Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Caroline VENTURA

**M1 Informatique**

# Probabilités

## Chapitre 1: Espace de probabilité

**Exercice 1.** Soient $A$, $B$, $C$ trois événements. Exprimer en fonction de $A$, $B$, $C$ et des opérations ensemblistes $\cup$, $\cap$ et $A^c$ (le complémentaire de $A$) les événements ci-dessous:
a) $A$ seul se produit.
b) $A$ et $C$ se produisent mais pas $B$.
c) Un événement au moins se produit.
d) Au plus un événement se produit.
e) Deux événements au moins se produisent.
f) Deux événements au plus se produisent.
g) Aucun événement ne se produit.
h) Deux événements exactement se produisent.
i) Trois événements se produisent.
j) Un événement exactement se produit.

**Exercice 2.** Soient $E$, $F$, $G$ trois événements et $A = (E \cup F) \cap G$ et $B = E \cup (F \cap G)$.
a) Parmi les deux événements $A$ et $B$, l'un entraîne l'autre, lequel?
b) Trouver la condition nécessaire et suffisante sur $E$, $F$ et $G$ assurant $A = B$.

**Exercice 3. (Formule de Poincaré)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soient $A$, $B$ et $C$ trois événements de $\mathcal{A}$.
a) Identifier la partition de $\Omega$ en huit événements obtenus à partir de $A$, $B$, $C$ et de leurs complémentaires.
b) Ecrire la formule de Poincaré pour trois événements $A$, $B$ et $C$ :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

c) *Application:* Trois couples $(H_1, F_1)$, $(H_2, F_2)$ et $(H_3, F_3)$ se réunissent pour danser. Les couples de danseurs $(H, F)$ se forment au hasard. Quelle est la probabilité pour que:
i) au moins "un vrai couple" se forme.
ii) exactement "un vrai couple" se forme.
d) Ecrire la formule de Poincaré pour quatre événements $A$, $B$, $C$ et $D$.

**Exercice 4. (Problème de la coïncidence d'anniversaires)**
a) Une urne contient $M$ jetons numérotés de 1 à $M$. On tire successivement $n$ jetons en remettant chaque fois le jeton tiré dans l'urne et en remuant bien.
Quelle est la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois? (Commencer par décrire l'espace $\Omega$ des épreuves, puis l'événement considéré).
b) $n$ étudiants sont réunis dans un amphi. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour de l'année (aucun n'est né un 29 février)? Calculer cette probabilité pour $n = 27$.

**Exercice 5.** Soit $(\Omega, \mathcal{A},\ P)$ un espace de probabilité. On définit sur $\mathcal{A}$ la relation $\sim$ par $A \sim B$ si et seulement si $P(A \triangle B) = 0$ où $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ est la différence symétrique entre $A$ et $B$. Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

**Exercice 6. (Limite sup, limite inf d'une suite d'événements)**
Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega,\ \mathcal{A})$, on définit:
$E = lim\ sup\ A_n = \cap_{n \geq 0} \{\cup_{k \geq n} A_k\} = lim \downarrow B_n$ où $B_n = \cup_{k \geq n} A_k$,
$F = lim\ inf\ A_n = \cup_{n \geq 0} \{\cap_{k \geq n} A_k\} = lim \uparrow C_n$ où $C_n = \cap_{k \geq n} A_k$.
Identifier $E$ et $F$ à partir de $A$ et $B$ dans chacun des cas suivants:
a) $A_n = A$ si $n$ est pair, $A_n = B$ si $n$ est impair.
b) $A_n = A$ un nombre fini de fois.
c) $A_n = A$ une infinité de fois et $A_n = B$ une infinité de fois.

**Exercice 7. (Une marche aléatoire)**
On joue $N$ fois à pile ou face avec une pièce. Le résultat $X_i$ du i-ième lancer est noté $X_i = 1$ si pile et $X_i = -1$ si face. Pour $k = 1,\ 2,\ ...,\ N$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.
a) Décrire l'espace $\Omega_N$ de tous les résultats possibles des $N$ lancers.
Quel est le cardinal de $\Omega_N$?
b) Une épreuve $w$ de $\Omega_N$ peut être représentée dans le plan par la trajectoire $M(w) = \{(0,0), (k, S_k),\ k = 1, 2, ..., N\}$.
Représenter la trajectoire des réalisations suivantes de $\Omega_6$ :
i) N'obtenir que des piles.
ii) Obtenir alternativement pile puis face.
iii) $(1, 1, -1, 1, -1, 1)$.
c) Dessiner toutes les trajectoires de $\Omega_4$ réalisant $\{S_4 = 0\}$.
d) i) Décrire les événements $A_6 = \{S_6 = 0\}$ et $B_6 = \{S_6 = 2\}$.
ii) On munit $\Omega_6$ de la probabilité uniforme. Calculer $P(A_6)$ et $P(B_6)$.
e) i) Décrire $A_{2n} = \{S_{2n} = 0\}$.
ii) On munit $\Omega_{2n}$ de la probabilité uniforme. Calculer $P(A_{2n})$.

# Chapitre 2: Probabilité conditionnelle, indépendance

**Exercice 8.** On lance 3 dés non pipés et on considère les événements:
A: "Obtenir au moins un 6", B:"Deux faces au moins portent le même chifre" et C:"La somme des points marqués est paire".
a) Calucler la probabilité des trois événements.
b) Montrer que B et C sont indépendants.

**Exercice 9.** On suppose qu'à la naissance, il y a équiprobabilité des deux sexes.
a) Un père de famille déclare avoir deux enfants. Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons sachant que:
i) l'un au moins est un garçon.
ii) l'aîné est un garçon.
b) On choisit au hasard un enfant dans une famille de deux enfants. Sachant que l'enfant choisi est un garçon, quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons?

**Exercice 10.** Une commode comporte 4 tiroirs. Une lettre $a$ la probabilité $p$ de se retrouver dans la commande avec equiprobabilité d'être dans chacun des tiroirs si elle s'y trouve.
a) On note $A_i$ : "La lettre est dans le i-ème tiroir" avec $i = 1, 2, 3, 4$.
Calculer $P(A_i)$.
b) On ouvre 3 tiroirs et on constate que la lettre ne s'y trouve pas. Quelle est la probabilité $f(p)$ qu'elle se trouve dans le dernier tiroir? Tracer la courbe représentative de la fonction $f : \ p \in [0, 1] \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$. Justifier directement les valeurs trouvées pour $p = 0$ et $p = 1$.

**Exercice 11.** Dans une population, la probabilité $p_k$ qu'une famille ait $k$ enfants est: $p_0 = p_1 = a$ et $p_k = (1 - 2a)2^{-(k-1)}$ si $k \geq 2$ avec $0 < a < \frac{1}{2}$.
a) Vérifier que $\{p_k, \ k \geq 0\}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.
On définit l'événement $E_n$ (respectivement $G_n$) par "la famille a $n$ enfants" (respectivement "la famille a $n$ garçons").
Il y a équiprobabilité des deux sexes à la naissance.
b) Quelle est la probabilité pour qu'une famille de $n$ enfants ait 2 garçons?
c) En déduire $P(G_2)$ puis $P(E_2|G_2)$.

**Exercice 12.** a) Démontrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements indépendants tendant vers $A$ (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ A_n \subset A_{n+1}$ et
$A = lim \uparrow A_n = \cup_{n\geq 0} A_n$) alors $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
b) Quel est le résultat si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante?

# Chapitre 3: Variables aléatoires réelles

**Exercice 13.** Soit $X$ une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est donnée par:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $a$ | $\frac{1}{4}$ | $b$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ |

On suppose que la distribution est symétrique par rapport à l'origine et que la variance $V(X)$ est égale à 1.
Déterminer et tracer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 14.** Soit $X_1$ une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Soit $X_2$ une variable aléatoire indépendante de $X_1$ qui prend la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, la valeur 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la valeur 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Soit $X_3$ une variable aléatoire déterminée à partir de $X_1$ et $X_2$ de la façon suivante:
- elle prend la valeur 0 si $X_1$ ou $X_2$ ou les deux sont égales à 0.
- elle prend la valeur 1 si $X_1$ et $X_2$ sont égales à 1.
- elle prend la valeur 2 sinon.
Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de $X_3$.

**Exercice 15.** On jette un dé "tétraédrique" équilibré. Sur les quatre faces sont écrits les nombres 1, 3, 4 et 12. Soit $S$ la somme des trois nombres visibles.
1) On lance le dé une fois. Quelle est la probabilité que $S$ soit supérieure ou égale à 16?
2) Soit $k$ et $n$ deux entiers vérifiant $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On effectue $n$ lancers du dé. Quelle est la probabilité $p_k$ d'avoir exactement $k$ lancers tels que $S \geq 16$? Calculer le plus petit $n$ pour que $p_0 < 10^{-2}$.

**Exercice 16.** Dans un lot de 10 pièces, 2 sont défectueuses. On choisit au hasard 2 pièces (tirage exhaustif) et on pose $X =$ nombre de pièces non défectueuses.
1) Donner la loi de probabilité de $X$ ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ dans le cas d'un tirage avec remise.

**Exercice 17.** Lorsqu'un vendeur d'encyclopédies à domicile se présente chez un acheteur éventuel, il a une probabilité $p$ de réussir une vente. On suppose qu'il ne fait qu'une seule visite par client. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de visites nécessaires à la vente de $n$ encyclopédies.
1) Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire $X$.
2) Calculer $E(X)$.

**Exercice 18.** On considère une variable aléatoire $X$ absolument continue sur $\mathbb{R}$ dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ax & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

avec $f_X$ fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $a$, $\alpha$ et $\beta$.
2) Tracer la fonction de répartition $F_X(x)$.
3) Calculer $E(X)$ et $\sigma_X$.

**Exercice 19.** Soit $X$ une variable aléatoire positive et absolument continue.
1) Déterminer $K$ pour que $f_X(x) = Kx^n e^{-x} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ soit la densité de $X$ sur $\mathbb{R}^+$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 20.** Soit la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ ax(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

1) A quelles conditions $f$ est-elle une densité de probabilité?
2) Déterminer et représenter la fonction de répartition $F$ correspondant à la variable aléatoire $X$ de densité $f$ ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.
3) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = -2X + 3$.
4) Si cela est possible, déterminer la densité de $Y$.

**Exercice 21.** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires de densité de probabilité:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\ x\ cos(y) & \text{dans } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\} \\ 0 & \text{dans } D^c \end{cases}$$

1) Calculer la constante $k$.
2) Quelle est la densité de la loi marginale de $X$? Calculer $E(X)$.
3) Quelle est la densité de la loi marginale de $Y$? Calculer $E(Y)$.
4) Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?
5) Quelle est la loi conditionnelle de $X$ liée par $\{Y = y\}$? Calculer $E^{Y=y}(X)$ puis $E(\Phi(Y))$ où $\Phi(y) = E^{Y=y}(X)$.

# Chapitre 5: Généralisation de la notion d'espérance conditionnelle

**Exercice 22.** (Conditionnement par rapport à un événement) On lance un dé à 6 faces et on note par $X$ la valeur prise par ce dé. Soit $B$ l'événement "$X$ est supérieur ou égal à 3".
1) Calculer $E(X|B)$.
On lance désormais deux dés à 6 faces, on note par $X_1$ la valeur obtenue avec le premier dé et par $X_2$ celle obtenue avec le second dé. Soit $S$ la somme des deux valeurs obtenues. Considérons maintenant l'évenement $B := \{X_1 = 5\}$.
2) Calculer $E(S|B)$.
3) Plus généralement, calculer $E(S|X_1 = j) \ \ \forall j \in \{1, 2, ..., 6\}$.

**Exercice 23.** (Conditionnement par rapport à une variable aléatoire discrète) Soit $Y$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$ (c'est-à-dire telle que $P(Y = j) = \frac{1}{n} \ \forall j \in \{1, ..., n\}$, $Y(\Omega) = \{1, ..., n\}$, $E(Y) = \frac{n+1}{2}$ et $V(Y) = \frac{n^2-1}{12}$) et $Z$ une variable aléatoire indépendante de $Y$ telle que
$P(Z = 1) = p$ et $P(Z = -1) = 1 - p$.
On pose la variable aléatoire $X = Z.Y$ prenant ses valeurs dans $\{-n, ..., n\}$.
Calculer $E(X|Y)$.

**Exercice 24.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
1) Soient $X$, $Z$ deux variables aléatoires discrètes définies sur $\Omega$ avec
$X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_m\}$ et $Z(\Omega) = \{z_1, ..., z_n\}$ soient deux ensembles finis de $\mathbb{R}$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on note $h(z) = E(X|Z = z)$. Montrer que la variable aléatoire $h(Z)$ vérifie les conditions a') et b') de la remarque 5.6.1.5.
2) On suppose maintenant que $X$ et $Z$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ ayant une densité jointe $f_{(X,Z)}$. On note, $h(z) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Z}(x, z)dx$.
Montrer que la variable aléatoire $h(Z)$ vérifie les conditions a') et b') de la remarque 5.6.1.5.

**Exercice 25.** (Application des propriétés de l'espérance conditionnelle) On lance deux dés à 6 faces, on note par $X_1$ la valeur obtenue avec le premier dé et par $X_2$ celle obtenue avec le second dé. Soit $S$ la somme des deux valeurs obtenues.
1) Calculer $E(S|X_1)$.
2) On pose $R = \frac{X_2}{X_1}$. Calculer $E(R|X_1)$.
3) Reprendre l'exercice 23 et calculer $E(X|Y)$ en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle.

**Exercice 26.** Soit $X_n$ une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_n$-mesurable définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $U_{n+1}$ une autre variable aléatoire réelle indépendante de $\mathcal{F}_n$ définie sur le même espace probabilisé. Montrer que pour toute fonction intégrable $H$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $E(H(U_{n+1}, X)|\mathcal{F}_n) = h(X_n)$ où $h(x) := E(H(U_{n+1}, x))$.