

Exercice 1

Soit A le réseau de neurones de la figure 1.

La couche d'entrée est composée des unités x_1, y_1, x_2 et y_2 . x_1, y_1, x_2 et y_2 prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$.

La couche de sortie est composée des unités o_1, o_2, o_3 . Il y a 2 unités cachées c_1 et c_2 . Pour le calcul en avant, c_1 est calculée avant c_2 (qui a besoin de la valeur de c_1).

Les connexions en trait plein ont un poids 1 et les connexions en trait pointillé ont un poids -2. c_1 et c_2 ont une unité de biais -1,5. o_1, o_2 et o_3 ont une unité de biais -0,5.

Les unités cachées et les unités de sortie utilisent la fonction à seuil telle que $\text{seuil}(t) = 1$ si $t > 0$ et 0 sinon.

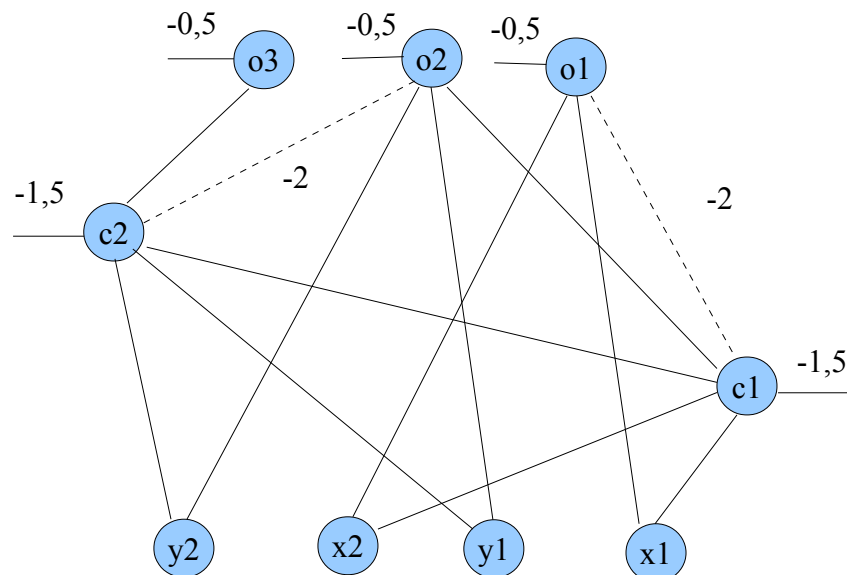


Figure 1

1° Donner la sortie du réseau A pour chacune des 16 entrées possibles du réseau.

On considère que x_1 et y_1 sont respectivement les bits de poids faible et fort d'un nombre entier N_1 compris entre 0 et 3, et que x_2 et y_2 sont les bits de poids faible et fort d'un nombre entier N_2 également compris entre 0 et 3. On considère aussi que o_1, o_2, o_3 sont les 3 bits d'un nombre S compris entre 0 et 6.

2° Que fait le réseau A ?

Exercice 2

Soit R le réseau de neurones de la figure 2.

La couche d'entrée est composée des unités x, y et z. x, y et z prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$.

La couche de sortie est composée de l'unité z. Il y a 4 unités cachées a, b, c, d.

Les connexions en trait plein ont un poids 1 et les connexions en trait pointillé ont un poids -1.

L'unité a (resp. s) possède un biais égal à +0,5 (resp. -0.5). Les unités b, c, d ont un biais égal à -1,5.

Les unités cachées et les unités de sortie utilisent la fonction à seuil telle que $\text{seuil}(t) = 1$ si $t > 0$ et 0 sinon.

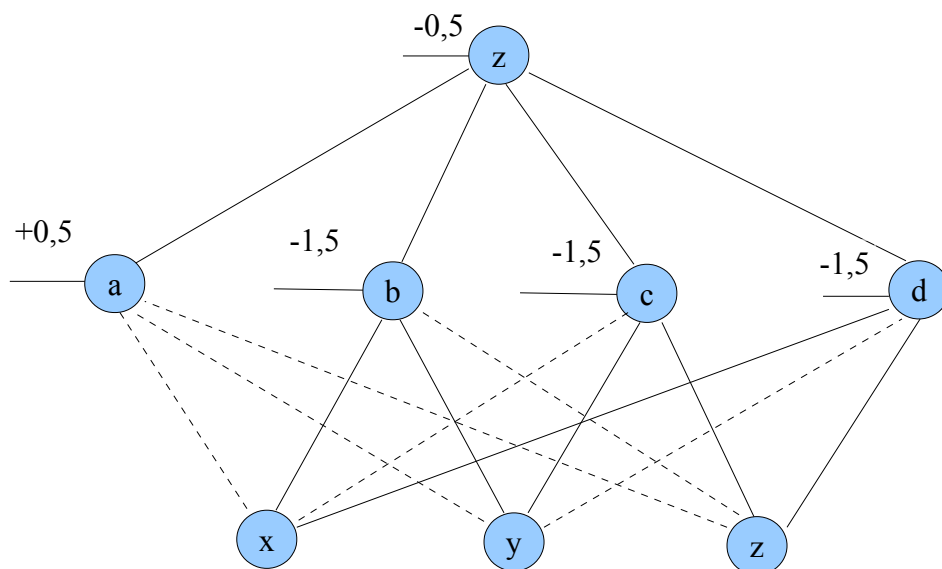


Figure 2

1° Donner la sortie du réseau R pour chacune des 8 entrées possibles du réseau.

On considère que les 8 triplets possibles (x, y, z) représente chacun un sommet du cube unité.

2° Que fait le réseau R ?

Exercice 3

La fonction $z = \text{OR}(x, y)$ est définie par la table 10.

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
z	0	1	1	1

Table 10 : la fonction OR.

La figure 4 représente un neurone pour problème du OR. On a $w_{xz}=5$ et $w_{yz}=-3$ et $w_{bz}=1$.

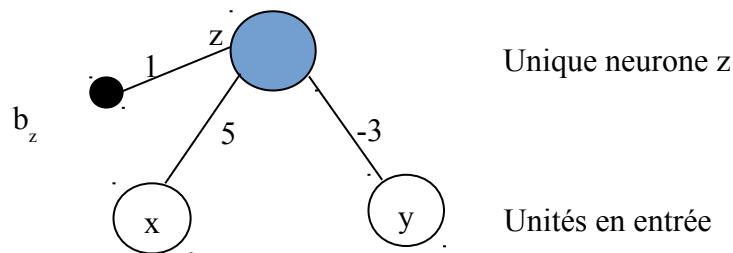


Figure 4 : Un neurone en cours d'apprentissage.

L'équation caractéristique du neurone est :

$$\text{net}_z = 5x - 3y + 1 = 0 \quad (\text{delta})$$

Cette équation correspond à une droite delta (cf figure 5).

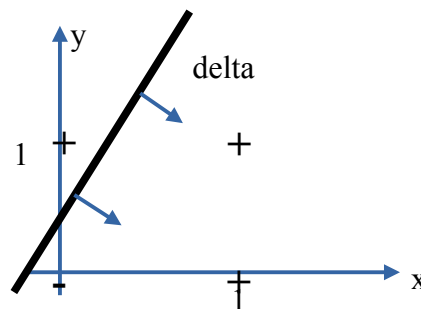


Figure 5 : La droite delta sépare le plan en deux demi-plans.

1° Comment le neurone classifie-t-il les 4 exemples ?

2° On suppose que $v = 0.1$. Pour chacun des 4 exemples, que deviennent les poids du neurone si on présente l'exemple avec la sortie donnée par le OR et si on applique une itération de backprop ?

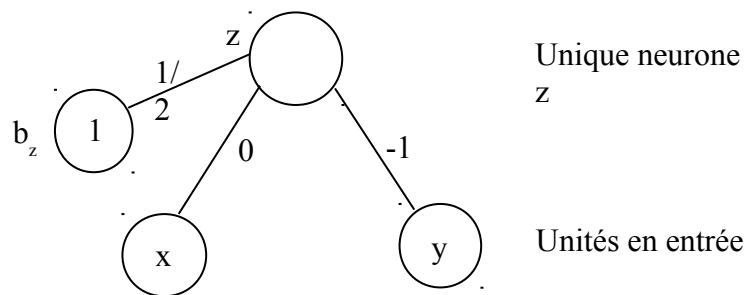
Exercice 4

Cet exercice montre le fonctionnement de « Backprop » avec un neurone de départ très mal initialisé. La fonction $z = Y(x,y) = y$ est celle de la table 11.

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
z	0	1	0	1

Table 11 : la fonction Y.

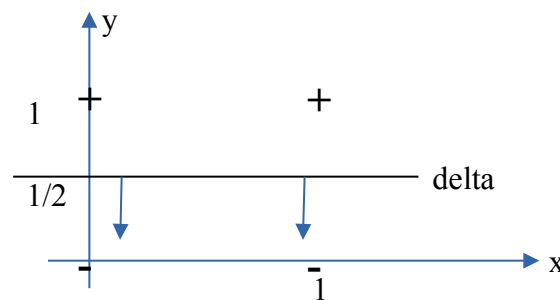
La figure 7 représente le neurone du pire cas pour le problème du Y : on suppose que l'on a $w_{xz}=0$ et $w_{yz}=-1$ et $w_{bz}=1/2$.

Figure 7 : neurone du *pire cas* pour le problème du Y.

L'équation caractéristique de la droite delta du neurone est :

$$\text{net}_z = -y + 1/2 = 0 \quad (\text{delta})$$

La figure 8 représente graphiquement la sortie du neurone.

Figure 8 : La droite delta est tournée dans le *mauvais sens* : les $-$ sont classés $+$ et réciproquement.

1° Comment le neurone de la figure 8 classifie-t-il les 4 exemples ?

2° On suppose que $v = 0.1$. Pour chacun des 4 exemples, que deviennent les poids du neurone si on présente l'exemple avec la sortie donnée par le OR et si on applique une itération de backprop ?

Exercice 5

On dispose des exemples de la table 1.

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
x	1	2	3	1	2	3	1	2	3
y	3	3	3	2	2	2	1	1	1
classe	+	+	-	-	+	-	-	-	-

Table 1

1° L'ensemble des exemples de la table 1 est-il séparable avec un perceptron ?

2° Donner un réseau de neurones avec une couche cachée permettant de classer correctement tous les exemples.

3° On rajoute l'exemple $e_{10} = (1, 4, -)$. Améliorer le réseau.

Exercice 6

On représente une couleur par un point (x, y) du plan. Le plan est découpé en trois secteurs angulaires démarrant du point $O = (0, 0)$. Chaque secteur angulaire correspond à une couleur primaire Bleu, Rouge, Jaune comme le montre la figure 1.

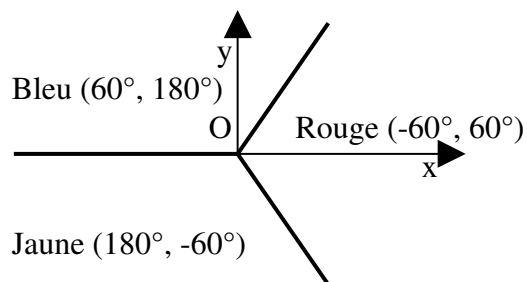


Figure 1 : secteurs angulaires couverts par le Rouge, le Bleu et le Jaune.

1° Construire un réseau de neurones avec une couche cachée permettant de reconnaître ces trois couleurs. La couche d'entrée a 2 unités x et y . La couche de sortie a une unité par couleur. L'unité de sortie associée à une couleur vaut 1 si l'entrée correspond à cette couleur, 0 sinon. Pour toutes les unités, on utilise une fonction seuil donnant 0 si l'entrée est négative et donnant 1 sinon.

Exercice 7

Soit l'ensemble d'apprentissage de la table 1. Les exemples ont 2 attributs réels x et y , et une classe d'appartenance valant + ou -.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7
5	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	+	-
3	-	+	+	-	+	+	-
2	-	-	+	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	-

Table 1

Construire un réseau de neurones à 2 couches cachées ayant x et y en entrées, la classe d'appartenance en sortie (1 pour + et 0 pour -). Pour une unité de la première couche cachée, on précisera l'équation de la droite séparatrice et l'inéquation permettant de classifier les exemples +. On précisera les poids de chaque connexion.

Exercice 8

Soit A, B, C, les trois ensembles d'apprentissage de la table 2. Les exemples ont 2 attributs réels x et y , et une classe d'appartenance valant + ou -.

A						B						C					
$y \backslash x$	0	1	2	3	4	$y \backslash x$	0	1	2	3	4	$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	+	+	+	-	+	0	+	+	+	-	+	0	+	+	+	+	+
1	+	+	-	+	+	1	+	-	-	+	+	1	+	-	-	+	+
2	+	-	-	-	+	2	+	-	-	-	+	2	+	-	-	-	+
3	-	-	+	-	-	3	-	+	-	+	-	3	+	-	-	-	+
4	-	+	+	+	-	4	+	+	+	+	+	4	+	+	+	+	+

Table 2

Pour chaque ensemble A, B, C, construire un réseau de neurones ayant x et y en entrées, la classe d'appartenance en sortie (1 pour + et 0 pour -) et les unités cachées nécessaires. Pour une unité de la première couche cachée, on précisera l'équation de la droite séparatrice et l'inéquation permettant de classifier les exemples +. On précisera les poids de chaque connexion.