

Probabilités

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie par:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \\ ax(2-x) & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

- 1) Calculer la constante a .
- 2) Déterminer la fonction de répartition F_X correspondant à la variable aléatoire X de densité f_X ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.
- 3) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = 4X - 3$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie par:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X^n) = n!$
- 2) Sachant que $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X > a) \leq \frac{n!}{a^n}$, montrer que $e^{-a} \leq \frac{n!}{a^n}$.

Exercice 3. Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité:

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-x-2y} & \text{dans } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < +\infty\} \\ 0 & \text{dans } D^c \end{cases}$$

- 1) Calculer la constante a .
- 2) Quelle est la densité de la loi marginale de X ? Calculer $E(X)$.
- 3) Quelle est la densité de la loi marginale de Y ? Calculer $E(Y)$.
- 4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- 5) Quelle est la loi conditionnelle de Y liée par $\{X = x\}$? Calculer $E^{X=x}(Y)$.