MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

MASTER 1 INFO 2022–2023

Optimisation. Algorithmique.

Lignes de niveau. Fonctions quadratiques.

Exercice 1

Représenter les graphes et ensembles de niveau des fonctions suivantes :

1. Fonction de Rosenbrock sur $[-3,3] \times [-1,4]$

$$f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1-x)^2 \,.$$

2. Fonction de Himmelblau sur $[-5,5]^2$

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \,.$$

3. Fonction de Beale sur $[-4,4]^2$

$$f(x,y) = \left(\frac{3}{2} - x(1-y)\right)^2 + \left(\frac{9}{4} - x(1-y^2)\right)^2 + \left(\frac{21}{8} - x(1-y^3)\right)^2 \,.$$

4. Fonction de Freudenstein et Roth sur $[0,6]^2$

$$f(x,y) = \sqrt{(x - y^3 + 5y^2 - 2y - 13)^2 + (x + y^3 + y^2 - 14y - 29)^2} \,.$$

Exercice 2

Soit $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice réelle, symétrique de taille (n,n). On définit la fonction quadratique f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = c + b^t\, x + \frac{1}{2} x^t\, A\, x \,.$$

1. Pour $n = 2$ donner explicitement f.
2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$.
3. Montrer que f admet un minimum unique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est définie positive.
4. Représenter les ensembles de niveau de f pour $n = 2$, $c = 0$, diverses matrices A et vecteurs b en utilisant la fonction `contour()`.
   Illustrer les résultats du 2. et 3. et vérifier graphiquement que le gradient est perpendiculaire aux lignes de niveau.

Exercice 3

Pour $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice réelle, symétrique définie positive de taille (n, n). On définit la fonction quadratique f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = c + b^t\, x + \frac{1}{2} x^t\, A\, x\ .$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ donné, déterminer la direction de la plus grande pente d en x.
2. Calculer le pas σ^* pour lequel $f(x + \sigma d)$ est minimal.
3. Vérifier que deux directions des descente successives sont orthogonales.
4. On considère la fonction $f(x) = (x_1 + x_2 - 2)^2 + 100(x_1 - x_2)^2$. Déterminer x^*, $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$. Que se passe-t-il si l'on démarre les itérations au point $x0 = \left[3, \frac{299}{101}\right]^t$?
5. Écrire la fonction `function [x_h,v_h]=methode_gradient(x0)` qui minimise f et afficher la suite des points construits successivement.
   Tester la convergence pour différentes valeurs propres (strict. positives) de A.