Traitement du signal et des images - M1 info

Transformée de Fourier discrète

Gaël MAHÉ

Université Paris Descartes / UFR math-info

automne 2011

Plan

Discrétisation du spectre

Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

Transformée de Fourier **à temps discret (TFTD)** de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

TFD

- Pour un signal discret $x(n)$ de durée finie N, de TFTD $X(f)$, on définit sa **transformée de Fourier discrète (TFD)** :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X\big(f = \frac{k}{N}\big) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

▶ Les N échantillons fréquentiels $X[k]$ conservent-ils toute l'information des N échantillons temporels $x(n)$?

- On montre que :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}\big[X[k]\big] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Démonstration de la TFD inverse

Soit $x(n)$ un signal discret de longueur finie N.
Soit $X[k] = \mathrm{TFD}[x(n)]$.
Montrons que les N échantillons fréquentiels $\big(X[k]\big)_{k=0\ldots N-1}$ portent la même information que $\big(x(n)\big)_{n=0\ldots N-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi km}{N}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k(n-m)}{N}}}_{=N \text{ si } m=n,\ 0 \text{ sinon}} \\
&= N x(n)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]]$$

Transformée de Fourier rapide

- Si N est une puissance de 2,
  il existe des algorithmes rapides de calcul de la TFD :
  les **transformées de Fourier rapide** (TFR) ou Fast Fourier Transform (FFT)

- Complexité de calcul des N échantillons $X[k]$
  pour un signal de durée N :
  - formule de la TFD $\rightarrow O(N^2)$ MAC
  - TFR $\rightarrow O(N \log_2 N)$ MAC

Plan

Le problème

- Pour $x(n)$ quelconque, spectre = TFTD = fonction continue de f
  Or l'ordinateur ne traite pas des fonctions continues
  ▶ TFD ▶ tronquer x
- On observe x sur une durée finie NT_e : N échantillons

$$x'(n) = x(n)w(n)$$

  avec

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 ... N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Spectre de l'observation :

$$X'(f) = X(f) * W(f)$$

  avec $|W(f)| = |\text{sinc}(\pi N f)|$
- TFD → on n'observe que des **échantillons** $X[k]$ du spectre !

Exemple : $x(n) = \cos(2\pi n f_0 + \alpha)$

- Spectre de x : $X(f) = \frac{e^{j\alpha}}{2}\delta(f - f_0) + \frac{e^{-j\alpha}}{2}\delta(f + f_0)$

- Spectre de $x'(n) = x(n)w(n)$:

$$X'(f) = X(f) * W(f) = \frac{e^{j\alpha}}{2}W(f - f_0) + \frac{e^{-j\alpha}}{2}W(f + f_0)$$

- Visualisation du spectre par la TFD :

Comment améliorer la visualisation par TFD ?

Zéropadding :

- Compléter $\big(x(n)\big)_{0\leq n\leq N-1}$ par N' zéros
- TFD de x complété

▶ Spectre (TFTD) de x reste le même :

$$X(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf}$$

▶ Mais le spectre discrétisé (TFD) est sur $N+N'$ points, espacés de $\frac{1}{N+N'}$

Résolution fréquentielle et résolution en amplitude

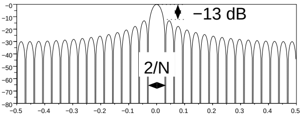


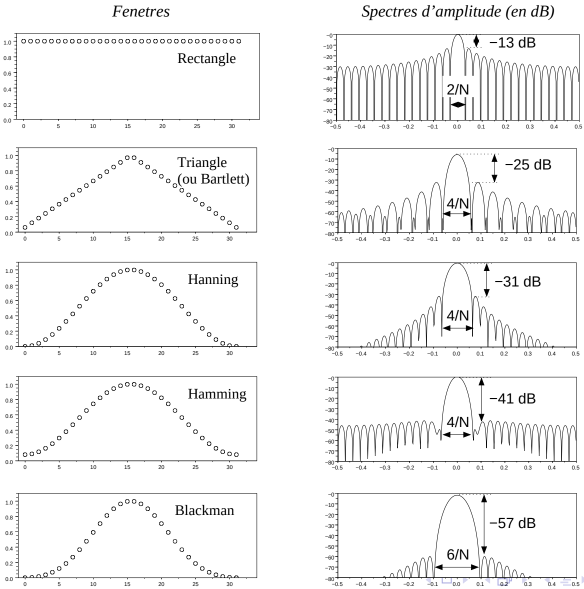
Figure: Spectre d'une fenêtre rectangulaire de longueur N, en dB.

Conséquences du fenêtrage

- Perte de finesse en fréquence :

- Perte de finesse en amplitude :

Comment améliorer la résolution ?



Plan

Produit de convolution circulaire

Soient x et h de durée finie N. Soient $\tilde{x}$ le signal obtenu en périodisant x.

Convolution circulaire de x par h :

$$x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\tilde{x}(n-k)$$

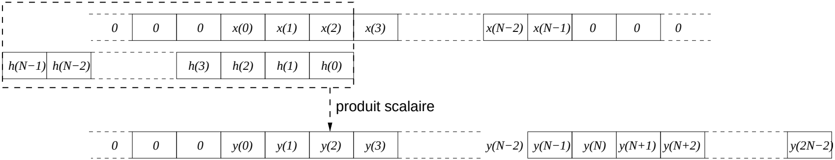
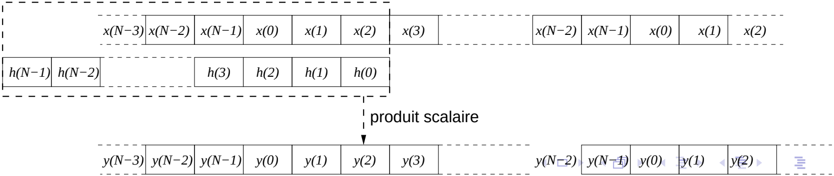
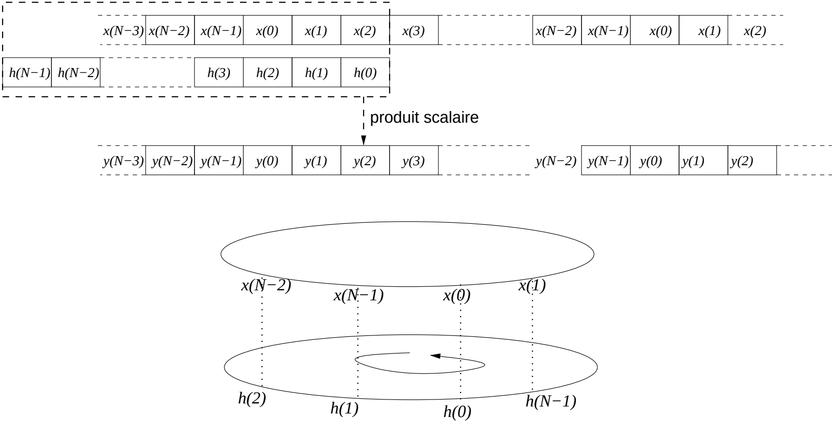


Figure: ↑ Convolution linéaire - Convolution circulaire ↓



Produit de convolution circulaire (2)

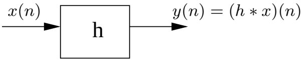


Attention !

On montre que :

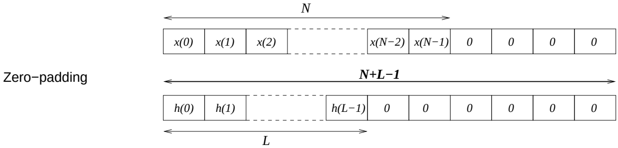
$$\begin{aligned} \mathrm{TFD}\big[h\big] \times \mathrm{TFD}\big[x\big] &\neq \mathrm{TFD}\big[h * x\big] \\ &= \mathrm{TFD}\big[h \otimes x\big] \end{aligned}$$

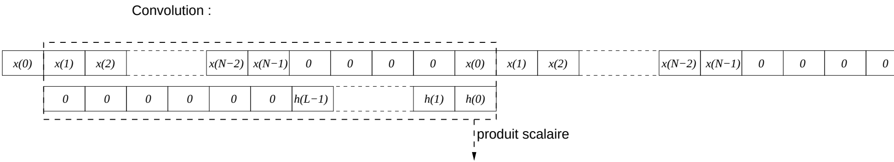
Que faire du produit de 2 TFD ?



$$H(k)X(k) = \text{TFD}[h(n) \otimes x(n)] \neq Y(k)$$

Comment faire pour que $Y(k) = H(k)X(k)$, *i.e.* $y = h \otimes x$?





Application : convolution rapide

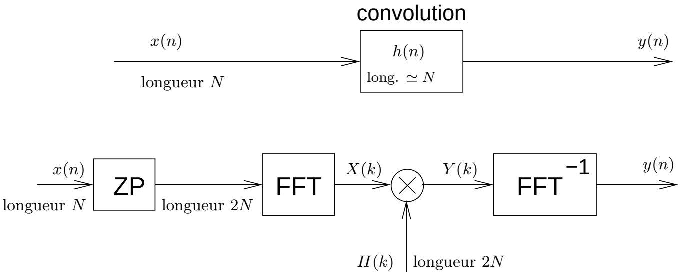


Figure: Convolution *vs* convolution rapide