Représentation des connaissances et raisonnement

Logique des prédicats

Elise Bonzon
elise.bonzon@u-paris.fr

LIPADE - Université Paris Cité
http://helios.mi.parisdescartes.fr/∽bonzon/

Logique des prédicats

1. Pourquoi la logique des prédicats ?
2. Syntaxe et sémantique de la logique du premier ordre
3. Utiliser la logique du premier ordre
4. Réduction de l'inférence du premier ordre à l'inférence propositionnelle
5. Unification
6. Skolemisation
7. Schémas de raisonnement en logique des prédicats
8. Conclusion

Pourquoi la logique des prédicats ?

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation
- La logique propositionnelle est compositionnelle :
  - La signification de $a \wedge b$ provient de la signification de a et de b

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation
- La logique propositionnelle est compositionnelle :
  - La signification de $a \wedge b$ provient de la signification de a et de b
- La signification en logique propositionnelle ne dépend pas du contexte
  - Contrairement au langage naturel

Limites de la ogique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.

Limites de la ogique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.
- Impossible de tirer partie des notions de similitudes entre propositions
  - Pierre et Julien sont des hommes

Limites de la ogique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.
- Impossible de tirer partie des notions de similitudes entre propositions
  - Pierre et Julien sont des hommes
- Il n’est pas possible d’exprimer des relations entre symboles

Logique du premier ordre

- **Logique propositionnelle** : le monde contient des faits
- **Logique des prédicats** : défini à partir d'un domaine $\rightarrow$ les objets sur lesquels on raisonne
  - Termes : représentent les éléments du domaine
  - Relations ou prédicats : entre les éléments du domaine
  - Formules : décrivent les interactions entre les relations

Logique du premier ordre

- **Logique propositionnelle** : le monde contient des faits
- **Logique des prédicats** : défini à partir d'un domaine $\rightarrow$ les objets sur lesquels on raisonne
  - Termes : représentent les éléments du domaine
  - Relations ou prédicats : entre les éléments du domaine
  - Formules : décrivent les interactions entre les relations

  Par exemple :

  - Domaine = les membres d'une famille
  - Terme : `Charly`, `pere(x)` *(désigne un élément du domaine)*
  - Relation : `frere(Charly, Julie)`, vrai si Charly est le frère de Julie
  - Formule : $\forall x \exists y$ `frere(x, y)` signifie "tout individu a un frère"

Syntaxe et sémantique de la logique du premier ordre

Syntaxe de la logique du 1er ordre

Un alphabet $\mathcal{A}$ d'un langage $\mathcal{L}$ de la logique des prédicats consiste des données suivantes :

- Les connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Deux constantes logiques : $\top$ et $\bot$
- Les parenthèses : (et)
- Deux quantificateurs : universel $\forall$, et existentiel $\exists$
- Un ensemble $\mathcal{V}$ de variables : `x, y, a, b`, ..
- Un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonction :
  - d'arité 0 : constantes (`Paul`, `Pierre`, 2, ...)
  - d'arité > 0 : fonctions (`racinecarre`, `pere`, ...)
- Un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de prédicats (`frere`, $>$, `avant`, ...)
  - Prédicat particulier : égalité $=$

Fonction vs Prédicat

- Une fonction retourne un élément du domaine, tandis qu'un prédicat est vrai ou faux
- Par exemple :
  - Fonction : `pere(Philippe) = Jean`
  - Prédicat : `est_pere(Philippe, Jean)` $\rightarrow$ Vrai ou Faux
- **Attention** : les noms importent peu. C'est la définition qui est importante.

Signature d'un langage

La signature d'un langage $\mathcal{L}$ est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

Signature d'un langage

La signature d'un langage $\mathcal{L}$ est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- La signature peut varier d'un langage à l'autre

Signature d'un langage

La signature d'un langage $\mathcal{L}$ est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- La signature peut varier d'un langage à l'autre
- Langage de l'arithmétique :
  - $\mathcal{F} = \{0/0,\ \mathtt{succ}/1,\ -/1, +/2, -/2, \times/2, \div/2\}$
  - $\mathcal{R} = \{= /2\}$

Signature d'un langage

La signature d'un langage $\mathcal{L}$ est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- La signature peut varier d'un langage à l'autre
- Langage de l'arithmétique :
  - $\mathcal{F} = \{0/0, \texttt{succ}/1, -/1, +/2, -/2, \times/2, \div/2\}$
  - $\mathcal{R} = \{= /2\}$
- Langage de la généalogie :
  - $\mathcal{F} = \{\texttt{pere/1, mere/1, Andre/0, Beatrice/0, Charles/0, Elodie/0}\}$
  - $\mathcal{R} = \{\texttt{homme/1, femme/1, parent/2}\}$

Enoncés atomiques

- Terme : variables et éléments de $\mathcal{F}$ (constantes et fonctions)
  - C'est un élément du domaine
    - Exemple : `x`, `Jean`, `pere(Richard)`, `racinecarre(y)`
  - Un terme est clos s'il ne contient pas de variable
    - Par exemple, `mere(Jean)` est clos
- Enoncé atomique : élément de $\mathcal{R}$ (prédicat), $\top$ et $\perp$
  - Retourne une valeur Vrai ou Faux
  - Exemple : `frere(Richard, Jean)`; `epoux(pere(Richard), mere(Jean))`

Formules

Les formules sont construites à partir des énoncés atomiques, des connecteurs et des quantificateurs

Formules

Soit $\mathcal{L}$ un langage, dont la signature est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- Si $P/n \in \mathcal{R}$ est un prédicat d'arité n, et si $t_1, t_2, \ldots t_n$ sont des termes sur $\mathcal{F}$, alors $P(t_1, t_2, \ldots t_n)$ est une formule de $\mathcal{L}$, dite formule atomique (ou atome) de $\mathcal{L}$.
- Si E_1 et E_2 sont des formules, alors $(\neg E)$, $(E_1 \wedge E_2)$, $(E_1 \vee E_2)$, $(E_1 \Rightarrow E_2)$, $(E_1 \Leftrightarrow E_2)$ sont aussi des formules de $\mathcal{L}$
- Si E est une formule et $x \in \mathcal{V}$ une variable, alors $(\forall x\ E)$ et $(\exists x\ E)$ sont aussi des formules de $\mathcal{L}$
- Les symboles $\top$ et $\perp$ sont aussi des formules atomiques

Variables libres et liées

- Une occurence d'une variable est dite liée quand elle est dans le champ d'un quantificateur, autrement elle est libre
- Une variable libre a au moins une occurrence libre dans une formule
- Exemple :
  - $\exists x\ (p(x, y)) \wedge \forall z\ (q(z, x))$
  - Première occurrence de x liée, seconde occurrence libre, y libre, z liée
- Une formule close est une formule sans variable libre

Modèles de la logique du 1er ordre

- La vérité d'une formule est déterminée par un modèle et une interprétation des symboles de la formule
- Un modèle contient des objets (appelés éléments du domaine (ou de l'univers)) qui sont liés entre eux par des relations
- Une interprétation spécifie à quoi réfèrent les symboles de l'énoncé :
  - Symboles de constantes $\rightarrow$ objets
  - Symboles de prédicats $\rightarrow$ relations
  - Symboles de fonctions $\rightarrow$ fonctions
- Un énoncé atomique est vrai dans un modèle donné, compte tenu d'une interprétation donnée, si la relation à laquelle renvoit le symbole du prédicat s'applique aux objets en arguments.

Interprétation

Une interprétation $\mathcal{I}$ d'un langage $\mathcal{L}$, dont la signature est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$, est constitué par :

- Un ensemble (fini ou infini, mais non vide) D, appelé domaine ou univers de $\mathcal{I}$
- Une application, qui associe à chaque symbole de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ une valeur :
  - une constante $c/0 \in \mathcal{F}$: $c_{\mathcal{I}}$ est un élément de D ($c \in D$)
  - une fonction $f/n \in \mathcal{F}$: $f_{\mathcal{I}}$ est une fonction de $D^n \longrightarrow D$
  - un symbole propositionnel $p/0 \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}} = \top$ est vrai, ou $p_{\mathcal{I}} = \bot$ est faux
  - une relation $p/n \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}}$ est un sous-ensemble de D^n (les n-uplets qui vérifient cette relation)

Interprétation : Exemple

Soit le langage $\mathcal{L}$, dont la signature $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ est la suivante :

- $\mathcal{F} = \{\texttt{pere/1, mere/1, A/0, B/0, C/0, E/0}\}$
- $\mathcal{R} = \{\texttt{parent/2}\}$

Une interprétation possible sur le domaine $D = \{\texttt{A, B, C, E}\}$ est :

- `pere(C) = A, pere(E) = A, mere(C) = B, mere(E) = B`,
- $\texttt{parent} = \{\texttt{(A,E), (A,C), (B,C), (B,E)}\}$

Quantification universelle

- $\forall\langle variables\rangle\langle enonce\rangle$
- Tous les étudiants sont intelligents :

$$\forall x \ etudiant(x) \Rightarrow \ intelligent(x)$$

- $\forall x \ P$ est vrai dans un modèle si et seulement si P est vrai pour tous les objets x
- $\forall x \ P$ est équivalent à la conjonction de toutes les instanciations de P :

$$\begin{array}{rc} & (etudiant(Paul) \Rightarrow intelligent(Paul)) \\ \wedge & (etudiant(Chafia) \Rightarrow intelligent(Chafia)) \\ \wedge & (etudiant(Sophie) \Rightarrow intelligent(Sophie)) \\ \wedge & (etudiant(Abdel) \Rightarrow intelligent(Abdel)) \\ \wedge & \vdots \end{array}$$

Quantification universelle : erreur fréquente à éviter

- Le connecteur principal à utiliser avec $\forall$ est l'implication $\Rightarrow$
- Erreur fréquente : utiliser la conjonction $\wedge$ comme connecteur principal avec $\forall$
- $\forall x\ \mathit{etudiant}(x) \wedge\ \mathit{intelligent}(x)$ signifie "tout le monde est étudiant et tout le monde est intelligent"

Quantification existentielle

- $\exists \langle variables \rangle \langle enonce \rangle$
- Un étudiant est intelligent :

$$\exists x \ etudiant(x) \land \ intelligent(x)$$

- $\exists x \ P$ est vrai dans un modèle si et seulement si P est vrai pour au moins un objet x
- $\exists x \ P$ est équivalent à la disjonction de toutes les instanciations de P :

$$\begin{array}{rc} & (etudiant(Paul) \land intelligent(Paul)) \\ \lor & (etudiant(Chafia) \land intelligent(Chafia)) \\ \lor & (etudiant(Sophie) \land intelligent(Sophie)) \\ \lor & (etudiant(Abdel) \land intelligent(Abdel)) \\ \lor & \vdots \end{array}$$

Quantification existentielle : erreur fréquente à éviter

- Le connecteur principal à utiliser avec $\exists$ est la conjonction $\wedge$
- Erreur fréquente : utiliser l'implication $\Rightarrow$ comme connecteur principal avec $\exists$
- $\exists x \; \mathit{etudiant}(x) \Rightarrow \; \mathit{intelligent}(x)$ est vrai s'il existe quelqu'un qui n'est pas étudiant !

Propriétés des quantificateurs

- $\forall x \forall y$ est équivalent à $\forall y \forall x$
- $\exists x \exists y$ est équivalent à $\exists y \exists x$
- $\exists x \forall y$ n'est pas équivalent à $\forall y \exists x$
  - $\exists y \forall x \; aime(x, y)$ “Il existe une personne qui est aimé par tout le monde”
  - $\forall x \exists y \; aime(x, y)$ “Tout le monde aime quelqu'un” (pour toute personne, il existe quelqu'un qu'il aime)
- Liens entre $\forall$ et $\exists$: Les deux quantifieurs sont liés par le biais de la négation :
  - $\forall x \; aime(x, Glace)$ est équivalent à $\neg \exists x \neg aime(x, Glace)$
  - $\exists x \; aime(x, Brocoli)$ est équivalent à $\neg \forall x \neg aime(x, Brocoli)$

Egalité

- $terme_1 = terme_2$ est vrai sous une certaine interprétation si et seulement si $terme_1$ et $terme_2$ renvoient au même objet
    - Richard a deux frères :
      $\exists x, y \ frere(x, Richard) \wedge frere(y, Richard) \wedge \neg(x = y)$
    - Le grand-père paternel de quelqu'un est le père de son père
      $\forall x \ gppaternel(x) = pere(pere(x))$

Egalité

- $terme_1 = terme_2$ est vrai sous une certaine interprétation si et seulement si $terme_1$ et $terme_2$ renvoient au même objet
  - Richard a deux frères :
    $\exists x, y \;\; frere(x, Richard) \wedge frere(y, Richard) \wedge \neg(x = y)$
  - Le grand-père paternel de quelqu'un est le père de son père
    $\forall x \;\; gppaternel(x) = pere(pere(x))$
- Mais pour prendre en compte cette égalité, on doit ajouter une nouvelle règle d'inférence : la démodulation, qui permet de remplacer un terme par un autre en cas d'égalité.
  - A partir de la BC composée des énoncés suivants :
    1. $\forall x \;\; gppaternel(x) = pere(pere(x))$
    2. $annee\_naissance(pere(pere(Lea)))$
  - on peut déduire $annee\_naissance(gppaternel(Lea))$ grâce à la **démodulation**

Utiliser la logique du premier ordre

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \land parent(m, c)$$

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \land parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \;\; parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \land parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \;\; parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

- Un grand-parent est le parent d'un des parents :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \;\; parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

- Un grand-parent est le parent d'un des parents :

$$\forall g, c \;\; grandparent(g, c) \Leftrightarrow \exists p \;\; parent(g, p) \wedge parent(p, c)$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x \ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x \; (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée

$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \ (\mathit{chemin}(x) \Rightarrow \mathit{mene}(x, \mathit{Rome}))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow (\mathit{ouvert}(x) \lor \mathit{ferme}(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x \ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow ((\mathit{ouvert}(x) \lor \mathit{ferme}(x)) \land \neg(\mathit{ouvert}(x) \land \mathit{ferme}(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \; (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x \; (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x \; brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \ (\mathit{chemin}(x) \Rightarrow \mathit{mene}(x, \mathit{Rome}))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow (\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x \ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow ((\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x)) \wedge \neg(\mathit{ouvert}(x) \wedge \mathit{ferme}(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x \ (\mathit{brille}(x) \Rightarrow \mathit{or}(x)) \equiv \exists x \ \mathit{brille}(x) \wedge \neg \mathit{or}(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x \ \mathit{peine}(x)) \wedge (\exists x \ \mathit{plaisir}(x)) \wedge \forall x \ (\mathit{peine}(x) \Rightarrow \neg \mathit{plaisir}(x))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (\mathit{chemin}(x) \Rightarrow \mathit{mene}(x, \mathit{Rome}))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow (\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow ((\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x)) \wedge \neg(\mathit{ouvert}(x) \wedge \mathit{ferme}(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (\mathit{brille}(x) \Rightarrow \mathit{or}(x)) \equiv \exists x\ \mathit{brille}(x) \wedge \neg\mathit{or}(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ \mathit{peine}(x)) \wedge (\exists x\ \mathit{plaisir}(x)) \wedge \forall x\ (\mathit{peine}(x) \Rightarrow \neg\mathit{plaisir}(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ peine(x)) \wedge (\exists x\ plaisir(x)) \wedge \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand
$$\forall x\ (entier(x) \Rightarrow \exists y\ (entier(y) \wedge plusgrand(y, x)))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \; (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x \; (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x \; brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x \; peine(x)) \wedge (\exists x \; plaisir(x)) \wedge \forall x \; (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand
$$\forall x \; (entier(x) \Rightarrow \exists y \; (entier(y) \wedge plusgrand(y, x)))$$
- Il existe un plus grand entier

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ peine(x)) \wedge (\exists x\ plaisir(x)) \wedge \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand
$$\forall x\ (entier(x) \Rightarrow \exists y\ (entier(y) \wedge plusgrand(y, x)))$$
- Il existe un plus grand entier
$$\exists x\ (entier(x) \wedge \forall y(entier(y) \Rightarrow plusgrand(x, y)))$$

Réduction de l'inférence du premier ordre à l'inférence propositionnelle

Terme fermé ; Substitution

- Terme fermé : Terme qui ne contient pas de variable
- Substitution :
  - Paire Variable/Terme
  - Soit E un énoncé, σ un énoncé. $E\sigma$ (ou $Subst(E, \sigma)$) représente le résultat de la substitution σ dans E
  - Exemple :
    - $E = femme(x, y)$
    - $\sigma = \{x/Hilary,\ y/Bill\}$
    - $E\sigma = femme(Hilary, Bill)$

Instanciation universelle

- Instanciation universelle (UI) : Chaque instanciation d'un énoncé universellement quantifié peut être inféré :

$$\frac{\forall v,\ \alpha}{Subst(\{v/g\}, \alpha)}$$

  pour toute variable v et pour tout terme fermé g
- Exemple
  - $\forall x\ roi(x) \wedge cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$
  - $roi(Jean) \wedge cupide(Jean) \Rightarrow mechant(Jean)$
  - $roi(Richard) \wedge cupide(Richard) \Rightarrow mechant(Richard)$
  - $roi(pere(Jean)) \wedge cupide(pere(Jean)) \Rightarrow mechant(pere(Jean))$

Instanciation existentielle

- Instanciation existentielle (EI) : Pour tout énoncé α, pour toute variable v et pour tout symbole de constante k qui n'apparait pas dans la base de connaissances, on a :

$$\frac{\exists v,\ \alpha}{Subst(\{v/k\}, \alpha)}$$

- Exemple
  - $\exists x\ couronne(x) \land surTete(x, Jean)$
  - $couronne(C_1) \land surTete(C_1, Jean)$
  - C_1 est un nouveau symbole de constante, appelé constante de Skolem
- Cas particulier de la skolémisation

Réduction à l'inférence propositionnelle

- Base de connaissances :
  - $\forall x \; roi(x) \wedge cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$
  - $roi(Jean)$
  - $cupide(Jean)$
  - $frere(Richard, Jean)$
- Instanciation universelle : **toutes** les substitutions possibles :
  - $roi(Jean) \wedge cupide(Jean) \Rightarrow mechant(Jean)$
  - $roi(Richard) \wedge cupide(Richard) \Rightarrow mechant(Richard)$
  - $roi(Jean)$
  - $cupide(Jean)$
  - $frere(Richard, Jean)$
- La nouvelle BC est propositionnalisée

Réduction à l'inférence propositionnelle

- Toute base de connaissances en logique du 1er ordre peut être propositionnalisée de manière à préserver la relation de conséquence
  - $\rightarrow$ un énoncé est déduit de la nouvelle base de connaissances ssi il peut être déduit de la base de connaissances originale
- Idée : propositionnaliser la BC et la requête, appliquer la résolution, retourner un résultat
- Problème : Avec les symboles de fonction, l'ensemble des substitutions possibles des termes fermé est infini
  - $pere(pere(pere(Jean)))$

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

- Idée :
  - instancier d'abord avec toutes les constantes ($Richard$, $Jean$) ;
  - puis les termes de profondeur 1 ($pere(Richard)$, $pere(Jean)$)
  - puis les termes de profondeur 2, ...

  $\rightarrow$ obtenir l'énoncé conséquence

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

- Idée :
  - instancier d'abord avec toutes les constantes ($Richard$, $Jean$) ;
  - puis les termes de profondeur 1 ($pere(Richard)$, $pere(Jean)$)
  - puis les termes de profondeur 2, ...

  $\rightarrow$ obtenir l'énoncé conséquence
- Problème : fonctionne si l'énoncé est conséquence, mais **boucle si l'énoncé n'est pas conséquence**

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Turing et Church (1936)

En logique du premier ordre, la question de la conséquence logique est semi-décidable

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Turing et Church (1936)

En logique du premier ordre, la question de la conséquence logique est semi-décidable

$\Rightarrow$ Il existe des algorithmes qui disent "oui" à tout énoncé conséquence, mais il n'en existe pas qui disent "non" à tout énoncé non-conséquence.

Problèmes de la propositionnalisation

- La propositionnalisation semble générer beaucoup d'énoncés inutiles
- Exemple :
  - $\forall x \; roi(x) \wedge cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$
  - $roi(Jean)$
  - $\forall y, cupide(y)$
  - $frere(Richard, Jean)$

  $\rightarrow$ On déduit $mechant(Jean)$, mais également beaucoup d'énoncés comme $cupide(Richard)$ qui sont non pertinents
- Avec p prédicats k-aires et n constantes, il y a $p.n^k$ instanciations

Unification

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(y)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(Jean)$

  $\rightarrow \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow \ \theta = \{x/Jean, \ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$
- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$
  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$
- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	échec

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	échec

- Normalisation séparée : renommer les variables de façon à empêcher toute interférence de nom

  $\rightarrow\ connait(z_{12}, Bill)$

Unification

- Il peut y avoir plusieurs unificateurs :
  - $connait(Jean, x)$ et $connait(y, z)$

  $\rightarrow\ \theta = \{y/Jean,\ x/z\}$

  $\rightarrow\ \theta = \{y/Jean,\ x/Jean,\ z/Jean\}$
- Le premier unificateur est **plus général** que le second
- Il existe un seul unificateur plus général (MGU, Most General Unifier) qui est unique, au renommage des variables près

  $\rightarrow$ MGU $= \theta = \{y/Jean,\ x/z\}$

Skolemisation

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence
- Quantifieurs existentiels : 2 cas
  - Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
  - Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantifieur universel

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence
- Quantifieurs existentiels : 2 cas
  - Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
  - Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantifieur universel
  - Exemple :

    $$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

    On obtient :

    $$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence
- Quantifieurs existentiels : 2 cas
  - Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
  - Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantifieur universel
  - Exemple :

    $$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

    On obtient :

    $$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence
- Quantifieurs existentiels : 2 cas
  - Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
  - Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantifieur universel
  - Exemple :

    $$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

    On obtient :

    $$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

Skolemisation

- Skolémisation : Suppression des quantifieurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence
- Quantifieurs existentiels : 2 cas
    - Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
    - Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantifieur universel
    - Exemple :

    $$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

    On obtient :

    $$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

- Quantifieurs universels : simplement supprimés

$$p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

Schémas de raisonnement en logique des prédicats

Schémas de raisonnement en logique des prédicats

Modus Ponens généralisé

Modus Ponens généralisé

$$\frac{p_1', p_2', \ldots, p_n', (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)}{q\theta}$$

- Par exemple :

$$\begin{array}{ll} p_1' \text{ est } roi(Jean) & p_1 \text{ est } roi(x) \\ p_2' \text{ est } cupide(y) & p_2 \text{ est } cupide(x) \\ \theta \text{ est } \{x/Jean,\ y/Jean\} & q \text{ est } mechant(x) \\ q\theta \text{ est } mechant(Jean) & \end{array}$$

- Le Modus Ponens généralisé est utilisé sur des bases de connaissances composées de clauses définies (exactement un litéral positif)
- Toutes les variables sont supposées universellement quantifiées

Schémas de raisonnement en logique des prédicats

Résolution

Résolution

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \;\; m_1 \vee \ldots \vee m_n}{(l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots m_n)\theta}$$

avec $\text{Unify}(l_i, \neg m_j) = \theta$

- Les deux clauses sont supposées être **normalisées séparément**

  $\rightarrow$ ne partagent aucune variable

- Exemple :

  $$\frac{(animal(x) \vee aimer(g(x), x)), \;\; (\neg aimer(u, v) \vee \neg tuer(u, v))}{animal(x) \vee \neg tuer(g(x), x)}$$

  avec $\theta = \{u/g(x), \;\; v/x\}$

- Résolution appliquée sur $\text{CNF}(BC \wedge \neg\alpha)$: complète pour la logique du 1er ordre

Conversion en CNF

"Toute personne qui aime tous les animaux est aimée par quelqu'un"

$$\forall x \ (\forall y \ animal(y) \Rightarrow aimer(x,y)) \Rightarrow (\exists y \ aimer(y,x))$$

1. Elimination des implications :

$$\forall x \ \neg(\forall y \ \neg animal(y) \lor aimer(x,y)) \lor (\exists y \ aimer(y,x))$$

2. Déplacement des $\neg$ vers l'intérieur :
   - $\neg\forall x \ p \equiv \exists x \neg p$
   - $\neg\exists x \ p \equiv \forall x \neg p$

$$\forall x \ (\exists y \neg(\neg animal(y) \lor aimer(x,y))) \lor (\exists y \ aimer(y,x))$$

$$\forall x \ (\exists y \ animal(y) \land \neg aimer(x,y)) \lor (\exists y \ aimer(y,x))$$

Conversion en CNF

3. Normalisation des variables : chaque quantifieur doit utiliser une variable différente

$$\forall x\ (\exists y\ animal(y) \land \neg aimer(x,y)) \lor (\exists z\ aimer(z,x))$$

4. Skolémisation :

$$(animal(f(x)) \land \neg aimer(x, f(x))) \lor aimer(g(x), x)$$

5. Distribution de $\lor$ sur $\land$

$$(animal(f(x)) \lor aimer(g(x),x)) \land (\neg aimer(x,f(x)) \lor aimer(g(x),x))$$

Exemple de base de connaissance

Base de connaissance

La loi stipule que c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles. Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique, a des missiles, et tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West, qui est américain.

$\Rightarrow$ Prouvons que West est un criminel

Exemple de base de connaissance

- “... c’est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles” :

- “Nono ...a des missiles” :

- “tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West” :

- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l’Amérique est considéré comme hostile :

- “West, qui est américain” :
- “Le pays Nono, un ennemi de l’Amérique” :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :
- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :
- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :
- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z\ americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" : $americain(West)$
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \land possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" : $americain(West)$
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" : $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

1. $\forall x \forall y \forall z\ americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x\ missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x\ ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

1. $\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Suppression des implications

Résolution

1. $\forall x \forall y \forall z\ \neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x\ \neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x\ \neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\forall x\ \neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

1. $\forall x \forall y \forall z\ \neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x\ \neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x\ \neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\forall x\ \neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Skolémisation

Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A) \wedge possede(Nono, A)$
3. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A) \wedge possede(Nono, A)$
3. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Mise sous forme de clause

Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Résolution

Conclusion

Pour conclure

- Un **langage de représentation** est défini par sa **syntaxe** et sa **sémantique**
- Une **procédure d'inférence** permet de calculer de nouvelles expressions à partir d'expressions existantes
- Elle est **correcte** si elle permet de dériver des expressions vraies à partir de prémisses vraies
- Elle est **complète** si elle permet de dériver toutes les expressions vraies découlant d'un ensemble de prémisses
- La **logique des propositions** décrit des faits simples sur le monde
- La **logique des prédicats** permet d'exprimer des relations et de raisonner à leur propos

D'autres logiques ?

- La température du réacteur est élevée
  - $\Rightarrow$ Logique floue
- Les blondes ont souvent les yeux bleus
  - $\Rightarrow$ Raisonnement incertain (e.g. Raisonnement bayésien)
- En l'absence de raison de croire le contraire, on peut supposer que chaque adulte que l'on rencontre sait lire
  - $\Rightarrow$ Logique des défauts
- Il est mieux d'avoir plus de pièces que l'adversaire aux échecs
  - $\Rightarrow$ Connaissances heuristiques