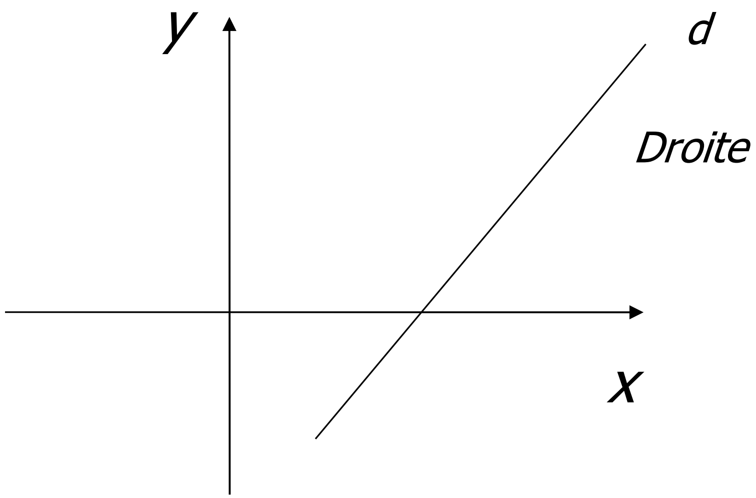
SOMMAIRE

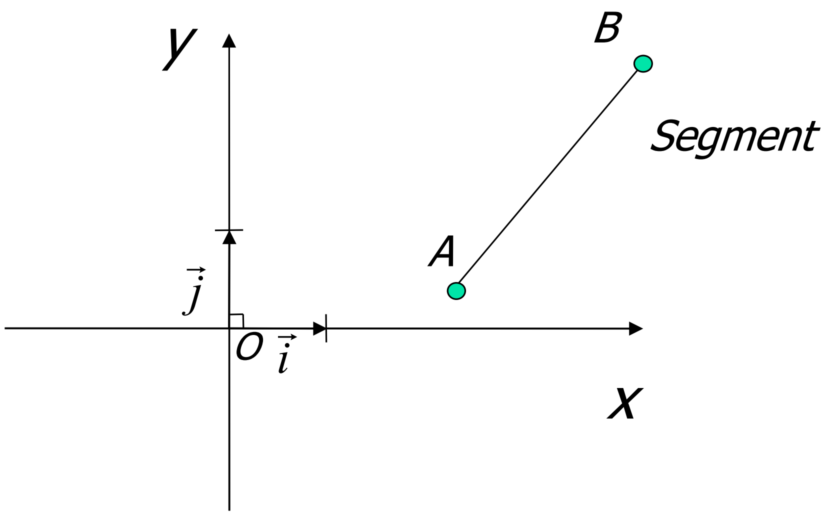
- Informations pratiques
- Introduction
- Notions Algorithmiques
- Méthodes Algorithmiques pour la géométrie
- Modéliser *le monde*
- Méthodes géométriques
  - Notions de base en géométrie
  - Méthodes applicables aux modèles discrets
  - Méthodes applicables aux modèles continus

SOMMAIRE

Notions de base en Géométrie

- Droites et segments dans le plan
  - Dans un repère du plan, toute droite est caractérisée par une relation algébrique entre l'abscisse et l'ordonnée de ses points (y =f(x))
    - ☞ équation cartésienne de la droite



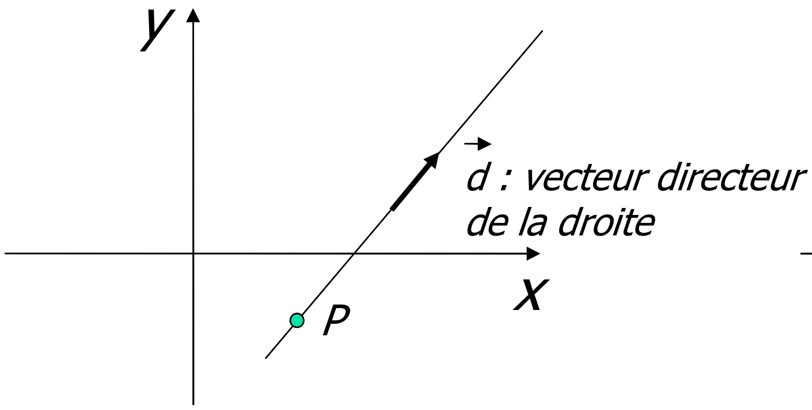


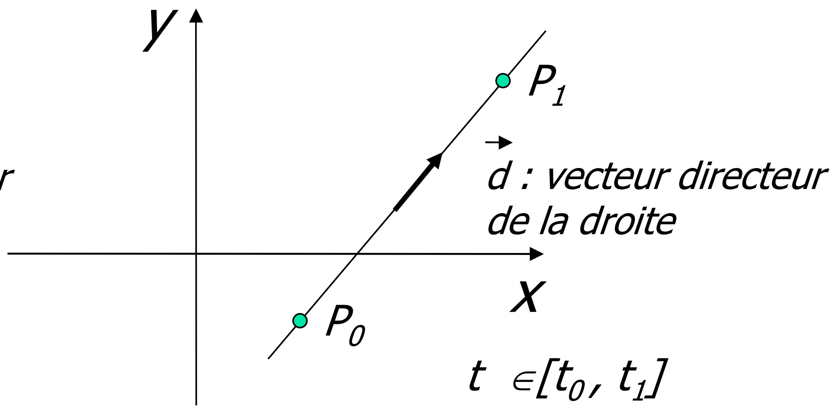
Notions de base en Géométrie

- Droites dans le plan
  - Représentation explicite
    - $y = f(x)$
    - y explicité de façon unique en fonction de x
  - Représentation implicite
    - $f(x,y)= 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$
    - Ni x ni y ne sont explicités l'un en fonction de l'autre

Notions de base en Géométrie

- Droite et segments dans le plan
  - Représentation paramétrique
    - $x=f(t) \Rightarrow x = P_x + t\,d$
    - $y=g(t) \Rightarrow y = P_y + t\,d$



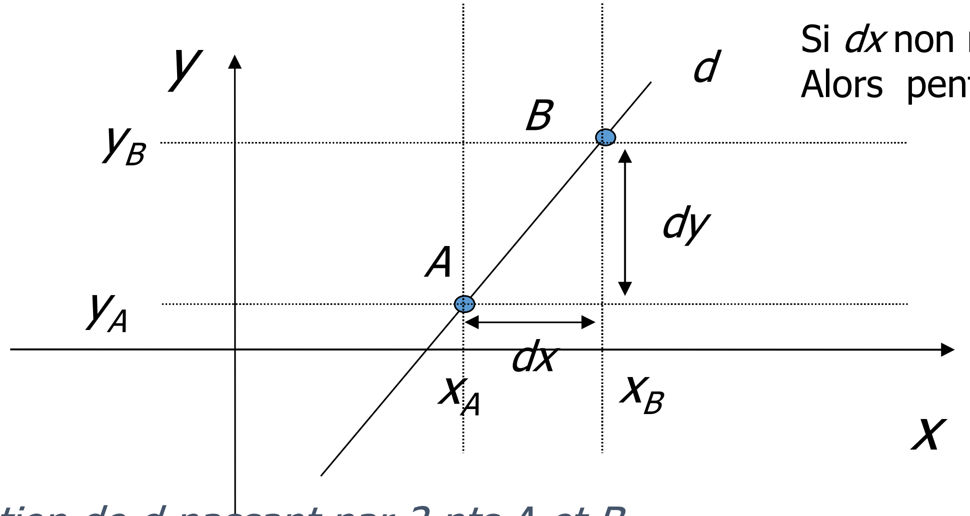


Notions de base en Géométrie

- Droites et segments dans le plan
  - Passage représentation implicite / paramétrique
    - $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow P(-ac/(a^2+b^2), -bc/(a^2+b^2))$
      $d = [-b\ a]$
  - Passage représentation paramétrique / implicite
    - $x = Px + t\,dx$
      $y = Py + t\,dy \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $a = dy$
      $b = -dx$
      $c = dxPy - dyPx$

Notions de base en Géométrie

- Pente d'une droite
  - *le taux d'accroissement des ordonnées par unité d'abscisse*



Si *dx* non nulle (droite non verticale)
Alors pente = dy / dx

Équation de d passant par 2 pts A et B

$f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) = dy\,(x - x_A) - dx\,(y - y_A)$

$f(x_A, y_A) = dy\,(x_A - x_A) - dx\,(y_A - y_A) = 0$

$f(x_B, y_B) = dy\,(x_B - x_A) - dx\,(y_B - y_A) = dy\,dx - dx\,dy = 0$

Notions de base en Géométrie

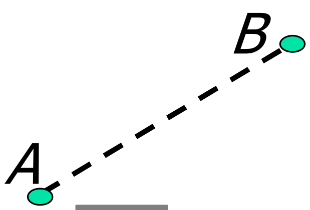
- Différentes Métriques
  - Distance euclidienne : la plus courante

$$d_1(p,q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)^2}\ \text{avec}\quad p(x_1,x_2,\cdots x_n)\ \text{et}\ q(y_1,y_2,\cdots y_n)$$

  - Distance de Manhattan

$$d_2(p,q)=\sum_{i=1}^{d}\left|\ x_i-y_i\ \right|$$

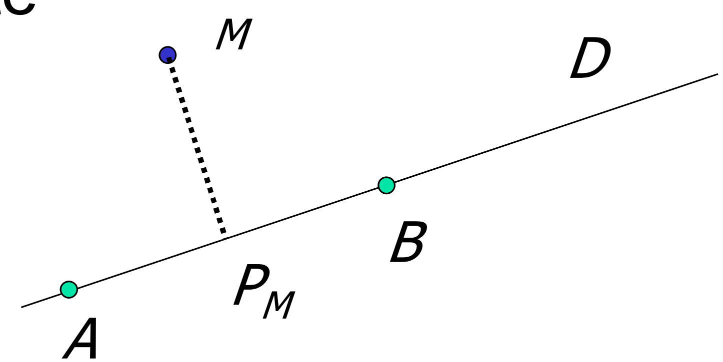
- Distance pt/pt



$$d_1(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Notions de base en Géométrie

- Distance pt/droite



P_M appartient à la droite D donc vérifie l'équation $f(x,y)= dy\ (x - x_A) – dx\ (y - y_A) = 0$

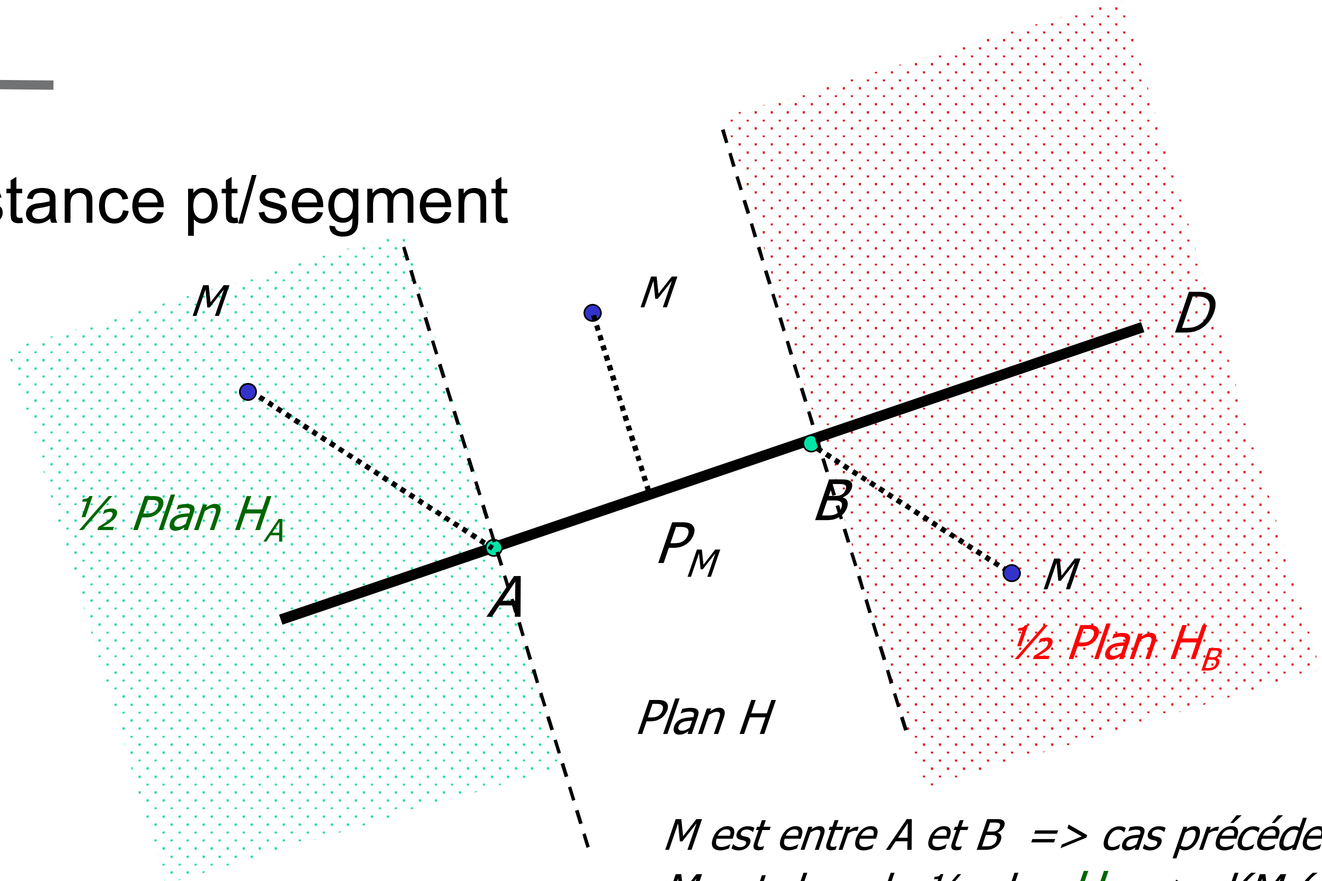
D'où $f(x_{P_M}, y_{P_M}) = (y_B - y_A)(x_{P_M} - x_A) - (x_B - x_A)(y_{P_M} - y_A) = 0$

Et $d(M,(AB)) = d(M, P_M)$

$f(x_M, y_M) = (y_B - y_A)(x_M - x_A) - (x_B - x_A)(y_M - y_A)$ *=> puissance de M*

Notions de base en Géométrie

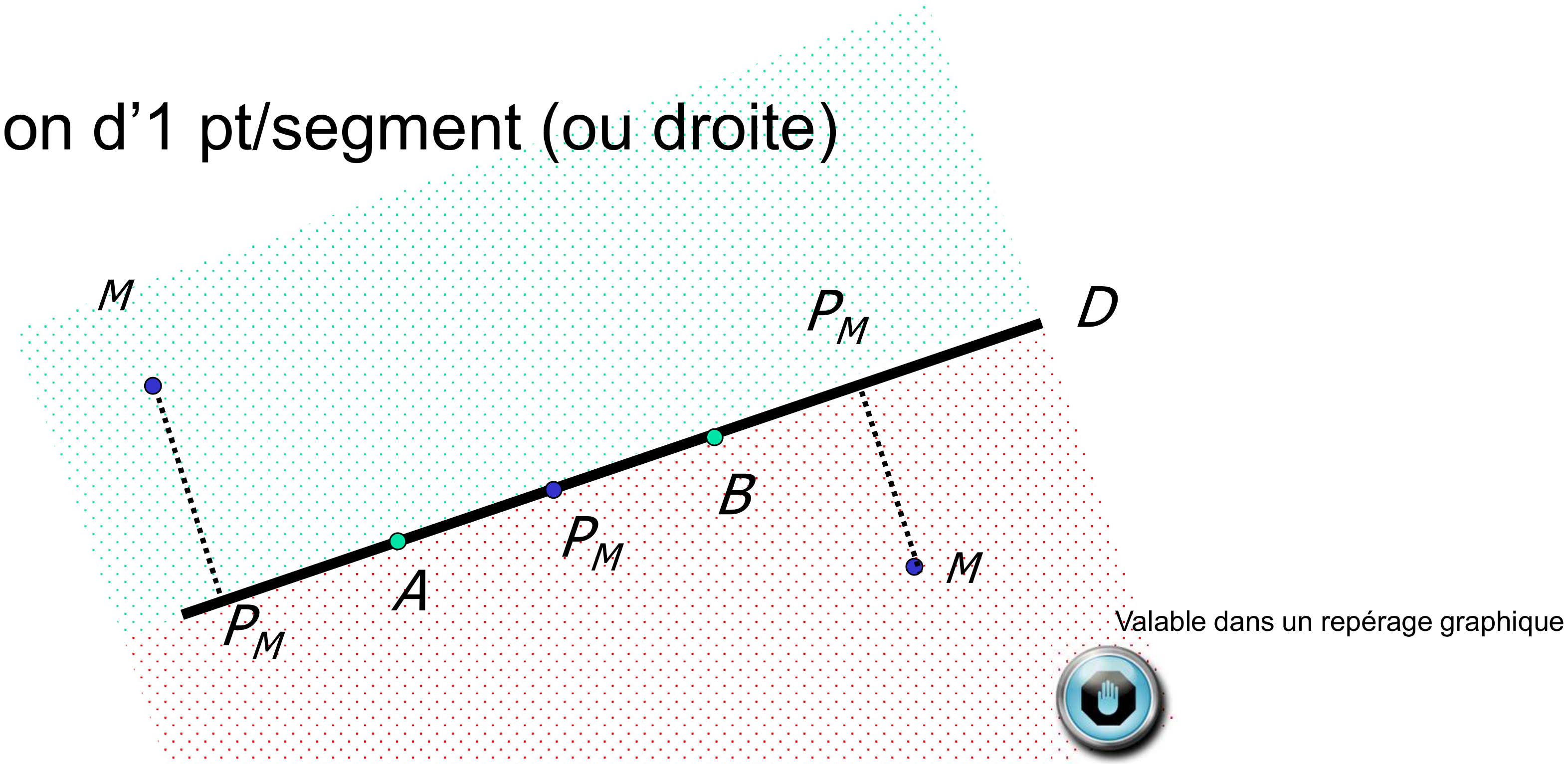
- Distance pt/segment



M est entre A et B => cas précédent
M est dans le ½ plan H_A => d(M,(AB)) = d(M,A)
M est dans le ½ plan H_B => d(M,(AB)) = d(M,B)

Notions de base en Géométrie

- Position d'1 pt/segment (ou droite)



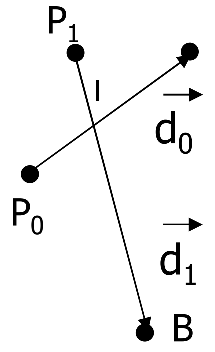
- *Si $f(x_M , y_M) > 0$ alors M est à gauche de AB ou de la droite D*
- *Si $f(x_M, y_M) = 0$ alors M est sur la droite D*
- *Si $f(x_M, y_M) < 0$ alors M est à droite du segment AB ou de la droite D*

Notions de base en Géométrie

- Intersection entre 2 segments
  - Supposons

    Segment S_0 défini par $P_0 + s\, d_0$ avec $s \in [0,1]$

    S_1 défini par $P_1 + t\, d_1$ avec $t \in [0,1]$

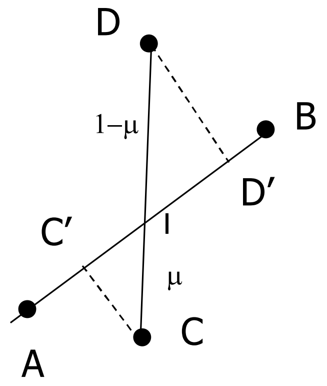


  - S_0 et S_1 s'intersectent $\Leftrightarrow$ trouver le point I qui vérifient les 2 équations

    $\Leftrightarrow P_0\, I$ et d_0 sont colinéaires => déterminant($P_0\, I$, d_0) = 0

    $\Leftrightarrow P_1\, I$ et d_1 sont colinéaires => déterminant($P_1\, I$, d_1) = 0

Notions de base en Géométrie



- Intersection entre 2 segments
  - Pour diminuer le nb d'opérations
    - Rq : [AB] et [CD] se coupent en I , ssi A,B sont situés de part et d'autre de la droite C,D (et inversement)

    (cas particulier : 1 pt extrémité = pt d'intersection)

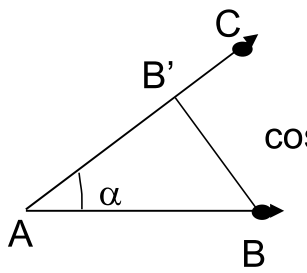
μ= CC' / (CC'+ DD') = $|p_C|/(|p_C| + |p_D|)$ avec p_C = puissance de C

$= (y_C - y_A) * (x_B - x_A) - (x_C - x_A) * (y_B - y_A)$

μ permet de localiser I sur CD

Notions de base en Géométrie

- Angles

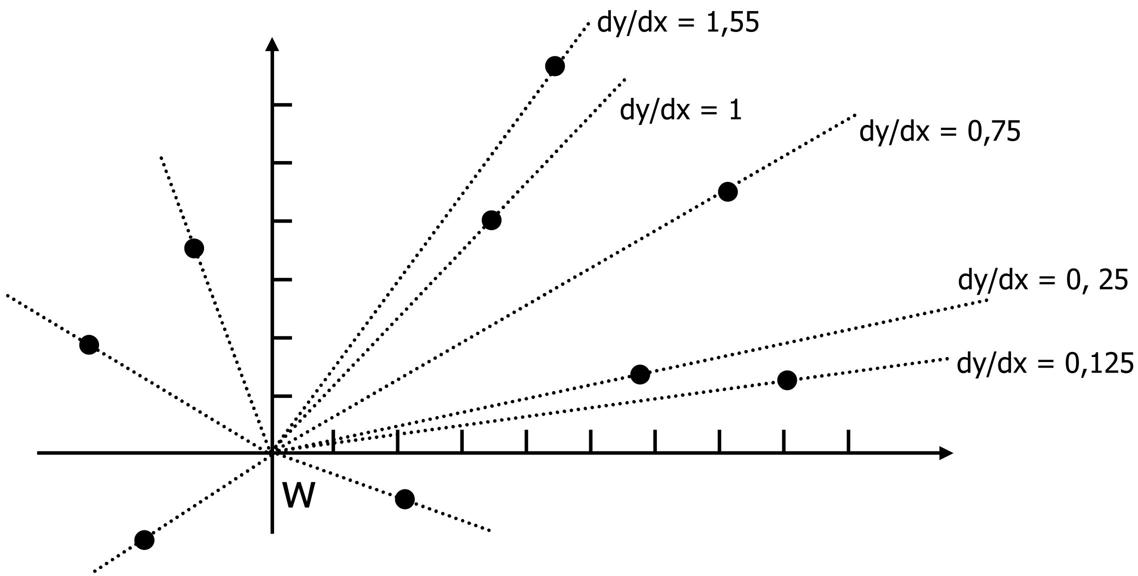


cos α = AB'/AB

- Pour des raisons de performances il faut éviter l'utilisation des fonctions trigonométriques
- Sauf si la valeur exacte de l'angle est nécessaire, on utilisera d'autres techniques
  - Il est souvent nécessaire de ne connaître que la position d'un élément par rapport à un autre (ex: Tri polaire)

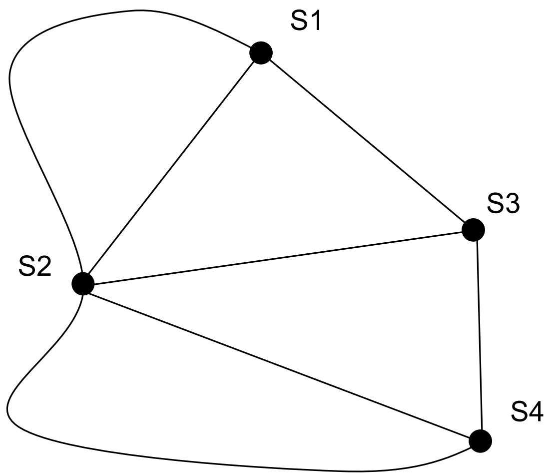
Notions de base en Géométrie

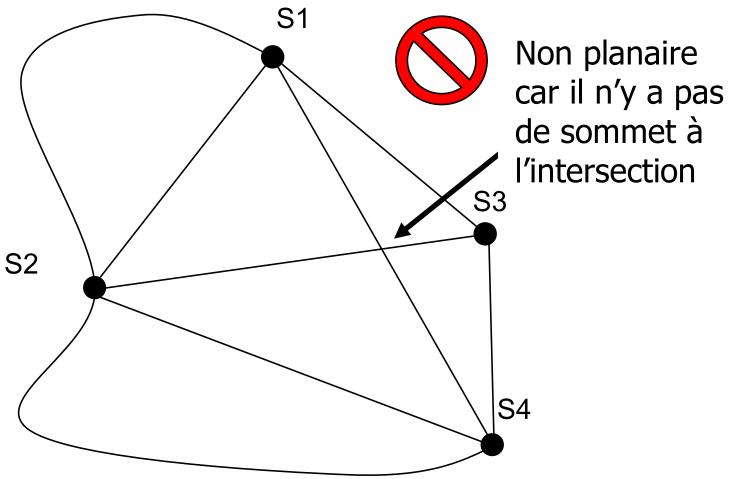
- Tri polaire
  - Pour le tri polaire d'un ensemble de points par rapport à une origine w, il suffit de diviser l'ensemble des points dans chaque cadran et de trier les points en fonction de leur pente dy/dx (puis dy en cas d'égalité)



Notions de base en Géométrie

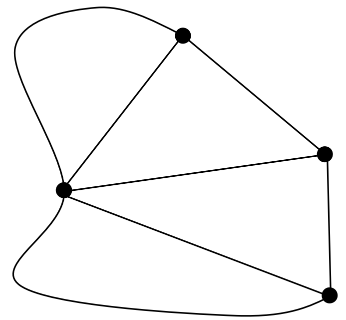
- Notion de planarité (1)
  - Un graphe est planaire si aucune de ses arêtes n'en coupe une autre sauf en exactement un sommet déclaré comme tel.





Notions de base en Géométrie

- Notion de planarité (2)
  - Un graphe planaire permet de définir la notion de faces
    - Une face est une région délimitée par des arêtes et qui ne contient ni sommets ni arêtes en son intérieur
  - Deux faces sont adjacentes si leurs frontières ont au moins une arête en commun



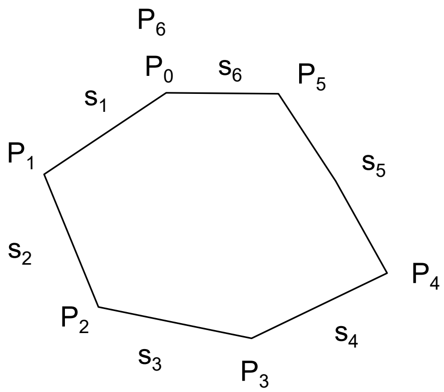
4 sommets
5 faces (dont une face infinie)

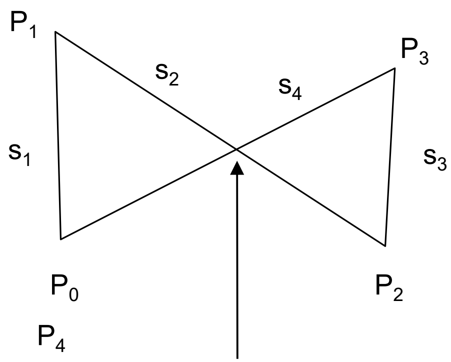
Notions de base en Géométrie

- Polygone
  - Suite de segments
    - $P = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
    - Pour i =1 à n $\quad s_i = [P_{i-1}, P_i]$

      où P_i est un point du plan pour i=0 à n

      et $P_0 = P_n$ (courbe fermée)





Auto-intersection = 2 segments non consécutifs s’intersectent

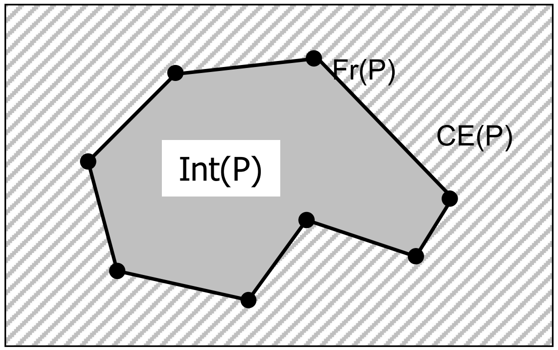
Mathématiques et Informatique
Sciences
Université Paris Cité

Notions de base en Géométrie

- Les polygones
  - N-polygone simple = Courbe fermée composée de N sommets dont 2 arêtes ne peuvent avoir un point en commun que si elles sont consécutives sur la frontière.

  ➔ sans points multiples ni auto-intersection

  - Il divise l'espace en au moins deux régions dont une est bornée:
    - Int(P) : région intérieur bornée
    - Fr(P) : frontière (sommets et arêtes)
    - CE(P) : région extérieur



Notions de base en Géométrie

- Les polygones (suite)
  - Orientation
    - Frontières externes : CCW (Counter ClockWise)
    - Frontières internes : CW (ClockWise)

=> La région intérieur du polygone (Int(P)) est à gauche de chaque arête

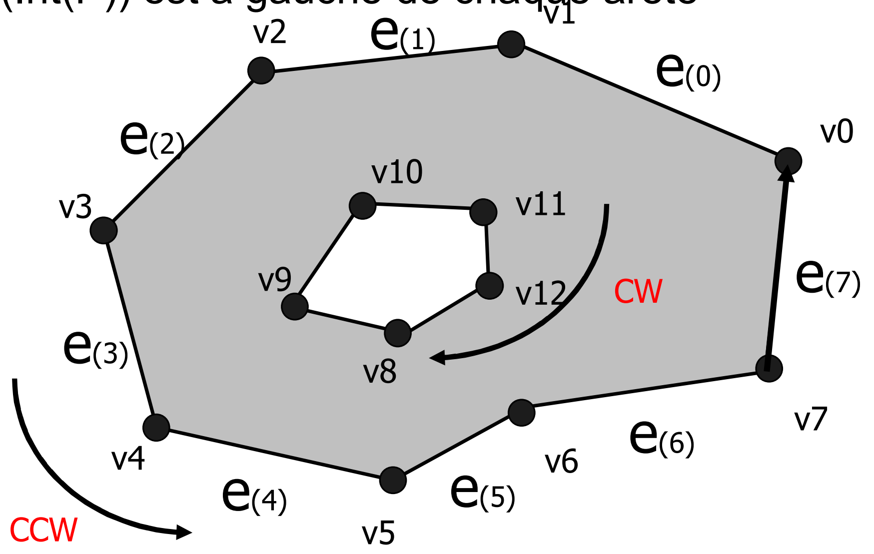
Sommet = vertex

Sommets = vertices

Arêtes = edge

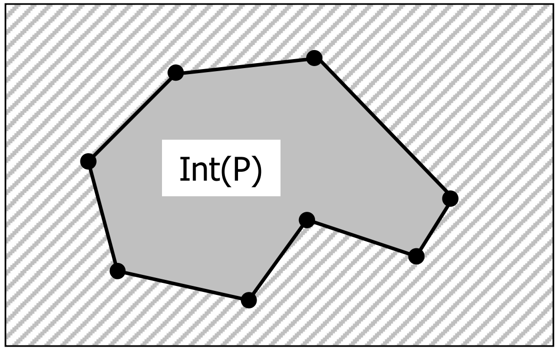
Frontière = boundary

Trou = hole

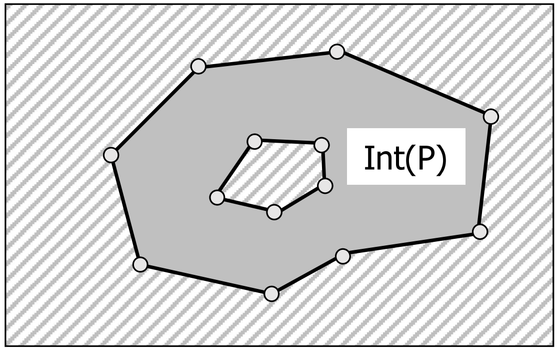


Notions de base en Géométrie

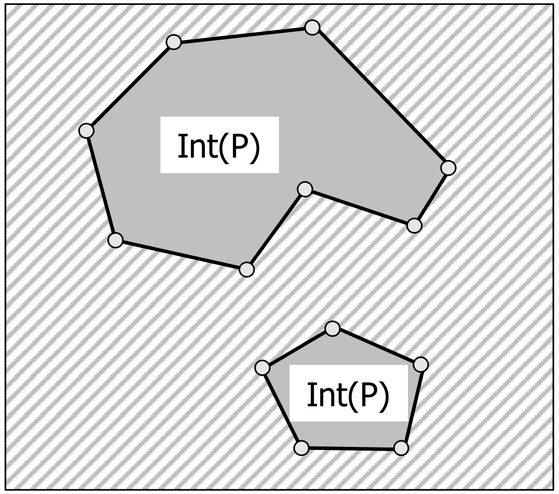
- Polygone - Notions de connexité



1 composante connexe



1 composante connexe (en terme de régions)
(2 composantes connexes en termes de contours)



2 composantes connexes

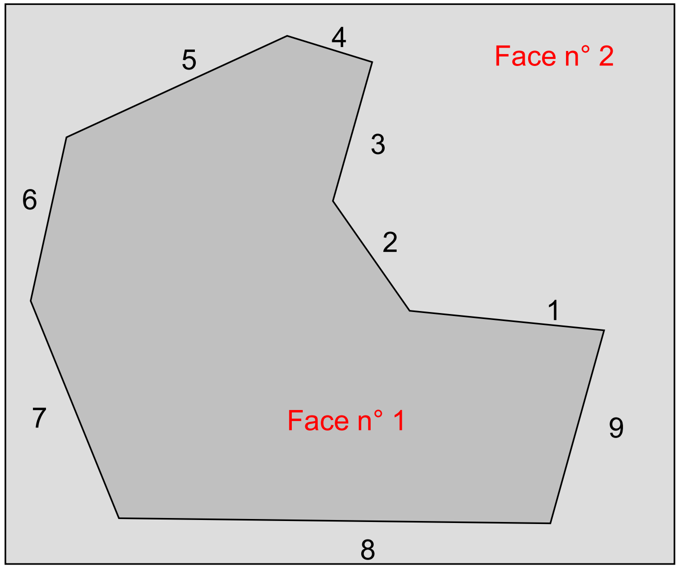
Notions de base en Géométrie

- Polygone / Dénombrement – Relation d'Euler

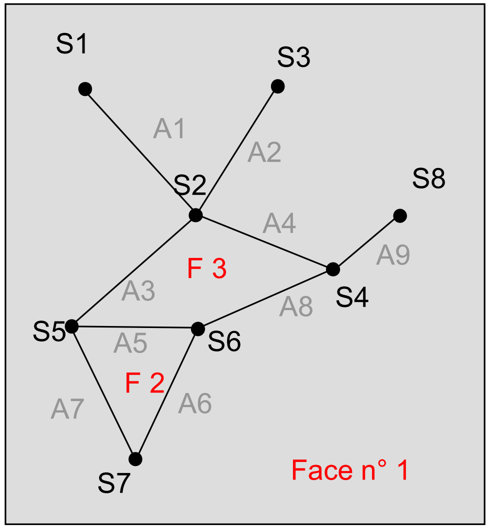
Se vérifie pour **un graphe planaire** connecté (au sens contours)

$$s - a + f = 2$$

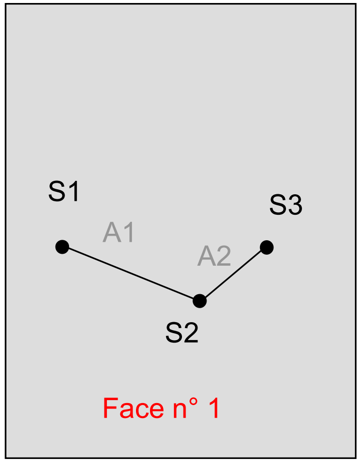
s : nombre de sommets
a : nombre d'arêtes
f : nombre de faces (int + ext)



s = 9, a = 9, f = 2
9 – 9 + 2 = 2



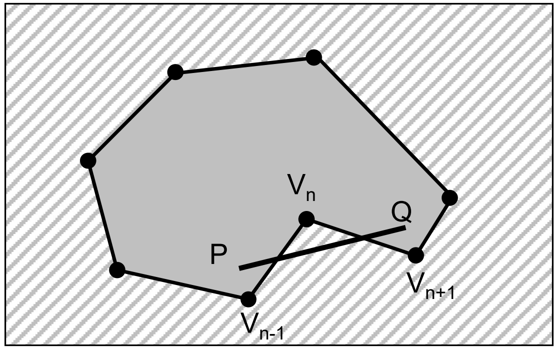
s = 8, a = 9, f = 3
8 – 9 + 3 = 2



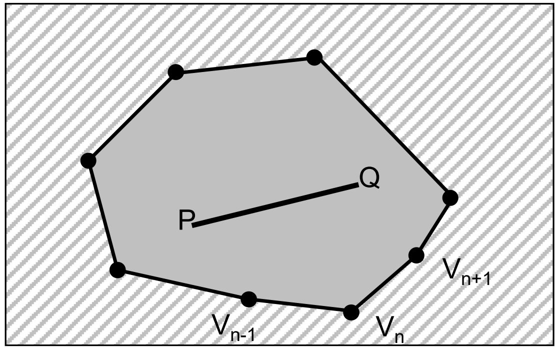
s = 3, a = 2, f = 1
3 – 2 + 1 = 2

Notions de base en Géométrie

- Polygone - Notion de convexité



Polygone non convexe



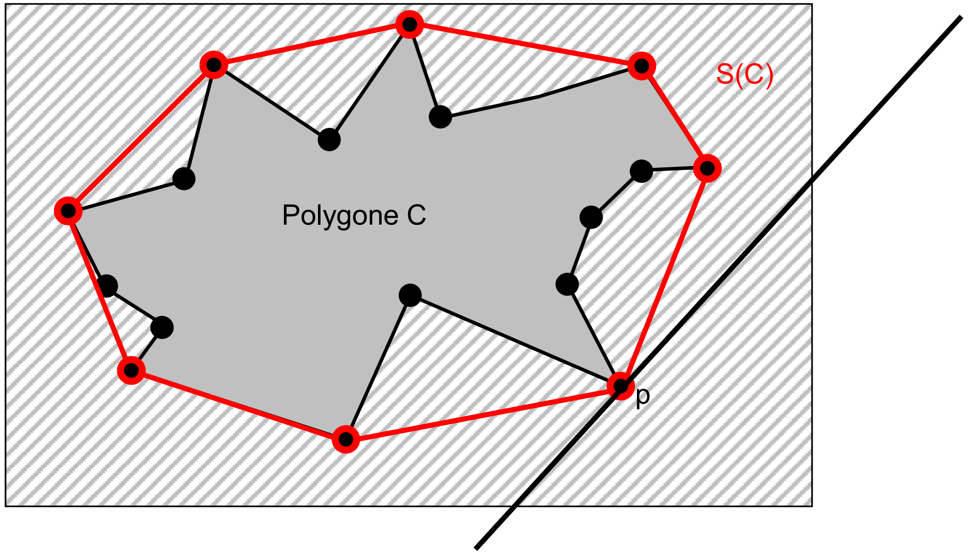
Polygone convexe

- Un polygone est convexe si deux points P et Q quelconques situés à l'intérieur du polygone déterminent un segment entièrement situé dans la région intérieur:
  - Tous les angles sont convexes (v_n est à droite de [v_{n-1},v_{n+1}])

- Rq : Il est souvent important de savoir si un polygone est convexe ou non car la complexité de certains algorithmes sera totalement différente dans les deux cas.

Notions de base en Géométrie

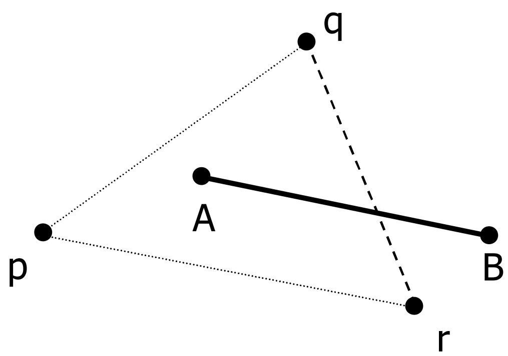
- Polygone - Enveloppes convexes



- L'enveloppe convexe S(C) d'un polygone C est le plus petit polygone convexe contenant celui-ci.
  - Par tout point p de la frontière f de S(C), il existe au moins une droite passant par p pour laquelle tous les points de S se situent du même côté.

Notions de base en Géométrie

- Polygones / Rappel: Notion de visibilité
  - Soient un segment [A, B] et deux points p et q du plan.
  - Les points p et q se voient mutuellement par rapport à [A, B] si et seulement si le segment ouvert]p, q[ne coupe pas le segment [A, B].



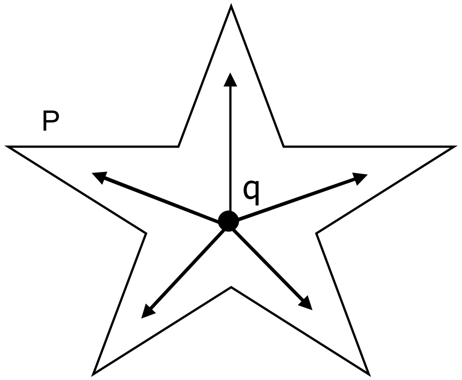
p et q sont visibles

p et r sont visibles

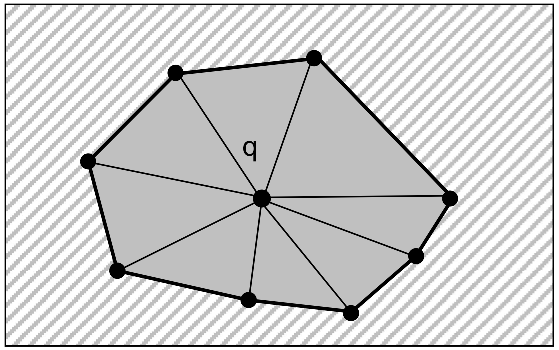
q et r ne sont pas visibles

Notions de base en Géométrie

- Polygones / Polygones étoilés
  - Soit P un polygone simple et q un point de P (sur la frontière ou à l'intérieur)
  - **P est étoilé autour de q** si et seulement si tout point de P est visible depuis q.

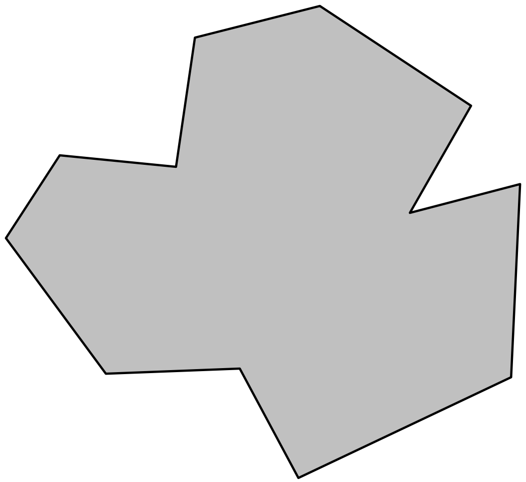


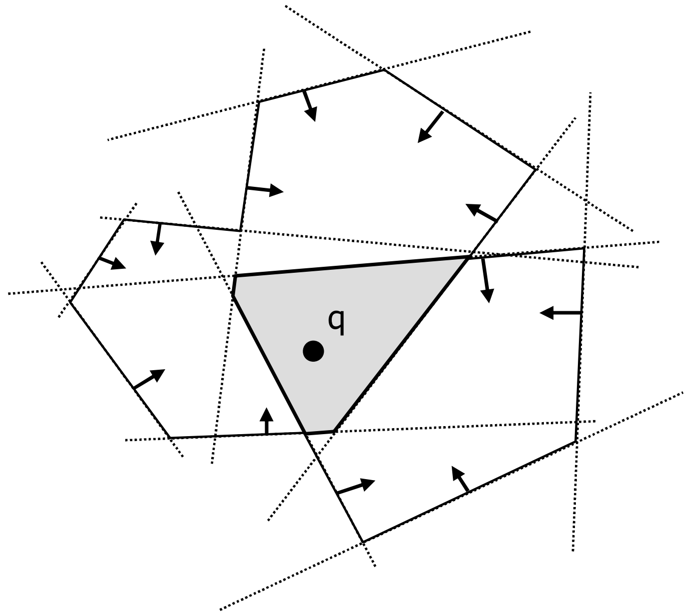
- Tout polygone convexe est étoilé par rapport à tous les points de son intérieur.



Notions de base en Géométrie

- Polygone – Polygones étoilés
  - L'ensemble des points q depuis lesquels P est entièrement visible est un polygone convexe.
  - C'est l'intersection de tous les demi plans " gauche " définis par les arêtes orientées de la frontière



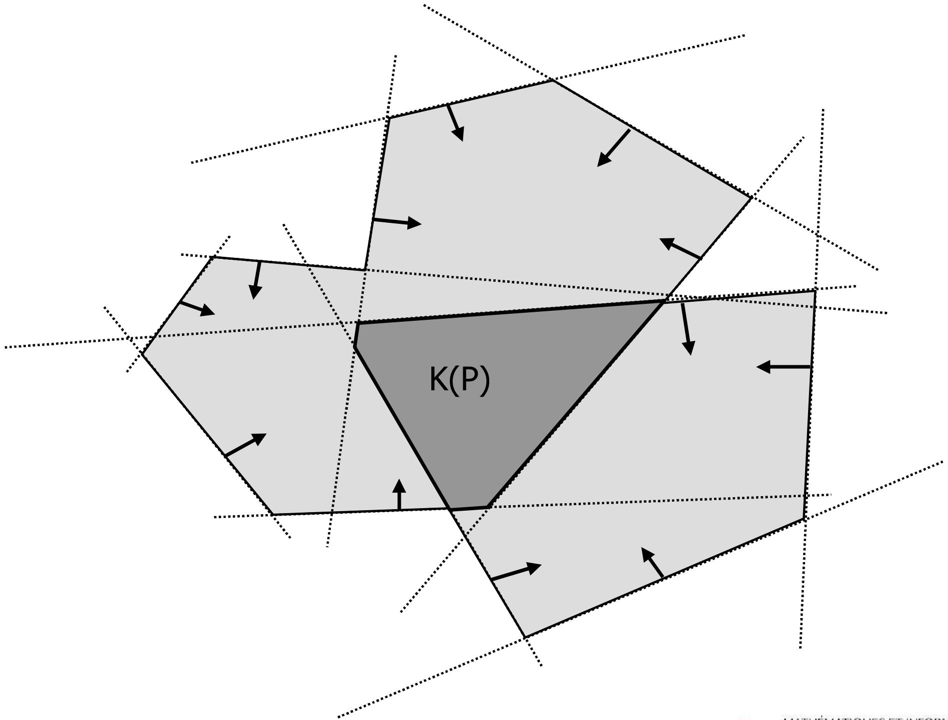


Notions de base en Géométrie

- Polygones/ Polygones étoilés (suite)
  - Ce polygone convexe s'appelle le " **noyau de visibilité** " de P. On le note K(P) (K pour kernel)

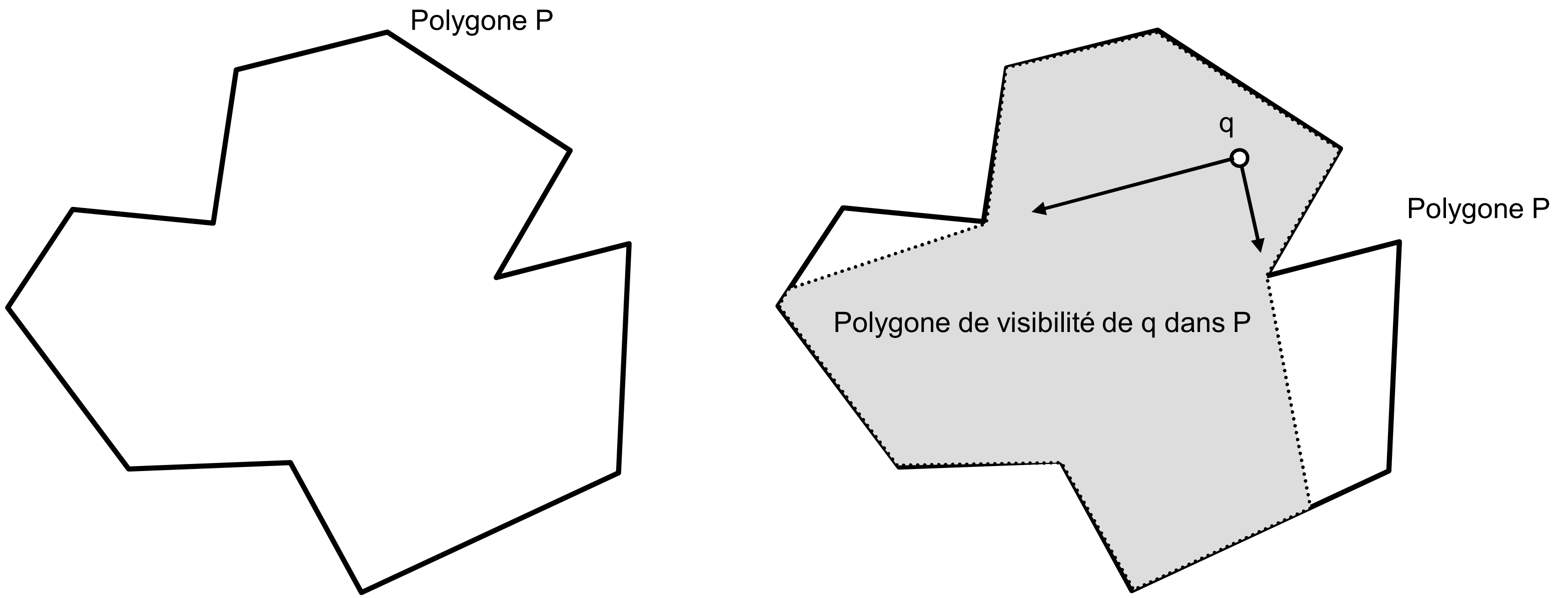
  - P est donc un polygone étoilé si et seulement si K(P) $\neq$ {}.
  - K(P) = P si P est convexe

  - K(p) peut être calculé en O(n)



Notions de base en Géométrie

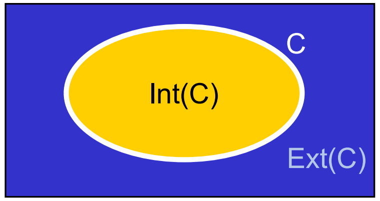
- Polygone / Polygone de visibilité
  - Le **polygone de visibilité de q dans P** est l'ensemble des points de P visibles depuis q.



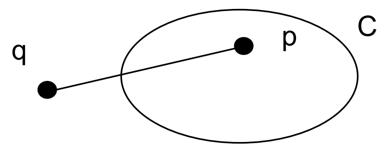
Notions de base en Géométrie

Théorème de Jordan

- Soit C, une courbe simple connexe et fermée du plan. Alors, C détermine une subdivision unique du plan en trois régions distinctes:
  - L'intérieur de C
  - C
  - L'extérieur de C

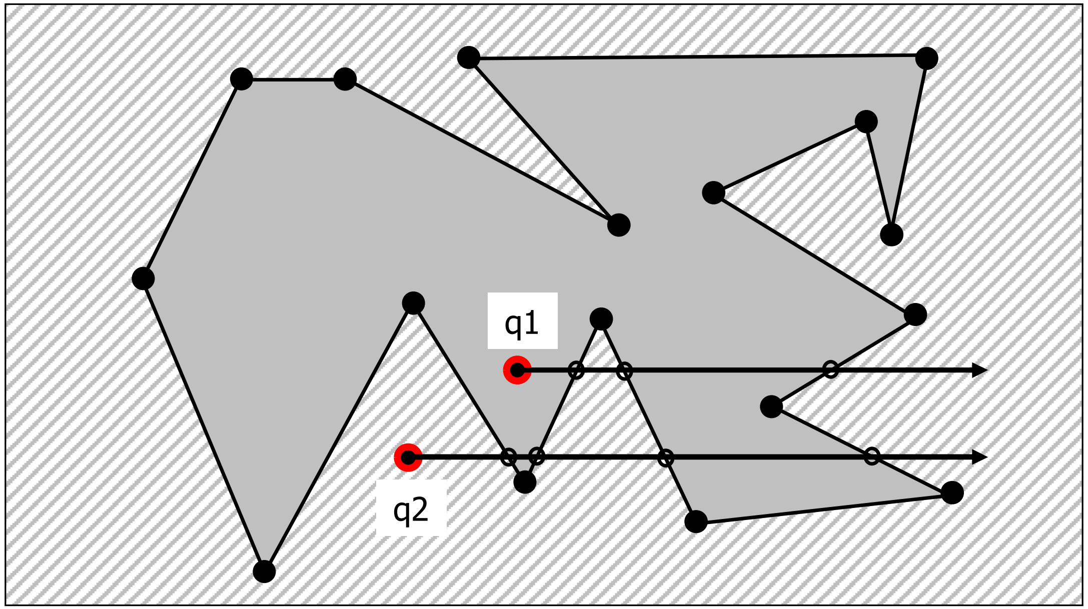


- De plus, si p et q sont deux points du plan respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de C, alors le segment [p, q] a une intersection non vide avec C.



Notions de base en Géométrie

- Application du théorème de Jordan : Position d'un point par rapport à un polygone



- Position d'un point q par rapport à un polygone P

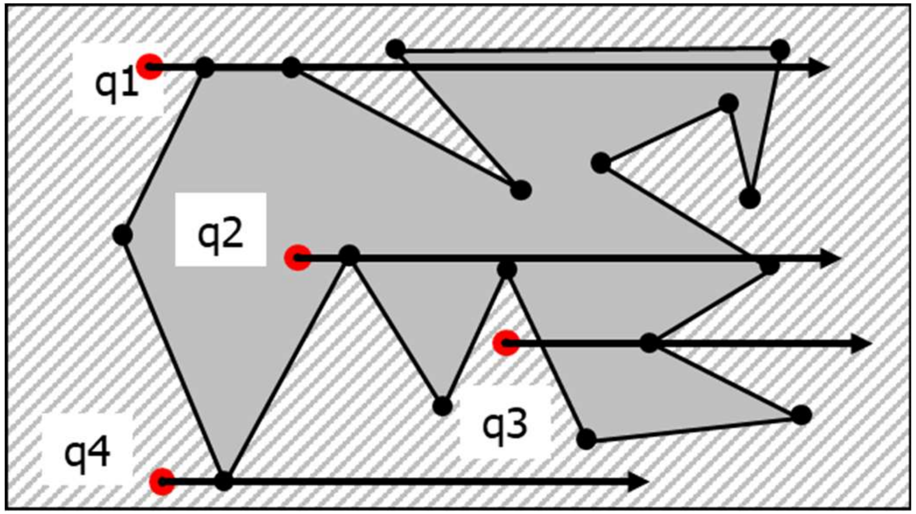
=> Calculer le nombre d'intersections N entre P et la demi-droite horizontale passant par q.

  - Si N est impair, q est à l'intérieur de P, si N est pair, q est à l'extérieur de P

- Complexité de l'algorithme ?

Notions de base en Géométrie

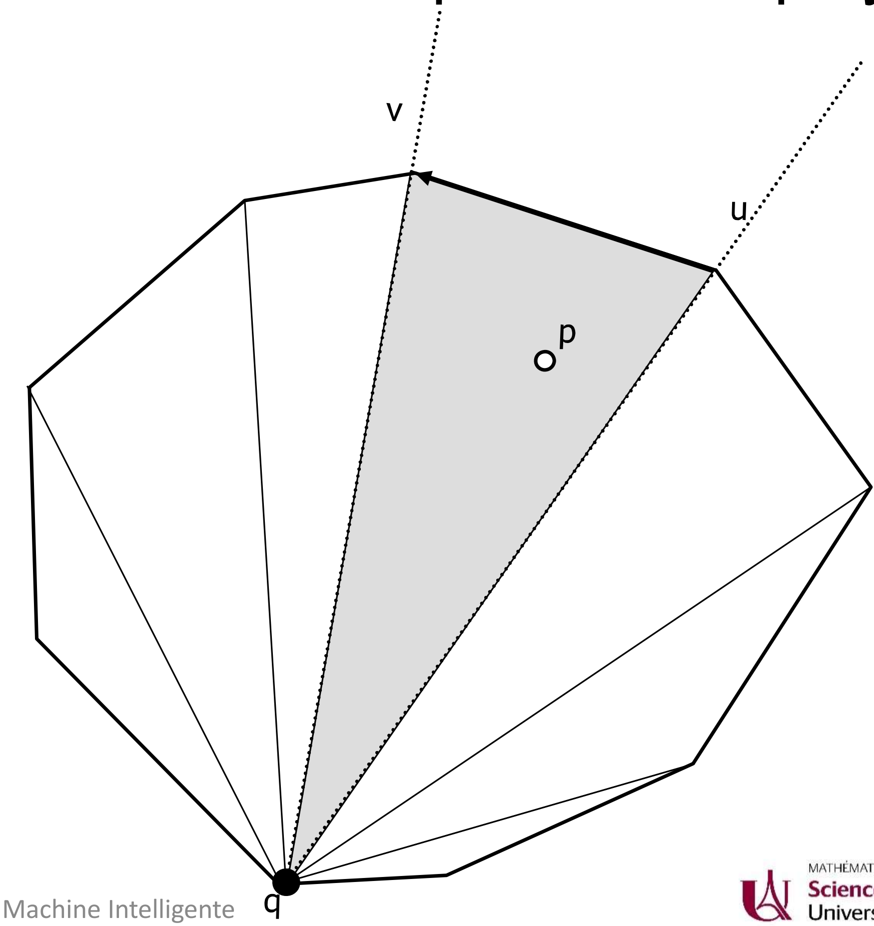
- Application du théorème de Jordan : Position d'un point par rapport à un polygone



- Cas particuliers: alignements demi-droite/segments, passage par un sommet
- Est-il nécessaire de calculer effectivement les intersections ?
- Quelle peut être la complexité pour:
  - Un polygone convexe ?
  - Un polygone étoilé ?

Notions de base en Géométrie

- Application du théorème de Jordan : Position d'un point / à un polygone
  - Cas d'un polygone convexe
    - Si P est convexe, il est donc étoilé par rapport à n'importe quel point q de la frontière de P.
    - On a donc un tableau ordonné d'angles polaires (par définition)
    - On peut donc faire une recherche dichotomique pour trouver les 2 sommets u et v dont les angles polaires sont respectivement inférieurs et supérieurs à l'angle polaire du segment pq (~ log N)
    - Il suffit ensuite de savoir si p est à droite ou à gauche de [u, v]. ~ constant
    - L'algorithme est donc en O(log N)



Notions de base en Géométrie

- Application du théorème de Jordan : Position d'un point / à un polygone
  - Cas d'un polygone étoilé
    - Une fois le kernel calculé (O(N)), l'algorithme est donc aussi en O(log N)