Les lois à densité usuelles :

A) La loi uniforme :

On dit que X suit une loi uniforme sur $[a;b]$ $(a<b)$ et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a;b])$ si une densité de X est :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On en déduit sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- De plus, $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

B) La loi normale ou loi de Laplace-Gauss :

Nota Bene : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

- On dit que X suit une loi normale ou loi de Laplace-Gauss de paramètre (m,σ) et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma)$ si une densité de X est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

- On en déduit sa fonction de répartition :

$$F_X(x) = \frac{1}{\dots} \int^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}\,dt$$

On en déduit sa fonction de répartition :

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt .$$

- De plus, $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Cas particulier : variable normale centrée réduite

Soit Y une v. a. qui suit une loi normale centrée réduite, notée $Y \leadsto \mathcal{N}(0;1)$. Une densité de Y est :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} .$$

- On en déduit sa fonction de répartition :

$$\Phi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

- De plus, $\Phi_Y(0) = \frac{1}{2}$; $\forall y \in \mathbb{R}$, $\Phi_Y(-y) = 1 - \Phi_Y(y)$ et $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

- Stabilité de la somme de v.a. de lois $\mathcal{N}(m_i ; \sigma_i)$:

Soient n v.a. $X_i \leadsto \mathcal{N}(m_i ; \sigma_i)$ avec $i = 1, \dots, n$. On les suppose mutuellement indépendantes. Alors, pour tous les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \leadsto \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i ; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2} \right) .$$

- Utilisation de la loi normale :

On emploie cette loi pour décrire en mécanique : la durée de vie d'une pièce soumise à l'usure ; en sociologie : la répartition du Q.I. d'une population ; en physique : la répartition des erreurs de mesure etc...

c) La loi exponentielle :

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$ et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (la loi exponentielle est un cas particulier de la loi $\Gamma(\beta\,;\gamma)$ où $\beta = \frac{1}{\lambda}$ et $\gamma = 1$) si une densité de X est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- On en déduit sa fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

- De plus, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

La loi exponentielle est caractérisée par l'équivalence suivante :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(X > x+y \mid X > y) = P(X > x)$$

On dit que la loi exponentielle est sans mémoire.

- Utilisation de la loi exponentielle :

On l'emploie pour modéliser des phénomènes de file d'attente ; en médecine : temps de survie d'un organisme, en urbanisme : répartition de la population dans la périphérie d'une ville ; en météorologie : répartition des précipitations ou encore la durée de vie d'un objet.

Plus généralement, on utilise le modèle de loi exponentielle pour décrire les processus sans vieillissement (sans mémoire).