Traitement du signal et des images - M1 info

Filtrage numérique

Gaël MAHÉ

Université Paris Descartes / UFR math-info

automne 2013

Objectifs

- **Compenser** les distorsions introduites par un système analogique
- **Simuler** numériquement un système analogique

Définitions

- **Système à temps discret**

- **Filtre numérique**

Plan

Equation aux différences

Un filtre numérique est défini par une équation aux différences :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k)$$

- Si $p \neq 0$, filtre récursif
- Si $p = 0$, filtre non-récursif

Exemple de filtrage récursif

Une séquence stationnaire d'un signal de parole s peut être modélisée par :

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{10} a_k s(n-k) + e(n)$$

Application : codage de la parole.

Plan

Réponse impulsionnelle

- Impulsion unité :

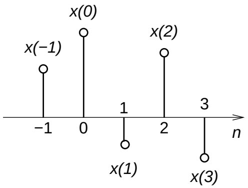
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \forall\, n \neq 0 \end{cases}$$

- Réponse impulsionnelle = réponse du filtre à l'impulsion unité

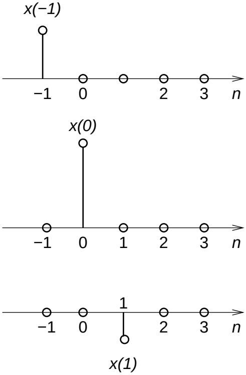
- Un filtre est complètement défini par sa réponse impulsionnelle

Réponse à une entrée quelconque

- Soit *via* l'équation aux différences
- Soit *via* la réponse impulsionnelle :

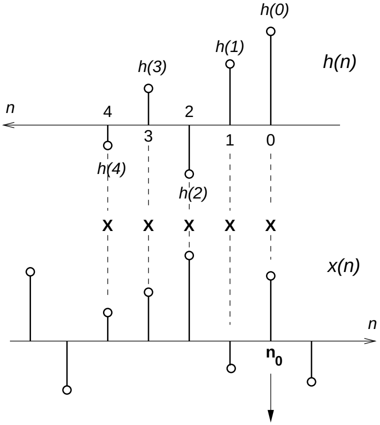


$$x(n) = \left\{ \begin{array}{l} x(-1)\delta(n+1) \\ + \\ x(0)\delta(n) \\ + \\ x(1)\delta(n-1) \\ + \\ \dots \end{array} \right.$$



$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

La convolution discrète, concrètement



$$y(n_0) = h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0-1) + h(2)x(n_0-2)$$
$$+h(3)x(n_0-3) + h(4)x(n_0-4)$$

Figure: Comment convoluer un signal par la réponse impulsionnelle d'un filtre.

Réponse impulsionnelle d'un filtre non-récursif causal

Pour toute entrée x,

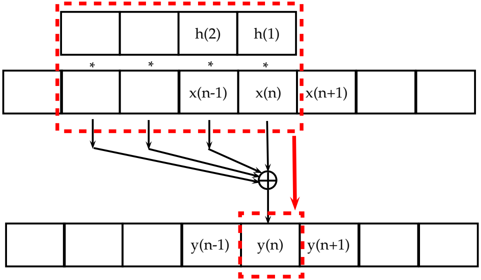
- Selon la réponse impulsionnelle :

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)x(n-k)$$

- Selon l'équation aux différences :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k)$$

Implémentation d'un filtre non-récursif causal



Implémentation en scilab :

```
h = [4 -3 2 -1];
x = rand(1,100,"normal");
y = zeros(1,100);
for n=1:100
   y(n) = sum( h .* x(n:-1:n-3) );
end
```

Réponse impulsionnelle d'un filtre récursif

Selon l'équation aux différences,

$$h(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k \delta(n-k)$$

- $\big(h(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite récurrente
- Les filtres récursifs sont donc à **réponse impulsionnelle infinie**

Plan

Réponse fréquentielle

- Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}\big[h(n)\big]$$

- Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Plan

Définition de la TZ

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

pour $z \in D \subset \mathbb{C}$

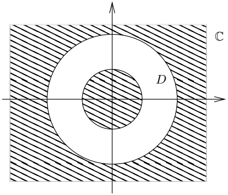


Figure: Domaine de définition d'une transformée en Z.

Propriétés

- La TZ est **linéaire**
- **Théorème du retard** :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TZ}[x(n-k)] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n-k)z^{-n} \\
&\quad \text{changement de variable } : n-k \rightarrow n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n-k} \\
&= z^{-k}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}
\end{aligned}$$

Propriétés (suite)

- La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

- $\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$

Démonstration de $\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(x(n) * y(n)\Big) z^{-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) y(n-k) z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) z^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n-k) z^{-(n-k)} \\
& \quad \text{changement de variable} \quad n-k \rightarrow n \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) z^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n) z^{-n}
\end{aligned}$$

NB : ce résultat permet de démontrer le résultat
$\mathrm{TFTD}[x(n)y(n)] = \mathrm{TFTD}[x(n)]\mathrm{TFTD}[y(n)]$, en remplaçant z par $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}$.

Plan

Fonction de transfert

- Soit un filtre défini par son **équation aux différences**. Comment déterminer
  - sa **réponse fréquentielle** $H(f)$?
  - sa **stabilité** ?
- On définit la **Fonction de transfert** :

$$H(z) = \mathrm{TZ}[h(n)]$$

Comment trouver $H(z)$ à partir de l'équation aux différences ?

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k)$$

Comment trouver $H(f)$ à partir de $H(z)$?

$$H(f) = H(z) \, \mathrm{en} \, z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$$

Etude de la stabilité

Un filtre est stable si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.
La stabilité s'étudie *via* :

- l'équation aux différences
- la réponse impulsionnelle

  Un filtre de réponse impusionnelle $h(n)$ est stable ssi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty$.
  Corrolaire : tous le filtres RIF sont stables.

- la fonction de transfert

  Un filtre causal est stable ssi les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité.

Démonstration de : stabilité $\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty$

- Démonstration de $\Leftarrow$:
  Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty$.
  Soit $x(n)$ un signal borné : $\exists\, M, \forall\, n, |x(n)| < M$.
  La sortie y du filtre s'exprime :
  $$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(n-k)$$
  Par conséquent,
  $$|y(n)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)||x(n-k)| < M \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < \infty$$
  Donc y est borné.
- Démonstration de $\Rightarrow$ par contraposée :
  Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| = \infty$.
  Pour montrer que le filtre est instable il suffit de trouver 1 signal d'entrée borné générant un sortie non bornée.
  Prenons $x(n) = \text{signe}\Big(h(-n)\Big)$. Alors :
  $$y(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| = \infty$$
  La sortie n'est pas bornée.

Lien entre le lieu des pôles et la réponse impulsionnelle