Calcul différentiel et intégral dans l'espace

Marc-André Désautels

2018-09-28

Table des matières

Introduction

À propos de ce document

Remerciements

Ce document est généré par l'excellente extension bookdown de Yihui Xie.

License

FIGURE 1 – Licence Creative Commons

Chapitre 1

Les séries de Taylor

Vous trouverez à la section 1.4 une application GeoGebra vous permettant de visualiser les polynômes de Taylor et de Maclaurin d'une fonction de votre choix. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

1.1 Les polynômes de Taylor et de MacLaurin

De tous les types de fonctions, les fonctions polynomiales sont celles qui se dérivent et s'intègrent le plus facilement. De plus, si leur degré est inférieur ou égal à 5, des formules permettent de trouver facilement leurs zéros. Pour ces raisons, l'écriture d'une fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré n, $P_n(x)$, nous permet de l'étudier aisément. Cependant, en écrivant une fonction sous la forme d'un polynôme, nous obtenons une approximation.

L'approche de Taylor et de MacLaurin est couramment utilisée pour transformer une fonction en polynôme.

1.1.1 Les polynômes de MacLaurin

Pour savoir de quelle manière exprimer une fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme, nous étudierons un cas particulier des polynômes de Taylor, soit les polynômes de MacLaurin.

Définition 1.1 (Polynôme de Maclaurin)**.** Soit $f(x)$ une fonction dérivable au moins n fois. Le **polynôme de MacLaurin** de degré n, $P_n(x)$, de la fonction $f(x)$ est un polynôme satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f(0) &= P_n(0) \\ \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=0} &= \left.\frac{d^k P_n}{dx^k}\right|_{x=0}, \quad \text{pour } k \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les deux conditions suivantes permettent de construire le polynôme de MacLaurin pour une fonction $f(x)$ quelconque. Nous savons qu'un polynôme de degré n s'écrit de la façon suivante :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Pour trouver les coefficients a_k, nous devons obtenir les dérivées successives de $P_n(x)$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\
P_n^{(1)}(x) &= 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} \\
P_n^{(2)}(x) &= 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + ... + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2} \\
P_n^{(3)}(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + ... + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

et ainsi de suite.

Par définition, nous savons que $f(0) = P_n(0)$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
f(0) &= P_n(0) \\
f(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + ... + a_{n-1}(0)^{n-1} + a_n(0)^n \\
f(0) &= a_0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

De même, nous savons que $f^{(1)}(0) = P_n^{(1)}(0)$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= P_n^{(1)}(0) \\
f^{(1)}(0) &= 1a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + ... + (n-1)a_{n-1}(0)^{n-2} + na_n(0)^{n-1} \\
f^{(1)}(0) &= 1a_1 \\
\frac{f^{(1)}(0)}{1} &= a_1
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

De la même façon, nous savons que $f^{(2)}(0) = P_n^{(2)}(0)$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}(0) &= P_n^{(2)}(0) \\
f^{(2)}(0) &= 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(0) + \ldots + (n-1)(n-2)a_{n-1}(0)^{n-3} + n(n-1)a_n(0)^{n-2} \\
f^{(2)}(0) &= 2 \cdot 1a_2 \\
\frac{f^{(2)}(0)}{2 \cdot 1} &= a_2
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

D'une manière générale, nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(k)}(0) \\
&= \frac{f^{(k)}(0)}{k!}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Remarque (Factorielle). La factorielle d'un nombre entier k positif, notée $k!$, est égale à :

$$k! = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Et par définition $0! = 1$.

Nous obtenons donc une équation pour déterminer le polynôme de MacLaurin d'une fonction.

Définition 1.2 (Polynôme de MacLaurin)**.** Soit $f(x)$ une fonction dérivable au moins n fois en $x = 0$. Le **polynôme de MacLaurin** de degré n, $P_n(x)$, est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Exemple 1.1. Trouvez les polynômes de MacLaurin de degrés 1, 2 et 3 de $f(x) = e^x$.

Exemple 1.2. Trouvez les polynômes de MacLaurin de degrés 1, 2 et 3 de $f(x) = sin(x)$.

1.1.2 Les polynômes de Taylor

Les polynômes de Maclaurin utilisent l'évaluation des dérivées successives de la fonction $f(x)$ en $x = 0$. Il est par contre possible de généraliser ces polynômes en évaluant les dérivées successives de la fonction $f(x)$ en $x = a$, avec $a \in \text{dom} f$. C'est ce que nous appelons les polynômes de Taylor.

Définition 1.3 (Polynôme de Taylor)**.** Soit $f(x)$ une fonction dérivable au moins n fois en $x = a$. Le **polynôme de Taylor** de degré n, $P_n(x)$, est donné par :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Exemple 1.3. Trouvez le polynôme de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ de degré 4 autour de $x = 1$.

1.1.3 Le reste de Taylor-Lagrange

Les polynômes de Taylor sont des approximations d'une fonction, ce qui signifie qu'une erreur est commise. Le théorème suivant nous permet de quantifier l'erreur commise, c'est-à-dire $f(x) - P_n(x)$.

Théorème 1.1 (Le reste de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f(x)$ une fonction dérivable au moins $n+1$ fois sur l'intervalle $I = [a, x]$ (si $x > a$) ou $I = [x, a]$ (si $x < a$). L'erreur commise $E_n(x)$ par l'approximation de $f(x)$ par $P_n(x)$ est donnée par :*

$$|f(x) - P_n(x)| = |E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \right|$$

avec $\xi(x) \in I$.

Démonstration. La démonstration est plus avancée que le niveau de ce livre. □

Comme la valeur $\xi(x)$ est rarement connue, nous utiliserons plutôt une borne sur l'erreur :

$$\begin{aligned} |E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \\ |f(x) - P_n(x)| &\leq \left| \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|, \end{aligned}$$

où $M = \max_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Exemple 1.4. Déterminez $|E_n(x)|$ lorsque vous utilisez le polynôme de MacLaurin de degré 3 de $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0, 2]$. **Astuce** : supposez que $e < 3$.

Exemple 1.5. Lorsque nous demandons à la calculatrice d'évaluer le nombre e, elle nous le donne avec une précision de 10^{-8}, c'est-à-dire que l'erreur est inférieure à 10^{-8}. Quel devrait être le degré du polynôme de MacLaurin pour $f(x) = e^x$ nécessaire pour obtenir cette précision ? **Astuce** : supposez que $e < 3$.

Exemple 1.6. Répondez aux questions suivantes :

a) Approximez $f(x) = \sqrt[3]{x}$ par un polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 8$.
b) Estimez l'erreur faite lorsque $7 \leq x \leq 9$.

Exemple 1.7. Quelle est l'erreur maximale possible si on utilise l'approximation $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ lorsque $-0,3 \leq x \leq 0,3$? Utilisez l'approximation pour estimer $\sin(12°)$ avec six (6) décimales exactes.

1.2 Les séries de Taylor

Nous avons vu que l'approximation d'une fonction par un polynôme est meilleure lorsque le degré de ce polynôme est élevé. Dans cette section, nous verrons que lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini, nous obtenons une série de Taylor.

Définition 1.4 (Série de Taylor)**.** Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable en $x = a$. La série de Taylor de $f(x)$ autour de $x = a$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\end{aligned}$$

Dans le cas où $a = 0$, nous parlons également de série de MacLaurin.

Exemple 1.8. Déterminez la série de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Exemple 1.9. Déterminez la série de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exemple 1.10. Déterminez la série de MacLaurin de $f(x) = \ln(1+x)$.

Exemple 1.11. Déterminez la série de MacLaurin de $f(x) = (1+x)^k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Ces exemples nous amènent à nous demander si une fonction $f(x)$ est égale à sa série de Taylor, et si c'est le cas, pour quelles valeurs de x. Nous savons que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} (P_n(x) + E_n(x)) \quad \text{En prenant la limite de chaque côté} \\
f(x) &= \lim_{n\to\infty} (P_n(x)) + \lim_{n\to\infty} (E_n(x)) \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \lim_{n\to\infty} (E_n(x))
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, il faut que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$. Ce qui signifie que l'erreur tend vers zéro lorsque le degré du polynôme de Taylor tend vers l'infini.

De plus, il faut que la série converge, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nous donne une valeur finie. Puisque la limite dépend de x, il faudra trouver les valeurs de x qui font que la série converge. Ces valeurs forment l'**intervalle de convergence** de la série.

Théorème 1.2. *Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable en $x = a$. Si $\lim_{n\to\infty} E_n(x)$, alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

si x est dans l'intervalle de convergence.

Théorème 1.3 (Le critère généralisé de d'Alembert)**.** *Soit une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ et soit $L = \lim_{k\to\infty} \left| \dfrac{c_{k+1}}{c_k} \right|$.*

- *Si* $L < 1$, *alors la série converge.*
- *Si* $L > 1$, *alors la série diverge.*
- *Si* $L = 1$, *alors on ne peut rien conclure.*

Exemple 1.12. Déterminez l'intervalle de convergence de la série de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Exemple 1.13. Déterminez l'intervalle de convergence de la série de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exemple 1.14. Déterminez l'intervalle de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$.

Exemple 1.15. Déterminez l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}$.

Exemple 1.16. La fonction de Bessel d'ordre 0, $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ est solution de l'équation différentielle suivante $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = 0$ qui est utile lorsque nous étudions les modes de vibrations d'une membrane circulaire. Pour plus d'informations, Wikipedia : Vibrations of a circular membrane. Trouvez l'intervalle de convergence de $J_0(x)$.

1.2.1 L'obtention de séries de Taylor à partir de séries connues.

Il est souvent plus simple de trouver une série de Taylor, à partir d'une série de Taylor déjà connue. La proposition 1.1 contient la liste des séries de Taylor usuelles.

Proposition 1.1 (Une liste des séries de Taylor des fonctions usuelles)**.** *Voici une liste des séries de Taylor des fonctions usuelles.*

— $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
— $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$, *pour tout* $x \in]-1,\ 1]$
— $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$, *pour tout* $x \in]-1,\ 1[$
— $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}x^k$, *où* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
— $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!} x^k$, *où* $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in]-1,\ 1]$
— $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
— $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
— $Arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, *pour tout* $x \in [-1,\ 1]$

Pour obtenir des séries de Taylor, les opérations suivantes sont possibles :

— Changement de variables
— Addition et soustraction de séries de Taylor

— Multiplication de séries de Taylor
— Division de séries de Taylor
— Dérivation de séries de Taylor
— Intégration de séries de Taylor

1.2.1.1 Changement de variables

Exemple 1.17. Trouvez la série de Taylor de $f(x) = e^{-x^2}$.

1.2.1.2 Addition et soustraction

Exemple 1.18. Trouvez la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ en trouvant au préalable la série de MacLaurin de $e^x - 1 - x$.

Exemple 1.19. Montrez que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

1.2.1.3 Multiplication

Exemple 1.20. Trouvez les trois premiers termes de la série de Maclaurin de $e^x \sin(x)$.

1.2.1.4 Division

Exemple 1.21. Trouvez les trois premiers termes de la série de Maclaurin de $\tan(x)$.

1.2.1.5 Dérivation

Exemple 1.22. Trouvez la série de Maclaurin de $\dfrac{1}{1+x}$ en dérivant la série de Maclaurin de $\ln(1+x)$.

1.2.1.6 Intégration

Exemple 1.23. Trouvez la série de Maclaurin de $\mathrm{Arctan}(x)$ en intégrant la série de MacLaurin de $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$.

1.3 Applications

Exemple 1.24. À partir de la deuxième loi de Newton, nous pouvons montrer que l'angle θ que fait un pendule par rapport à la verticale en fonction du temps, suit l'équation différentielle $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ où g est la constante gravitationnelle et l la longueur du pendule. Malheureusement, il n'existe pas de solutions exactes pour cette équation différentielle. Par contre, il existe une méthode de résolution pour les équations différentielle de la forme $\dfrac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$. Écrivez l'équation du pendule sous la forme résoluble.

Exemple 1.25. Soit un disque uniformément chargé de rayon R. Le potentiel électrique ressenti au point P situé à une distance d sur une droite perpendiculaire au disque et passant par son centre est donné par $V = 2\pi k_e \sigma(\sqrt{d^2 + R^2} - d)$. La constante k_e représente la perméabilité du vide et la constante σ la charge surfacique. Montrez que si d est très grand par rapport à R alors le potentiel électrique est $V \approx \dfrac{\pi k_e \sigma R^2}{d}$.

Exemple 1.26. Soit deux charges équivalentes Q et $-Q$ se trouvant à une distance r l'une de l'autre.

Le champ électrique E ressenti au point P, qui est à une distance R de la charge Q et de $R+r$ de la charge $-Q$, est donné par $E = \dfrac{Q}{R^2} - \dfrac{Q}{(R+r)^2}$. Montrez que lorsque R est grand, le champ électrique est approximativement proportionnel à $\frac{1}{R^3}$.

Exemple 1.27. Soit un corps de masse m situé à une distance h de la surface de la Terre. La force gravitationnelle F agissant sur ce corps est donnée par $F = \dfrac{mgR^2}{(R+h)^2}$ où g est l'accélération gravitationnelle et R le rayon de la terre. Montrez que lorsque h est petit par rapport à R, la formule précédente devient $F \approx mg$.

Exemple 1.28. Les équations de Bessel sont données par $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ où $n \in \mathbb{N}$. Utilisez les séries de puissances pour trouver la solution de l'équation différentielle précédente lorsque $n = 0$.

Exemple 1.29. Soit $f(x) = x\cos(2x)$. Trouvez $f^{(99)}(0)$ et $f^{(100)}(0)$.

Exemple 1.30. Soit $f(x) = x^2 e^{-x}$. Trouvez $f^{(100)}(0)$.

Exemple 1.31. Soit $g(x) = x \ln(1 + (2x)^2)$. Trouvez $g^{(51)}(0)$.

1.4 GeoGebra

1.5 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.

Chapitre 2

Les équations différentielles ordinaires

Vous trouverez à la section 2.6 une application GeoGebra vous permettant de visualiser les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

2.1 Introduction

Les équations différentielles sont à la base de la modélisation de divers phénomènes physiques, statistiques, chimiques, biologiques ou économiques, par exemple. Nous n'étudierons pas en détail comment obtenir ces équations différentielles mais nous verrons comment résoudre trois types d'équations différentielles différents.

Nous étudierons les types suivants :

— Les équations différentielles à variables séparables
— Les équations différentielles linéaires
— Les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 2

Définition 2.1 (Équation différentielle ordinaire)**.** Une **équation différentielle ordinaire** est une équation de la forme :

$$F(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

où y est une fonction inconnue de t et les $y^{(k)}$ sont les dérivées k-ièmes de y.

Exemple 2.1. Voici quelques exemples d'équations différentielles :

— $\dfrac{dy}{dt} = 2ty$
— $(y^{(5)})^3 + 8ty^{(1)} + 12y = 1$
— $y'' + by' + ky = \sin(\omega x)$

Définition 2.2 (L'ordre d'une équation différentielle)**.** L'**ordre** d'une équation différentielle est l'entier représentant l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation différentielle.

Exemple 2.2. Voici quelques exemples d'ordre de diverses équations différentielles :

— $\dfrac{dy}{dt} = 2ty$, ordre de 1
— $(y^{(5)})^3 + 8ty^{(1)} + 12y = 1$, ordre de 5
— $y'' + by' + ky = \sin(\omega x)$, ordre de 2

Définition 2.3 (Solution d'une équation différentielle)**.** Une fonction (ou une équation) est une **solution d'une équation différentielle** si, en la remplaçant ainsi que ses dérivées dans l'équation différentielle, l'égalité est vérifiée.

Exemple 2.3. Vérifiez que $y(x) = e^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

Définition 2.4 (Solution générale ou famille de solutions d'une équation différentielle)**.** La **solution générale** ou **famille de solutions** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les fonctions qui sont des solutions de l'équation différentielle.
Exemple 2.4. Montrez que $y(t) = t^2 + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = 2t$.

Définition 2.5 (Condition initiale et solution particulière d'une équation différentielle)**.** Une **condition initiale** d'une équation différentielle est un point (x_0, y_0) par lequel passe la solution, où x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale est appelée **solution particulière** de l'équation différentielle.
Remarque. Lorsque qu'une équation différentielle est d'ordre n, nous aurons besoin de n conditions initiales pour trouver la solution particulière.

2.2 Les équations différentielles à variables séparables

Définition 2.6 (Équation différentielle à variables séparables)**.** Une **équation différentielle à variables séparables** est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $M(y)dy = N(x)dx$.

Pour trouver la solution d'une équation différentielle à variables séparables, il faut :

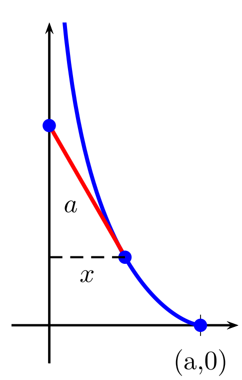
— Mettre l'équation sous la forme différentielle, c'est-à-dire placer les différentielles au **numérateur**.
— Séparer les variables pour en se basant sur les différentielles.
— Intégrer de chaque côté de l'égalité, c'est-à-dire $\int M(y)dy = \int N(x)dx$

Exemple 2.5. Résolvez l'équation différentielle suivante : $\cos(y)\frac{dy}{dt} = t^2$.

Remarque. Lorsque vous trouvez la solution d'une équation différentielle, il n'est pas toujours possible d'obtenir une équation explicite (c'est-à-dire une équation où la variable dépendante est isolée).
Exemple 2.6. Trouvez la solution de l'équation différentielle $x + yy' = 0$ passant par le point $(3, 0)$.

Exemple 2.7 (Modèle de Hill-Keller)**.** Le modèle de Hill-Keller permet de modéliser la course d'un coureur pour de courtes distances, par exemple le 100 m ou le 200 m. Si F est une constante qui correspond à la force du coureur et τ est une constante représentant les forces de frottement du coureur, l'équation du modèle est donnée par : $\dfrac{dv}{dt} = F - \dfrac{v}{\tau}$. Trouvez la vitesse d'un coureur en fonction du temps si au temps initial la vitesse du coureur est nulle.

Exemple 2.8 (La tractrice)**.** Vous avez une laisse rigide de longueur a. Vous vous trouvez au point $(0,0)$ et votre chien se trouve au point $(a,0)$. Vous vous dirigez dans la direction de l'axe des y positifs. L'équation différentielle qui permet de trouver le parcours de votre chien est $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Trouvez la solution de l'équation différentielle précédente.



Exemple 2.9. Trouvez les trajectoires orthogonales de la famille $x = ky^2$.

Exemple 2.10. Trouvez les trajectoires orthogonales de la famille $y = ke^x$.

Exemple 2.11. Soit un parachutiste qui tombe sous l'effet de la gravité avec une résistance de l'air proportionnelle à sa vitesse. L'équation différentielle de cette situation est : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{kv}{m} = g$ où m, g et k sont des constantes positives. Trouvez la solution de l'équation différentielle précédente.

Exemple 2.12. La loi de refroidissement de Newton dit que le taux de variation de la température T d'un objet est proportionnel à la différence entre la température de cet objet et la température ambiante (notée T_A). Trouvez l'équation différentielle décrivant le phénomène et trouvez T en fonction du temps.

2.3 Les équations différentielles linéaires

Définition 2.7 (Équation différentielle linéaire)**.** Une **équation différentielle linéaire** est de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des fonctions qui ne doivent dépendre que de la variable indépendante.
Exemple 2.13. Voici quelques exemples d'équations différentielles linéaires :

— $y' + t^2y = t^3$
— $x^3y' - x^4y = 1$ (Aprés division par x^2)
— $y' = y$

Pour être en mesure de résoudre ce type d'équations différentielles, nous devrons tout d'abord utiliser une astuce.

Posons $\mu(t)$ une fonction inconnue. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mu y] &= \mu\frac{dy}{dt} + y\frac{d\mu}{dt} \\
&= \mu\left(Q(t) - P(t)y\right) + y\frac{d\mu}{dt} && \text{car EDO linéaire} \\
&= \mu Q(t) - \mu P(t)y + y\frac{d\mu}{dt} \\
&= \mu Q(t) + y\left(\underbrace{\frac{d\mu}{dt} - \mu P(t)}_{\text{posons égal à 0}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mu y] &= \mu Q(t) \\
\mu y &= \int \mu Q(t)\ dt \\
y &= \frac{1}{\mu} \int \mu Q(t)\ dt
\end{aligned}$$

Pour pouvoir résoudre l'intégrale précédente, nous avons besoin de connaître μ et nous savons que :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dt} - \mu P(t) &= 0 \\
\frac{d\mu}{dt} &= \mu P(t) \\
\int \frac{1}{\mu} d\mu &= \int P(t) dt \\
\ln|\mu| &= \int P(t) dt \\
\mu &= e^{\int P(t) dt}
\end{aligned}$$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, il faut donc :

1. Trouver μ : $\mu = e^{\int P(t)dt}$
2. Trouver y : $y = \frac{1}{\mu} \int \mu Q(t)\ dt$

Exemple 2.14. Trouvez la solution générale de $y' + 3\frac{y}{t} = 1$.

Exemple 2.15. Trouvez la solution générale de $x^2y' + xy = 1$ où $x > 0$ et $y(1) = 2$.

Exemple 2.16. Trouvez la solution générale de $ty' + 2y = t^2 - t + 1$.

Exemple 2.17. Trouvez la solution générale de $\cos(x)y' + \sin(x)y = 2\cos(x)^3 \sin(x) - 1$.

Exemple 2.18. Résolvez l'équation différentielle du parachutiste, comme vu à l'exemple 2.11, en utilisant les équations différentielles linéaires. L'équation différentielle est donnée par : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{kv}{m} = g$.

2.3.1 Problèmes de mélange

Dans des problèmes de mélange, nous cherchons $Q(t)$ qui représente la quantité d'une substance en fonction du temps. L'équation différentielle de base de ce genre de problèmes est :

Taux de variation de $Q(t)$ = Taux d'entrée de $Q(t)$ - Taux de sortie de $Q(t)$

Exemple 2.19. Une cuve contient 10 L d'eau salée dans laquelle 2 kg de sel sont dissout. De l'eau salée contenant 1 kg de sel par litre entre dans la cuve à un débit constant de 3 L/min, et l'eau mélangée est vidée à un taux de 4 L/min. Trouvez la quantité de sel en fonction du temps $Q(t)$.

Exemple 2.20. Une cuve contient 40 L d'eau pure. De la saumure avec 3 kg de sel par litre entre dans la cuve à un débit constant de 2 L/min, et la mixture mélangée s'écoule à un débit constant de 3 L/min.

a) Trouvez la quantité de sel en fonction du temps $Q(t)$.
b) Quelle est la quantité de sel lorsqu'il reste 20 L dans la cuve ?

2.3.2 Inverser la dérivée

Pour obtenir une équation différentielle linéaire, il faut parfois étudier l'inverse de votre dérivée.

Plutôt que d'étudier $\dfrac{dy}{dx}$, nous pouvons étudier $\dfrac{dx}{dy}$.

Exemple 2.21. Trouvez la solution de l'équation différentielle $(e^y - 2xy)\dfrac{dy}{dx} = y^2$.

Exemple 2.22. Trouvez les familles de courbes orthogonales à $y^2 = ce^x + x + 1$ où $c \in \mathbb{R}$.

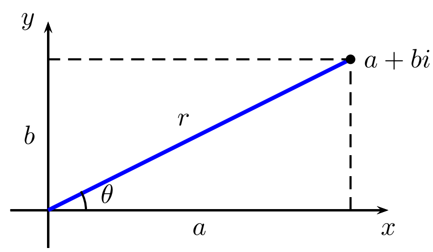


FIGURE 2.1 – Représentation d'un nombre complexe

2.4 Les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 2

2.4.1 Quelques rappels concernant les nombres complexes

Définition 2.8 (Nombre complexe)**.** Un nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et tel que $i^2 = -1$.

Nous disons que a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire de z.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Nous pouvons également écrire z sous une form dite polaire qui est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$.

La figure 2.1 permet de représenter un nombre complexe de façon géométrique.
Théorème 2.1 (L'identité d'Euler)**.** *Soit le nombre complexe écrit sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Alors ce nombre peut s'écrire de la manière suivante : $z = re^{i\theta}$.*

Démonstration. La démonstration est laissée à l'étudiante ou l'étudiant. **Astuce** : Il faut utiliser les séries de MacLaurin de e^x, $\sin(x)$ et $\cos(x)$. □

Corollaire 2.1. *Nous avons :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons le théorème 2.1. Nous avons :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{2.1}$$
$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si nous additions les équations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= 2\cos(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned}$$

Si nous faisons la différence entre les équations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= 2i\sin(\theta) \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

□

2.4.2 Les équations différentielles homogènes à coefficients constants d'ordre 2

Définition 2.9 (Équation différentielle homogène à coefficients constants d'ordre 2)**.** Une **équation différentielle homogène à coefficients constants d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.3}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

> Le terme *homogène* indique que le membre de droite de l'équation (2.3) est nul. Nous traiterons le cas à la section 2.4.3.

Avant de résoudre ce type d'équations différentielles, la prochaine proposition sera cruciale.
Proposition 2.1. *Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de l'équation (2.3), alors $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, est aussi une solution de l'équation (2.3).*

Démonstration. Nous avons que :

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \end{aligned}$$

car y_1 et y_2 sont des solutions de (2.3). Nous avons que :

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 \\ y' &= C_1y_1' + C_2y_2' \\ y'' &= C_1y_1'' + C_2y_2'' \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(C_1y_1'' + C_2y_2'') + b(C_1y_1' + C_2y_2') + c(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=\,0} + C_2\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=\,0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

> Une combinaison linéaire de solutions est aussi une solution.

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (2.3) en supposant que la solution est de la forme $y = e^{rx}$, où r est une constante qu'il nous reste à déterminer.

> Pour résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants, il faut toujours poser la solution $y = e^{rx}$.

Nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
y &= e^{rx} \\
y' &= re^{rx} \\
y'' &= r^2 e^{rx}
\end{aligned}
$$

Nous substituons ces résultats dans l'équation (2.3) :

$$
\begin{aligned}
a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy &= 0 \\
ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\
e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \\
ar^2 + br + c &= 0 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

L'équation (2.4) se nomme polynôme caractéristique de l'équation (2.3). Déterminer les valeurs de r revient à trouver les racines du polynôme caractéristique et donc :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous devrons étudier trois cas distincts qui dépendent du discriminant $b^2 - 4ac$.

2.4.2.1 Cas 1 : $b^2 - 4ac > 0$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique fournit deux valeurs de r **réelles**, que nous notons r_1 et r_2. Nous avons donc $y_1(x) = e^{r_1 x}$ qui est une solution de (2.3) et également $y_2 = e^{r_2 x}$. Par la proposition 2.1, nous obtenons la solution générale :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.23. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$ avec comme conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

2.4.2.2 Cas 2 : $b^2 - 4ac < 0$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique fournit deux valeurs de r **complexes**. Posons $\gamma = -\dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ce qui implique que $r_1 = \gamma + \omega i$ et $r_2 = \gamma - \omega i$. Nous avons donc deux solutions à l'équation (2.3), soit $y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\gamma + \omega i)x}$ et $y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\gamma - \omega i)x}$.

Puisque les solutions précédentes sont complexes, nous allons utiliser la proposition 2.1 et le corollaire 2.1 pour créer deux nouvelles solutions réelles :

$$
\begin{aligned}
y_3(x) &= \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} \\
&= \frac{e^{(\gamma+\omega i)x} + e^{(\gamma-\omega i)x}}{2} \\
&= e^{\gamma x}\left(\frac{e^{\omega i x} + e^{-\omega i x}}{2}\right) \\
&= e^{\gamma x}\cos(\omega x) \\
y_4(x) &= \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i} \\
&= \frac{e^{(\gamma+\omega i)x} - e^{(\gamma-\omega i)x}}{2i} \\
&= e^{\gamma x}\left(\frac{e^{\omega i x} - e^{-\omega i x}}{2i}\right) \\
&= e^{\gamma x}\sin(\omega x)
\end{aligned}
$$

D'où la solution générale de l'équation (2.3) est :

$$y(x) = e^{\gamma x}\left(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\right)$$

Exemple 2.24. Trouvez la solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = 0$ ayant comme conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

2.4.2.3 Cas 3 : $b^2 - 4ac = 0$

Dans ce cas, nous n'obtenons qu'une seule valeur de $r = -\dfrac{b}{2a}$. Puisque nous n'avons qu'une seule solution, nous devons en trouver une autre pour être en mesure de construire une combinaison linéaire. Nous allons démontrer que $y_2(x) = xe^{rx}$ est aussi une solution de l'équation différentielle (2.3).

Démonstration.

$$\begin{aligned} y_2 &= xe^{rx} \\ y_2' &= e^{rx} + rxe^{rx} \\ y_2'' &= re^{rx} + re^{rx} + r^2xe^{rx} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + c(xe^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(2ar + ar^2x + b + brx + cx) &= 0 \\ e^{rx}(\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0}x + \underbrace{(2ar + b)}_{=0}) &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

La solution générale est donc de la forme :

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Exemple 2.25. Trouvez la solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

Exemple 2.26. Trouvez les solutions des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 9y' + 20y = 0$
b) $2y'' - 4y' + 8y = 0$
c) $y'' + 6y' + 9 = 0$

2.4.3 Les équations différentielles non homogènes à coefficients constants d'ordre 2

Définition 2.10 (Équation différentielle non homogène à coefficients constants d'ordre 2)**.** Une **équation différentielle non homogène à coefficients constants d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=F(x) \tag{2.5}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. De plus $F(x)$ est une fonction qui ne dépend que de la variable indépendante.

Pour résoudre ce type d'équations différentielles, nous aurons besoin du théorème suivant :
Théorème 2.2. *Soit une équation différentielle de la forme :*

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=F(x)$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_p$$

où y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2.5), c'est-à-dire :

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

et y_p est une solution particulière de l'équation non homogène.

Démonstration. La démonstration est laissée à l'étudiante ou à l'étudiant. □

Nous verrons deux méthodes pour trouver y_p.

2.4.3.1 La méthode des coefficients indéterminés

Cette méthode consiste à étudier la nature de la fonction $F(x)$ et à supposer que y_p est de même nature. La table 2.1 montre la forme de la solution particulière y_p selon la nature de $F(x)$.

TABLE 2.1 : Les diverses formes de coefficients indéterminés.

Forme de $F(x)$	Forme de y_p
Polynôme de degré n	$y_p=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_x+a_0$
$F(x)$ possède un $\sin(\omega x)$ et/ou un $\cos(\omega x)$	$y_p=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$
$F(x)$ possède une exponentielle $e^{\alpha x}$	$y_p=A^{\alpha x}$

Exemple 2.27. Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $y''+y'-6y=3x^2$.

Exemple 2.28. Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = e^{4x} + \cos(3x)$.

Exemple 2.29. Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \cos(2t)$ avec les conditions intiales $y(0) = -\frac{1}{2}$ et $y'(0) = 4$.

2.4.3.2 La méthode de variation des paramètres (ou méthode de Lagrange)

La méthode de variation des paramètres est souvent plus longue à utiliser que la méthode des coefficients indéterminés, par contre, elle est valide pour tous les types de fonctions $F(x)$.

Nous débutons en trouvant les solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle homogène associée à l'équation :

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

Supposons que la solution est de la forme :

$$y(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$$

Afin d'alléger la notation, nous omettrons la dépendance en x. Nous cherchons donc μ_1 et μ_2. Avant de substituer dans l'équation différentielle, nous allons trouver les dérivées successives de y.

$$y' = \mu_1 y_1' + \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \mu_2 y_2'$$

Nous allons maintenant faire la supposition que $\mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 = 0$ et donc :

$$y' = \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2'$$

Trouvons maintenant la dérivée seconde :

$$y' = \mu_1' y_1' + \mu_1 y_1'' + \mu_2' y_2' + \mu_2 y_2''$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= F(x) \\ a(\mu_1' y_1' + \mu_1 y_1'' + \mu_2' y_2' + \mu_2 y_2'') + b(\mu_1 y_1' + \mu_2 y_2') + c(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= F(x) \\ \mu_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + \mu_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} + \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' &= F(x) \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' &= F(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer μ_1 et μ_2, nous avons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 &= 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' &= F(x) \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la méthode de Cramer pour résoudre ce système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 F(x)}{W(y_1, y_2)} \\ \mu_2' &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F(x)}{W(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

Définition 2.11 (Wronskien)**.** Nous appelons le **Wronskien** de deux fonctions y_1 et y_2, le résultat suivant :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Remarque. Le **Wronskien** n'est jamais égal à zéro lorsque nous résolvons une équation différentielle car y_1 et y_2 sont choisies pour être linéairement indépendantes.

Nous pouvons maintenant trouver nos deux fonctions μ_1 et μ_2 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\int \frac{y_2(x) F(x)}{W(y_1, y_2)} dx \\ \mu_2 &= \int \frac{y_1(x) F(x)}{W(y_1, y_2)} dx \end{aligned}$$

Exemple 2.30. Trouvez la solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y = \csc(x)$.

Exemple 2.31. Trouvez les solutions des équations différentielles suivantes en utilisant les deux méthodes :

— Méthode des coefficients indéterminés
— Méthode de variation des paramètres

a. $y'' - 2y' + y = 2x$
b. $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

2.5 Applications des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Nous discuterons en particulier de l'oscillateur harmonique forcé.
Exemple 2.32 (Oscillateur harmonique forcé)**.** Soit un ressort de constante k auquel nous attachons une masse M. Si le frottement est proportionnel à la vitesse de la masse et que celle-ci subit une force périodique, nous pouvons décrire le mouvement avec l'équation suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$$

Nous pouvons réécrire l'équation précédente en introduisant les variables $b = \dfrac{c}{2M}$ et $a = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$$

Ce changement nous simplifiera le travail.

a. Trouvez la solution homogène de l'équation différentielle.

b. Supposez que $b = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement. Trouvez la solution particulière dans le cas où $a \neq \omega$. (Vous étudiez dans ce cas la situation des **battements**). Pour en savoir plus sur le phénomène de battements.

c. Supposez que $b = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement. Trouvez la solution particulière dans le cas où $a = \omega$. (Vous étudiez dans ce cas la situation de **résonnance**) Pour voir en action le phénomène de résonnance, Tacoma Narrows Bridge .

2.6 GeoGebra

2.7 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.

Chapitre 3

Les coordonnées polaires

Vous trouverez à la section 3.6 une application GeoGebra vous permettant de visualiser des courbes en coordonnées polaires. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

3.1 Introduction

Les coordonnées polaires sont un autre système pour décrire un point P de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées cartésiennes associent à chaque point P un couple (x, y). Les coordonnées polaires consistent à décrire ce point P avec le couple (r, θ), où r est la longueur du segment de droite reliant l'origine au point P et θ est l'angle entre ce segment de droite et l'axe des x positifs. La figure 3.1 représente ce type de coordonnées.

Il est primordial de pouvoir convertir les coordonnées cartésiennes à des coordonnées polaires et vice-versa.

Proposition 3.1 (Coordonnées cartésiennes à coordonnées polaires)**.** *Soit un point P en coordonnées cartésiennes (x, y). La conversion en coordonnées polaires est :*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= Arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Proposition 3.2 (Coordonnées polaires à coordonnées cartésiennes)**.** *Soit un point P en coordonnées polaires (r, θ). La conversion en coordonnées cartésiennes est :*

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

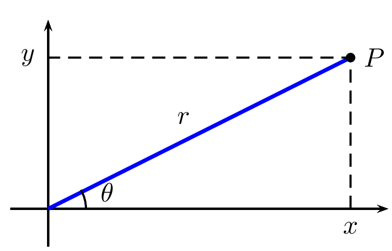


FIGURE 3.1 – Coordonnées polaires d'un point P

Remarque. Voici quelques remarques :

1. L'origine, c'est-à-dire le point $(0, 0)$ en coordonnées cartésiennes, que l'on appelle pôle, peut s'écrire $(0, \theta)$, et ce, pour toutes les valeurs de θ possibles. Ceci signifie qu'il n'existe pas de bijection [1] entre les coordonnées cartésiennes et polaires. Par contre, si on enlève l'origine, il en existe une.
2. Lorsque l'on fixe $\theta = \theta_0$, l'ensemble formé par (r, θ_0)est une demi-droite. En acceptant que r soit négatif, on obtient alors que (r, θ_0) forme une droite.
3. Si $r > 0$, alors $(-r, \theta_0) = (r, \theta_0 + \pi)$.

Exemple 3.1. Écrivez les points suivants en coordonnées polaires :

a. $P_1 = (1, 1)$
b. $P_2 = (-\sqrt{3}, 1)$
c. $P_3 = (0, -2)$

Exemple 3.2. Écrivez les points suivants en coordonnées cartésiennes :

a. $(2, \pi/3)$
b. $(3, 3\pi/4)$

1. Une bijection est une fonction f allant d'un ensemble A à un ensemble B, telle que pour tous les éléments de B, on associe une seule valeur de A.

Exemple 3.3. Écrivez l'équation de la perle de Sluze en coordonnées polaires, si $y^2 = x(8 - x)$.

3.2 Le graphique d'une équation polaire $r = f(\theta)$

Étudions maintenant comment représenter graphiquement des équations polaires de la forme $r = f(\theta)$. Nous généraliserons le tout pour des équations implicites de la forme $F(r, \theta) = 0$.
Exemple 3.4. Dessinez la courbe $r = K$ où K est une constante et $K > 0$.

Exemple 3.5. Dessinez la courbe $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Pour être en mesure de dessiner des relations en coordonnées polaires, nous aurons besoin d'une grille polaire.
Définition 3.1 (Grille polaire)**.** Une grille polaire est une grille où nous traçons les courbes telles que r est constant, c'est-à-dire des cercles centrés en $(0,0)$ et telles que θ est constante, c'est-à-dire les droites passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe des x.

Nous représentons habituellement les cercles de rayons 1 à 5 et les droites d'angles $\frac{\pi}{6}$ (30°), $\frac{\pi}{4}$ (45°) et $\frac{\pi}{3}$ (60°).

Une grille polaire est représentée à la figure 3.2.
Exemple 3.6. Dessinez $r = 1 = \sin(2\theta)$.

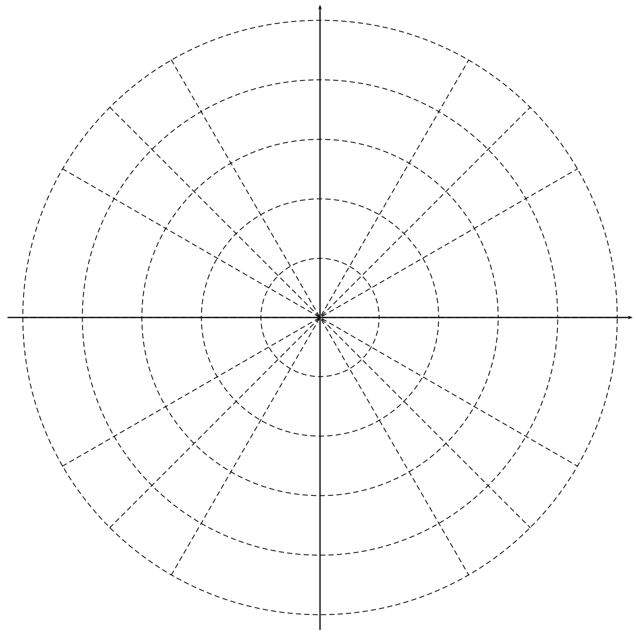
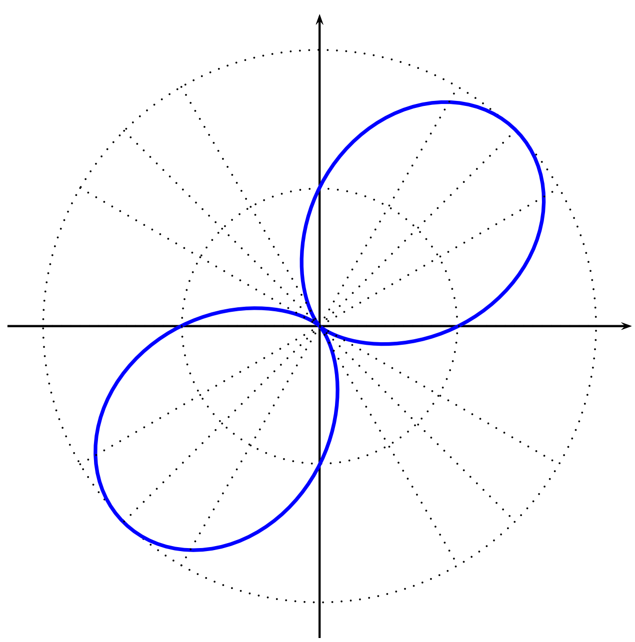
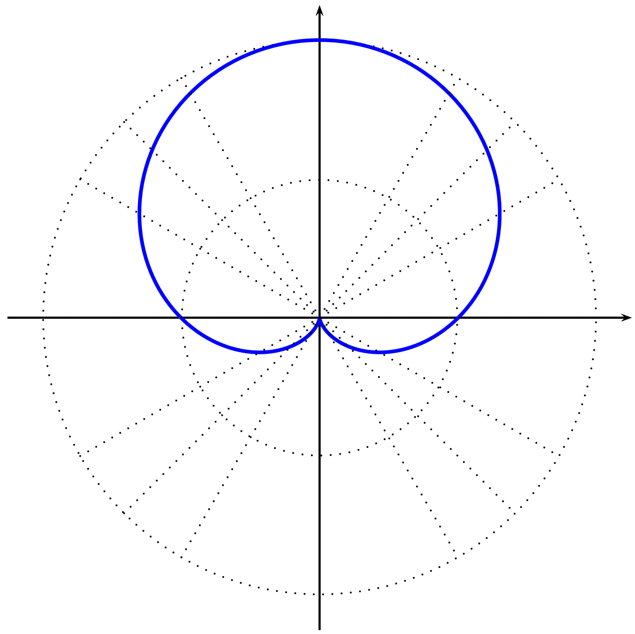


FIGURE 3.2 – Grille polaire



Exemple 3.7. Dessinez $r = 1 = \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.



3.3 Tangente à une courbe polaire

Nous voulons maintenant déterminer les tangentes à des courbes polaires. Nous savons que $x = r\cos(\theta)$ et que $y = r\sin(\theta)$. Si $r = f(\theta)$ alors nous avons que $x = x(\theta)$ et $y = y(\theta)$, c'est-à-dire que x et y sont des fonctions de θ.

Théorème 3.1 (Tangentes à une courbe polaire)**.** *Soit x et y deux fonctions de θ. Si $r = f(\theta)$, nous avons :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

Démonstration. Trouvons $\dfrac{dx}{d\theta}$ et $\dfrac{dy}{d\theta}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left[f(\theta)\cos(\theta)\right]] \\
&= f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta) \\
\frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left[f(\theta)\sin(\theta)\right]] \\
&= f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\
&= \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

□

Nous avons maintenant une formule pour déterminer la pente de la droite tangente.

Exemple 3.8. Trouvez l'équation de la droite tangente en $\theta = \frac{\pi}{2}$ de $r = 1 + \sin(2\theta)$.

Exemple 3.9. Soit l'équation $r = 2\cos(\theta)$.

a. Trouvez la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$.

b. Évaluez $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

c. Évaluez $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$.

Exemple 3.10. Trouvez la dérivée de la rose de Ghandi, $r = \cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$.

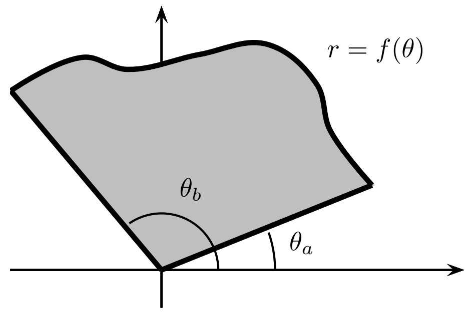


FIGURE 3.3 – Aire d'une courbe polaire

3.4 Aire d'une région

Nous voulons maintenant trouver une formule afin de calculer l'aire d'une région formée par une courbe définie par $r = f(\theta)$ avec $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$.

Rappelons que l'aire A d'un secteur de cercle de rayon r est donnée par $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$.

La figure 3.3 représente la surface que nous désirons trouver.

Divisons l'intervalle $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$ en N partitions de longueur $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, N$. L'ensemble

$$\{\theta_0 = \theta_a, \theta_1, ..., \theta_{N-1}, \theta_N = \theta_b\}$$

est appelée partition de $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$. L'aire de chacun de ces secteurs peut être approchée par :

$$A_i \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta_i, \quad \text{où } \theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$$

La figure 3.4 représente une partition.

Nous voulons trouver l'aire totale, c'est-à-dire la somme des surfaces des N secteurs :

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta_i$$

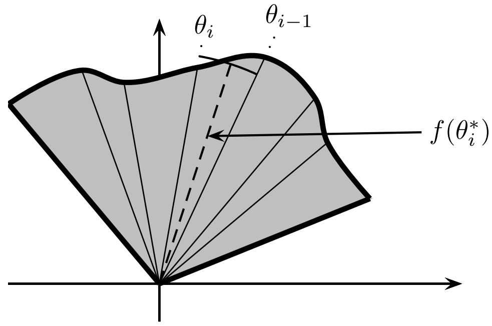


FIGURE 3.4 – Aire d'une courbe polaire : séparation en secteurs

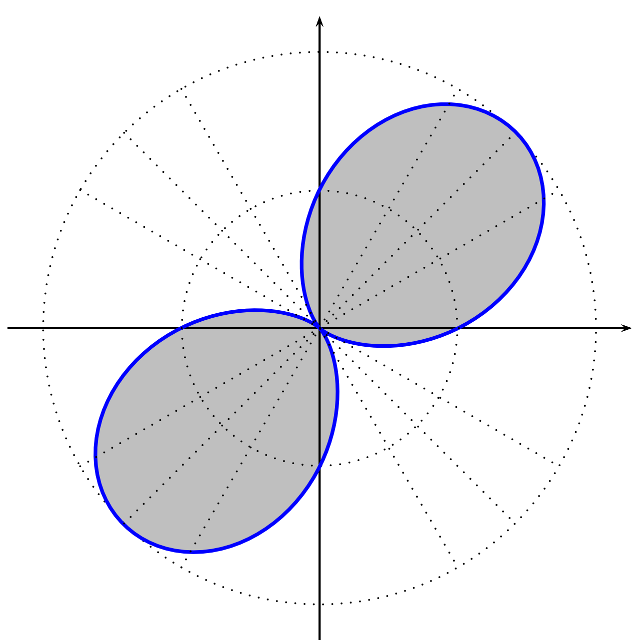
Nous remarquons que cette somme est une somme de Riemann. Ainsi, en prenant la limite lorsque N tend vers l'infini, nous obtenons :

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

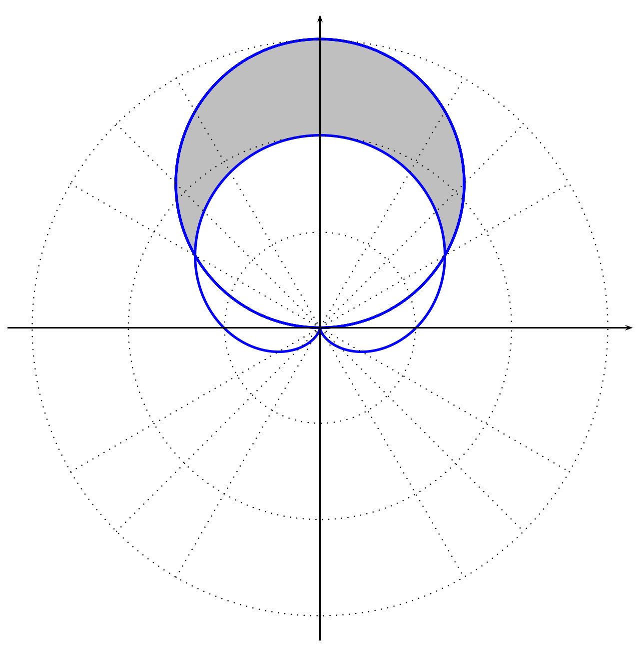
D'où, l'aire est donnée par :

$$A = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

Exemple 3.11. Calculez l'aire de la région formée par $r = 1 + \sin(2\theta)$.



Exemple 3.12. Calculez l'aire située au-dessus du cercle $r = 3\sin(\theta)$ et en dessous de la cardioïde $r = 1 + \sin(\theta)$.



Exemple 3.13. Calculez l'aire d'une seule feuille de $r = 1 + \sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

Exemple 3.14. Calculez l'aire du quadrifolium $r = \cos(2\theta)$ si un seul pétale se trouve dans l'intervalle $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.

3.5 Longueur d'une courbe

Théorème 3.2 (Longueur d'une courbe en coordonnées polaires)**.** *La longueur d'une courbe en coordonnées polaires définie par $r = f(\theta)$ où $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$ est donnée par :*

$$L = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

Démonstration. La démonstration suivante escamote plusieurs utilisations des sommes de Riemann pour simplifier.

Nous savons que :

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= \int_a^b \sqrt{(dx)^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \\
&= \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} d\theta\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} d\theta\right)^2} \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta
\end{aligned}$$

Nous savons par le théorème 3.1 ce que sont $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r\sin(\theta)\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin(\theta) + r\cos(\theta)\right)^2} d\theta \\
&= \dots \\
&= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 d\theta}
\end{aligned}$$

□

Voici quelques exemple de longueurs d'arc.

Exemple 3.15. Calculez la longueur d'arc de $r = e^{2\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemple 3.16. Calculez la longueur d'arc de $r = 2 - 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemple 3.17. Calculez la longueur d'arc de $r = ae^{-b\theta}$ avec $\theta \in [0, \infty[$ et $b > 0$.

Exemple 3.18. Calculez la longueur d'arc de $r = a(1 - \sin(\theta))$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

3.6 GeoGebra

Chapitre 4

Les fonctions de plusieurs variables

4.1 Introduction

Jusqu'à présent dans vos cours de calcul différentiel et intégral, nous n'avons étudié que les fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire des fonctions de la forme $y = f(x)$. Nous avons appris à dessiner ces fonctions, à les dériver, à les intégrer, etc. Par contre, il est utile d'étudier les fonctions de plus d'une variable car la plupart des phénomènes étudiés dépendent de plus d'un paramètre.

Dans ce chapitre, nous reprendrons les différents thèmes étudiés sur les fonctions d'une seule variable, pour les généraliser sur les fonctions de plusieurs variables.

4.2 Définitions

Débutons en rappelant le concept de fonction et en le généralisant aux fonctions de deux variables ou plus.

Définition 4.1 (Fonction)**.** Soit un ensemble A et un ensemble B. Une fonction f est une application qui pour chaque élément $x \in A$ lui associe un seul élément $y \in B$. On note cette fonction

$$\begin{aligned} f:\ & A \longrightarrow B \\ & x \longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

— L'ensemble A se nomme **domaine** de f, noté $\text{dom}(f)$.
— L'ensemble B est le **codomaine** de la fonction f, noté $\text{codom}(f)$.

Définition 4.2 (Image d'une fonction)**.** L'image d'une fonction est l'ensemble de tous les éléments du codomaine qui sont obtenus par la fonction f. Nous notons l'image $\text{ima}(f)$. En langage mathématique, l'image s'écrit comme suit :

$$\text{ima}(f) := \{y | y = f(x), \forall x \in dom(f)\}$$

Il est à remarquer que $\text{ima}(f) \subseteq \text{codom}(f)$.

La distinction entre l'image et le codomaine est représentée à la figure 4.1. Le codomaine est l'ensemble B tandis que l'image est l'ensemble de tous les éléments de B qui sont reliés à un ou plusieurs éléments de A par la fonction (ici l'image est la région ombragée).

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié les fonctions ayant comme domaine un sous-ensemble de la droite des réels. Dans ce cours, nous étudierons des fonctions ayant comme domaine un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}$. En langage mathématique, ces fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, .., x_n) & \longrightarrow z = f(x_1, .., x_n) \end{aligned}$$

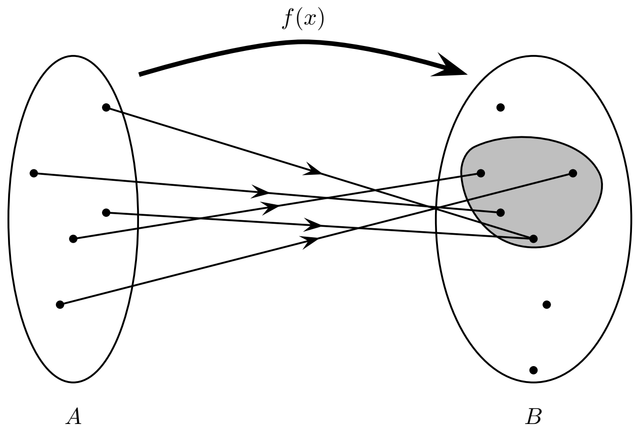


FIGURE 4.1 – Graphique saggital représentant une fonction.

où x_1, ..., x_n sont n variables indépendantes.

4.3 Graphique

Lorsque nous avons une fonction $y = f(x)$, son graphe correspond à une courbe dans le plan cartésien, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$. Pour parvenir à dessiner cette courbe, on fait correspondre une valeur de y pour chaque valeur de x.

Lorsque nous somme en présence d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, le graphique de cette fonction est une surface dans l'espace de trois dimensions, $\mathbb{R}^3$.

Par contre, lorsque notre fonction possède plus de deux variables, il devient difficile, voire impossible de la représenter graphiquement. Il faudrait utiliser des espaces de plus de trois dimensions.
Remarque. Dans le cadre de ce cours, nous nous en tiendrons à des fonctions de une, deux ou trois variables.

La figure 4.2 montre de quelle façon nous pouvons représenter le point (a,b,f(a,b)) dans l'espace à trois dimensions.

Nous allons maintenant présenter plusieurs fonctions accompagnées de leur graphique.

La figure 4.3 représente l'information topographique relative au volcan *Maunga Whau* situé en Nouvelle-Zélande.

Les figures suivantes représentent des fonctions usuelles.

4.4 Domaine

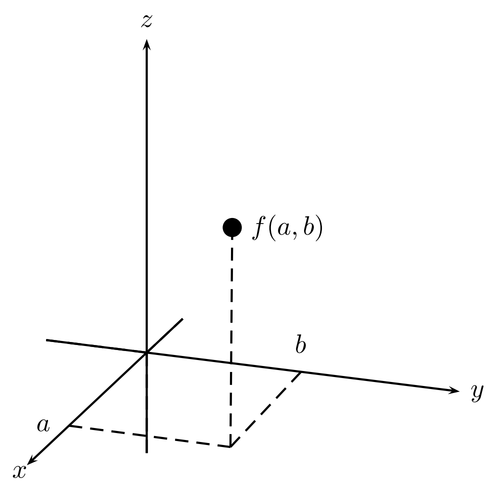


FIGURE 4.2 – Représentation en trois dimensions d'un point.

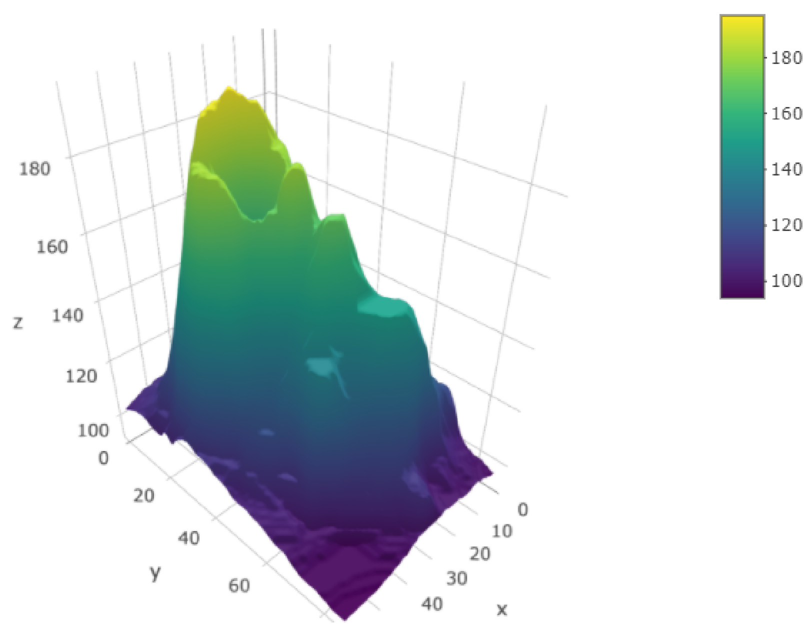


FIGURE 4.3 – Représentation en trois dimensions d'une fonction de deux variables.

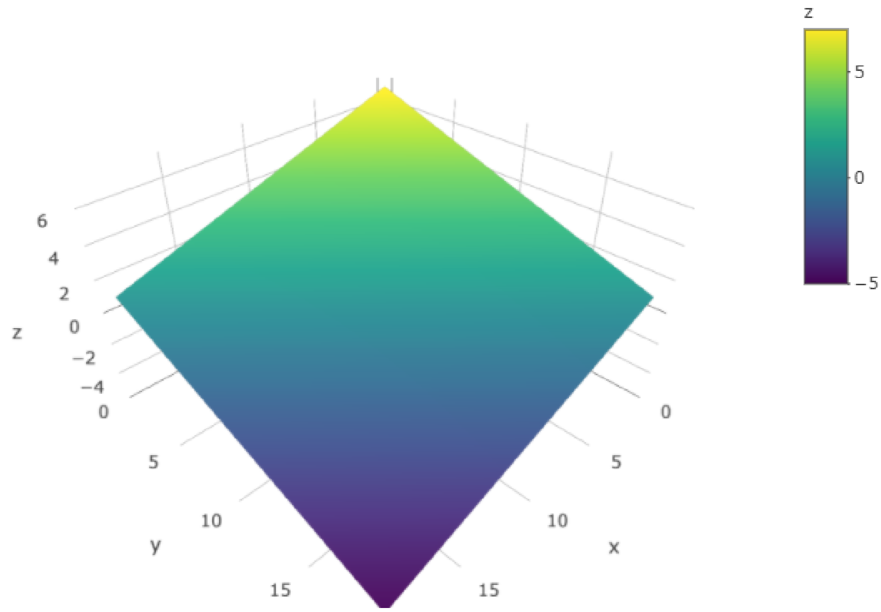


FIGURE 4.4 – Plan : $z = 1 - x - y$

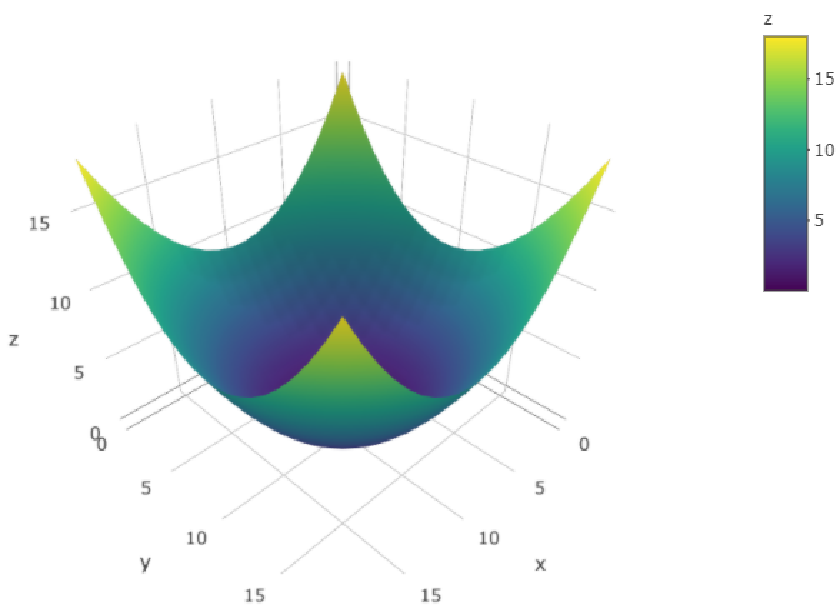


FIGURE 4.5 – Paraboloïde : $x = x^2 + y^2$

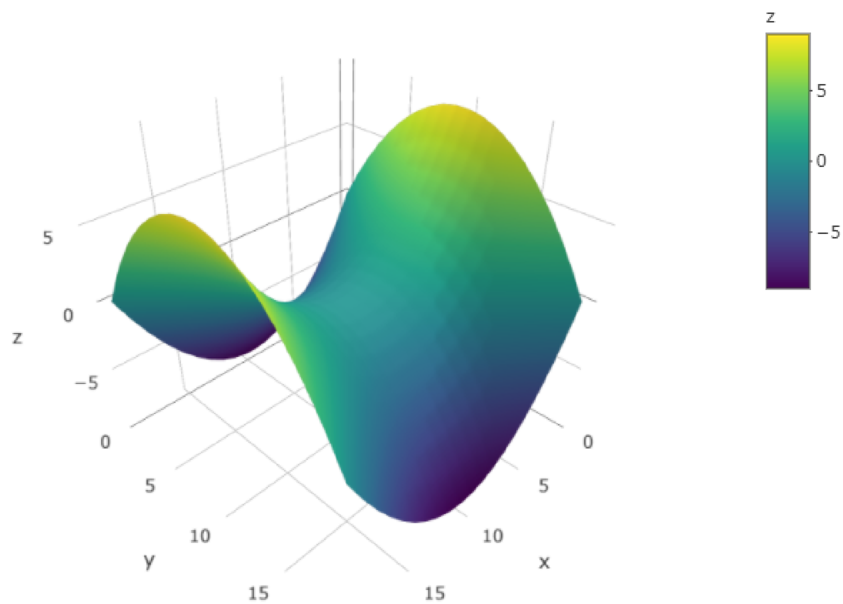


FIGURE 4.6 – Hyperboloïde : $z = x^2 - y^2$

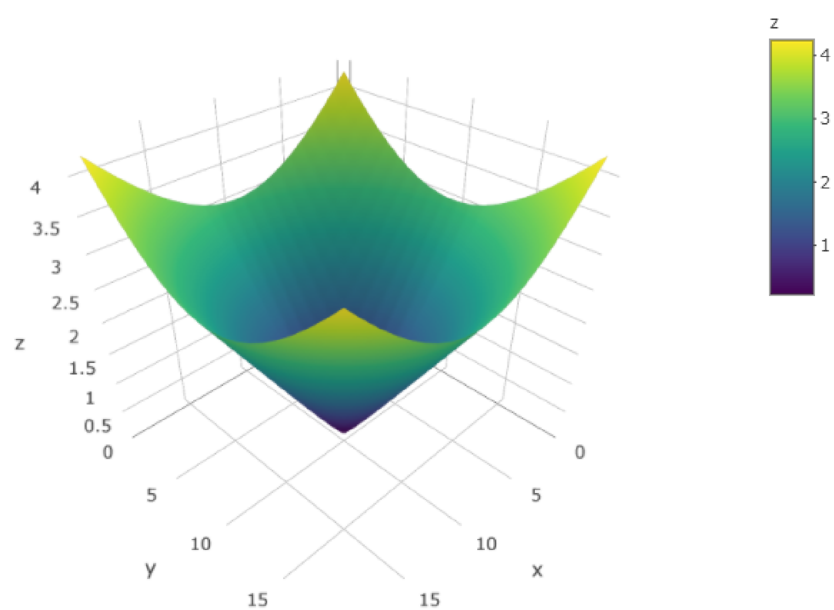


FIGURE 4.7 – Cône : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Chapitre 5

L'intégration de fonctions de plusieurs variables