Méthodes applicables aux modèles continus

- Partitionnement du plan en régions à partir de points
  - Répond à un problème majeur de la géométrie :
    - Représentation de relations de distance entre objets et de phénomènes de croissance
      - ex :
        - pour modéliser cristaux ou autres structures,
        - pour planifier mouvement
        - Pour rechercher les plus proches voisins
        - Rq: présence à l'état naturel: carapace de tortue, cou réticulé de girafe …

    $\Rightarrow$Diagrammes de proximité

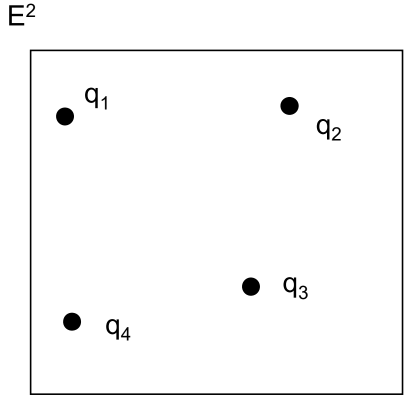
  - Voronoï mathématicien russe le 1er à formaliser cette notion

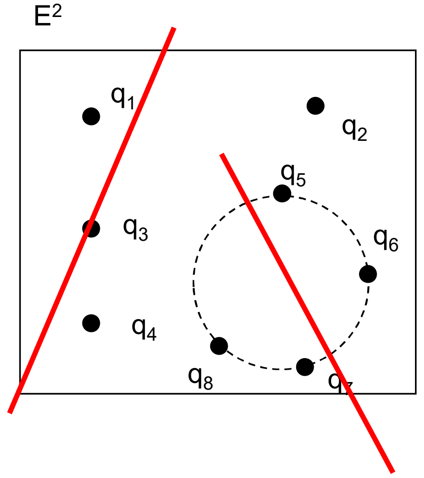
    $\Rightarrow$Diagrammes de Voronoï

  - Delaunay a continué ces travaux

Méthodes applicables aux modèles continus

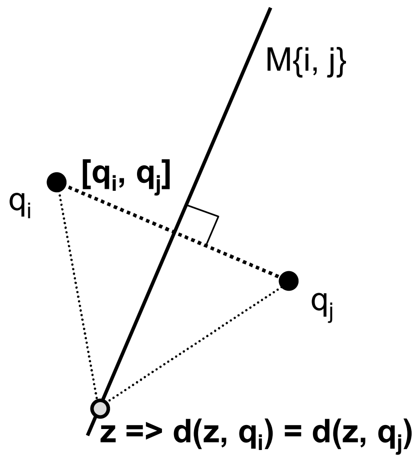
- Diagramme de Voronoï
  - Soit le plan E^2, on définit un ensemble de n **sites** (points de E^2).
  - Un **site** est un point privilégié de E^2
  - On note $S_n = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ un ensemble de n **sites** de E^2.
  - On considère l'ensemble d'indice I tel que $I = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Les **sites** sont dits en "position générale ":
    - Il ne peut y avoir 3 sites alignés
    - Il ne peut y avoir plus de 3 sites sur un même cercle





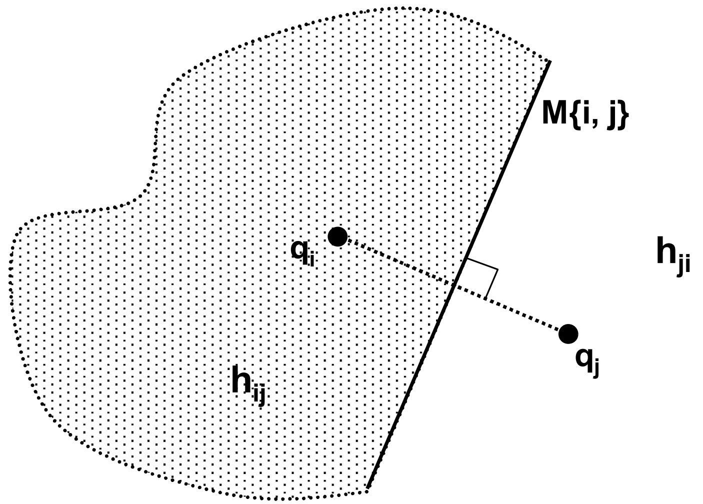
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - On considère deux sites q_i et q_j de E^2.
  - On considère $d(q_i, q_j)$ la distance Euclidienne entre les sites q_i et q_j .
  - Alors la **médiatrice** du segment $[q_i, q_j]$, notée M{i, j}, est le lieu des points de E^2 à égal distance de q_i et de q_j



Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - On définit le **½ espace** associé à q_i et q_j par:
    - $h_{ij} = \{z \in E^2 \ / \ d(z, q_i) \leq d(z, q_j)\}$,
      cad, les points de E^2 plus près de q_i que de q_j
    - On a donc: $E^2 = h_{ij} \cup h_{ji}$ et $h_{ij} \cap h_{ji} = M\{i, j\}$

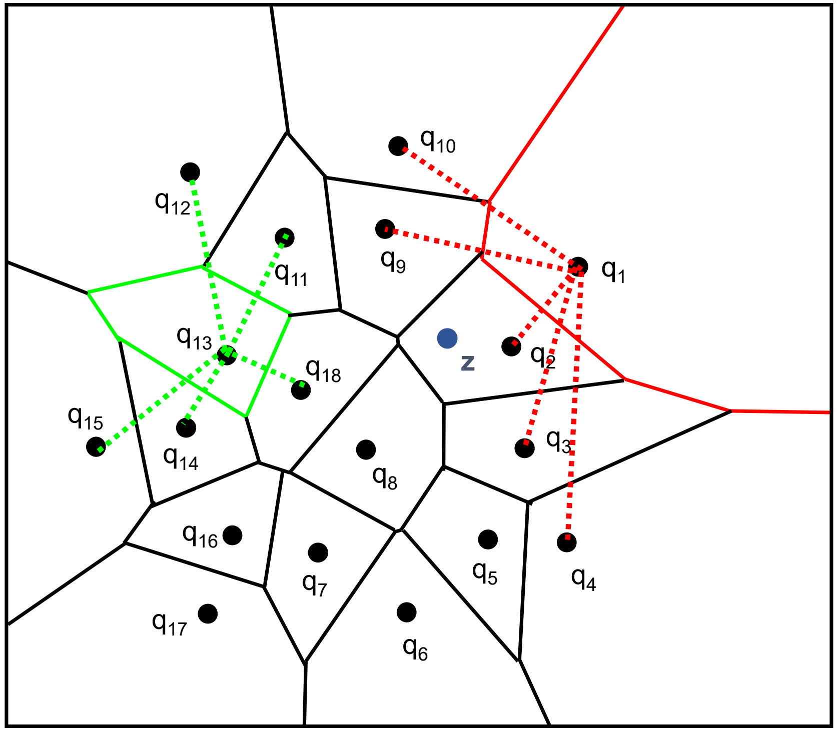


Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - Quelles sont les questions que l'on peut se poser ?
    - Étant donné un point quelconque z de E^2, quel est le site de S_n le plus proche de z ?
    - Étant donné un site q_i de S_n, quels sont les sites de $S_n - \{q_i\}$ " les plus proches " de q_i ?
    - Quel est le plus proche voisin de q_i ?
  - La réponse à ces questions est donnée par le diagramme de Voronoï

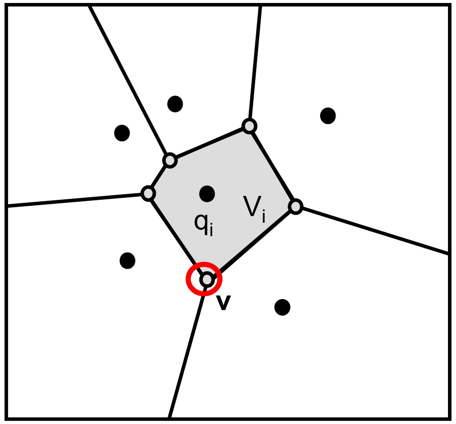
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - Quel est le site le plus proche de Z ?
  - Quels sont les sites " les plus proches " de q_{13} ?
  - Quel est le site le plus proche de q_1 ?

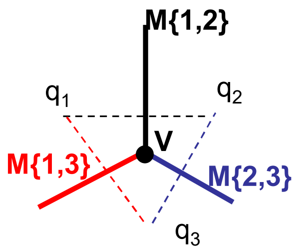


Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - La **cellule** ou le polygone de Voronoï associé au site q_i se note V_i où :



  - v est un sommet de Voronoï, intersection des médiatrices

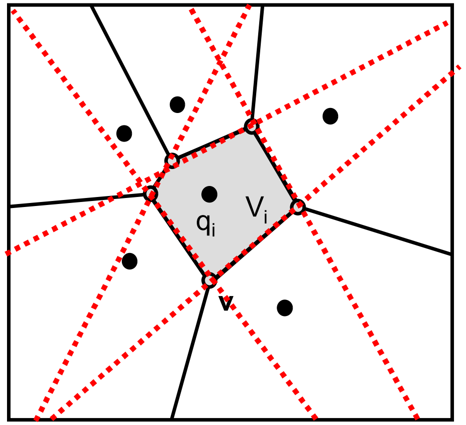


Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï
  - **cellule** ou le polygone de Voronoï associé au site q_i :

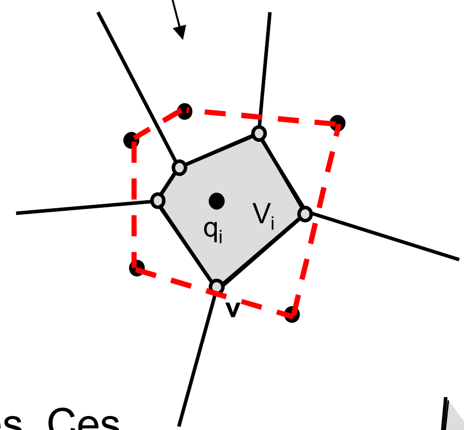
$$Vi = \bigcap_{j \in I - \{i\}} h_{ij}$$

    - C'est donc l'intersection de tous les demi-plans contenant q_i.



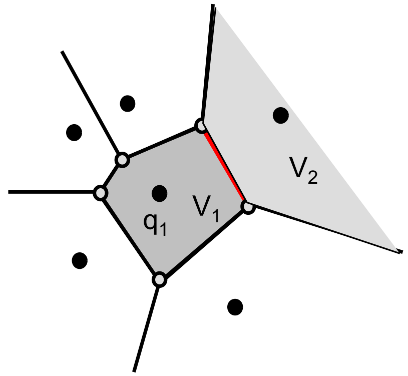
  - V_i est donc la région de E^2 où les points sont plus proches de q_i que tous les autres sites de S_n.

Méthodes applicables aux modèles continus



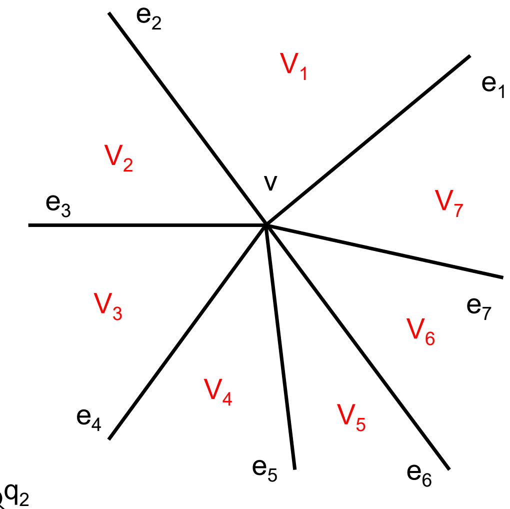
- Diagramme de Voronoï (suite)
  - Propriétés des cellules de Voronoï
    - Quel que soit i $\in$ à I, V_i est convexe

      Preuve : 1 cellule est l'intersection de ½ plans
    - V_i est un polygone, éventuellement non "fermé" constitué d'arêtes. Ces arêtes sont des segments des médiatrices M{i, j}
    - Chaque arête de la frontière d'une cellule est partagée par exactement 2 cellules.



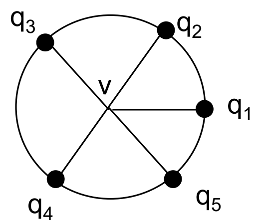
Méthodes applicables aux modèles continus

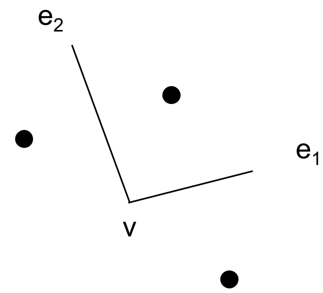
- Diagramme de Voronoï (suite)
  - Propriétés des cellules de Voronoï
    - Chaque sommet v de Voronoï est le point de rencontre d'exactement 3 médiatrices.



__Preuve__

- Soit v le point de rencontre de k médiatrices e_1, …, e_k avec k > 1.
- Les médiatrices sont ordonnées de manière polaire autour de v.
  On peut donc associer une cellule par secteur polaire
- v est donc équidistant de k sites
  - Si k ≥ 4, v est le centre du cercle circonscrit aux k sites. Impossible car les points sont en position générale.
  - Si k < 3, il y a au moins 1 cellule dégénérée (contient 2 sites) et non convexe (le point v ne peut donc exister)
- D'où k = 3



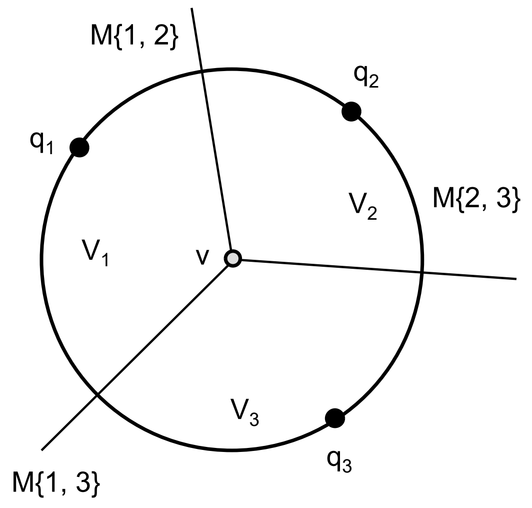


Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï (suite)
  - Propriétés des cellules de Voronoï
    - <u>Corollaire</u>: Chaque sommet v_i de Voronoï est le centre du cercle circonscrit à exactement 3 sites dont q_i.
    - C'est un cercle de Voronoï, noté C(v). Son intérieur est noté $\dot{D}(v)$
    - <u>Théorème:</u> Pour tout sommet v de V_i,

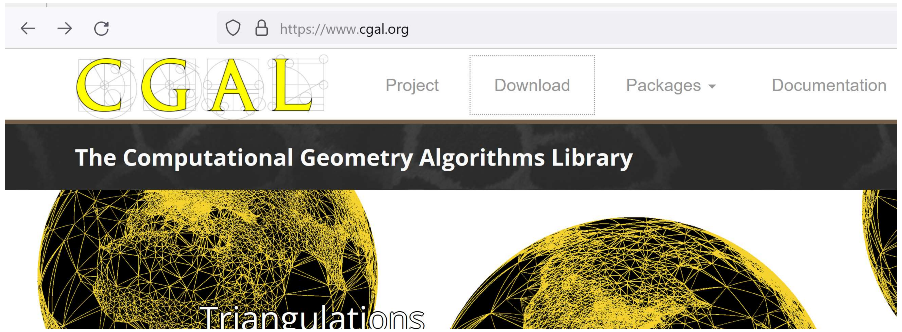
      $\dot{D}(v)$ ne contient aucun autre site

      - S' il existait un site q_4 à l'intérieur de $\dot{D}(v)$ alors q_4 serait plus près de v que v n'est près de q_1, q_2, q_3
      - v appartiendrait alors à V_4 et pas à $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ comme c'est le cas ici.

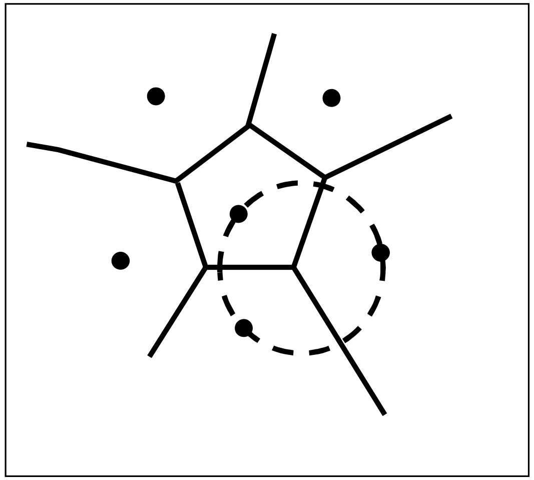


Méthodes applicables aux modèles continus

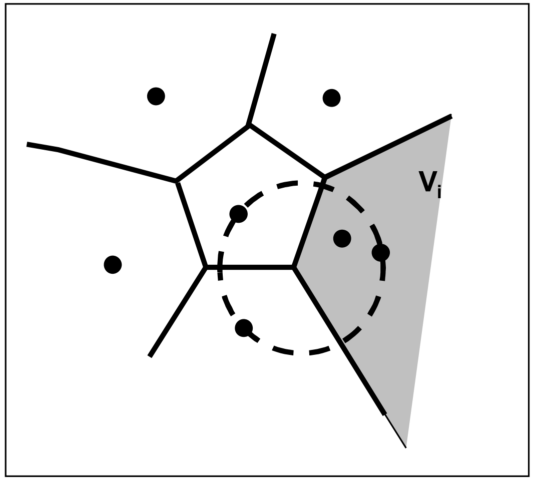
- Diagramme de Voronoï (suite)
  - Propriétés des cellules de Voronoï



https://www.cgal.org/



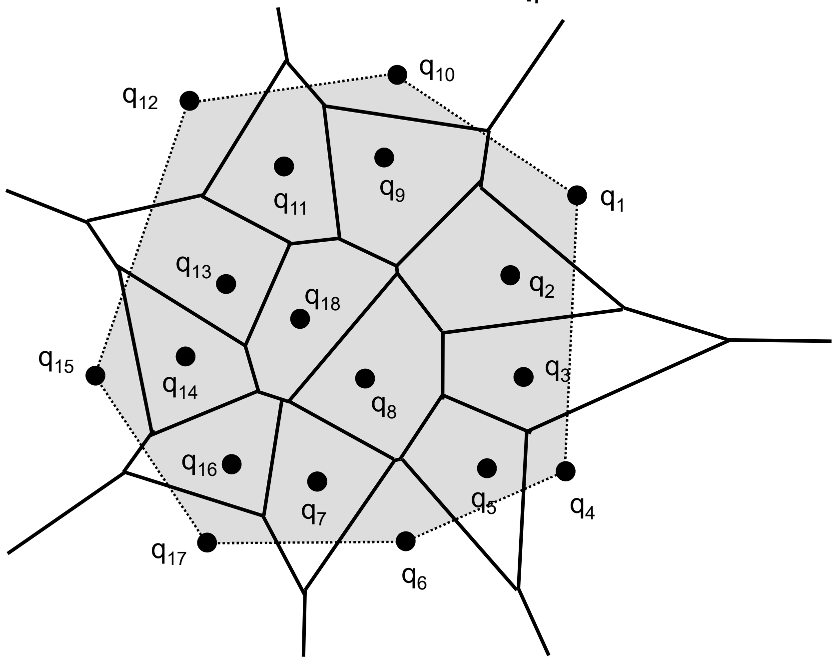
Ce sont des cellules de Voronoï



V_i n'est pas une cellule de Voronoï

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï (suite)
  - Propriétés des cellules de Voronoï
    - Rôle de l'enveloppe convexe
      - V_i est non bornée si et seulement si q_i est sur la frontière de l'enveloppe convexe de S_n.



Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Le diagramme de Voronoï de S_n est l'ensemble des cellules de Voronoï de S_n.

$$DV(S_n) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

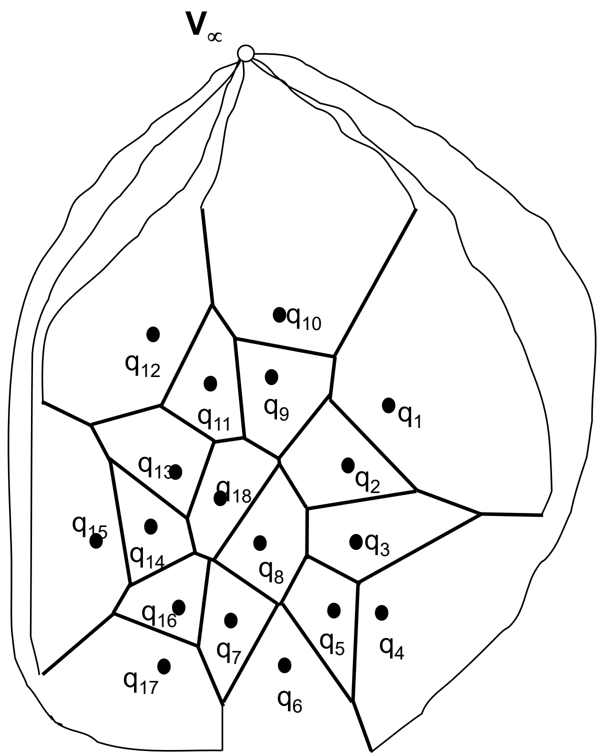
  - C'est donc une subdivision convexe de E^2 comportant n faces.
    - Les faces sont des cellules de Voronoï associées à chaque site
    - Les arêtes sont des segments de médiatrices des sites $q_1,\ldots,q_n$.
    - Les sommets sont de degré 3 (sommets de Voronoï) et sont le centre de cercles circonscrits à exactement à 3 sites.

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Le DV de S_n est un graphe planaire de degré 3 :
    - ayant n faces
    - $2(n - 1) - nb_{ec}$ sommets (nb_{ec} est le nombre de sites sur l'enveloppe convexe)
    - $3(n - 1) - nb_{ec}$ arêtes

Méthodes applicables aux modèles continus

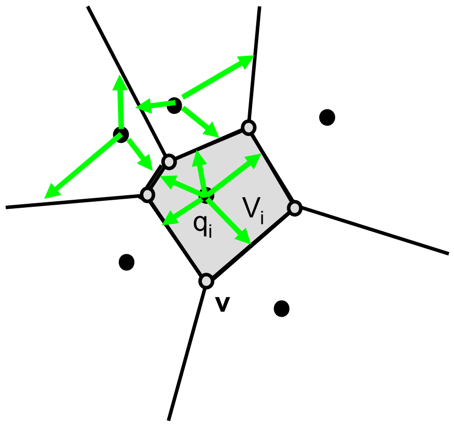
- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Démonstration
    - $n_f + n_s - n_a = 2$ (Euler)
    - $n_s = n + 1$ avec n = nb de sites
      - car toutes les arêtes " infinies " sont reliées à un sommet de Voronoï à l'infini ($\mathbf{v}_\infty$).
    - $n_f = n$ (autant de faces que de sites)
    - D'où $n + n_s – n_a = 1$

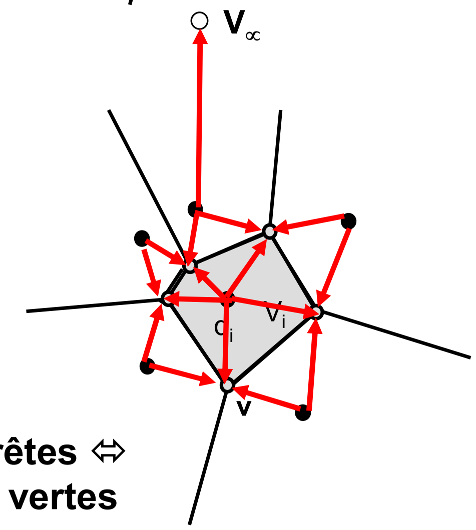


Graphe planaire connecté auquel on peut appliquer la formule d'Euler

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Démonstration (suite)
    - Si on relie par une flèche verte chaque site aux arêtes de la cellule associée
      - Comme chaque arête est commune à deux faces
      - On a 2 n_a flèches vertes
    - Si on relie par une flèche rouge chaque site aux sommets de la cellule associée
      - On a (nb_{ec} + 3 n_s)flèches rouges





1 polygone à *m* sommets a *m* arêtes ⇔ Nb flèches rouges = nb flèches vertes

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - On a donc :
    - $2\ n_a = nb_{ec} + 3\ n_s$
    - $n_s + n – n_a = 1 \Leftrightarrow n_s = 1 – n + n_a$
  - D'où
    - $2\ n_a = nb_{ec} + 3 – 3n + 3\ n_a$
    - D'où $n_a = 3n – nb_{ec} – 3 = 3\ (n – 1) - nb_{ec}$

  - $n_a = n_s + n – 1 \Leftrightarrow n_s = n_a\ - n\ +1$
  - $n_s = 3n – 3 - nb_{ec} – n\ + 1$
  - $n_s = 2(n – 1) – nb_{ec}$

  - Donc le nombre de sommets et d'arêtes ne dépendent que du nombre de sites total (n) et du nombre de sites sur l'enveloppe convexe de S_n ($nb_{ec)}$.

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Algorithmes de construction
    - L'intersection commune d'un ensemble de n ½ plans peut être calculée en O(n log(n)) => pour une cellule de Voronoï

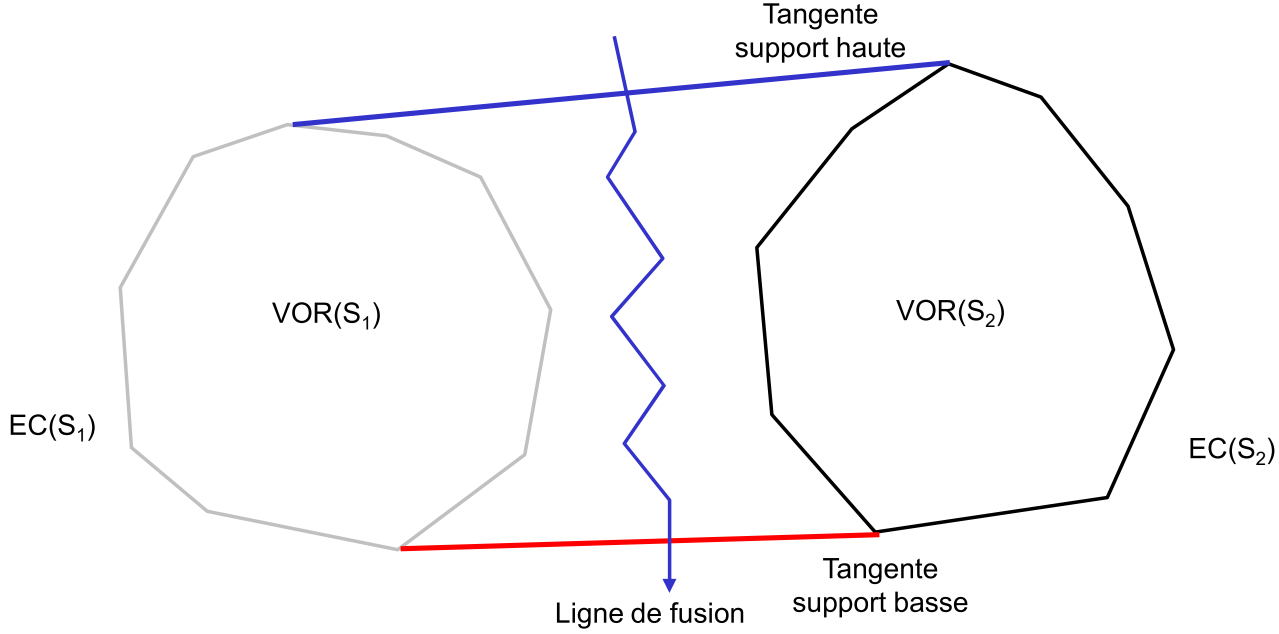
    $\Rightarrow$Si on a n cellules alors complexité $O(n^2 \log(n))$

    - Algorithme de division et fusion (Shamos 75) en O(nlog(n))

    - Algorithme de Fortune (87) : Algorithme de balayage (O(nlog(n) => optimal car pb de tri de n nombres est réductible au problème de calcul de diagramme de Voronoï)
      - Balayage du plan par une ligne horizontale l
      - Information maintenue = parties du diagramme de Voronoï (dont leurs sites sont au dessus de l) ne peuvent être changées par les sites au dessous de l

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Division et fusion : Principe



Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Division et fusion : Procédure VOR(S_n)

    si n = 1

    VOR(S_n) = point

    si n = 2

    VOR(S_n) = médiatrice

    si n = 3

    VOR(S_n) dont le sommet= intersection de 3 médiatrices

    Sinon

    Trier S_n en fonction des x

    $S_1 = S_n / 2$

    $S_2 = S_n – S_1$

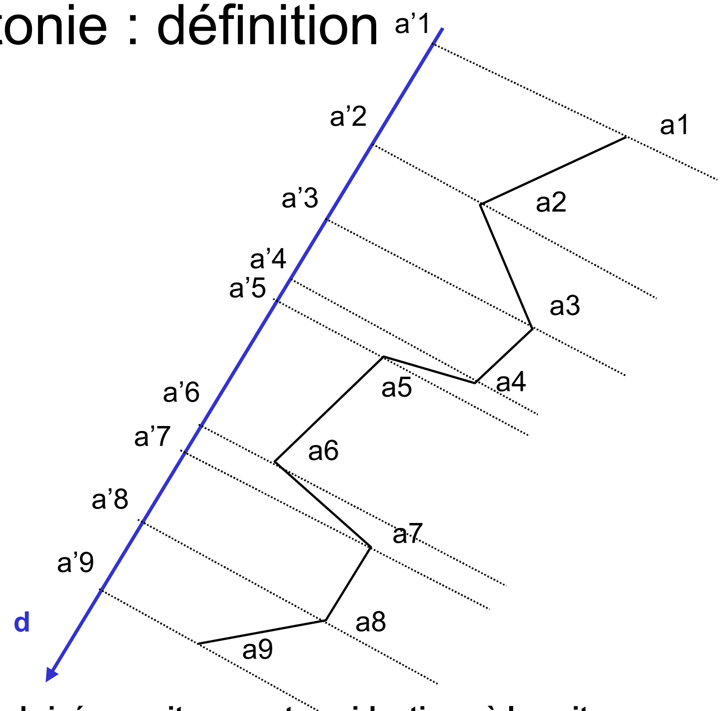
    DV_1 = VOR(S_1)

    DV_2 = VOR(S_2)

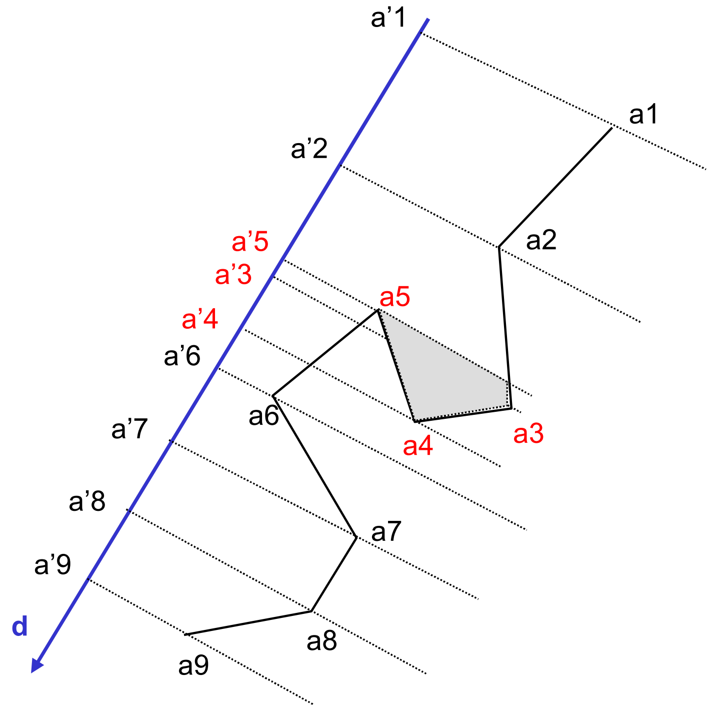
    Fusion(DV_1, DV_2)

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Monotonie : définition



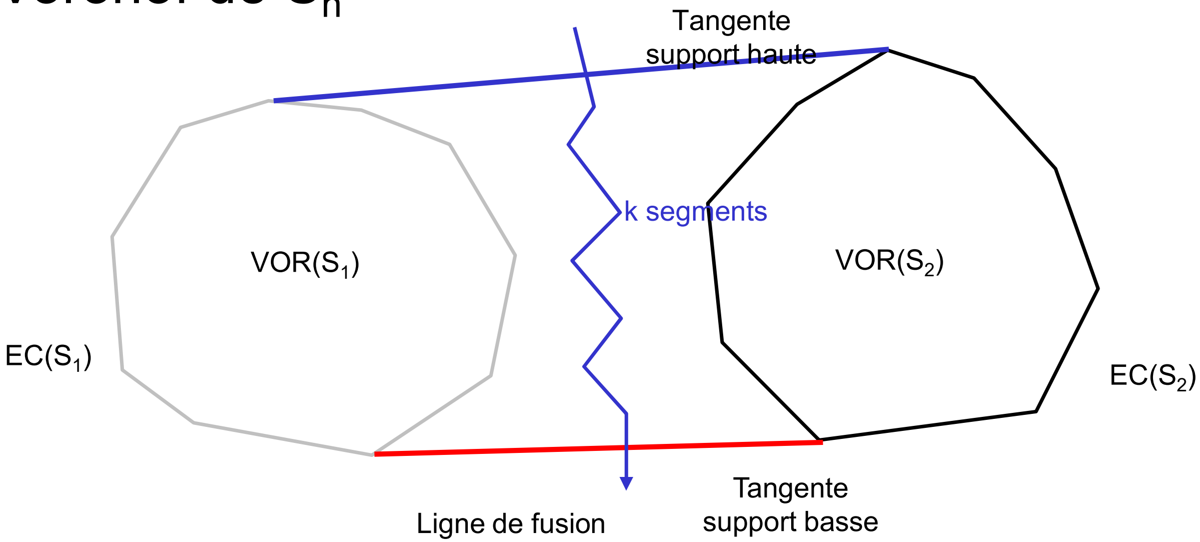
Ligne brisée = suite monotone identique à la suite monotone de ses projetés sur d
⇒Ligne brisée est monotone / d
⇒Ligne brisée non monotone / verticale



Ligne brisée = suite monotone différente de la suite monotone de ses projetés sur d
=> Ligne brisée non monotone par rapport à d

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - fusion

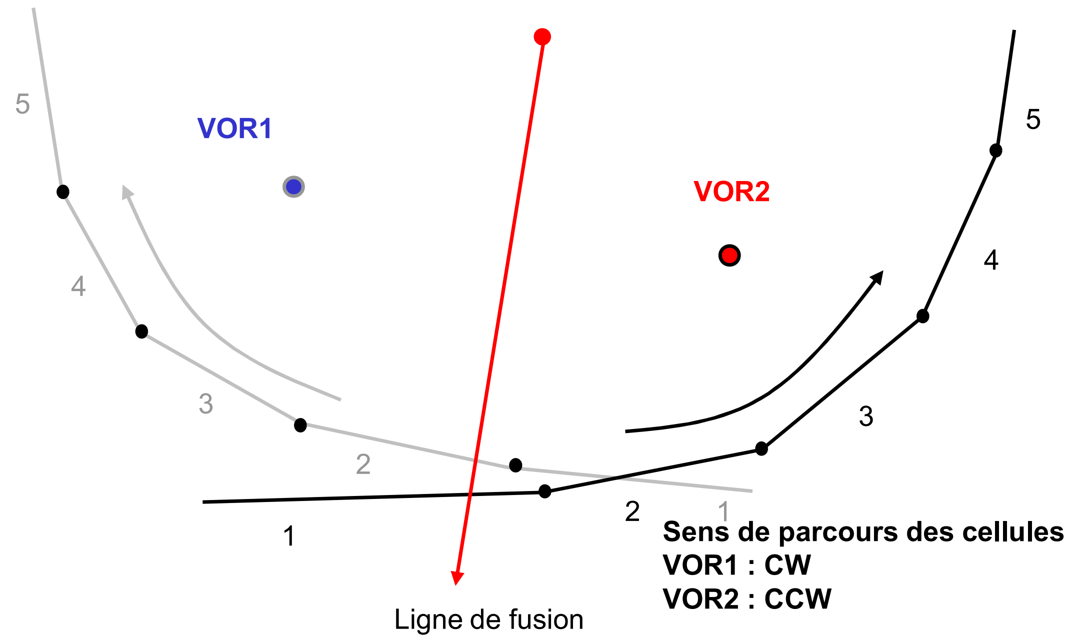


La ligne de fusion est monotone par rapport à la direction Δ (ici, Δ est une droite verticale)

$\Rightarrow$on ne revient jamais en arrière
$\Rightarrow$On ne teste qu'une seule fois chaque cellule de chaque côté
(si k segments => k tests à droite + k tests à gauche = 2k avec k égal au pire à n/2 (n: nb de sites)
$\Leftrightarrow$ 2 * n/2 => n $\Leftrightarrow$ fusion linéaire (O(n)))

Méthodes applicables aux modèles continus

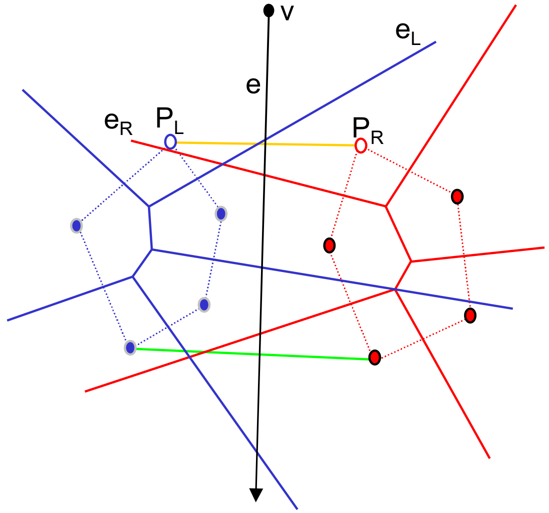
- Diagramme de Voronoï de S_n
  - fusion
    - Sens de parcours des cellules candidates à la fusion pour minimiser le nombre de tests et obtenir une fusion en O(n)



Sens de parcours des cellules de VOR1 et de VOR2
VOR1 : CW
VOR2 : CCW

Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Fusion - Initialisation
    - P_L = pt gauche de l'EC(S_1)
    - P_R = pt droit de l'EC(S_2)
    - e = médiatrice (P_L, P_R) depuis l'infini
    - v = point à l'infini
    - e_L = première arête de la frontière de V(P_L) dans le sens CW
    - e_R = première arête de la frontière de V(P_R) dans le sens CCW



Méthodes applicables aux modèles continus

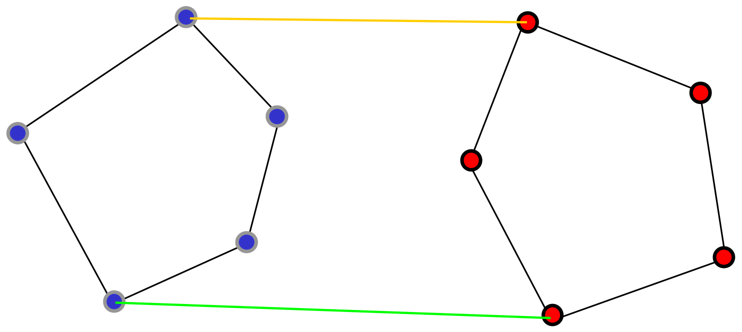
- Diagramme de Voronoï de S_n
  - fusion

```
Répéter
    Tant que I_L=Int(e, e_L) est vide faire e_L = next(e_L)
    Tant que I_R=Int(e, e_R) est vide faire e_R = next(e_R)
    Si I_L est plus proche de v que I_R
        V = I_L
        P_L = site suivant de S_1 (partageant e_L)
        e = médiatrice de (P_L, P_R)
        e_L = dual de e_L dans V(P_L)
    Sinon
        Idem sur S_2

Jusqu'à arriver sur la tangente basse
```

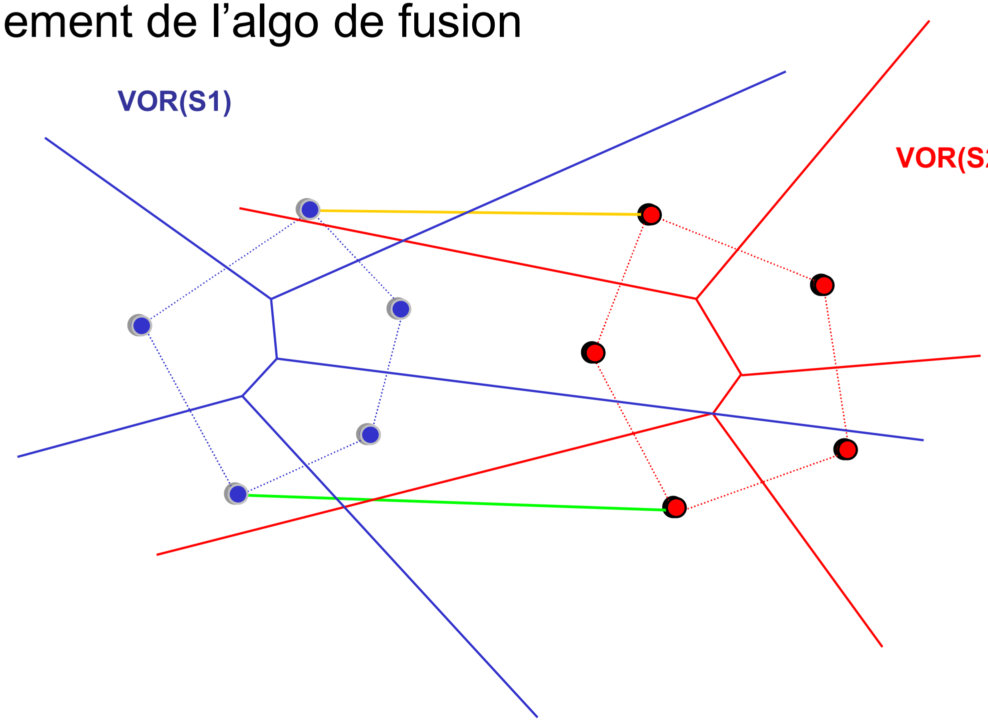
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



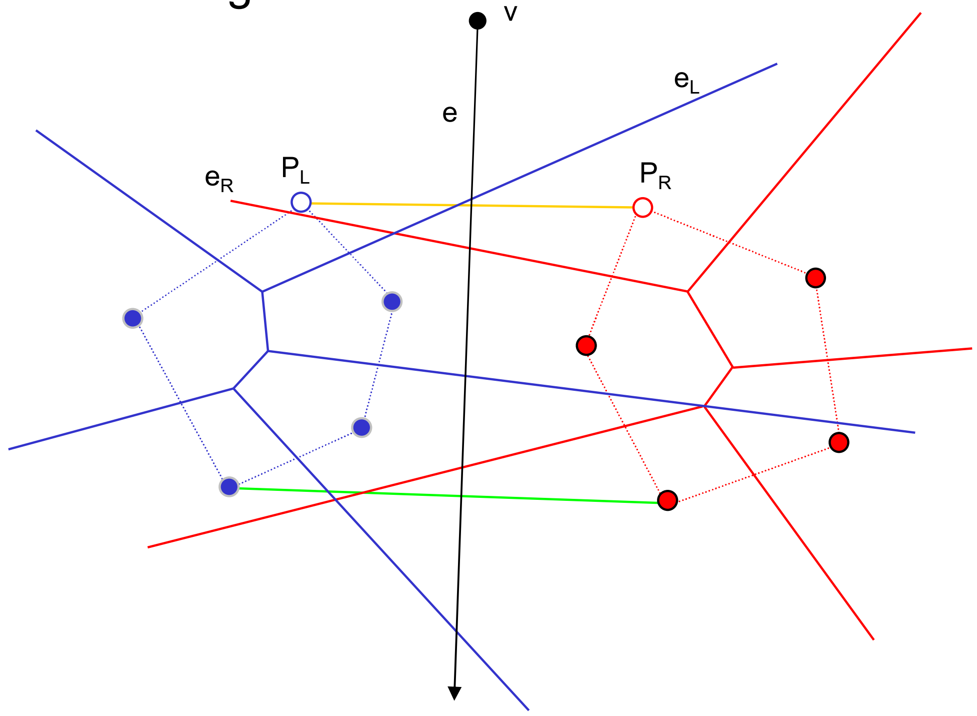
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



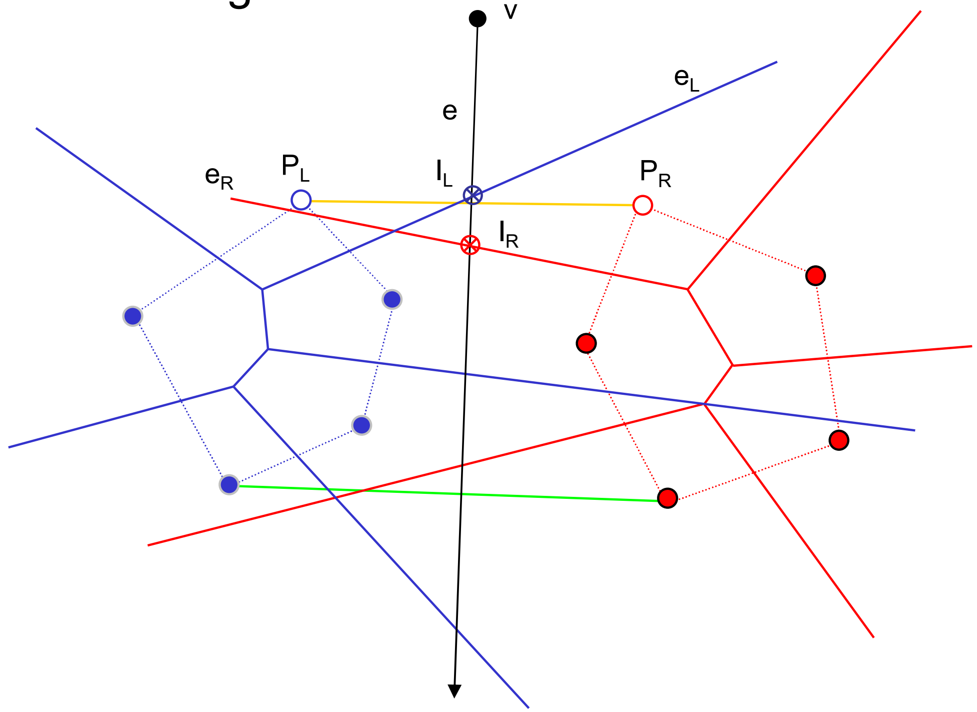
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



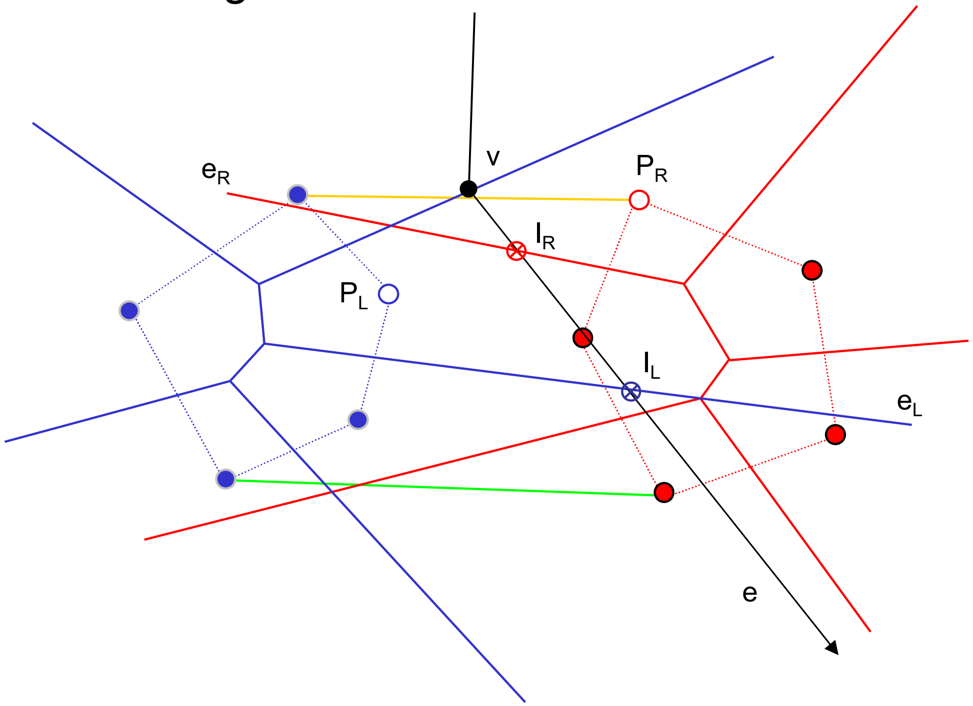
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



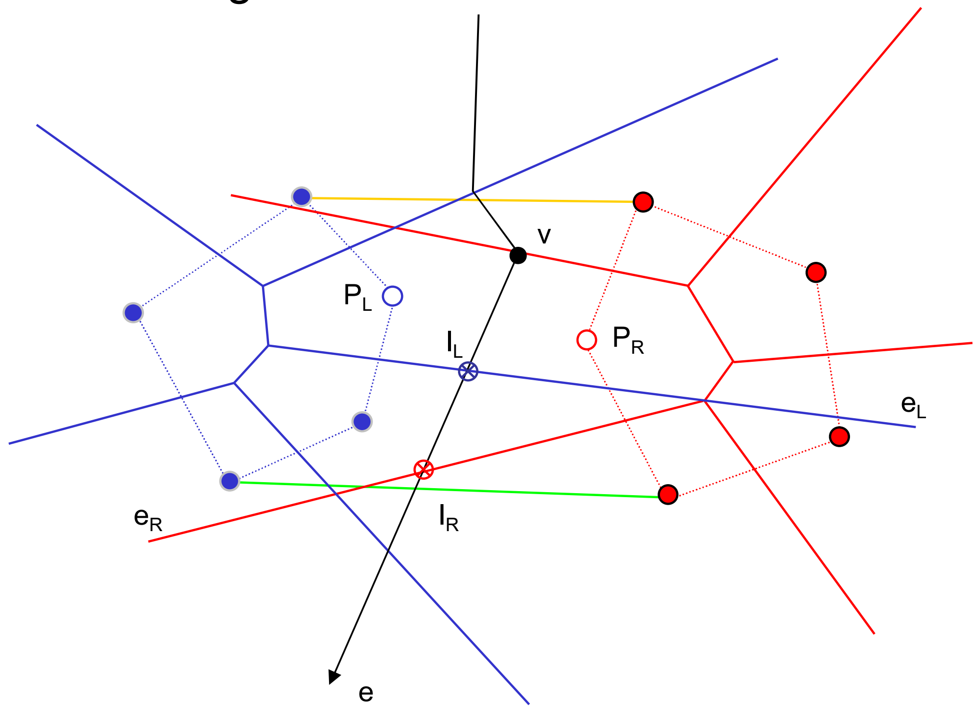
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



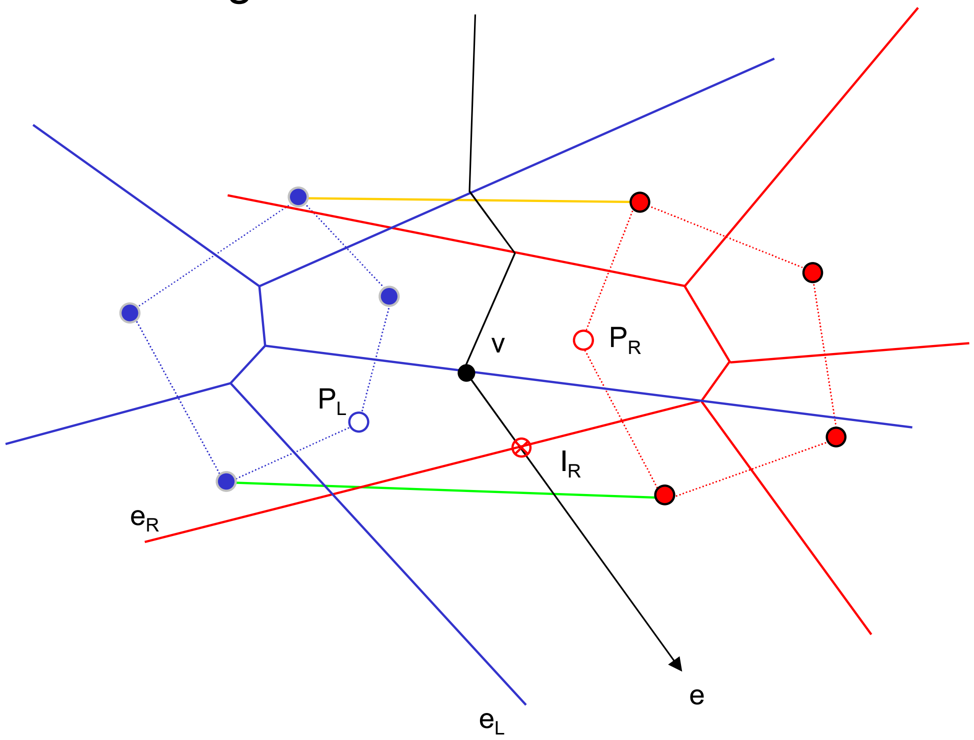
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



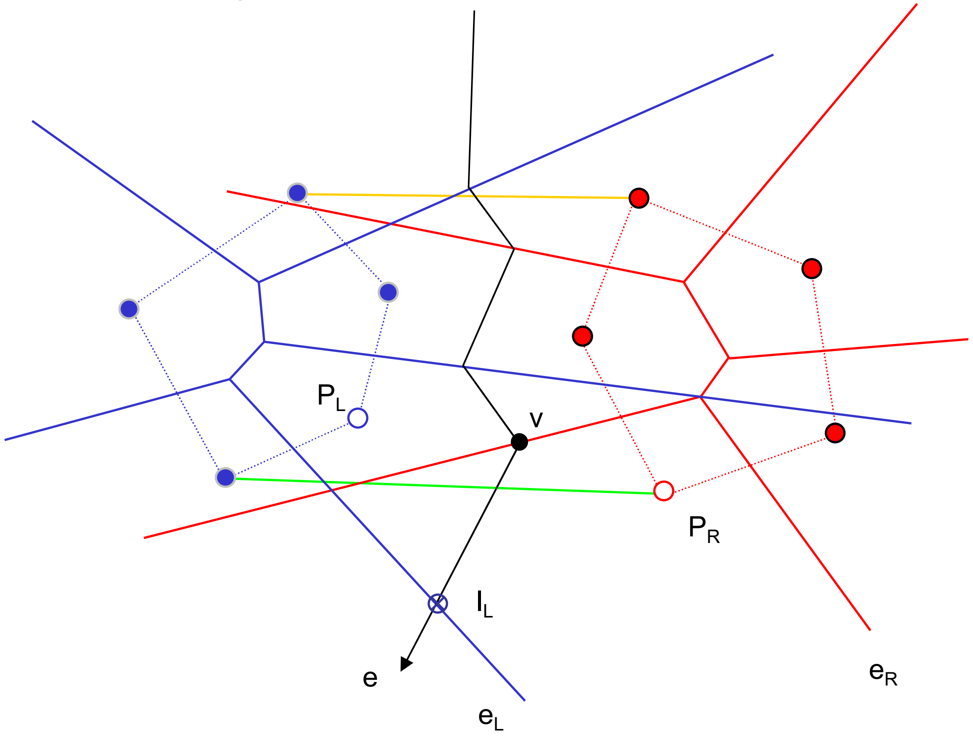
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



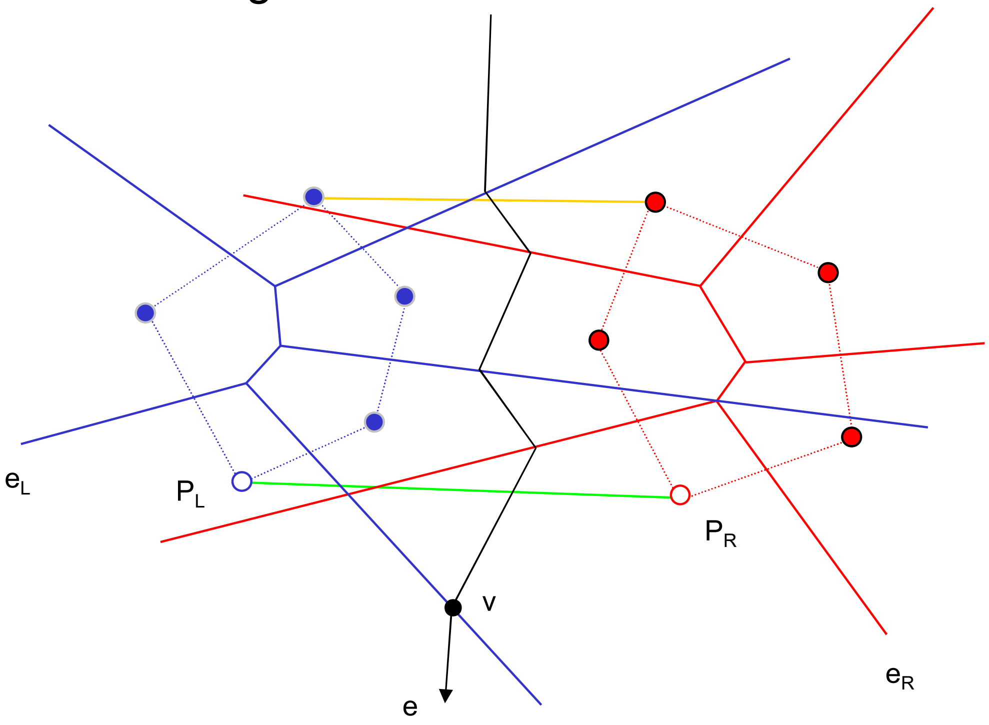
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



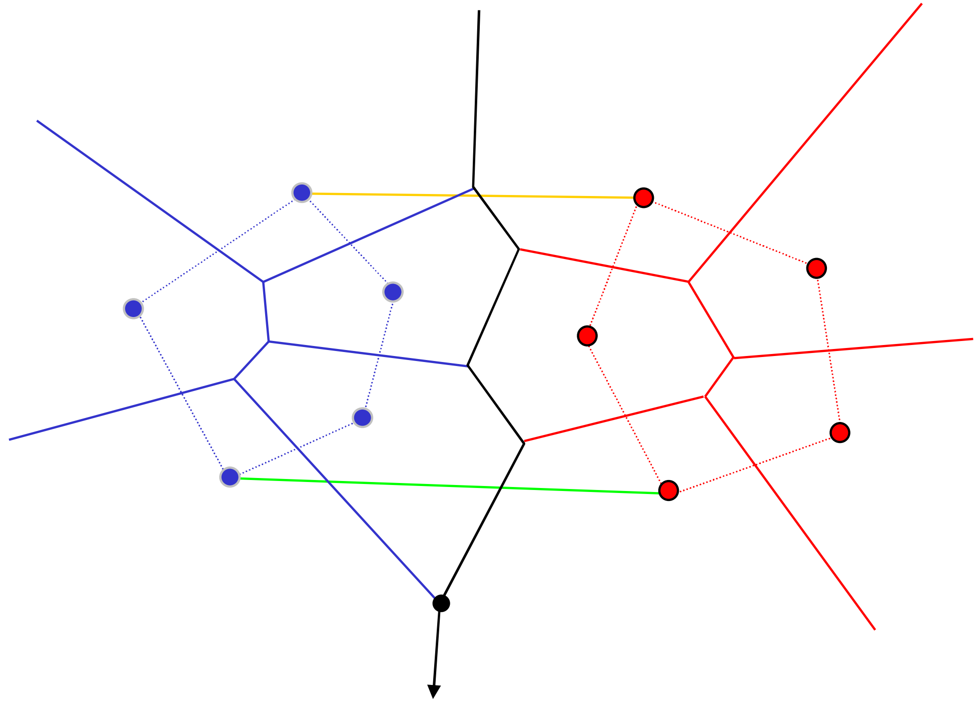
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



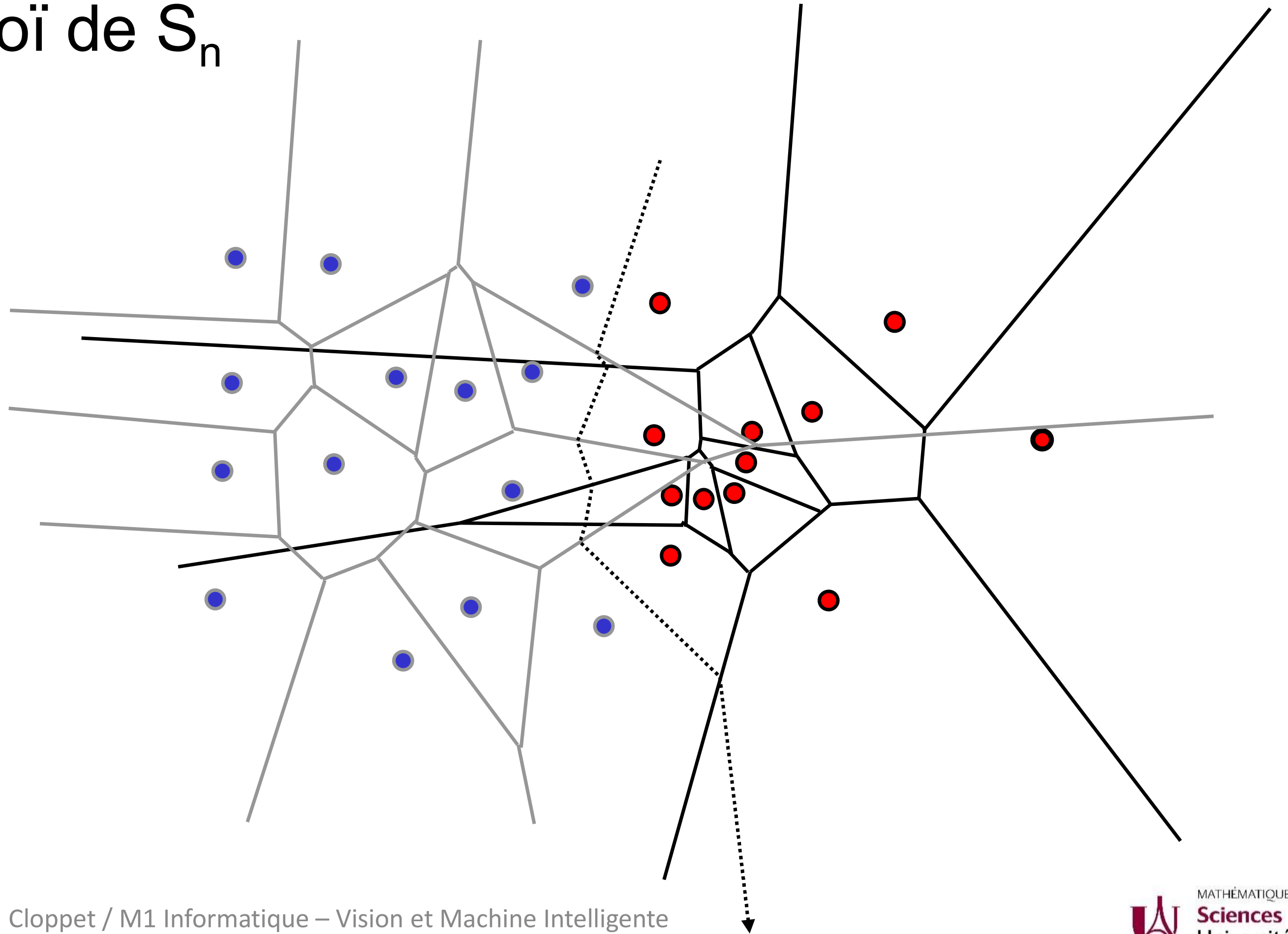
Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - Exemple de déroulement de l'algo de fusion



Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - fusion



Méthodes applicables aux modèles continus

- Diagramme de Voronoï de S_n
  - fusion