MASTER 1 INFO 2021–2022

Optimisation Algorithmique

Contrôle du 28 octobre 2021, durée 1h30

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$.

1. Expliquer la mise en place d'un algorithme de descente général pour déterminer x^*.

2. Donner la définition d'une direction de descente en un point $x \in \mathbb{R}^2$. Expliquer ce que va entraîner cette définition ?

3. Soit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on suppose que $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner 3 exemples de directions de descente $d \in \mathbb{R}^2$ au point x. Faire un schéma pour représenter tout.

Exercice 1

Soit $f(x, y) = 100(x - y)^2 + (1 - x)^2$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$?

2. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $H_f(x, y)$ au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Écrivez f comme une fonction quadratique. Retrouvez ∇f et H_f.

4. On va appliquer la méthode de descente de gradient avec $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Que vaut alors $d^{(0)}$? où se trouvera $x^{(1)}$? on pourra faire un schéma.

Exercice 2

Soit $g(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y}$.

1. Calculer $\nabla g(x,y)$ et $H_g(x,y)$ au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Est-ce que g admet des points critiques ?

3. Est-ce que $x^* = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\arg\min}\, g(x,y)$ existe ?

4. Si on applique la méthode de descente de gradient avec $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Que vaut alors $d^{(0)}$? où se trouvera $x^{(1)}$? que va valoir $d^{(1)}$? Expliquer ce qui va se passer si on itère, on pourra faire un schéma.