SOMMAIRE

Méthodes applicables aux modèles discrets

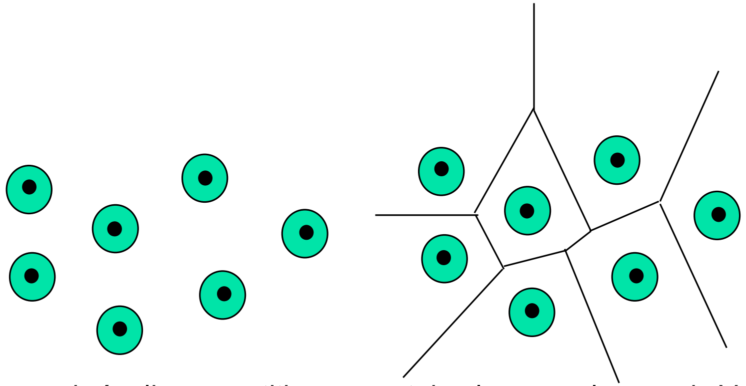
- Définition géométrie discrète
  - Étude des propriétés géométriques d'ensembles de points représentés sur un maillage et produits par la discrétisation d'objets et de courbes du plan analogique (Rosenfeld, 89)
  - Traduction de notions géométriques rigoureusement définies dans l'espace analogique, pour l'espace discret

Méthodes applicables aux modèles discrets

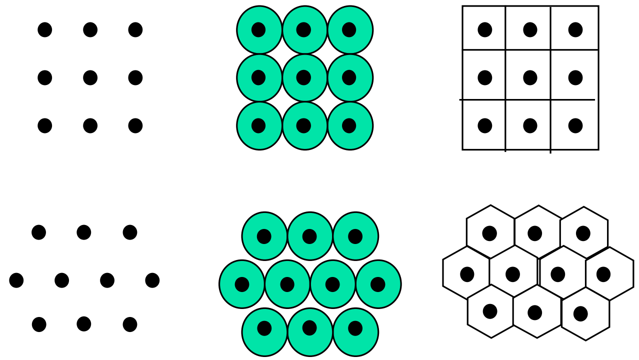
- Espace discret : Pavages et maillages
  - Repose sur un ens dénombrable
  - Obtenu à partir de l'espace analogique en s'appuyant sur la construction de pavages et de maillages
  - 1 élt de l'espace discret = représentant d'1 élt de la surface de pavage (en imagerie = pixel = picture element)
    - Pavage défini par l'ens des points P et des surfaces élémentaires Vp (Voisinage de P) qui leur sont associées
    - Utilisation répétitive des mêmes configurations de base pour Vp + juxtaposition régulière
  - Infinité de pavages du plan envisageables mais des contraintes particulières sont imposées
    - Disposition des points P
    - Forme et régularité des surfaces Vp
    - Propriétés du pavage résultant
    - …

Méthodes applicables aux modèles discrets

- 2 méthodes pour obtenir un pavage
  - Pavage par propagation à partir de germes
    - Positionnement des points P (aléatoire ou régulier)
    - Pts P sont considérés comme les germes de cellules que l'on fait isotropiquement grossir en //
      - Propagation stoppée en chaque point où il y a rencontre entre 2 cellules (lieux de rencontre s'étendent segments de droite ⇔ arêtes des surfaces Vp ou tesselles Vp)
      - Tesselles Vp obtenues sont convexes
      - Pavage unique pour une distribution de germes donnée



Pavage irrégulier = partitionnement du plan en polygone de Voronoï



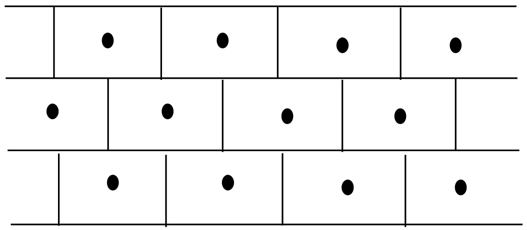
Pavage régulier

Méthodes applicables aux modèles discrets

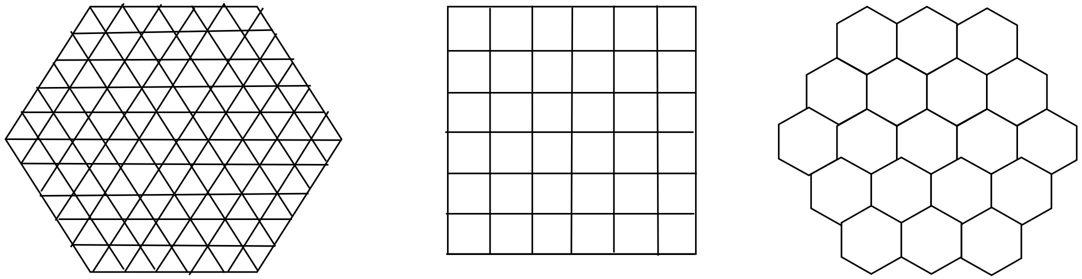
- 2 méthodes pour obtenir un pavage (suite)
  - Pavage par tesselles
    - On génère un modèle de formes (tesselle Vp) auquel on associe un pt P représentatif
    - Forme répétée indéfiniment sur le plan de manière à couvrir une image de taille quelconque
    - Contraintes sur Vp (liées à des caractéristiques, de régularité, d'isotropie, de simplicité, et à la réalisation des surfaces sensibles des capteurs) :
      - polygones convexes et réguliers (côtés et angles égaux)
      - 1 sommet S du polygone ne peut être en contact qu'avec d'autres sommets de polygones et pas avec des arêtes

Méthodes applicables aux modèles discrets

- 2 méthodes pour obtenir un pavage (suite)
  - Pavage par tesselles (suite)



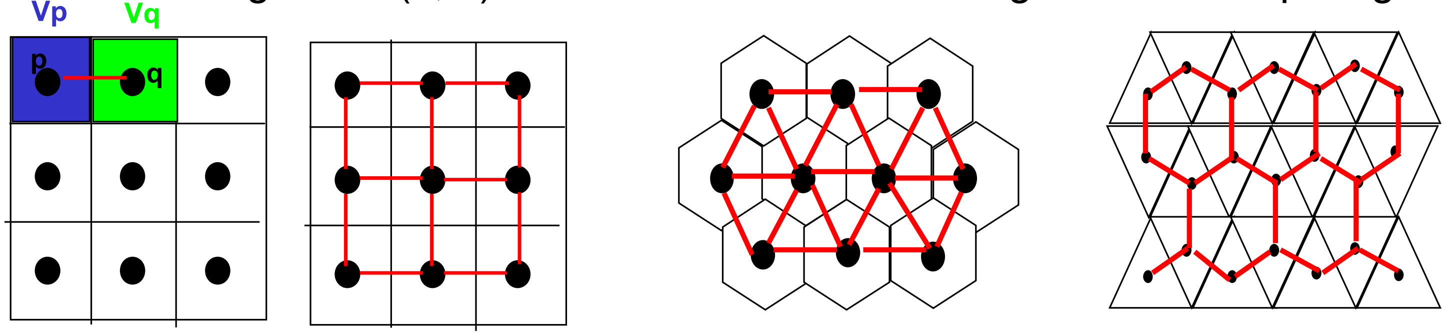
Pavage non autorisé:
Sommets des tesselles ne coïncident
pas avec d'autres sommets



Pavages autorisés:
par triangles, carrés , hexagones

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Espace discret : Pavages et maillages (suite)
  - Maillage associé à un pavage
    - A tout point p est associé un point q tels que Vp et Vq ont une arête commune
    - L'ensemble de tous les segments (P,Q) ainsi définis forme le maillage associé au pavage

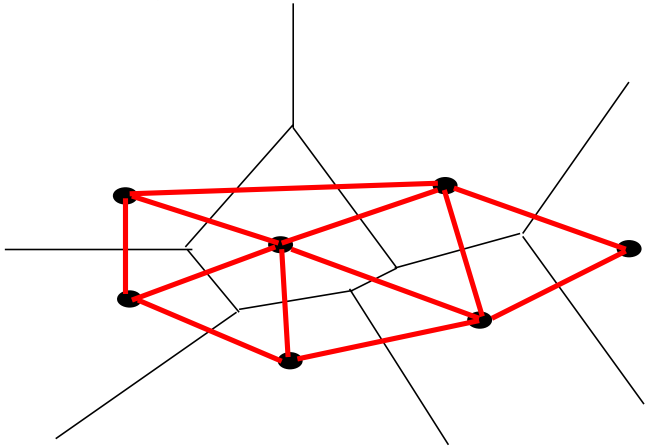


    - Segments de maillage forment un nouveau pavage pour lesquels les points représentatifs des tesselles sont les sommets du pavage initial

☞ pavage et maillage sont des représentations duales du partitionnement du plan

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Espace discret : Pavages et maillages (suite)
  - Maillage associé à un pavage (suite)
    - Cas d'un pavage non régulier
      - Maillage dual de l'ensemble des points P dans le cas de partitionnement par polygones de Voronoï à partir des germes P = Triangulation de Delaunay



    - Voisin de p = points q tels que Vp et Vq ont une arête commune

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Espace discret : Pavages et maillages (suite
  - Maillage associé à un pavage (suite)
    - Codage du pavage
      - Réalisé par le biais du codage du maillage associé
      - Pts d'intersection du maillage = pts p
      - Voisins immédiats de p sont donnés par les arêtes du maillage issues de p
      - A chaque pt p sera associé la valeur de la fonction Intensité I calculée en fonction des valeurs de I sur Vp
      - Pour que les données soient directement manipulables , il est indispensable que l'accès aux voisins se fasse de manière implicite
        - Ex: maillage carré ⇔ structure de données = matrice

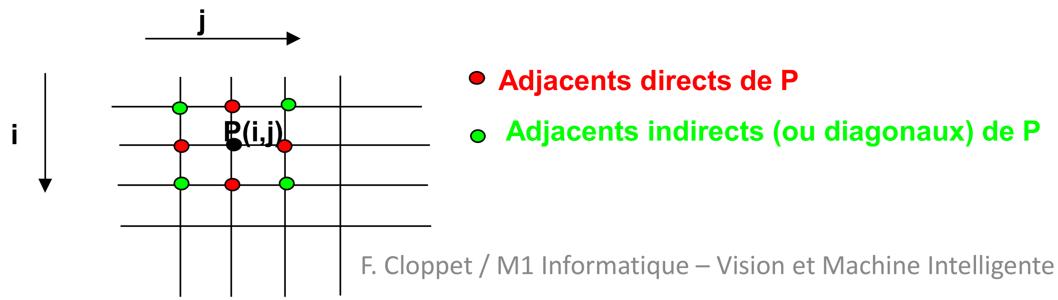
Méthodes applicables aux modèles discrets

- Maillage carré : Voisinage et métriques
  - 4-voisinage de P ou voisins directs de P:
    - 4 pts Q distincts de P qui vérifient d_4 (P,Q) $\leq$1 avec

$$d_4(P,Q)=|i_P-i_Q|+|j_P-j_Q|$$ city block distance

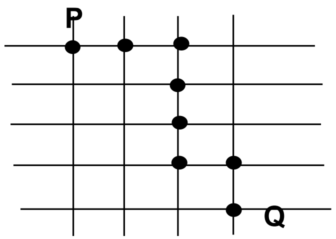
  - 8-voisinage de P
    - 8 pts Q distincts de P qui vérifient d_8 (P,Q) $\leq$1 avec

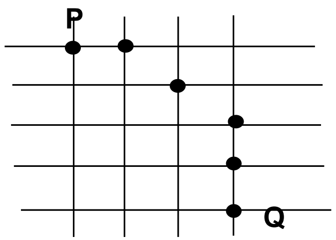
$$d_8(P,Q)=\max(|i_P-i_Q|,|j_P-j_Q|)$$ Chessboard distance



Méthodes applicables aux modèles discrets

- Maillage carré (suite)
  - Chemin connexe:
    - 1 chemin de P à Q est une suite de points du maillage telle que Pi est adjacent à Pi-1 pour $1 \leq i \leq n$
    - Chemin 4-connexe ou 8-connexe





Méthodes applicables aux modèles discrets

- Composante connexe

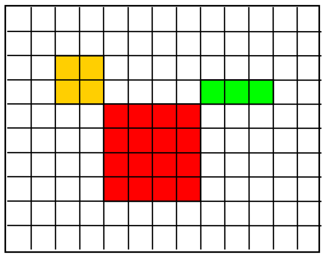
  Soient P et Q, 2 pts de l'image

  Soit S, un sous ensemble de points de l'image contenant P et Q

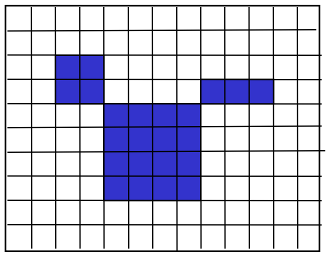
  Tous les points de S sont supposés avoir la même valeur

  ☞P et Q sont connectés dans S ssi il existe un chemin connexe inclus dans S reliant P et Q

- Étiquetage des composantes connexes = association entre les points qui appartiennent à une même composante connexe



Composantes 4-connexes



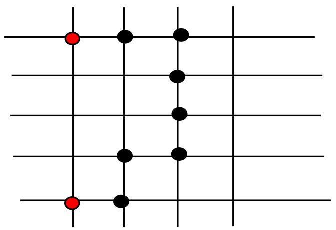
Composantes 8-connexes

Méthodes applicables aux modèles discrets

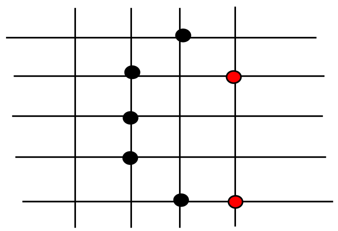
- Maillage carré (suite)
  - Arc

    Soit S, un sous ensemble non vide de points de l'image

    ☞ S est un arc ssi chacun de ses points excepté deux d'entre eux (extrémités de l'arc) possède exactement 2 points adjacents



Arc 4-connexe



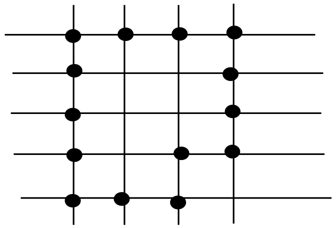
Arc 8-connexe

Méthodes applicables aux modèles discrets

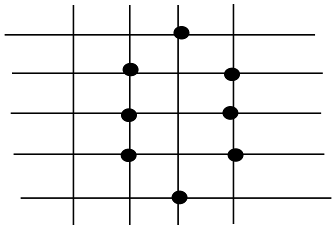
- Maillage carré (suite)
  - Courbe

    Soit S, un sous ensemble non vide de points de l'image

    ☞ S est une courbe ssi S est connexe et si chacun des points possède exactement 2 points adjacents dans S



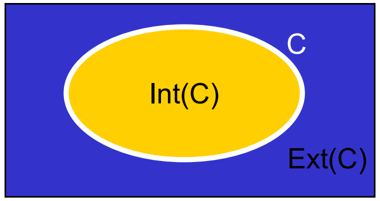
Courbe 4-connexe



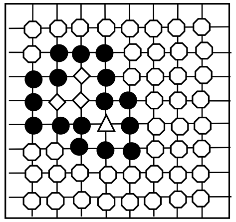
Courbe 8-connexe

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Théorème de Jordan et maillages carrés

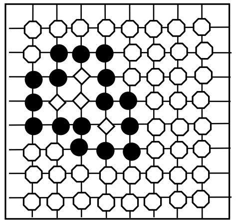


1 courbe C
1 complémentaire formé de Int(C) et Ext(C)



1 courbe 4-connexe
1 complémentaire formé de 3 composantes 4-connexes

=> Théorème non vérifié



1 courbe 4-connexe
1 complémentaire formé de 2 composantes 8-connexes

=> Théorème vérifié

- Rq: pb de transcription dans l'espace discret du théorème n'existe pas pour les maillages hexagonaux

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Formulation discrète du théorème de Jordan
  - Le complémentaire de toute courbe discrète 4-connexe (resp. 8-connexe) est formé de 2 composantes 8-connexes (resp. 4-connexes):

    l'une est l'intérieur de la courbe discrète

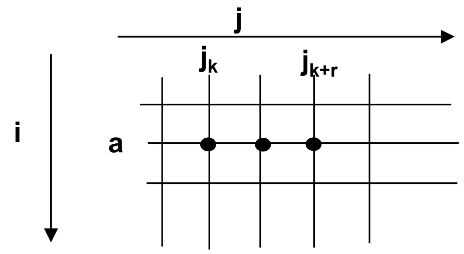
    l'autre l'extérieur
- Intérieur et Extérieur d'une courbe S 4-connexe et 8-connexe
  - Étiquetage préalable des composantes connexes du complémentaire de S pour distinguer fond et trous

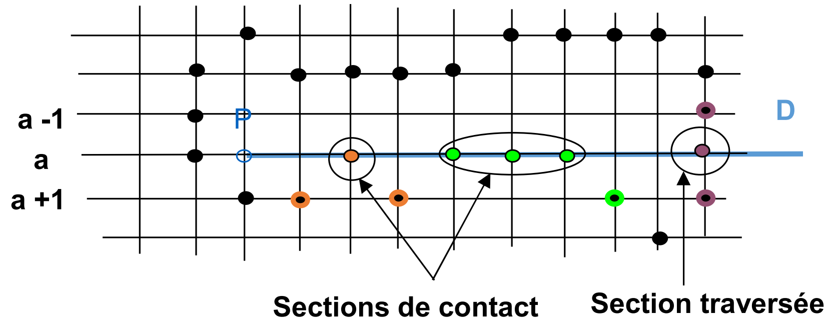
  Ou

  - Tout chemin connexe issu de P (P(a,b) $\notin$ S) coupe nécessairement la courbe S et il suffit de se limiter à la ½ droite horizontale D issue de P et de caractériser les intersections entre D et S

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Intérieur et Extérieur d'une courbe S 4-connexe et 8-connexe (suite)
  - Intersection de D et S est formée de
    - Sections horizontales connexes
      - Ensemble de points connexes de même abscisse
      - Section caractérisée par ses coordonnées extrémales (a , j_k) et (a , j_{k+r})
      - Les points de S qui continuent la courbe de part et d'autre d'une section ont pour abscisse a+1 ou a-1
        - S'ils ont la même abscisse => D et S sont en contact
        - Sinon D traverse S





Mathématiques et Informatique
Sciences
Université Paris Cité

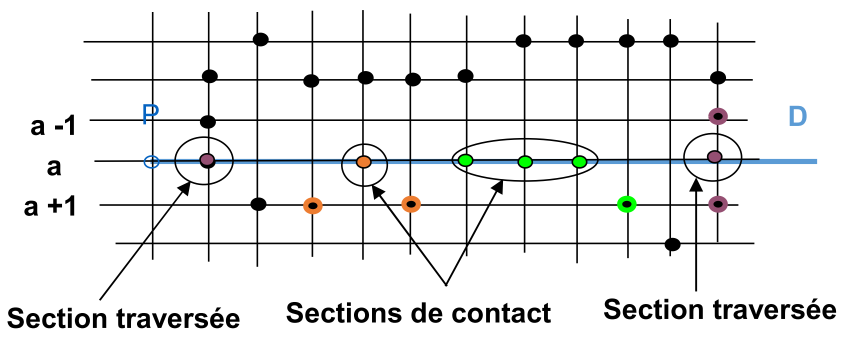
Méthodes applicables aux modèles discrets

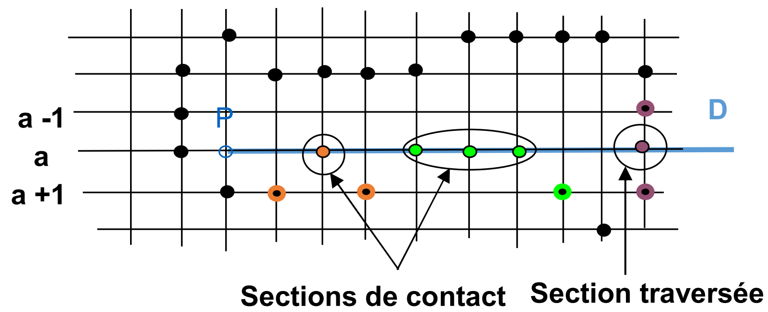
- Intérieur et Extérieur d'une courbe S 4-connexe et 8-connexe (suite)
  - Intersection (suite)

    Si le nombre de sections pour lesquelles D traverse S est impair

    $\Rightarrow$P est à l'intérieur de S

    Sinon P est à l'extérieur de S

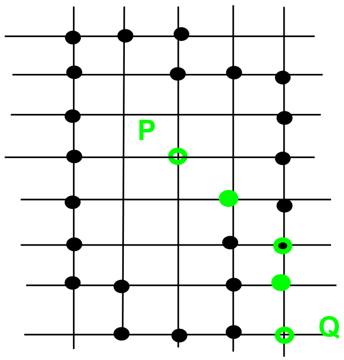




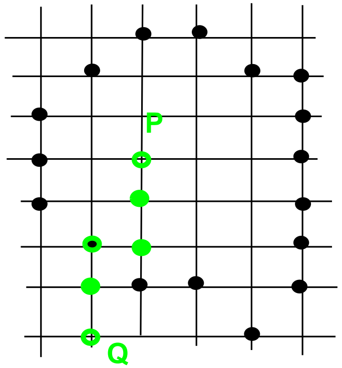
Méthodes applicables aux modèles discrets

- Propositions complémentaires liées au théorème de Jordan

  - Si S est une courbe 4-connexe (resp. 8-connexe), tout chemin 8-connexe (resp. 4-connexe) reliant un point de l'intérieur de S à un point de l'extérieur de S contient au moins un point de S



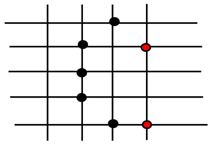
Chemin connexe reliant l'int et l'ext d'1 courbe 4-connexe

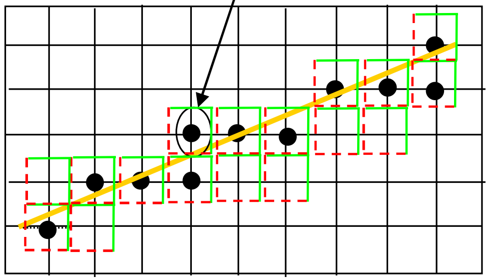


Chemin connexe reliant l'int et l'ext d'1 courbe 8-connexe

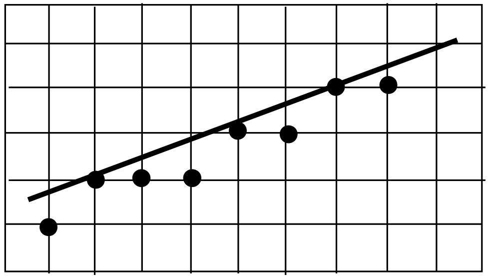
  - Tout point d'une courbe S est adjacent (au sens de la connexité du complémentaire de S) à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe

Méthodes applicables aux modèles discrets





- Concepts géométriques discrets
  - Segment de droite discret
    - Plusieurs méthodes pour obtenir un segment de droite discret à partir d'un segment analogique
      - Plus proche voisin discret (pavé semi-ouvert)
        - Pb: composante 8-connexe n'est pas nécessairement un arc
      - Plus proche voisin discret d'un même côté
        - On retient les points discrets situés du même côté du segment analogique chaque fois que celui-ci coupe une arête du maillage
        - Arc discret 8-connexe

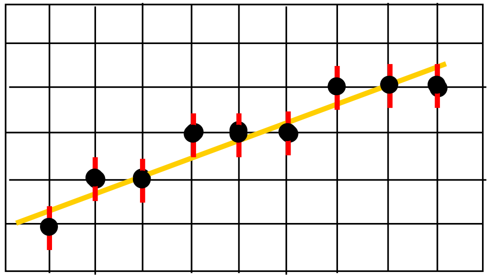


Méthodes applicables aux modèles discrets

- Plusieurs méthodes (suite)
  - Plus proche voisin selon une direction du maillage
    - permet d'obtenir un arc 8-connexe positionné de manière équitable par rapport au segment analogique
    - Si pente du segment analogique ($-1 \leq p \leq 1$) => 1 pixel sur chaque verticale

A chaque point P du maillage est associé le segment vertical semi-ouvert en bas, centré en P et de longueur 1

Tout point du segment analogique, qui appartient à un tel segment de centre P définit le point P sur le segment discret



Méthodes applicables aux modèles discrets

- Segment de droite discret (suite)
  - Algorithme naïf

    Supposons
    - int Round(float x){
      return((int)(x+0,5));
      } //associe à x la partie entière de x+0,5
    - p = dy/dx la pente réelle de la droite D

```
void dessin_droite(int x0, int y0, int dx, int dy, unsigned char couleur){
  int x,y,i;
  float p =(float)dy/dx;      //pente de la droite
  for(i=0; i<dx;i++){
     x = x0+i;
     y = Round (y0 + p*i);
     Putpixel(x,y,couleur);
  }
}
```

☞ pb : multiplication en virgule flottante + arrondi + addition pour chaque pixel

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Segment de droite discret (suite)
  - Algorithme incrémental de base
    - Calcul de chaque pixel à afficher en fonction du précédent

$y_i = y_0 + p * i \Leftrightarrow y_{i+1} = y_0 + p * (i + 1) = y_0 + p * i + p$

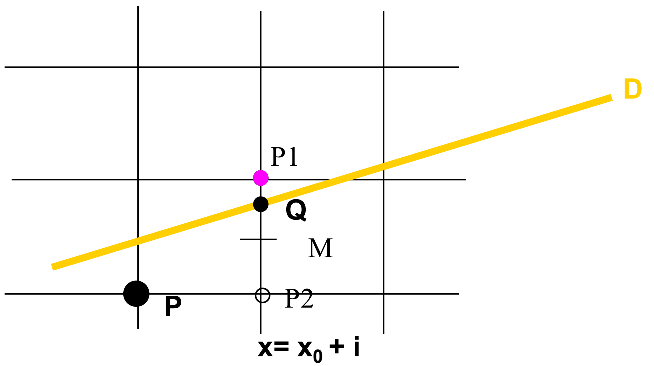
$y_{i+1} = y_i + p$

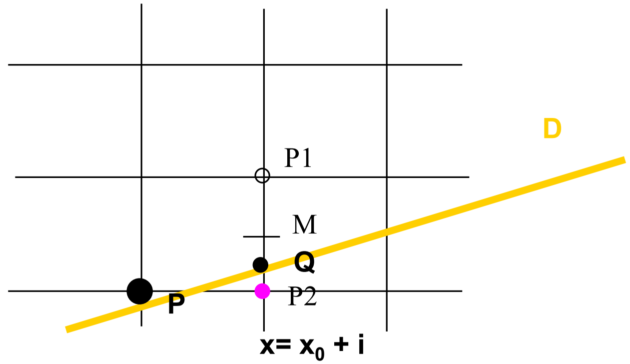
```
void algo_incrémental(int x0, int y0, int dx, int dy, unsigned char couleur){
   int x= x0;
   float y = y0;
   float p =(float)dy/dx;       //pente de la droite
   int   x1 = x0 + dx;
   for(x=x0; x<x1;x++){
      Putpixel(x,Round(y),couleur);
      y+=p; //stockage de y+1 dans la variable y
   }
}
```

☞ multiplication en virgule flottante (le + coûteux) à chaque étape est supprimée mais il reste une addition en virgule flottante et un calcul d'arrondi

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Segment de droite discret (suite)
  - Algorithme du point milieu = Algo incrémental de Bresenham
    - Calcul de chaque pixel à afficher en fonction du précédent par des opérations peu coûteuses d'arithmétique entière
    - Pour chaque verticale $x = x_0 + i$, on considère le point d'intersection Q entre la droite D et la verticale
    - Q est sur un segment vertical [P1(x,y1), P2(x,y2)]
    - Soit M le milieu de [P1,P2] => on doit dessiner le pixel centré sur l'extrémité du segment vertical qui se trouve du même côté que Q par rapport à M
      - Si M au dessous de Q=>P1
      - Si M au dessus de Q => P2





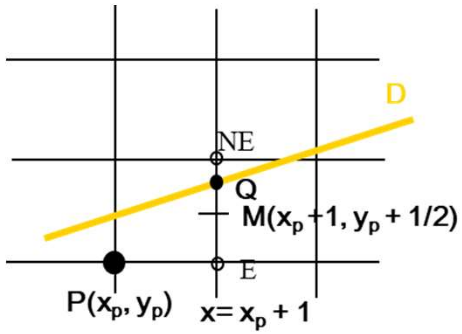
Méthodes applicables aux modèles discrets

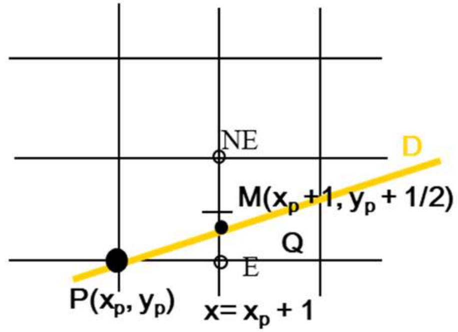
- Segment de droite discret (suite)
  - Algorithme du point milieu - Bresenham (suite)
    - Comment Calculer le pixel (x_{p+1},y_{p+1}) à partir de
    la connaissance du pixel précédent (x_p,y_p) ?
      - 2 possibilités pour ce pixel (x_{p+1},y_{p+1})
        le pixel E (point Est) de coordonnées (x_p+1, y_p)
        le pixel NE (point Nord-Est) de coordonnées (x_p+1, y_p+1)
    - Pb se réduit à trouver si M $(x_p +1 , y_p + 1/2)$ est au dessus ou au dessous de Q , M étant le milieu du segment [NE, E]
    - M au dessus ou au dessous de Q ⇔ position de M par rapport à D
    - Position de M par rapport à D ⇔ signe de F(x,y) au point M
    - Soit d_p = variable de décision de même signe que F(x,y) au point M

      $d_p = 2 F(x_p +1 , y_p + 1/2)$

      Si $d_p \leq 0$ =>M est à droite de D => M au dessous de Q
      => on choisit le point NE

      Si $d_p > 0$ => M est à gauche de D => M au dessus de Q
      => on choisit le point E

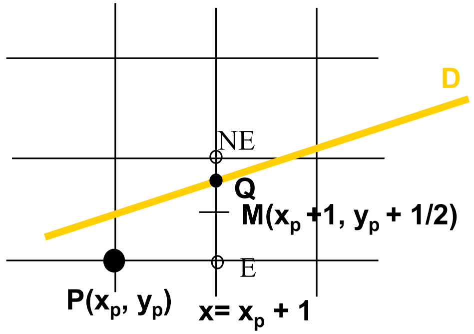




Méthodes applicables aux modèles discrets

- Algorithme du point milieu - Bresenham (suite)
  - Pb : calcul direct de d_p est trop coûteux

    $\Rightarrow$Calcul incrémental de d_{p+1} à partir de d_p



$$d_{p+1} = 2\,F(x_{p+1} + 1\ ,\ y_{p+1} + 1/2)$$

2 cas différents:

Si le point de coordonnées $(x_{p+1}\ ,\ y_{p+1})$ est E

$\Rightarrow E(x_p + 1\ ,\ y_p)$

$\Rightarrow d_{p+1} = 2\,F(x_p + 2\ ,\ y_p + 1/2)$

$\Rightarrow d_{p+1} = d_p + 2\,dy$

Si le point de coordonnées $(x_{p+1}\ ,\ y_{p+1})$ est NE

$\Rightarrow NE(x_p + 1\ ,\ y_p + 1)$

$\Rightarrow d_{p+1} = 2\,F(x_p + 2\ ,\ y_p + 3/2)$

$\Rightarrow d_{p+1} = d_p + 2\,(dy - dx)$

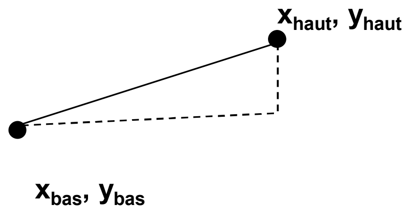
Méthodes applicables aux modèles discrets

- Segment de droite discret (suite)
  - Algorithme du point milieu - Bresenham (suite)

```
Fonction Bresenham ( x0, y0, x1, y1)
  dx = x1 -x0
  dy = y1 -y0
  dp = 2 * dy - dx  // valeur intiale de dp
  x = x0
  y = y0
  AllumePixel(x,y)
  tant que x <x1
    si dp > 0 alors  //on choisit le pt E
      dp = dp + 2 * dy
      x = x+1
    sinon
      dp = dp + 2 * (dy -dx) // on choisit le pt NE
      x=x+1
      y=y+1
    finsi
    AllumePixel(x,y)
  fintantque
```

Méthodes applicables aux modèles discrets

- Algorithme du point milieu - Bresenham (suite)
  - Cas général : segments dont la pente n’est pas comprise entre 0 et 1

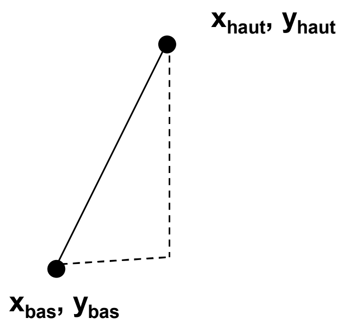


$x_{haut} >= x_{bas}$

dx >= dy

d0 = 2dy –dx

```
//E
dp = dp + 2 * dy
Incrémentation de x
//NE
dp = dp + 2 *(dy-dx)
Incrémentation de x et y
```

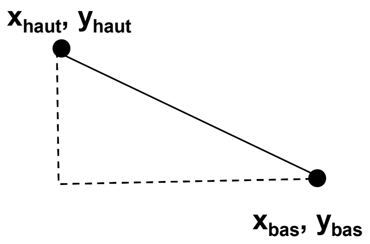


$x_{haut} >= x_{bas}$

dx < dy

d0 = 2dx –dy

```
//E
dp = dp + 2 * dx
Incrémentation de y
//NE
dp = dp + 2 *(dx-dy)
Incrémentation de x et y
```

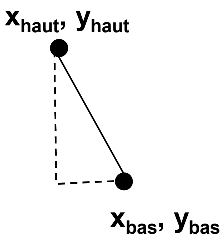


$x_{haut} < x_{bas}$

dx >= dy

d0 = 2dy –dx

```
//E
dp = dp + 2 * dy
Décrémentation de x
//NE
dp = dp + 2 *(dy-dx)
Décrémentation de x
Incrémentation de y
```



$x_{haut} < x_{bas}$

dx < dy

d0 = 2dx –dy

```
//E
dp = dp + 2 * dx
Incrémentation de y
//NE
dp = dp + 2 *(dx-dy)
Décrémentation de x
Incrémentation y
```