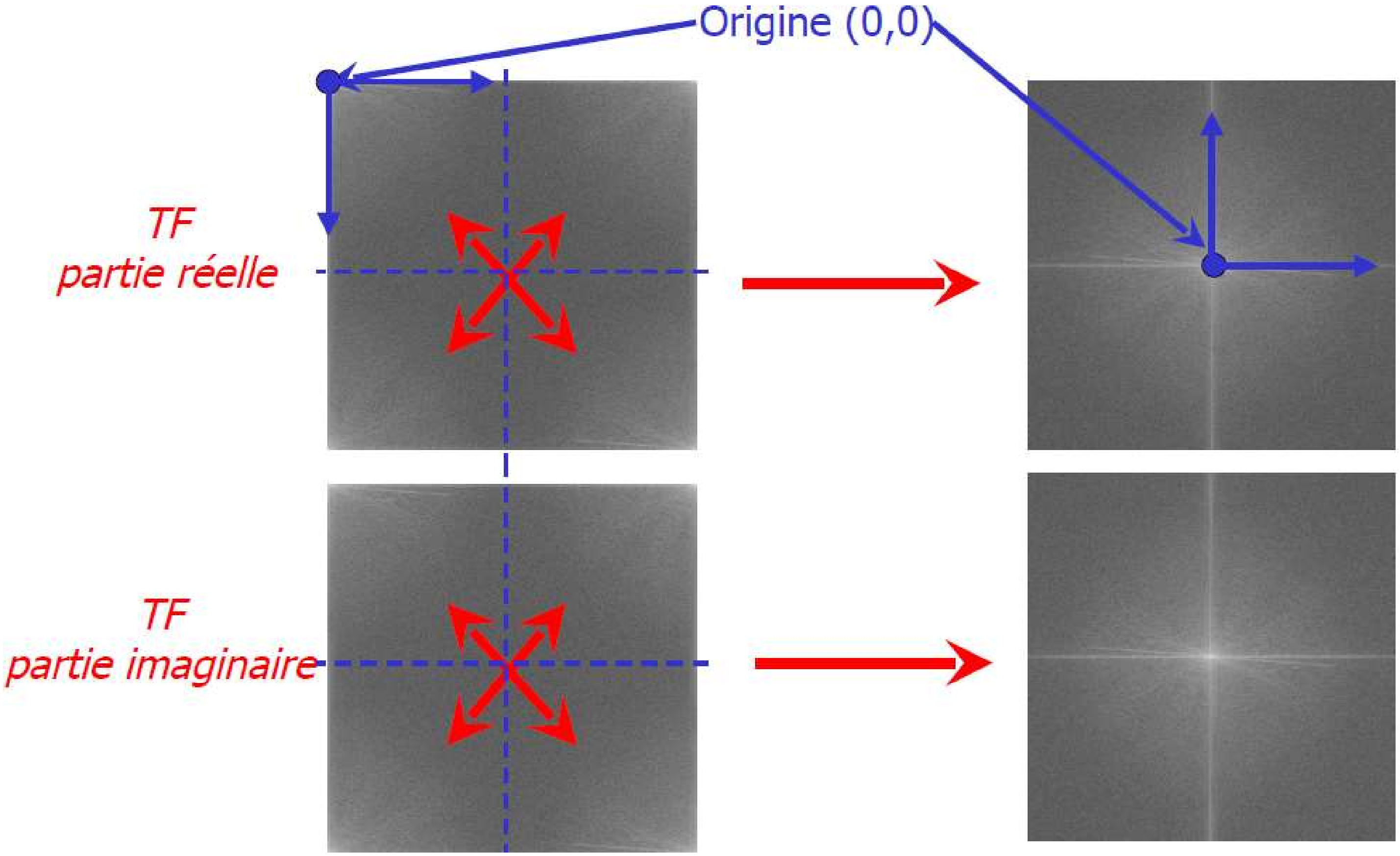
Méthode rapide de calcul dans le cas d'une image dont les dimensions sont des puissances de 2

TF partie imaginaire

Indique où la fréquence est présente

Transformée de Fourier

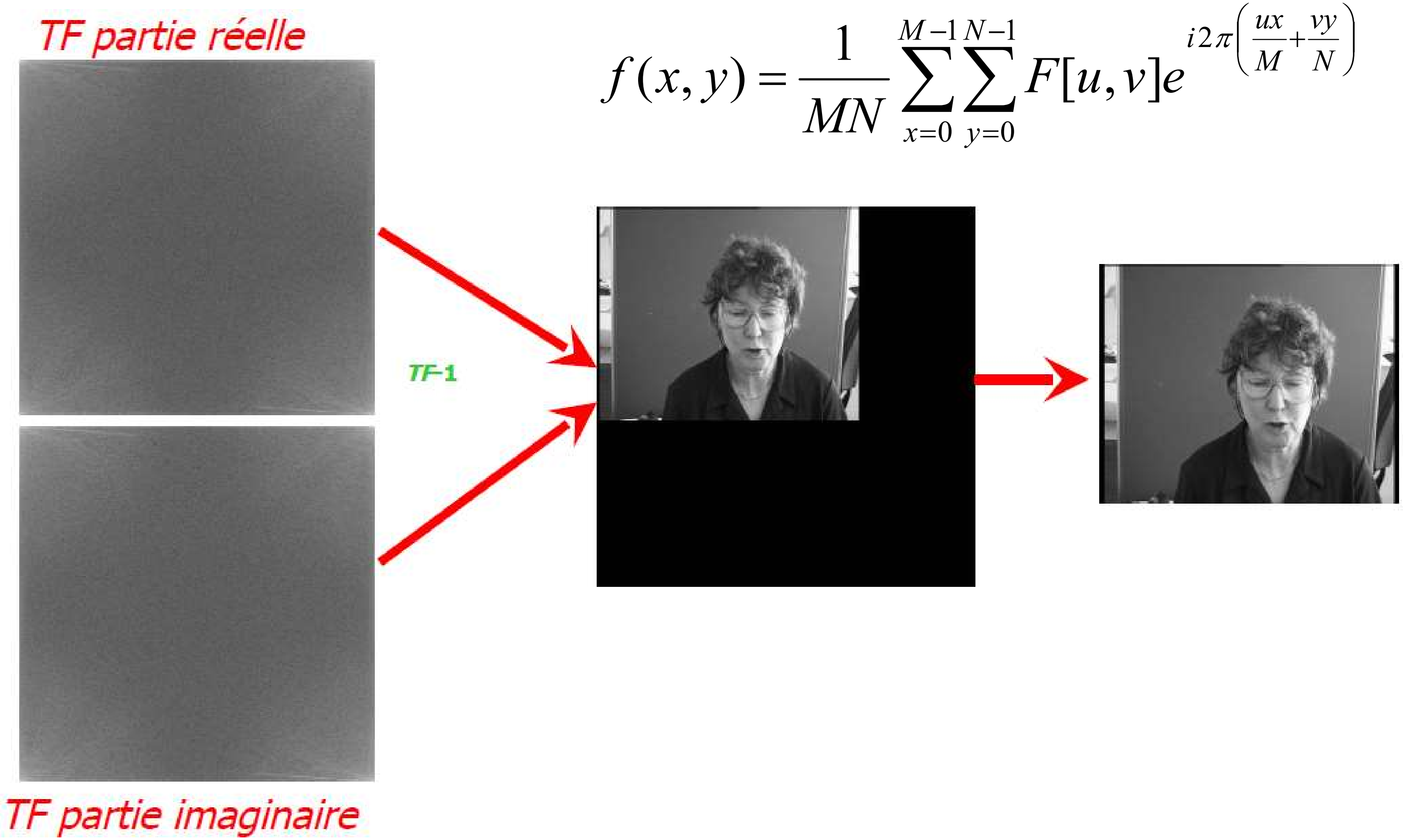
- Changement de l'origine du repère (recentrage)



Transformée de Fourier

- Transformation inverse

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}F[u,v]e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$



Transformée de Fourier

- amplitude et phase
  - F est généralement représentée par son amplitude et sa phase

$$amplitude\,(F) = \sqrt{reelle(F)^2 + imaginaire(F)^2}$$

$$phase(F) = \arctan(imaginaire(F)\,/\,reelle(F))$$

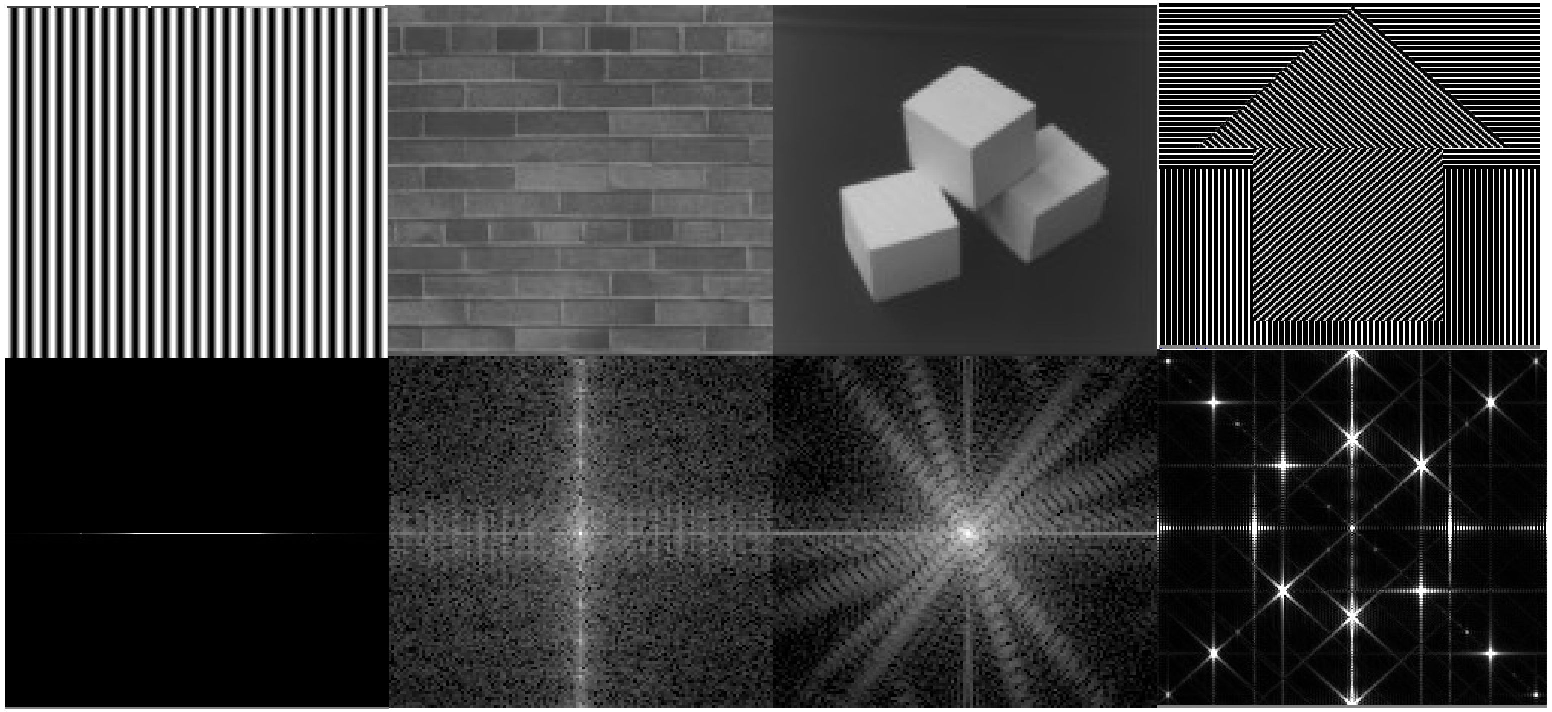
amplitude * amplitude = power spectrum

Plutôt que par

- Ses parties réelle et imaginaire

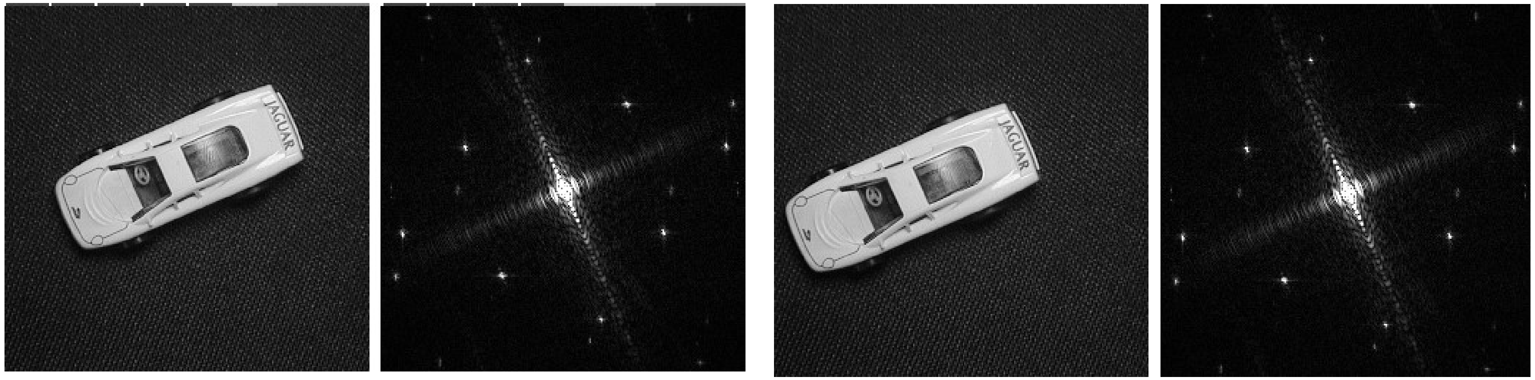
Transformée de Fourier

- Some example
  - Lignes dans le spectre de Fourier sont perpendiculaires aux lignes de l'image

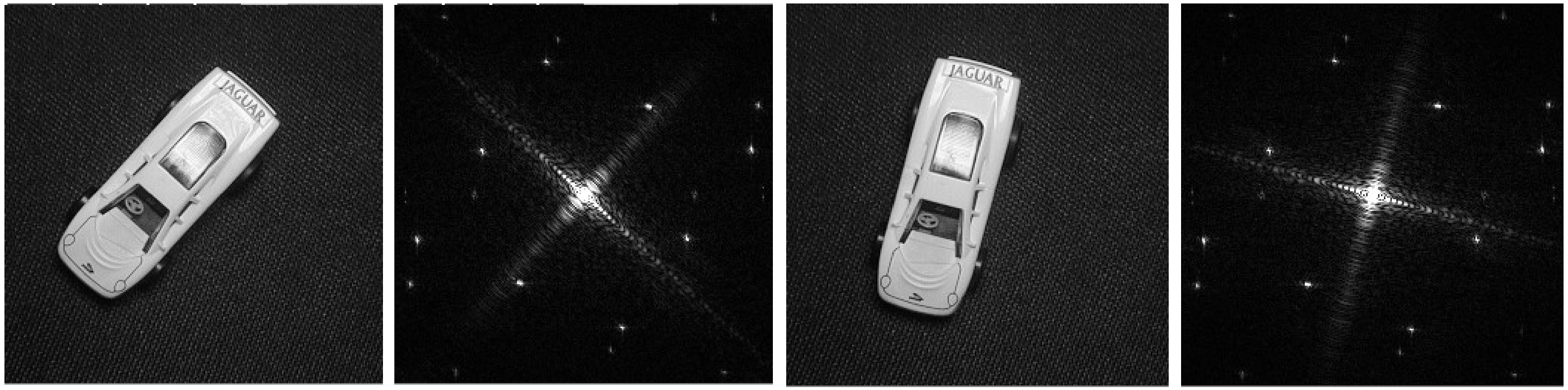


Transformée de Fourier

- Effet de la translation ⇨ aucun effet sur l'amplitude – effet phase



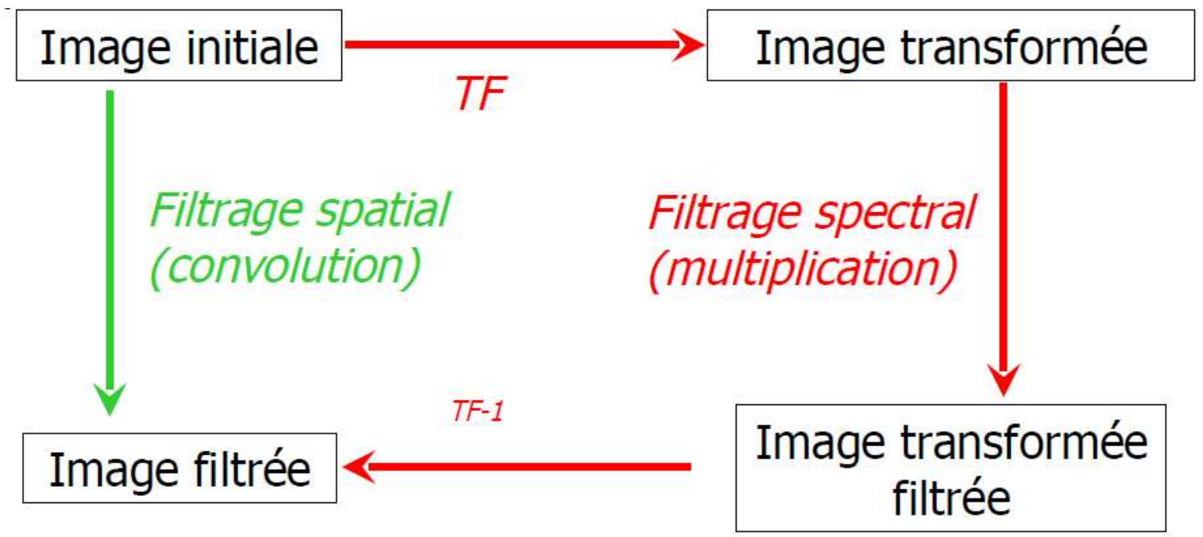
- Effet de la rotation



Rotation d'image ⇨ rotation de la TF (même angle)

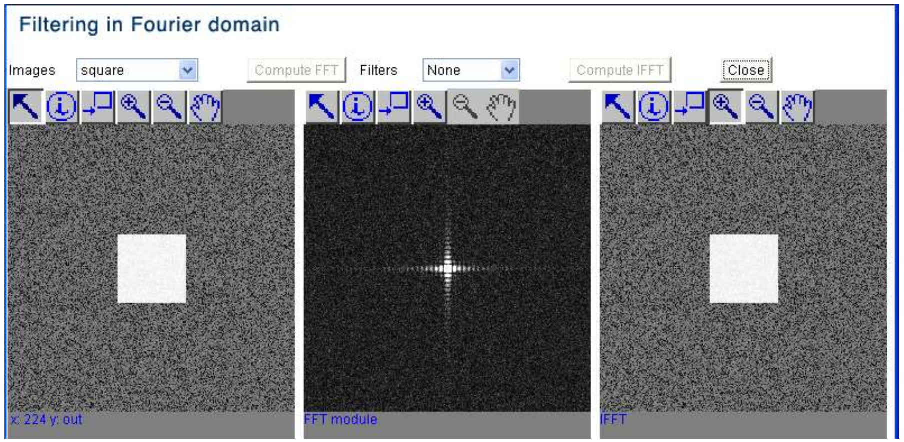
Transformée de Fourier

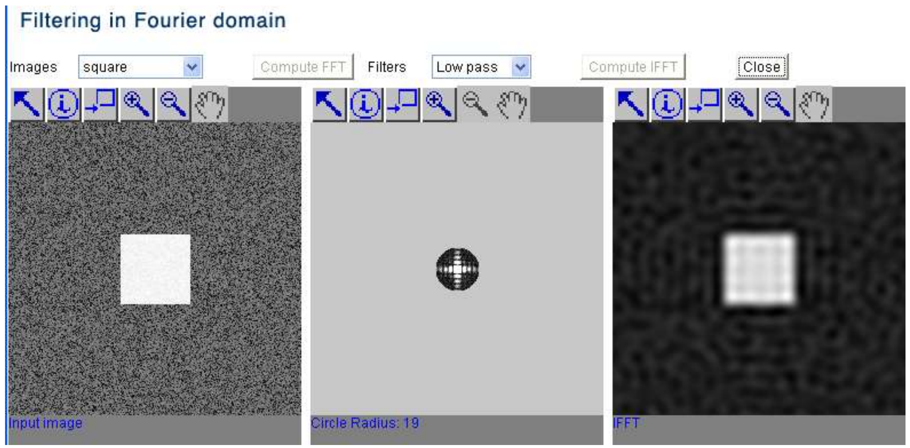
- Applications
  - Filtrage dans le domaine spectral
    - Suppression du bruit
    - Extraction de contours
    - Détection d'inclinaison



Applications

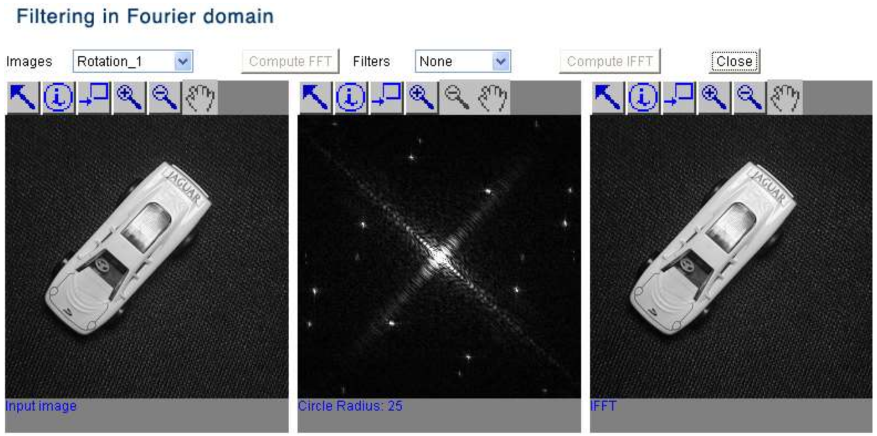
- Suppression du bruit
  - Filtre passe bas
    - On effacе les hautes fréquences de la TF en mettant les pixels loin du centre à zéro

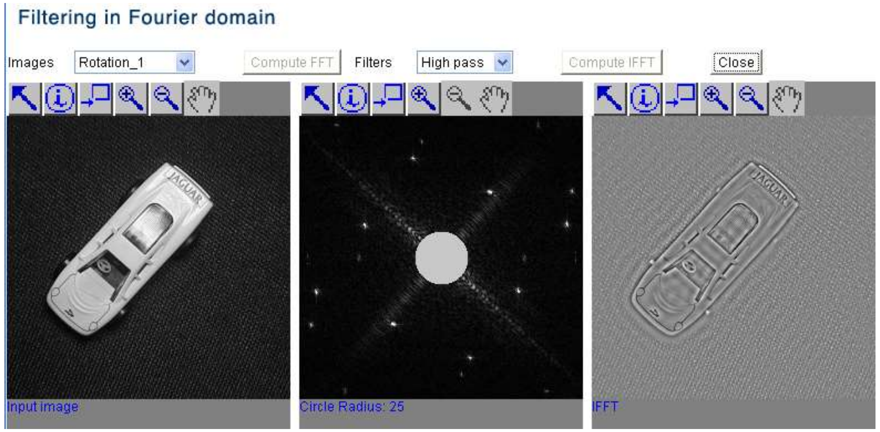




Applications

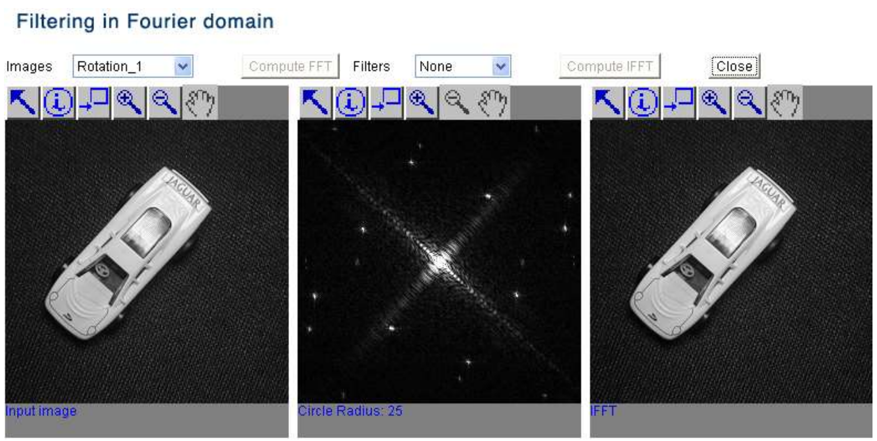
- Détection de contours
  - Filtre passe haut
    - On effacement les basses fréquences de la TF en mettant les pixels au centre à zéro

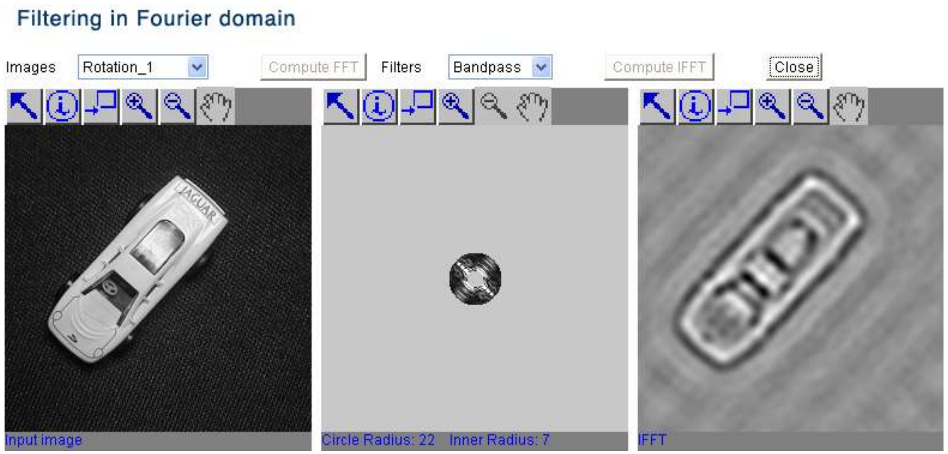




Applications

- Détection et élimination de certaines fréquences
  - Filtre passe bande
    - On met à 0 les fréquences en dehors de la bande





Applications

- Détection et élimination de certaines fréquences
  - Filtre directionnel
    - On sélectionne les fréquences dans une direction donnée