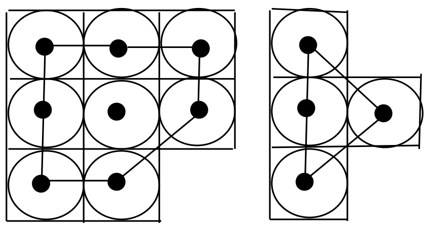
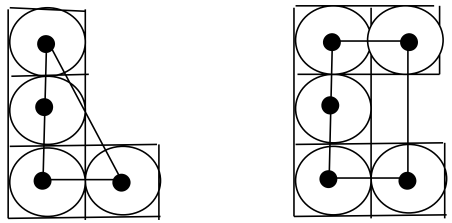
# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Notion de convexité discrète
  - Convexité  fournit une méthode de représentation approchée par enveloppe convexe
  - Définition
    - L'enveloppe convexe construite à partir des points d'une forme E est incluse dans la figure formée par l'union des boules de rayon h/2 (h = pas de discrétisation) et centrés aux points de E



**convexes**



**Non convexes**

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Algorithme itératif
    - Supprimer itérativement les concavités locales
      - 2 types

| | | |
|---|---|---|
| . | . | . |
| 1 | 0 | 1 |
| . | 0 | . |

| | | |
|---|---|---|
| . | . | 1 |
| . | 0 | . |
| 1 | . | 0 |

…

**Type 1 + rotations k $\Pi/2$**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | . | . |
| 1 | 0 | . |
| . | 1 | . |

ou

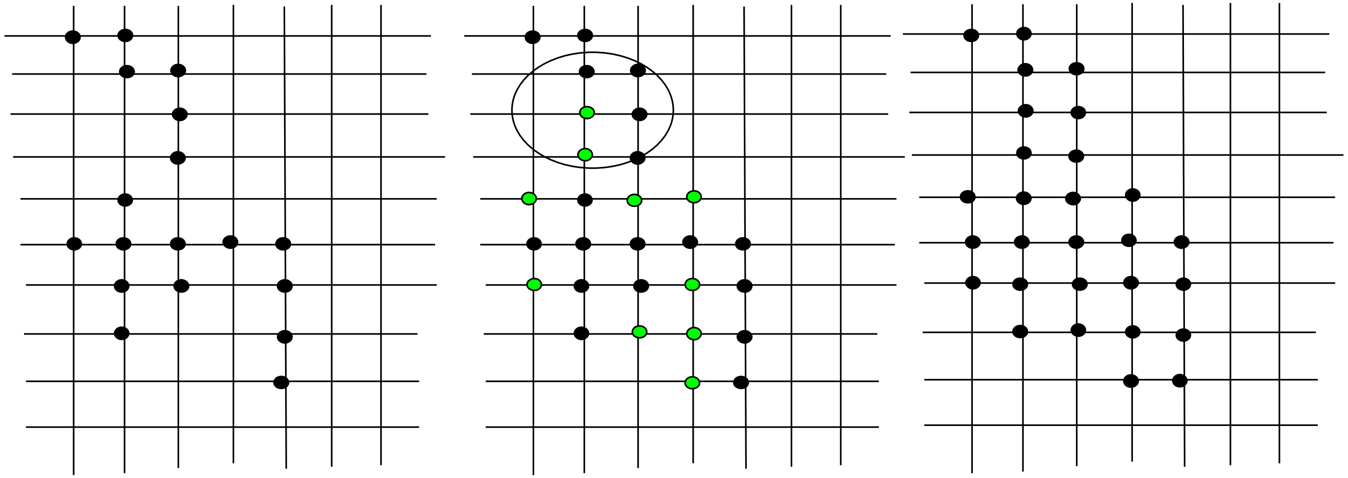
| | | |
|---|---|---|
| . | . | 1 |
| . | 0 | 1 |
| . | 1 | . |

**Type 2 rotations k $\Pi$ /2**

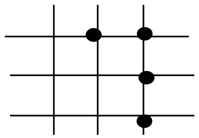
**0 point de fond**
**1 point de la forme E**
**. point objet ou fond**

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Algorithme itératif
    - Supprimer itérativement les concavités locales



1ère itération



**Correspond au type 2**

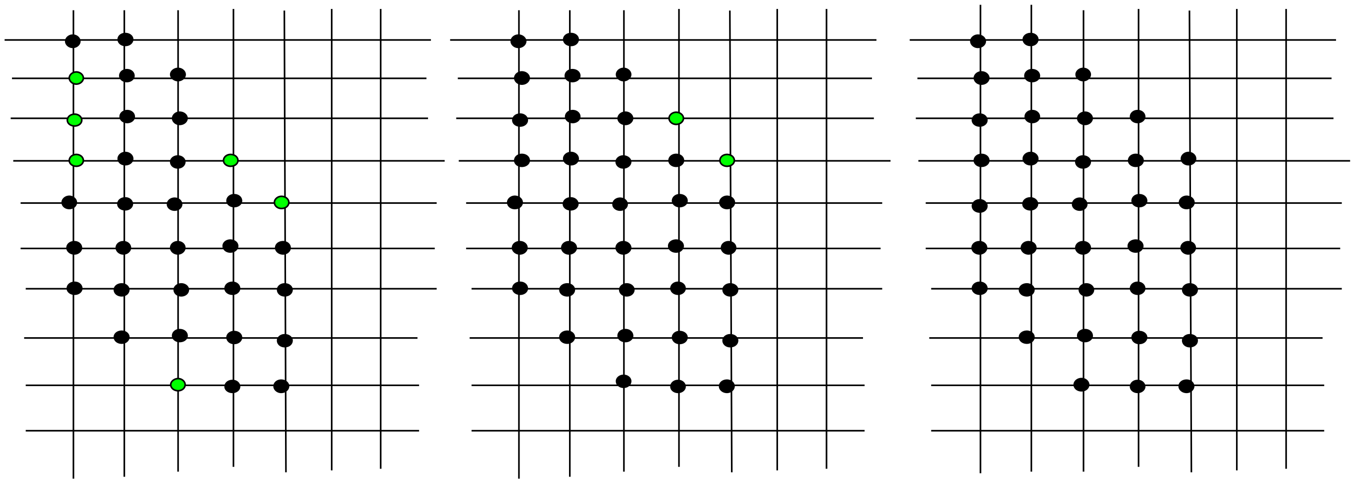
| | | |
|---|---|---|
| . | . | 1 |
| . | 0 | 1 |
| . | 1 | . |

**Avec rotation de $\Pi$ /2**

| | | |
|---|---|---|
| . | 1 | 1 |
| . | 0 | . |
| . | . | 1 |

# Méthodes applicables aux modèles discrets

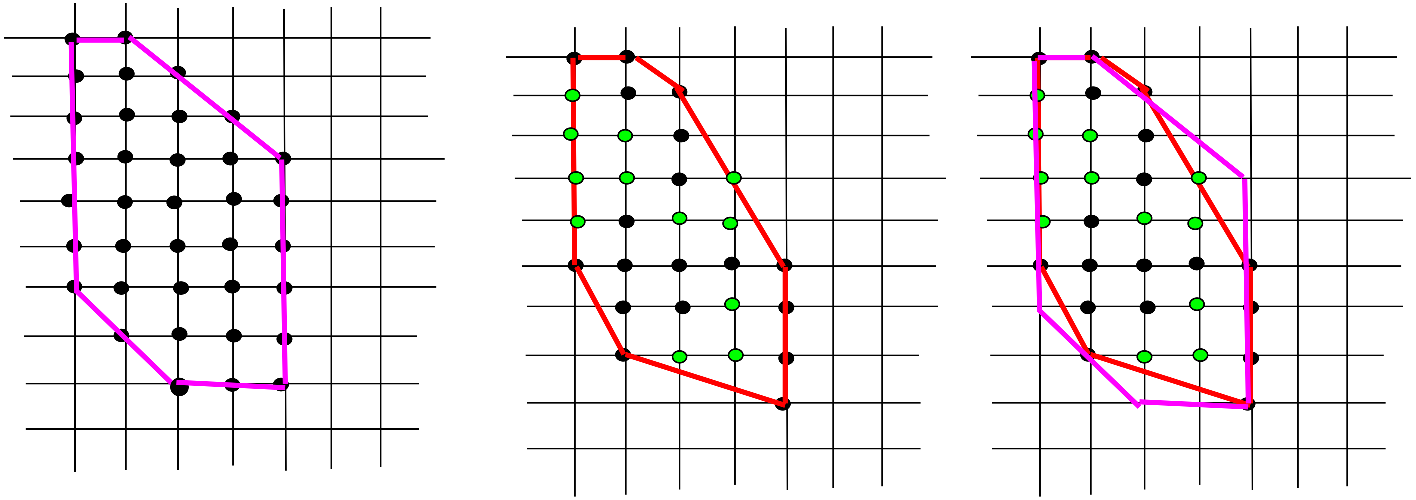
- Enveloppe convexe
  - Algorithme itératif
    - Supprimer itérativement les concavités locales (suite)



**2ème itération** **3ème itération** **Enveloppe convexe**

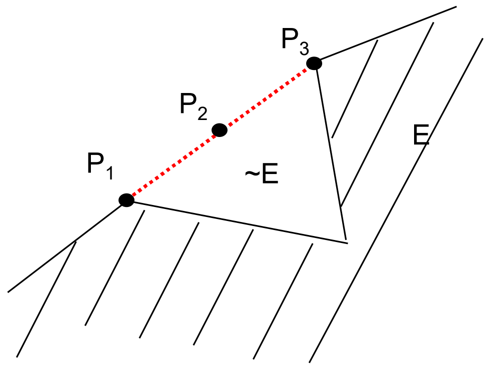
# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Algorithme itératif
    - Supprimer itérativement les concavités locales
      - Remarque : enveloppe convexe obtenue ne coïncide pas toujours avec l'ens des points discrets inclus dans l'enveloppe convexe analogique construite à partir des points de E => surestimation



# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Autres travaux de caractérisation de la convexité discrète
    - Minsky (88)
      - Une composante E est convexe s'il n'existe pas de triplets de points colinéaires ($P_1$,$P_2$,$P_3$) tel que $P_2$ situé entre $P_1$ et $P_3$ et tel que $P_1$ et $P_3$ sont élément de E et $P_2$ élément du complémentaire de E
      - Caractérisation proche de l'homologue analogique (=> définition de la colinéarité dans le monde discret)



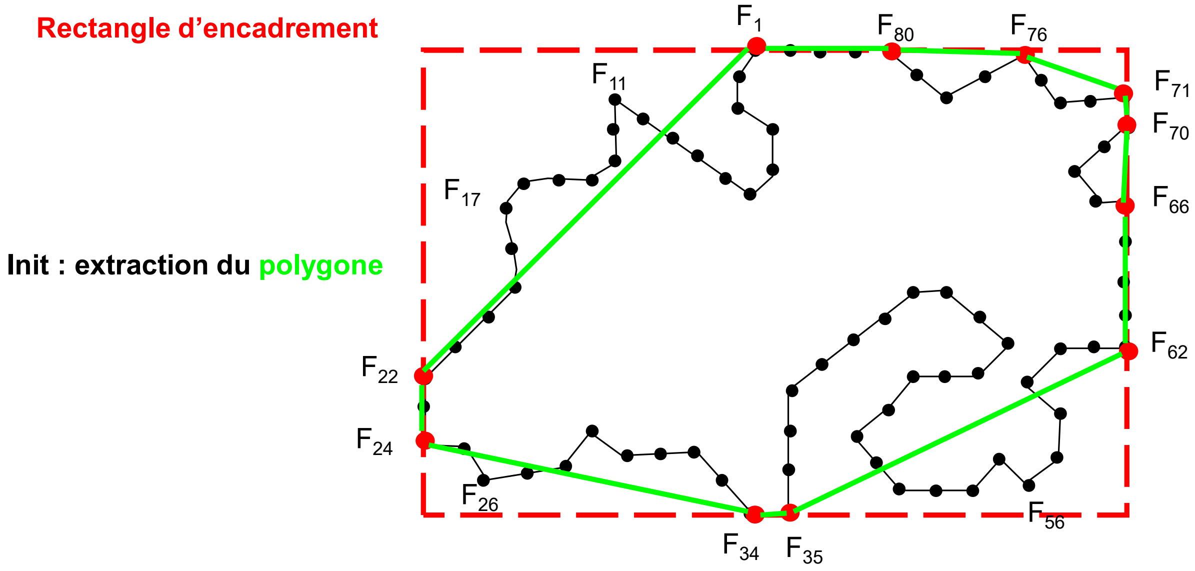

    - Sklansky (72)
      - Une composante connexe E est convexe au sens discret ssi il existe au moins une figure analogique convexe dont E est la discrétisée
      - Caractérisation qui se réfère à l'espace analogique

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Construction de l'enveloppe convexe analogique
    - Travaux de Freeman et Shapira (75 à la suite des travaux de Sklansky)
      - Étant donné une liste de points de contours obtenue par algorithme de suivi de contour = sommets ordonnés d'un polygone ($F_1$, $F_2$, … $F_n$)
      - On extrait de cette liste la sous-liste des points $P_i$ tels que
        - $P_1 = F_1$
        - $P_i$ est un point du rectangle d'encadrement (boîte englobante), et $P_{i-1}$ ou $P_{i+1}$ n'est pas un point du rectangle d'encadrement
        - Étape d'initialisation de l'algorithme : construction du polygone obtenu en connectant les points communs au contour de la composante connexe et à son rectangle d'encadrement

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Construction de l'enveloppe convexe analogique (suite)

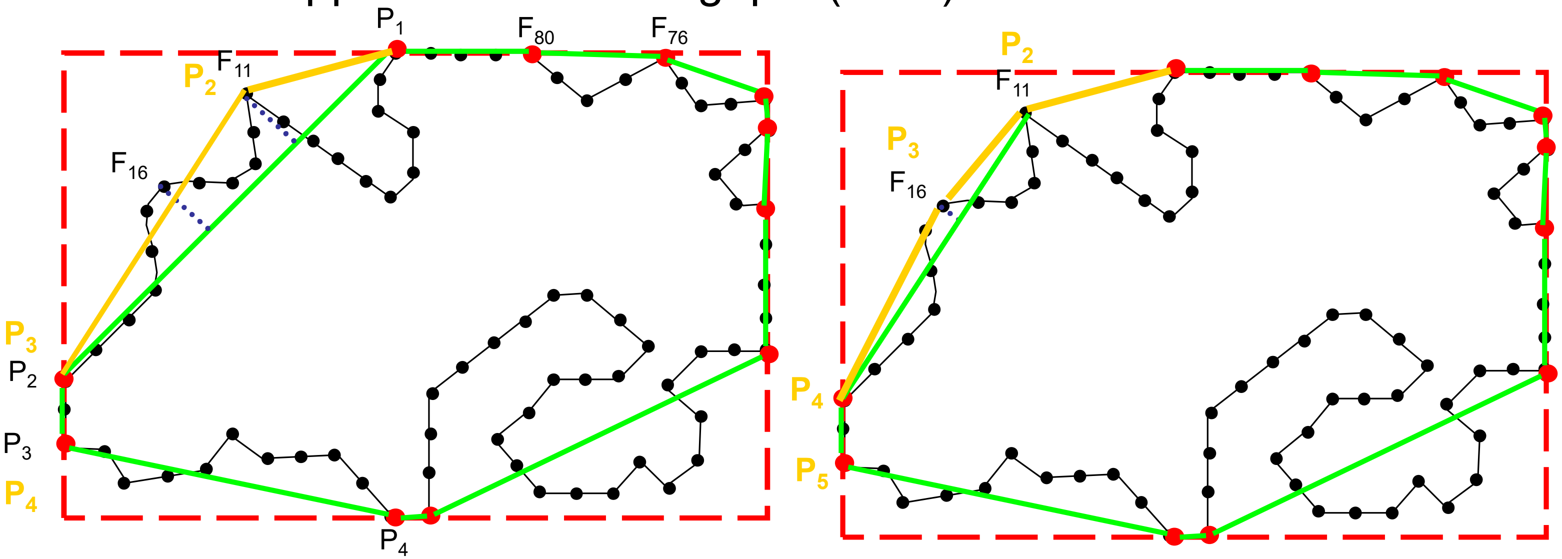



**Extraction de la sous-liste des points $P_i$**

$P_1 = F_1$, $P_2 = F_{22}$, $P_3 = F_{24}$, $P_4=F_{34}$, $P_5 = F_{35}$, $P_6 = F_{62}$, $P_7=F_{66}$, $P_8 = F_{70}$, $P_9 = F_{71}$, $P_{10} = F_{76}$, $P_{11}=F_{80}$, et $P_{12} = F_1 = P_1$

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Construction de l'enveloppe convexe analogique (suite)




**Pour chaque segment $[P_k, P_{k+1}]$**

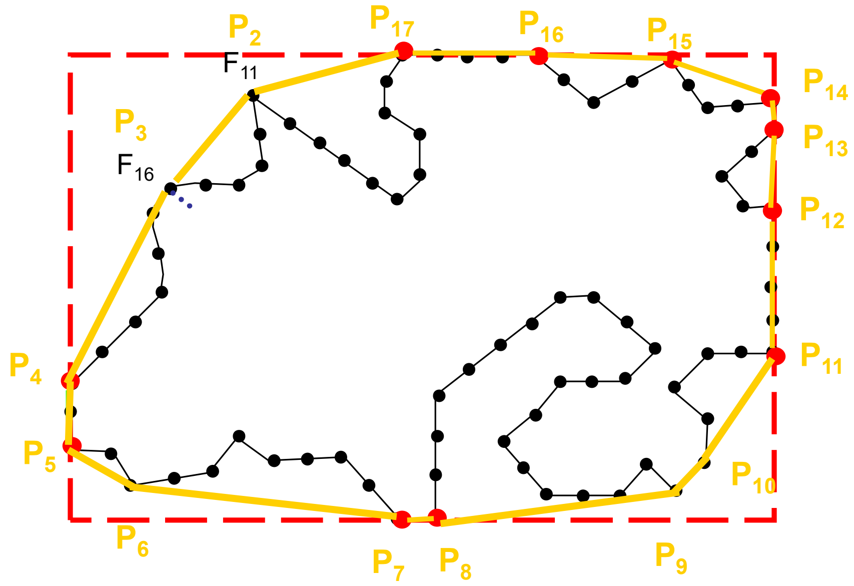
**Calculer la distance des points $F_i$ (situés entre $P_k$ et $P_{k+1}$) à ce segment**

**⇒Le point $F_j$ pour lequel la distance signée est maximale sera un pt de l'enveloppe convexe**

**⇒Le segment $[P_k, P_{k+1}]$ est alors divisé en $[P_k, F_j]$ et $[F_j, P_{k+1}]$**

# Méthodes applicables aux modèles discrets

- Enveloppe convexe
  - Construction de l’enveloppe convexe analogique (suite)
    - La convergence est assurée quand il n’y a plus de points candidats à la décomposition



# SOMMAIRE

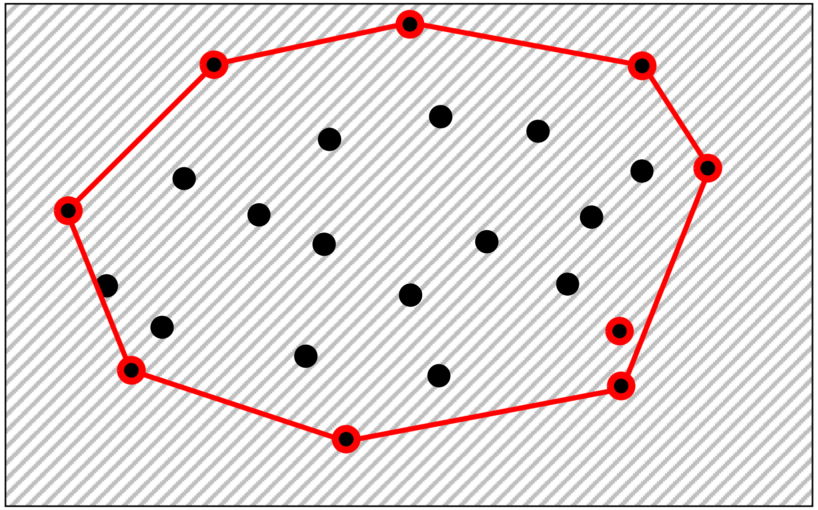
- Informations pratiques
- Introduction
- Notions Algorithmiques
- Méthodes Algorithmiques pour la géométrie
- Modéliser *le monde*
- Méthodes géométriques
  - Notions de base en géométrie
  - Méthodes applicables aux modèles discrets
  - Méthodes applicables aux modèles continus



MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Soit E un ensemble de n points du plan $p_1, \ldots, p_n$,
    Soit l'enveloppe convexe S(E) de E (plus petit polygone convexe contenant E) .
    - L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polygone convexe
    - Tout polygone convexe est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Démonstration de la borne inférieure

    Utilisation des transformations (Ramener 1 problème à un autre problème dont la complexité est connue)

    Soit Pb1 et Pb2 deux problèmes de "taille" n

    - Pb1 se transforme en Pb2 en O(f(n)) si:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
D(Pb_1) \arrow[r, "\text{peut se transformer en } O(f(n)) \text{ en}"] \arrow[d, dashed, "\text{Résolution de } Pb_1"'] & D(Pb_2) \arrow[d, dashed, "\text{Résolution de } Pb_2"] \\
Sol(Pb_1) & Sol(Pb_2) \arrow[l, "\text{peut se transformer en } O(f(n)) \text{ en}"']
\end{tikzcd}
$$

Pb$_1$ est alors transformable (réductible) à Pb$_2$

# Méthodes applicables aux modèles continus

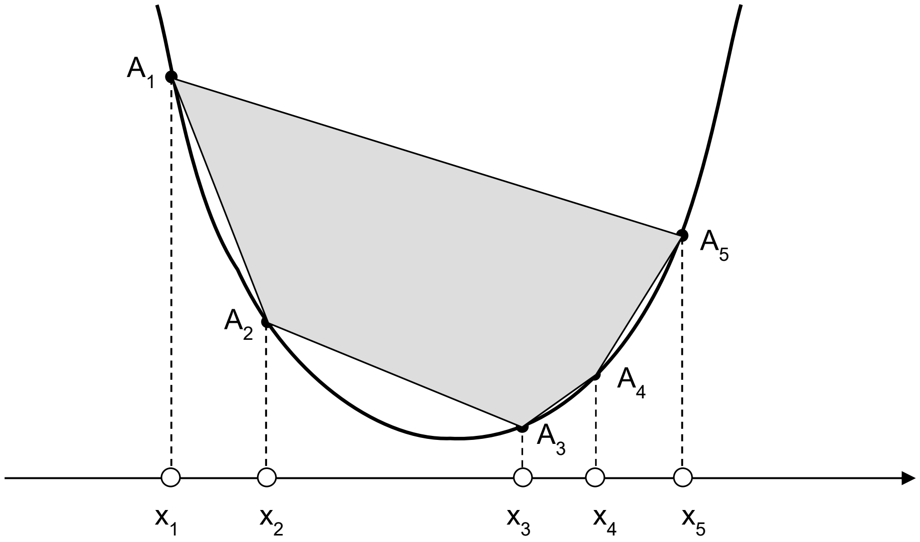
- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Théorème:

    Le tri de n nombres réels est transformable en temps linéaire en un calcul d'enveloppe convexe de n points dans un espace de dimension 2.

  - Démonstration du théorème …

# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Démonstration du théorème
    - Soit n nombres réels à trier $x_1$, $x_2$, …, $x_n$
    - À chaque $x_i$ on associe le pt $A_i$ de cordonnées ($x_i$, $x_i^2$) sur la parabole $y = x^2$.
    - L'enveloppe convexe des points $A_i$ (i = 1 à n) est un polygone et la liste circulaire des sommets de ce polygone est la liste des point $A_i$ (i = 1 à n) ordonnés par abscisses croissantes



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Démonstration du théorème
    - Dans le cas de l'enveloppe convexe

Pb1 = tri de n nombres

Pb2 = enveloppe convexe de n points

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{peut se transformer en } O(n) \text{ en} & \\
D(Pb_1) & \xrightarrow{x_i \Rightarrow P_i(x_i,\, x_i^2)} & D(Pb_2) \\
x_1, \ldots, x_n & & P_1, \ldots, P_n \\
\text{Résolution de Pb1: } n \log n \ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \ \text{Résolution de Pb2:} \\
 & \text{peut se transformer en } O(n) \text{ en} & \\
Sol(Pb_1) & \xleftarrow{P_i(x_i,\, x_i^2) \Rightarrow x_i} & Sol(Pb_2) \\
x_1 <= x_2 <= \ldots <= x_n & & \text{Liste ordonnée des points du polygone convexe}
\end{array}
$$

Le pb du tri est alors transformable au pb de l'enveloppe convexe :

La borne min de l'enveloppe convexe est donc en $\Omega(n \log n - n) \Rightarrow \Omega(n \log n)$

# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)

1. Déterminer un point $p_0$ situé sur la frontière ou à l'intérieur de E
2. Calculer les coordonnées polaires $(p_i, \theta_i)$ de chaque point $p_i$ par rapport à $p_0$
3. Ordonner les points en fonction de leur $\theta_i$.
4. À partir de $p_0$, $p_1$ on supprime tous les points qui forment un angle rentrant.

# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)

1. Déterminer un point $p_0$ situé sur la frontière ou à l'intérieur de E

   En fait on prend le point minimum dans l'ordre lexicographique : y min, et x min si plusieurs points ont le même y min.

2. Calculer les coordonnées polaires $(p_i, \theta_i)$ de chaque point $p_i$ par rapport à $p_0$
3. Ordonner les points en fonction de leur $\theta_i$.

   On construit cette liste ordonnée en fonction de la position des points (en utilisant le tri polaire) sans calculer réellement les angles

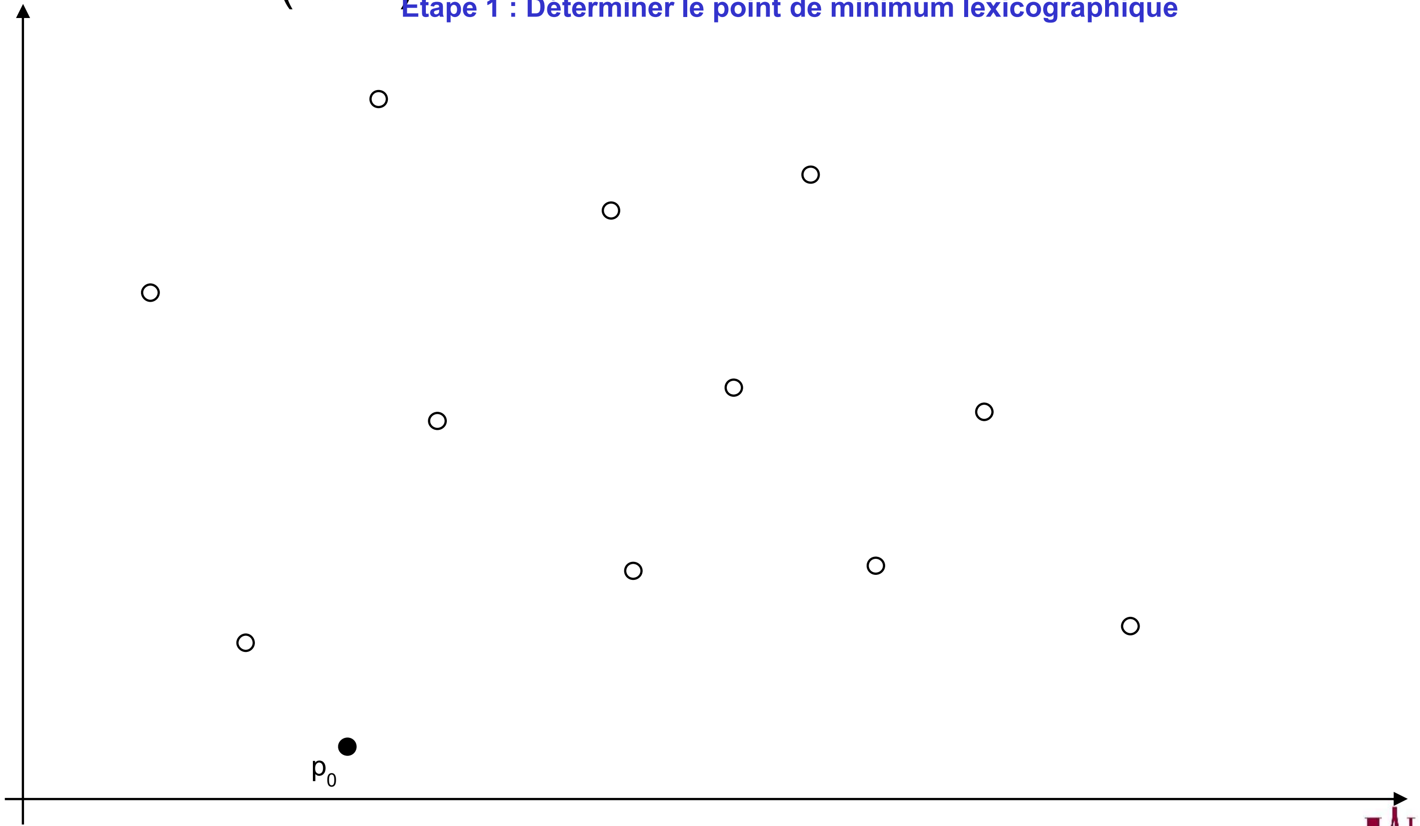
4. À partir de $p_0$, $p_1$ on supprime tous les points qui forment un angle rentrant.

   On utilise le déterminant (ou puissance) pour savoir si 3 points forment un angle concave ou convexe.

# Méthodes applicables aux modèles continus

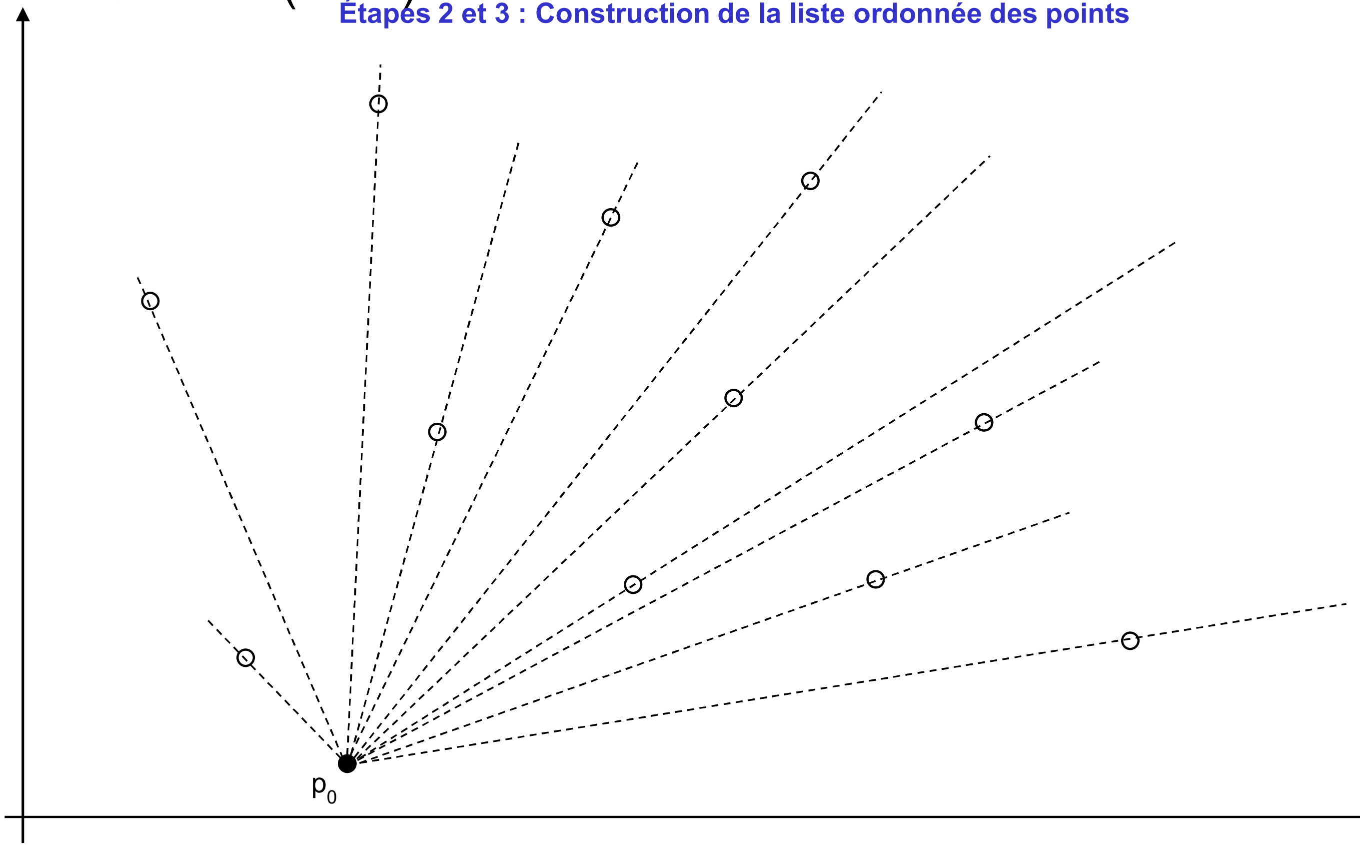
- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)

**Étape 1 : Déterminer le point de minimum lexicographique**



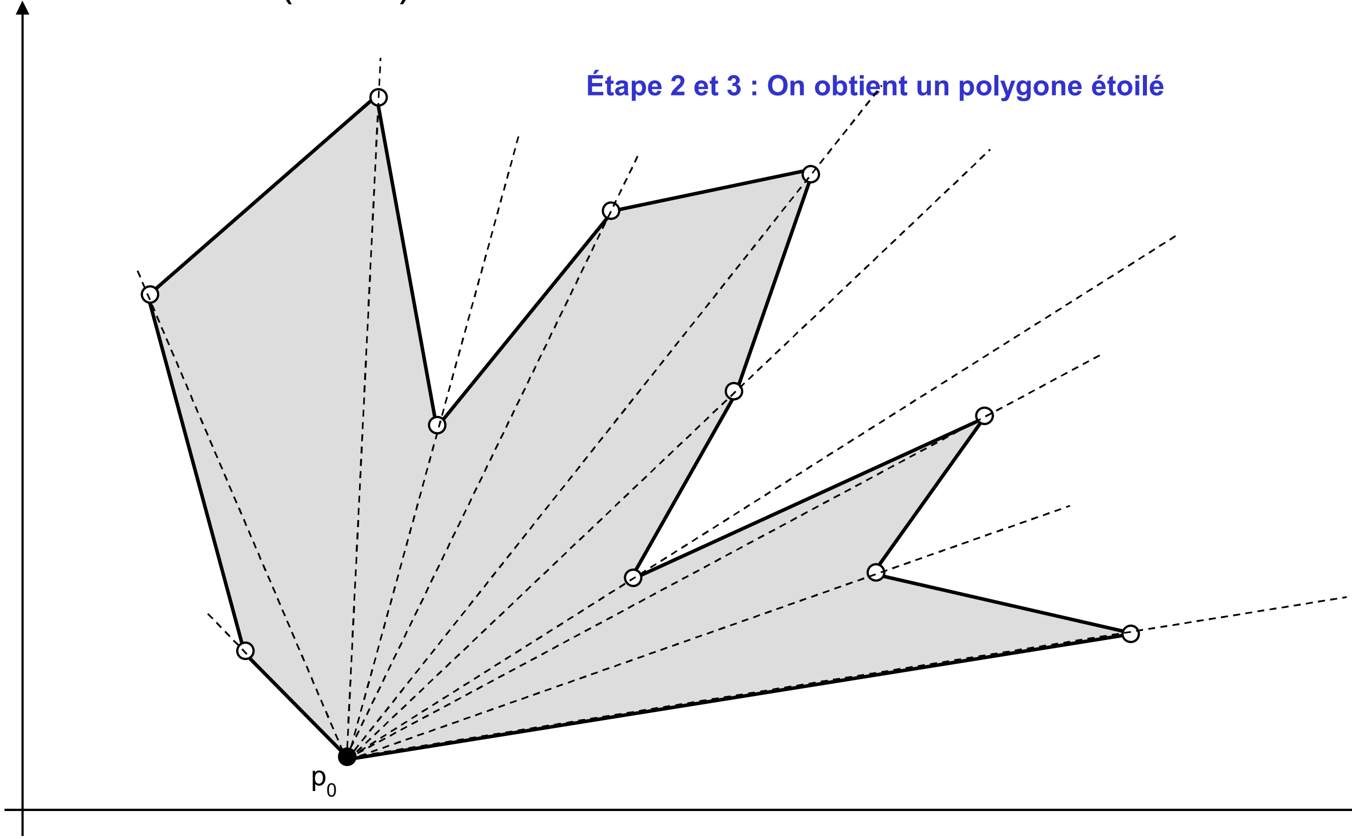
# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)



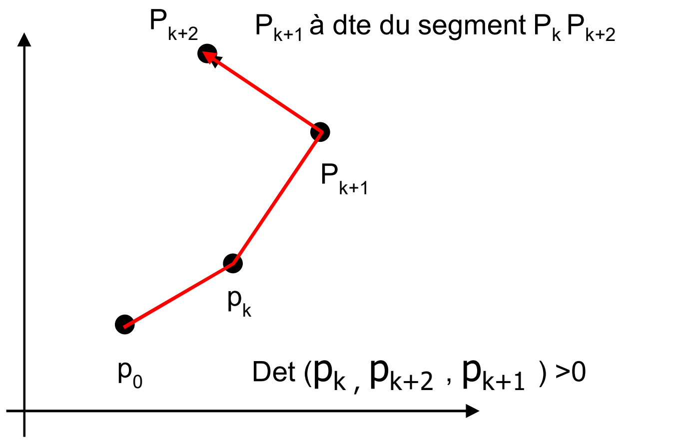
# Méthodes applicables aux modèles continus

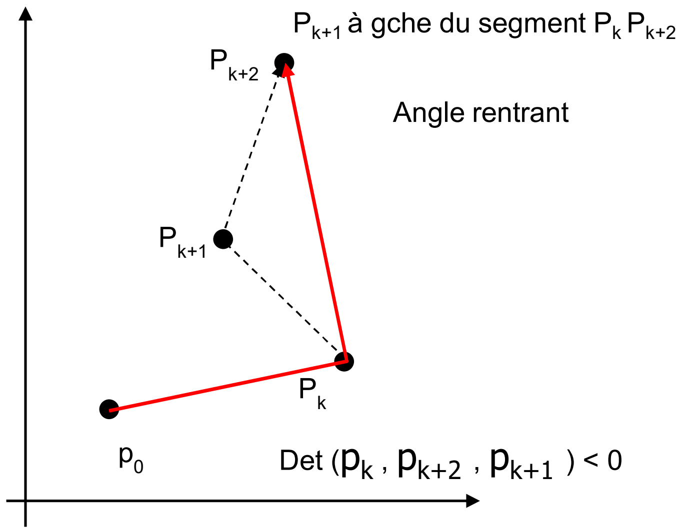
- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)

**Étape 4 : Suppression des angles rentrants**

$P_k = P_0 + 1$ // suivant de $P_0$
(car les droites supports ($P_{0-1}$ $P_0$) et ($P_0$, $P_{0+1}$) sont forcément sur l'enveloppe convexe)

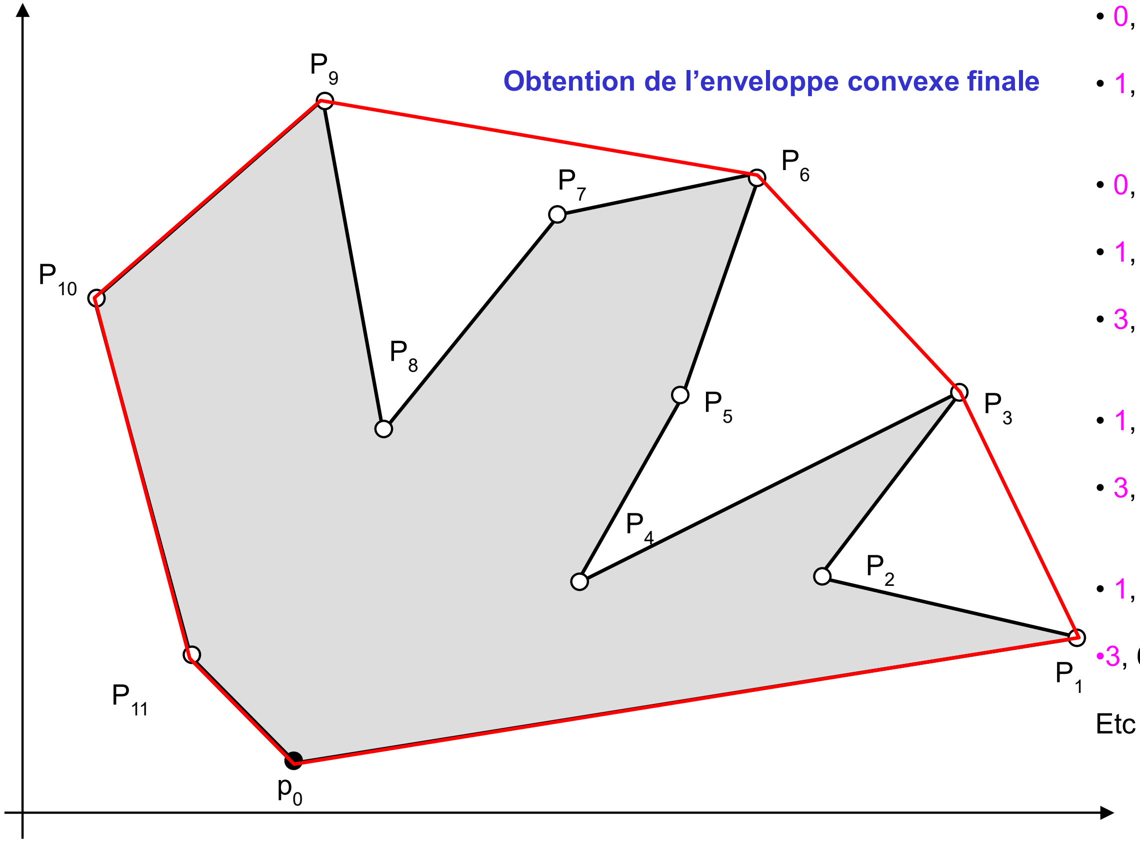
Répéter
    Si angle ($p_{k+1}$ $p_{k+2}$, $p_{k+1}$ $p_k$) < $\pi$ alors
        $k = k+1$
    Sinon
        supprimer le point $p_{k+1}$
        $k = k - 1$
Tant que $p_{k+1} \neq p_0$



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)




**Étapes de l'algorithme : (k)**

- 0, 1, 2 : 1 est à droite de [0, 2] ?oui
  1 est conservé
- 1, 2, 3 : 2 est à droite de [1, 3] ?non
  2 est supprimé
  On recule de 1
- 0, 1, 3 : 1 est à droite de [0, 3] ?oui
  1 est conservé
- 1, 3, 4 : 3 est à droite de [1, 4] ?oui
  3 est conservé
- 3, 4, 5 : 4 est à droite de [3, 5] ?non
  4 est supprimé
  On recule de 1
- 1, 3, 5 : 3 est à droite de [1, 5] ?oui
  3 est conservé
- 3, 5, 6 : 5 est à droite de [3, 6] ?non
  5 est supprimé
  On recule de 1
- 1, 3, 6 : 3 est à droite de [1, 6] ?oui
  3 est conservé
- 3, 6, 7 : 6 est à droite de [3, 7] ?oui
  6 est conservé

Etc …

# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme de Graham (1972)
    - Complexité de l'étape 4

Soit les couples $(a_i, b_i)$ où:

$a_i$ = nombre de points déjà considérés à la $i^{ème}$ étape

$b_i$ = nombre de points répétés à la $i^{ème}$ étape (lors des retours en arrière)

- On a:
  - $(a_1, b_1) = (3, 0)$ au début
  - $(a_f, b_f) = (n, n-\mathbf{e})$ à la fin, où **e** est le nombre de points sur l'enveloppe convexe
- à la $i^{ème}$ étape on a:
  - Soit $(a_i, b_i) = (a_{i-1}+1, b_{i-1}) \Rightarrow \alpha$ fois
  - Soit $(a_i, b_i) = (a_{i-1}, b_{i-1} + 1) \Rightarrow \beta$ fois
- à la fin on a $(a_f, b_f) = (\alpha + 3, \beta)$, d'où :
  - $n = \alpha + 3$
  - $\beta = n - e$
  - Donc $\alpha + \beta = 2n - \mathbf{e} - 3$
- L'étape 4 est donc bien linéaire

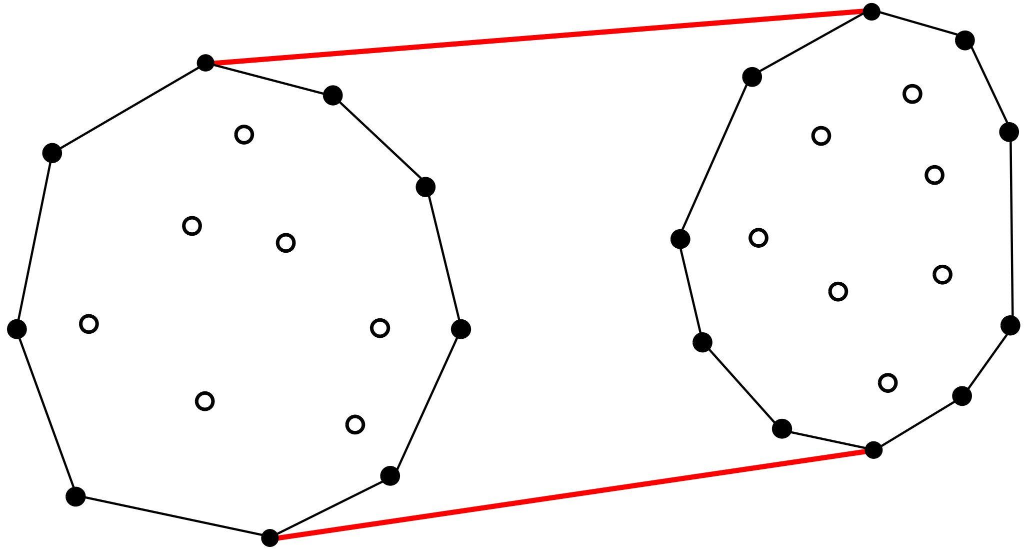
# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d’un ensemble de points
  - Algorithme par division-fusion

1. Trier les n points par abscisses croissantes
2. Diviser l’ensemble initial E en deux sous-ensembles $E_1$ et $E_2$ séparés par une ligne verticale
3. Calculer l’enveloppe convexe de chaque sous-ensemble $E_1$ et $E_2$
4. Fusionner les deux enveloppes convexes de $E_1$ et $E_2$

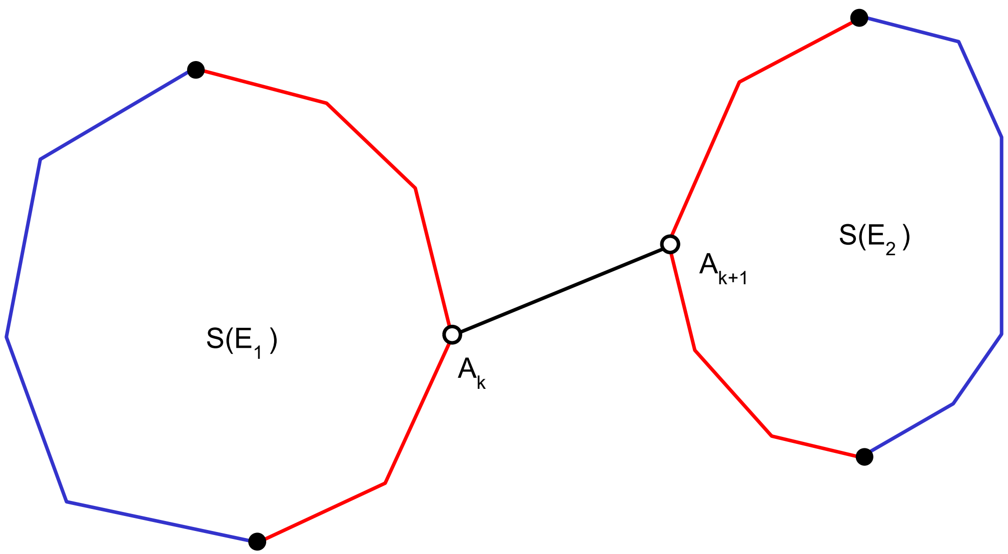
# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d’un ensemble de points
  - Algorithme par division-fusion
    - On cherche la tangente haute et la tangente basse pour réaliser la fusion des deux enveloppes convexes.



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme par division-fusion
    - Les arêtes rouges de $S(E_1)$ sont visibles par $E_2$
    - Les arêtes bleues de $S(E_1)$ sont invisibles de $E_2$
    - $A_k$ est le sommet de x max de $S(E_1)$ et $A_{k+1}$ le sommet de x min de $S(E_2)$
    - Le segment $[A_k, A_{k+1}]$ est intérieur à $S(E)$ car il relie deux sommets des arêtes rouges



# Méthodes applicables aux modèles continus

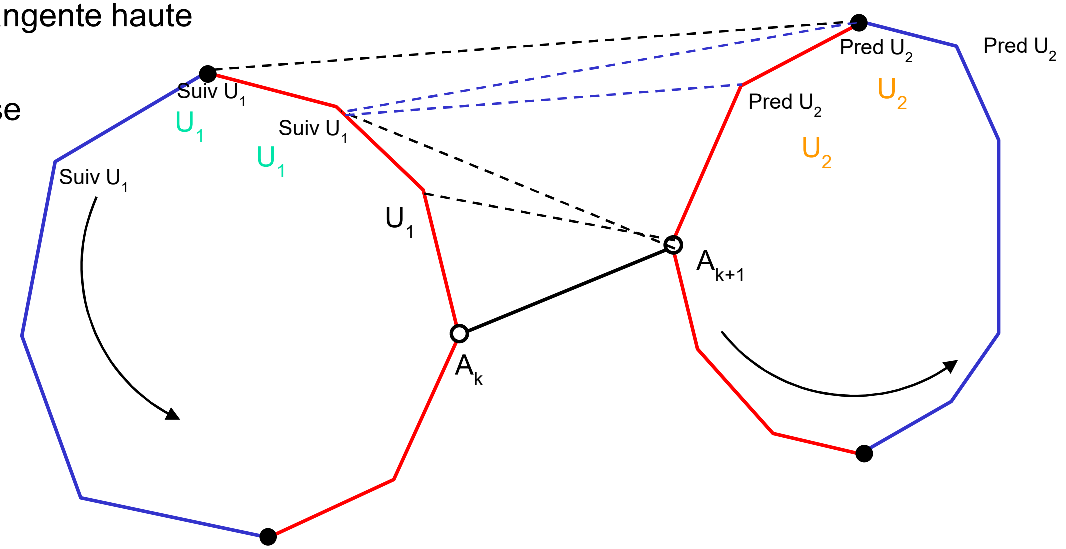
- Enveloppe convexe d'un ensemble de points
  - Algorithme par division-fusion
    - On déplace un segment $[U_1, U_2]$ à partir de $[A_k, A_{K+1}]$. Au départ $U_1 = A_k$ et $U_2 = A_{K+1}$

      Tant que U1 ou U2 ne puisse plus être déplacé

      On déplace U1 dans le sens normal tant que U1 est à gauche de $[U_2, \text{suiv}(U_1)]$

      On déplace U2 dans le sens inverse tant que U2 est à droite de $[U_1, \text{pred}(U_2)]$

      FinTant que
    - Le dernier segment $[U_1, U_2]$ nous donne la tangente haute
    - On fait la même chose pour la tangente basse



# Méthodes applicables aux modèles continus

- Enveloppe convexe d’un ensemble de points
  - Algorithme par division-fusion
    - Analyse de la complexité
      - Le nombre de tests lors de la fusion est égal au nombre d’arêtes internes.
      - Le nombre total d’arêtes créées par l’algorithme est n
      - La fusion est donc linéaire
      - La complexité est donc dominée par le tri initial, soit O(n log n)