# Images Numériques

2022-2023

N. VINCENT

1

**Exercice 1**

Soit l'image I de taille 8x8 suivante en niveaux de gris (compris entre 0 et 100) :

1° Appliquer la transformation

$$f(x) = \begin{vmatrix} 100 & si\ x \geq 85 \\ 0 & sinon \end{vmatrix}$$

Et comptage des composantes connexes

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 91 | 95 | 85 | 80 | 85 | 83 | 82 |
| 70 | 88 | 89 | 75 | 85 | 79 | 85 | 81 |
| 70 | 90 | 50 | 51 | 80 | 81 | 82 | 85 |
| 70 | 75 | 53 | 50 | 51 | 82 | 85 | 80 |
| 85 | 70 | 40 | 41 | 30 | 32 | 74 | 76 |
| 80 | 84 | 43 | 42 | 32 | 31 | 71 | 75 |
| 82 | 84 | 83 | 81 | 77 | 72 | 71 | 74 |
| 85 | 90 | 88 | 81 | 75 | 72 | 70 | 72 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 100 | 100 | 100 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0 | 100 | 100 | 0 | 100 | 0 | 100 | 0 |
| 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 |
| 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 100 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

4-connexité

CC blanches : 8

CC noires : 3

8-connexité

CC blanches : 3

CC noires : 1

Images - 2022/2023

2

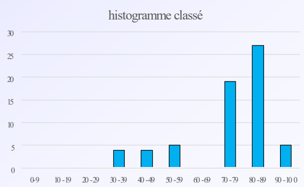
**Exercice 1**

Soit l'image I de taille 8x8 suivante en niveaux de gris (compris entre 0 et 100) :

2° Tracer l'histogramme de cette image.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 91 | 95 | 85 | 80 | 85 | 83 | 82 |
| 70 | 88 | 89 | 75 | 85 | 79 | 85 | 81 |
| 70 | 90 | 50 | 51 | 80 | 81 | 82 | 85 |
| 70 | 75 | 53 | 50 | 51 | 82 | 85 | 80 |
| 85 | 70 | 40 | 41 | 30 | 32 | 74 | 76 |
| 80 | 84 | 43 | 42 | 32 | 31 | 71 | 75 |
| 82 | 84 | 83 | 81 | 77 | 72 | 71 | 74 |
| 85 | 90 | 88 | 81 | 75 | 72 | 70 | 72 |

| | |
|---|---|
| 0-9 | 0 |
| 10-19 | 0 |
| 20-29 | 0 |
| 30-39 | 4 |
| 40-49 | 4 |
| 50-59 | 5 |
| 60-69 | 0 |
| 70-79 | 19 |
| 80-89 | 27 |
| 90-100 | 5 |




$$f(x) = \begin{vmatrix} 100 & si\ x \leq 65 \\ 0 & sinon \end{vmatrix}$$

Images - 2022/2023

3

**Exercice 1**

3° On voudrait mettre en évidence les détails de l'objet foncé. Proposer un étirement linéaire par morceaux de l'histogramme

Indiquer le résultat.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 91 | 95 | 85 | 80 | 85 | 83 | 82 |
| 70 | 88 | 89 | 75 | 85 | 79 | 85 | 81 |
| 70 | 90 | 50 | 51 | 80 | 81 | 82 | 85 |
| 70 | 75 | 53 | 50 | 51 | 82 | 85 | 80 |
| 85 | 70 | 40 | 41 | 30 | 32 | 74 | 76 |
| 80 | 84 | 43 | 42 | 32 | 31 | 71 | 75 |
| 82 | 84 | 83 | 81 | 77 | 72 | 71 | 74 |
| 85 | 90 | 88 | 81 | 75 | 72 | 70 | 72 |

T = 65

30 -> 0

60 -> 90

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 60 | 63 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 69 | 60 | 63 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 0 | 33 | 0 | 6 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 39 | 36 | 6 | 3 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |

$y = 3.x - 90$ si $x \leq 65$

$y = 100$ si $x > 65$

Images - 2022/2023

4

**Exercice 2**

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} et\ k_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_1$ : Lissage, filtre passe-bas

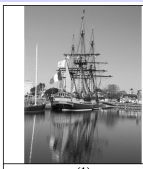
$k_2$ : contours horizontaux, filtre passe -haut

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

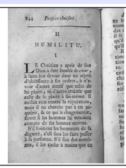
Images - 2022/2023

5

**Exercice 3**

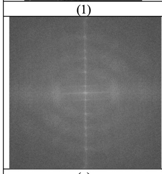


(1)

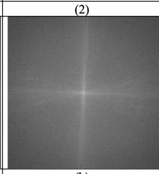


(2)

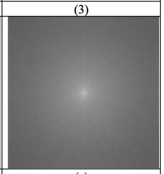
(3)



(a)



(b)



(c)

1 - b

2 - a

3 - c

Images - 2022/2023

6

**Exercice 4**

a. Indiquer le schéma général d'une chaîne de traitement d'image globale s'appuyant sur la transformée de Fourier.

I ⟶ TF(I)=J ⟶ f(J)=J' ⟶ $TF^{-1}$(J')

b. Citer 2 problématiques dans lesquelles la TF permet d'apporter une solution. Préciser comment la solution est mise en œuvre.

- Suppression du bruit
- Recherche d'inclinaison des lignes d'un document

La fonction f est un filtre passe bas
(masque en forme de disque de large rayon)

La fonction f détermine les directions privilégiées dans la TF



7

**Exercice 4**

c. Dans chaque cas on indiquera si on peut obtenir un résultat équivalent à l'aide d'une méthode locale.

Bruit : lissage par filtre gaussien

Inclinaison des lignes d'un texte : réaliser les histogrammes du nombre de pixels sur des droites parallèles d'orientation théta
trouver la valeur de théta qui maximise les différences entre pics et minimum



8

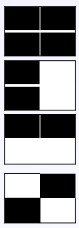
**Exercice 4**

d. En considérant des images de taille 2x2 et un noyau relatif aux lignes et aux colonnes, indiquer la transformée d'Hadamard I' de l'image I.

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $I = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$I' = PIP \qquad I' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{22} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$





9

# AUTRES DECOMPOSITIONS CLASSIQUES



10

## Décomposition

- Méthodes globales :décomposition dans une 'base'
- Développement en séries de Fourier
- Développement en séries entières

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Famille génératrice : $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$
- Si la base est orthogonale
au sens d'un produit scalaire $< f_i, f_j >= 0 \quad si \quad i \neq j$
$< f_i, f_i >= 1 \quad \forall i$

$a_n =< f, f_n >$



11

## Moments

- Autant de moments que de familles de fonctions
  - Moments géométriques

  Correspondent aux fonctions de base
  $(x, y) \rightarrow x^p y^q$

  $$m_{pq} = \sum_{M \in I} x^p y^q f(x, y)$$

  - Centre de Gravité $\quad \bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$

  - Moments orthogonaux



12

## Moments orthogonaux

- Permettent la reconstruction
- Suppriment la redondance
- Familles orthogonales sur des rectangles
  - Legendre, Chebyshev, Gegenbauer, Jacobi, Laguerre, Hermite, Krawtchouk, dual Hahn, Racah,
- Familles orthogonales sur des disques
  - Zernike, Pseudo–Zernike , Fourier–Mellin



## Moments orthogonaux

$$m_{p,q} = n_p n_q \iint p_p(x) p_q(y) f(x,y)\, dx\, dy$$

- $n_p$ et $n_q$ sont des facteurs de normalisation
- $p_p$ et $p_q$ sont les fonctions de base

- L'expression de l'orthogonalité

$$\int w(x)\, p_p(x)\, p_q(x) dx = h_p \delta_{pq}$$



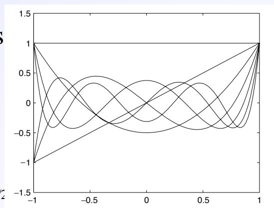
## Moments de Legendre

$$m_{p,q} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_m(x) P_q(y) f(x,y)\, dx\, dy$$

- Avec les polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

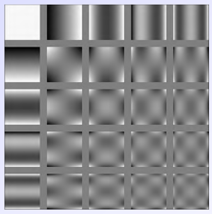
- Les 6 premières fonctions






## Moments de Legendre

- Les fonctions de base en dimension 2



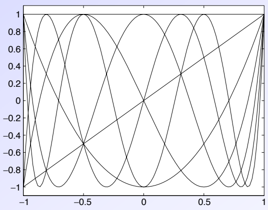
- Avec les polynômes de Legendre

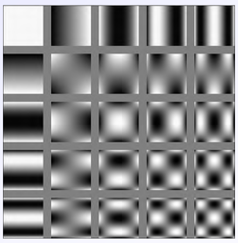
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$



## Moments de Tchebyshev

- Les premières fonctions et les premières fonctions 2D



$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$



## Moments de Zernike

- Forme générale définie sur un disque

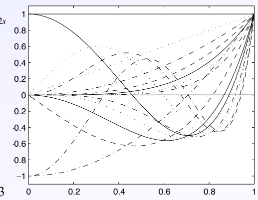
$$m_{p,q} = n_{pq} \int_0^{2\pi}\int_0^1 R_{pq}(r) e^{-iq\theta} f(r,\theta)\, dr\, d\theta$$

$$A_{n,l} = \frac{n+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 V_{nl}(r,\theta) f(r,\theta)\, dr\, d\theta = \frac{n+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 R_{nl}(r) e^{il\theta} f(r,\theta)\, dr\, d\theta$$

n positif et $\ell$ entre -n et +n

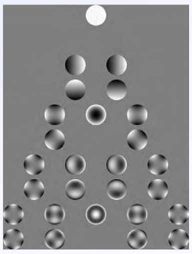
$$R_{n\ell}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|\ell|)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!((n+|\ell|)/2-s)!((n-|\ell|)/2-s)!} r^{n-2s}$$

- Les 6 premières fonctions



## Moments de Zernike

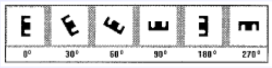
- Forme générale définie sur un disque
- Les premières fonctions définies sur un disque



- Propriété / rotation

f(r,θ) -> par rotation d'angle α
f(r,θ-α)

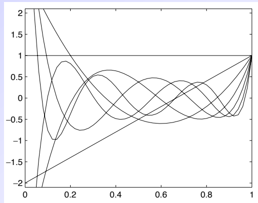
$A_{nl}$ -> $A_{nl}$ exp(-ilα)

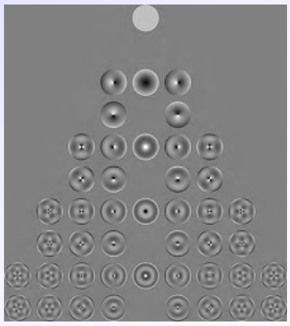





19

## Moments de Fourier-Mellin





20

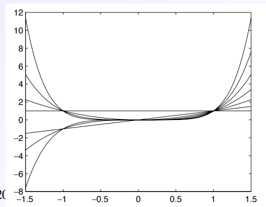
## Moments géométriques

- Définition $m_{pq} = \sum_{M \in I} x^p y^q f(x,y)$

$$\mu_{pq} = \sum_{M \in I} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x,y)$$

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

- Centre de Gravité
- Les 6 premières fonctions






21